

**RELACIÓN DE EQUIVALENCIAS GEOMÉTRICAS: UN ACERCAMIENTO A UNA
NOCIÓN DEL SIGNO IGUAL POR MEDIO DE UN DISEÑO CON LOS RECURSOS
DEL TANGRAM EN GEOGEBRA**

Daniela Díaz Olave

Jhan Carlos Muriel Calvo

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Zarzal, 2024

**RELACIÓN DE EQUIVALENCIAS GEOMÉTRICAS: UN ACERCAMIENTO A UNA
NOCIÓN DEL SIGNO IGUAL POR MEDIO DE UN DISEÑO CON LOS RECURSOS
DEL TANGRAM EN GEOGEBRA**

Daniela Díaz Olave

Jhan Carlos Muriel Calvo

Director

Mg. Marco Emilio Correa Repizo

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciados en Matemáticas

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Zarzal, 2024

(Dedicatoria o lema)

*Dedicamos este trabajo a Dios por la vida y a nuestras familias
y seres queridos que nos apoyaron en este proceso.*

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestra más profunda gratitud a todas aquellas personas y a la Institución Educativa Nuestra Señora de la Consolación, que nos brindaron su apoyo incondicional durante el proceso de desarrollo de nuestro trabajo de grado.

A nuestras familias, por su amor, paciencia y constante aliento, quienes estuvieron a nuestro lado en cada etapa de este recorrido, ofreciendo su apoyo emocional y logístico sin reservas.

A nuestros profesores, quienes con su dedicación y conocimiento nos guiaron y motivaron a lo largo de nuestra formación académica, su apoyo y orientación fueron fundamentales para la realización de este proyecto.

A nuestras parejas (Julián Enrique Polo Álvarez), por su comprensión y respaldo, por ser mi refugio en los momentos difíciles y celebrar conmigo cada logro alcanzado. También especialmente a una compañera incondicional (Lizbeth Solano García) por su apoyo constante en los momentos más difíciles.

A la universidad, por proporcionarnos el espacio y los recursos necesarios para nuestro desarrollo académico y profesional. Su compromiso con la excelencia educativa fue un pilar en nuestra formación.

Y especialmente, a nuestro querido Director de Trabajo de Grado, Marco Emilio Correa Repizo, por su valiosa dirección, sus consejos precisos y su constante apoyo, pues su orientación fue crucial para la culminación exitosa de este trabajo y su dedicación, una fuente de inspiración para nosotros.

A todos ustedes, nuestras sinceras gracias.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
Capítulo 1	1
1.1 Planteamiento del problema y contextualización	1
1.2 Justificación y antecedentes	8
1.3 Objetivos	19
1.3.1 Objetivo general	19
1.3.2 Objetivos específicos	19
Capítulo 2	20
2.1 Marco teórico	20
2.1.1 Dimensión curricular	21
2.1.1.1 Pensamiento espacial	22
2.1.1.2 Sistema geométrico	22
2.1.1.3 Geometría activa	23
2.1.1.4 Transformaciones	24
2.1.2 Dimensión Didáctica	25
2.1.2.1 Construcción geométrica del Tangram	26
2.1.2.2 Figuras convexas con el Tangram	28
2.1.2.3 Consideración del software de geometría dinámica GeoGebra como recurso didáctico	29
2.1.2.4 ¿Cómo se pueden poner las proposiciones en correspondencia con una figura o convertirse en una figura?	32
2.1.2.5 La Heurística de los Modelos Emergentes	33
2.1.2.6 Los niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes	34
2.1.2.7 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)	36
2.1.2.8 Orquestación Instrumental: Un modelo metafórico (OI)	37
2.1.2.9 Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica	38
2.1.3 Dimensión Conceptual: Caracterización de los objetos matemáticos	39
2.1.3.1 Noción del signo igual	40
2.1.3.2 Nociones de área y superficie	41
2.1.3.3 Propiedades de las áreas y superficies planas	41
Capítulo 3	45
3.1 Aspectos metodológicos y del diseño	45
3.1.1 Metodología de Implementación	48
3.2 Contextualización, Elementos de la implementación, Materiales y recursos, Población de estudio	52
3.2.1 Prueba Diagnóstica (Pretest)	53
3.2.1.1 Análisis A Priori	54
3.2.1.2 Conclusiones Iniciales para Estructurar el Diseño	57
3.3 Estructuración del Diseño (Trayectoria de Aprendizaje) y Estrategia de Análisis	59

Capítulo 4	66
4.1 Nivel situacional	66
4.1.1 Hallazgos del Nivel Situacional	68
4.1.2 Observaciones o reflexiones del primer nivel	86
4.1.2.1 Intervención 1	87
4.1.2.2 Análisis Parcial 1	88
4.1.2.2.1 Categoría 2 Características de área. Código: Relación del número de piezas - Composición y características de las figuras	89
4.1.2.2.2 Categoría 3 Equivalencias. Código: Conjetura sobre la cantidad de piezas	89
4.1.2.2.3 Categoría 5 Características del perímetro. Códigos: Comparación de tamaño - Silueta - forma	89
4.1.2.3 Intervención 2	90
4.1.2.4 Análisis parcial 2	91
4.1.2.4.1 Categoría 1. Intención de la planificación. Códigos: Finalidad de las actividades - Énfasis en el objetivo de las actividades	92
4.1.2.4.2 Categoría 2 Características de área. Código: Conservación de área y variación de perímetro	92
4.1.2.4.3 Categoría 4 Configuración de figuras. Código: Configuración de las figuras	92
4.1.2.4.4 Categoría 8 Casos particulares. Código: Apreciaciones del diseño	93
4.2 Nivel Referencial	94
4.2.1 Hallazgos del Nivel Referencial	101
4.2.2 Observaciones o reflexiones del segundo nivel	128
4.2.2.1 Intervención 3	128
4.2.2.2 Análisis Parcial 3	130
4.2.2.2.1 Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Finalidad de las actividades	130
4.2.2.2.2 Categoría 3 Equivalencias. Código: Conjetura sobre la cantidad de piezas	131
4.2.2.2.3 Categoría 4 Configuración de figuras. Código: Noción de los conceptos de área y perímetro	131
4.2.2.3 Intervención 4	132
4.2.2.4 Análisis parcial 4	133
4.2.2.4.1 Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Énfasis en el objetivo de las actividades	133
4.2.2.4.2 Categoría 3 Equivalencias. Código: Áreas equivalentes	133
4.2.2.4.3 Categoría 8 Casos particulares. Código: Aclaración de las actividades del Nivel Referencial	134
4.3 Nivel General	134
4.3.1 Hallazgos del Nivel General	140
4.3.2 Observaciones o reflexiones del tercer nivel	168
4.3.2.1 Intervención 5	168
4.3.2.2 Análisis parcial 5	170
4.3.2.2.1 Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Énfasis en el objetivo de las actividades	170

4.3.2.2.2 Categoría 2 Características de área. Código: Composición y características de las figuras	171
4.3.2.2.3 Categoría 8 Casos Particulares. Código: Apreciaciones del diseño por parte de los estudiantes	171
4.3.2.3 Intervención 6	172
4.3.2.4 Análisis parcial 6	173
4.3.2.4.1 Categoría 1. Intención de la planificación. Código: Finalidad de las actividades	174
4.3.2.4.2 Categoría 2 Características de área. Código: Conservación de área	174
4.3.2.4.3 Categoría 5 Características del perímetro. Código: Conjeturas sobre el perímetro	175
4.3.2.4.4 Categoría 7 Característica del polígono. Código: Clasificación de las figuras	175
4.3.2.4.5 Categoría 8. Casos particulares. Código: Importancia del rol del profesor en la implementación del diseño	175
4.4 Nivel Formal	176
4.4.1 Hallazgos del Nivel Formal	184
4.4.2 Observaciones o reflexiones del cuarto nivel	209
4.4.2.1 Intervención 7	209
4.4.2.2 Análisis parcial 7	211
4.4.2.3 Intervención 8	213
4.4.2.4 Análisis parcial 8	215
Conclusiones	218
Referencias Bibliográficas	220
Anexos	227

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Representación figural del signo igual.	3
Figura 2. Promedio del puntaje (2017-2022) de la prueba de matemáticas en calendario A.	4
Figura 3. Niveles de desempeño* (2022) en calendario A.	5
Figura 4. Ejemplo de transposición didáctica de los productos notables.	14
Figura 5. Construcción geométrica del Tangram.	27
Figura 6. Figuras convexas con el Tangram.	28
Figura 7. Modelo del proceso de mediación por un artefacto.	31
Figura 8. Propiedades sobre la conservación del área de una superficie.	42
Figura 9. Propiedad de la unidad con el Tangram.	43
Figura 10. Propiedad aditiva con el Tangram.	43
Figura 11. Propiedad de invarianza con el Tangram.	44
Figura 12. Propiedad de la disección con el Tangram.	44
Figura 13. Ciclos de enseñanza que componen la THA.	50
Figura 14. Primera construcción Tarea 1A Nivel Situacional.	69
Figura 15. Segunda construcción Tarea 1A Nivel Situacional.	70
Figura 16. Tercera construcción Tarea 1A Nivel Situacional.	70
Figura 17. Respuesta de estudiante E4 Tarea 1A.	71
Figura 18. Respuesta de estudiante E5 Tarea 1A.	71
Figura 19. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1A.	72
Figura 20. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1A.	73
Figura 21. Respuesta de estudiante E2 Tarea 1A.	73
Figura 22. Respuesta de estudiante E7 Tarea 1A.	74
Figura 23. Respuesta de estudiante E1 Tarea 1A.	75
Figura 24. Respuesta de estudiante E10 Tarea 1A.	75
Figura 25. Respuesta de estudiante E13 Tarea 1A.	76
Figura 26. Primera construcción Tarea 1B Nivel Situacional.	77
Figura 27. Segunda construcción Tarea 1B Nivel Situacional.	77
Figura 28. Tercera construcción Tarea 1B Nivel Situacional.	78
Figura 29. Respuesta de estudiante E5 Tarea 1B.	79
Figura 30. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1B.	80
Figura 31. Respuesta de estudiante E14 Tarea 1B.	80
Figura 32. Respuesta de estudiante E5 Tarea 1B.	82
Figura 33. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1B.	82
Figura 34. Respuesta de estudiante E14 Tarea 1B.	83
Figura 35. Respuesta de estudiante E1 Tarea 1B.	84
Figura 36. Respuesta de estudiante E2 Tarea 1B.	85

Figura 37. Respuesta de estudiante E1 Tarea 1B.	85
Figura 38. Primera construcción Tarea 2A Nivel Referencial.	102
Figura 39. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2A.	103
Figura 40. Respuesta de estudiante E8 Tarea 2A.	104
Figura 41. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2A.	104
Figura 42. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2A.	106
Figura 43. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2A.	106
Figura 44. Respuesta de estudiante E8 Tarea 2A.	107
Figura 45. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2A.	108
Figura 46. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2A.	108
Figura 47. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2A.	109
Figura 48. Primera construcción Tarea 2B Nivel Referencial.	110
Figura 49. Segunda construcción Tarea 2B Nivel Referencial.	111
Figura 50. Tercera construcción Tarea 2B Nivel Referencial.	111
Figura 51. Respuesta de estudiante E5 Tarea 2B.	113
Figura 52. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2B.	114
Figura 53. Respuesta de estudiante E14 Tarea 2B.	114
Figura 54. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2B.	115
Figura 55. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2B.	116
Figura 56. Respuesta de estudiante E11 Tarea 2B.	116
Figura 57. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2B.	118
Figura 58. Respuesta de estudiante E7 Tarea 2B.	118
Figura 59. Respuesta de estudiante E15 Tarea 2B.	118
Figura 60. Configuración Tarea 2C Nivel Referencial.	120
Figura 61. Configuración Tarea 2C Nivel Referencial.	121
Figura 62. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2C.	122
Figura 63. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2C.	123
Figura 64. Respuesta de estudiante E8 Tarea 2C.	123
Figura 65. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2C.	124
Figura 66. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2C.	125
Figura 67. Respuesta de estudiante E5 Tarea 2C.	125
Figura 68. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2C.	126
Figura 69. Respuesta de estudiante E7 Tarea 2C.	127
Figura 70. Respuesta de estudiante E13 Tarea 2C.	127
Figura 71. Configuración Tarea 3A Nivel General.	141
Figura 72. Respuesta de estudiante E1 Tarea 3A.	143
Figura 73. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3A.	143
Figura 74. Respuesta del estudiante E1 Tarea 3A.	144
Figura 75. Respuesta de estudiante E1 Tarea 3A.	145
Figura 76. Respuesta de estudiante E4 Tarea 3A.	145
Figura 77. Respuesta de estudiante E7 Tarea 3A.	146

Figura 78. Respuesta de estudiante E9 Tarea 3A.	147
Figura 79. Respuesta de estudiante E13 Tarea 3A.	148
Figura 80. Respuesta de estudiante E16 Tarea 3A.	148
Figura 81. Configuración del trapecio Tarea 3A Nivel General.	150
Figura 82. Configuración del trapecio Tarea 3A Nivel General.	150
Figura 83. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3B.	152
Figura 84. Respuesta de estudiante E3 Tarea 3B.	152
Figura 85. Respuesta de estudiante E12 Tarea 3B.	153
Figura 86. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3B.	155
Figura 87. Respuesta de estudiante E11 Tarea 3B.	155
Figura 88. Respuesta de estudiante E16 Tarea 3B.	155
Figura 89. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3B.	157
Figura 90. Respuesta de estudiante E10 Tarea 3B.	157
Figura 91. Respuesta de estudiante E13 Tarea 3B.	158
Figura 92. Configuración de paralelogramo Tarea 3C Nivel General.	160
Figura 93. Configuración de paralelogramo Tarea 3C Nivel General.	160
Figura 94. Respuesta de estudiante E4 Tarea 3C.	161
Figura 95. Respuesta de estudiante E4 Tarea 3C.	162
Figura 96. Respuesta de estudiante E12 Tarea 3C.	162
Figura 97. Respuesta de estudiante E1 Tarea 3C.	164
Figura 98. Respuesta de estudiante E9 Tarea 3C.	164
Figura 99. Respuesta de estudiante E14 Tarea 3C.	165
Figura 100. Respuesta de estudiante E10 Tarea 3C.	166
Figura 101. Respuesta de estudiante E11 Tarea 3C.	167
Figura 102. Respuesta de estudiante E14 Tarea 3C.	167
Figura 103. Áreas equivalentes Tarea 4A Nivel Formal.	185
Figura 104. Respuesta de estudiante E10 Tarea 4A.	186
Figura 105. Respuesta de estudiante E14 Tarea 4A.	186
Figura 106. Respuesta de estudiante E10 Tarea 4A.	187
Figura 107. Respuesta de estudiante E3 Tarea 4A.	188
Figura 108. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4A.	188
Figura 109. Respuesta de estudiante E16 Tarea 4A.	189
Figura 110. Respuesta de estudiante E1 Tarea 4A.	190
Figura 111. Respuesta de estudiante E2 Tarea 4A.	191
Figura 112. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4A.	191
Figura 113. Figuras convexas con el Tangram Tarea 4B Nivel Formal.	192
Figura 114. Respuesta de estudiante E11 Tarea 4B.	193
Figura 115. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4B.	194
Figura 116. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4B.	194
Figura 117. Respuesta de estudiante E3 Tarea 4B.	195
Figura 118. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4B.	196

Figura 119. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4B.	196
Figura 120. Respuesta de estudiante E2 Tarea 4B.	198
Figura 121. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4B.	199
Figura 122. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4B.	199
Figura 123. Demostración de área de polígonos Tarea 4A Nivel Formal.	201
Figura 124. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4C.	202
Figura 125. Respuesta de estudiante E1 Tarea 4C.	203
Figura 126. Respuesta de estudiante E16 Tarea 4C.	203
Figura 127. Respuesta de estudiante E2 Tarea 4C.	205
Figura 128. Respuesta de estudiante E11 Tarea 4C.	205
Figura 129. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4C.	206
Figura 130. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4C.	207
Figura 131. Respuesta de estudiante E10 Tarea 4C.	208
Figura 132. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4C.	208

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Descripción del Diseño e implementación	47
Tabla 2. Descripción del Diseño e implementación	55
Tabla 3. Tareas de aprendizaje y proceso hipotético de aprendizaje de la THA sobre equivalencias geométricas planas	61
Tabla 4. Planeación de la implementación del Diseño	63
Tabla 5. Relación categoría - código	86

RESUMEN

El presente trabajo de grado, aborda la problemática de la enseñanza del signo igual como equivalencia en el proceso de transición de la aritmética al álgebra, en estudiantes de octavo grado de una Institución Educativa oficial en Colombia. Este trabajo se basa en investigaciones previas realizadas por profesores-investigadores de la Universidad del Valle, que se encuentran en el campo de la Educación Matemática, además de otros autores, que han explorado la integración de recursos didácticos como GeoGebra y el Tangram. La justificación de este trabajo de grado se fundamenta en la necesidad de presentar una propuesta de enseñanza del signo igual, que a menudo se limita a un enfoque operativo sin apreciar su significado fundamental de equivalencia. Para afrontar esta problemática, se propone diseñar una secuencia de actividades que utiliza las figuras geométricas del Tangram en GeoGebra, aprovechando la dualidad tangible e intangible de la geometría. El diseño se alinea con la Heurística de los Modelos Emergentes, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) junto con los Lineamientos Curriculares de la Educación Colombiana. Se espera que esta propuesta, al combinar recursos didácticos, tecnologías educativas y enfoques pedagógicos respaldados por investigaciones, aporte positivamente a la enseñanza del signo igual al facilitar conexiones más significativas y conceptuales entre los estudiantes y las nociones matemáticas implícitas y explícitas que sustentan la propuesta de diseño.

Palabras clave: Geometría, GeoGebra, relación de equivalencia, signo igual, Tangram.

ABSTRACT

This undergraduate thesis addresses the issue of teaching the equal sign as equivalence in the transition process from arithmetic to algebra in eighth-grade students of a public educational institution in Colombia. This work is based on previous research conducted by teacher-researchers at the University of Valle, specializing in Mathematics Education, as well as other authors who have explored the integration of didactic resources such as GeoGebra and Tangram. The justification for the project is grounded in the need to present a teaching proposal for the equal sign, which often is limited to an operational approach without appreciating its fundamental meaning of equivalence. To address this issue, it is proposed to design a sequence of activities that utilize the geometric figures of Tangram in GeoGebra, taking advantage of the tangible and intangible duality of geometry. The design aligns with the Heuristic of Emergent Models, the Hypothetical Learning Trajectory (HLT), along with the Curricular Guidelines of Colombian Education. It is expected that this proposal, by combining didactic resources, educational technologies, and pedagogical approaches supported by research, will positively contribute to the teaching of the equal sign by facilitating more meaningful and conceptual connections between students and the implicit and explicit mathematical notions that underpin the design proposal.

Keywords: Geometry, GeoGebra, equivalence relation, equal sign, Tangram.

INTRODUCCIÓN

La educación matemática en Colombia según el Ministerio de Educación Nacional MEN busca no solo la enseñanza y el aprendizaje de cálculos, sino también el desarrollo de pensamientos y competencias, que permitan a los estudiantes entender y aplicar conceptos matemáticos en diversos contextos, promoviendo así la competencia matemática. Dentro de este marco, el presente trabajo de grado se centra en el desarrollo del pensamiento espacial, definido como “el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones mentales de los objetos del espacio y sus relaciones”. (MEN, 1998, p. 56).

Este trabajo de grado, el cual se encuentra inscrito en la línea de la Didáctica de las Matemáticas se enfoca en la enseñanza del signo igual como equivalencia en el grado octavo de la educación colombiana, utilizando recursos didácticos como el Tangram y GeoGebra.

La problemática radica en la interpretación limitada del signo igual por parte de los estudiantes, quienes a menudo lo ven solo como un operador algorítmico en lugar de un símbolo de equivalencia, lo cual puede obstaculizar su comprensión matemática, especialmente en la transición de la aritmética al álgebra (Kieran y Filloy Yagüe, 1989, p. 230).

Con el fin de abordar esta problemática, se propone un diseño de actividades mediado por GeoGebra que emplea el Tangram para enseñar la noción de equivalencia a través de configuraciones de áreas equivalentes en figuras geométricas. Esta metodología no solo busca aportar a la enseñanza del signo igual como equivalencia sino que también integra tecnologías educativas y recursos didácticos, que pueden ser insumos (recursos) para los profesores de las instituciones educativas en Colombia.

El contexto educativo y los resultados de las pruebas Saber 11° entre 2017 y 2022 muestran que un alto porcentaje de estudiantes se ubica en niveles de desempeño bajos en

matemáticas, lo cual indica falencias significativas en su comprensión matemática (ICFES, 2022). La hipótesis central de este trabajo es que el uso adecuado del signo igual puede mejorar significativamente el desempeño de los estudiantes en matemáticas.

Este trabajo se sustenta en investigaciones previas realizadas por profesores investigadores de la Universidad del Valle y en la teoría de la mediación instrumental, la cual destaca la importancia de los instrumentos tecnológicos en la construcción del conocimiento matemático. Además, se apoya en los modelos heurísticos emergentes y las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría propuestas por Duval (2005, 2017) y Carcamo (2017).

Finalmente, esta investigación busca desarrollar una propuesta didáctica que facilite la enseñanza del signo igual como equivalencia, integrando recursos como el Tangram y GeoGebra, y que contribuya a mejorar la comprensión del signo igual como equivalencia en los estudiantes de octavo grado en Colombia.

Capítulo 1

Este primer capítulo tiene como propósito presentar los elementos que hicieron posible mostrar que existe una problemática que sustenta esta investigación; por lo que inicialmente se hace una contextualización de aspectos curriculares y didácticos que permiten al lector entender porque este trabajo se inscribe en el campo de la Educación Matemática y en particular muestra un interés por desarrollar una propuesta que articule los recursos del Tangram en GeoGebra para fortalecer el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de la básica secundaria de la educación colombiana.

Además, se presentan algunas investigaciones que sustentan y afirman la necesidad de realizar trabajos en el presente. Para después cerrar con el planteamiento de los objetivos que se constituyeron como ejes conductores de este trabajo.

1.1 Planteamiento del problema y contextualización

Ese trabajo de grado, está dentro del campo de la educación matemática en Colombia, la cual concibe la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, a partir del desarrollo de pensamientos y competencias, entendiéndose de que existen cinco pensamientos y sistemas asociados a ellos, los cuales buscan desarrollar en el estudiante habilidades y ejecución de procesos lógicos, que le permitan no solo desarrollar cálculos, sino entender los conceptos matemáticos y la capacidad de aplicarlos en diversos contextos, “ser competente matemáticamente” MEN (1998).

Esta investigación está inscrita en el pensamiento espacial, el cual puede ser entendido como “... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se

manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (MEN, 1998, p. 56).

En ese orden de ideas, esta propuesta se apoyará de diferentes perspectivas investigativas asociadas a la línea de didáctica de las matemáticas, al incluir las tecnologías relacionadas a la Educación Matemática y algunos recursos didácticos como el Tangram y GeoGebra, para responder a la problemática de la enseñanza del signo igual como equivalencia, por medio de un diseño de secuencia de actividades en el recurso didáctico GeoGebra, enfocadas en el grado octavo de la educación colombiana.

Lo anterior toma interés debido a que, como mencionan Ramírez y Rodríguez al signo igual a lo largo de los años, no se le ha dado un papel significativo dentro de la enseñanza de las matemáticas, específicamente cuando los estudiantes pasan de la aritmética al álgebra. Por lo general, se presenta de manera algorítmica, o se hace una “contextualización” o acercamiento, definiendo que este signo representa una balanza y que los valores que se encuentren a la derecha y a la izquierda de este signo, son “pesos” que equilibran la balanza. Lo cual puede generar obstáculos en los estudiantes. (2011, p. 506).

Con base a lo anteriormente mencionado, Kieran y Filloy Yagüe plantean que los estudiantes en primera instancia por medio de su sentido visual, asimilan el signo igual con realizar un proceso netamente operativo y no optan por la adopción principal de este símbolo, que denota básicamente una equivalencia entre ambos miembros de una ecuación (1989, p. 230).

Teniendo presente la postura expuesta, si los estudiantes se centran únicamente en realizar procesos operatorios (el Signo igual), podría representar un gran problema para el aprendizaje de los mismos, debido a que, estarían dejando a un lado, procesos matemáticos,

razonamientos, conjeturas e ideas por fuera lo cual dentro de las matemáticas son de suma importancia, simplemente por tener una única noción de este signo.

Según Molina, Castro y Castro el signo igual no tiene una única noción o forma de interpretarse, sino que depende de la contextualización que se esté dando, podría verse como una correspondencia, operador o aproximación. Por ejemplo, dos fracciones que aparentemente o visualmente no parecen ser iguales, pueden catalogarse bajo un mismo grupo, un caso de tantos sería $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ que son iguales, al definir el signo igual como una relación de equivalencia. (2007, p. 7). Observando la figura 1, se puede ver la representación figural del signo igual, a partir de las piezas del Tangram:

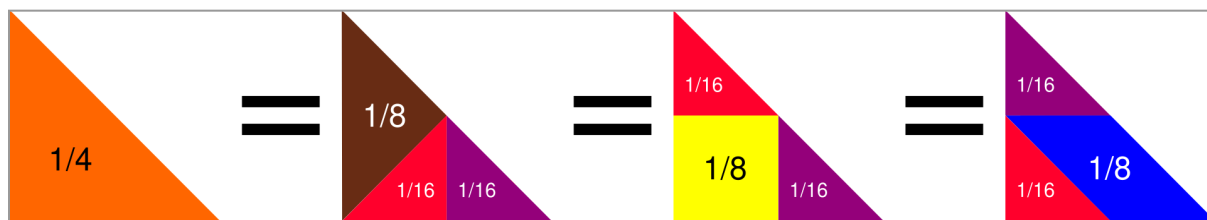


Figura 1. Representación figural del signo igual. La figura muestra el registro de representación figural del signo igual por medio de algunas piezas del Tangram. Fuente: Elaboración propia.

Se evidencia que la fracción $\frac{1}{4}$ se puede expresar como la suma de $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{16}$, lo que resulta en $\frac{4}{16}$, este valor corresponde a una fracción equivalente de $\frac{1}{4}$. Cuando se traslada esta perspectiva a una representación geométrica, el $\frac{1}{4}$ representado como el área del triángulo de color naranja, puede ser descompuesto en diversas figuras, en las que cada una de ellas representa el mismo triángulo de color naranja.

Otra postura que presenta o ratifica la comprensión operatoria que tienen los estudiantes, es la de Ramírez y Rodríguez la cual menciona que, los estudiantes de primaria como de secundaria, presentan el mismo enfoque o interpretación del signo igual como operador, lo cual es algo desalentador, debido a que, la comprensión en su mayor amplitud del signo igual, es de

un carácter muy importante para el aprendizaje del álgebra y la resolución de problemas. (2011, p. 43)

Ahora bien, teniendo presente las pruebas Saber 11° entre los años 2017 y 2022 del calendario A, datos que son generados por el Ministerio de Educación Nacional, en adelante MEN, se ve reflejado que los estudiantes obtuvieron unos porcentajes bajos de acuerdos a los 4 niveles de desempeño que se tienen en cuenta en estas pruebas como lo podemos observar en las siguientes figuras:

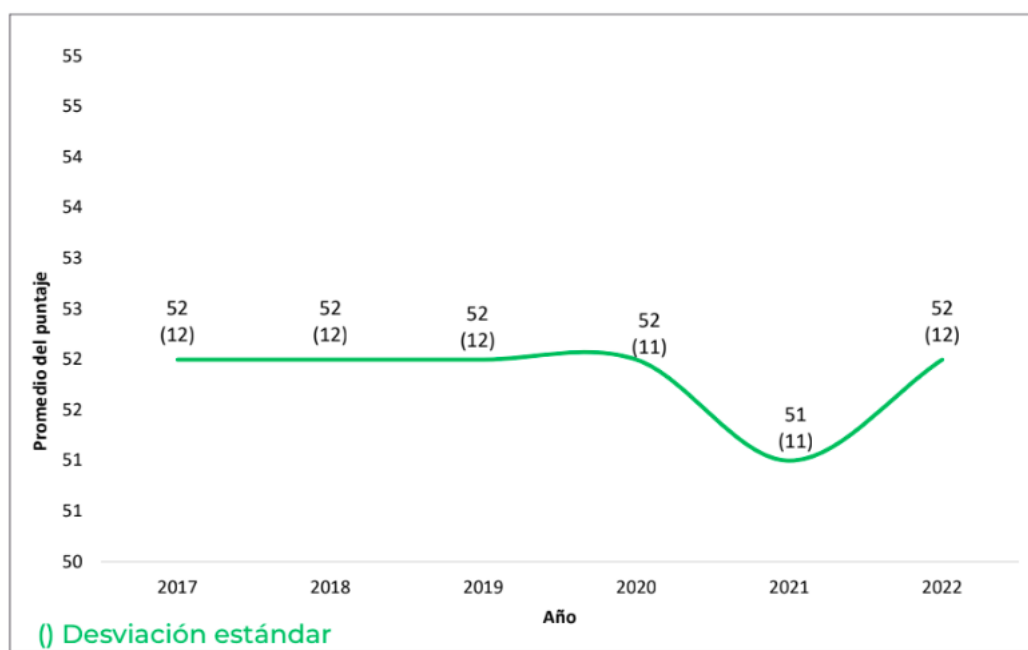


Figura 2. Promedio del puntaje (2017-2022) de la prueba de matemáticas en calendario A. La figura muestra el promedio del puntaje y la desviación estándar de la prueba durante el periodo 2017-2022. Fuente: Informe Nacional de Resultados Saber 11° (2022).

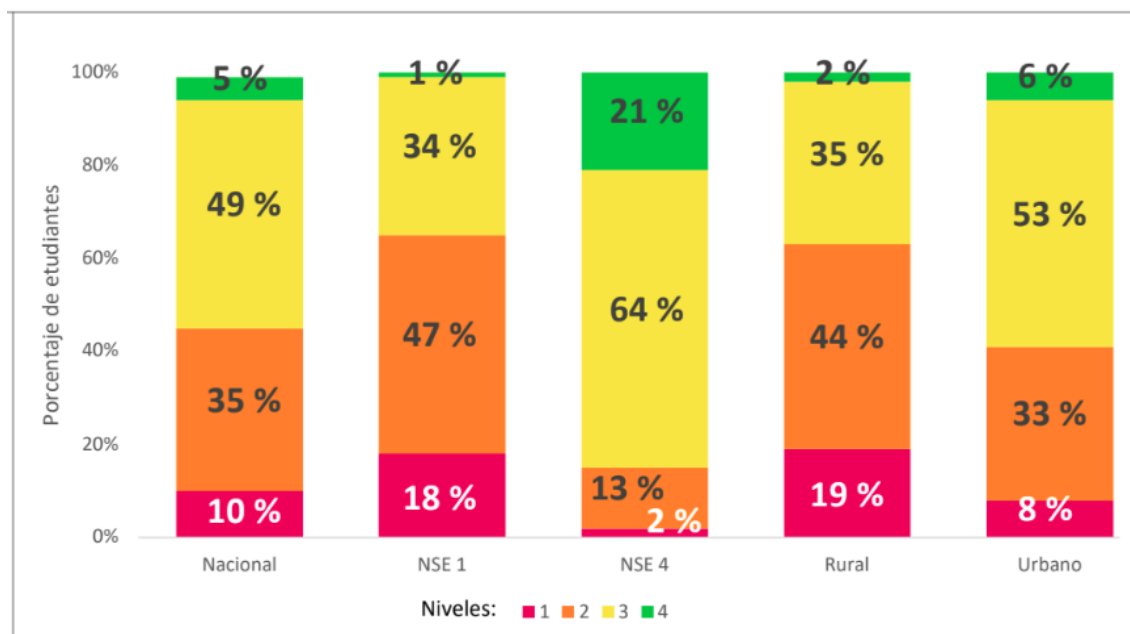


Figura 3. Niveles de desempeño* (2022) en calendario A. La figura presenta la información de los niveles de desempeño de la prueba de Matemáticas en los que se ubican las y los estudiantes a nivel nacional, para los NSE 1 y 4. Fuente: Informe Nacional de Resultados Saber 11° (2022).

Teniendo en cuenta los datos estadísticos proporcionados por el ICFES, en lo que respecta a los resultados de la prueba de matemáticas, llevada a cabo por los estudiantes en el calendario A desde 2017 a 2022, se observó un incremento de un punto en el puntaje promedio con respecto a 2021.

Este aumento significó un retorno al promedio de los últimos cinco años, que fue de 52 puntos, y que se había reducido en 2021, como se muestra en la figura 2. En cuanto a la distribución de los estudiantes según los niveles de desempeño en la prueba de Matemáticas (Ver figura 3), a nivel nacional, se destaca que el 84 % de los estudiantes se ubicó en los niveles 2 y 3, mientras que solo el 5 % logró alcanzar el nivel 4.

En el caso de los estudiantes de instituciones ubicadas en áreas rurales, su distribución fue similar a la del grupo de nivel socioeconómico (NSE) 1, con cerca del 20 % de estudiantes

ubicados en el nivel de desempeño 1 y menos del 2 % en el nivel 4. También en el nivel 3 se ve una similitud entre el grupo NSE 1 y rural con un porcentaje igual o menor del 35%.

Los estudiantes de las escuelas urbanas obtuvieron una distribución similar a nivel nacional, pero con una menor proporción de estudiantes en los niveles de desempeño más bajos (1 y 2), siendo un 41 % en comparación con el 45 % a nivel nacional. Entre aquellos estudiantes pertenecientes al NSE 4, se encontró la mayor cantidad de estudiantes en el nivel más alto, representando un 21 % de ese grupo.

Sin embargo, esta jerarquización por niveles (1, 2, 3 y 4), no puede ser un factor muy determinante, pues se tendría un sesgo, dado que el promedio de estudiantes a nivel nacional se encuentra en puntos muy bajos del nivel 3 y no se podría dar con certeza una diferencia significativa entre el nivel 3 y el nivel 2.

Con base a la información estadística, se puede conjeturar que los estudiantes tienen falencias matemáticas a la hora de presentar las pruebas Evaluar para Avanzar y Saber 11, dichas falencias determinarlas específicamente sería una utopía, pero, aun así, dada la misma naturaleza de la problemática. Se puede establecer hipotéticamente que el “mal” uso del signo igual es uno de los principales factores, pues la extensión de dicho signo, se presenta en casi todas las problemáticas de carácter matemático.

Ahora, retomando la postura de (Molina et al., 2007) si el signo igual toma un “significado” dependiendo del contexto donde se encuentre y teniendo en cuenta las estadísticas de las pruebas estandarizadas desarrolladas a nivel nacional por el ICFES; surge la siguiente interrogante: ¿Cómo el diseño de una secuencia de actividades mediada por el Tangram en un recurso didáctico como GeoGebra, puede contribuir a la enseñanza del signo igual como una

equivalencia, a través de la configuración de áreas equivalentes de figuras geométricas, en el grado octavo de la educación colombiana?

1.2 Justificación y antecedentes

Dentro de los múltiples aportes que se han venido dando en la Universidad del Valle, en el campo de la educación matemática, por parte de docentes como Santacruz (2009), Zuluaga y Cruz (2019), Correa (2020), Cumbal (2020) y Bonelo y Maca (2023); donde los diferentes aportes que ellos hacen, sirven para determinar las tendencias que se han trabajado respecto a la Geometría y sus alcances en la educación. Primero se presentará de manera sintética los aportes de los docentes mencionados para después abordar la importancia de los mismos en la creación del Diseño de actividades que sustentan esta propuesta de Diseño.

El artículo de la docente Santacruz, introduce el enfoque de la “aproximación instrumental” en la Didáctica de las Matemáticas, que se centra en la integración de tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas. Se subraya la importancia de entender los instrumentos como elementos mediadores en la actividad matemática y cómo influyen en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. (2009, párr. 7).

La perspectiva aborda la diferencia entre artefactos e instrumentos, resalta que los instrumentos son construidos por el sujeto y están relacionados con los Esquemas Sociales de Uso. También se enfatiza la importancia de la orquestación instrumental, que busca promover la génesis instrumental de los estudiantes a través de la introducción de nuevos artefactos en el aula.

La investigadora sugiere que, la gestión didáctica de sistemas de instrumentos es fundamental y que el profesor desempeña un papel clave en el diseño de secuencias didácticas

que integran instrumentos tecnológicos, donde describe una metodología que se centra en el diseño de situaciones didácticas considerando la mediación de instrumentos y la actividad matemática, priorizando la dimensión didáctica. La metodología planteada, abarca varias fases, desde el análisis preliminar hasta la evaluación de los resultados obtenidos en la experimentación.

La tesis central de las investigaciones realizadas por el profesor Zuluaga et al. (2019) reside en la necesidad de transformar las prácticas evaluativas en la Educación Matemática a través de un enfoque reflexivo y un sólido Desarrollo Profesional Docente. Se destaca la importancia de superar las limitaciones de las prácticas evaluativas tradicionales, enfocándose en la reflexión como un medio para comprender, cuestionar y mejorar la enseñanza.

El estudio aboga por un cambio significativo en la forma en que los docentes conciben y aplican la evaluación, promoviendo un ambiente colaborativo donde la reflexión y el intercambio de experiencias se convierten en motores para la transformación educativa. La investigación del docente analiza detalladamente las prácticas evaluativas y reflexivas de un grupo de profesores de matemáticas en una institución educativa del departamento del Valle del Cauca, Colombia; donde el estudio se centra en la necesidad imperante de transformar las prácticas evaluativas, destacando el papel crucial de la reflexión y el Desarrollo Profesional Docente (DPD) como elementos fundamentales para lograr dicha transformación.

El Desarrollo Profesional Docente (DPD) emerge como un componente esencial para entender y mejorar las prácticas educativas. La investigación subraya la importancia de reconocer las condiciones y posibilidades contextuales en el DPD, destacando la interacción con los contextos espacial y temporal como elementos clave. La estrategia de formación docente propuesta se fundamenta en el trabajo colaborativo, donde la figura del investigador se disuelve

en la práctica reflexiva, promoviendo la revisión personal, resignificación y transformación de las prácticas evaluativas.

En relación con las Prácticas Evaluativas, se identifica que estas están estrechamente ligadas a la concepción de evaluación del docente, respondiendo a diversos condicionamientos de la enseñanza institucionalizada. La evaluación se ve influenciada por normativas, concepciones personales, contextos y demandas externas, afectando significativamente la enseñanza, revelando que, aunque los profesores asignan importantes funciones a la evaluación, estas a menudo se limitan a replicar procedimientos previos, sin una reflexión profunda sobre su impacto.

Por otro lado, la Práctica Reflexiva emerge como un elemento clave para la transformación de las prácticas evaluativas. Se adopta un enfoque basado en Shön, que distingue entre la reflexión en y durante la acción, y la reflexión sobre la acción y sobre la reflexión en la acción. La investigación destaca la importancia de la reflexión orientada, que va más allá de la experiencia, buscando respuestas a interrogantes o dilemas. La reflexión se presenta como un escenario de desarrollo profesional dinámico, donde los profesores comparten experiencias, se identifican y contribuyen al debate, generando una discusión colectiva enriquecida con nuevos discursos.

El trabajo realizado por Correa (2020), aborda un estudio centrado en los procesos de visualización de estudiantes de séptimo grado de educación básica. El objetivo principal es comprender cómo estos estudiantes enfrentan una trayectoria hipotética de aprendizaje destinada a mejorar su comprensión de las áreas de figuras planas y fomentar el desarrollo de su pensamiento geométrico y métrico.

El estudio se lleva a cabo en tres grupos de estudiantes de una Institución Educativa

oficial en Buga, Valle del Cauca. Para llevar a cabo este trabajo, se aplica una perspectiva semiótica-cognitiva inspirada en la propuesta de Duval (2005), sostiene que el aprendizaje de las matemáticas, especialmente la geometría, depende de la coordinación adecuada de diferentes registros de representación semiótica y su interpretación.

Además, se basaron en las investigaciones de Marmolejo (2014) para diseñar una trayectoria de aprendizaje que permitiera a los estudiantes explorar figuras geométricas, compararlas, clasificarlas, reconfigurarlas y elaborar explicaciones, lo que condujo a una mejor conceptualización del tema de interés.

Por lo tanto, los resultados del estudio indican que la comprensión de los estudiantes, se logra a través de la mediación de diversos recursos semióticos, que les ayudaron a tomar conciencia de los registros figurales y dar sentido a los procesos de visualización que experimentaron.

Ahora bien, el propósito de investigación de la profesora Cumbal (2020), fue analizar las prácticas de enseñanza de dos profesores noveles en la integración de recursos digitales, específicamente en el contexto de una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la traslación. Para caracterizar estas prácticas, se utilizaron dos enfoques teóricos: la Aproximación instrumental, que ofrece una visión específica de los fenómenos didácticos, y el Modelo del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido, que ayuda a identificar los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido matemático y su influencia en la enseñanza.

Además, se tuvo en cuenta la heurística de los modelos emergentes para diseñar la trayectoria hipotética de aprendizaje aplicada por los profesores.

El estudio se llevó a cabo mediante el Estudio de casos múltiples y la Investigación Basada en el Diseño, donde los resultados principales, revelaron que los profesores noveles

utilizaron la trayectoria hipotética de aprendizaje, para abordar el pensamiento matemático de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. También, se destacó que el conocimiento tecnológico pedagógico del contenido, influyó en las características de las prácticas docentes e identificó las orquestaciones “explicación de la pantalla” y “guía-explicación” como elementos clave en la gestión de la clase de estos profesores en la integración de recursos digitales.

Por otro lado, se encuentra el trabajo realizado por los profesores Bonelo y Maca (2023), el cual centró la mirada en diseñar y proponer tres situaciones de aula utilizando GeoGebra y la metodología de Experimentos de enseñanza en colaboración con un grupo de investigadores de la Universidad del Valle.

Estas actividades, tenían como propósito potenciar el desarrollo de la visualización en los estudiantes de sexto grado de educación básica secundaria, especialmente en lo que se refiere a establecer equivalencias entre polígonos, cuando se aplican Transformaciones Isométricas. La investigación condujo a resultados que pueden tener un impacto positivo en las metodologías de enseñanza de la geometría con el uso de tecnología.

El cómo trabajar con GeoGebra facilitó la visualización de figuras geométricas y la actividad heurística relacionada con ellas, lo que resultó en una mejor comprensión de las Transformaciones Isométricas a través de tratamientos figurales y operaciones visuales. Además, fue importante la articulación entre el discurso en geometría y la visualización, ejemplificado mediante la actividad en la que los estudiantes expresaban con palabras los movimientos geométricos.

Por lo tanto, los estudiantes desarrollaron un lenguaje técnico a medida que escribían y caracterizan los movimientos, lo que demuestra su progreso en la conceptualización de las Transformaciones Isométricas.

También, se resalta la compatibilidad entre la teoría semiótica de Duval (2005) y el entorno de desarrollo proporcionado por GeoGebra, enfocándose en el tratamiento figural y las transformaciones en figuras geométricas. Finalmente, se destaca cómo GeoGebra permite el despliegue de modificaciones y operaciones figurales, lo que se alinea con la teoría de Duval. Además, se enfatiza la importancia de la experimentación y la visualización en la reorganización del pensamiento matemático y la construcción de conceptos.

Los trabajos de los Educadores Matemáticos anteriormente mencionados, sirven como filtros para estructurar y apoyar este trabajo de grado, puesto que aportan elementos que sirven para la constitución del mismo (por ende, a la solución a la problemática), porque muestran elementos como modelos, posturas didácticas-cognitivas de la enseñanza-aprendizaje, y reflexionan sobre los alcances que pueden tener la articulación de recursos pedagógicos para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría a través de un medio como GeoGebra.

Con base a lo anteriormente mencionado. Si se realiza una revisión a través de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas de la educación en Colombia, resulta evidente que estos se estructuran en torno a cinco pensamientos que, a primera vista, parecen estar separados entre sí. Sin embargo, el “principal” pensamiento que abarca esta propuesta de trabajo de grado es: el pensamiento espacial y sistemas geométricos. Debido principalmente que el objeto matemático a tratar es de carácter Geométrico junto al recurso GeoGebra que facilita el uso de Sistemas de Transformaciones (ver [Consideración del software de geometría dinámica GeoGebra como recurso didáctico](#)).

Según Palarea M., la Geometría, específicamente el Tangram, tiene un papel significativo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que muchas veces se pasa por alto dado que, tiene la cualidad de ser un puente para la transición al lenguaje algebraico (1998, p. 124). Por

consiguiente, aquí se puede encontrar un punto de apoyo para la estructuración de la solución a la problemática expuesta en las páginas anteriores, debido a que, si se toma esta postura, la Geometría por su naturaleza dual o multidimensional.

Como lo menciona Camargo L. y Acosta M., debe tener una parte “tangible” y otra parte “intangible” donde el carácter “tangible” podría decirse que, se compone de una parte biológica y una parte física, ella define que la dimensión biológica hace referencia a aquellos sentidos con los que se podría decir que, el humano viene configurado por naturaleza, como lo son: el sentido espacial, la percepción y visualización. Ahora, la parte física hace alusión a las propiedades espaciales de objetos tangibles o representaciones de los mismos que modelan el espacio conocido. (2012, p. 4).

Finalmente, estos autores, al carácter “intangible” lo clasifica en dos dimensiones, que son: dimensión aplicada y teórica. La dimensión aplicada, se refiere más específicamente a clasificarlo como una herramienta que toma elementos de otras ramas de las matemáticas y que tienen la finalidad de representarlos o darles una interpretación más geométrica. Un ejemplo, podría ser la transposición didáctica de los productos notables en álgebra a una representación geométrica con rectángulos y cuadrados como se muestra en la figura 4.

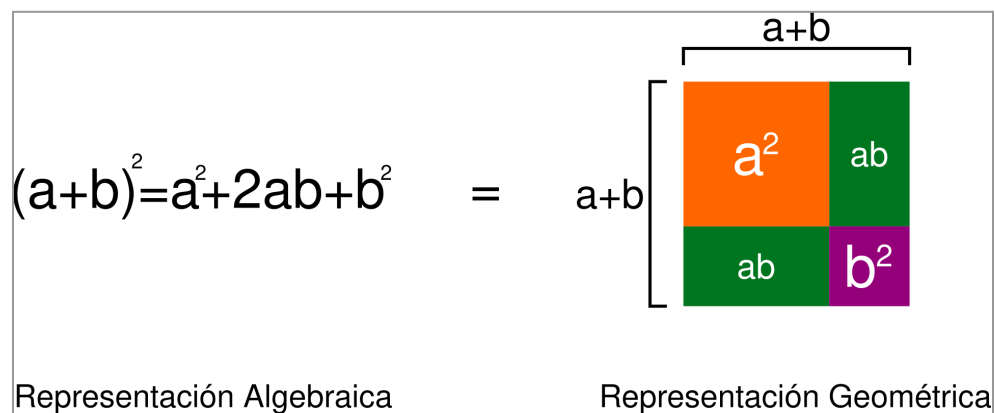


Figura 4. Ejemplo de transposición didáctica de los productos notables. La figura muestra la transposición didáctica de los productos notables en álgebra a una representación geométrica con rectángulos y cuadrados. Fuente: Propia.

La dimensión teórica, se distingue principalmente por ser una colección de diferentes aspectos de carácter riguroso que da el estatus de disciplina científica a la Geometría, algunos de estos aspectos son: Aspectos abstractos, conceptuales, deductivos y formales. Sin embargo, la autora menciona que estas dos dimensiones, “tangible” e “intangible”, son dependientes entre sí y por esta razón, no podría darse la actividad geométrica prescindiendo de uno de ellos.

Teniendo en cuenta la postura de (Camargo et al., 2012) , se pueden estructurar, diseños de actividades que parten de lo “tangible” y a medida que el estudiante va creando su conocimiento puede llegar a un punto más abstracto “intangible”.

Por consiguiente, teniendo presente la postura de Palarea (1998, p. 124) y (Molina et al., 2007), se puede establecer que el signo igual está presente en actividades de carácter geométrico, debido a que el Tangram está dentro de las cualidades que proporciona la geometría y, además, posee figuras que lo componen e incluso dichas figuras se componen de otras. Se puede establecer una propuesta de enseñanza del signo igual como relación de equivalencia entre áreas y superficies a partir del Tangram.

Ahora bien, si se tiene presente la “dualidad” que posee la Geometría, y viendo históricamente en los últimos años, que se viene presentando una aceptación por integrar tecnologías para la enseñanza y aprendizaje, podría crearse un enlace entre las dos dimensiones de la Geometría (tangible e intangible) y la parte de las TICs, debido a que tienen la ventaja de que los estudiantes puedan interaccionar y hacer cambios en figuras geométricas en tiempo real y esto puede servir para que los estudiantes creen conjeturas, hipótesis e incluso deducciones, que les permita ver la conservación de áreas y superficies entre figuras geométricas del Tangram.

En 1996, Corberán planteó en su trabajo la conservación y estudio de las propiedades de las figuras, que se tendrán en cuenta en esta propuesta de enseñanza, además con el objetivo de

fortalecer la base de esta propuesta, en 2014, Pérez, dio importancia al rol que ejecuta el profesor en la integración de tecnologías; donde el profesor desempeña un papel fundamental como mediador entre los estudiantes y el conocimiento matemático, éste (profesor) como experto, debe ayudar a los alumnos a comprender los conceptos matemáticos y la relación entre los signos y sus significados.

Pues el profesor guía a los estudiantes para que reconozcan el aspecto matemático de los signos y su evolución. Además, él clasifica los signos generados durante las actividades y determina si son personales, matemáticos o puntos de conexión entre ambos, por ende infiere la relación entre los signos y las acciones realizadas con los artefactos o el conocimiento matemático involucrado, en lo que plantea Pérez C., esto implica no solo trabajar en el nivel cognitivo de los estudiantes, sino también en su capacidad de reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje (metacognitivo). (2014, p. 142).

Dicho esto, la mediación instrumental, se refiere a cómo las herramientas y artefactos influyen en el pensamiento humano, especialmente en la educación matemática, plantea Pérez C., la pregunta: ¿Cómo se relacionan las personas y las herramientas en un contexto educativo?, además reconoce que la relación entre artefactos y conocimiento es compleja y requiere un análisis detallado (2014, p. 143).

Un modelo de aprendizaje que plantea Pérez C., se basa en un enfoque sociocultural, que ve los artefactos, no solo como herramientas para realizar acciones, sino también como medios para el aprendizaje. (2014, p. 137). (Ver [Consideración del software de geometría dinámica GeoGebra como recurso didáctico](#)).

Se utiliza la metáfora “entrar a un lugar” que brinda acceso al conocimiento matemático, la mediación instrumental comienza cuando podemos redefinir objetos matemáticos en términos

de construcciones, que pueden ejecutarse, como sucede por ejemplo con el software Cabri. En conclusión, se trata de cómo las herramientas y artefactos contribuyen a la construcción del conocimiento matemático; con base a esta postura, el software GeoGebra, se puede considerar un medio para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo tanto se transforma en un recurso.

Con las aportaciones y posturas que anteriormente se han mencionado, es posible pensar en la estructuración de un diseño en el que se articule un recurso como el Tangram y la mediación de GeoGebra, para generar una propuesta alternativa de la enseñanza de la geometría que permita afrontar la enseñanza del signo igual como relación de equivalencia por medio de estos recursos y hacer un acercamiento al álgebra, donde cobra una mayor importancia el estudio de las expresiones algebraicas asociadas al estudio de propiedades de las formas.

Otros aspectos teóricos que ayudan a la organización y creación de los diseños, serán expuestos posteriormente como: Los modelos heurísticos emergentes de Carcamo (2017), las condiciones cognitivas del aprendizaje de la Geometría de Duval (2005).

Se espera que los estudiantes a través de la interacción con los diseños de las actividades, puedan lograr según los Estándares Básicos de Aprendizaje en Colombia del MEN (2006), “el poder conjeturar y corroborar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales, en la solución de problemas. También, usar o manipular representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (p. 86).

Los diseños que se realizarán en esta investigación, tienen el posible potencial de ser el punto de partida para el desarrollo de actividades que promuevan el proceso de enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico. Sin embargo, es importante destacar que esta

hipótesis se plantea como una perspectiva que requiere una exploración más profunda y queda abierta a futuras investigaciones. En el alcance de esta propuesta de enseñanza en particular, el enfoque se concentrará de manera específica en la enseñanza del concepto del signo igual como equivalencia a través de figuras geométricas del Tangram, mediado por GeoGebra.

Esta elección se debe a la necesidad de establecer una base sólida y comprensible en torno a un elemento fundamental del álgebra, antes de abordar cuestiones más amplias relacionadas con el lenguaje algebraico en su conjunto. Así, al limitar el alcance de esta “investigación” a un concepto específico, se facilita un análisis más detallado y preciso, lo que permite una comprensión más profunda y un enfoque más efectivo en la enseñanza de este objeto en particular “signo igual”.

La apertura de la hipótesis sobre las futuras investigaciones brinda la oportunidad a otros académicos e investigadores interesados de explorar y verificar o refutar las posibles implicaciones pedagógicas que puedan derivarse del diseño, lo que enriquecerá el campo de las matemáticas en general, específicamente la enseñanza del álgebra y la geometría.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

- Diseñar e implementar una secuencia de actividades utilizando los recursos del Tangram en GeoGebra, enfocada en la enseñanza de la noción del signo igual como equivalencia a través de figuras geométricas en estudiantes de octavo grado en una Institución Educativa oficial del Valle del Cauca.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar los referentes teóricos requeridos para estructurar el diseño de un recurso digital mediado por el Tangram en GeoGebra para el trabajo de las relaciones de equivalencias entre áreas de figuras geométricas para estudiantes de octavo grado de la básica secundaria.
- Configurar los elementos que permitan ordenar y elaborar una propuesta de recurso digital mediada por el Tangram en GeoGebra para el trabajo de las relaciones de equivalencias entre áreas de figuras geométricas para estudiantes de octavo grado de la básica secundaria.
- Determinar las dificultades relacionadas con la Geometría y las relaciones de equivalencia mediante un pretest, para consolidar la estructura de las tareas que componen el recurso diseñado.
- Analizar los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta de Diseño del recurso digital mediado por el Tangram en GeoGebra en la mediación del proceso de aprendizaje de la relación de equivalencia entre áreas de figuras geométricas en estudiantes octavo grado trabajando con figuras geométricas.

Capítulo 2

En este capítulo se recopilan los elementos teóricos esenciales que orientan la constitución de este trabajo de grado. Para Lograr lo mencionado se elaboraron tres apartados generales los cuales buscan hacer precisiones desde tres frentes titulados como: Dimensión Curricular, Dimensión Didáctica y Dimensión Conceptual. En la primera dimensión se realiza una interpretación de los orientadores ministeriales colombianos y cómo el pensamiento

geométrico debería entenderse para articularlo con los estándares básicos de competencias y el desarrollo de habilidades matemáticas.

La segunda dimensión obedece a una necesidad de mostrar al lector el cómo se entiende el concepto de recursos pedagógicos y cómo un modelo teórico didáctico se articula con las intenciones investigativas y de diseño de un Educador Matemático.

Por último, la tercera dimensión obedece a una síntesis concisa de cómo se interpreta desde el conocimiento matemático los objetos de estudio y se pueden conceptualizar para institucionalizar a nivel escolar, para un nivel de escolaridad determinado que en este caso relaciona una de tantas interpretaciones del signo igual, para relacionarla con nociones geométricas de las formas bidimensionales, la semejanza, congruencia y la conservación del área de contornos poligonales que se reconfiguran.

2.1 Marco teórico

En este apartado, se establecen diversas dimensiones que convergen en la enseñanza de las matemáticas, centrándose especialmente en la geometría y la comprensión del signo igual como equivalencia. En la dimensión curricular, se tiene presente los Lineamientos Curriculares en Matemáticas de la educación colombiana, destacando la importancia de la actividad y la experiencia en la construcción de sistemas geométricos.

En segundo lugar, la dimensión didáctica se centra en la construcción del Tangram, relacionándolo con los Elementos de Euclides y destacando la versatilidad que aportan los triángulos isósceles en este proceso.

Además, se integra el recurso GeoGebra como una herramienta valiosa para la comprensión del signo igual, articulado con el Tangram y otros referentes que permiten

fundamentar la realización del diseño de las actividades como lo son: la heurística de los modelos emergentes, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) y Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA), la Orquestación Instrumental (OI) y la postura de Duval (2005), sobre el proceso de “visualización”.

Por último, en la dimensión conceptual, se abordan distintas perspectivas sobre los objetos matemáticos, como el “signo igual”, el concepto de “área” y “superficie”, resaltando la importancia del contexto y exploración en su interpretación. Estas nociones conceptuales son fundamentales para abordar la problemática central de enseñar el signo igual como equivalencia a través de la geometría, pues en conjunto, estas dimensiones proporcionan una visión integral y articulada para abordar los retos educativos en el ámbito matemático.

2.1.1 Dimensión curricular

Es esta dimensión de emplea como referencia las orientaciones que brindan los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) de la educación colombiana, donde se abordan conceptos clave como: el Pensamiento espacial, el Sistema geométrico, la Geometría activa y las Transformaciones geométricas. Estos enfoques, resaltan la importancia de la actividad y la experiencia en la construcción de los sistemas geométricos, promoviendo no solo la comprensión de la geometría, sino también habilidades cognitivas que le permitirán al estudiante entender la noción del signo igual, como equivalencia por medio de las figuras planas.

2.1.1.1 Pensamiento espacial

Según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, se entiende el Pensamiento Espacial como: “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se

manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (MEN, 1998, p. 56). Dada la idea anteriormente expuesta, se concibe el pensamiento espacial desde la postura del docente, el cual, puede ser artífice y orquestador de la creación de los procesos cognitivos que crean los estudiantes como la manipulación de las representaciones mentales de los objetos matemáticos.

2.1.1.2 Sistema geométrico

Con base a los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), un “Sistema Geométrico” se caracteriza por ser una construcción que se fundamenta de las exploraciones activas que van teniendo los estudiantes (interacciones), desde un nivel totalmente empírico muy relacionado al mundo físico tangible, para, posteriormente conforme se avanza en su exploración, poder interiorizar los movimientos o características de objetos geométricos sin necesidad de una representación física e incluso poder conceptualizar. Todo esto se trata de un proceso cognitivo que se fundamenta en experiencias individuales como por las interacciones con el contexto (social, cultural, histórico, entre otros).

Un ejemplo de lo mencionado anteriormente, se puede ver reflejado en: Una clase de geometría para estudiantes de secundaria, donde se introduce el concepto de transformaciones, al principio, los estudiantes pueden usar herramientas físicas como espejos y rotaciones manuales para comprender estos movimientos; a medida que avanzan en su exploración, comienzan a visualizar y comprender estos movimientos sin necesidad de herramientas físicas, van “interiorizando” gradualmente los conceptos geométricos a un nivel abstracto.

2.1.1.3 Geometría activa

La Geometría activa según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) es un enfoque pedagógico que pone énfasis en la participación activa del estudiante en el proceso de aprendizaje geométrico. En lugar de simplemente contemplar pasivamente figuras y símbolos, este enfoque invita a los alumnos a interactuar de manera dinámica con el mundo que les rodea, utilizando la actividad como punto de partida para la comprensión del espacio y las formas.

El corazón de la Geometría activa radica en la idea de que el aprendizaje se fortalece cuando se fomenta la acción y la experimentación. Los estudiantes son talentosos para realizar acciones concretas, como dibujar, construir y manipular objetos geométricos. Estas actividades no son simples ejercicios prácticos, sino herramientas fundamentales para la construcción de conceptos geométricos. A través de estas acciones, los estudiantes crean representaciones mentales de las formas y relaciones geométricas, lo que les permite interiorizar y comprender mejor los conceptos.

En las primeras etapas de este enfoque, la conceptualización se apoya en gestos y palabras del lenguaje cotidiano. Los estudiantes utilizan descripciones verbales y gestuales para comunicar sus observaciones y comprensión de las formas y relaciones geométricas que están explorando. Estos gestos y palabras son la base inicial sobre la cual se construirán los conceptos geométricos.

A medida que los estudiantes progresan en su proceso educativo, sus conceptualizaciones se vuelven más robustas y precisas. Las nociones geométricas, que al principio se basaban en gestos y palabras, empiezan a tomar una forma más formal y estructurada, pues los estudiantes son capaces de proponer y evaluar definiciones más rigurosas y simbolismos matemáticos para representar las ideas geométricas que han explorado activamente.

La Geometría activa, según lo indicado por los MEN (1998), es un enfoque educativo que enfatiza la importancia de la actividad del estudiante como un medio crucial para la construcción del conocimiento geométrico. A través de una participación activa, los estudiantes no solo adquieren una comprensión más profunda de la geometría, sino que también desarrollan habilidades para resolver problemas, pensamiento crítico¹ y creatividad.

Este enfoque reconoce que el aprendizaje no es un proceso pasivo de absorción de información, sino una empresa activa en la que los estudiantes se involucran y participan de manera significativa en la creación de su propio conocimiento geométrico.

2.1.1.4 Transformaciones

Considerando la postura de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), los sistemas de transformaciones comienzan con desplazamientos simples que los alumnos pueden realizar con sus cuerpos o al deslizar objetos en el plano. A partir de ahí, se exploran conceptos más complejos como las rotaciones y las traslaciones. El énfasis radica en comprender cómo estos movimientos afectan la dirección y orientación en el plano, así como el orden de los vértices de las figuras, sin necesidad de definiciones verbales complicadas.

Se reconoce que definir transformaciones como las reflexiones es un desafío, ya que no pueden expresarse adecuadamente con palabras. Estas transformaciones deben abordarse desde la perspectiva de la actividad mental y la visualización, puesto que, no pueden realizarse con material concreto. Los espejos y otros recursos pueden ayudar en la comprensión, pero no reemplazan la necesidad de que los alumnos desarrollen la capacidad de representar mentalmente y coordinar estas transformaciones.

¹ Pensamiento Crítico: Se concibe este pensamiento, como todo acto que el ser humano utiliza para crear, organizar y expresar sus opiniones frente a un tema específico, tratando de buscar convencerse o convencer con argumentos deductivos y sólidos.

Finalmente, este trabajo de grado promueve un enfoque práctico y activo para enseñar geometría, utilizando transformaciones geométricas como herramientas clave para explorar el espacio y desarrollar habilidades de representación mental e imaginación en el dibujo. Se reconoce que comprender y definir estas transformaciones va más allá de las palabras y se basa en la experiencia y la actividad mental de los estudiantes.

2.1.2 Dimensión Didáctica

En esta dimensión, se aborda la construcción geométrica del Tangram, a partir de figuras planas, al tomar como referencia los Libros I y II de los Elementos de Euclides. Se parte desde la división de un cuadrado (unidad), el cuadrado se divide en cinco triángulos (siendo cuatro de ellos triángulos isósceles), un cuadrado y un paralelogramo. Esta división proporciona las piezas básicas del Tangram el cual no tiene una configuración habitual, cada pieza tiene proporciones geométricas y relaciones específicas entre sí.

Los triángulos isósceles desempeñan un papel crucial en la construcción, dado que sus ángulos y lados proporcionan la base para la versatilidad del Tangram. La simetría de estos triángulos facilita la creación de formas diversas cuando se combinan de diferentes maneras. (ver [Construcción geométrica del Tangram](#)).

A medida que los triángulos se reorganizan, se exploran distintos patrones y configuraciones, es en este proceso donde surgen puntos de intersección cruciales y esenciales para la formación de las figuras, pues permiten una conexión precisa entre las diferentes piezas, es decir, puntos estratégicos que guían la colocación y alineación adecuadas de las siete piezas del Tangram.

Además, se considera el recurso GeoGebra, como un mediador para la enseñanza de la

noción del signo igual como equivalencia, articulado con el Tangram. Por último, se discute el concepto de orquestación instrumental y su relevancia en la enseñanza de las matemáticas, así como los modos opuestos de funcionamiento cognitivo, la visualización icónica y la no icónica, que desempeñan un papel crucial en la percepción visual y la comprensión de objetos en el mundo geométrico.

Esta dimensión, ofrece una visión de la construcción del Tangram, la implementación del recurso de geometría dinámica GeoGebra, siendo recursos importantes para tratar de dar solución a la problemática de la enseñanza del signo igual como equivalencia, así como de las herramientas y conceptos fundamentales involucrados en este proceso.

2.1.2.1 Construcción geométrica del Tangram

Al asumir las nociones de construcción de figuras planas, planteadas en el Libro I y II de los Elementos de Euclides (1991), se elabora la construcción del Tangram de la siguiente forma como se muestra en la figura 5.

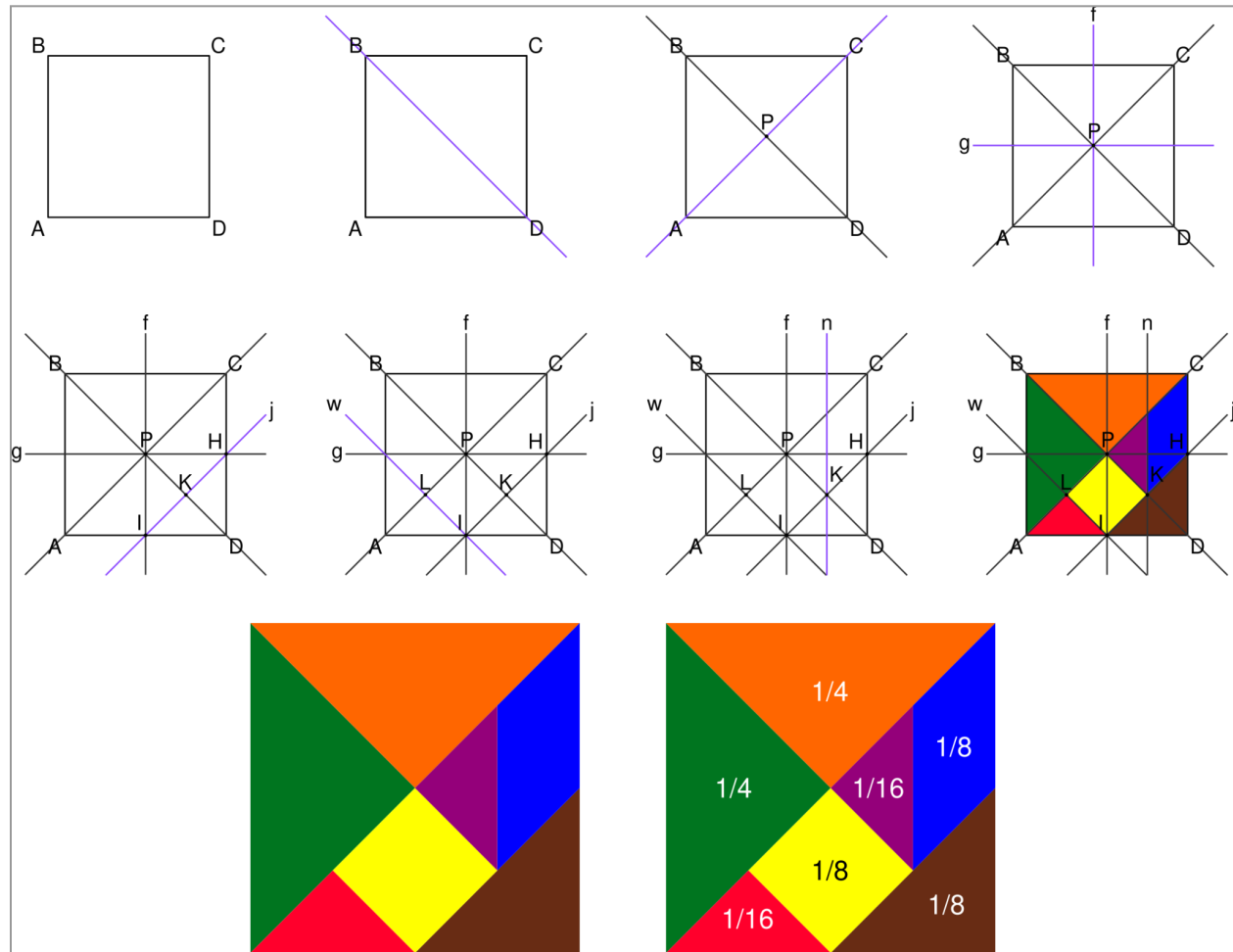


Figura 5. Construcción geométrica del Tangram. La figura muestra la construcción geométrica del Tangram con sus proporciones de área en cada región, a partir de un cuadrado de unidad. Fuente: Propia.

1. Se plantea un cuadrado unidad ABCD de lado U .
2. Se bisecta el cuadrado unidad ABCD en la diagonal BD, obteniendo dos triángulos isósceles.
3. Se bisecta el cuadrado unidad ABCD en la diagonal AC, obteniendo un total de cuatro triángulos isósceles donde su hipotenusa es U , formándose el punto P entre las diagonales AC y BD.
4. Se trazan dos bisectrices f y g, que pasan por el punto P de intersección.
5. Se traza una recta paralela j a la diagonal AC y que intersecta las bisectrices f y g,

formando los puntos H e I entre el cuadrado unidad ABCD y el punto K, entre la diagonal BD y la recta j.

6. Se traza una recta perpendicular w a la diagonal AC y que pasa por el punto I, formando el punto L de intersección de la diagonal AC con la recta perpendicular w.
7. Se traza una recta paralela n a la bisectriz f, que pasa por el punto K.

2.1.2.2 Figuras convexas con el Tangram

El teorema de Wang. y Hsiung C., establece que mediante el uso del Tangram, es posible formar exactamente trece polígonos convexas². En particular, se obtienen cuatro hexágonos, dos pentágonos, seis cuadriláteros y un triángulo obteniendo los polígonos convexas. (1942, p. 596). Todo lo anterior se puede ver como lo muestra la figura 6:

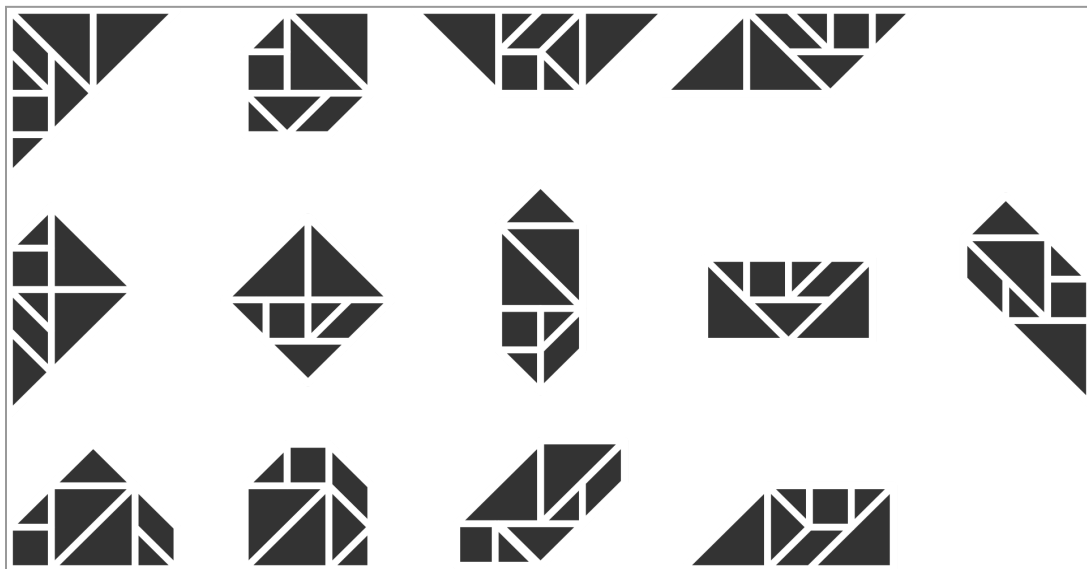


Figura 6. Figuras convexas con el Tangram. La figura muestra las construcciones geométricas de las trece figuras convexas formadas con el Tangram. Wang-Fu, T., y Hsiung-Chuan, C. (1942).

Se partirá de este teorema para la creación de los diseños de las secuencias de

² Polígonos Convexos: Son figuras geométricas que tienen la característica de que todos sus ángulos internos son menores a 180° . En otras palabras, en un polígono convexo, cualquier línea que conecte dos puntos en su interior permanecerá completamente dentro del polígono. No hay "esquinas" o "puntos hacia adentro" en un polígono convexo, lo que lo hace diferente de los polígonos no convexas, que pueden tener ángulos internos mayores o "puntos hacia adentro" en su forma.

actividades, que abordarán las figuras convexas formadas con el Tangram.

2.1.2.3 Consideración del software de geometría dinámica GeoGebra como recurso didáctico

En este apartado se presentan algunos aspectos teóricos importantes, para argumentar la mediación del aplicativo como GeoGebra y poder establecerlo tanto como un artefacto y recurso. Este aplicativo en la actualidad se ha venido introduciendo fuertemente en la Educación Matemática, debido a sus alcances en los procesos de enseñanza, además de su practicidad a la hora de facilitar tareas de: Dibujar, graficar, construir, inmediatez de resultados entre otros aspectos importantes.

El término “artefacto” como lo plantea Rabardel P., definido como cualquier cosa diseñada para un propósito específico, incluyendo tanto objetos materiales como entidades simbólicas. Lo importante es que estos artefactos están destinados a ser utilizados en actividades intencionales. La intencionalidad es fundamental en el diseño de un artefacto, puesto que cada uno está diseñado con la intención de producir ciertos efectos. (2011, p. 10).

Sin embargo el término artefacto, presenta divergencias, debido a que se puede tomar el software en su totalidad como el artefacto o puede verse como una colección de artefactos como por ejemplo: el artefacto arrastre, artefacto medida, artefacto línea, entre otros.

Teniendo en cuenta la postura mencionada anteriormente, se puede intuir que el aplicativo GeoGebra, se puede considerar como artefacto debido a que, fue creado con diversos propósitos, además de tener una intencionalidad en búsqueda de un efecto, ya sea por lo menos en el campo de la educación. En esta propuesta de enseñanza se considerara a GeoGebra en su totalidad como artefacto.

Para Trouche (2005), el interés de conceptualizar recurso pedagógico como lo que

subyace, sustenta o a lo que apela el maestro para diseñar y orientar su actividad docente en el salón de clases cuando incluyen artefactos informáticos.

Ahora, al articular la postura de Rabardel P., se establece que el artefacto GeoGebra se puede ver como un recurso debido a que, es un “elemento” o “artefacto informático” el cual tiene una finalidad o intencionalidad que el docente puede utilizar para diseñar ciertas actividades que servirán para la enseñanza de una o más clases. (2011, p. 47).

Sin embargo, dicha mirada de recurso tiene un rango de acción mucho más amplio para Garzon D. y Vega M., al dar a entender el recurso pedagógico a la implementación o uso de diversos componentes y “estrategias” como: materiales, artefactos educativos, documentos para la clase, además de actos discursivos los cuales tienen una intencionalidad y significado específico hacia la clase. (2011, p. 2).

En el análisis sobre la mediación instrumental y la complejidad de la relación entre humanos y herramientas en la educación matemática, según Drijvers, Kieran y Mariotti (2010):

El cuestionamiento crucial al pensar en mediación instrumental, concibiendo que el contexto da forma al pensamiento humano, es cómo considerar la relación entre humanos y herramientas, puesto que, ambos son elementos particulares del contexto. La hipótesis general establece que el rol básico de la práctica en la construcción de conocimiento no explica completamente el rol del uso de artefactos en el caso particular de la educación matemática. (p.116).

Sin embargo, se reconoce que la relación entre artefactos y conocimiento es compleja y requiere un análisis cuidadoso, pues Pérez (2014) “plantea un modelo del proceso de aprendizaje que se inspira en un enfoque sociocultural enfocado en el uso de un artefacto expresado en términos de mediación” (p. 137). Como se muestra en la figura 7:

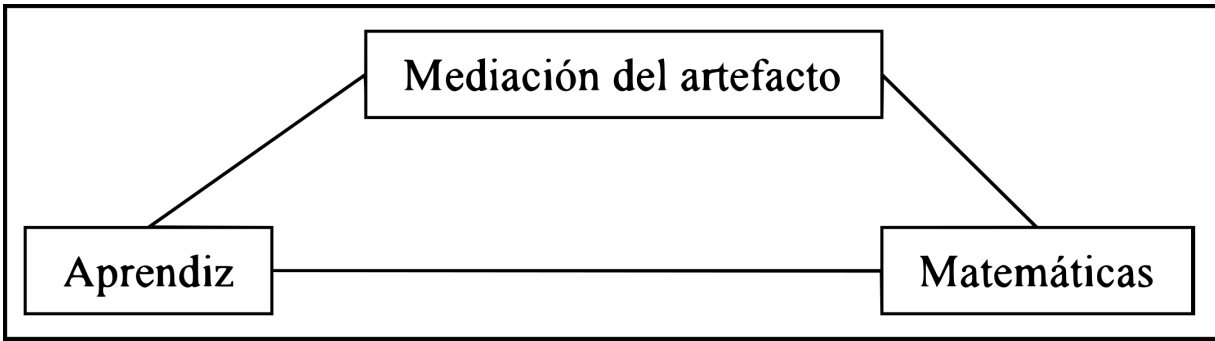


Figura 7. Modelo del proceso de mediación por un artefacto. La figura muestra el modelo de los artefactos y el rol que desempeñan en las matemáticas. Fuente: Jones, 2000 como se citó en Drijvers et al. 2010, p.116.

De esta manera, la integración de artefactos en el proceso educativo no solo facilita la ejecución de tareas específicas, sino que también promueve un entorno de aprendizaje dinámico y enriquecedor, según Pérez (2014):

En este modelo los artefactos son considerados además de medio para llevar a cabo una acción concreta, como un medio para el aprendizaje. El rol de los artefactos en el aprendizaje está expresado frecuentemente a través de la metáfora de entrar a un lugar que da la expresión acceso al conocimiento matemático. (p. 137)

Con las posturas expresadas anteriormente, se puede intuir que los recursos, en este caso en particular GeoGebra, brinda la realización de acciones concretas que pueden influir en la construcción del conocimiento. Sin embargo, se deben tener ciertos parámetros que condicionen el uso, debido a que esta relación con los artefactos debe ser cuidadosa y no desviar el objetivo principal que se pretende.

2.1.2.4 ¿Cómo se pueden poner las proposiciones en correspondencia con una figura o convertirse en una figura?

Es de suma importancia, poder establecer parámetros que condicionen los diseños que se realizarán para afrontar la problemática. Uno de los puntos importantes a la hora de hacer diseños, es la forma en que se presenta el enunciado, tarea e instrucciones a los estudiantes en cuestión; para tener certeza que, el objetivo principal de la actividad, no se perderá por una o múltiples interpretaciones por parte de los estudiantes. Ahora bien, para tener claridad acerca de los “enunciados” o registro de lenguaje natural.

Se tendrá en cuenta de manera somera la postura de Duval (2005) que plantea el papel del lenguaje como la construcción del pensamiento en las ciencias y las matemáticas, destacando el lenguaje no simplemente como en "poner en palabras" pensamientos ya existentes, sino que crea proposiciones que dan forma al pensamiento sobre objetos de conocimiento. Se aborda la complejidad de las proposiciones, su relación con las palabras y cómo su comprensión implica desafíos, como la distinción entre una proposición y su recíproca genera modificaciones de sentido con la cuantificación y la negación, y cambios de sentido en el desarrollo del discurso.

Además, se discute la articulación cognitiva entre la visualización y el lenguaje a través de proposiciones, destacando que la relación no se establece a nivel de palabras, sino de proposiciones. También menciona cómo la producción de representaciones visuales y enunciados está interconectada, influyendo la comprensión y producción en contextos matemáticos. Se subraya la importancia de distinguir entre representaciones autosuficientes y auxiliares en dos registros diferentes, y cómo cambiar el estatus o función de un enunciado cuando se afecta su formulación. Se mencionan ejemplos específicos, como la producción de contraejemplos y las

diversas definiciones posibles de una recta, lo cual se puede transportar a diversos objetos matemáticos.

En base a la postura expuesta si las proposiciones dan forma al pensamiento, se deben tomar medidas meticulosas en la forma en que se presentarán las proposiciones que acompañarán a las actividades, con la finalidad de tener un margen de “error” mínimo y poder tener precisión en la aprehensión que tendrán los estudiantes, esto puede evidenciarse en las diferentes respuestas o inquietudes que puedan tener.

2.1.2.5 La Heurística de los Modelos Emergentes

Parte de la estructuración de un diseño enfocado en la enseñanza, es la forma con la que se llevarán a cabo las diferentes actividades que se les presentarán a los estudiantes.

Para esto se tendrá en cuenta la interpretación que hace Carcamo (2017) en su tesis doctoral, planteando que los modelos emergentes permiten a los estudiantes construir una comprensión matemática por sí mismos, a través de un proceso gradual, donde las matemáticas formales se integran como una extensión natural de su experiencia. Se destaca que el término “modelo” no debe interpretarse literalmente y puede referirse a diversos aspectos, como entornos de trabajo, descripciones verbales, formas de simbolización y notaciones.

Según Carcamo (2017) los modelos son considerados emergentes, puesto que surgen diversas maneras de crear y utilizar herramientas matemáticas con un razonamiento cada vez más sofisticado. Inicialmente ligados a contextos específicos, los modelos evolucionan hacia estrategias matemáticas más generales a medida que los estudiantes adquieren experiencia.

Sin embargo, la transición de un modelo de actividad matemática informal, a un modelo para un razonamiento matemático más formal, se vincula con la creación de una nueva realidad

matemática. En otras palabras, los modelos emergentes están relacionados con tres procesos interrelacionados: La transición del modelo, la constitución de una nueva realidad matemática y la emergencia de una cadena de significación que representa la manifestación concreta del modelo en una serie de signos.

Este enfoque puede ser grato para la enseñanza, debido a que, se puede ver como un proceso gradual, que parte de aspectos conocidos por los estudiantes de un contexto específico y a medida que van construyendo su conocimiento, van aumentando su rigurosidad matemática. Lo cual no es un proceso tan “brusco” como simplemente presentar actividades sin contextualización alguna.

2.1.2.6 Los niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes

Este apartado proporciona un poco más de información acerca de cómo se pretende estructurar las actividades a diseñar, también los diferentes tipos de niveles en los que se situarán las actividades e incluso el rol de los estudiantes y docentes. Carcamo (2017) plantea que la progresión de los modelos emergentes se articula en cuatro niveles de actividad que según Gravemeijer (1997, 1999) son: situacional, referencial, general y formal. La actividad situacional se centra en interpretaciones y soluciones contextualizadas, mientras que la referencial utiliza “modelos-de” que se relacionan a la interpretación del entorno de las actividades de instrucción (situación de la actividad). La actividad general se enfoca en “modelos-para” que permiten interpretaciones y soluciones independientes de las imágenes particulares de la situación (se busca un desligamiento parcial de las imágenes de apoyo).

Finalmente, la actividad formal implica el razonamiento con simbolismo convencional, prescindiendo del apoyo de modelos-para, es decir, se espera un razonamiento a partir de la interpretación del lenguaje natural expresado en la actividad.

En cuanto a los niveles de actividad, Zolkower y Bressan (2012) detallan que, en el nivel situacional, las estrategias se desarrollan espontáneamente a partir del problema experiencial real. El nivel referencial introduce *modelos-de* como gráficos y procedimientos, mientras que en el nivel general se reflexiona y generaliza sin hacer referencia al contexto inicial. El nivel formal implica trabajar con procedimientos y notaciones convencionales desvinculadas de situaciones específicas.

Aunque se percibe una evolución clara, los cuatro tipos de actividad no siguen una jerarquía estrictamente ordenada, ya que las discusiones sobre actividad general y razonamiento matemático a menudo se conectan con la actividad referencial o situacional en la práctica (McClain y Cobb, 1998).

Los niveles mencionados son parte de la “jerarquización” en la estructuración de los diseños de las actividades, que partirán del nivel situacional hasta llegar a un nivel de rigurosidad lo cual sería el nivel formal. Sin embargo, se tendrá presente la participación del docente como orquestador de la construcción de los conocimientos de los estudiantes.

Según Carcamo (2017) la propuesta consiste en que los estudiantes empleen diversas simbolizaciones como herramientas, y que cada actividad con una simbolización más avanzada se perciba como una extensión natural de la anterior. Esto, según Gravemeijer (2002), permite que los símbolos matemáticos formales se arraiguen en las actividades concretas de los estudiantes con el tiempo.

Para Gravemeijer et al. (2000) el desafío del diseñador y el profesor, es prever una

progresión en la que los estudiantes culminen utilizando simbolizaciones convencionales, proponiendo una ruta en la que modelen situaciones de manera informal (modelo-de la situación) y luego matematicen su actividad de modelado informal (modelo-para el razonamiento matemático).

Por lo tanto, en el contexto de la aplicación de la secuencia instruccional, el profesor juega un papel crucial al guiar y apoyar la presentación de tareas, la elaboración de temas de discusión y la orquestación de las conversaciones. Además, debe realizar conexiones con las convenciones y prácticas de la comunidad matemática, anticipar la gestión de la clase y la organización del trabajo en grupo e individual (Gravemeijer, 2004b).

Este enfoque fomenta la autonomía intelectual de los estudiantes, subrayando la importancia de que, en lugar de proporcionar respuestas, los profesores planteen nuevas preguntas, creando así un aula independiente en la construcción del conocimiento matemático como una comunidad de aprendizaje (Kamii, Lewis y Livingstone, 1993).

2.1.2.7 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)

A la hora de diseñar e implementar un diseño de actividades, es importante, establecer los alcances, camino o los caminos y objetivos que el diseño “pretende alcanzar” y para ello se establecerá lo que es una THA según los siguientes autores, como se presenta a continuación:

La Trayectoria de Aprendizaje Hipotético (THA) se puede interpretar como sinónimo de progresión de aprendizaje, teoría de instrucción local o trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2014). La THA se distingue por detallar el proceso hipotético de aprendizaje, especialmente en términos de un modelo de aprendizaje como cambio cognitivo (Tzur, 2019).

Este constructo, propuesto como un modelo teórico para el diseño de la enseñanza de las matemáticas, consta de tres elementos esenciales: Una meta de aprendizaje, un conjunto de tareas de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético (Simon, 2014).

Algunos supuestos subyacentes incluyen que la generación de una THA se basa en los conocimientos previos de los estudiantes, que sirve como vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos y que las tareas matemáticas desempeñan un papel clave en el proceso de instrucción al proporcionar herramientas para fomentar el aprendizaje de conceptos, además el docente se involucra en cada modificación de cada aspecto de la THA (Simon y Tzur, 2004).

Con base a la postura mencionada, se puede establecer un “camino” hipotético que deberían seguir los estudiantes con las actividades a diseñar, suponiendo sus conocimientos previos, respecto a su grado de escolaridad y lo propuesto por el MEN.

2.1.2.8 Orquestación Instrumental: Un modelo metafórico (OI)

La idea central de la orquestación instrumental es que las herramientas tecnológicas en matemáticas requieren una supervisión activa por parte del profesor a través de la orquestación de situaciones matemáticas, enfocándose en la dimensión social de la génesis instrumental (Pérez, 2014). Así, el concepto de orquestación en el contexto de la enseñanza de las matemáticas se refiere a la forma en que el profesor dirige y coordina las herramientas y recursos disponibles para fomentar un aprendizaje colectivo y colaborativo.

Esta metáfora anterior, puede interpretarse de manera diversa, desde la dirección de una orquesta sinfónica con un enfoque más rígido hasta el liderazgo de una banda de jazz que fomenta la improvisación y la participación activa de los estudiantes.

En ese caso, la teoría de la orquestación instrumental busca responder a cómo el profesor puede optimizar el uso de estas herramientas para mejorar tanto el aprendizaje individual como el colectivo en el ámbito de las matemáticas.

2.1.2.9 Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica

La “Visualización” es un proceso cognitivo de suma importancia en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, sin embargo, dicho proceso en diferentes contextos y culturas suele ser confundido con el acto de simplemente ver algo en primera instancia. Por el contrario, para “el buen desarrollo de las actividades a diseñar”, se tendrá presente la postura de Duval (2005) sobre este proceso y/o actividad cognitiva, pero sin profundizar en su conceptualización debido a la complejidad y desarrollo del mismo.

Duval (2005) se centra en dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica. Estos dos modos implican procesos complejos relacionados con la percepción visual y la identificación de objetos. La percepción visual implica dos niveles de operaciones distintos pero independientes: el reconocimiento de formas (icónica) y la identificación de objetos basados en esas formas reconocidas (no icónica).

En la percepción del mundo que nos rodea, estos dos niveles de operación suelen fusionarse, dado que el objeto y su forma distintiva se presentan simultáneamente. Esta fusión entre reconocimiento de forma e identificación de objeto es esencial para tomar decisiones rápidas y adaptarse a nuevas situaciones.

Sin embargo, este proceso es diferente cuando se trata de la percepción de representaciones visuales construidas, como dibujos o trazos, donde en estos casos, no existe una

conexión intrínseca entre las formas reconocidas en el trazado y el objeto que se pretende representar. Para lograr la identificación, es necesario encontrar un "parecido" entre la forma visual distintiva y la forma típica del objeto representado. Este parecido se considera un componente fundamental de la imagen.

Por ejemplo, se menciona que, en la percepción del mundo circundante, este parecido es suficiente para reconocer directamente el objeto representado, como ocurre al mirar historietas sin necesidad de leer. Pero, en algunos casos, puede ser necesario recurrir a información verbal, como una leyenda o una codificación de elementos figurativos, para identificar completamente lo que las formas distintivas representan.

Ahora bien, a pesar de la importancia de la enunciación en algunos contextos, se enfatiza que el mecanismo de iconicidad, basado en la similitud visual, sigue siendo un componente autónomo y fundamental en la percepción visual cada vez que se presenta algo a la vista, ya sea un dibujo, figuras o formas de piezas que se manipulan.

En resumidas palabras, los dos modos cognitivos opuestos en la percepción visual son: la visualización icónica, que se basa en la similitud visual entre formas y objetos y la visualización no icónica, que a veces requiere información verbal adicional de los objetos para ser operados. Ambos modos, son importantes en diferentes contextos perceptivos y contribuyen a nuestra comprensión del mundo que nos rodea.

2.1.3 Dimensión Conceptual: Caracterización de los objetos matemáticos

En esta dimensión, se plantean diversas nociones relacionadas con conceptos geométricos. En primer lugar, se aborda la noción del “signo igual”, un objeto que ha sido interpretado de múltiples maneras a lo largo del tiempo, pero aquí se le da un enfoque desde la

perspectiva de una relación de equivalencia. Siguiendo la visión de Molina et al. (2007), se destaca la importancia del contexto, al otorgar significado al “signo igual”.

Después, se tiene la perspectiva de Corberán (1996), la cual plantea la noción de “área” y “superficie” desde una perspectiva exploratoria, que le permita al estudiante utilizar diversos métodos para medir y comparar áreas de superficies planas y cuestionarse por relaciones numéricas que conservan las formas. Finalmente, se dará paso a las posturas de Perrin (1992) y O’ Daffer y Clemens (1977), los cuales plantean las cualidades y propiedades de las superficies, más que en su carácter de medida, haciendo una distinción de lo que es “área” “superficie” y “medida”.

La comprensión de los objetos matemáticos, como el signo igual, la noción de área y superficie, es esencial para el desarrollo de este informe final, puesto que permite desarrollar las bases de los diseños, para entender lo que se quiere lograr en la solución de la problemática sobre la enseñanza del signo igual como equivalencia, por medio de la geometría.

2.1.3.1 Noción del signo igual

A lo largo del tiempo, se ha utilizado este objeto de distintas maneras tanto semiótica como conceptual, sin embargo, aquí le daremos el enfoque de una relación de equivalencia. En la postura de Molina et al. (2007) es de carácter fundamental tener presente el contexto para dar un significado específico al signo igual, estos autores nos ilustran con un ejemplo de que $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son iguales al definirlos como una relación de equivalencia que los encierra en una misma clase o conjunto numérico específico.

2.1.3.2 Nociones de área y superficie

Teniendo en cuenta la postura de Corberán (1996) donde menciona que la finalidad de la enseñanza del área en la educación, tanto primaria como secundaria, no debería limitarse a buscar una conceptualización de lo que podría ser el área, sino, debería mostrar a los estudiantes la diversidad de caminos o procedimientos que ayudan a la medición y comparación de áreas de superficies planas.

Ahora bien, se dará una distinción entre lo que es área, superficie y medida. Para esto se citará a Perrin (1992), “Superficie, designa una parte del plano, área, designa la magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie y medida, designa el número que representa el lugar ocupado por la superficie del plano” (p. 38).

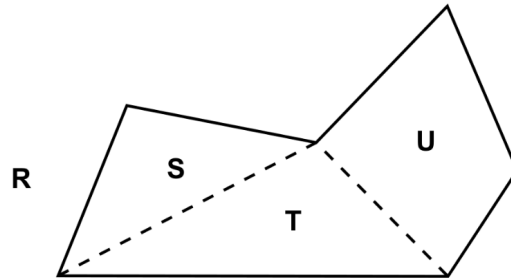
Sin embargo, para el diseño de las actividades, estas se centran en las nociones de superficie y área, pero en el sentido de cualidad o propiedad de una superficie dada y no en su carácter de medida, con la finalidad de ir desligándose de la enseñanza “tradicional” del área como fórmulas dadas.

2.1.3.3 Propiedades de las áreas y superficies planas

A continuación, se establecen las propiedades que se verán reflejadas en algunas de las actividades diseñadas. Desde la postura de O’ Daffer y Clemens (1977) se establecen las siguientes propiedades:

Propiedad Aditiva. Si una región R se puede descomponer en un número finito de regiones, el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas.

$$A(R) = A(S) + A(T) + A(U)$$



Propiedad de la Invarianza. Si dos regiones R y S son congruentes, entonces $A(R) = A(S)$

Propiedad de la Unidad. El área del cuadrado unidad es 1.

Propiedad de la Disección. Si una región puede ser diseccionada en partes y esas partes reorganizadas para formar otra región, entonces las dos regiones tienen áreas iguales.

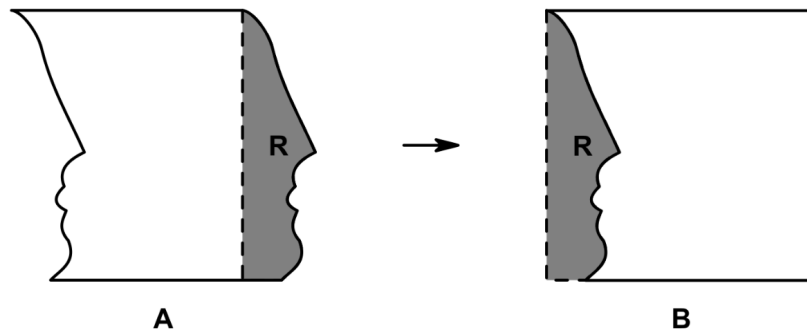


Figura 8. Propiedades sobre la conservación del área de una superficie. La figura muestra las propiedades que hacen referencia a la conservación del área de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones. Fuente: O'Daffer y Clemens, (como se citó en Corberán, 1996).

Se toma como referencia las propiedades anteriores sobre la conservación del área de una superficie, para ejemplificarlas utilizando el Tangram como lo muestran las siguientes figuras:

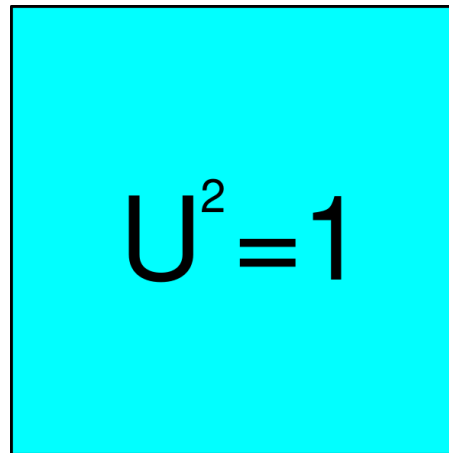


Figura 9. Propiedad de la unidad con el Tangram. La figura muestra la propiedad de la unidad, donde se plantea un cuadrado (unidad) de lado $U = 1$ y de área $U^2 = 1$. Fuente: Propia.

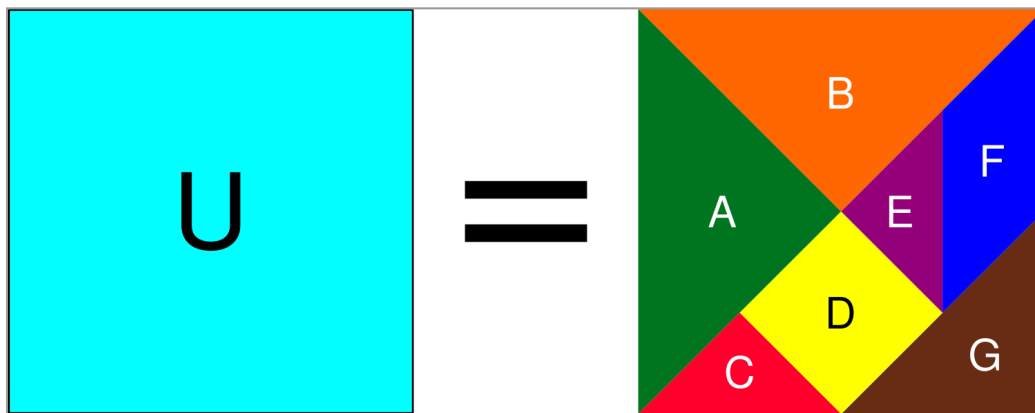


Figura 10. Propiedad aditiva con el Tangram. La figura muestra la propiedad aditiva, donde se descompone el cuadrado (unidad), en finitas regiones, siendo el área de la unidad completa, la suma del área de las regiones separadas. $A(U) = A(A) + A(B) + A(C) + A(D) + A(E) + A(F) + A(G)$. Fuente: Propia.

Se retoma la construcción geométrica del Tangram (Ver [Figura 5](#)), para mostrar esta propiedad.

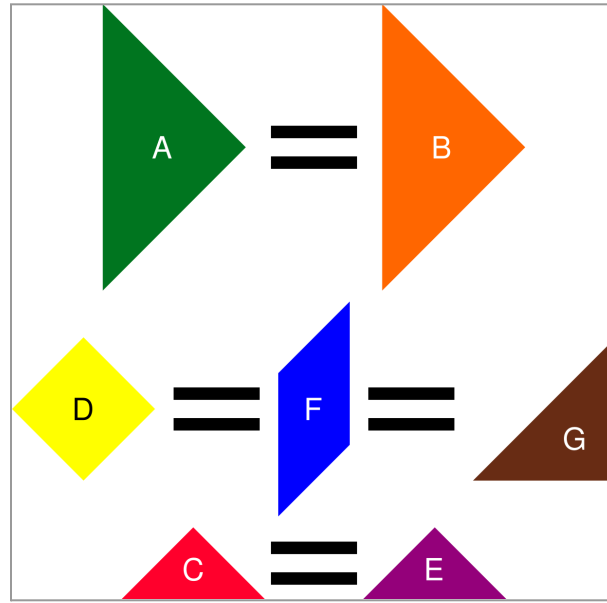


Figura 11. Propiedad de invarianza con el Tangram. La figura muestra la propiedad de invarianza, que al tener congruencia entre las regiones que forman el cuadrado (unidad), estas tendrán la misma área. $A(A) = A(B)$, $A(D) = A(F) = A(G)$, $A(C) = A(E)$. Fuente: Propia.

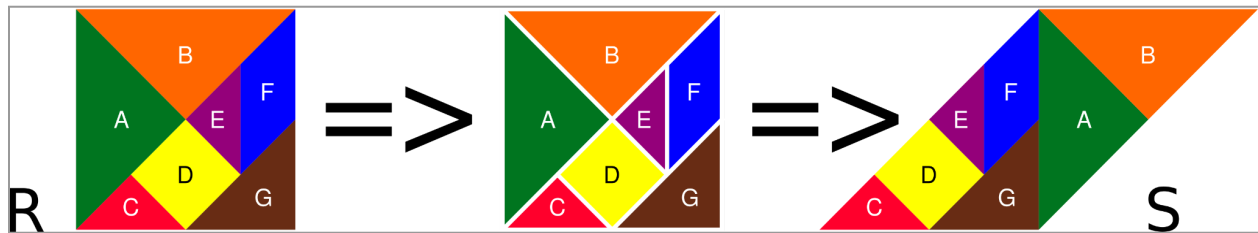


Figura 12. Propiedad de la disección con el Tangram. La figura muestra la propiedad de la disección, la cual dice que, si una región puede ser diseccionada en partes, donde esas partes pueden ser reconfiguradas para formar otra región, entonces las dos regiones tendrán la misma área. $A(R) = A(S)$. Fuente: Propia.

Las propiedades expuestas anteriormente son de suma importancia, sin embargo, en la mayoría de casos en las actividades se dará cierto carácter de prioridad a la de disección, debido a que, en palabras más coloquiales, se trata de una “reconfiguración” de una superficie, pero que tiene la cualidad de conservar su área a pesar de tener una “forma” distinta.

Capítulo 3

En este capítulo se presentan los fundamentos metodológicos y se describen los elementos que hicieron parte del desarrollo del diseño que además, guiaron el proceso de implementación. También, se presentan algunos aspectos generales de la implementación y los insumos que resultaron para analizar y evaluar aspectos como la mediación, el Diseño y los alcances que tuvo este trabajo de grado en el proceso formativo de los estudiantes.

Para finalizar, se presenta la estructura definitiva de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y su articulación con las teorías de los Modelos Emergentes de la Heurística y algunos aspectos concernientes a visualización y reconfiguración figural que describe Raymond Duval.

3.1 Aspectos metodológicos y del diseño

En este apartado, se destacan elementos cruciales que forman parte integral del diseño metodológico del presente trabajo de grado el cual, se inscribe en un enfoque cualitativo-descriptivo dentro del campo de la Educación Matemática.

Este trabajo de diseño, también conocido como investigación basada en diseño, será un paradigma cualitativo desarrollado dentro de la educación matemática, que se centrará en el análisis del aprendizaje del signo igual como equivalencia, en un contexto escolar para estudiantes de grado octavo de la educación colombiana, mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, como lo son los recursos de GeoGebra y el Tangram.

Ahora bien, como plantea Molina, Castro y Castro (2011) este enfoque se caracteriza por la interdependencia entre el diseño instruccional y la investigación, donde el diseño de ambientes

de aprendizaje, para este trabajo de grado como lo es el recurso de GeoGebra, sirve como contexto para la investigación, lo que permite la mejora continua de ambos.

Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje son un tipo común de estudio dentro de este paradigma, donde los profesores-investigadores y alumnos interactúan en un entorno de enseñanza diseñado específicamente para experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos.

Estos constructos teóricos se desarrollaron en fases que incluyen la preparación, la intervención en el aula y el análisis posterior a la intervención para analizar los datos, con el objetivo de encontrar hallazgos en el aprendizaje de los alumnos, respecto a que “lograran ver” el signo igual como una equivalencia. Sin embargo, este trabajo de investigación, se enfoca o limita, en solamente plantear una propuesta de enseñanza que permita a otros profesores-investigadores, progresar en las teorías del aprendizaje y la enseñanza, así como proporcionar información útil para la toma de decisiones instructivas que los profesores consideren pertinentes.

La Trayectoria de Aprendizaje se basó en las fases que propuso Molina (2006) en su trabajo exploratorio, en el que se analizó el uso y desarrollo de pensamiento relacional y los significados del signo igual que los alumnos de Educación Primaria, ponían de manifiesto en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas. Ahora se presenta el experimento de enseñanza del signo igual como equivalencia en la tabla 1.

Tabla 1*Descripción del Diseño e implementación*

Fases	Acciones
Preparación del experimento	- Se definió la problemática (ver 1. Planteamiento del problema y contextualización) y los objetivos de la investigación (ver 3. Objetivos). - Identificación de los objetivos instruccionales y evaluar los conocimientos previos de los alumnos (ver Prueba Diagnóstica Signo Igual). - Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos (ver Análisis A Priori). - Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización (ver Tabla 5). - Planificar la recogida de datos. - Estructurar una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje (ver Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)).
Experimentación	
Antes de cada intervención	- Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos. - Identificar los objetivos instruccionales de la intervención. - Ultime el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible. - Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención.

	- Ultime la selección de los métodos de recogida de datos. - Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.
En cada intervención	Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención. Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención. Cabe aclarar que esta sección no aplica para la investigación de este proyecto, debido a que es una propuesta de enseñanza que centra la mirada en aspectos relacionados con el alcance del Diseño propuesto.
Después de cada intervención	- Analizar los datos recogidos en la intervención. - Revisar, las hipótesis/conjeturas de la investigación.

Análisis Retrospectivo de los Datos

- Recopilar y organizar toda la información recogida (material filmico: vídeo y audio, producción de los estudiantes en el recurso de GeoGebra, libro de equivalencias geométricas planas).

- Analizar el conjunto de los datos, lo que implica:

a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad.

b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno.

(ver [Capítulo 4](#))

Nota. La tabla muestra una recopilación descriptiva de los parámetros que se utilizaron en la metodología e implementación del diseño desde los procesos Apriori y Aposteriori, para poder realizar el análisis retrospectivo de los datos obtenidos por las producciones de los estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

3.1.1 Metodología de Implementación

La presente trabajo de grado se centró en realizar un estudio de enfoque cualitativo-descriptivo, según la postura de Camargo (2021) donde la utilidad de esta estrategia

radica en observar el proceso de aprendizaje matemático en vivo y analizar aspectos de éste, para comprender la naturaleza de los significados construidos por los estudiantes.

Se buscó determinar si hay un desarrollo relevante en contextos enriquecidos específicos mediante el diseño y estudio sistemático de formas y oportunidades de aprendizaje, estrategias de enseñanza, artefactos mediadores, formas de interacción, patrones discursivos y otros condicionantes del ambiente de la clase.

En 1995, Martin Simon introdujo la noción de una trayectoria hipotética de aprendizaje como parte esencial de su modelo para el ciclo de enseñanza de las matemáticas (Simon, 1995). Su artículo, cuyo título reflejó claramente su propósito, planteó la “reconstrucción de la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista”.

Enfrentó una de las paradojas surgidas con el movimiento de reforma en las matemáticas: la tensión entre la visión constructivista del aprendizaje, que exigió que la instrucción se adapte a las actuaciones de los estudiantes y la idea convencional de planificación de la instrucción, basada en la consecución de objetivos predefinidos en los niveles de los Modelos Emergentes de la Heurística y en el diseño de tareas para alcanzarlos.

La figura 13 muestra una representación visual de los elementos clave del ciclo de enseñanza de las matemáticas para este proyecto de trabajo de grado, resaltando aquellos que configuran la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA):

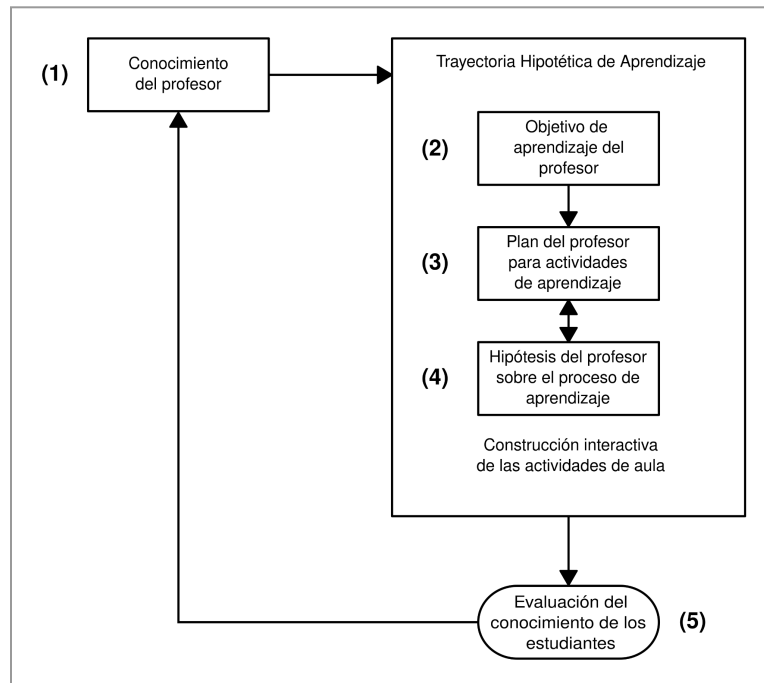


Figura 13. Ciclos de enseñanza que componen la THA. La figura muestra los ciclos de enseñanza que componen la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA). Fuente: Simon, M. A. (1995).

De acuerdo con las ideas planteadas por Simon (1995), la figura anterior presenta los principios del ciclo de enseñanza. Es relevante señalar que este marco conceptual consta de cinco etapas, cada una relacionada con el progreso del profesor en el dominio de las diversas competencias que lo integran.

En este contexto, el nivel 1 se refiere al conocimiento que el profesor debe tener sobre el contenido de la asignatura, tanto en términos matemáticos como semiótico-cognitivos. El nivel 2 implica las tareas diseñadas para alcanzar metas específicas, el nivel 3 aborda la evaluación pertinente basada en el desempeño en las tareas, el nivel 4 realiza un análisis posterior de la evaluación para avanzar en los procesos de aprendizaje y el nivel 5 se refiere a la comparación entre los elementos de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) y los resultados de las producciones de los estudiantes.

En cuanto al conocimiento geométrico del profesor sobre la equivalencia del área de figuras planas (nivel 1), a medida que el profesor gana experiencia, fortalece su conocimiento del contenido, especialmente en el caso del aumento de capacidades en geometría, lo que le permite fundamentar decisiones curriculares y tener mayor autoridad en la dirección de la clase. Según Simon (1995) una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) proporciona criterios para seleccionar un diseño instruccional específico, guiando las decisiones de enseñanza con base en conjeturas sobre el proceso de aprendizaje.

Es crucial destacar que una Trayectoria de Aprendizaje (nivel 2) consta de criterios instruccionales conectados con metas de aprendizaje y objetivos del profesor, conjeturas de aprendizaje que establecen rutas y niveles de formación progresivos para los estudiantes y tareas diseñadas según la teoría de “visualización” propuesta por Duval (2005).

En el (nivel 3), una vez definidas las tareas, el profesor decide realizar una dirección o comenzar las tareas proyectadas, evaluando el conocimiento del grupo de interés y determinando la cantidad de niveles de diseño. En el (nivel 4), el profesor-investigador evalúa las producciones de los estudiantes, explorando diferentes soluciones y descubriendo elementos de análisis que evidencian dificultades, las cuales deben resolverse antes de pasar al siguiente nivel. Por último, el (nivel 5) implica contrastar los elementos de la THA con los resultados de las producciones estudiantiles.

En la conclusión del proceso, el profesor analiza y argumenta el progreso cognitivo de los estudiantes. En caso de necesitar ajustes en el diseño, el profesor-investigador los realiza con flexibilidad para validar los resultados grupales y considerarlos efectivos en la comprensión del tema por parte de los estudiantes.

Finalmente, la THA se implementó en tres semanas donde se puso a prueba el diseño de la secuencia de actividades, con una prueba experimental por cada grupo de situaciones, que tiene dos dimensiones (contenido geométrico y contenido didáctico), se dirigió el curso de la THA hacia el cumplimiento de los objetivos planteados para cada nivel y así se obtuvieron resultados con el fin de analizar la información generada.

La última etapa implicó un análisis a priori y a posteriori, los cuales fueron “conceptos” desarrollados en la Ingeniería Didáctica planteada por Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) de la información recolectada en donde se determinó si se cumplieron los objetivos y la THA, lo que permitió poder estructurar el diseño, proponer constructos teóricos y desarrollar una propuesta de enseñanza.

3.2 Contextualización, Elementos de la implementación, Materiales y recursos, Población de estudio

Esta propuesta de diseño fue implementada con aproximadamente 15 estudiantes de grado octavo, quienes fueron seleccionados mediante un pretest. En este pretest, se pudo observar que la mayoría de los estudiantes poseen conocimientos básicos en geometría, lo que facilitó la selección del número de participantes para la implementación del diseño. Además, se consideraron las condiciones de los equipos de cómputo, los cuales fueron revisados previamente a la implementación. Esto permitió determinar que únicamente 15 de los equipos estaban en óptimas condiciones.

Los estudiantes seleccionados pertenecen al Grupo B del estrato socioeconómico (SISBEN), con edades comprendidas entre los 12 y los 14 años, y son estudiantes de la Institución Educativa oficial colombiana, Nuestra Señora de la Consolación, ubicada en Toro,

municipio del Norte del Valle del Cauca, inscrita en el Calendario A. Esta institución cuenta con sala de sistemas y red de internet con equipos de cómputo equipados con sistema operativo Windows 10 o superior.

Por otro lado, se planificó la implementación de manera Online, sin embargo, se contempló la opción Offline en caso de fallas en la red de internet, para poder realizar la implementación de forma local.

Todo lo anterior se sustentó en el espacio de las prácticas profesionales realizadas en el primer semestre del 2024 y en los convenios y acuerdos con el establecimiento educativo y su representante legal. Al inicio del año escolar, se solicitaron los respectivos permisos y autorizaciones, así como los derechos de tratamiento de imagen a los acudientes respectivos para poder tomar registros filmicos, fotografías y grabaciones de audio de la implementación. Se dejó claro que estos registros tendrían fines académicos e investigativos.

3.2.1 Prueba Diagnóstica (Pretest)

El pretest fue una herramienta crucial en el diseño de enseñanza del signo igual como equivalencia, puesto que permitió evaluar el conocimiento inicial de los estudiantes y establecer un punto de referencia para medir su evolución. Este enfoque fue esencial para entender el nivel de aprehensión de nociones matemáticas elementales en los estudiantes antes de la implementación.

A través del pretest, se pudo identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes en diversas nociones en geometría: identificar figuras planas según sus propiedades y características, reconocer semejanzas entre figuras, diferenciar entre perímetro y área, distinguir movimientos de traslación y rotación, así como su coexistencia, identificar configuraciones y

trazos auxiliares en figuras geométricas planas, establecer relaciones de equivalencia y congruencia de áreas, además realizar cambios de registros de representación del lenguaje natural al figural.

Las preguntas del pretest estuvieron diseñadas para evaluar estas competencias, mediante actividades que incluyeron nombrar y describir figuras geométricas, buscar relaciones de tamaño, posición y rotación, colorear áreas y perímetros, clasificar movimientos, comparar espacios ocupados, determinar áreas y perímetros, representar figuras con unidades específicas y encontrar semejanzas y diferencias entre figuras.

Pues, de esta manera el pretest no sólo proporcionó una línea de base sobre la cual se pueden dimensionar los progresos, sino que también da cuenta de las nociones específicas que requieren mayor atención y adaptación para la elaboración del Diseño.

3.2.1.1 Análisis A Priori

Los propósitos y las preguntas del pretest se organizaron de manera que cubrieran de forma secuencial las competencias elementales en geometría; cada propósito abordó un aspecto específico del conocimiento, desde la identificación de figuras y sus propiedades, hasta la comprensión de la noción de equivalencia de áreas. La estructura de las preguntas estuvo diseñada para evaluar de manera práctica y directa estos propósitos, al facilitar la identificación de fortalezas y debilidades en los estudiantes, lo que permitió datos valiosos para adaptar el diseño de enseñanza según las necesidades individuales de los estudiantes, como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2*Descripción del Diseño e implementación*

Preguntas	Propósitos
Pregunta 1. (a) Observando las siguientes figuras (A, B, C, D, E, F, G, H), menciona sus nombres, las propiedades o características que conozcas sobre ellas. Por ejemplo: J: Un triángulo isósceles, es aquel que tiene dos lados iguales, dos ángulos iguales. (b) Buscar las relaciones (Tamaño, posición, rotación, entre otras) de las figuras anteriores: B, C, F, G y H: D y E:	- Identificar figuras planas de acuerdo a sus propiedades y características. - Reconocer la semejanza entre figuras.
Pregunta 2. Colorea el área y el perímetro de las siguientes figuras, definiendo el color que utilizarás para diferenciar cada uno. <i>Color del perímetro:</i> <i>Color del área:</i>	- Diferenciar entre la noción de perímetro y área de figuras planas.
Pregunta 3. Teniendo en cuenta las siguientes nociones, responda las preguntas del ítem (a) a la (d). Rotación: Es girar algo, tomando como base un punto de referencia. Por ejemplo: Gira la tierra alrededor del sol. Traslación: Implica cambiar la ubicación de la figura sin modificar su tamaño o forma. Clasifica los siguientes movimientos en “Traslaciones” “Rotaciones” o “ambos” (a) ¿Qué tipo de movimiento hacen las manecillas de un reloj? Justifica tu respuesta. (b) ¿Qué tipo de movimiento hace un autobús que se dirige del municipio de Toro a Zarzal? Justifica tu respuesta.	- Diferenciar los movimientos de “Traslación” y “Rotación” - Establecer una coexistencia de ambos movimientos.

(c) ¿Cuál o cuáles movimientos se generan después de lanzar un trompo? Justifica tu respuesta

(d) ¿Qué movimientos se generan después de lanzar un balón de fútbol al aire?

Pregunta 4.

Observa el comportamiento de las figuras y determina ¿Cuál de las dos figuras **A** y **B**, ocupa más espacio? o ¿Qué puedes observar de las dos figuras **A** y **B**?

Pregunta 5.

Responde **Falso** o **Verdadero**:

Las figuras **A** y **B** son iguales _____

La figura **A** es mayor que la figura **B** _____

La figura **A** ocupa más área que la figura **B** _____ Explica con tus palabras.

- Identificar configuraciones de figuras geométricas planas.
- Identificar el uso de trazos auxiliares.
- Establecer una relación de equivalencia entre áreas de figuras geométricas planas.
- Identificar la congruencia entre figuras geométricas planas.

Pregunta 6.

Determina el área y el perímetro de las siguientes figuras **A**: [Un cuadrado] y **B**: [Un rectángulo]

Pregunta 7.

Representa una figura que tenga 10 Unidades de Área y 14 Unidades de Perímetro.

Pregunta 8.

De acuerdo con las siguientes figuras, ¿Qué semejanzas o diferencias encuentras en ellas? A parte de su forma

- Determinar la equivalencia de área entre figuras geométricas planas.
- Identificar diferencias o semejanzas entre el área y perímetro de figuras geométricas planas.
- Identificar el cambio de registro de representación del lenguaje natural al figural.

Nota. La tabla muestra una recopilación descriptiva de la forma en que fué diseñada la prueba diagnóstica (Pre-test), de acuerdo a unos propósitos que fueron pensados en la identificación de conocimientos previos en los estudiantes, para poder realizar el Diseño. Fuente: Elaboración propia.

La pregunta relacionada con la identificación de figuras geométricas planas (Pregunta 1) se les dificultó a los estudiantes el cómo empezar a resolverla, lo cual generó la intervención del profesor para dar claridad a la pregunta.

Las preguntas relacionadas con la diferenciación entre perímetro y área (Pregunta 2) y la comprensión de los movimientos de traslación y rotación (Pregunta 3) obtuvieron los resultados

más satisfactorios (a los propósitos) y presentaron una baja variación en las respuestas de los estudiantes, lo que indica una comprensión sólida en estas nociones.

Por otro lado, las preguntas relacionadas con la identificación de configuraciones y relaciones de figuras (Preguntas 4 y 5) mostraron una comprensión ligeramente más baja y una variedad moderada en las respuestas de los estudiantes. Esto sugiere que los estudiantes pueden necesitar más práctica en la identificación y comparación de figuras.

Las preguntas sobre determinar la equivalencia de área y perímetro (Preguntas 6, 7 y 8) obtuvieron resultados mixtos, con algunas respuestas más sólidas y otras menos precisas. La Pregunta 7 en particular mostró la mayor variedad en las respuestas de los estudiantes, lo que indicó una comprensión menos consistente de las nociones de área y perímetro.

3.2.1.2 Conclusiones Iniciales para Estructurar el Diseño

En esta sección se encuentran los aspectos generales de la implementación de la prueba diagnóstica y la rejilla de análisis que se utilizó para el estudio de las respuestas de cada estudiante, lo que permitió detallar en los aspectos de estructuración del diseño, como se muestra en el Anexo 2 (ver [Anexo 2 Tabla 1 y 2 para el análisis del Pretest.pdf](#)).

En términos generales, los estudiantes mostraron habilidad para identificar figuras y hacer distinciones entre ellas en cuanto a tamaño y posición. Sin embargo, algunas respuestas revelaron confusiones respecto a la noción de rotación. Además, se observó una variedad en la profundidad de las descripciones de las respuestas, desde limitadas hasta más detalladas, incluyendo propiedades específicas de las figuras geométricas planas presentadas en las preguntas.

Gran parte de los estudiantes lograron diferenciar correctamente la noción de perímetro y área y se destacaron respuestas que mostraron una comprensión clara de la diferencia entre ambas nociones, así como la capacidad para aplicar esta comprensión en un contexto práctico al reconocer áreas y perímetros.

Se pudo evidenciar que los estudiantes demostraron comprensión de las nociones de los movimientos de rotación y traslación, así como la capacidad para establecer la coexistencia de ambos movimientos.

Se observó que algunos estudiantes utilizaron trazos auxiliares para determinar áreas y establecer relaciones de equivalencia entre figuras, mientras que otros mostraron confusión en la noción de área. Se observó una comprensión variable en cuanto a la identificación de configuraciones y congruencia entre figuras geométricas planas.

La comprensión por parte de algunos estudiantes fue variable en la noción de área y conservación de área, pues no todos identificaron correctamente la equivalencia de áreas entre las figuras, al establecer dicha relación de equivalencia entre dos figuras iguales en área pero en distinta forma. Sin embargo, la mayoría logró determinar áreas y perímetros utilizando fórmulas, pero algunas respuestas mostraron confusión en la unidad de medida o en la forma de hallar el perímetro.

Finalmente, existe una comprensión variable en cuanto a la relación entre área y perímetro, así como en el cambio de registro de representación y en la determinación de figuras con áreas y perímetros específicos, donde algunos estudiantes lograron encontrar la figura correcta con el valor de área y perímetro solicitados, mientras que otros no ofrecieron una descripción detallada, así como en la identificación de semejanzas y diferencias entre figuras planas.

3.3 Estructuración del Diseño (Trayectoria de Aprendizaje) y Estrategia de Análisis

En esta sección se describe una propuesta de enseñanza para el área de matemáticas titulada “Equivalencias Geométricas Planas”. La intervención didáctica (propuesta) está dirigida a los estudiantes de grado octavo de la educación secundaria en el contenido curricular matemático, Equivalencias Geométricas Planas, para el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, que según el MEN:

Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas, aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas y uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. (2006, p. 86).

Este diseño fue un libro creado con el recurso de geometría dinámica GeoGebra, que buscó estimular y desarrollar el pensamiento espacial y sistemas geométricos en las competencias de: resolución de problemas, comunicación y razonamiento de saberes relacionados con la noción del signo igual, además, se buscó que los estudiantes no sólo resolvieran problemas, sino que pudieran conjeturar en base a la noción del signo igual.

El instrumento de enseñanza dentro del recurso fue el Tangram. Este, será el artífice de lograr el paso a una interpretación “más asertiva” del signo igual. El Tangram, no se utilizó de forma aleatoria, sino, teniendo en cuenta los cimientos del álgebra, la cual en ciertos momentos, parte de su corpus teórico que se fundamenta gracias a la geometría; un ejemplo claro de esto serían los “productos notables”, pues “la matemática griega, de alguna manera, hizo su

aportación a la justificación geométrica de las ecuaciones algebraicas con *Los elementos de Euclides 500 a.C*” (Massa, 2014, p. 317).

Además, al implementar la geometría para establecer equivalencias, puede ser un poco “más ameno” para el aprendizaje, por el hecho de ser interactivo gracias a la naturaleza de la geometría que contiene una parte visual y otra de carácter teórico.

La secuencia de actividades se diseñó para los estudiantes de grado octavo de la educación colombiana. Esta utilización de los diferentes recursos y herramientas en esta propuesta de trabajo de grado: Geometría, GeoGebra, relación de equivalencia, signo igual, Tangram, tienen un sustento formal (ver [Dimensión Didáctica](#)) respaldado por trabajos de diferentes investigadores, que identificaron dificultades y maneras de cómo poder tratar los problemas u obstáculos que se investigan en este tema.

Este diseño está acompañado de ciertas preguntas, las cuales, fueron enfocadas al establecimiento de relaciones y configuraciones entre figuras geométricas, o en palabras más simples, que las figuras geométricas al ser objetos matemáticos “más conocidos” puedan servir como puente para poder alcanzar un mejor acercamiento a la esencia del signo igual. Según Palarea (1998) manifiesta que las diferentes figuras geométricas y sus diferentes dimensiones, pueden tener el potencial de servir como recurso para la adquisición de un lenguaje algebraico, además de poder establecer ciertas bases operacionales.

La propuesta de enseñanza consta de cuatro niveles que se encuentran en “Los modelos Emergentes de la Heurística” como lo plantea Cárcamo (2017):

- **Nivel Situacional**, el cual involucra que los estudiantes trabajen en dirección a los objetivos matemáticos a partir de experiencias reales y cotidianas para ellos.

- **Nivel Referencial**, abarca modelos de descripciones, conceptos y procedimientos que refieren al problema de la actividad situacional.
- **Nivel General**, el cual supone modelos para explorar, reflexionar y generalizar lo obtenido en el nivel referencial.
- **Nivel Formal**, que conduce a que los estudiantes reflejen el surgimiento de una nueva realidad matemática, por tanto, trabajan con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que le otorgaron su significado inicial (ver [Los niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes](#)).

Ahora bien, la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje*, jugó un papel importante en la estructuración del diseño, debido a que, como su propio nombre lo dice, “es la forma teórica-ideal en que se pretende abordar el diseño” desde la visión que tienen los docentes en formación que hacen las veces de investigadores, como se muestra en la tabla 3:

Tabla 3

Tareas de aprendizaje y proceso hipotético de aprendizaje de la THA sobre equivalencias geométricas planas

Tarea de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
<i>Tarea 1A:</i> Dadas las figuras geométricas del tangram, se deben completar las siluetas que se proporcionan.	El estudiante: (a) debe reconocer las diferentes figuras geométricas que se presentan y (b) en base a las características de las figuras completar las siluetas que se presentan allí.
<i>Tarea 1B:</i> Dadas las figuras geométricas del tangram, se deben completar las siluetas que se proporcionan.	El estudiante: (a) debe reconocer las diferentes figuras geométricas que se presentan y (b) en base a las características de las figuras completar las siluetas que se presentan allí. Además (c) establecer relaciones entre las tres siluetas formadas, respecto a su área.
<i>Tarea 2A:</i> Identificar la igualdad en cuanto al área de las figuras, sin tener en cuenta su apariencia superficial	El estudiante: (a) debe reconocer las diferentes figuras geométricas planas que se presentan, (b) en base a las características de las figuras completar la silueta que se presenta allí y (c) además, reconocer la composición de figuras, lo cual influye respecto a sus áreas
<i>Tarea 2B:</i> Extraer requisitos tanto suficientes como necesarios para establecer la similitud o congruencia de las	El estudiante: (a) debe reconocer las diferentes figuras geométricas que se presentan, (b) en base a las características

figuras, considerando aspectos como la conservación de la forma de las figuras del tangram y la variación en el tamaño de las siluetas.

de las figuras completar las siluetas que se presenta allí, (c) además, reconocer la composición de figuras, lo cual influye respecto a su área y (d) reconocer la conservación de áreas, en las diferentes siluetas con distintas configuraciones visuales.

Tarea 2C: Reconocer y distinguir figuras planas que poseen características similares en términos de forma o área, así como identificar las variadas configuraciones que pueden adoptar estas figuras geométricas en un plano.

El estudiante: (a) debe reconocer la conservación de área, en las diferentes siluetas con distintas configuraciones visuales y (b) conjeturar en base a las configuraciones geométricas planteadas en la tarea, así mismo (c) identificar las semejanzas o diferencias que puedan presentar las figuras planas en términos de área o forma.

Tarea 3A: Dados una serie de 6 puntos que muestran diferentes figuras, dichos puntos se mueven dentro de un plano. Determinar mínimo dos figuras equivalentes en términos de área o puntos dentro del área.

El estudiante: (a) debe explorar la figura inicial que se presenta y encontrar diferentes configuraciones en el plano y (b) observar y conjeturar que pueden existir figuras de diferentes formas, que pueden abarcar el mismo espacio o que son equivalentes en su área.

Tarea 3B: Dada una “animación” de una figura geométrica plana que se configura en otra, reconocer y determinar la o las características de la composición de figuras y la conservación de área.

El estudiante: (a) observa la “animación” de la figura inicial y su transformación final para luego (b) conjeturar que las áreas no son un proceso estático, sino que, se pueden componer de diferentes figuras geométricas conocidas y conservando su área.

Tarea 3C: Dada una “animación” de una figura geométrica que se transforma en otra, reconocer y determinar la o las características de la composición de figuras y la conservación de área.

El estudiante: (a) observa la “animación” de la figura inicial y su transformación final para luego (b) conjeturar que las áreas no son un proceso estático, sino que, se pueden componer de diferentes figuras geométricas conocidas y (c) observar la conservación de área, por medio de valores numéricos de las áreas de la figuras que componen la figura compuesta, con su área total.

Tarea 4A: Dadas dos figuras geométricas, las cuales, se componen de cuadrículas, donde cada cuadrícula es $1U^2$, se busca realizar una conjetura entre la forma y el área.

El estudiante: (a) observa las dos figuras presentadas para luego (b) conjeturar que las áreas tienen distintas configuraciones en forma y aún así ser equivalentes en área. (c) Determina la conservación del área, a pesar del cambio en las figuras respecto a su forma.

Tarea 4B: Según las tres figuras convexas planteadas, las cuales están formadas de otras figuras, se pretende inferir o conjeturar sobre la composición de las mismas respecto a la equivalencia de las áreas.

El estudiante: (a) observa las figuras presentadas para luego (b) establecer la composición de las figuras y (c) determinar la equivalencia de área entre las figuras y así poder (d) generalizar la conjetura sobre el área de diversas figuras convexas.

Tarea 4C: Con las tres figuras planteadas, se busca hacer una relación de equivalencia entre sus áreas sin importar la forma de cada figura.

El estudiante: (a) observa las figuras presentadas para luego (b) conjeturar sobre la conservación del área independientemente de su forma, para (c) donde se pueda evidenciar un cambio de registro de representación.

Nota. La tabla muestra una recopilación descriptiva de las tareas de aprendizaje y proceso hipotético de aprendizaje de la THA sobre equivalencias geométricas planas, utilizadas en el Diseño. Fuente: Elaboración propia.

Las diferentes formas de interpretar el signo igual pueden tener sus diferentes alcances dentro del aprendizaje de las matemáticas, pero la investigación se centró en la noción de

equivalencia, debido a que, al interiorizar este objeto matemático, los estudiantes pudieran ver el proceso de igualdad en un sentido “recíproco” a como se concibe habitualmente, es decir, que no vean las igualdades como solucionar u operar, sino, que tengan la rigurosidad de ver el signo igual como la generalidad de un fenómeno físico o abstracto.

Un ejemplo de lo anterior sería, que al ver la fórmula del área de un rectángulo, no lo vean como realizar una “simple” multiplicación, sino, que tengan la postura de poder hacer un análisis a la fórmula en cuestión y ¿Por qué no?, poder hacer una determinación de dicha fórmula, al relacionar dos medidas que pueden ser cualesquiera, y así, poder establecer el área de cualquier figura, que cumpla las condiciones de ser un rectángulo.

La distribución de las sesiones estuvieron comprendidas por los momentos de clase, es decir, los niveles de cada actividad del diseño, los cuales permitieron que los estudiantes avanzaran en la solución de las preguntas, sin dejar de lado el papel del docente, como se muestra en la tabla 4:

Tabla 4

Planeación de la implementación del Diseño

Etapa	(Tiempo) Descripción de la actividad	Distribución de los estudiantes
Introducción (Presentación objetivo de la propuesta)	(20 min) Introducción al manejo del Software de geometría dinámico GeoGebra: 1. Los estudiantes deben ingresar a su navegador de preferencia: Google Chrome, Mozilla Firefox, entre otros. 2. Los estudiantes deben ingresar al link: https://www.geogebra.org/classroom/qznfpnm5 4. Al ingresar al recurso, los estudiantes deben poner su nombre y dar clic en ingresar.	Clase magistral

5. Después encontrarán el diseño de las actividades en el Libro “Equivalencias Geométricas Planas”		
Aplicación del nivel situacional	(40 min) El nivel situacional involucra que los estudiantes trabajen en dirección a los objetivos matemáticos a partir de experiencias reales para ellos.	
	El docente guiará a los estudiantes para que realicen las actividades de este nivel, con el objetivo de que tengan un primer acercamiento a las equivalencias de figuras planas, de las que se compone el Tangram, partiendo de un contexto cotidiano como lo son las siluetas de la Tarea 1A y 1B contenidas en el libro de GeoGebra Equivalencias Geométricas Planas	Se espera que en este nivel el estudiante trabaje de forma individual, para que explore e interactúe con la actividad y sus preguntas orientadoras.
Aplicación del Nivel Referencial	(60 min) El nivel referencial abarca modelos de descripciones, conceptos y procedimientos que refieren al problema de la actividad situacional.	
	Los estudiantes tendrán el rol principal en la ejecución de las actividades de este nivel, con el objetivo de que reconozcan la equivalencia de figuras respecto a su área, también que lleguen a conjeturar sobre la conservación de forma y área, como lo son las Tareas 2A, 2B y 2C, que hacen uso del Tangram, contenidas en el libro de GeoGebra Equivalencias Geométricas Planas. Cabe aclarar que el docente está dispuesto para resolver dudas e inquietudes por parte de los estudiantes.	Se espera que en este nivel los estudiantes trabajen en parejas, para que puedan comunicarse y expresarse entre ellos, dando solución a las construcciones, pero de forma individual para dar respuesta a las preguntas planteadas en cada actividad del nivel.
Aplicación del Nivel General	(60 min) El nivel general supone modelos para explorar, reflexionar y generalizar lo obtenido en el nivel referencial.	
	Los estudiantes tendrán el rol principal en la ejecución de las actividades de este nivel, con el objetivo de que tengan un primer acercamiento a las distintas configuraciones de las figuras planas, que pueden tener el mismo valor de área, también que los estudiantes puedan reconocer la composición de figuras como lo son las Tareas 3A, 3B y 3C, contenidas en el libro de GeoGebra Equivalencias Geométricas Planas. Cabe aclarar que el docente está dispuesto para resolver dudas e inquietudes por parte de los estudiantes.	Se espera que en este nivel los estudiantes trabajen de forma individual, para dar solución a las actividades.

Aplicación del Nivel Formal	(60 min) El nivel formal conduce a que los estudiantes reflejen el surgimiento de una nueva realidad matemática, por tanto, trabajan con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que le otorgaron su significado inicial.	Se espera que en este nivel los estudiantes trabajen de forma individual, para dar solución a las actividades. Además, se espera que puedan llegar a conjeturar y generalizar el tema central de las actividades.
	Los estudiantes tendrán el rol principal en la ejecución de las actividades de este nivel, con el objetivo de que tengan consolidado las equivalencias de figuras planas e incluso que lleguen a conjeturar, inferir o generalizar la equivalencia en área de las diferentes configuraciones. Establecer relaciones entre el área de las figuras, por medio de diferentes registros de representación al comparar las áreas de figuras planas al identificar patrones y regularidades, como se puede evidenciar las Tareas 4A, 4B y 4C, contenidas en el libro de GeoGebra Equivalencias Geométricas Planas. Cabe aclarar que el docente está dispuesto para resolver dudas e inquietudes por parte de los estudiantes.	
	En este momento se realizará el cierre y reflexiones de las actividades presentadas.	

Nota. La tabla muestra una descripción de los momentos y aplicaciones de las Tareas del Diseño en cada Nivel de la implementación. Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 4

En este capítulo se presentan y analizan los resultados y rasgos generales de cada nivel de aprendizaje en que se estructuró el diseño. Además se analizan detalladamente las producciones más representativas de las diversas aplicaciones que se llevaron a cabo durante la implementación de cada diseño de actividades.

En consideración con lo mencionado anteriormente, el capítulo se inicia con el análisis del nivel situacional donde se sintetizan los resultados más representativos de las primeras aplicaciones, luego se explicitan los hallazgos o resultados más representativos para lo cual, se seleccionan algunas producciones de estudiantes que fueron codificadas y se da cierre a cada nivel de aprendizaje con un apartado de reflexiones que surgieron de una del cierre de la implementación entre investigadores y estudiantes. Lo cual, permitió sustentar el porque se puede asegurar que hay aprendizajes alcanzados por parte de los estudiantes.

Cabe aclarar que producto de esta investigación, del marco teórico que sustenta este trabajo y la comparación de los resultados obtenidos con otras investigaciones, se establecieron una serie de categorías de análisis que ayudaron a sintetizar y caracterizar los análisis alusivos a los niveles referencial, general y formal que son los que terminan de conformar el modelo teórico que sustentó el Diseño resultante.

4.1 Nivel situacional

De acuerdo a los propósitos planteados sobre reconocer la composición de figuras planas, a través de otras y la conservación de la forma de las figuras en los diferentes momentos del desplazamiento, la finalidad de este nivel parte de que los estudiantes al observar que cada silueta podría requerir un igual número de piezas para construirse al cambiar su configuración, pueden hallar algún patrón recurrente en la composición de las piezas en las siluetas. Por

ejemplo, si hay alguna figura básica (como un cuadrado) que siempre se encuentra en una posición específica en todas las construcciones.

Particularmente, en este nivel se encuentra la equivalencia de área, donde dos siluetas puedan requerir el mismo número de piezas para construirse, esto no garantiza que tengan la misma forma, sin embargo, se puede encontrar alguna relación entre el número de piezas y el área de las siluetas, además, si dos siluetas con el mismo número de piezas son equivalentes en términos de área.

Las respuestas proporcionadas por los estudiantes reflejaron una variedad de comprensiones sobre las siluetas del Tangram y el número de piezas necesarias para construirlas. Esta diversidad de percepciones promovió la importancia de fortalecer la enseñanza de nociones geométricas básicas como la relación entre formas y la cantidad de piezas requeridas. Las orientaciones curriculares resaltaron la importancia del pensamiento espacial y la comprensión de sistemas geométricos, lo cual se relaciona directamente con la capacidad de los estudiantes para identificar patrones y relaciones en las siluetas del Tangram.

La relación de las respuestas respecto a la Dimensión Didáctica mostró una falta de uniformidad en la comprensión de las nociones geométricas implicadas en la construcción de las siluetas a partir de las piezas del Tangram, lo cual resaltó la necesidad de utilizar didácticas que puedan llegar a facilitar la comprensión de los estudiantes sobre la relación entre las formas geométricas y el número de piezas requeridas.

Pues al utilizar recursos como GeoGebra puede “llegar a estimular” una visualización no icónica y explorar estas relaciones de manera perceptiva como lo plantea Duval, lo que fomentaría un aprendizaje más activo y significativo.

A continuación se presentan algunas situaciones particulares que se destacan de las producciones de los estudiantes del aplicativo de GeoGebra.

4.1.1 Hallazgos del Nivel Situacional

En este primer nivel, en la Tarea 1A se le solicitó al estudiante que para empezar la primera actividad, realizara la construcción de tres siluetas como se muestra en las figuras 14, 15 y 16 y arrastrara las piezas de color negro del Tangram, para formar la silueta que se encuentra en la parte izquierda de la pantalla. Al terminar la construcción de cada silueta, el estudiante debía PULSAR la flecha de color rojo para avanzar a la siguiente silueta.

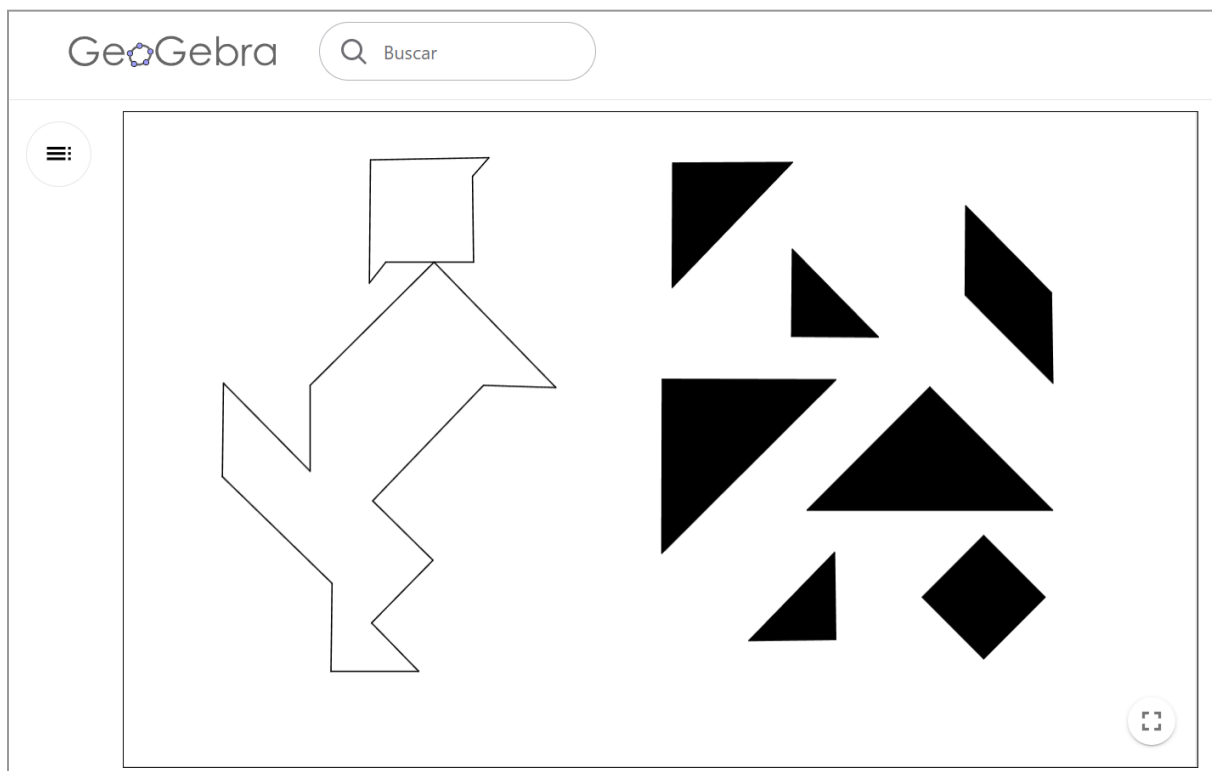


Figura 14. Primera construcción Tarea 1A Nivel Situacional. Las figuras geométricas de color negro, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda. Fuente: Elaboración propia.

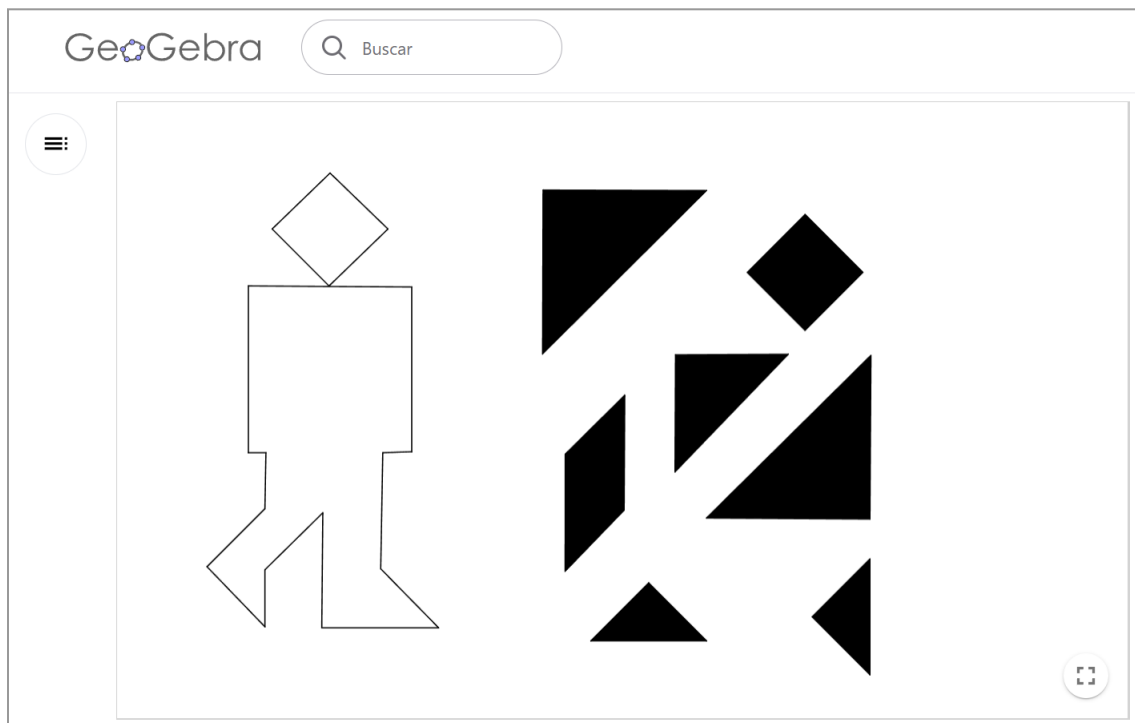


Figura 15. Segunda construcción Tarea 1A Nivel Situacional. Las figuras geométricas de color negro, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda. Fuente: Elaboración propia.

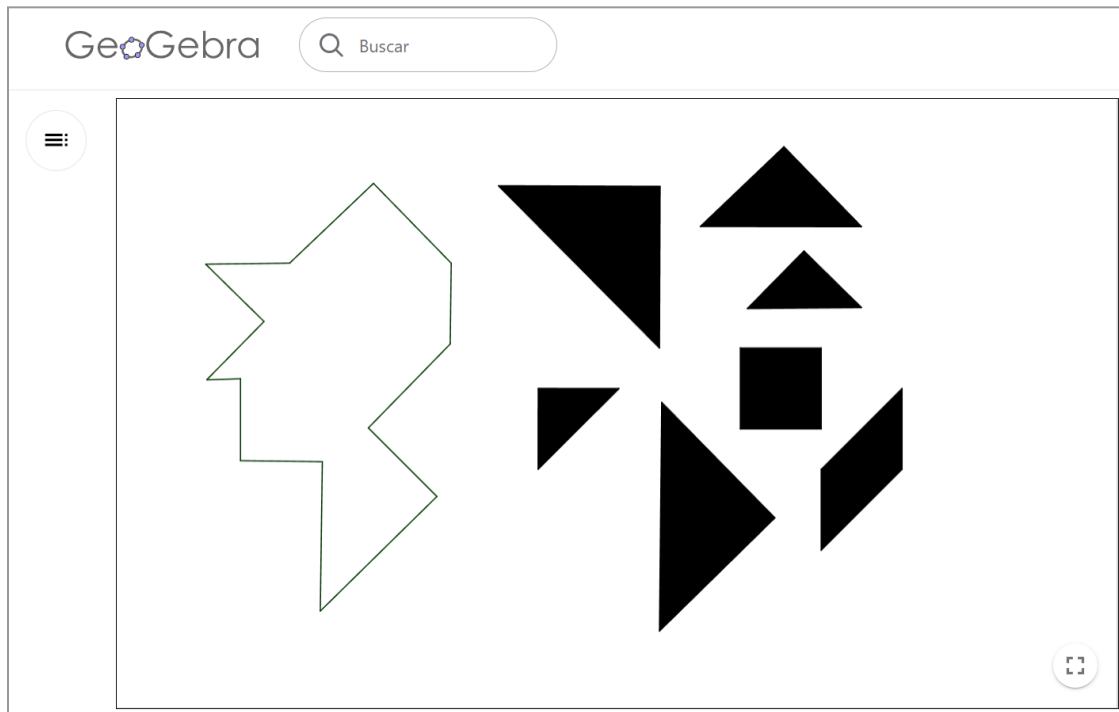


Figura 16. Tercera construcción Tarea 1A Nivel Situacional. Las figuras geométricas de color negro, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda. Fuente: Elaboración propia.

En base a las construcciones que realizaron los estudiantes E5, E6 y E14, se pudo evidenciar que los tres estudiantes coinciden en que las tres siluetas tienen la misma cantidad de piezas, esto sugiere que comprendieron la pregunta y la información proporcionada sobre las siluetas, según la Geometría Activa (ver [Geometría activa](#)) se presenció la participación activa de los estudiantes, puesto que al realizar y cumplir con las construcciones de manera dinámica al tener una comprensión del espacio y las formas, en este caso de las siluetas.

Para los casos de los estudiantes E6 y E14 especificaron que el número de piezas es 7, lo cual proporcionó una respuesta más completa en comparación con E5, que solo mencionó que las siluetas tienen la misma cantidad de piezas sin especificar el número (ver las figuras 17, 18 y 19).

← E4 laura ramirez

< 10/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 2

1. Respecto a las tres figuras planteadas: **SILUETA 1**, **SILUETA 2** y **SILUETA 3**, ¿Existe alguna silueta que haya requerido de más o menos número de piezas para construirse?

Respuesta

no ya que todas las siluetas tienen el mismo numero

Figura 17. Respuesta de estudiante E4 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E4, a la pregunta 1 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

 E5 Briana Paulet C...  15/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 2

1. Respecto a las tres figuras planteadas: **SILUETA 1**, **SILUETA 2** y **SILUETA 3**, ¿Existe alguna silueta que haya requerido de más o menos número de piezas para construirse?

Respuesta

no, las 3 siluetas tenían la misma cantidad de piezas

Figura 18. Respuesta de estudiante E5 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E5, a la pregunta 1 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

 E6 valeria arce bu...  8/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 2

1. Respecto a las tres figuras planteadas: **SILUETA 1**, **SILUETA 2** y **SILUETA 3**, ¿Existe alguna silueta que haya requerido de más o menos número de piezas para construirse?

Respuesta

no , todas las siluetas tienen el mismo numero de piezas que son 7

Figura 19. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 1 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

E2 y E6 se enfocaron en patrones relacionados con el tamaño y la posición central de las piezas, ambos estudiantes coincidieron en que las piezas más grandes tienden a estar en el centro y las más pequeñas en las “esquinas”. En cambio, E7 observó un patrón específico en la posición del triángulo isósceles, proporcionando un detalle adicional sobre la configuración de una pieza

específica, sin embargo, queda una ambigüedad al referirse al “triángulo isósceles” puesto que, no solo hay un triángulo con esa característica.

En las respuestas proporcionadas por el estudiante E7 se vio reflejado el Sistema Geométrico (ver [Sistema geométrico](#)), que según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) consiste en las exploraciones e interacciones empíricas que van teniendo los estudiantes con el mundo físico al llegar a tener representaciones geométricas de las experiencias individuales. (ver figura 20, 21 y 22).

← E6 valeria arce bu... < 8/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 3

2. ¿Notas algún patrón en las construcciones de las siluetas? **Por ejemplo:** El cuadrado siempre se encontrará en una misma posición, en las tres construcciones de las siluetas.

Respuesta

si, el paralelogramo en las 3 siluetas tiene diferente posicion , tambien todas las siluets tiene el mismo numero de piezas , y algunas son grandes , medianas ,pequeñas , las grandes siempre van a l mitad e igual a las medianas y las pequeñas van alrededor

Figura 20. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 2 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

← E2 Silvana Penago...
16/18

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 3

2. ¿Notas algún patrón en las construcciones de las siluetas? **Por ejemplo:** *El cuadrado siempre se encontrará en una misma posición, en las tres construcciones de las siluetas.*

Respuesta

Yo note que las figuras mas grandes casi siempre iban en el centro, y las mas pequeñas en las esquinas, ya que las grandes ocupan un mayor espacio y las pequeñas completan las esquinas de los espacios pequeños en blanco

Figura 21. Respuesta de estudiante E2 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 2 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

← E7 Marco Antonio...
13/18

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 3

2. ¿Notas algún patrón en las construcciones de las siluetas? **Por ejemplo:** *El cuadrado siempre se encontrará en una misma posición, en las tres construcciones de las siluetas.*

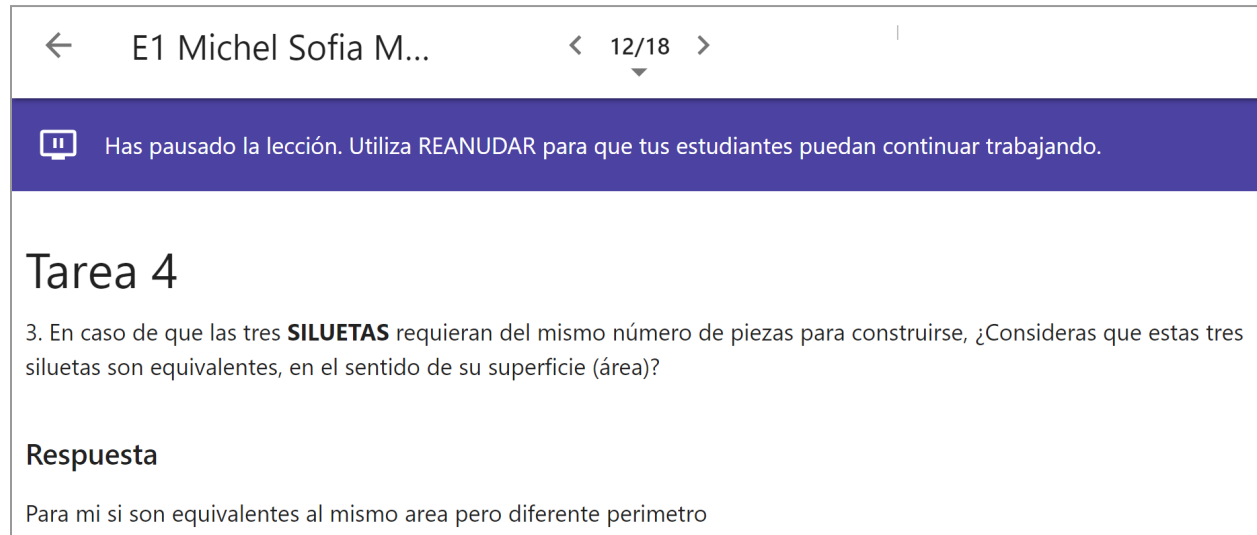
Respuesta

el triangulo isoseles siempre se encuentra en la misma posicion de las tres siluetas

Figura 22. Respuesta de estudiante E7 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E7, a la pregunta 2 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

Los estudiantes E1, E10 y E13 coincidieron en que las siluetas tienen la misma área, pues todos relacionaron la equivalencia de área con el hecho de que las siluetas estaban construidas con las mismas piezas o figuras.

E1 muestra un nivel de comprensión geométrica, que va “un poco más allá”, al mencionar el perímetro, donde detalló que el área puede ser igual, mientras que el perímetro puede variar dependiendo de la posición de las piezas. En esta respuesta se pudo ver la visualización no icónica (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)), como lo plantea Duval (2005) la percepción visual implica dos niveles de operaciones distintos pero independientes: el reconocimiento de formas (icónica) y la identificación de objetos basados en esas formas reconocidas (no icónica). Como se muestra en las figuras 23, 24 y 25:



← E1 Michel Sofia M... < 12/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 4

3. En caso de que las tres **SILUETAS** requieran del mismo número de piezas para construirse, ¿Consideras que estas tres siluetas son equivalentes, en el sentido de su superficie (área)?

Respuesta

Para mi si son equivalentes al mismo area pero diferente perimetro

Figura 23. Respuesta de estudiante E1 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 3 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

 E10 . Maria Alejan...  2/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 4

3. En caso de que las tres **SILUETAS** requieran del mismo número de piezas para construirse, ¿Consideras que estas tres siluetas son equivalentes, en el sentido de su superficie (área)?

Respuesta

considero que las 3 siluetas tienen la misma area ya que se componen de la mismas figuras

Figura 24. Respuesta de estudiante E10 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E10, a la pregunta 3 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

 E13 Kimberly Oso...  1/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 4

3. En caso de que las tres **SILUETAS** requieran del mismo número de piezas para construirse, ¿Consideras que estas tres siluetas son equivalentes, en el sentido de su superficie (área)?

Respuesta

Si, las tres siluetas tienen la misma area debido a que tiene las mismas piezas

Figura 25. Respuesta de estudiante E13 Tarea 1A. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 3 de la Tarea 1A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

Estos hallazgos indicaron que los estudiantes desarrollan competencias en geometría a través de la manipulación de las piezas del Tangram por medio del recurso de GeoGebra, lo cual en parte está relacionada con los principios de la Geometría Activa y el Sistema Geométrico. Las respuestas dieron a entender que algunos estudiantes están comenzando a diferenciar entre las

nociones de área y perímetro, lo que indicó que el propósito del diseño puede llegar a brindar al estudiante un acercamiento al desarrollo del pensamiento espacial.

La Tarea 1B de este primer nivel, estuvo diseñada para que los estudiantes reconocieran la composición de figuras planas mediante la utilización de otras figuras (ver figuras 26, 27, 28) y para que comprendieran la conservación de la forma, mientras estas figuras se desplazan. Para ello, debían arrastrar y posicionar las piezas del Tangram para formar las siluetas de color gris, al utilizar el punto de color verde, para girarlas y sosteniendo el punto de color rojo, para arrastrarlas o moverlas con la mano que aparece al señalarlas con el mouse.

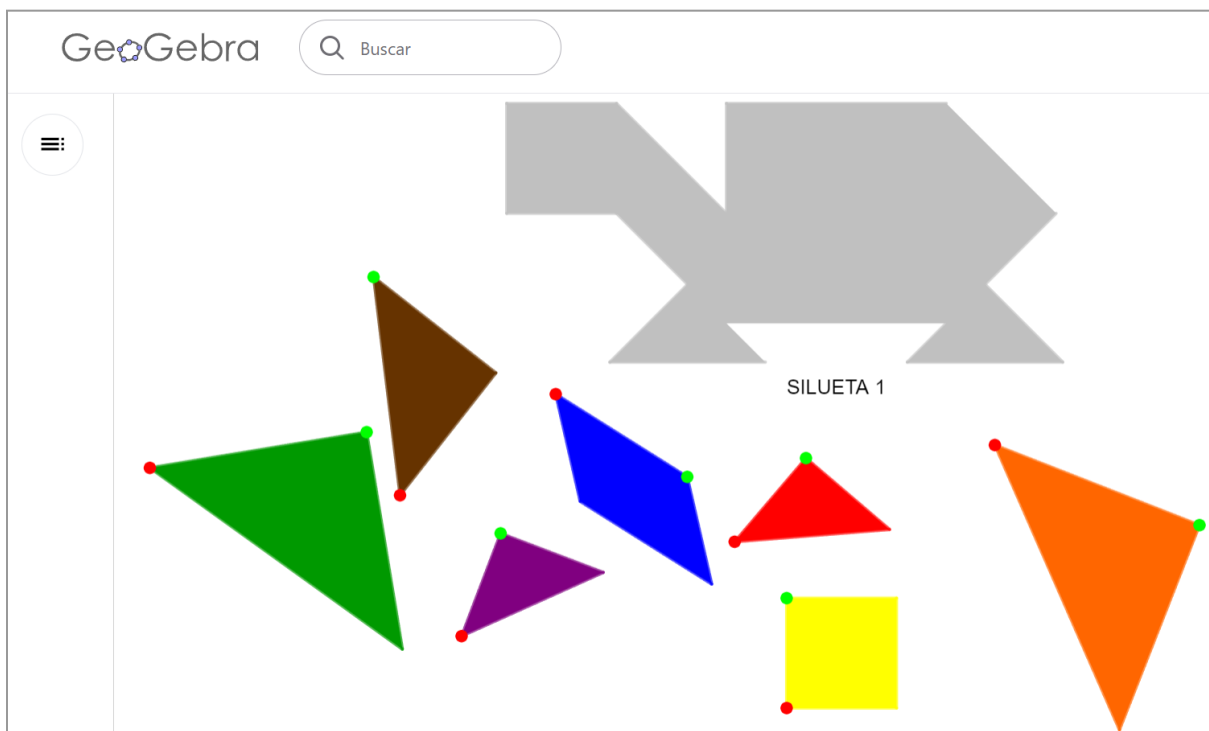


Figura 26. Primera construcción Tarea 1B Nivel Situacional. Las figuras geométricas de colores, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda. Fuente: Elaboración propia.

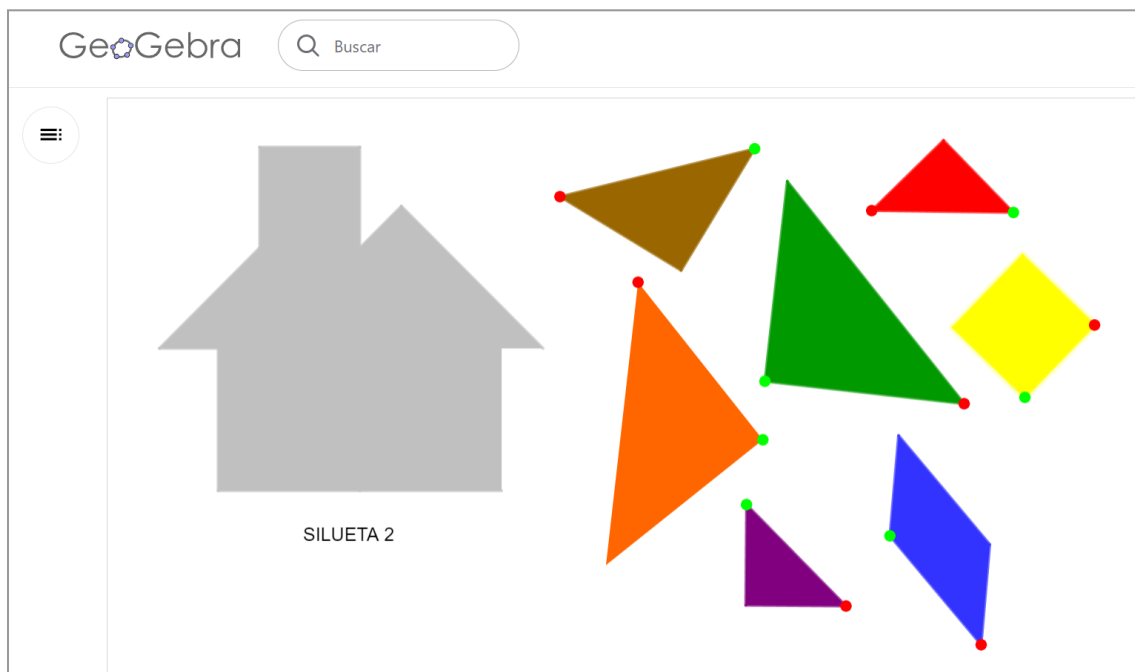


Figura 27. Segunda construcción Tarea 1B Nivel Situacional. Las figuras geométricas de colores, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda. Fuente: Elaboración propia.

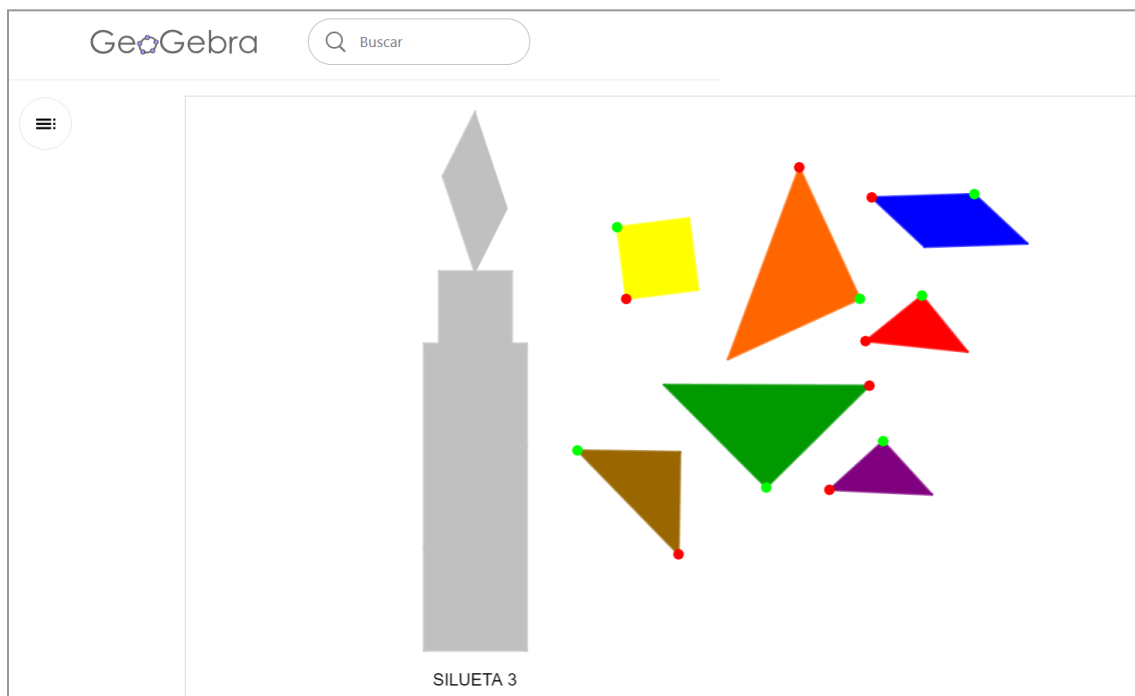


Figura 28. Tercera construcción Tarea 1B Nivel Situacional. Las figuras geométricas de colores, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda. Fuente: Elaboración propia.

Al finalizar cada construcción, los estudiantes debían avanzar a la siguiente actividad y responder las preguntas relacionadas con las figuras construidas, lo cual les permitió desarrollar “habilidades” en la identificación e interacción con figuras geométricas, y observar cómo las siluetas de color gris, se componen de las piezas del Tangram.

En base a las construcciones que realizaron los estudiantes E5, E6 y E14, se pudo evidenciar que los tres comprendieron la esencia de la pregunta, que se centra en la cantidad de piezas utilizadas para construir cada silueta.

Para el caso del estudiante E5, la respuesta no es completamente precisa, pues al mencionar que “todas las piezas son iguales” se pudo interpretar de dos maneras: que todas las siluetas están compuestas de las mismas piezas (tamaño y forma) o que la cantidad de piezas es la misma para cada silueta; sin embargo, no se mencionó explícitamente la cantidad de piezas.

Para el caso de E6, se pudo evidenciar que el estudiante especificó que todas las siluetas tienen la misma cantidad de piezas, que son 7. No obstante, la frase “la diferencia” no está claramente conectada con el resto de la respuesta y puede causar confusión, pues parece que E6 está intentando afirmar que no hay diferencia en la cantidad de piezas.

Por otra parte, la respuesta del estudiante E14 fue más precisa y completa, porque niega la existencia de una diferencia en la cantidad de piezas y afirma que cada silueta tuvo exactamente 7 piezas. Esta respuesta fue la más completa y coherente de las tres (ver las figuras 29, 30 y 31).

 E5 Briana Paulet C...  15/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 8

1. ¿Cuál de las tres siluetas, **SILUETA 1**, **SILUETA 2** o **SILUETA 3**, requirió una cantidad de piezas diferente para su construcción?

Respuesta

ninguna, todas las piezas son iguales

Figura 29. Respuesta de estudiante E5 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E5, a la pregunta 1 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

 E6 valeria arce bu...  8/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 8

1. ¿Cuál de las tres siluetas, **SILUETA 1**, **SILUETA 2** o **SILUETA 3**, requirió una cantidad de piezas diferente para su construcción?

Respuesta

ninguna, todas son iguales y tiene las misma cantidad de piezas que son 7 la diferencia

Figura 30. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 1 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

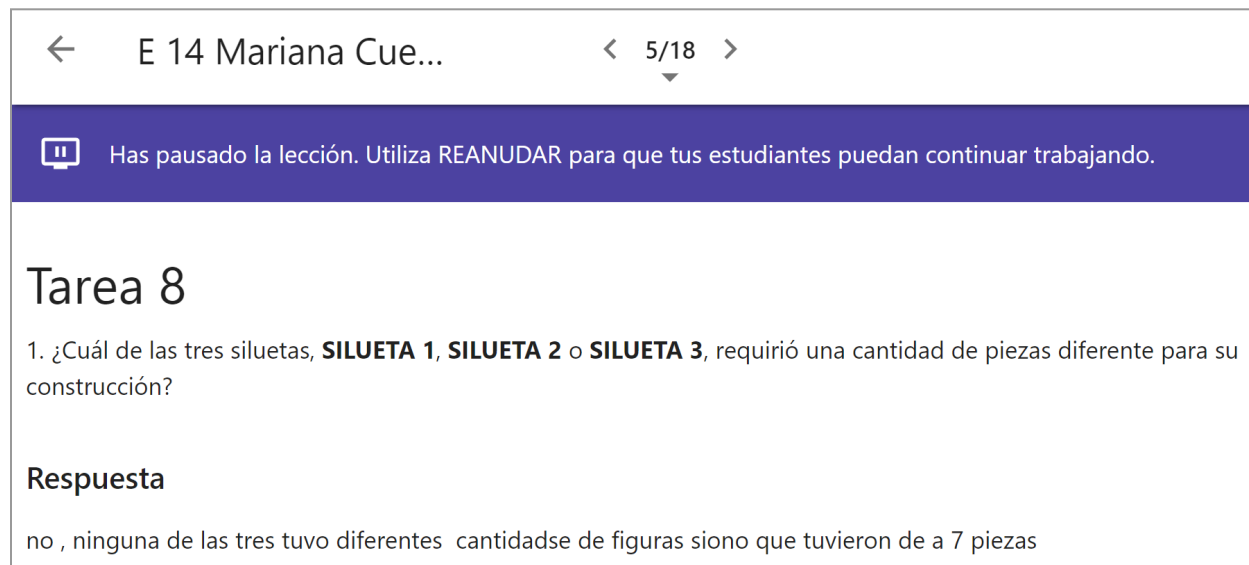


Figura 31. Respuesta de estudiante E14 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E14, a la pregunta 1 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

En la pregunta 2 de la Tarea 2A, cada estudiante abordó la pregunta de manera diferente, aportando distintas perspectivas e interpretaciones sobre las semejanzas o diferencias que se puedan evidenciar en las SILUETAS.

En el caso de la identificación de diferencias de las tres SILUETAS, E5 mencionó que las tres siluetas tienen diferente forma y que las piezas están acomodadas de manera distinta; para el caso del estudiante E6, se pudo evidenciar su mención sobre que las tres siluetas tienen formas diferentes y variaciones en el tamaño de las figuras dentro de cada silueta, además, resaltó que las figuras rotan.

Pues al tener en cuenta la postura de Corberán (1996) donde menciona que la finalidad de la enseñanza del área en la educación, tanto primaria como secundaria, no debería limitarse a buscar una conceptualización de lo que podría ser el área, sino, debería mostrar a los estudiantes la diversidad de caminos o procedimientos que ayudan a la medición y comparación de áreas de superficies planas, esto se vió reflejado en las respuestas de los estudiantes E5 y E6.

Por el contrario, el estudiante E14, presentó una confusión en la noción de semejanza, al afirmar “las tres siluetas no tienen la misma semejanza, sino que lo que tienen en común, es que tienen el mismo número de figuras” lo cual al justificar su respuesta se “deduce” que si hay una semejanza.

Para la identificación de las semejanzas de las siluetas de color gris, el estudiante E5 afirmó que todas las siluetas tienen la misma cantidad de piezas, en cambio E6, indicó que, a pesar de las diferencias en tamaño y rotación, las figuras son iguales. En el caso de E14, compartió la misma afirmación respecto a E5, sobre que la semejanza principal entre las siluetas, es que todas tienen la misma cantidad de piezas o figuras, como se puede ver en las figuras 32, 33 y 34:

 E5 Briana Paulet C...  15/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 9

2. ¿Qué semejanza o diferencia puedes identificar entre las tres **SILUETAS**?

Respuesta

las 3 siluetas tienen diferentes forma y las piezas están acomodadas de forma diferente, pero todas tienen la misma cantidad de piezas.

Figura 32. Respuesta de estudiante E5 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E5, a la pregunta 2 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

← E6 valeria arce bu... < 8/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 9

2. ¿Qué semejanza o diferencia puedes identificar entre las tres **SILUETAS**?

Respuesta

la diferencia es que las 3 tiene difrente formas , pero son iguales todas las figuras por que varian su tamaño en las tres siluetas un ejemplo es que los cuadrados son pequeño , los triangulos son grandes otra diferencia es que rotan

Figura 33. Respuesta de estudiante E6 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 2 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

← E 14 Mariana Cue... < 5/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 9

2. ¿Qué semejanza o diferencia puedes identificar entre las tres **SILUETAS**?

Respuesta

las tres siluetas no teinen las misma semejanza sino que lo que tienen en comun es de que tienen el mismo numeros de figuras.

Figura 34. Respuesta de estudiante E14 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E14, a la pregunta 2 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

En la pregunta 3, los estudiantes E1, E7 y E10 lograron dar respuesta a la pregunta, sin embargo, sería recomendable reforzar la noción de área y cómo diferentes configuraciones de piezas (figuras geométricas) pueden afectar la superficie total de una figura (silueta), (ver [Nociones de área y superficie](#)) al asegurar una posible comprensión de que la misma cantidad de piezas no garantiza la misma área si las piezas no son uniformes (iguales entre sí).

E1 expresó que las siluetas son equivalentes en superficie, pero no da cuenta de una explicación detallada o “razonamiento” que respalde su afirmación, lo que dio evidencia de una “comprensión básica” de la noción de equivalencia en términos de superficie.

E7 manifestó que la equivalencia en superficie se debe a que todas las siluetas se componen de las mismas figuras (piezas), asumiendo que las piezas que componen las SILUETAS son idénticas en forma y tamaño (son iguales entre sí). Esta respuesta, implicó una comprensión de la noción de área, siempre y cuando las piezas sean efectivamente iguales, aunque no aborda el escenario en que las SILUETAS podrían variar en tamaño o forma pero sumar la misma superficie (ver [Propiedades de las áreas y superficies planas](#)).

Por otro lado, E10 señaló que las figuras pueden considerarse equivalentes en superficie, porque tienen la misma cantidad de piezas. El estudiante parece estar diciendo que si las figuras tienen la misma área, deben estar compuestas por la misma cantidad de piezas, pues esta afirmación puede interpretarse como que E10 comprendió que la cantidad de piezas es un indicador de la equivalencia en superficie.

Aunque la respuesta es algo confusa, E10 opinó que la cantidad de piezas determina la equivalencia en área, lo cual es parcialmente correcto si las piezas son iguales entre sí. Además, E10 rectificó que la equivalencia en área y la cantidad de piezas están directamente relacionadas; pero este “razonamiento” es válido sólo si se asume que las piezas son de tamaño y forma uniformes. Sin embargo, E10 no abordó esta suposición explícitamente en su respuesta (ver figuras 35, 36 y 37).

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 10

3. ¿Si las tres siluetas requieren la misma cantidad de piezas para construirse, podrían considerarse equivalentes en cuanto a su superficie (área)?

Respuesta

Considero que las tres siluetas si son equivalentes a su superficie

Figura 35. Respuesta de estudiante E1 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 3 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

 E2 Silvana Penago...  16/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 10

3. ¿Si las tres siluetas requieren la misma cantidad de piezas para construirse, podrían considerarse equivalentes en cuanto a su superficie (área)?

Respuesta

Si, creo que si se considera equivalente, ya que si una figura tiene una area o superficie, tiene que tener la misma cantidad de piezas

Figura 36. Respuesta de estudiante E2 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 3 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

←

E7 Marco Antonio...

< 13/18 >

⏮

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 10

3. ¿Si las tres siluetas requieren la misma cantidad de piezas para construirse, podrían considerarse equivalentes en cuanto a su superficie (área)?

Respuesta

si porque todas se compuesta de las mismas figuras

Figura 37. Respuesta de estudiante E1 Tarea 1B. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 3 de la Tarea 1B, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

A continuación, se presentan unas observaciones o reflexiones relacionadas con el primer nivel de la estructura del diseño.

4.1.2 Observaciones o reflexiones del primer nivel

En este apartado se tuvo presente para el análisis, dos de las intervenciones de los estudiantes y del docente, las cuales tuvieron una relación con unas categorías y códigos de análisis, para llegar a una reflexión parcial sobre la implicación de las actividades en los estudiantes (ver Tabla 5).

Tabla 5

Relación categoría - código

Relación categoría - código			
Número	Categoría		Código
1	Intención de la planificación	1.1	Finalidad de las actividades
		1.2	Énfasis en el objetivo de las actividades

2	Características de área	2.1	Observación sobre área y forma
		2.2	Relación del número de piezas
		2.3	Se especifica la composición de figuras
		2.4	Conservación de área
		2.5	Composición y características de las figuras
		2.6	Relación de la construcción y superficie de las figuras
		2.7	Conservación de área y variación de perímetro
		2.8	Descomposición de figuras
3	Equivalencias	3.1	Áreas equivalentes
		3.2	Conjetura sobre la cantidad de piezas
4	Configuración de figuras	4.1	Configuraciones de las figuras
		4.2	Noción de los conceptos de área y perímetro
5	Características del perímetro	5.1	Conjeturas sobre el perímetro
		5.2	Comparación de tamaño silueta - forma
6	Razonamiento	6.1	Razonamiento e interpretación
		6.2	Razonamiento sobre las configuraciones de las figuras
7	Características de polígono	7.1	Clasificación de las figuras
		7.2	Duda frente al concepto de Triángulo Isósceles
		7.3	Confusión entre forma y polígono
8	Casos particulares	8.1	Observación de conocimientos
		8.2	Aclaración de las actividades del Nivel Referencial
		8.3	Actividad 4B
		8.4	Respuesta actividad 4B
		8.5	Identificación de un problema en el recurso (GeoGebra)

		8.6	Utilización de lenguaje matemático para referirse a las figuras
		8.7	Apreciaciones del diseño por parte de los estudiantes
		8.8	Importancia del rol del profesor en la implementación del diseño
		8.9	Registros de representación

Nota. La tabla muestra la relación entre los códigos y categorías de análisis posterior a la implementación del Diseño, con el objetivo de realizar las observaciones y reflexiones en cada nivel de la implementación. Fuente: Elaboración propia.

4.1.2.1 Intervención 1

P: Entonces, les presento el libro, nuevamente ¿Lo recuerdan?, tenía cuatro niveles, nivel situacional, nivel referencial, nivel general, nivel formal, ¿Se acuerdan? Listo. El nivel situacional era como el más básico de todos, el de las actividades que son un poco contextualizadas, como las cosas que usted de pronto ya conoce, han trabajado fuera del colegio, han visto, bueno, en fin, o lo que hayan aprendido en todos estos años de su vida.

Entonces comencemos, ¿Listo? Estas son las tareas de Nivel Situacional, las que les voy a presentar. Son estas dos, ¿Se acuerdan? ¿Qué pudieron identificar de todas las figuras?

La que era de las sombritas y la que era de la tortuga, la casa y la vela. ¿Lo recuerdan? ¿Recuerdan qué fue lo que hicieron?

E15: Fue fácil y lo que pude identificar, pues, que cada una siempre van a tener siete figuras y se van a componer de lo mismo.

P: ¿Qué retos se le presentaron a usted en todo lo que hizo, en las construcciones?

E15: Pues casi ninguno, porque era fácil de hacer, como que a veces me equivocaba de lugar de una figura y pues lo hacía tomar y me tocaba hacerlo otra vez.

P: Ok. La tercera pregunta del Nivel Situacional. ¿Puedes compartir alguna experiencia en la que hayas reconocido la equivalencia entre dos figuras, o sea, que tenían la misma área?

E15: Las figuras todas tenían la misma área porque se componían... Sí, sí... Se componen de las mismas figuras y pues... pero de diferente forma.

4.1.2.2 Análisis Parcial 1

La intervención se centró en la presentación y discusión del Nivel Situacional, donde el profesor (P) presentó y socializó en qué consistió el nivel a partir de los propósitos, considerándolo como el más básico y enfocado en tareas contextualizadas que los estudiantes ya han encontrado en su vida cotidiana.

4.1.2.2.1 Categoría 2 Características de área. Código: Relación del número de piezas - Composición y características de las figuras

El estudiante E15 identificó claramente que las tareas involucraban figuras compuestas por el mismo número de piezas y que las figuras mantenían las mismas características de área. E15 dice: "Cada una siempre va a tener siete figuras y se van a componer de lo mismo", aquí, E15 tuvo un acercamiento a la comprensión de la relación del número de piezas y la composición de las figuras, al reconocer que a pesar de las diferentes formas, las figuras compartían una equivalencia en términos de piezas.

4.1.2.2.2 Categoría 3 Equivalencias. Código: Conjetura sobre la cantidad de piezas

En la pregunta sobre experiencias de reconocimiento de equivalencias, E15 mencionó: "Las figuras todas tenían la misma área porque se componían... Sí, sí... Se componen de las mismas figuras y pues... pero de diferente forma". Se observó que E15 posiblemente conjeturó sobre la equivalencia basada en la cantidad de piezas, al comprender que las figuras son

equivalentes en área, debido a que se componen del mismo número de piezas, a pesar de su forma diferente.

4.1.2.2.3 Categoría 5 Características del perímetro. Códigos: Comparación de tamaño - Silueta - forma

Aunque el diseño no aborda directamente las características del perímetro en detalle, E15 hizo referencia a las diferentes formas de las figuras, lo que implicó una consideración implícita de las características del perímetro cuando menciona la "diferente forma". Esta observación sugirió que, aunque la atención principal del estudiante estuvo en el área y la composición, hay una conciencia que determinó o identificó las diferencias en el área y forma de las figuras.

Durante las tareas del Nivel Situacional E15 mostró una comprensión importante en la noción de área, especialmente en términos de la relación entre las piezas y la composición de las figuras, la capacidad de reconocer equivalencias en el área a pesar de diferentes formas.

Las actividades del Nivel Situacional proporcionaron la comprensión del área y equivalencias, con indicaciones de que el estudiante E15 puede avanzar a las tareas de los siguientes niveles.

4.1.2.3 Intervención 2

P: Entonces, la primera tarea, la del Nivel Situacional. Esta tarea correspondía a la de las sombras, que eran unas figuras con sombras negras. Bueno, ¿Ya la tienen presente? ¿Qué podrían decir de esa actividad?

E10: Pues que todas las actividades estuvieron entretenidas. Pues porque teníamos que trasladar las figuras para ver cómo se acomodan en un cuadro. Y pues esa primera actividad no se me complicó tanto. Fue como... Podría decir, fácil.

Pues la primera actividad fue muy interesante porque no fue tan leve, sino que se... ¿Cómo le explico? O sea, nos hacía pensar, estimular mucho más el pensamiento de dónde encajaban las figuras.

P: Bueno, una pregunta es, ¿Qué retos encontraste al trabajar con las figuras geométricas? Las figuras eran las siete figuras del Tangram para representar el signo igual como Equivalencia a través de esos dibujos que presentaban. O sea, ¿Qué retos encontraron?

E10: Pues a mí se me comenzó a dificultar, ya como terminando. Puede ser porque ya estaba como cansada o ya se estaba dificultando porque ya subíamos de nivel. Pero pues igual estaba divertido e interesante porque no es algo que... O sea, como es una prueba, no es algo común en eso, hacer como esas traslaciones. Entonces, fue por esa parte divertido.

P: ¿Usted, E10, algún reto, alguna dificultad que se le haya presentado?

E10: No, pues dificultad al tener que mover, rotar las figuras. Pero no, la prueba estuvo muy buena porque básicamente los profesores nos guiaron mucho. Entonces no fue tan difícil y no fue tan extenso tampoco.

P: Bueno, otra pregunta para el Nivel Situacional. ¿Puedes compartir alguna experiencia en la que hayas reconocido la equivalencia entre dos figuras a través de las piezas del Tangram? No entendieron la pregunta. Por ejemplo, si se acuerdan de lo que armaron como una comparación entre esta figura, digamos la Figura 1 y la Figura 2. ¿Pues si conservaban alguna relación y/o cómo era esa relación?

E10: Que por ejemplo un paralelogramo se puede convertir en un rectángulo. Siguen conservando el área. Que no me acuerdo en qué nivel era, pero había una que era con diferente forma pero tenía la misma área. En la actividad que nos preguntaron.

4.1.2.4 Análisis parcial 2

En esta intervención, la finalidad de las actividades fue clara desde el comienzo, pues el profesor mencionó que la primera tarea estaba diseñada para estimular el pensamiento sobre la ubicación de las figuras geométricas en el Tangram.

4.1.2.4.1 Categoría 1. Intención de la planificación. Códigos: Finalidad de las actividades - Énfasis en el objetivo de las actividades

El estudiante E10 “observó” que la actividad no fue simplemente una tarea trivial, sino una que requería un “esfuerzo cognitivo” para encajar las figuras correctamente. Sin embargo, la intencionalidad detrás de la planificación fue centrada por el docente en fomentar habilidades de razonamiento espacial y reconocimiento de equivalencias geométricas, lo cual se evidenció en las respuestas del estudiante E10, quien indicó que la actividad fue “interesante” y “estimuló su pensamiento”.

4.1.2.4.2 Categoría 2 Características de área. Código: Conservación de área y variación de perímetro

El estudiante E10 expresó una posible “comprensión” de la noción relacionada con la conservación de área y la variación de perímetro, cuando mencionó: cómo un paralelogramo puede convertirse en un rectángulo sin cambiar su área. Este tipo de “comprensión”

posiblemente evidencia que la actividad no sólo promovió el reconocimiento de figuras geométricas, sino también un acercamiento de cómo se relacionan en términos de área.

4.1.2.4.3 Categoría 4 Configuración de figuras. Código: Configuración de las figuras

La intervención de E10 al revelar que tuvo que manipular las configuraciones de las figuras, al trasladarlas y rotarlas para completar la tarea, se pudo lograr un acercamiento al desarrollo de habilidades de visualización y pensamiento geométrico, esto se ve reflejado en la postura de Marmolejo y González (2013), cuando afirma que en el estudio y la enseñanza de las matemáticas, la visualización cumple diversas funciones, lo cual significa que esta “actividad cognitiva” puede apoyar o guiar el desarrollo de un problema planteado de diferentes maneras, o facilitar la comprensión de cómo se lleva a cabo un procedimiento determinado.

También, la mención que hizo E10 sobre la dificultad de mover y rotar las figuras, indicó que estas actividades requerían una manipulación activa y una comprensión de cómo las figuras pueden ser configuradas de diferentes maneras, mientras mantienen ciertas propiedades (como el área).

El acercamiento que tuvo E10 en el razonamiento sobre las configuraciones de las figuras, se pudo evidenciar, cuando explica cómo diferentes formas pueden conservar la misma área. Este tipo de acercamiento es crucial para entender nociones geométricas, pues muestra que las actividades no solo eran ejercicios de manipulación, sino también de comprensión y aplicación de nociones geométricas.

4.1.2.4.4 Categoría 8 Casos particulares. Código: Apreciaciones del diseño

E10 valoró el diseño de la actividad, resaltando que fue “divertido e interesante” debido a su carácter inusual y el desafío que presentó. La apreciación positiva del diseño por parte del estudiante fue un indicador de que las actividades del Nivel Situacional, son efectivas en mantener su interés y motivación. También, E10 mencionó el apoyo recibido por parte de los profesores, lo que sugiere que el acompañamiento y guía del profesor es crucial para la implementación del diseño, pues el rol del profesor sigue siendo un papel fundamental.

Como lo plantea Pérez (2014) que el profesor media entre los significados personales de los estudiantes y los significados matemáticos del contenido de enseñanza. Esta mediación se basa en la semiótica según Vygotsky (1978), donde la enseñanza se organiza mediante un ciclo didáctico, que incluye actividades semióticas que fomenta la discusión matemática colectiva y esencial para guiar a los estudiantes en la transformación de sus significados personales en significados matemáticos.

En síntesis, en este nivel situacional de estos dos análisis, son el reflejo que compila las respuestas y reflexiones posteriores a la implementación con los estudiantes en este primer Nivel Situacional.

4.2 Nivel Referencial

El objetivo de este nivel consiste en que los estudiantes deben reconocer e identificar figuras planas con áreas equivalentes, comprendiendo que el área puede ser igual, incluso si las figuras tienen diferentes composiciones superficiales (forma). Además, deberán inferir las condiciones necesarias y suficientes para determinar figuras semejantes o congruentes, enfocándose en la conservación de la superficie (área).

Para construir las siluetas, las piezas del Tangram pueden rotarse con el punto verde y moverse o arrastrarse utilizando el cursor en forma de mano o desde el punto rojo que tiene cada pieza, pues al utilizar el Tangram, un rompecabezas compuesto por dos triángulos rectángulos grandes, dos pequeños, uno mediano, un cuadrado y un paralelogramo, puede llegar a “facilitar” la comparación de las siluetas y a “comprender” cómo las diferentes configuraciones de piezas pueden formar áreas equivalentes.

El reconocimiento de figuras geométricas planas, a través de la manipulación práctica de las piezas del Tangram, posiblemente puede ayudar al estudiante en la identificación de áreas equivalentes y “desarrollar habilidades críticas” en geometría, al mejorar su capacidad para visualizar y razonar sobre las propiedades de las figuras planas.

En la pregunta 1 de la Tarea 2A, seis de los quince estudiantes reconocieron y mencionaron las figuras geométricas involucradas, como triángulos, cuadrados y el paralelogramo. Dos estudiantes, destacaron la comparación entre la figura inicial y la figura final, donde observaron que se utilizan las mismas piezas pero acomodadas de manera diferente, lo cual es un componente didáctico “crucial” para entender la invarianza del área bajo transformaciones.

En dos respuestas de los estudiantes se pudo evidenciar el reconocimiento de que las figuras pueden ser reconfiguradas para formar nuevas siluetas, manteniendo el área constante, pues esto, muestra una “comprensión” de la conservación del área, una propiedad fundamental en la geometría; además la observación de que se pueden formar figuras con diferentes formas pero con las mismas piezas, indicó un acercamiento a la noción de equivalencia geométrica.

Algunos estudiantes notaron características más específicas, como el número de lados y puntos de referencia para ubicar las piezas, lo cual muestra un nivel más detallado de

visualización (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)), pues al mencionar que existe variedad en las construcciones y la idea de que hay múltiples formas de construir la misma figura, revela una comprensión de la flexibilidad y creatividad en la geometría del Tangram (ver [Geometría activa](#)).

El análisis de las respuestas de los estudiantes muestra una interacción rica entre la Dimensión Didáctica y la Dimensión Conceptual en la actividad del Tangram. En la Dimensión Didáctica, se observa un reconocimiento y descripción clara de las figuras geométricas, así como la comparación y contraste de diferentes configuraciones de las mismas piezas. En la Dimensión Conceptual, los estudiantes demostraron comprensión de nociones como la composición y equivalencia de figuras geométricas, la conservación del área y las propiedades específicas de las figuras involucradas.

Este tipo de actividad no solo reforzó el conocimiento geométrico elemental, sino que también promovió habilidades importantes como la visualización no icónica.

En la pregunta 2 de la Tarea 2A, se planteó a los estudiantes para pretender evaluar su comprensión de cómo diferentes figuras geométricas pueden componerse a partir de otras figuras, lo cual permitió ayudar a evaluar la capacidad de los estudiantes para descomponer y configurar figuras geométricas.

Ahora bien, las respuestas proporcionadas por los estudiantes se pueden agrupar en varios patrones generales: La mayoría de los estudiantes mencionaron que un cuadrado se puede componer de dos triángulos rectángulos, lo cual muestra un posible acercamiento a relacionar características de composición entre estas figuras geométricas. Sin embargo, hay una repetición significativa de esta idea sin mucha variación o ampliación.

En cambio, tres estudiantes proporcionaron una respuesta más detallada a la idea inicial de componer un cuadrado a partir de triángulos, al mencionar que un triángulo se puede componer de un paralelogramo y dos triángulos, y que un paralelogramo se compone de dos triángulos (ver [Sistema geométrico](#)). Se pudo evidenciar en esta respuesta que los estudiantes lograron una aproximación a la noción de composición de figuras geométricas. Por otra parte, dos estudiantes sugirieron que todas las figuras del barco se pueden componer de triángulos. Esta respuesta, aunque menos específica, demuestra una “intuición correcta” sobre la versatilidad de los triángulos en la construcción de otras figuras.

No obstante, al verse reflejada la misma idea por muchos estudiantes, se sugiere que podría ser beneficioso ampliar la enseñanza sobre la composición de figuras geométricas para incluir más ejemplos y ejercicios que involucren una variedad de figuras y sus combinaciones posibles.

En la pregunta 3 de la Tarea 2A, se desarrolló para que los estudiantes exploraran la relación entre la cantidad de figuras utilizadas y el área de dos figuras geométricas: un cuadrado y una figura denominada “el barco”. Esta pregunta tiene como objetivo evaluar la comprensión de los estudiantes sobre nociones geométricas, específicamente la conservación del área a través de configuraciones de las figuras.

Se pudo apreciar que los estudiantes identificaron en las dos figuras, que el cuadrado y el barco, poseen la misma área; esta observación es esencial para la caracterización de objetos matemáticos, pues refleja una “comprensión clara” de que el área es una propiedad invariante bajo ciertas configuraciones geométricas.

Por otro lado, cinco estudiantes mencionaron que, aunque las áreas son iguales, las formas son diferentes, siendo este aspecto importante, puesto que muestra un acercamiento a la

comprensión de que las propiedades métricas (como el área) pueden mantenerse a pesar de los cambios en la forma geométrica (ver [Nociones de área y superficie](#)). Pero, la mayoría de los estudiantes comprendieron que el área de las dos figuras es la misma debido a que están compuestas por la misma cantidad de piezas más pequeñas. Esta comprensión está alineada con la caracterización de los objetos matemáticos en términos de conservación del área bajo configuraciones.

Ahora bien, en la pregunta 1 de la Tarea 2B, se buscó que los estudiantes pudieran identificar el reconocimiento de figuras geométricas planas y sus propiedades, para poder realizar la comparación de la equivalencia de áreas de las tres siluetas.

Las respuestas de tres de los estudiantes, indican que las tres siluetas tienen la misma área, donde se logró evidenciar, algunas propiedades geométricas de las siluetas y la conservación del área en diferentes configuraciones del Tangram (ver [Noción del signo igual](#)). Pero, en general, las respuestas de los estudiantes muestran un acercamiento en la identificación y caracterización de los objetos geométricos presentes en las figuras del Tangram.

A pesar de que existen variaciones en la profundidad y detalle de las observaciones, con algunos estudiantes se pudo lograr un acercamiento en la comprensión la conservación del área y la igualdad de las piezas, mientras que otros se centraron más, en la identificación básica de las figuras.

En la pregunta 2 de la Tarea 2B, se pudo ver generalmente en las respuestas de los estudiantes, que han logrado identificar correctamente la cantidad de piezas necesarias para formar cada silueta. Sin embargo, no profundizaron en cómo esta cantidad se relaciona con la superficie de las figuras formadas, solo un estudiante realizó una comprensión exploratoria, indicando que el Tangram tiene potencial para crear múltiples figuras distintas, aunque no

responde directamente la pregunta, esta perspectiva puede llevar a una “acercamiento” de la versatilidad de las piezas del Tangram, en la geometría.

Por último, en la pregunta 3 de la Tarea 2B, se pudo evidenciar que nueve estudiantes, manifestaron una respuesta “afirmativa”, sobre que las áreas de las siluetas conservan una relación, porque al quitar el cuadrado de color amarillo, las áreas disminuyen pero siguen siendo equivalentes entre sí. También tres estudiantes concluyeron que al quitar el cuadrado, las siluetas mantienen la misma cantidad de piezas, solo que con una pieza menos. Por último, seis estudiantes reconocieron que quitar el cuadrado de color amarillo de cada silueta reduce el área de manera uniforme, conservando la superficie (ver [Pensamiento espacial](#)).

Solamente, un estudiante dio una respuesta “negativa”, de acuerdo a la relación de área, pues este estudiante argumenta que al quitar el cuadrado de color amarillo, las figuras ya no tienen relación en cuanto a su estructura, dice que al eliminar una figura específica, se altera la relación entre las siluetas, es decir, según su respuesta, puede armar la misma figura con las piezas restantes, pero no necesariamente implica que el área se mantenga.

En cierta medida, la mayoría de los estudiantes muestran una adecuada comprensión de la relación entre las áreas de las siluetas al quitar el cuadrado de color amarillo, al poder identificar la conservación de la relación de área entre ellas. Pero, hay una variación en la focalización de aspectos específicos, como el perímetro y la reconfiguración, puesto que la única respuesta “negativa” sugiere una confusión en la relación entre las figuras, lo que podría ser un punto a reforzar en futuras enseñanzas sobre propiedades geométricas de la conservación de área.

En las respuestas a la pregunta 1 de la Tarea 2C, sobre la diferencia en el área entre la FIGURA INICIAL y la FIGURA FINAL, se pudo evidenciar que los estudiantes reflejaron diversos grados de comprensión y habilidades para describir las propiedades geométricas y las

configuraciones de las figuras. Cinco estudiantes reconocieron que las figuras en la composición final, han cambiado de posición pero mantienen la misma área. También, siete estudiantes reconocieron que las figuras en la composición final, han cambiado de posición pero mantienen la misma área.

Tres estudiantes manifestaron que aunque la forma (perímetro) de las figuras cambia, el área permanece constante. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes, tuvieron un acercamiento al reconocer que las figuras en la composición final han cambiado de posición, algunos notaron la aparente incompletitud debida a “espacios vacíos” y otros identificaron que a pesar del cambio en la forma (perímetro), el área permanece equivalente (ver [Noción del signo igual](#)).

Para las respuestas a la pregunta 2 de la Tarea 2C, gran parte de los estudiantes expresaron que las figuras son iguales porque las piezas son las mismas, aunque se encuentren reconfiguradas, aquí se pudo ver el acercamiento a la conservación de las formas básicas de las piezas. A diferencia de cuatro estudiantes, los cuales afirmaron que las figuras no son iguales, debido al cambio en el número de lados, lo que indica una visualización no icónica (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)) a la composición general y a las propiedades generales de las figuras.

Como resultado general de las respuestas a esta pregunta, se revelaron diferentes niveles de “comprensión” de las nociones geométricas involucradas en la caracterización de las figuras. Pues, mientras que algunos de los estudiantes se centraron en la conservación de las piezas, otros consideraron la figura completa y sus propiedades generales, como el número de lados y la presencia de “huecos”. De igual forma, la capacidad de distinguir entre área y perímetro también fue variada, al mostrar diferentes niveles de desarrollo en la noción de equivalencia entre las figuras.

Este análisis posiblemente sugiere que, para mejorar la “comprensión” de todos los estudiantes, sería beneficioso profundizar en cómo se relacionan las propiedades geométricas (de las piezas individuales) y (de la figura completa), así como la importancia de diferenciar entre las nociones de área.

La pregunta 3 de la Tarea 2C, buscaba que los estudiantes determinaran si el área de una figura inicial es igual a la de una figura final, argumentando su respuesta, al poder involucrar la Dimensión Conceptual de la caracterización de los objetos matemáticos, lo cual implicaba entender y describir propiedades esenciales de figuras geométricas planas.

Con respecto a las respuestas de ocho estudiantes, se evidenció la idea de que la FIGURA FINAL mantiene la misma cantidad y tipo de piezas que la FIGURA INICIAL, sugiriendo que la cantidad de figuras geométricas (y por ende el área) permanece constante, donde se logró un “acercamiento” a la reconfiguración de los elementos que no afectan el cambio del área. En cambio, en las respuestas de cinco estudiantes se evidenciaron “confusiones” o “percepciones” incorrectas sobre cómo la forma de las figuras afecta el área, pues hubo una tendencia a asociar cambios en la forma (perímetro) con cambios en el área.

Como resultado general, el análisis de las respuestas reveló una variedad en la “comprensión” de los estudiantes sobre cómo la reconfiguración de figuras geométricas afecta el área, porque aquellos que respondieron “correctamente” entienden que la cantidad de figuras y sus áreas individuales permanecen constantes, mientras que otros confundieron cambios en la forma (perímetro) con cambios en el área. Este diseño destacó la importancia de enseñar y reforzar nociones geométricas fundamentales, como la diferencia entre área y perímetro, y cómo las propiedades geométricas esenciales se conservan bajo transformaciones.

A continuación, se mencionan algunas situaciones específicas que sobresalen en los trabajos de los estudiantes con el uso del recurso de GeoGebra.

4.2.1 Hallazgos del Nivel Referencial

En este segundo nivel, en la Tarea 2A se le solicitó al estudiante que para empezar la primera actividad, realizara la construcción de la silueta como se muestra en la figura 38 y arrastrara las piezas del Tangram de color naranja, verde, azul, amarillo, rojo, marrón y morado, para formar la silueta que se encuentra en la parte derecha de la pantalla. Al terminar la construcción de la silueta, el estudiante debía dar respuesta a las preguntas guía.

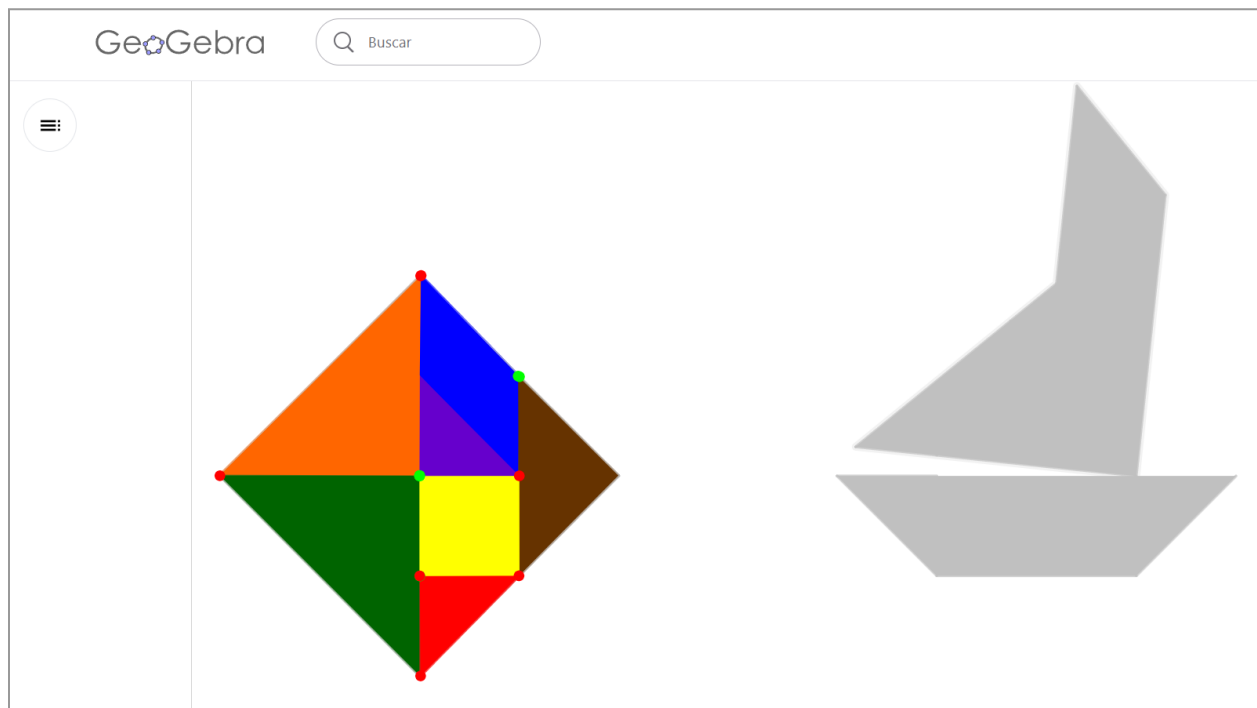


Figura 38. Primera construcción Tarea 2A Nivel Referencial. Las figuras geométricas de colores, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte derecha (el barco). Fuente: Elaboración propia.

En base a las construcciones que realizaron los estudiantes E2, E8 y E13, se pudo observar que los tres estudiantes realizaron apreciaciones distintas donde E2, resalta la ubicación y orientación al mencionar que cada figura tiene dos puntos en sus lados, uno que facilita su ubicación y otro que ayuda a rotarlas, también, destacó que se utilizó el dibujo de un barco como referencia para realizar la actividad y observó que las figuras tienen colores diferentes y no hay repetidos.

Por otra parte, E8 señala que las piezas utilizadas son las mismas, también menciona que las figuras tienen puntos que ayudan en su ubicación y realizó una comparación del número de lados del barco (9 lados) y del cuadrado (4 lados), pues esto puede indicar que el estudiante realizó una visualización no icónica al determinar las características geométricas de las figuras (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)).

Con relación a la respuesta de E13, donde menciona que el barco se puede construir con la misma cantidad de piezas que la otra figura, su respuesta es menos detallada que las de E2 y E8, al centrarse en la cantidad de piezas necesarias, lo que muestra una “comprensión básica” de la relación entre las figuras (piezas) y la silueta propuesta. Y a diferencia de E2 y E8, E13 no menciona otros detalles geométricos o visuales, lo que sugiere un enfoque “más limitado” en la observación de características geométricas que pudieran tener las siluetas, como se muestra en las figuras 39, 40 y 41:

 E2 Silvana Penago...  16/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 12

1. Utilizando las figuras geométricas del Tangram, acomódalas para formar la silueta o figura que se propone. Enumera las características, que puedas observar de esta figura que vas a realizar.

Respuesta

La primera característica que observe al realizar esta figura fue que cada una de ellas tiene dos puntos a sus lados. Uno que facilita su ubicación y el otro que nos ayuda a voltear cada una de ellas. Otra característica que observe es que utilizaron el dibujo de un barco como referencia para realizar esta actividad y también tiene colores diferentes. Es decir, ninguno es repetido

Figura 39. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 1 de la Tarea 2A, respecto a las SILUETAS 1, 2 y 3. Fuente: GeoGebra.

 E8 Sofia Castrillon...  11/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 12

1. Utilizando las figuras geométricas del Tangram, acomódalas para formar la silueta o figura que se propone. Enumera las características, que puedas observar de esta figura que vas a realizar.

Respuesta

la primera característica es que tienen las mismas figuras la segunda es que tienen puntos que ayudan a su ubicación y la tercera es que el barco tiene 9 lados y el cuadrado tiene 4 lados.

Figura 40. Respuesta de estudiante E8 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E8, a la pregunta 1 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.

 E13 Kimberly Oso...  1/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 12

1. Utilizando las figuras geométricas del Tangram, acomódalas para formar la silueta o figura que se propone. Enumera las características, que puedas observar de esta figura que vas a realizar.

Respuesta

Que el barco lo pude hacer con la misma cantidad de piezas que habia en la otra figura

Figura 41. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 1 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.

Para las respuestas proporcionadas por los estudiantes E3, E6 , y E8 referente a la pregunta 2 de la Tarea 2A, los tres estudiantes muestran diferentes nociones sobre cómo las figuras geométricas del Tangram pueden descomponerse en otras figuras.

En la respuesta de E3, se pudo evidenciar que tomó como base diferentes tipos de triángulos, al manifestar que todas las figuras del barco pueden componerse de triángulos de diferentes lados y tamaños. Esta observación es acertada, puesto que la construcción del Tangram se compone de varias formas triangulares (ver [Construcción geométrica del Tangram](#)), aunque la observación es correcta, falta especificidad en cómo cada figura se descompone en triángulos, no se mencionan figuras específicas o cómo se configuran.

Con referencia a la respuestas de E6 y E8, se evidenció que comparten similitudes al afirmar que el cuadrado de color amarillo se compone de dos triángulos, que los triángulos se componen de un paralelogramo y dos triángulos y que el paralelogramo se compone de dos triángulos, muestra una buena comprensión de las relaciones entre las figuras del Tangram y

cómo se pueden descomponer en triángulos y paralelogramos (ver [Construcción geométrica del Tangram](#)).

En conjunto, se pudo observar que las respuestas de los estudiantes indicaron un “acercamiento” de las relaciones geométricas del Tangram, aunque con algunas imprecisiones que podrían corregirse con una revisión más cuidadosa de las propiedades de las figuras, como se muestra en la figura 42, 43 y 44:

 E3 estefani  14/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

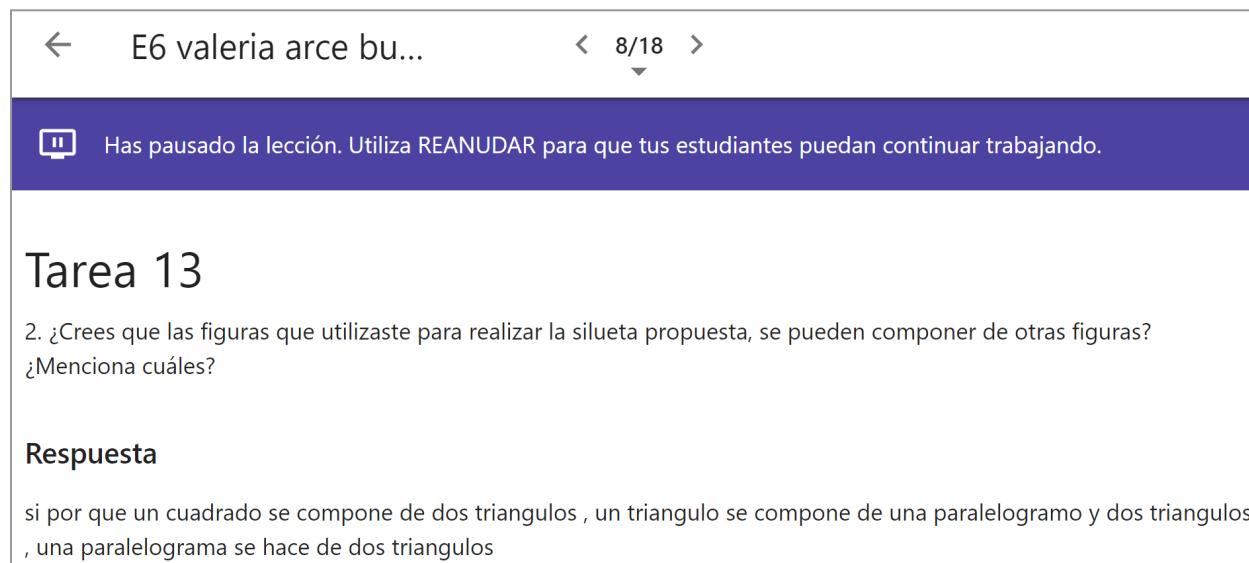
Tarea 13

2. ¿Crees que las figuras que utilizaste para realizar la silueta propuesta, se pueden componer de otras figuras?
¿Menciona cuáles?

Respuesta

pues yo creeria que todas las figuras del barco se puueden componer de triangulos con diferentes lado tamaños

Figura 42. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E3, a la pregunta 2 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.



← E6 valeria arce bu... < 8/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

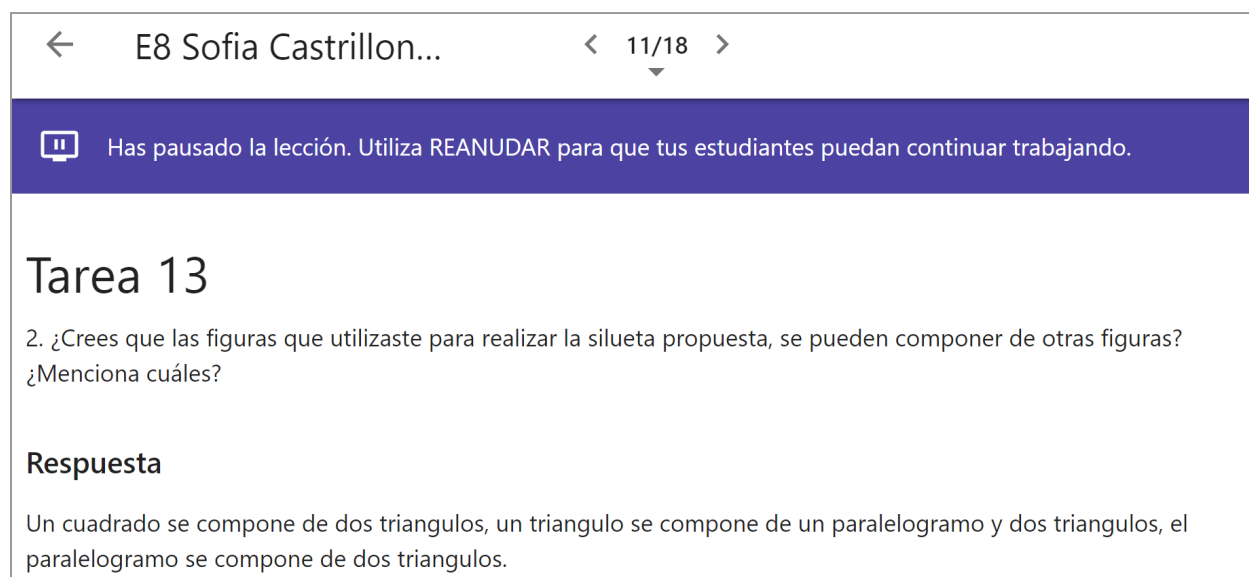
Tarea 13

2. ¿Crees que las figuras que utilizaste para realizar la silueta propuesta, se pueden componer de otras figuras?
¿Menciona cuáles?

Respuesta

si por que un cuadrado se compone de dos triangulos , un triangulo se compone de una paralelogramo y dos triangulos , una paralelogramo se hace de dos triangulos

Figura 43. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 2 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.



← E8 Sofia Castrillon... < 11/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 13

2. ¿Crees que las figuras que utilizaste para realizar la silueta propuesta, se pueden componer de otras figuras?
¿Menciona cuáles?

Respuesta

Un cuadrado se compone de dos triangulos, un triangulo se compone de un paralelogramo y dos triangulos, el paralelogramo se compone de dos triangulos.

Figura 44. Respuesta de estudiante E8 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E8, a la pregunta 2 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.

Por último, se tienen las respuestas de los estudiantes E1, E2 y E3, en base a la pregunta 3 de la Tarea 2A, al evidenciar una comprensión del principio de conservación del área entre las figuras que componen el Tangram y la silueta formada (el barco).

Las respuestas proporcionadas por los tres estudiantes sobre la igualdad en la cantidad de figuras, coinciden, porque mencionan que se necesita la misma cantidad de piezas, al manifestar que ambas siluetas tengan la misma área. Esta observación es un “poco precisa”, pues al utilizar las piezas del Tangram, para formar diferentes figuras, implica que las áreas de esas figuras formadas sean iguales, independientemente de la forma. Además, se puede destacar en las respuestas de los estudiantes, la igualdad en la cantidad de figuras como la “conjeturación” de la igualdad del área, como se muestra en las figuras 45, 46 y 47:

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 14

3. ¿Qué relación, se puede establecer entre el número de figuras utilizadas y el área de las dos figuras (*El cuadrado y el barco*)?

Respuesta

La relacion es que necesitan la misma cantidad de figuras, cosa que hace que tengan el mismo area

Figura 45. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 3 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.

 E2 Silvana Penago...  16/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 14

3. ¿Qué relación, se puede establecer entre el número de figuras utilizadas y el área de las dos figuras (*El cuadrado y el barco*)?

Respuesta

La relacion es que necesitan la misma cantidad de figuras, cosa que permite que tengan el mismo area

Figura 46. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 3 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.

 E3 estefani  14/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 14

3. ¿Qué relación, se puede establecer entre el número de figuras utilizadas y el área de las dos figuras (*El cuadrado y el barco*)?

Respuesta

si ya que las figuras que tenia el cuadrado son la que utilizamos en la figura del barco

Figura 47. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2A. La figura muestra la respuesta del estudiante E3, a la pregunta 3 de la Tarea 2A, respecto a la Silueta (el barco). Fuente: GeoGebra.

En estos hallazgos encontrados en la Tarea 2A, se pudo ver que los estudiantes desarrollaron algunas nociones sobre la conservación del área, al realizar las comparaciones que se presentaron, entre las siluetas, con ayuda del recurso de GeoGebra.

En general, los hallazgos encontrados en las respuestas de los estudiantes muestran una noción de los principios geométricos del Tangram, así mismo, las observaciones sobre la

composición de figuras, muestran que los estudiantes son capaces de identificar características geométricas, aunque con diferente nivel de detalle y precisión, pues al discutir la descomposición de figuras, algunos estudiantes ofrecen respuestas más específicas y estructuradas, aunque con ciertas inexactitudes, mientras que otros se quedan en generalidades, pero menos detalladas.

Finalmente, al relacionar el número de figuras con el área de las formas, todos los estudiantes comprenden correctamente la noción de conservación del área, aunque sus explicaciones varían en claridad y formalidad. Sin embargo, las respuestas reflejan una capacidad de las nociones geométricas, aunque algunos estudiantes podrían reforzar esas propiedades que les permita comprender el signo igual como equivalencia.

La tarea 2B de este segundo nivel, se diseñó con los propósitos de reconocer la equivalencia de área entre figuras independientemente de su configuración, establecer la relación entre las figuras del Tangram y sus superficies, explorar cómo diferentes configuraciones de piezas afectan la forma y tamaño de las figuras y comprender cómo la reconfiguración de las piezas, al quitar el cuadrado de color amarillo, influye en las áreas de las figuras formadas.

Para construir las siluetas de la tarea, los estudiantes debían utilizar las siete piezas de colores (rojo, verde, amarillo, morado, marrón, azul y naranja) siguiendo las indicaciones específicas para cada silueta, rotando y moviendo las piezas según sea necesario, para construir las SILUETAS que se encuentran ubicadas en la parte izquierda de la pantalla, (ver figuras 48, 49 y 50).

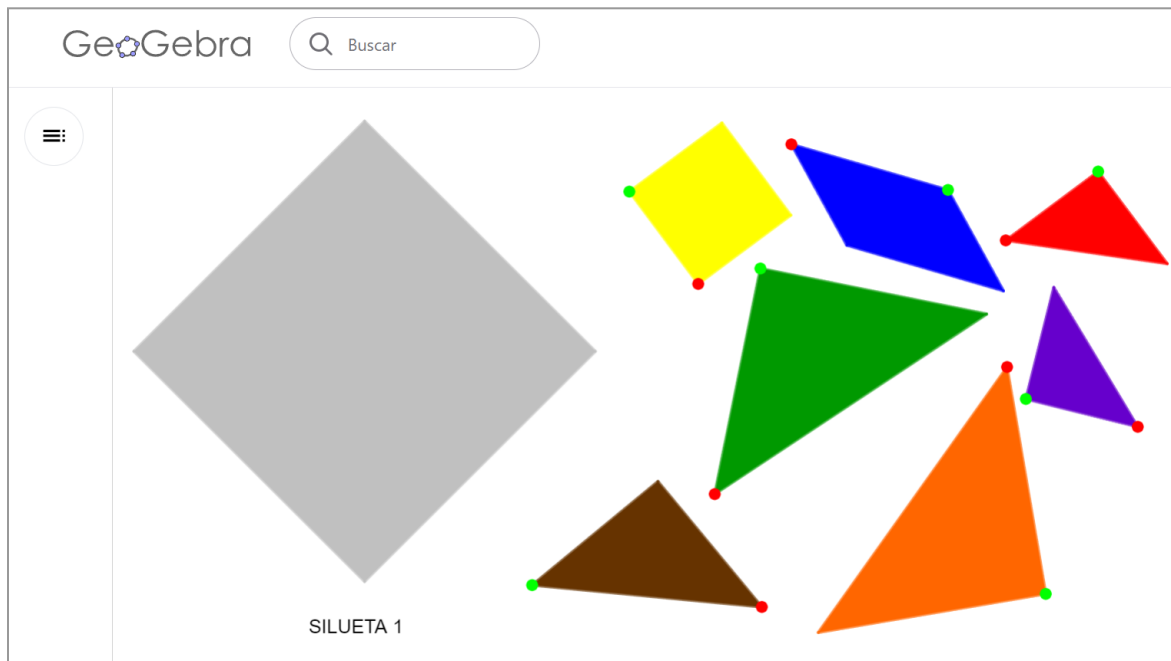


Figura 48. Primera construcción Tarea 2B Nivel Referencial. Las figuras geométricas de colores, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda (un cuadrado). Fuente: Elaboración propia.

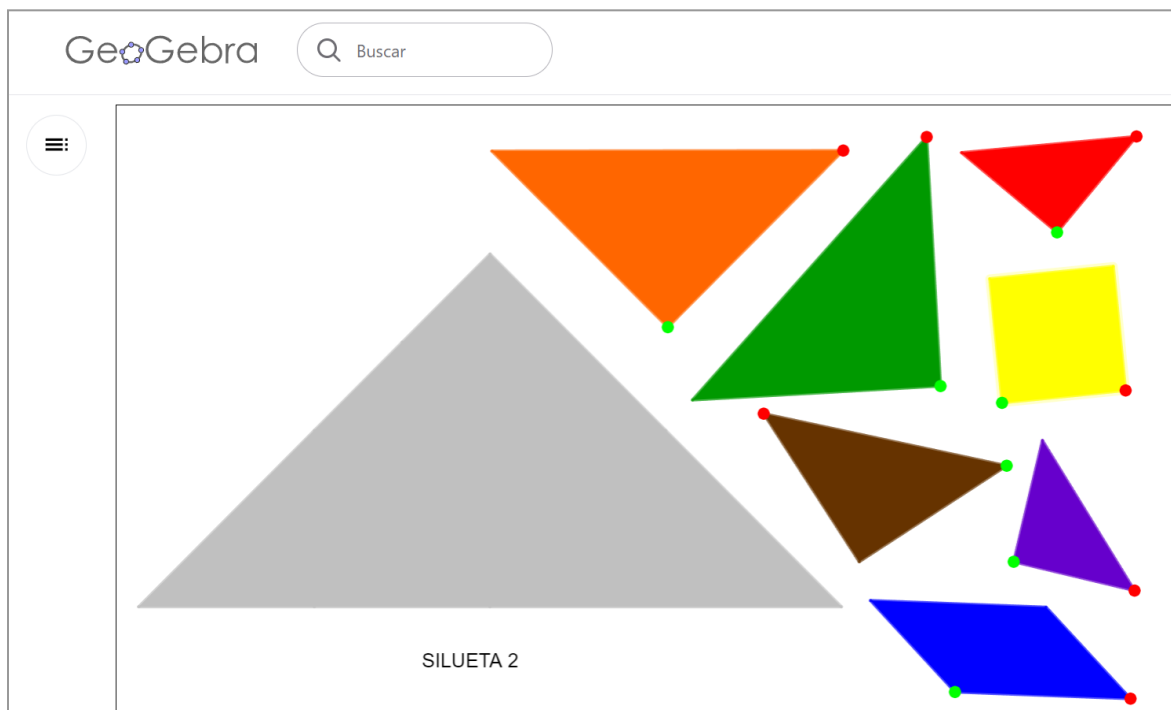


Figura 49. Segunda construcción Tarea 2B Nivel Referencial. Las figuras geométricas de colores, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda (un triángulo). Fuente: Elaboración propia.

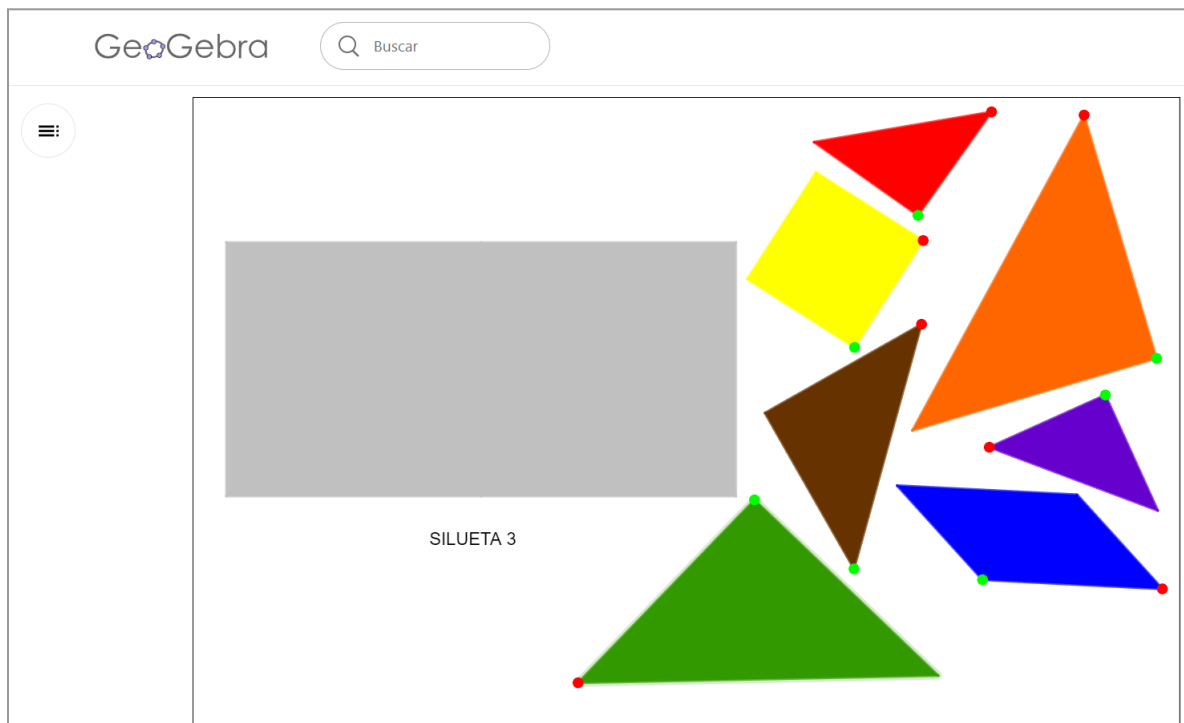


Figura 50. Tercera construcción Tarea 2B Nivel Referencial. Las figuras geométricas de colores, representan las piezas del Tangram, las cuales se deben utilizar para construir la silueta que se encuentra en la parte izquierda (un rectángulo). Fuente: Elaboración propia.

Al realizar las construcciones, se presentan como una oportunidad valiosa para que los estudiantes exploren nociones geométricas fundamentales, desarrollen competencias de resolución de problemas y comprendan mejor las propiedades de las figuras y sus áreas a través del uso del Tangram por medio del recurso de GeoGebra. Al finalizar cada construcción, los estudiantes deben avanzar a la siguiente actividad y responder preguntas relacionadas con las figuras que han formado.

En base a las construcciones que realizaron los estudiantes E5, E6 y E14, se pudo evidenciar que los tres comprendieron la esencia de la pregunta, que se centra en identificar que las figuras construidas con todas las piezas del Tangram tienen la misma área, lo que es un punto conceptual importante, de la caracterización del objeto matemático.

Ahora bien, las respuestas de los estudiantes E5 y E6, en base a la pregunta 1 de la Tarea 2B, fueron similares debido a que en la identificación de las características de las SILUETAS, afirmaron que eran distintas en forma (un cuadrado, un triángulo y un rectángulo) pero equivalentes en área, lo que muestra un “acercamiento” por parte de los estudiantes a la noción de conservación del área al usar todas las piezas del Tangram. Aunque los estudiantes no brindan detalles adicionales, como tipos de triángulos o propiedades específicas de las figuras, más allá de la forma general y el área.

Por otra parte, el estudiante E14 en la identificación de formas, menciona algunas características específicas como (triángulos iguales, cuadrados de diferentes tamaños y un paralelogramo), se puede ver que el estudiante realiza un reconocimiento de la igualdad de los triángulos en el Tangram.

En cuanto a la afirmación de que los “cuadrados tienen diferentes tamaños”, deja un ambigüedad en la forma en que talvez el estudiante confundió la configuración del cuadrado de color amarillo, en cada una de las construcciones y respecto al paralelogramo, realiza el reconocimiento de que la figura se puede formar también con las piezas del Tangram, lo que permite evidenciar un poco algunas de las figuras convexas que se pueden construir con las piezas del Tangram (ver [Figuras convexas con el Tangram](#)), como se muestra en las figuras 51, 52 y 53:

← E5 Briana Paulet C...
15/18

Tarea 18

1. Utilizando todas las piezas del Tangram, intenta:

- Construir las tres figuras determinadas por las siluetas
- Enumera las cualidades o características, que puedas observar de cada figura a construir. **Por Ejemplo:** *Identificar si hay un triángulo isósceles o escaleno.*

Respuesta

las 3 siluetas son de forma distinta, la silueta uno es un cuadrado, la segunda es un triángulo, la tercera es un rectángulo, contienen el mismo area.

Figura 51. Respuesta de estudiante E5 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E5, a la pregunta 1 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

← E6 valeria arce bu...
8/18

Tarea 18

1. Utilizando todas las piezas del Tangram, intenta:

- Construir las tres figuras determinadas por las siluetas
- Enumera las cualidades o características, que puedas observar de cada figura a construir. **Por Ejemplo:** *Identificar si hay un triángulo isósceles o escaleno.*

Respuesta

las tres siluetas son dde formas distinta
la silueta 1 es un cuadrado , la silueta 2 es un triangulo , la silueta 3 es un rectangulo , y tods tiene el mismo area

Figura 52. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 1 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

←
E 14 Mariana Cue...
< 5/18 >


Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 18

1. Utilizando todas las piezas del Tangram, intenta:

- Construir las tres figuras determinadas por las siluetas
- Enumera las cualidades o características, que puedas observar de cada figura a construir. **Por Ejemplo:** *Identificar si hay un triángulo isósceles o escaleno.*

Respuesta

características: los triángulos son iguales, cuadrados de diferentes tamaño y paralelogramo .

Figura 53. Respuesta de estudiante E14 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E14, a la pregunta 1 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

En referencia a la pregunta 2 de la Tarea 2B, los estudiantes E1 y E11 comprenden que todas las figuras del Tangram utilizan el mismo número de piezas, pues esta apreciación, indica una correcta comprensión de la pregunta, donde el Tangram fue un recurso que él utilizó para formar diferentes figuras. Así mismo, el estudiante destacó que todas las figuras tienen la misma área, pues esta observación es crucial, dado que el estudiante posiblemente “entiende” que la suma de las áreas de las piezas del Tangram siempre será constante, independientemente de cómo se reconfiguran (ver [Propiedades de las áreas y superficies planas](#)). E1, realizó una mención sobre los colores de cada pieza, aunque no aporta directamente a la comprensión matemática de la pregunta, podría ser importante y útil en otras áreas del aprendizaje (ver figuras 54, 55 y 56).

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 19

2. ¿Qué relación, se puede establecer entre el número de figuras del Tangram utilizadas para la construcción de cada **SILUETA** y la superficie de las tres **FIGURAS** formadas?

Respuesta

Todas tienen la misma cantidad de figuras, el mismo area y los colores son iguales

Figura 54. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 2 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

 E3 estefani  14/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 19

2. ¿Qué relación, se puede establecer entre el número de figuras del Tangram utilizadas para la construcción de cada **SILUETA** y la superficie de las tres **FIGURAS** formadas?

Respuesta

yo digo que con diferentes piezas geometricas se pueden hacer hasta piezas diferentes

Figura 55. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E3, a la pregunta 2 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

←

emmanuel E11

< 7/18 >

⏸

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 19

2. ¿Qué relación, se puede establecer entre el número de figuras del Tangram utilizadas para la construcción de cada **SILUETA** y la superficie de las tres **FIGURAS** formadas?

Respuesta

pues q se puede hacer todo con las figuras son iguales y se pueden armar con as mismas figuras

Figura 56. Respuesta de estudiante E11 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E11, a la pregunta 2 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

Para el caso de E3, no menciona explícitamente el número de piezas utilizadas en cada figura, pero sugirió que existe una flexibilidad y variabilidad en la construcción con piezas del Tangram (ver [Geometría activa](#)), pues este enfoque indica una apertura a explorar diferentes configuraciones y reconfiguraciones de las piezas. A pesar de que, no se menciona específicamente la relación entre el área de las figuras, esto podría ser una área de mejora en el diseño para una comprensión más completa de la pregunta guía.

También se pudo evidenciar que E3 refleja una apreciación por la diversidad de configuraciones posibles con las piezas del Tangram (ver [Transformaciones](#)), lo cual es un aspecto importante del aprendizaje y exploración del signo igual como equivalencia, aunque no aborda directamente la relación entre el número de piezas y la superficie.

Con respecto a la pregunta 3 de la tarea 2B, E2 reconoce que, aunque el área total de cada figura disminuye al quitar el cuadrado, las nuevas áreas de las siluetas aún guardan una relación proporcional, su afirmación muestra una posible comprensión de la noción de conservación del

área, puesto que al quitar una pieza de todas las figuras, según E2, afecta de manera similar su área total, manteniendo una relación proporcional entre las nuevas áreas.

En su respuesta se pudo evidenciar, la idea de que todas las figuras tenían el mismo área inicialmente y que este hecho se mantiene proporcionalmente, después de quitar una pieza, refleja una noción de cómo entiende el área, como se muestra en las figuras 57, 58 y 59:

←

E2 Silvana Penago...

<

16/18

>

Tarea 20

3. ¿Qué puedes apreciar, acerca del área de la **SILUETA 1**, la **SILUETA 2** y la **SILUETA 3**, si se le quita el cuadrado de color amarillo? ¿Las nuevas áreas de las tres **SILUETAS**, conservan alguna relación?

- Sí, ¿Por qué?

- No, ¿Por qué?

Respuesta

Si, conserva una relacion, ya que todos tienen el mismo area y al quitarle el cuadrado siguen igual, lo unico que cambia es que el area disminuye

Figura 57. Respuesta de estudiante E2 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 3 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

←

E7 Marco Antonio...

<

13/18

>

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 20

3. ¿Qué puedes apreciar, acerca del área de la **SILUETA 1**, la **SILUETA 2** y la **SILUETA 3**, si se le quita el cuadrado de color amarillo? ¿Las nuevas áreas de las tres **SILUETAS**, conservan alguna relación?

- Sí, ¿Por qué?

- No, ¿Por qué?

Respuesta

si porque disminuyo el area pero se conserva la figura

Figura 58. Respuesta de estudiante E7 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E7, a la pregunta 3 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

←

E 15 MARIA PAUL...

<

6/18

>

Tarea 20

3. ¿Qué puedes apreciar, acerca del área de la **SILUETA 1**, la **SILUETA 2** y la **SILUETA 3**, si se le quita el cuadrado de color amarillo? ¿Las nuevas áreas de las tres **SILUETAS**, conservan alguna relación?

- Sí, ¿Por qué?
- No, ¿Por qué?

Respuesta

no por que si se le quita el cuadrado no van a tener relacion en las figura por q se supone que todas tiene las mismas figuras

Figura 59. Respuesta de estudiante E15 Tarea 2B. La figura muestra la respuesta del estudiante E15, a la pregunta 3 de la Tarea 2B, respecto a la Siluetas (cuadrado, triángulo y rectángulo). Fuente: GeoGebra.

Con respecto a E7, en su respuesta reconoce que al quitar el cuadrado, el área de las figuras disminuye, esto sería correcto, siempre y cuando pueda ser interpretada como la conservación de la forma o estructura relativa, pero no exactamente en el sentido de que la forma geométrica específica cambia al quitar una pieza. Sin embargo, el estudiante no menciona explícitamente la conservación de una relación proporcional entre las áreas de las nuevas figuras, lo que indica una comprensión parcial de esa noción.

Por el contrario, el estudiante E14 no reconoce la conservación de una relación proporcional entre las áreas de las figuras al quitar una pieza, esto indica una “comprensión no acertada” de la noción de proporcionalidad en geometría. Cabe destacar que la observación de que todas las figuras tienen las mismas piezas inicialmente es acertada, E14 no logró “comprender” que quitar una pieza de todas las figuras afecta proporcionalmente el área de todas, al afirmar que no existe una relación después de quitar el cuadrado.

Las respuestas de los estudiantes reflejan diferentes niveles de comprensión de las características geométricas y las relaciones de área en el Tangram. Se sugiere que el diseño se puede mejorar, al considerar incluir énfasis en nociones de proporcionalidad y es fundamental que las instrucciones y preguntas guíen a los estudiantes hacia una reflexión explícita sobre cómo la reconfiguración de piezas afecta las relaciones geométricas de áreas.

Finalmente, la Tarea 2C, se diseñó con el objetivo de que los estudiantes puedan identificar figuras planas que comparten la misma área, lo cual implica una visualización no icónica de las propiedades geométricas de las figuras planas, además deben reconocer las distintas formas en que una figura plana puede ser reconfigurada sin cambiar su área y por último, se busca comparar las áreas de la FIGURA INICIAL y la FIGURA FINAL para que el estudiante logre identificar semejanzas en términos de área y diferencias en la reconfiguración de las figuras.

Para dar inicio a la actividad, el primer paso consiste en interactuar con el deslizador de color gris o dar clic en el ícono de play (ver figuras 60 y 61), lo cual inicia el proceso de reacomodo de las figuras, donde los estudiantes deben observar atentamente lo que sucede con las figuras que forman la FIGURA FINAL, lo cual es crucial para comprender cómo las figuras iniciales se transforman y se reorganizan para mantener la misma área en una nueva configuración (ver [Propiedades de las áreas y superficies planas](#)).

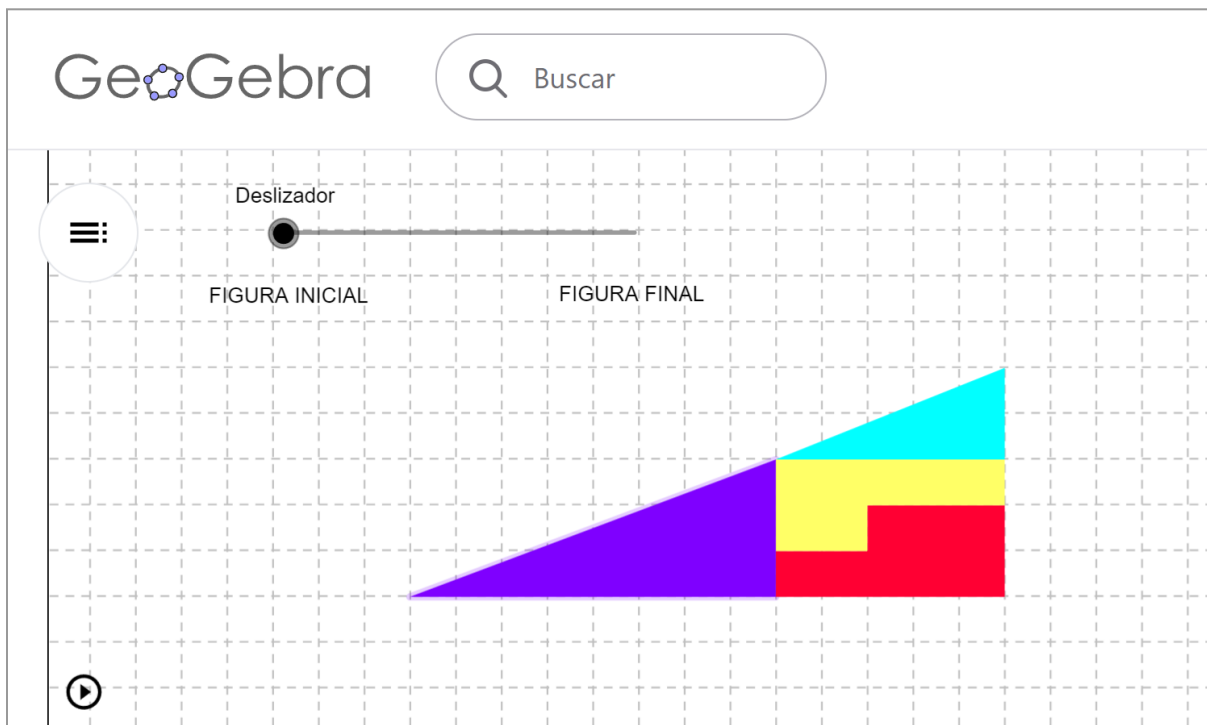


Figura 60. Configuración Tarea 2C Nivel Referencial. Las figuras geométricas de colores, representan una configuración entre ellas, las cuales componen una FIGURA INICIAL. Fuente: Elaboración propia.

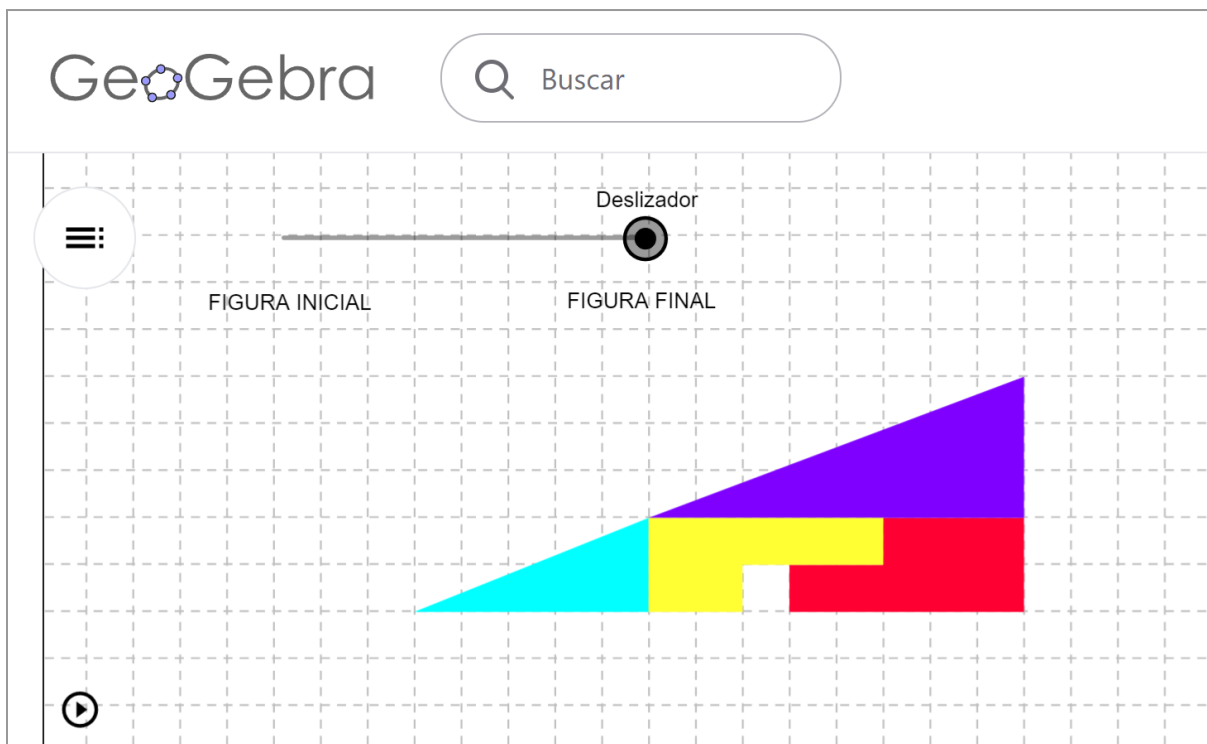


Figura 61. Configuración Tarea 2C Nivel Referencial. Las figuras geométricas de colores, representan una configuración entre ellas, las cuales componen una FIGURA FINAL. Fuente: Elaboración propia.

En base a las observaciones que realizaron los estudiantes E1, E6 y E8, se pudo apreciar que E1, a pesar de reconocer el cambio en la figura y el espacio resultante, no explica completamente cómo se conserva el área, lo cual es una observación muy superficial o según Duval (2005) una visualización icónica (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)).

El estudiante E1 reconoce que las piezas se desplazan y que la figura final tiene un espacio. Sin embargo, no menciona explícitamente que el área total de las figuras no cambia, pues la falta de mención explícita de la conservación del área sugiere una comprensión parcial de dicha noción. Cabe resaltar que reconoce la transformación de la figura mediante el deslizamiento, pero no detalla cómo se conserva el área en términos de las piezas.

En el caso de los estudiantes E6 y E8, identificaron claramente que el número de lados cambia y que el perímetro varía, pero que el área permanece constante debido a la conservación del área de las piezas que componen la figura, puesto que sus respuestas mostraron una comprensión sólida de la noción de área, explicando que las piezas mantienen su superficie.

Ambas respuestas abordan los cambios en la forma (perímetro), al describir cómo la figura puede transformarse sin cambiar su área, pero si la forma a partir de las configuraciones que manifestó E8: "la FIGURA INICIAL solo tenía tres lados y la FIGURA FINAL quedó con siete lados, su perímetro cambio pero no el área, porque las figuras cambiaron de posición y no se le aumentó ni se mermaron las piezas (ver [Nociones de área y superficie](#)), como se muestra en las figuras 62, 63 y 64:

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 22

1. ¿Qué diferencia puedes identificar en el área de la **FIGURA INICIAL** (compuesta por las figuras de color rojo, amarillo, verde y azul) en comparación con la **FIGURA FINAL**?

Respuesta

La diferencia que puedo identificar es que en las figuras inicial y final tienen las mismas piezas y al deslizar van cambiando de posición pero aun así no de figura pero aun así a la final le queda un espacio

Figura 62. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 1 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

 E6 valeria arce bu...  8/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 22

1. ¿Qué diferencia puedes identificar en el área de la **FIGURA INICIAL** (compuesta por las figuras de color rojo, amarillo, verde y azul) en comparación con la **FIGURA FINAL**?

Respuesta

cambio su forma al inicio nada más tenía 3 lados y al final tiene 7 lados también cambia su perímetro pero no el área por que tienen las mismas figuras y cantidad y también las figuras cambiaron de posición pero no aumentaron ni disminuyeron su tamaño ni forma

Figura 63. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 1 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

←

Sofia Castrillon Ri...

< 18/18 >

⏸

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 22

1. ¿Qué diferencia puedes identificar en el área de la **FIGURA INICIAL** (compuesta por las figuras de color rojo, amarillo, verde y azul) en comparación con la **FIGURA FINAL**?

Respuesta

Cambio su forma, al inicio solo tenia 3 lados y al final quedo con 7 lados, su perimetro cambio pero no el area porque las figuras cambiaron de posicion mas no se le aumento ni se mermaron las figuras geometricas.

Figura 64. Respuesta de estudiante E8 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E8, a la pregunta 1 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

Posteriormente, en las respuestas a la pregunta 2 de la Tarea 2C, se pudo observar que el estudiante E1 reconoce que las piezas individuales son las mismas y que su posición cambia, pero “falla” en comprender que estos cambios resultan en una FIGURA FINAL, diferente en términos de forma. No obstante, la mención del espacio en blanco es un indicio de que el estudiante nota algo diferente pero no integra completamente cómo esto afecta la forma en la FIGURA FINAL.

Si se observa la respuesta de E3, se encuentra una “comprensión incorrecta” al afirmar que el área ha cambiado junto con la forma, pues indica una confusión en la diferencia entre perímetro (contorno de la forma) y área (superficie), es decir, el estudiante está en lo correcto sobre el cambio de forma, pero su “error” es sobre el área.

Para el caso del estudiante E5, se vio reflejada claramente la comprensión del cambio en la forma al identificar el cambio en el número de lados de la figura, este detalle específico muestra que el estudiante entiende cómo las propiedades geométricas (configuraciones de área)

de las piezas y el número de lados, afectan la forma de la FIGURA FINAL (ver figuras 65, 66 y 67).

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 23

2. ¿Crees o piensas que la **FIGURA INICIAL** es igual (forma) que la **FIGURA FINAL**?

Sí, argumenta tu respuesta.
No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

Si, creo que la figura inicial y final son iguales. Lo unico que cambia son las posiciones de cada pieza pero aun asi, sigue estando la misma figura. Tambien hay algo diferente y es que la figura final queda un espacio en blanco

Figura 65. Respuesta de estudiante E1 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 2 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

 E3 estefani  14/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 23

2. ¿Crees o piensas que la **FIGURA INICIAL** es igual (forma) que la **FIGURA FINAL**?

Sí, argumenta tu respuesta.
No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

no ya que la forma y el area cambio

Figura 66. Respuesta de estudiante E3 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E3, a la pregunta 2 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

 E5 Briana Paulet C...  15/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 23

2. ¿Crees o piensas que la **FIGURA INICIAL** es igual (forma) que la **FIGURA FINAL**?

Sí, argumenta tu respuesta.
No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

no, porque al inicio tiene 3 lados y al final tiene 7 lados

Figura 67. Respuesta de estudiante E5 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E5, a la pregunta 2 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

En función a la pregunta 3 de la Tarea 2C, en las respuestas de los estudiantes E6, E7 y E13, se logró evidenciar diferentes percepciones, como que E6 y E13, reconocen que el área no cambia porque las piezas que componen las figuras permanecen iguales, es decir, que el área permanece constante a pesar del cambio en la posición de las piezas. Sin embargo, alude a que existe un aumento en el número de lados de la FIGURA FINAL, que es correcto en términos de forma.

En el caso de E7 presenta en su respuesta una comprensión “poco acertada” del área, al relacionar el cambio en el número de lados con un cambio en el área, dado que muestra una confusión entre las propiedades geométricas de la figura (específicamente la forma y el área), como se muestra en las figuras 68, 69 y 70:

←

E6 valeria arce bu...

< 8/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 24

3. Si alguien te dice que el área de la **FIGURA INICIAL** es la misma que la **FIGURA FINAL** ¿Estás de acuerdo con esa afirmación?

Sí, argumenta tu respuesta.

No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

si por que contiene las mismas cantidad de figuras pero en realidad aumentan sus lados

Figura 68. Respuesta de estudiante E6 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E6, a la pregunta 3 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

←

E7 Marco Antonio...

< 13/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 24

3. Si alguien te dice que el área de la **FIGURA INICIAL** es la misma que la **FIGURA FINAL** ¿Estás de acuerdo con esa afirmación?

Sí, argumenta tu respuesta.

No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

no porque cambio sus lados lo que genero que cambiara tambien su area

Figura 69. Respuesta de estudiante E7 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E7, a la pregunta 3 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

 E13 Kimberly Oso...  1/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 24

3. Si alguien te dice que el área de la **FIGURA INICIAL** es la misma que la **FIGURA FINAL** ¿Estás de acuerdo con esa afirmación?

Sí, argumenta tu respuesta.
No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

si estoy de acuerdo porque lo unico que cambio fue la posicion en la que estaban

Figura 70. Respuesta de estudiante E13 Tarea 2C. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 3 de la Tarea 2C, respecto a las FIGURA INICIAL y FIGURA FINAL. Fuente: GeoGebra.

En los hallazgos de las respuestas proporcionadas por los estudiantes sobre las diferencias y propiedades geométricas como la conservación del área, se observa una variabilidad en la comprensión del signo igual como equivalencia, pues algunos estudiantes, tuvieron un acercamiento a esas configuraciones de las piezas, donde pudieron identificar la conservación del área a pesar de los cambios en la forma de las figuras construidas, mientras que otros, mostraron “confusiones” significativas al combinar las nociones de perímetro (contorno de la forma) y área.

La mención de cambios en el número de lados, particularmente por algunos estudiantes, resalta una atención en cómo conciben el perímetro (contorno de la forma). En general, las respuestas indicaron que si bien, algunos estudiantes tienen una comprensión sobre la noción de la conservación del área y la transformación de figuras, otros necesitan una mayor claridad en distinguir entre las diferencias.

A continuación, se presentan unas observaciones o reflexiones relacionadas con el segundo nivel de la estructura del diseño.

4.2.2 Observaciones o reflexiones del segundo nivel

En esta sección se tuvo presente para el análisis, dos de las intervenciones de los estudiantes y del profesor, las cuales tuvieron una relación con las categorías y códigos de análisis planteadas en la Tabla 6, para llegar a una reflexión parcial sobre la implicación de las actividades en los estudiantes.

4.2.2.1 Intervención 3

P: Listo, entonces ahora pasamos al Nivel Referencial. Nuevamente les voy a mostrar el libro. Así como de manera rápida, bueno tenemos estas tareas, ¿Se acuerdan? La del barquito, la que era como una sombra de un cuadrado, un triángulo y un rectángulo y la que era de la figura se movía, es decir, se trasladaba este triángulo aquí y este aquí, y generaba como un espacio por aquí, un huequito.

E11: Que era contarle el perímetro.

P: Sí, en pocas palabras tenía que ver con el perímetro. Y esta pues, nuevamente les digo que eran tres. Completar estas, bueno. Estas corresponden al Nivel Referencial. Ahora sí pasamos a las preguntas. Por ejemplo, ¿Ustedes qué estrategia utilizaron para determinar si dos figuras eran equivalentes en área?

E11: Pues... Nos fijamos en... Pues contábamos las figuritas que iban adentro. No, si las figuras eran iguales. Si, las figuras que tenían adentro eran iguales, sino que iban en otra posición. No importa si la figura es diferente, igual pueden tener la misma área.

Pues estar moviendo las figuras para mirar en qué orden completaba el cuadrado, o el triángulo, la forma que nos pedían...

P: Ok, bueno, la otra pregunta. ¿Cómo describirías la relación entre la composición superficial de las figuras y su equivalencia en términos de área? Es decir, ¿Existe alguna relación entre lo que compone una superficie y su área? O sea, ¿Si existe una relación entre lo que compone esta figura de acá, lo del piso, las baldosas y su área?.

E11: Claro. Porque es como lo que viene por dentro.

P: Ajá. Sí, o sea, es... Lo que quiere decir es que si existe relación entre lo que compone algo y el valor de su área.

E11: Claro. Es casi lo mismo. Es casi lo mismo que usted dijo. O sea, de que dependiendo si lo que había dentro eran las figuras de colores.

4.2.2.2 Análisis Parcial 3

La intervención se centró en la presentación y discusión del Nivel Referencial, donde el profesor (P) presentó y socializó en qué consistió el nivel a partir de los propósitos y las preguntas orientadoras, considerándolo “un poco más matemático” al ser uno de los niveles que tienen que ver con los modelos matemáticos, las fórmulas, la forma en que operan los estudiantes las matemáticas, es decir, lo que se les enseña en el colegio.

4.2.2.2.1 Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Finalidad de las actividades

En la intervención, se observó que la finalidad de las actividades fueron “claras” por parte del profesor (P), pues las actividades estuvieron diseñadas para que los estudiantes identificaran la de área y el signo igual como equivalencia.

El profesor comenzó recordando las tareas previas y su relación con el tema del perímetro, lo que ayudó a los estudiantes a contextualizar y conectar con las nociones previamente exploradas en las actividades del Nivel Situacional.

Lo anteriormente mencionado, se ve reflejado en la postura de Pérez (2014), la cual plantea que el rol del profesor en el uso de Tecnologías Digitales en el aula, es esencial como mediador entre los significados que los estudiantes construyen a partir de su interacción con estas herramientas y los significados matemáticos formales.

Mientras las herramientas tecnológicas ayudan a conectar a los estudiantes con el conocimiento matemático mediante representaciones de los objetos matemáticos, el profesor interviene para guiar y clarificar los entendimientos de los estudiantes, interpretando y conectando sus ideas con los conceptos matemáticos adecuados a través de un enfoque semiótico.

4.2.2.2.2 Categoría 3 Equivalencias. Código: Conjetura sobre la cantidad de piezas

La respuesta de E11 indica que empleó una estrategia de conteo y comparación, para determinar la equivalencia del área de las figuras (siluetas). Pues E11 mencionó que contaba “las figuritas que iban adentro” y comparaba si eran iguales aunque estuvieran en diferentes posiciones, lo que muestra que el estudiante estaba haciendo “conjeturas” sobre la equivalencia de áreas basadas en la cantidad de piezas contenidas dentro de las figuras (siluetas), mostrando una comprensión básica pero importante de la equivalencia en términos de área.

Este enfoque “intuitivo” de conteo, que realizó E11, refleja una primera aproximación a la noción de área como una medida de la cantidad de espacio ocupado por una figura.

4.2.2.2.3 Categoría 4 Configuración de figuras. Código: Noción de los conceptos de área y perímetro

En la intervención también se destaca la exploración de las nociones de área y perímetro a través de preguntas dirigidas por el profesor, cuando se le pregunta a E11 sobre la relación entre la composición superficial de las figuras y su equivalencia en términos de área, E11 reconoce que existe una relación directa: “Claro. Porque es como lo que viene por dentro”, pues allí se vio reflejada una noción inicial de que el área está relacionada con la cantidad de espacio interno de una figura.

Además, el hecho de que el estudiante menciona “lo que había dentro eran las figuras de colores” sugiere que están comenzando a entender que el área puede ser descompuesta y reconfigurada manteniendo su valor constante, independientemente de la forma específica de la figura.

4.2.2.3 Intervención 4

P: Bueno, pasemos entonces al siguiente nivel. El nivel referencial. Básicamente este nivel identifica modelos, conceptos y procedimientos relacionados con el problema matemático planteado. ¿Cuál era el problema? Pues la equivalencia de área, ¿Sí? A través de figuras que ustedes pudieran ver. Eso.

Y los propósitos, reconocer figuras planas con la misma forma o área. Y también inferir condiciones, inferir es como establecer condiciones para determinar si las figuras eran las mismas o no. Entonces, por ejemplo, E15. Primero vamos a mirar el nivel referencial. ¿Cuáles eran las actividades que se llevaron a cabo?

E15: Pues mi profesor, mi profesor (P) nos explicó en el tablero que el área no equivale como tanto de la forma sino de lo que lo se compone, pues en las figuras que yo realicé se veían siempre las mismas figuras (piezas) para armar la silueta, entonces era como la misma área porque tenían las mismas figuras.

P: ¿Qué estrategias utilizó para determinar si dos figuras tenían la misma área? ¿Cómo te diste cuenta de eso inmediatamente o tuvo que haber una explicación o cómo?

E15: En unas, pues, usted nos explicó allá en el tablero de, por ejemplo, el de dos triángulos pueden formar un cuadrado.

P: ¿Cómo describes la relación de lo que compone una figura y su valor en área? Es decir, si tengo dos figuras que tienen igual área, ¿Existe alguna relación, digámoslo, entre su composición superficial, su forma y su valor de área?

E15: Pues, lo de igual es como la relación que hay, es que es la misma área y diferentes figuras. Entonces, serían como diferentes figuras con el mismo valor de área, pero son diferentes.

4.2.2.4 Análisis parcial 4

La intervención 4 muestra un enfoque en el diseño sobre la equivalencia de áreas, donde el profesor enfatiza los objetivos de las actividades y la aclaración mediante ejemplos específicos, para facilitar a los estudiantes, la comprensión de la noción de equivalencia de áreas.

4.2.2.4.1 Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Énfasis en el objetivo de las actividades

El profesor (P) comienza la intervención destacando los objetivos del Nivel Referencial, que incluye reconocer figuras planas con la misma forma o área e inferir condiciones para

determinar si las figuras son equivalentes en área, pues este énfasis en los objetivos es fundamental para guiar a los estudiantes y asegurarse de que comprendan el propósito de las actividades.

4.2.2.4.2 Categoría 3 Equivalencias. Código: Áreas equivalentes

Durante la interacción, el profesor (P) y el estudiante E15 discuten cómo se determinan las áreas equivalentes. El estudiante mencionó que el profesor les explicó que el área no depende de la forma, sino de los componentes de la figura, un ejemplo de ello fue formar un cuadrado con dos triángulos, lo cual ilustró claramente la noción de áreas equivalentes, independientemente de la forma de las figuras involucradas, permitiendo mostrar en la respuesta del estudiante una comprensión de dicha noción sobre la equivalencia de áreas a través de la descomposición y configuración de figuras geométricas planas.

4.2.2.4.3 Categoría 8 Casos particulares. Código: Aclaración de las actividades del Nivel Referencial

La discusión también se centró en actividades específicas del Nivel Referencial, donde el estudiante describió cómo el profesor utilizó ejemplos en el tablero para explicar la relación entre la composición de una figura y su valor de área. La aclaración de actividades particulares, como el uso de piezas específicas para formar diferentes siluetas con la misma área, refuerza la comprensión de los estudiantes sobre cómo las áreas pueden ser equivalentes a pesar de las diferencias en forma.

4.3 Nivel General

El propósito de este nivel va orientado a desarrollar competencias en los estudiantes para identificar como diferentes figuras geométricas pueden ocupar la misma cantidad de espacio (área) sin importar las configuraciones. Este nivel aborda tanto el reconocimiento de las áreas equivalentes como la composición de figuras planas, a través de una serie de tareas que van relacionadas con la descomposición de las figuras para lograr promover el pensamiento espacial y la visualización geométrica por medio del recurso de GeoGebra.

También, poder lograr que el estudiante “suponga” modelos para explorar, reflexionar y generalizar lo obtenido en el Nivel Referencial.

Para la primera tarea del nivel, el estudiante debía identificar las figuras equivalentes en área respecto a puntos interiores, al utilizar la fórmula del área para encontrar figuras geométricas que sean equivalentes en términos del número de puntos interiores. Se le solicita al estudiante que arrastre los puntos de color rojo para encontrar las figuras equivalentes en número de puntos interiores, donde los vértices A, B, C, D, E y F de la figura (puntos de color rosa) deben permanecer dentro de la región con borde de color negro y utilizar el resultado de la fórmula para encontrar el área de cualquier figura, siendo su área en unidades cuadradas.

Ahora bien, se propusieron tres preguntas orientadoras, que le permitieran al estudiante realizar análisis sobre el reconocimiento de las configuraciones de las figuras con equivalencia en el valor de su área. Pues en la pregunta 1, el estudiante debía identificar al menos dos figuras con el mismo valor de área y describir las similitudes o características que compartían estas figuras, con el fin de promover la observación y comparación de distintas configuraciones geométricas que pueden tener la misma área.

Para la pregunta 2, se invitó al estudiante a reflexionar sobre la relación entre figuras con igual valor de área y su forma, para lograr que determinara si existe o no una relación directa entre la forma de las figuras y su área, al promover el razonamiento deductivo y la comprensión de nociones geométricas.

Y en la pregunta 3, se pretendía guiar al estudiante a establecer una relación, ya sea algebraica, numérica o visual entre dos figuras con igual valor en área. Además, de identificar las semejanzas y diferencias entre estas figuras, fomentando así el desarrollo de competencias para expresar relaciones matemáticas de manera precisa y la capacidad de analizar cómo se comportan las propiedades de las figuras geométricas, desde una configuración.

En la segunda tarea de este nivel (Tarea 3B), se pretendió que el estudiante observara las diferentes configuraciones del trapecio, en función de la composición de figuras planas, por medio de las configuraciones, lo cual permitió que el estudiante conjeture sobre la equivalencia de áreas entre esa nueva configuración del trapecio. Para ello, el estudiante debía mover el deslizador de color morado o dar clic en el ícono de play, para observar qué sucedía en el movimiento de las figuras que formaban el trapecio.

En el caso de la pregunta 1 de la tarea, se buscaba que los estudiantes reflexionaran sobre la equivalencia de área entre distintas figuras geométricas y desarrollaran competencias de justificación matemática. En la pregunta 2, se esperaba que los estudiantes “pensaran” en diferentes maneras de descomponer el trapecio para facilitar el cálculo de su área, reforzando su comprensión de las relaciones geométricas y de equivalencias de área. Por último, la pregunta 3, fue diseñada para que los estudiantes verificaran y argumentaran sobre la conservación del área a través de la descomposición y reconfiguración de figuras.

Finalmente, en la tercera tarea, el estudiante debía reconocer las configuraciones posibles de un paralelogramo, conjeturando sobre su composición a partir de otras figuras planas, pues al mover el deslizador de color gris, se podía observar qué sucedía en el movimiento de las figuras que forman el paralelogramo.

Las preguntas orientadoras en esta Tarea 3C, estuvieron pensadas para guiar a los estudiantes a través de una exploración activa y significativa de las figuras geométricas y su equivalencia en área. El objetivo de la pregunta 1, consistió en guiar al estudiante a experimentar con la figura inicial y observar cómo puede transformarse en otras figuras sin cambiar su área, por medio de las ayudas proporcionadas por el recurso de GeoGebra (ver [Consideración del software de geometría dinámica GeoGebra como recurso didáctico](#)), al hacer uso del deslizador y la modificación de los vértices, facilitando una comprensión visual y manipulativa de la noción de equivalencia de área.

Con respecto a la pregunta 2, el estudiante debía identificar una figura plana alternativa (por ejemplo, un rectángulo o un triángulo) que se pueda utilizar para calcular el área del paralelogramo, es decir, el estudiante debía argumentar el método de cálculo e identificación de las propiedades geométricas y de la relación entre las diferentes figuras y sus áreas.

Posteriormente, en la pregunta 3, el estudiante se encuentra con un desafío, donde debía aplicar nociones algebraicas y geométricas, para expresar el área del paralelogramo y la nueva figura en términos de variables (A y B), al buscar y explicar la relación entre las áreas y las formas de las figuras, al compararlas y relacionarlas, lo que debería permitir en el estudiante desarrollar competencias críticas en el análisis geométrico y algebraico.

Se logró evidenciar en las respuestas generales de los estudiantes que en la pregunta 1, de la Tarea 3A, nueve afirmaron haber encontrado figuras con la misma área e identificaron

diferencias en la forma. Se evidenció que tres estudiantes, realizaron un cálculo detallado, donde utilizaron el lenguaje algebraico para confirmar, que diferentes figuras pueden tener la misma área y dos estudiantes manifestaron explícitamente, ejemplos específicos de las dos figuras que encontraron equivalentes en área (un hexágono y un cuadrado).

En las respuestas a la pregunta 2 proporcionadas por los estudiantes, se pudo evidenciar que fueron discrepantes, puesto que seis estudiantes manifestaron que si existe una relación, porque tienen el mismo valor de área. Estas respuestas sugieren, que la relación lleva a que diferentes figuras pueden compartir la misma área, además plantearon algunos ejemplos específicos de figuras diferentes en forma, pero iguales en área, argumentando que esto demuestra una relación entre las figuras a pesar de sus formas distintas.

Por otra parte, siete estudiantes proporcionaron respuestas confusas, al plantear lo que reflejó una falta de comprensión sobre la diferencia entre forma (contorno de la figura) y área.

En general, las respuestas a la pregunta 3 muestran una variedad de niveles de comprensión y habilidades para comparar figuras geométricas con igual área. Las respuestas de dos estudiantes, mostraron una apreciación particular al incluir medidas específicas y diferentes tipos de figuras, aunque aún pueden mejorar en términos de claridad y profundidad de comparación. Por otro lado, las respuestas de cuatro estudiantes, tienen elementos interesantes, pero carecen de completitud o claridad.

Y para el caso de una considerable parte de los estudiantes, no se logró completamente una relación (algebraica, numérica o visual) entre dos figuras con igual valor en A , ni mostrar sus semejanzas y diferencias, es importante considerar varios aspectos clave: la precisión matemática, la claridad de la explicación, la correcta identificación de las características geométricas y la capacidad de comparación.

A continuación, se presenta un análisis general de las respuestas.

Con relación a las producciones de los estudiantes, de acuerdo a la pregunta 1 de la Tarea 3B, se observó una comprensión general de la relación entre el área del trapecio y la posibilidad de “visualizarlo” (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)) como un rectángulo, pues los estudiantes dieron cuenta del proceso de modificación o transformación del área del trapecio, a diferencia de dos estudiantes, puesto que mencionan un triángulo en lugar de un rectángulo, lo que sugiere una distinta configuración como resultante al comparar o descomponer el trapecio.

Como resultado a las respuestas referente a la pregunta 2, la mayoría de los estudiantes manifestaron que para calcular el área de un trapecio, este se puede transformar en una figura más sencilla, como un rectángulo. Sin embargo, tres estudiantes sugirieron descomponer el trapecio en otras figuras geométricas como triángulos y cuadrados, lo cual muestra otros tipos de configuraciones del trapecio, porque reconocieron que el área de un trapecio puede ser descompuesta en áreas de otras figuras planas (ver [Transformaciones](#)).

Con respecto a la pregunta 3, casi todos los estudiantes afirmaron que el área de ambas figuras es igual, lo que se pudo observar en la forma en que concluyeron su idea sobre la conservación del área, al descomponer y reconfigurar el trapecio sin alterar su cantidad de piezas o su tamaño. Por el contrario, solo un estudiante, afirmó que el área cambia porque cambia de forma la figura, indicando una confusión entre la forma (contorno de la figura) y las nociones de área (superficie).

Finalmente, se observó en las respuestas de la pregunta 1, referente a la Tarea 3C, que han identificado correctamente que el rectángulo es una figura que puede tener la misma área que un paralelogramo, lo cual evidencia una comprensión de la noción de área y la equivalencia

entre estas dos figuras geométricas. Además, los estudiantes realizaron descripciones que parecen ser un intento de explicar el proceso de transformación de un paralelogramo a un rectángulo.

Por otra parte, en la pregunta 2, gran parte de los estudiantes identificaron correctamente el rectángulo como la figura plana que permite calcular el área del paralelogramo. Sin embargo, solo unos pocos estudiantes mencionaron el método de cálculo del área utilizando base y altura, lo que sugiere que aunque conocen la figura correcta, necesitan reforzar su comprensión de la transformación geométrica y las maneras de calcular áreas (ver [Geometría activa](#)).

Por otra parte, las respuestas de los estudiantes referente a la pregunta 3, se pudo identificar que el área del paralelogramo es la suma de las áreas A y B y que la nueva figura (interpretada como un rectángulo) también tiene un área de $A + B$, pues se podría decir que han utilizado la propiedad conmutativa de la suma ($A + B = B + A$) y que independientemente de la forma, la suma de las áreas sigue siendo la misma, por lo que su conjetura les permite acercarse a esas nociones geométricas y algebraicas relacionadas con el área (ver [Propiedades de las áreas y superficies planas](#)).

En síntesis, las producciones de los estudiantes en este Nivel General se enfoca en el análisis y manipulación de figuras geométricas con el fin de desarrollar una comprensión de la noción de las áreas equivalentes y la composición de figuras planas, pues por medio de las tareas, los estudiantes fueron guiados para explorar y descubrir las diversas configuraciones que pueden adoptar las figuras geométricas, en lo que se pudo observar un fortaleciendo en las competencias de visualización (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)) y razonamiento espacial (ver [Pensamiento espacial](#)).

A continuación, se mencionan algunos casos específicos que sobresalen en las soluciones de los estudiantes con el uso del recurso de GeoGebra.

4.3.1 Hallazgos del Nivel General

La Tarea 3A fue diseñada para que los estudiantes reconocieran las distintas configuraciones de las figuras geométricas que pueden tener el mismo valor de área y a “comprender” las equivalencias entre estas áreas. Pues los principales propósitos consisten en reconocer que diferentes figuras pueden tener la misma área, aunque sus formas sean distintas y entender las equivalencias entre áreas.

Para dar inicio a la tarea, los estudiantes debían encontrar figuras equivalentes en términos del número de puntos interiores, utilizando la fórmula para calcular el área, al arrastrar los puntos de color rosa, se formaban figuras con el mismo número de puntos interiores, asegurando que los vértices A, B, C, D, E y F (puntos de color rosa) permanezcan dentro de la región delimitada por un borde de color negro.

Además, los estudiantes debían utilizar la fórmula proporcionada para calcular el área de cualquier figura, donde “A” representa el área en unidades cuadradas. Al terminar la construcción de las siluetas, el estudiante debía dar respuesta a las preguntas guía, en base a lo realizado anteriormente, como se muestra en la figura 71:

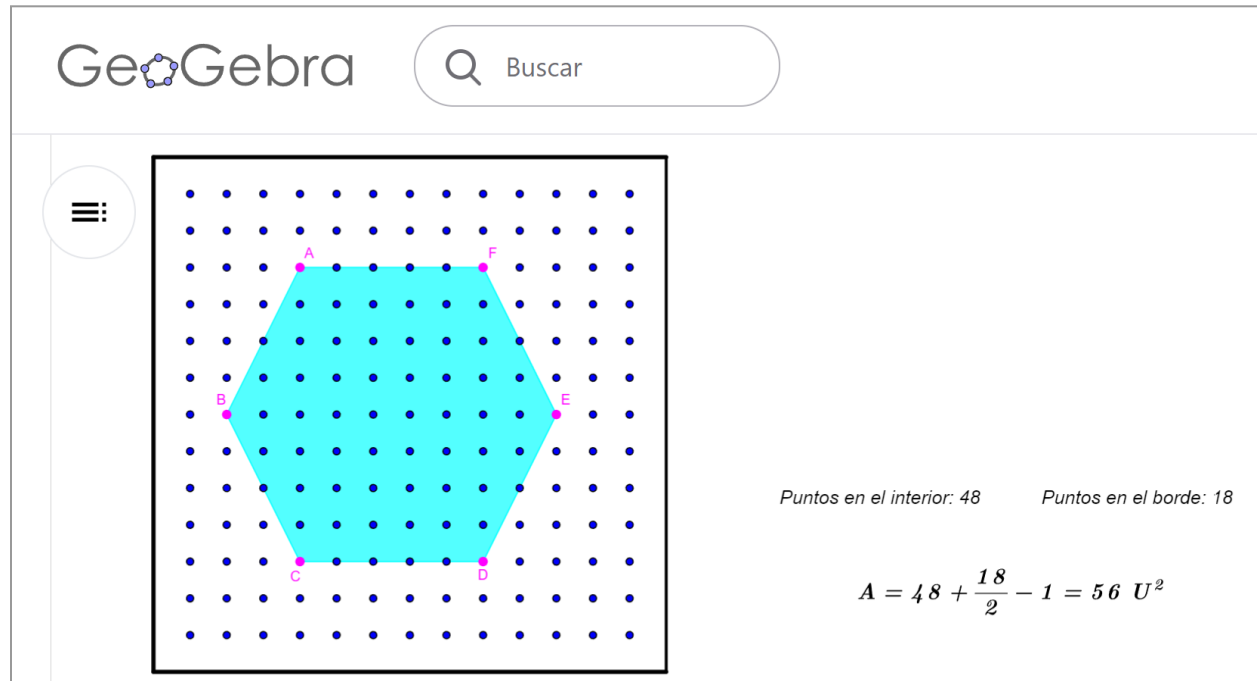


Figura 71. Configuración Tarea 3A Nivel General. La figura muestra el valor de la fórmula A, la cual busca la manera de encontrar las figuras que sean equivalentes en el número de puntos, de acuerdo a cómo se ubiquen los vértices A, B, C, D, E y F.. Fuente: Elaboración propia.

En base a las construcciones que realizaron los estudiantes E1, E2 y E5, se pudo observar que los tres estudiantes realizaron apreciaciones distintas donde E1 reconoce que diferentes figuras pueden tener la misma área, pero no menciona ninguna otra característica o similitud relevante entre ellas, la falta de detalle impide evaluar si el estudiante comprende las relaciones geométricas que pueden llevar a figuras distintas a tener áreas iguales (por ejemplo, diferentes formas con igual área), puesto que no explora las propiedades matemáticas más allá del valor del área (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)).

E2 muestra una comprensión específica de las características geométricas que pueden variar (longitud de lados, posición) mientras mantiene constante el área. El estudiante identificó tanto la similitud en el área como las diferencias en forma y disposición, dado que muestra una apreciación de la diversidad geométrica que puede existir entre figuras con igual área; su

respuesta refleja una buena comprensión de que el área es una medida que puede ser compartida por diferentes configuraciones geométricas (ver [Nociones de área y superficie](#)), aunque describe las diferencias en términos de longitud de lados y ubicación.

Por otro lado, el estudiante E5, proporciona cálculos detallados para dos figuras, ambas con un área de 56 unidades cuadradas, al representar el proceso matemático que utilizó para encontrar el área de cada figura. Aunque E5 realizó cálculos, no discute las características geométricas de las figuras más allá del resultado numérico del área, pues faltó un análisis cualitativo sobre las características geométricas de las figuras, como la forma, la cantidad lados, y otras propiedades relevantes que podrían ser mencionadas en relación con el área (ver figuras 72, 73 y 74).

← E1 Michel Sofia M... < 12/18 > Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 26

1. ¿Haz encontrado dos o más figuras con el mismo valor de área? ¿Qué similitudes o características comparten estas figuras encontradas?

Respuesta

Si, yo encontre mas figuras con el mismo area y lo que comparten es que aunque sean distintas no les cambia la cantidad de su area

Figura 72. Respuesta de estudiante E1 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 1 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

← E2 Silvana Penago...
16/18
Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 26

1. ¿Haz encontrado dos o más figuras con el mismo valor de área? ¿Qué similitudes o características comparten estas figuras encontradas?

Respuesta

Si, yo encuentre tres figuras. Las características que comparten es que tienen el mismo valor de area y lo diferente es que cada una tienen lados distintos y ubicadas de diferente manera. Tampoco son las mismas figuras

Figura 73. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 1 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

← E5 Briana Paulet C...
15/18
Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 26

1. ¿Haz encontrado dos o más figuras con el mismo valor de área? ¿Qué similitudes o características comparten estas figuras encontradas?

Respuesta

la primera figura me dio $A = 48 + \frac{18}{2} - 1 = 56$ Unidades cuadradas.

la segunda figura me dio $A = 47 + \frac{20}{2} - 1 = 56$ unidades cuadradas

Figura 74. Respuesta del estudiante E1 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E5, a la pregunta 1 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

Para las respuestas proporcionadas por los estudiantes E1, E4 y E7 referente a la pregunta 2 de la Tarea 2A, los tres estudiantes muestran diferentes perspectivas de las nociones sobre equivalencias de áreas.

E1 reconoce que diferentes formas pueden tener la misma área y que esta relación se mantiene a pesar de las diferencias en forma. El estudiante entiende que la igualdad del área puede ser independiente de la forma, pues al mencionar hexágonos regulares e irregulares sugiere una comprensión de cómo diferentes configuraciones geométricas pueden compartir la misma área, al dar cuenta de que el área puede ser una característica común entre diferentes formas (ver [Propiedades de las áreas y superficies planas](#)).

En cambio la respuesta de E4 muestra confusión en la comprensión de las nociones geométricas implícitas en la actividad, puesto que parece haber un malentendido sobre la relación entre área y forma, al no mostrar una comprensión clara de cómo diferentes figuras geométricas pueden compartir la misma área, la idea de que “son las mismas figuras” sugiere una falta de diferenciación entre forma y área.

Para el estudiante E7, las figuras con la misma área pueden tener formas diferentes, pero concluye que esto significa que no hay una relación entre área y forma. A pesar de que el estudiante reconoce que diferentes formas pueden compartir la misma área, malinterpreta esta relación como una falta de conexión entre forma (contorno de la figura) y área (superficie), como se muestra en las figuras 75, 76 y 77:

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 27

2. ¿Existe o no alguna relación entre dos figuras con igual valor de área y su forma? Justifica tu respuesta. **Por ejemplo:** *Un triángulo de $50 U^2$ y un rectángulo de $50 U^2$.*

Respuesta

Si existe una relacion. Por ejemplo, un exagono regular de 56 unidades cuadradas y un exagono irregular de 56 unidades cuadradas, tienen relacion por lo que apesar de que su forma sea diferente su area no **cambia**

Figura 75. Respuesta de estudiante E1 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 2 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

 E4 laura ramirez  10/18 

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 27

2. ¿Existe o no alguna relación entre dos figuras con igual valor de área y su forma? Justifica tu respuesta. **Por ejemplo:** *Un triángulo de $50 U^2$ y un rectángulo de $50 U^2$.*

Respuesta

No por que son las mismas figuras y no es necesario que tengan su misma area o forma

Figura 76. Respuesta de estudiante E4 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E4, a la pregunta 2 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

←

E7 Marco Antonio...

< 13/18 >

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

⏮

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 27

2. ¿Existe o no alguna relación entre dos figuras con igual valor de área y su forma? Justifica tu respuesta. **Por ejemplo:** Un triángulo de $50 U^2$ y un rectángulo de $50 U^2$.

Respuesta

no porque el exagono es diferente al cuadrado pero los dos tienen el mismo area

Figura 77. Respuesta de estudiante E7 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E7, a la pregunta 2 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

Por último, se tienen las respuestas de los estudiantes E9, E13 y E16, en base a la pregunta 3 de la Tarea 3A, donde específicamente los estudiantes lograron un acercamiento de establecer una relación (algebraica, numérica o visual) entre dos figuras con igual valor en A, y mostrar sus semejanzas y diferencias, aunque la precisión matemática, la claridad de la forma en que conjeturaban, no logró la identificación de las características geométricas y la capacidad de comparación.

El estudiante E9 indicó que dos figuras, un triángulo y un cuadrado, tienen un área de 10 unidades cuadradas cada una, pues el estudiante no logró una relación algebraica, numérica o visual detallada entre las figuras, a pesar de que hace una apreciación de las formas de las figuras y su área, pero no explora las semejanzas y diferencias de manera significativa.

El estudiante E13 presenta dos cálculos de área: $4 \times 4 = 16$ y $8 \times 2 = 16$. Allí se pudo evidenciar una relación numérica entre dos figuras (un cuadrado y un rectángulo) que tienen la misma área. El estudiante entiende cómo calcular el área de un rectángulo y un cuadrado, al reconocer que diferentes figuras pueden resultar en la misma área, al mostrar la igualdad de área,

pero no menciona las figuras explícitamente ni explora sus diferencias y semejanzas más allá de los cálculos de área.

Con respecto al estudiante E16, en su respuesta presenta dos figuras, un hexágono regular y un rectángulo, ambos con un área de 56 unidades cuadradas. E16 identifica claramente las figuras y sus áreas, aunque no proporciona detalles algebraicos o una representación visual que muestre cómo se calculan las áreas, pero muestra una comprensión de que diferentes formas geométricas pueden tener la misma área y menciona específicamente un hexágono regular y un rectángulo (ver figuras 78, 79 y 80).

 E9 Samuel Andres...  3/18 

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 28

3. Establece una relación ya sea algebraica, numérica o visual, entre dos figuras con igual valor en **A**, y muestra sus semejanzas y diferencias.

Respuesta

A tiene un area de 10 y B tiene un area de 10 A es un triangulo y B es un cuadrado

Figura 78. Respuesta de estudiante E9 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E9, a la pregunta 3 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

← E13 Kimberly Oso...
1/18
Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 28

3. Establece una relación ya sea algebraica, numérica o visual, entre dos figuras con igual valor en **A**, y muestra sus semejanzas y diferencias.

Respuesta

$$a = 4 \cdot 4 = 16 \quad a8 \cdot 2 = 16$$

Figura 79. Respuesta de estudiante E13 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 3 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

← E16 juan david ga...
9/18
Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 28

3. Establece una relación ya sea algebraica, numérica o visual, entre dos figuras con igual valor en **A**, y muestra sus semejanzas y diferencias.

Respuesta

$$x = 56 u^2, X \text{ ES HEXAGONO REGULAR}, Y = 56 u^2, Y \text{ ES UN RECTANGULO REGULAR}$$

Figura 80. Respuesta de estudiante E16 Tarea 3A. La figura muestra la respuesta del estudiante E16, a la pregunta 3 de la Tarea 3A, respecto al polígono formado con los vértices A, B, C, D, E y F. Fuente: GeoGebra.

La Tarea 3B tuvo como propósito principal, el reconocimiento y análisis de la composición de figuras planas y las distintas configuraciones posibles que pueden presentar, manteniendo un mismo valor de área. Esta actividad, se centró específicamente en el estudio de

un trapecio, que aunque es más comúnmente reconocido como un polígono irregular, en este caso, se abordó desde una perspectiva regular para facilitar su descomposición y reconfiguración.

Lo que se buscaba con la animación de la configuración del trapecio es que los estudiantes pudieran observar qué ocurría al descomponer esta figura en varias figuras planas y explorar las diferentes configuraciones que se pueden formar a partir de esta nueva figura (un rectángulo).

Para llevar a cabo la tarea, el estudiante debía mover el deslizador de color morado o dar clic en el ícono de play, para poder observar lo que sucedía con el movimiento o reacomodo del trapecio. Allí se buscaba que el estudiante pudiera conjeturar cómo las figuras se reorganizan y cómo estas configuraciones mantienen el área total del trapecio, además de identificar los diferentes patrones y configuraciones que se dieron en el proceso, como se muestra en las figuras 81 y 82:

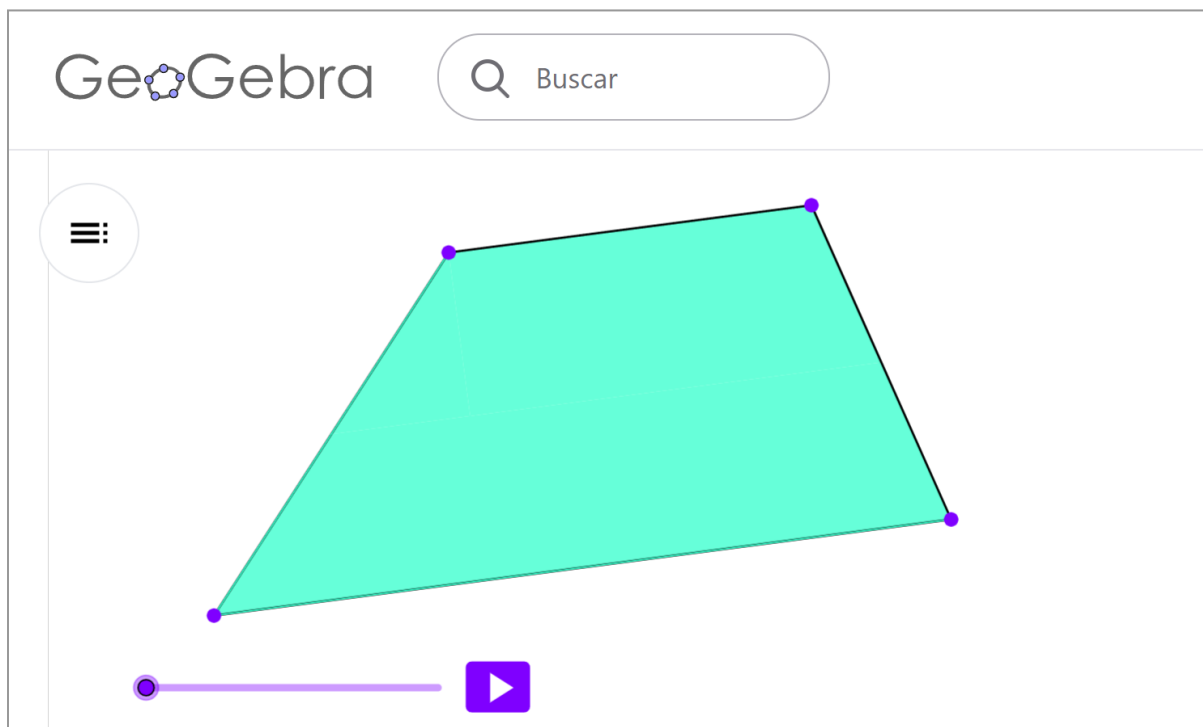


Figura 81. Configuración del trapecio Tarea 3A Nivel General. La figura muestra la configuración del trapecio, a partir de una descomposición inicial de las figuras que lo componen. Fuente: Elaboración propia.

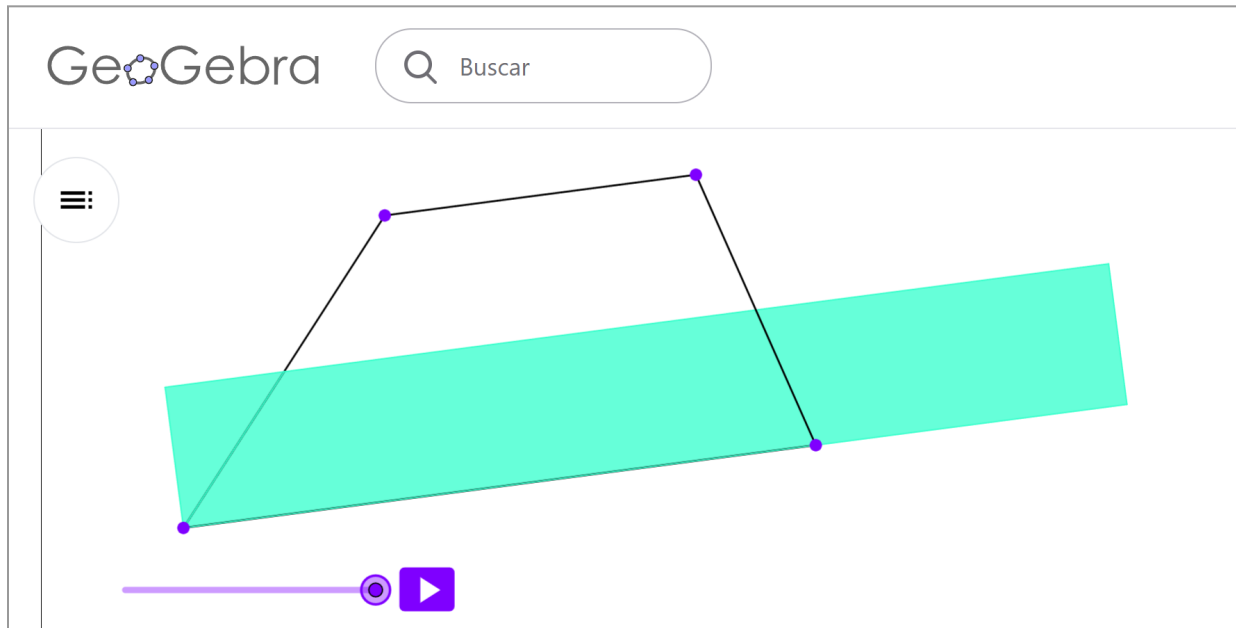


Figura 82. Configuración del trapecio Tarea 3A Nivel General. La figura muestra la configuración del trapecio, al llegar a la configuración final de las figuras que lo componen. Fuente: Elaboración propia.

En base a lo que observaron los estudiantes E2, E3 y E12, se pudo evidenciar que los tres comprendieron la esencia de la pregunta, que se centraba en identificar a partir del reacomodo del trapecio, en una composición de figuras distintas que lo construyen, al llegar a una composición final (un rectángulo), sin embargo sus respuestas no fueron explícitas, que principalmente lo que se buscaba era que pudieran realizar conjeturas e inclusive demostraciones que permitieran ver matemáticamente esa reconfiguración del trapecio.

En la respuesta a la pregunta 1 de la tarea 3B, los tres estudiantes afirmaron que el área de un trapecio se puede considerar como la composición de otra figura, específicamente como un rectángulo. E2 menciona que “con las piezas que hay dentro del trapecio, logramos hacer un rectángulo” y E12 indica que “el área de un trapecio se puede modificar al área de un rectángulo”, esto sugiere una comprensión práctica y visual de la relación para ambos estudiantes. Sin embargo, no detallan específicamente cómo se realiza esta transformación.

Para el estudiante E3, su afirmación sobre que “un trapecio se puede transformar a un rectángulo”, indica una percepción correcta pero vaga, sin explicar el procedimiento matemático detrás de esta transformación.

Para transformar un trapecio en un rectángulo, es importante entender que esta transformación no es literal, sino conceptual. Matemáticamente, la forma para encontrar el área de un trapecio $\left(\frac{1}{2}\right)(Base\ 1 + Base\ 2)(Altura)$ y se puede derivar de la idea de un rectángulo cuya base es el promedio de las dos bases del trapecio donde su altura es la misma que la del trapecio.

Sin embargo, ninguno de los estudiantes aborda directamente esta forma algebraica o la idea del “promedio de las bases”, lo que podría indicar una brecha en la comprensión matemática detallada de la equivalencia en áreas de ambas figuras (el trapecio y el rectángulo), como se muestra en las figuras 83, 84 y 85:

←

E2 Silvana Penago...

<

16/18

>

⏮

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 30

1. ¿El área de un trapecio se puede ver cómo la composición de otra figura?

Sí, justifica tu respuesta.
No, justifica tu respuesta.

Respuesta

Si, porque con las piezas que hay dentro del trapecio, logramos hacer un rectangulo

Figura 83. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 1 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E3 estefani  14/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 30

1. ¿El área de un trapecio se puede ver cómo la composición de otra figura?

Sí, justifica tu respuesta.
No, justifica tu respuesta.

Respuesta

si ya que un trapecio se puede trasformar a un rectangulo

Figura 84. Respuesta de estudiante E3 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E3, a la pregunta 1 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E12. Rafaella Arro...  4/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 30

1. ¿El área de un trapecio se puede ver cómo la composición de otra figura?

Sí, justifica tu respuesta.
No, justifica tu respuesta.

Respuesta

Si el area de un trapecio se puede modificar al area de un rectangulo

Figura 85. Respuesta de estudiante E12 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E12, a la pregunta 1 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

En referencia a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 de la Tarea 3B, se evidenciaron diferentes niveles de comprensión y competencias para descomponer y reconfigurar figuras geométricas. Sin embargo, no se logró en su totalidad que los estudiantes relacionaran las configuraciones geométricas con la forma algebraica correspondiente para el cálculo de áreas, debido a que en este nivel se buscaba que pudieran llegar a conjeturar con ese tipo de registros de representación.

Según Duval (2005), para que una representación sea efectiva y permita a los sujetos acceder al objeto representado, deben cumplirse dos condiciones: contar con al menos dos sistemas semióticos diferentes para representar un objeto, situación o proceso, y poder convertir espontáneamente las representaciones de un sistema semiótico a otro sin darse cuenta.

La respuesta del estudiante E2 muestra una cierta comprensión de cómo diferentes figuras pueden configurarse para formar un trapecio. Sin embargo, la elección de un cuadrado y dos triángulos (uno normal y otro isósceles) no es convencional para esta tarea, pues generalmente, un trapecio puede descomponerse en dos triángulos y un rectángulo, o en dos triángulos y un paralelogramo.

Ahora bien, si se observa la respuesta del estudiante E11: “Porque una solo se mueve para formar una barra y dejar un espacio”, se pudo evidenciar que es confusa y carece de claridad en la descripción de la configuración geométrica, pues no está claro qué figura se está moviendo ni cómo se relaciona esto con el cálculo del área del trapecio, lo que dificulta la evaluación de la comprensión matemática del estudiante.

La respuesta del estudiante E16, sugiere que puede estar confundiendo el trapecio con otra figura o simplemente no sabe cómo descomponer el trapecio en partes, al mencionar que se

puede utilizar la fórmula del rectángulo, directamente no logró cómo representar esa forma para encontrar el área del trapecio, su respuesta fue general (ver figuras 86, 87 y 88).

 E2 Silvana Penago...  16/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 31

2. ¿Qué configuraciones utilizarías para calcular el área del trapecio? **Por ejemplo:** *La configuración para calcular el área de un cuadrado se puede hacer a partir de dos triángulos rectángulos.*

Respuesta

La configuracion que utilizaria para calcular el area de un trapecio se puede hacer a partir de un cuadrado, un triangulo normal y otro isoseles

Figura 86. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 2 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 emmanuel E11  7/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 31

2. ¿Qué configuraciones utilizarías para calcular el área del trapecio? **Por ejemplo:** *La configuración para calcular el área de un cuadrado se puede hacer a partir de dos triángulos rectángulos.*

Respuesta

pe q una solo se muebe para formar una barray dejjar un espacio

Figura 87. Respuesta de estudiante E11 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E11, a la pregunta 2 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E16 juan david ga...  9/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 31

2. ¿Qué configuraciones utilizarías para calcular el área del trapecio? **Por ejemplo:** *La configuración para calcular el área de un cuadrado se puede hacer a partir de dos triángulos rectángulos.*

Respuesta

CALCULAR CON LA FORMULA DEL RECTANGULO

Figura 88. Respuesta de estudiante E16 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E16, a la pregunta 2 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

En relación a las respuestas de los estudiantes para la pregunta 3 de la Tarea 3B, se evidenció que los tres estudiantes comprendieron la conservación del área del trapecio al descomponerse por medio de configuraciones, en un rectángulo. Sin embargo, las explicaciones proporcionadas por los estudiantes tienden a ser “superficiales” y carecen de detalles que den cuenta sobre la representación algebraica del trapecio, lo cual “demuestra” una baja comprensión en la noción de la equivalencia de área.

En relación al caso anterior de los tres estudiantes “cuando no se cumplen esas dos condiciones, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto como representaciones de ese mismo objeto” (Duval , 2017, p. 64). Esto resalta la importancia de la capacidad de manejar y traducir entre diferentes sistemas semióticos, ya que sin esta competencia, los estudiantes pueden enfrentar dificultades significativas para comprender y comunicar conceptos de manera efectiva.

Los estudiantes E2 y E10 indican que el área se conserva porque solo cambia la ubicación de las piezas, no su cantidad, esta respuesta muestra una comprensión adecuada de que

la reorganización de las piezas de una figura no afecta su área total, es decir, reconoce la invarianza del área bajo la reorganización de las piezas; sin embargo, su respuesta podría ser más precisa al especificar a qué se refiere a la conservación del área durante una transformación geométrica.

Para el estudiante E3, el área se conserva porque la nueva figura se creó a partir del trapecio, aunque la afirmación es correcta, la explicación es algo “superficial” y no aborda explícitamente el principio de conservación del área, a pesar de que entiende que la figura resultante se deriva del trapecio al mantener esa relación inicial (ver figuras 89, 90 y 91).

 E2 Silvana Penago...  16/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 32

3. De acuerdo a la figura que se genera después de descomponer el trapecio (ver animación) ¿Se puede afirmar que el área de ambas figuras son iguales?

Sí, ¿Por qué?

No, ¿Por qué?

Respuesta

Si, porque solo cambia la ubicacion de algunas piezas, mas no la cantidad de area

Figura 89. Respuesta de estudiante E2 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 3 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

← E10 . Maria Alejan...
2/18
>

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 32

3. De acuerdo a la figura que se genera después de descomponer el trapecio (ver animación) ¿Se puede afirmar que el área de ambas figuras son iguales?

Sí, ¿Por qué?
No, ¿Por qué?

Respuesta

si por que el nuemero de piezas no aumentan ni la cantidad de area

Figura 90. Respuesta de estudiante E10 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E10, a la pregunta 3 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

← E13 Kimberly Oso...
1/18
>

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 32

3. De acuerdo a la figura que se genera después de descomponer el trapecio (ver animación) ¿Se puede afirmar que el área de ambas figuras son iguales?

Sí, ¿Por qué?
No, ¿Por qué?

Respuesta

si porque la figura que se genera se hizo en base al trapecio

Figura 91. Respuesta de estudiante E13 Tarea 3B. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 3 de la Tarea 3B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

En síntesis, los estudiantes E2, E3 y E12 mostraron una comprensión básica de la pregunta sobre la transformación geométrica del trapecio en un rectángulo, evidenciando su habilidad para visualizar y conceptualizar la reconfiguración de las figuras. Sin embargo, sus

respuestas carecieron de la precisión y detalle necesarios para una explicación matemática rigurosa.

Aunque identificaron correctamente que el área del trapecio se puede considerar como la de un rectángulo, no lograron explicitar cómo se realiza esta transformación ni abordar la noción algebraica del promedio de las bases.

Las respuestas a la pregunta 2 revelaron diversos niveles de comprensión y habilidades en la descomposición y reconfiguración de figuras geométricas, destacando la necesidad de fortalecer la relación entre las configuraciones geométricas y sus representaciones algebraicas para el cálculo de áreas.

No obstante, los estudiantes E2 y E10 reconocieron la conservación del área durante la transformación, sus explicaciones fueron superficiales y carecieron de una justificación matemática detallada, lo que sugiere una brecha en la comprensión profunda del principio de conservación del área. Por lo tanto, se recomienda hacer mejoras en el diseño que enfatice tanto la visualización como la formalización algebraica para fortalecer la comprensión integral de estas nociones geométricas y algebraicas.

La Tarea 3C se centra en el diseño de una propuesta de enseñanza que busca profundizar en la comprensión de las figuras geométricas planas, específicamente los paralelogramos, con el objetivo de que los estudiantes reconozcan la composición de figuras planas y las distintas configuraciones que pueden tener el mismo valor de área.

La actividad principal consiste en explorar las diferentes configuraciones que puede adoptar un paralelogramo y así identificar cómo se pueden descomponer y reconfigurar las figuras dentro de él, mientras se mantiene constante el área del paralelogramo. Para ello, los estudiantes deben mover un deslizador de color gris y observar cómo se reconfiguran las figuras

planas que componen el paralelogramo, lo que les permitirá desarrollar una comprensión más profunda de los conceptos de área y geometría a través de un enfoque interactivo y exploratorio, por medio de recurso de geometría dinámica GeoGebra (ver figuras 92 y 93).

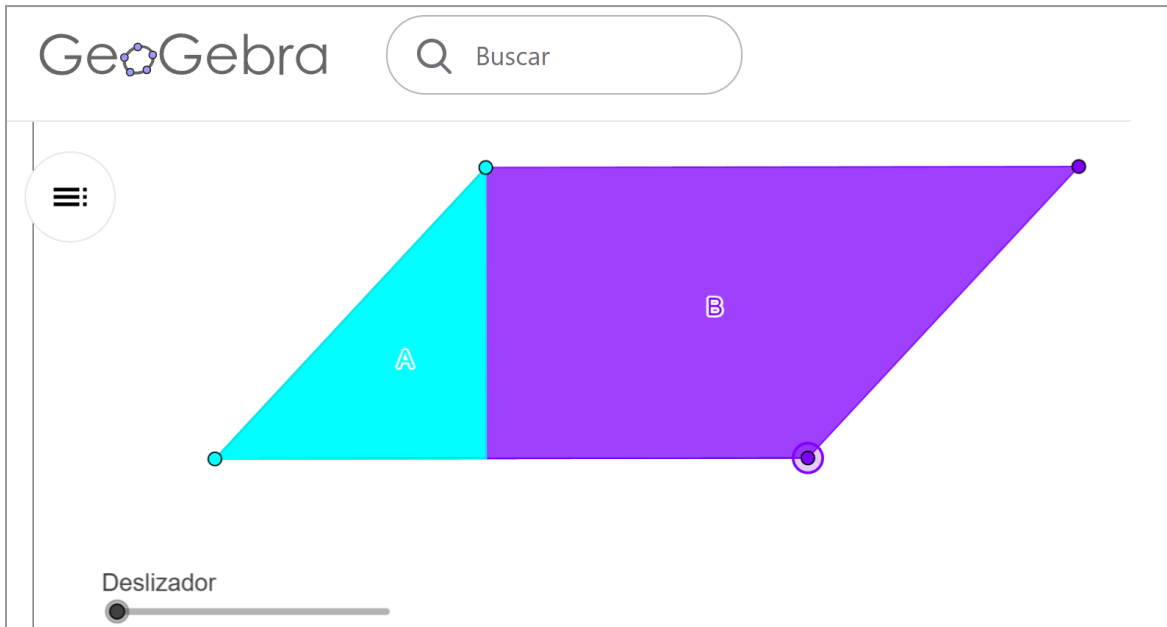


Figura 92. Configuración de paralelogramo Tarea 3C Nivel General. La figura muestra la configuración del paralelogramo a partir de una composición inicial. Fuente: Elaboración propia.

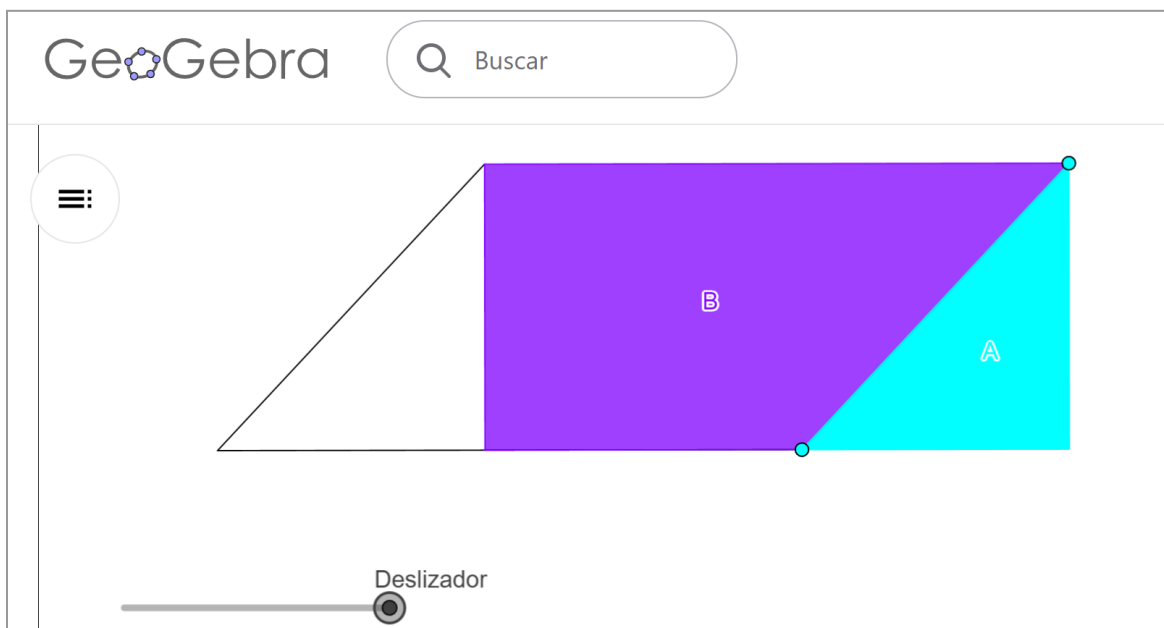


Figura 93. Configuración de paralelogramo Tarea 3C Nivel General. La figura muestra la configuración del paralelogramo a partir de una composición final. Fuente: Elaboración propia.

En base a lo que observaron y exploraron los estudiantes E4, E11 y E12, se pudo evidenciar que los estudiantes E4 y E12 muestran una comprensión sobre la equivalencia de área entre un paralelogramo y un rectángulo, puesto que entienden que ambas figuras pueden tener áreas iguales si cumplen con la conservación de la superficie. Sin embargo, no hay evidencia clara de que E4 y E12 hayan utilizado las ayudas, pero su respuesta indica que exploraron la actividad.

Pero solo E11 no logró observar esas particularidades de lo que solicitaba la Tarea, lo cual se pudo evidenciar que su respuesta no muestra una comprensión clara de la relación de áreas entre diferentes figuras geométricas, parece estar describiendo un procedimiento de manipulación del paralelogramo que no se relaciona directamente con la pregunta sobre el área.

O tal vez, podría estar refiriéndose a la modificación del paralelogramo, aunque no muestra evidencia de haber comprendido cómo estas modificaciones afectan el área, ni de haber utilizado el deslizador de manera efectiva (ver figuras 94, 95 y 96).

 E4 laura ramirez  10/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 34

1. ¿Qué otra figura tiene igual área a la del paralelogramo? **AYUDA 1:** Vuelve a la posición inicial y modifica el paralelogramo arrastrando cualquiera de los vértices libres. **AYUDA 2:** Vuelve a utilizar el "Deslizador" de color gris.

Respuesta

el area del paralelogramo, puede ser igual a la del rectangulo

Figura 94. Respuesta de estudiante E4 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E4, a la pregunta 1 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

←
emmanuel E11
7/18

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 34

1. ¿Qué otra figura tiene igual área a la del paralelogramo? **AYUDA 1:** Vuelve a la posición inicial y modifica el paralelogramo arrastrando cualquiera de los vértices libres. **AYUDA 2:** Vuelve a utilizar el "Deslizador" de color gris.

Respuesta

ps en la primera se muebe hacia la mitad dejando un espacio en el q empieza y despues see muebe a lo ultimo

Figura 95. Respuesta de estudiante E4 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E4, a la pregunta 1 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

←
E12. Rafaella Arro...
4/18

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 34

1. ¿Qué otra figura tiene igual área a la del paralelogramo? **AYUDA 1:** Vuelve a la posición inicial y modifica el paralelogramo arrastrando cualquiera de los vértices libres. **AYUDA 2:** Vuelve a utilizar el "Deslizador" de color gris.

Respuesta

otra figura que tiene el mismo area de el paralelogramo puede ser un rectangulo

Figura 96. Respuesta de estudiante E12 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E12, a la pregunta 1 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

Si bien algunos estudiantes tienen un acercamiento a la noción de conservación del área entre diferentes figuras geométricas, otros pueden presentar confusiones, lo que se recomienda adicionalmente una instrucción más clara sobre cómo utilizar estos recursos tecnológicos proporcionados para explorar dichas nociones.

En relación a las respuestas de los estudiantes para la pregunta 2 de la Tarea 3C, se evidenció que los estudiantes E1, E9 y E14, reflejaron una comprensión general de que un rectángulo puede utilizarse para calcular el área de un paralelogramo. Sin embargo, la profundidad y claridad de la argumentación varían, dado que es esencial que los estudiantes no sólo identifiquen correctamente la figura final, sino que también expliquen detalladamente el proceso matemático que permite esta reconfiguración y cómo se utiliza para hallar el área.

E1 en su respuesta identifica la figura plana como un rectángulo, pero carece de detalles sobre cómo se relaciona el rectángulo con el cálculo del área del paralelogramo, puesto que no proporciona una argumentación específica sobre cómo el rectángulo permite calcular el área del paralelogramo, es decir, no logró justificar su respuesta sobre los pasos o el proceso matemático que determinan su afirmación.

E9 en la respuesta sugiere una combinación de figuras ($A + B = \text{paralelogramo}$ y $B + A = \text{rectángulo}$). Aunque la respuesta no es tan directa, implica una comprensión de que el paralelogramo puede reconfigurarse para formar un rectángulo, pues el estudiante presenta una idea de equivalencia y configuración de las figuras, al mostrar que las áreas de ambas figuras son iguales si se reorganizan las piezas.

Por último, E14 reafirma la identificación del rectángulo y se enfoca en los elementos necesarios para el cálculo del área (base y altura), pues se pudo evidenciar en la explicación que el rectángulo permite calcular el área del paralelogramo, destacando el uso de la base y la altura, lo cual que es crucial para esta operación, como se muestra en las figuras 97, 98 y 99.

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 35

2. ¿Qué configuración (Otra figura plana) permitirá calcular el área del paralelogramo? Argumenta cómo podrías hallar el área con esa nueva figura.

Respuesta

La configuracion que permite calcular el area del paralelogramo es la figura de un rectangulo

Figura 97. Respuesta de estudiante E1 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 2 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E9 Samuel Andres...  3/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 35

2. ¿Qué configuración (Otra figura plana) permitirá calcular el área del paralelogramo? Argumenta cómo podrías hallar el área con esa nueva figura.

Respuesta

A+B=paralelogramo B+A=rectangulo

Figura 98. Respuesta de estudiante E9 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E9, a la pregunta 2 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E 14 Mariana Cue...  5/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 35

2. ¿Qué configuración (Otra figura plana) permitirá calcular el área del paralelogramo? Argumenta cómo podrías hallar el área con esa nueva figura.

Respuesta

el recangulo calcularia el area a traves de la base y de la altura

Figura 99. Respuesta de estudiante E14 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E14, a la pregunta 2 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

En relación a las respuestas de los estudiantes para la pregunta 3 de la Tarea 3C, se evidenció una comprensión desigual de las nociones geométricas fundamentales, especialmente en la diferenciación entre área y perímetro.

Mientras que el estudiante E14 muestra una comprensión de la relación entre las áreas de las figuras involucradas, los estudiantes E10 y E11, proporcionan respuestas ambiguas y confusas, mostrando una falta de claridad, puesto que los estudiantes necesitan mejorar su capacidad para explicar detalladamente su razonamiento y proporcionar respuestas claras y precisas.

Se recomienda reforzar la enseñanza de transformaciones geométricas, diferenciar claramente entre nociones básicas y utilizar recursos visuales y manipulativos para mejorar la comprensión y comunicación matemática.

La afirmación que realiza el estudiante E10 en su respuesta “igual figura con diferente área”, no se identifica claramente cuáles son las figuras a las que se refiere el estudiante ni cómo

se llega a la conclusión de que tienen áreas diferentes. La respuesta carece de detalles que expliquen el razonamiento del estudiante y no aborda la relación precisa entre la figura A y B.

En cuanto a la respuesta del estudiante E11, parece confusa y mal estructurada, puesto que el estudiante menciona el movimiento y el perímetro, pero no se enfoca en calcular las áreas de las figuras resultantes en términos de A y B, parece haber una confusión entre la noción de área y perímetro y no se da una respuesta clara a la pregunta planteada.

Para terminar el ciclo de respuestas, se encuentra el estudiante E14, el cual afirma correctamente que el área del paralelogramo y del rectángulo es la suma de las áreas A y B. Sin embargo, aunque la respuesta llega a una conclusión acertada, podría haber detallado un poco más en su explicación sobre cómo se obtuvo esta relación, puesto que se esperaba que los estudiantes pudieran deducir que el paralelogramo se transforma en un rectángulo (o viceversa) y por lo tanto sus áreas son iguales, enfatizando la conservación del área bajo ciertas transformaciones geométricas (ver figuras 100, 101 y 102).

 E10 . Maria Alejan...  2/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 36

3. Suponga que el triángulo de color cian, tiene un área con un valor de **A** (ver la figura) y la otra figura tiene un valor de área de **B**. Hallar el área del paralelogramo y de la nueva figura en términos de **A y B**. ¿Qué relación encuentre entre las áreas y la forma de las figuras?

Respuesta

igual figura con diferente area

Figura 100. Respuesta de estudiante E10 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E10, a la pregunta 3 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

< emmanuel E11 < 7/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 36

3. Suponga que el triángulo de color cian, tiene un área con un valor de **A** (ver la figura) y la otra figura tiene un valor de área de **B**. Hallar el área del paralelogramo y de la nueva figura en términos de **A y B**. ¿Qué relación encontraste entre las áreas y la forma de las figuras?

Respuesta

el harea es es simple por q sd be q se muebe y deja un epacio donde estava la letra a y el perimetro ps ayar es simple por q sd esta biendo el perimetro si sd be q la letra a se muebe a la direccion de la derecha se puede notar por q esta en la misma posicion q en la derecha y ya sd calcula eel perietro

Figura 101. Respuesta de estudiante E11 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E11, a la pregunta 3 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

< E 14 Mariana Cue... < 5/18 >

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 36

3. Suponga que el triángulo de color cian, tiene un área con un valor de **A** (ver la figura) y la otra figura tiene un valor de área de **B**. Hallar el área del paralelogramo y de la nueva figura en términos de **A y B**. ¿Qué relación encontraste entre las áreas y la forma de las figuras?

Respuesta

El paralelogramo tiene el valor de area de $A+B$ y la de el rectngulo es de $B+A$ el paralelogramo y el retangulo tiene misma area

Figura 102. Respuesta de estudiante E14 Tarea 3C. La figura muestra la respuesta del estudiante E14, a la pregunta 3 de la Tarea 3C, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

A continuación, el lector encontrará una serie de observaciones y reflexiones generales sobre el diseño de enseñanza previamente planteado, así como su implementación práctica.

4.3.2 Observaciones o reflexiones del tercer nivel

Este análisis tiene como objetivo evaluar y destacar los aspectos más relevantes del proceso educativo entre el profesor y dos estudiantes, proporcionando una visión integral de su efectividad y posibles áreas de mejora.

Las reflexiones incluidas buscan ofrecer una perspectiva crítica y constructiva, basada en la experiencia y observación directa del desarrollo de la implementación con las categorías y códigos de análisis planteados en la Tabla 5.

4.3.2.1 Intervención 5

P: Del Nivel General listo. El propósito de esta actividad era, por ejemplo, identificar configuraciones. Ya que hemos visto tanto la palabra configuraciones, para ustedes ¿Qué es configuraciones?

E14: Modificar algo

P: Hacerlo distinto. Ok. Ese era el propósito. Y reconocer equivalencias entre áreas. Yo creo que con el paralelogramo y el trapecio, esas dos fueron las más claras. Sí. Bueno, las preguntas. ¿Qué conclusiones puedes extraer de la identificación de figuras con el mismo valor de área?

E14: Pues que... Pueden ser diferentes figuras, pero tienen el mismo valor de área. Muy breve.

P: Esa era una de las finalidades de la actividad. Ok. Para E14, dos figuras iguales en área. ¿Qué conclusiones puedes hacer de esas figuras?

E14: Pues que esa actividad como que ayudó, como para que se nos facilitara ese tema de hacer figuras con diferentes... No, pero el mismo valor de área. Benefició.

P: Si, esas fueron actividades mucho de sentido espacial, o sea, de visualizar. Porque por lo regular se enseña de manera, digámoslo, tablero y fórmula. Cambio pues con la... con el sentido de las tecnologías mucho mejor. Listo, otra pregunta y pasamos al siguiente, al último nivel. Entonces, la tercera pregunta del Nivel General.

¿Qué recomendaciones darías para mejorar las actividades diseñadas para enseñar el signo igual como equivalencia utilizando las figuras, las siete figuras del Tangram? O sea, ¿Qué recomendaciones darían para todas las actividades en general? O en alguna específica que se acuerde.

E14: Pues que... creería que debería modificar un poquito más las preguntas, tal vez, sobre la figura. Que no sean como... porque básicamente, aunque sea muy breve, pero todas las preguntas sean como las mismas o redactadas de diferente manera. O... sí entendí, pero preguntaban lo mismo, como que el área y lo de este.

Eh... sería mejor que redactaran un poquito más las preguntas y que hicieran, por ejemplo, las figuras, no fueran, por ejemplo, para nosotros que no sabíamos que era un paralelogramo. O estas figuras así, que fueran como figuras más breves, como un triángulo, un círculo, un cuadrado, que fueran más fáciles de entender, creo yo.

Y Recomendaciones, pues, hay preguntas que como que para nosotros no las entendíamos bien, pero cuando el profesor (P) nos ayudaba y las decían como en palabras como más fáciles de entender, ya comprendíamos más de qué era lo de las actividades. Entonces se nos complicó un poquito cómo comprender la pregunta, por cómo las decían, como las redactaron.

P: Entonces, digamos que ¿Usted considera que es necesario siempre la intervención del docente?

E14: Sí.

4.3.2.2 Análisis parcial 5

La intervención se centró en la identificación de configuraciones y el reconocimiento de equivalencias entre áreas, por parte de dos estudiantes y el Profesor (P). Sin embargo, el análisis sugiere que hay espacio para mejorar la accesibilidad y la claridad de las actividades. La simplificación del diseño y la redacción de las preguntas, junto con un apoyo constante del profesor, podrían mejorar significativamente la efectividad del aprendizaje, puesto que la retroalimentación de los estudiantes es crucial para adaptar y optimizar el diseño de la enseñanza.

4.3.2.2.1 Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Énfasis en el objetivo de las actividades

En la intervención, el profesor P recalca el objetivo principal de la actividad, que es la identificación de configuraciones y el reconocimiento de equivalencias entre áreas. El propósito es claro y se comparte efectivamente con los estudiantes. Sin embargo, el estudiante E14 responde de manera muy breve a las preguntas sobre las conclusiones que se pueden extraer, indicando que aunque entiende el objetivo, su profundidad de comprensión o la capacidad de articular la misma, puede ser limitada.

La intervención del docente es crucial para guiar y clarificar los objetivos de las actividades, como se observa en la necesidad del estudiante de que el profesor explique de manera más sencilla.

4.3.2.2.2 Categoría 2 Características de área. Código: Composición y características de las figuras

Se pudo evidenciar que los estudiantes trabajaron con diversas figuras geométricas, específicamente paralelogramos y trapecios, para entender la equivalencia en áreas. Además el estudiante menciona que la actividad ayudó a facilitar el entendimiento de la noción de áreas iguales en diferentes figuras (respecto al contorno).

La sugerencia del estudiante de utilizar figuras más simples como triángulos, círculos y cuadrados es valiosa, puesto que podría mejorar la accesibilidad y comprensión inicial de la noción. Sin embargo la integración de tecnología parece haber sido beneficiosa (ver [Consideración del software de geometría dinámica GeoGebra como recurso didáctico](#)), pero la complejidad de las figuras puede haber limitado la efectividad del aprendizaje sin un conocimiento previo adecuado.

4.3.2.2.3 Categoría 8 Casos Particulares. Código: Apreciaciones del diseño por parte de los estudiantes

El estudiante E14, proporciona retroalimentación sobre el diseño de las actividades, destacando que algunas preguntas eran redundantes o difíciles de entender debido a su redacción. También menciona que la intervención del docente fue esencial para comprender las actividades, pues el estudiante resalta la importancia de un apoyo constante durante el aprendizaje, especialmente cuando se incluyen conceptos nuevos o “complejos” (ver [Los niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes](#)).

Esta apreciación subraya la necesidad de un diseño de enseñanza abierto a mejoras, que considere el nivel de comprensión previo de los estudiantes y la claridad en la comunicación de las actividades.

4.3.2.3 Intervención 6

P: Ok, listo, entonces paso al Nivel General, Vuelvo y muestro las actividades que era: esta actividad, que era la de mover por los puntos y hallar dos figuras con el mismo valor de área. La del trapecio, que se descomponía, ¿Recuerdan? Que se abría como así, y la del paralelogramo, que era, que este triángulo se desplazaba a esta parte de acá, lo que ustedes acaban de decir Como que le mochaba la puntica.

Lo pasaba al otro lado, entonces, pasemos a las preguntas, por ejemplo, para E2, ¿Qué conclusiones puedes extraer de la identificación de figuras con el mismo valor de área? O sea, ¿Qué puedes concluir que dos figuras tengan la misma área?

E2: Pues que, por ejemplo, el paralelogramo no solo es una figura, sino que se puede componer de otra figura, siendo muy diferentes, pero con el mismo valor de área.

P: Qué usted diga, esto se cumple, es verdad, que puede ser de los dos, ¿Cómo se llaman?

E2: ¿De los dos triángulos que se juntan? ¿De los dos triángulos?

P: Que se forman un cuadrado o sea, que con dos triángulos se puede formar un cuadrado. Entonces esos dos triángulos son equivalentes en área del cuadrado, los dos, ¿No? Porque lo componen. Ok, ¿Cómo relacionas el concepto de equivalencia de área con otros conceptos matemáticos que hayas estudiado previamente? Algo que recuerde que usted, que les haya enseñado, que usted pueda relacionar con esto, que les tratamos de enseñar.

E2: No, pues en geometría

P: En geometría

E2: Que todo es geométrico, obviamente, también se pueden variar las formas y se pueden sacar la misma área.

P: ¿Qué recomendaciones darías en general para todas las actividades? Para el diseño, lo que tú consideres. Tú puedes mejorar o cambiar esto.

E2: No, ninguna todo está súper ¿Sí? Sí, en la forma de aprender, pues uno entiende muy bien, aunque depende de las explicaciones que nos dé el profesor (P), todo se puede concluir y puede dar a lo que es y pues está súper bien.

P: Ok, ya que mencionas entonces ¿Consideras que sí o sí tiene que haber intervención del docente? ¿Para que las actividades sean un poco más sencillas de entender?

E2: Pues no, también depende de la capacidad del niño, si por ejemplo el niño ya es muy adelantado, el niño va a poder resolverlo solo.

4.3.2.4 *Análisis parcial 6*

En esta intervención, se abordó un diseño de enseñanza enfocado en la identificación y exploración de figuras geométricas para tener un acercamiento a la noción del signo igual como equivalencia, por medio de las equivalencias de áreas, a partir de conjeturas, o representaciones algebraicas que permitieran dar cuenta, de cómo los estudiantes percibían las equivalencias de áreas por medio de esos registros de representación, puesto que “Los distintos registros de representación se diferencian no solo por la naturaleza de sus significantes, sino también por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de dimensiones en que puede efectuarse esta asociación” (Duval , 2017, p. 69).

4.3.2.4.1 Categoría 1. Intención de la planificación. Código: Finalidad de las actividades

La finalidad de las actividades está claramente dirigida a que los estudiantes comprendan que diferentes figuras geométricas pueden tener la misma área, la actividad mencionada sobre mover puntos y descomponer figuras, como el trapecio y el paralelogramo, tiene como objetivo que los estudiantes visualicen y concluyan que la equivalencia de área es posible a través de diversas transformaciones geométricas, por lo tanto, la intervención del docente (P) refuerza este objetivo al guiar a los estudiantes hacia la conclusión de que distintas figuras pueden compartir el mismo valor de área, independientemente de sus formas.

4.3.2.4.2 Categoría 2 Características de área. Código: Conservación de área

Durante la actividad, el estudiante E2 reconoce que figuras diferentes, pueden conservar el mismo valor de área, como es el caso de los triángulos que se unen para formar un cuadrado. Lo que evidencia una comprensión en la noción de la conservación de área, también el estudiante menciona que el paralelogramo puede descomponerse en otras figuras, conservando el área total (ver [Propiedades de las áreas y superficies planas](#)), lo que indica un acercamiento de la noción de equivalencia de área a través de la exploración y observación del comportamiento de figuras geométricas, con ayuda del recurso de GeoGebra.

4.3.2.4.3 Categoría 5 Características del perímetro. Código: Conjeturas sobre el perímetro

Aunque el análisis principal se centra en el área, se puede inferir que el estudiante tiene alguna noción de cómo el perímetro puede variar mientras que el área se conserva. Sin embargo, no se profundiza en este aspecto durante la intervención, pues la actividad propuesta se enfocó

más en la descomposición y configuración de figuras para mantener el área constante, sin una exploración explícita de las implicaciones sobre el perímetro.

4.3.2.4.4 Categoría 7 Característica del polígono. Código: Clasificación de las figuras

El estudiante E2 mostró competencias para clasificar figuras geométricas al mencionar los triángulos y el cuadrado, pues esta clasificación representa un acercamiento para entender la equivalencia de área entre diferentes formas, pero la actividad de descomponer el trapecio y el paralelogramo implica una comprensión de las propiedades de estos polígonos y su relación en términos de área.

4.3.2.4.5 Categoría 8. Casos particulares. Código: Importancia del rol del profesor en la implementación del diseño

Finalmente, la apreciación que realiza el estudiante E2, resalta la importancia del papel del profesor en la comprensión de las actividades, pues E2 menciona que, aunque las actividades están bien diseñadas, la claridad en la explicación del profesor es crucial para su comprensión (ver [Orquestación Instrumental: Un modelo metafórico \(OI\)](#)).

Pero, es curioso la afirmación que realiza en cuanto a que se destaca que la capacidad del “niño” también influye en la necesidad de intervención del profesor. Esto sugiere que, para el estudiante E2 una implementación efectiva depende en gran medida de la guía proporcionada por el profesor.

Este Nivel General reflejó un enfoque hacia la enseñanza de la equivalencia de área a través de actividades con geometría dinámica, al querer lograr en los estudiantes una comprensión adecuada de las percepciones sobre el signo igual a partir de la relación de áreas de

figuras planas, además se resalta la importancia del rol del profesor por la claridad en la que él como mediador proporcionó. Sin embargo, el diseño está abierto a mejoras, para una próxima investigación orientada hacia el álgebra.

4.4 Nivel Formal

El Nivel Formal en esta propuesta de enseñanza, se centró en el desarrollo de habilidades cognitivas “avanzadas”, en las que los estudiantes no solo comprenden y aplican conocimientos elementales, sino que también son capaces de realizar análisis, establecer relaciones y formular conjeturas fundamentadas.

En este contexto, la enseñanza de las áreas de figuras geométricas planas, se estructura mediante propósitos, los cuales buscan que los estudiantes deberán ser capaces de identificar y deducir que distintas configuraciones de figuras pueden tener la misma área, comprendiendo que el área no depende de la forma específica de la figura, sino de la cantidad total de espacio que ocupa.

Otro propósito de este nivel es, establecer relaciones entre el área de las figuras mediante diferentes registros de representación, que enfatiza en la habilidad de los estudiantes para utilizar múltiples formas (como diagramas, gráficos, fórmulas algebraicas) para expresar y entender las relaciones de área entre distintas figuras geométricas, pues es importante enfatizar lo que plantea Duval., sobre que la variedad de formas de representación semiótica es fundamental para el avance del conocimiento, tanto a nivel personal como en el ámbito científico y cultural. (2017, p. 97).

La relevancia de esta diversidad en el pensamiento radica en las distintas restricciones y costos asociados a la función de transformación, así como en las variadas capacidades de comunicación que ofrecen estos registros.

Pues, a través de la comparación de áreas, los estudiantes deben ser capaces de reconocer patrones y regularidades, lo que les permitirá generalizar principios y fórmulas aplicables a una variedad de situaciones geométricas; pues “un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. (Duval, 2017, p. 76).

Finalmente se quiere lograr que el estudiante pueda llegar a conjeturar cómo las diversas representaciones de figuras geométricas planas influyen en la comprensión de las relaciones de área entre ellas, al formular hipótesis sobre cómo diferentes maneras de representar figuras geométricas, pueden afectar su comprensión de las relaciones de área, promoviendo así una conversión, la cual es “una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa”. (Duval, 2017, p. 76).

Para alcanzar estos propósitos, se diseñaron tres tareas específicas que los estudiantes debían realizar, la primer tarea (Tarea 4A), consistía en identificar las distintas configuraciones que pudieran tener figuras con igual área, utilizando una cuadrícula donde cada unidad cuadrada ($1U^2$) representaba una medida estándar de área.

Para la Tarea 4B sobre conjeturar acerca de las equivalencias de áreas de figuras planas y convexas, independientemente de su forma, los estudiantes debían formular hipótesis sobre cómo distintas figuras convexas, pueden tener áreas equivalentes. Este ejercicio fomenta el pensamiento abstracto y la capacidad de razonamiento deductivo, principales en el Nivel Formal

pues “estos razonamientos pueden ser efectuados tanto en el registro de una lengua formal (los *Principia Mathematica*) como en el de la lengua natural (las demostraciones en geometría)” (Duval, 2017, p. 79).

Por último en la Tarea 4C sobre demostrar cómo podrían ser equivalentes los polígonos respecto a su área, los estudiantes debían utilizar distintos métodos y representaciones, para determinar que diferentes polígonos pueden tener áreas equivalentes. Esta actividad refuerza las nociones teóricas y prácticas de la equivalencia de áreas abordadas en el Nivel General, además de desarrollar competencias en argumentación y de la prueba matemática.

Las tareas de este nivel, contenían unas preguntas orientadoras donde los estudiantes debían calcular áreas, identificar qué figuras distintas (contorno de la forma) pueden tener la misma área y explorar cómo se distribuye el espacio en formas variadas, al comparar y contrastar áreas de diferentes figuras en forma, con el objetivo de reconocer patrones, para que formularan conjeturas formales sobre las relaciones geométricas.

El objetivo era instruir a que los estudiantes pudieran lograr justificar y argumentar sus hallazgos, tanto en lenguaje matemático como natural, al enfrentarse a retos como eliminar piezas comunes de figuras equivalentes o determinar la equivalencia de áreas entre diferentes polígonos, para fortalecer su capacidad de razonamiento y comunicación matemática.

En la pregunta 1 de la Tarea 4A, se pidió a los estudiantes hallar el área de una figura de color rosa y otra de color cian. La mayoría de los estudiantes respondieron correctamente, identificando que ambas figuras tienen un área de 9 unidades cuadradas ($9U^2$), aunque expresaron sus respuestas de manera ligeramente diferente, indicaron una comprensión de la equivalencia en áreas entre las dos figuras a pesar de sus diferencias visuales.

En la pregunta 2 de la Tarea 4A, se pidió a los estudiantes explicar por qué dos figuras con la misma área pueden tener formas distintas y de qué depende que la forma sea mayor o menor. Pues la mayoría de los estudiantes identificaron que la diferencia en las formas se debe a la variación en el perímetro y la ubicación de las unidades cuadradas.

Otros estudiantes mencionaron específicamente, que la forma depende de la posición de los cuadrados (unidades cuadradas), reflejando una comprensión de cómo la disposición de los componentes individuales afecta la configuración general de la figura. Sin embargo, un estudiante presentó una confusión al afirmar que el perímetro es igual, lo que indica una falta de claridad sobre la relación entre el área y el perímetro, también otro estudiante simplemente observó que la forma cambia sin ofrecer una explicación detallada.

En la pregunta 3 de la Tarea 4A, se pidió a los estudiantes que construyeran una figura distinta en forma pero equivalente en área a las figuras de color rosa y cian, utilizando cuadrículas para determinar el área. Las respuestas reflejaron una variedad de enfoques y comprensiones, pues varios estudiantes encontraron un cuadrado de área de $9U^2$, lo que indica una comprensión “elemental” pero correcta de la equivalencia de área.

Otros estudiantes mencionaron tanto un cuadrado como un rectángulo de área 9, mostrando que tuvieron un acercamiento a la noción del signo igual como equivalencia, a partir de la noción de área (ver [Nociones de área y superficie](#)).

Se presentaron algunos casos particulares en estudiantes, que se aventuraron más allá, creando formas menos convencionales como una “jota”, una “u”, una “escalera”, una “te”, una “zeta” y una “bota”, lo que demuestra una mayor creatividad y pensamiento espacial.

En las respuestas, mencionan tanto el área como el perímetro de las figuras, lo cual indica una conciencia adicional de cómo diferentes configuraciones afectan las propiedades

geométricas, pues según Duval, el proceso mediante el cual algo no-consciente se vuelve consciente implica una objetivación para el individuo que adquiere dicha conciencia, en cierta medida este proceso de objetivación es el descubrimiento personal de aspectos previamente desconocidos, independientemente de que otros ya los hubieran señalado. (2017, p.66).

En la pregunta 1 de la Tarea 4B, la mayoría de los estudiantes a pesar de que identificaron correctamente que las tres figuras tienen la misma área, pero formas diferentes, no lograron determinar una formalidad de la conservación del área, es decir, no se logró que los estudiantes plasmaran o dieran cuenta de respuestas estructuradas o patrones “formales” relacionados a la conservación del área de cualquier figura con n -ésima cantidad de piezas.

Pues sus respuestas destacaron esta relación de igualdad de área, al centrarse en la cantidad y tipo de piezas que componen las figuras dadas, notando que aunque las formas son distintas, las piezas son iguales en número y tipo, lo que también sería una observación válida.

En la pregunta 2 de la Tarea 4B, los estudiantes ofrecieron diversas interpretaciones sobre el efecto de quitar la misma pieza a las tres figuras con igual cantidad de piezas iniciales. Una mayoría, entendieron que las figuras mantendrían una relación de igualdad de área entre sí, aunque el área total de cada una cambiaría.

Esta visión muestra una comprensión de la conservación de relaciones de área a pesar de cambios en las piezas iniciales. Sin embargo, algunos estudiantes destacaron que al quitar una pieza, el área de las figuras cambia, pero sin mencionar explícitamente que la relación de igualdad se mantiene, lo que sugiere una comprensión parcial de la noción.

Otros estudiantes se enfocaron en la cantidad de piezas, indicando que todas las figuras seguirán teniendo la misma cantidad de piezas restantes, una observación válida pero incompleta respecto al área, puesto que sugirieron que las figuras no serían comparables, debido a una

percepción errónea de la cantidad de piezas, al revelar una necesidad de clarificación en la comprensión del problema (ver [Sistema geométrico](#)).

Por consiguiente, en relación con la percepción errónea que se presentó en lo que manifestaron los estudiantes, “las representaciones externas cumplen pues una función de comunicación. Pero igualmente cumplen otras dos funciones cognitivas: la función de objetivación³, como todas las representaciones conscientes, y la función de transformación⁴” (Duval, 2017, p. 67).

En la pregunta 3 de la Tarea 4B, los estudiantes exploraron la posibilidad de identificar un patrón o relación entre figuras distintas en forma, pero con las mismas piezas y en igual número, en la cual los estudiantes argumentaron que sí es posible encontrar una relación, destacando que la constante en estas figuras es su área, a pesar de la diferencia en la configuración de las piezas, evidenciando una comprensión de que, aunque las figuras puedan ser distintas en su configuración, comparten un valor común de área,

Se pudo observar un patrón identificable en la conservación de esta propiedad matemática a pesar de la variación en la forma.

La pregunta 1 de la Tarea 4C exploraba la capacidad de los estudiantes para conceptualizar la relación entre la forma y el área de diferentes polígonos (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Con respecto a las respuestas obtenidas, todos los estudiantes afirmaron que es posible que polígonos diferentes tienen áreas equivalentes, proporcionando diversas formas de justificar su afirmación.

³ La función de objetivación (para sí) casi siempre se asimila a la de expresión (para otro), a pesar de que son independientes. Pertenecen a las representaciones internas, que puede ser consciente o no-consciente.

⁴ Las representaciones externas son esenciales para la función de transformación. Las actividades de transformación están directamente ligadas a la utilización de un sistema semiótico. Pertenecen a las representaciones internas no-consciente

Por ejemplo, mencionaron casos específicos donde un triángulo y un rectángulo comparten la misma área de 10 unidades cuadradas, y otros enfatizan que diferentes formas pueden compartir la misma área.

Además, sugieren que es posible establecer una relación de área entre un triángulo y un rectángulo, al arrojar como resultante a las respuestas, un reconocimiento común de que diferentes figuras geométricas pueden tener áreas equivalentes, pero no lograron argumentar y reflejar diferentes niveles de comprensión sobre la independencia entre forma y área en los polígonos.

En la pregunta 2 de la Tarea 4C, gran parte de los estudiantes reconocen que la equivalencia entre las figuras se basa en el área, aunque algunos lo expresan de manera más clara que otros. Por ejemplo, algunos afirmaron que la relación de equivalencia es que las figuras tienen la misma área, utilizando una formulación directa y coinciden en que la equivalencia radica en el área.

Por el contrario, otro estudiante menciona que la equivalencia es que las figuras tienen “lados parecidos”, lo cual indica una posible confusión con otras propiedades geométricas.

Para el caso de dos estudiantes, se demuestra una falta de comprensión del concepto, afirmando que no sabe la relación porque las figuras no son las mismas, aunque reconocen la relación de área, lo expresan de una manera menos precisa.

Finalmente, la tarea 3C, se cerró con la pregunta 3, la cual orientaba a los estudiantes a presentar ejemplos de dos figuras diferentes con la misma área, para mostrar la relación entre estas figuras mediante lenguaje matemático o natural. Gran parte de los estudiantes proporcionaron ejemplos claros y concretos, al utilizar tanto figuras regulares como irregulares.

Pues mencionan un triángulo y un cuadrado, o un triángulo y un rectángulo, al determinar sus áreas mediante las formas algebraicas correspondientes (por ejemplo, $A = \frac{b \times h}{2}$ para el triángulo y $A = b \times h$ para el rectángulo). De acuerdo con Duval, en geometría, esta transformación se asemeja a la conversión del discurso en una figura geométrica, donde no se abandona el tratamiento original, sino que se integra, por lo tanto la interacción entre los tratamientos figúrales y discursivos es crucial: los primeros guían heurísticamente mientras que los segundos, de manera deductiva, establecen la estrategia para los objetos representados. (2017, p. 210).

En el caso de otros estudiantes, presentaron figuras irregulares, utilizando el conteo de cuadrículas para determinar el área de 18 y 12 unidades cuadradas respectivamente, describen un cuadrado y una figura irregular con áreas idénticas; mientras que otro estudiante detalla figuras compuestas por varias subfiguras, sumando el área total de cada una para llegar a 13 unidades cuadradas (ver [Geometría activa](#)).

En otra respuesta proporcionada por un estudiante, el cual planteó dos rectángulos con las mismas áreas pero con diferentes dimensiones de base y altura, se observó una “comprensión” generalizada de la noción de equivalencia de áreas entre figuras distintas (contorno de la forma), aunque varían en la precisión y el detalle con que explican la relación entre las figuras, en este Nivel Formal, los estudiantes no lograron en su totalidad o generalidad, que figuras diferentes pueden tener la misma área, utilizando tanto métodos algebraicos como geométricos para justificar sus ejemplos.

A continuación, se mencionan algunos casos específicos que sobresalen en las soluciones de los estudiantes con el uso del recurso de GeoGebra y también algunas producciones realizadas a lápiz y papel.

4.4.1 Hallazgos del Nivel Formal

La Tarea 4A del Nivel Formal se centró en que los estudiantes trabajaran con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que les otorgaron su significado inicial, reflejando así el surgimiento de una nueva realidad matemática. Esta tarea tuvo como propósito que los alumnos infieran en las equivalencias de área de diferentes configuraciones de figuras geométricas planas y establecieran relaciones entre el área de estas figuras utilizando diversos registros de representación.

La tarea específica consistió en identificar las distintas configuraciones posibles de las dos figuras que se plantean si tienen un área igual, considerando que cada cuadrícula en la que se representan las figuras tiene un valor de 1 unidad cuadrada ($1U^2$), como se muestra en la figura 103:

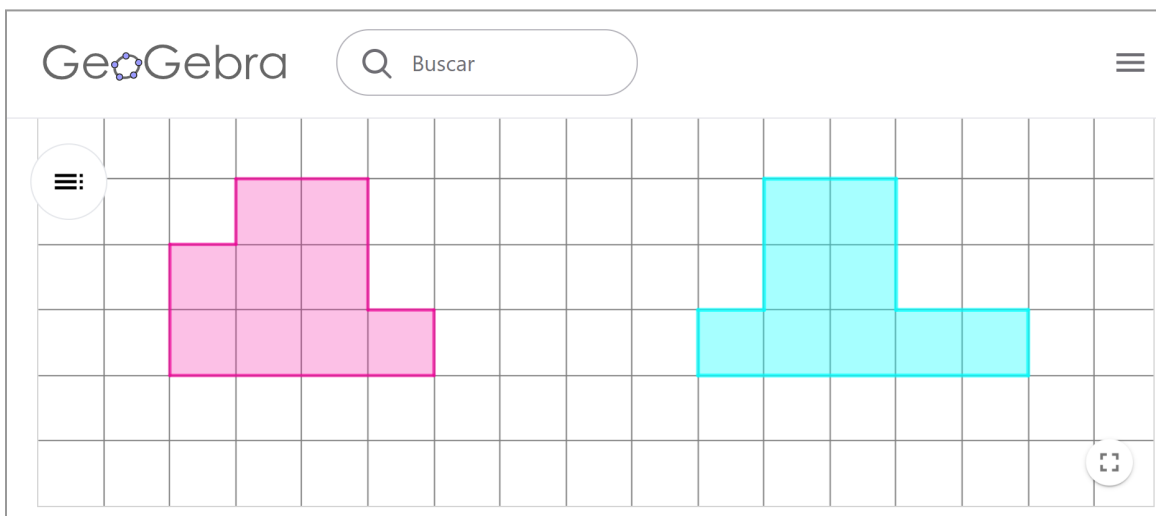


Figura 103. Áreas equivalentes Tarea 4A Nivel Formal. La figura muestra las distintas configuraciones que pueden tener esas dos figuras respecto al área. Fuente: Elaboración propia.

En base a las respuestas proporcionadas por los estudiantes E10, E14 y E15, con respecto a la pregunta 1 de la Tarea 4A, el estudiante E10 proporciona una respuesta concisa, aunque no específica. Dice que “el área de los dos colores es 9”, lo cual sugiere que ambas figuras tienen la

misma área, pero no menciona las unidades que las componen, ni hace una clara diferenciación entre las dos figuras, pues esto puede “indicar” una comprensión elemental de la tarea, pero una falta de precisión en la comunicación de su solución.

Para el caso de los estudiantes E14 y E15 sus respuestas muestran una mayor precisión al desglosar las áreas de ambas figuras por separado y utilizar la notación “U” para las unidades. Las respuestas son claras y precisas, mostrando que comprenden que cada figura debe ser considerada de manera independiente y que ambas áreas son iguales a 9 unidades cuadradas.

En general, todos coinciden en que el área de cada figura es 9 unidades cuadradas, sin embargo no lograron demostrar sus respuestas con un registro distinto al del lenguaje natural (ver figuras 104, 105 y 106).

 E10 . Maria Alejan...  2/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 38

1. Halla el área de la figura de color rosa y de la figura de color cian.

Respuesta

el area de los dos colores es 9

Figura 104. Respuesta de estudiante E10 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E10, a la pregunta 1 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E 14 Mariana Cue...  5/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 38

1. Halla el área de la figura de color rosa y de la figura de color cian.

Respuesta

el area de el color rosa es de 9U y el de el color cian es de 9U.

Figura 105. Respuesta de estudiante E14 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E14, a la pregunta 1 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E 15 MARIA PAUL...  17/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 38

1. Halla el área de la figura de color rosa y de la figura de color cian.

Respuesta

el area del rosa es 9u y el del cian es 9u

Figura 106. Respuesta de estudiante E10 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E10, a la pregunta 1 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

En las respuestas proporcionadas por los estudiantes E3, E9 y E16, referente a la pregunta 2 de la Tarea 4A, se pudo observar que los estudiantes muestran diferentes percepciones. Para el caso de los estudiantes E3 y E9 identifican correctamente que el perímetro diferente es una “razón clave” para la identificación de formas distintas, con E9 añadiendo que la ubicación es un

factor relevante. Esta respuesta refleja una comprensión adecuada de la noción de área y perímetro y su interrelación.

Ahora bien, E16 menciona que la forma depende de la “posición de las unidades cuadradas” lo que sugiere una idea correcta pero menos acertada sobre cómo la distribución espacial de las unidades de área afecta la forma de una figura. En conjunto, las respuestas indican que los estudiantes tienen una comprensión de las nociones elementales de la relación entre área y forma, aunque con variaciones en la precisión y poca rigurosidad en sus explicaciones (ver figuras 107, 108 y 109).

 E3 estefani  14/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 39

2. Observa las dos figuras y responde: ¿Por qué teniendo la misma área, su forma es distinta? ¿De qué depende que la forma sea mayor o menor?

Respuesta

por que el perimetro es diferente

Figura 107. Respuesta de estudiante E3 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E3, a la pregunta 2 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E9 Samuel Andres...  3/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 39

2. Observa las dos figuras y responde: ¿Por qué teniendo la misma área, su forma es distinta? ¿De qué depende que la forma sea mayor o menor?

Respuesta

por que tiene diferente perimetro y la ubicacion es diferente

Figura 108. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E9, a la pregunta 2 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E16 juan david ga...  9/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 39

2. Observa las dos figuras y responde: ¿Por qué teniendo la misma área, su forma es distinta? ¿De qué depende que la forma sea mayor o menor?

Respuesta

DEPENDEN DE LA POSICION DE LAS UNIDADES CUADRADAS

Figura 109. Respuesta de estudiante E16 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E16, a la pregunta 2 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

En la pregunta 3 de la Tarea 4A, las respuestas en general muestran que los estudiantes “comprenden” la relación entre forma y área, aplicando sus “habilidades” para crear diversas figuras que cumplen con los requisitos dados, pues demostraron “creatividad” como precisión en sus construcciones.

El estudiante E1 planteó sus figuras como una “escalera” y una “te”, ambas con un área de 9 unidades cuadradas, demostrando “creatividad” y precisión en la construcción de formas variadas manteniendo el área constante. El estudiante E2 también plasmó dos figuras irregulares equivalentes en área de 9 unidades cuadradas, creando figuras en forma de “jota” y “u”, lo que evidencia su capacidad para visualizar y realizar modificaciones en la geometría de las figuras mientras conserva su área.

Y el estudiante E15, optó por una figura en forma de “bota” con la misma área, indicando una comprensión similar y una capacidad para conceptualizar distintas formas geométricas con igual área (ver figuras 110, 111 y 112).

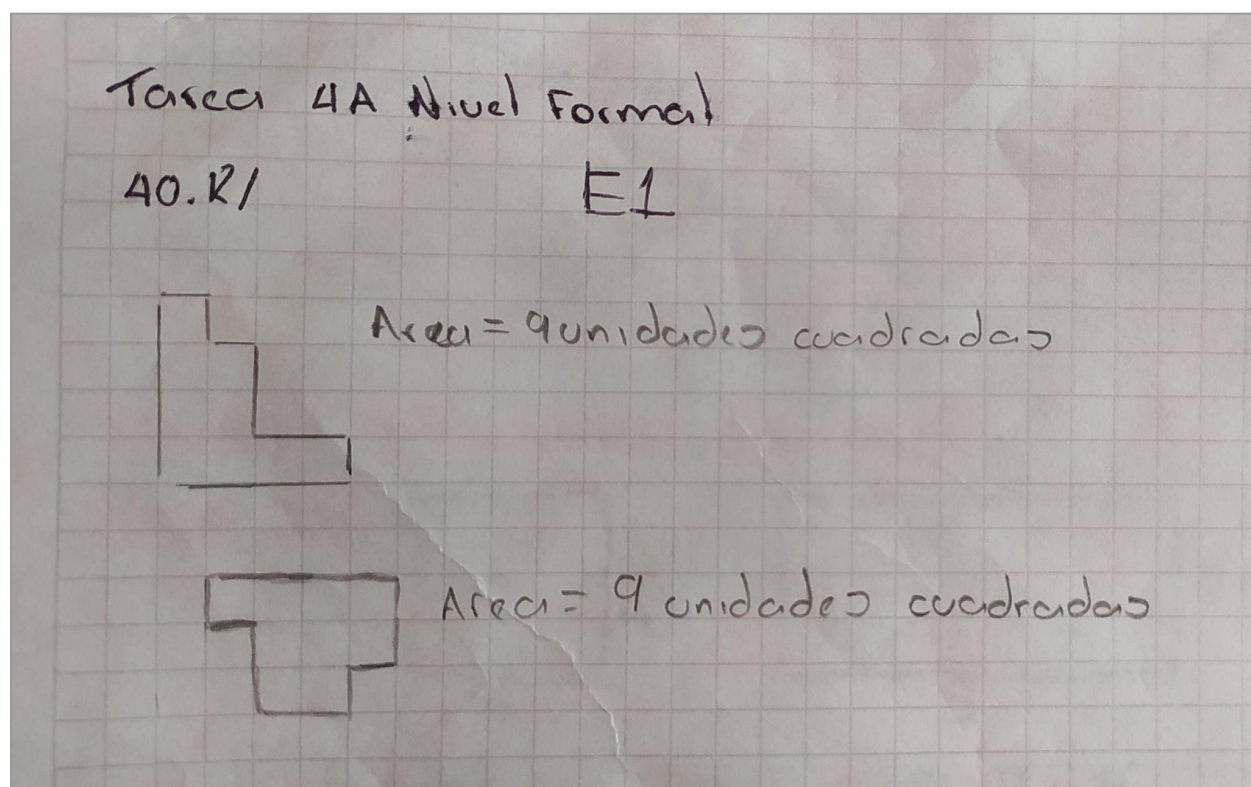


Figura 110. Respuesta de estudiante E1 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 3 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

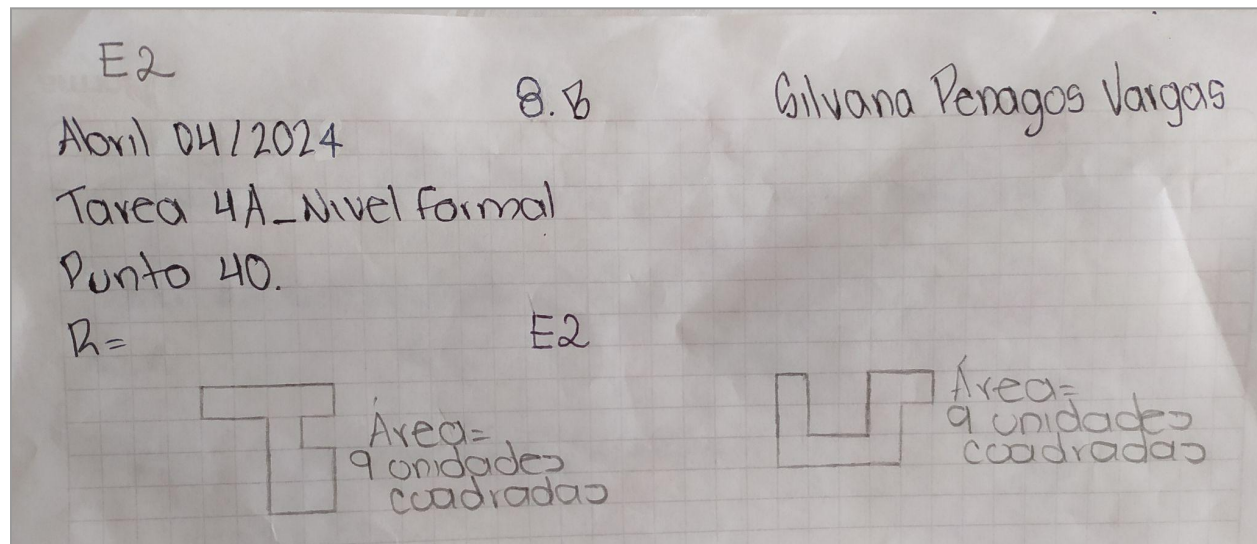


Figura 111. Respuesta de estudiante E2 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 3 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

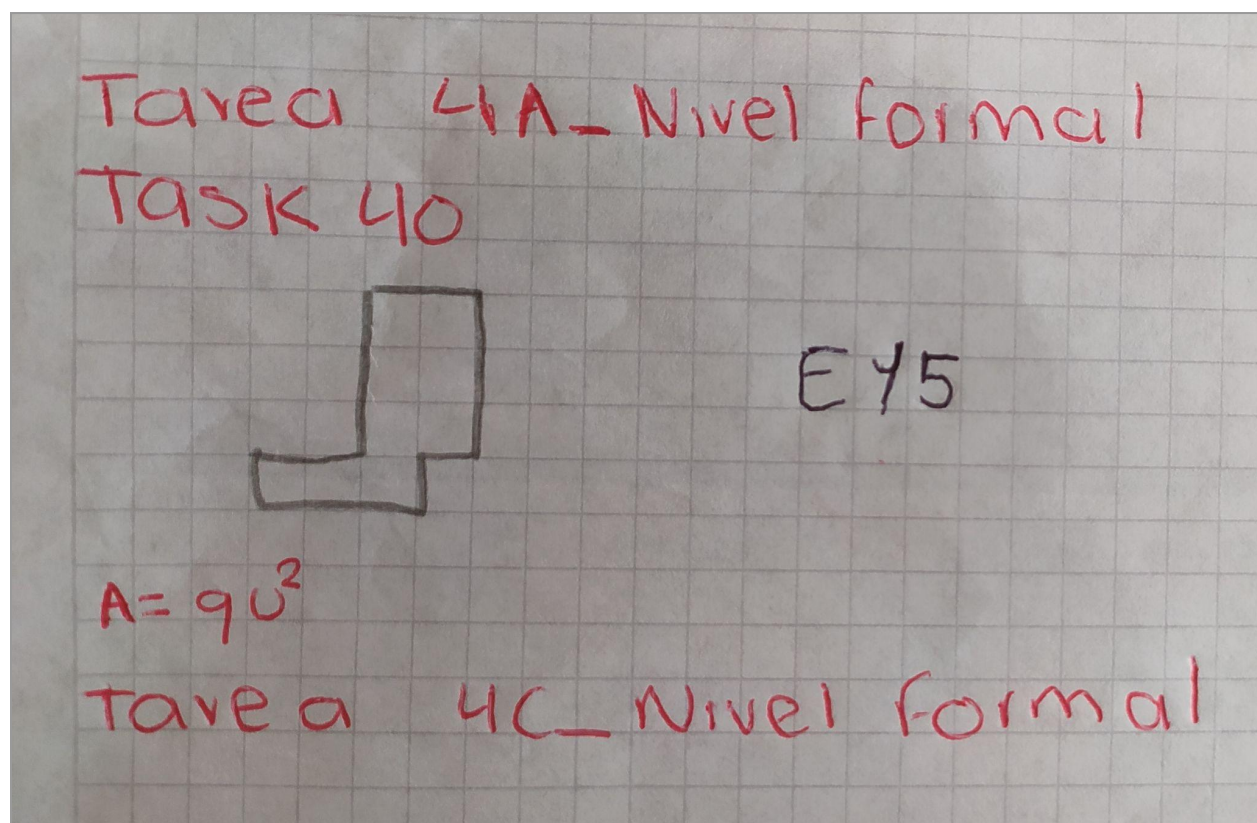


Figura 112. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4A. La figura muestra la respuesta del estudiante E15, a la pregunta 3 de la Tarea 4A, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

Teniendo en cuenta la visualización y la capacidad que tuvieron los estudiantes para proponer estos ejemplos particulares de esas formas irregulares, nos referimos a lo que plantea Duval, de acuerdo a:

La aprehensión operatoria permite ver desplegarse en una figura dada una variedad de sub-figuras posibles, que no son inmediatamente perceptibles al “primer golpe de vista”. Estas sub-figuras son reorganizaciones perceptivas diferentes que representan algunas (o todas) las unidades figúrales elementales de la figura de partida. (2017, p. 211).

La Tarea 4B del Nivel Formal, en el diseño de esta propuesta de enseñanza, se centra en que los estudiantes exploren y comprendan el objeto matemático, a través de procedimientos y notaciones convencionales, desvinculadas de las situaciones iniciales de los niveles Situacional, Referencial e Inclusive del General, que les dieron significado.

El propósito principal de esta tarea es que los estudiantes comparen las áreas de diversas figuras geométricas planas para identificar patrones, así como conjeturar cómo las diferentes representaciones de estas figuras influyen en la comprensión de las relaciones de área entre ellas.

En este contexto, se les pide a los estudiantes que formulen conjeturas sobre las equivalencias de áreas de figuras planas y convexas, sin importar su forma, promoviendo así un pensamiento espacial y una comprensión abstracta de las nociones geométricas que los estudiantes puedan observar en las tres figuras convexas planteadas, utilizando las piezas del Tangram como se muestra en la figura 113:

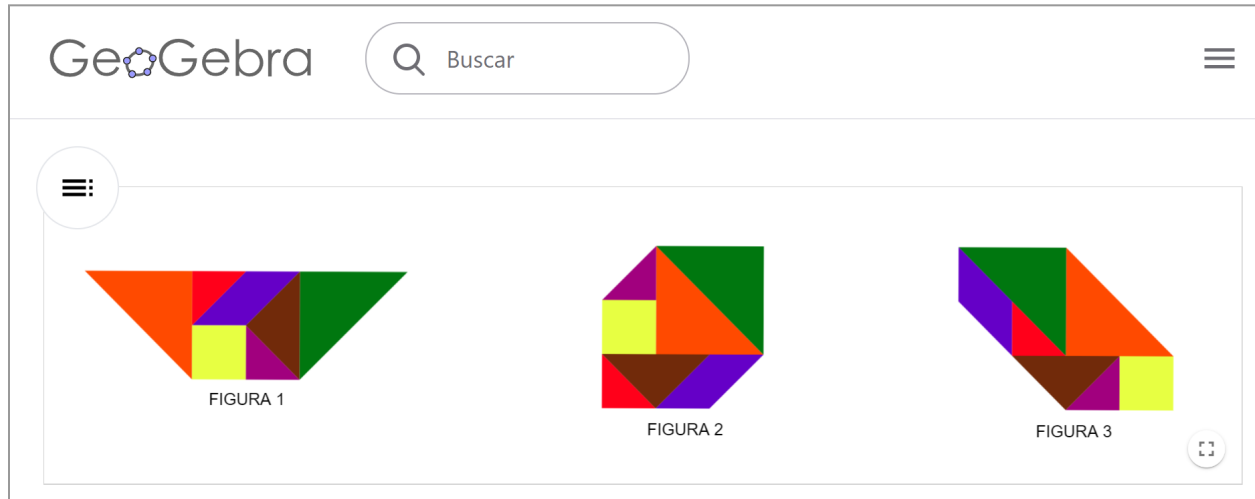


Figura 113. Figuras convexas con el Tangram Tarea 4B Nivel Formal. La figura muestra las distintas configuraciones que pueden tener las tres figuras y mantener la equivalencia entre sus áreas. Fuente: Elaboración propia.

En base a lo que observaron los estudiantes para dar respuesta a la pregunta 1 de la Tarea 4B, la cual solicitaba a los estudiantes identificar relaciones entre tres figuras diferentes compuestas por las mismas piezas. Los estudiantes proporcionaron diversas respuestas: E11 destacó que aunque las figuras no son idénticas, las figuras 1 y 3 comparten la misma cantidad de cuadrados y triángulos, mientras que la figura 2 tiene un número total diferente de piezas, lo que muestra una confusión en la cantidad de piezas que componen las figuras planteadas.

E13 se limita a señalar que todas las figuras tienen las mismas piezas y la misma cantidad, sin detallar más y el estudiante E15 observa que, aunque las formas de las figuras son diferentes, todas tienen las mismas piezas de composición y comparten la misma área. Estas respuestas reflejan distintos niveles de comprensión conceptual, desde una observación superficial (ver [Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica](#)) de la cantidad de piezas hasta una apreciación de la conservación del área y la composición de las figuras (ver figuras 114, 115 y 116).

 emmanuel E11  7/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 42

1. Imagina que tienes tres figuras con distintas formas, pero tienen la mismas piezas que las componen, **Pregunta:** ¿Qué relación podrías establecer entre las tres figuras?

Respuesta

q no son iguales pero la figura 1 y 3 si tienen las mismas cuadros y triangulos y la figura 2 tiene 7 figuras y por eso las figuras 1 y 3 tienen la misma cantidad de piezas

Figura 114. Respuesta de estudiante E11 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E11, a la pregunta 1 de la Tarea 4B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E13 Kimberly Oso...  1/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 42

1. Imagina que tienes tres figuras con distintas formas, pero tienen la mismas piezas que las componen, **Pregunta:** ¿Qué relación podrías establecer entre las tres figuras?

Respuesta

Que tienen las mismas piezas y la misma cantidad de piezas

Figura 115. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 1 de la Tarea 4B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E 15 MARIA PAUL...  17/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 42

1. Imagina que tienes tres figuras con distintas formas, pero tienen la mismas piezas que las componen, **Pregunta:** ¿Qué relación podrías establecer entre las tres figuras?

Respuesta

que tienen las mismas figuras de compocision pero diferente forma y el mismo area

Figura 116. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E15, a la pregunta 1 de la Tarea 4B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

Las respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 de la Tarea 4B sobre la relación entre tres figuras tras quitarles una misma pieza reflejan diferentes niveles de comprensión y habilidad para caracterizar objetos matemáticos.

El estudiante E3 muestra una comprensión inicial al identificar que la eliminación de una pieza cambia el área de las figuras, lo que revela una conciencia de las propiedades geométricas, aunque no profundiza en la uniformidad de la reducción, en cuanto al estudiante E13, se centró en la cantidad de piezas, afirmando que todas las figuras seguirán teniendo una pieza menos, pero no considera el impacto en el área, lo que indica un enfoque más aritmético que geométrico.

El estudiante E15, en cambio, demuestra una comprensión más integral al afirmar que las figuras conservarían la misma relación de área a pesar de la eliminación de una pieza, lo que sugiere una comprensión de la conservación de propiedades geométricas (ver figuras 117, 118 y 119).

 E3 estefani  14/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 43

2. Si las tres figuras, las cuales tienen la misma cantidad de piezas que las componen y dichas piezas son iguales entre sí. Si a estas tres figuras le quitas la misma pieza a la vez ¿Qué relación puedes establecer entre las tres nuevas figuras?

AYUDA: Puedes apoyarte usando una expresión matemática o explicar con tus palabras.

Respuesta

que les cambio el area alas tres figuras las cuales puede ser diferente y ya no quedar con la misma area

Figura 117. Respuesta de estudiante E3 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E3, a la pregunta 2 de la Tarea 4B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

 E13 Kimberly Oso...  1/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 43

2. Si las tres figuras, las cuales tienen la misma cantidad de piezas que las componen y dichas piezas son iguales entre sí. Si a estas tres figuras le quitas la misma pieza a la vez ¿Qué relación puedes establecer entre las tres nuevas figuras?

AYUDA: Puedes apoyarte usando una expresión matemática o explicar con tus palabras.

Respuesta

que siguen teniendo la misma cantidad porque le quitaron una misma pieza a la vez

Figura 118. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 2 de la Tarea 4B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

←

E 15 MARIA PAUL...

< 17/18 >

⏮

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 43

2. Si las tres figuras, las cuales tienen la misma cantidad de piezas que las componen y dichas piezas son iguales entre sí. Si a estas tres figuras le quitas la misma pieza a la vez ¿Qué relación puedes establecer entre las tres nuevas figuras?

AYUDA: Puedes apoyarte usando una expresión matemática o explicar con tus palabras.

Respuesta

siguen siendo las misma por q le quitaron las mismas piezas seguiria siendo el mismo area

Figura 119. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E15, a la pregunta 2 de la Tarea 4B, a las configuraciones del trapecio. Fuente: GeoGebra.

Estas respuestas evidencian la diversidad en la conceptualización de los objetos matemáticos entre los estudiantes, desde una visión más superficial hasta un análisis más profundo y preciso, destacando la importancia de fortalecer el entendimiento tanto aritmético como geométrico para una caracterización completa de las figuras.

Este tratamiento figural que realizaron los estudiantes, permite ver que se debe fortalecer las propiedades de configuración de las figuras, pues según Duval, al considerar el papel heurístico de las figuras en matemáticas, se destaca que la abducción⁵ guía la deducción. La cuestión es determinar qué tratamientos sustentan esta abducción, los cuales deben ser específicos al registro de las figuras y no meramente asimilados a los tratamientos matemáticos. Esto evita reducir la abducción a los conocimientos matemáticos y reconoce el valor heurístico independiente de las figuras. (2017, p. 202).

⁵ Pierce describió bajo el término de “abducción”, consistente en limitar de entrada la clase de hipótesis o de alternativas que han de considerarse: así, de entrada, la figura ha de evitar la exploración de todos los caminos posibles captando la atención sólo sobre aquellos susceptibles de conducir a la solución o sobre los que ya han conducido a ella.

Finalmente, los estudiantes a través de sus respuestas en la pregunta 3 de la Tarea 4B, demuestran que pueden identificar y justificar la conservación del área como una propiedad fundamental que une diferentes figuras geométricas compuestas por las mismas piezas.

Los estudiantes E2 y E9 destacan que, a pesar de los cambios en la forma, las figuras mantienen la misma área, E2 añade una reflexión sobre la variabilidad en posiciones y colores, lo que indica una comprensión más rica de las posibles transformaciones que no afectan al área, E9 se enfoca en la relación de área idéntica, reforzando la idea de invarianza geométrica del área.

La respuesta del estudiante E15 va más allá al mencionar patrones y al sugerir que aunque las figuras sean diferentes en forma, la relación entre sus componentes y su área se mantiene constante. Esto muestra una capacidad de abstraer la idea de patrones geométricos y reconocer la uniformidad en propiedades matemáticas fundamentales.

Estas respuestas reflejan que los estudiantes están desarrollando una comprensión más completa de la geometría y la caracterización del objeto matemático, lo que es crucial para el desarrollo de competencias en resolver problemas en matemáticas.

La consistencia en identificar el área como un punto de relación común indica que están bien encaminados en su capacidad de análisis y razonamiento geométrico. Sin embargo, también se señala la importancia de seguir fortaleciendo esta comprensión para que puedan aplicar estos conceptos de manera más general (ver figuras 120, 121 y 122).

← E2 Silvana Penagos V...
16/18

Tarea 44

3. ¿Crees que se puede encontrar una relación o un patrón entre figuras distintas en forma, que compartan las mismas piezas entre sí y en igual número?

Sí, justifica tu respuesta.
No, justifica tu respuesta.

Por ejemplo:
La FIGURA X, se compone de un triángulo, un cuadrado, un rectángulo.
La FIGURA Y, se compone de un cuadrado, un triángulo, un rectángulo.
La FIGURA Z, se compone de un rectángulo, un triángulo, un cuadrado.

Respuesta

La relacion es que tienen la misma area, lo diferente es que cambian posiciones, son distintas piezas y diferentes colores. Pero permanece igual

Figura 120. Respuesta de estudiante E2 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 3 de la Tarea 4B, a las configuraciones de las figuras convexas. Fuente: GeoGebra.

← E9 Samuel Andres...
3/18

3. ¿Crees que se puede encontrar una relación o un patrón entre figuras distintas en forma, que compartan las mismas piezas entre sí y en igual número?

Sí, justifica tu respuesta.
No, justifica tu respuesta.

Por ejemplo:
La FIGURA X, se compone de un triángulo, un cuadrado, un rectángulo.
La FIGURA Y, se compone de un cuadrado, un triángulo, un rectángulo.
La FIGURA Z, se compone de un rectángulo, un triángulo, un cuadrado.

Respuesta

si, cambia su figura pero su relacion de area es identica

Figura 121. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E9, a la pregunta 3 de la Tarea 4B, a las configuraciones de las figuras convexas. Fuente: GeoGebra.

← E 15 MARIA PAUL... < 17/18 >
3. ¿Crees que se puede encontrar una relación o un patrón entre figuras distintas en forma, que compartan las mismas piezas entre sí y en igual número? Sí, justifica tu respuesta. No, justifica tu respuesta. Por ejemplo: <i>La FIGURA X, se compone de un triángulo, un cuadrado, un rectángulo.</i> <i>La FIGURA Y, se compone de un cuadrado, un triángulo, un rectángulo.</i> <i>La FIGURA Z, se compone de un rectángulo, un triángulo, un cuadrado.</i> Respuesta si se puede encontrar una relacion de los patrones serian iguales pero en diferente forma igual seria el mismo area

Figura 122. Respuesta de estudiante E15 Tarea 4B. La figura muestra la respuesta del estudiante E15, a la pregunta 3 de la Tarea 4B, a las configuraciones de las figuras convexas. Fuente: GeoGebra.

La Tarea 4C del Nivel Formal se centró en el diseño de una propuesta de enseñanza que permitiera a los estudiantes experimentar y reflejar el surgimiento de una nueva formalidad matemática. En este nivel, los estudiantes trabajaron con procedimientos y notaciones convencionales, que están desvinculadas de las situaciones que inicialmente les dieron significado.

El propósito principal es que los estudiantes conjeturaran y establecieran equivalencias de área entre diferentes configuraciones de figuras geométricas planas (un trapecio, un triángulo y un rectángulo), utilizando diversos registros de representación.

La tarea específica consiste en demostrar cómo los polígonos pueden tener áreas equivalentes, enfatizando la comprensión y aplicación de principios matemáticos abstractos para establecer relaciones entre las áreas de distintas figuras. Esta propuesta educativa busca que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático “avanzado”, empleando notaciones y

métodos formales para explorar y demostrar las equivalencias de área en diferentes figuras geométricas (ver figura 123).

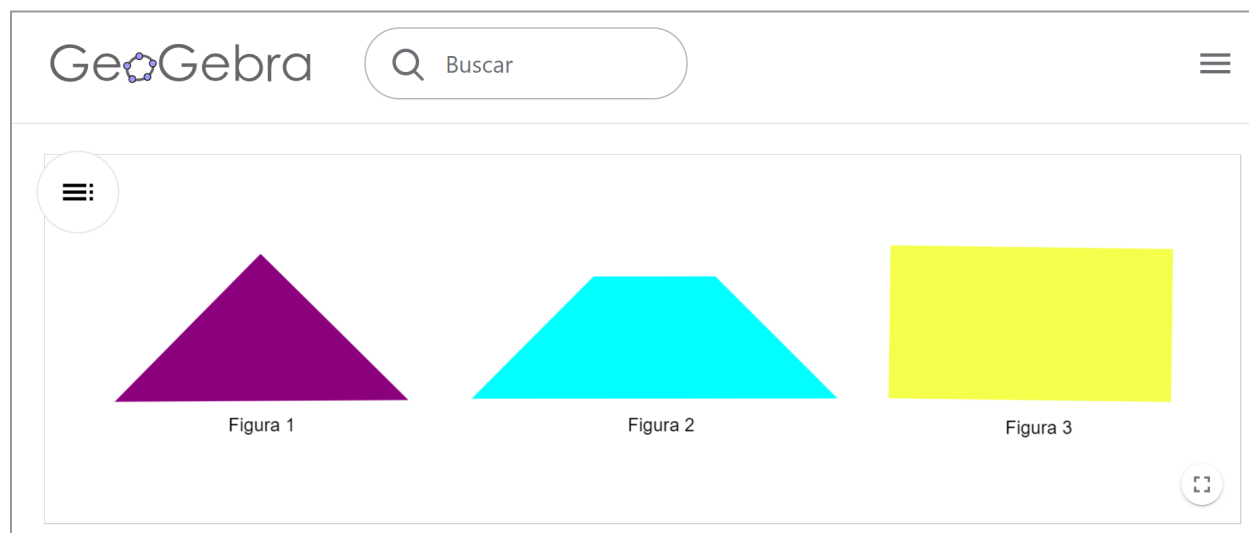


Figura 123. Demostración de área de polígonos Tarea 4A Nivel Formal. La figura muestra las distintas configuraciones que pueden tener las figuras respecto al área, desligándose de la observación para adentrarse a la demostración de las áreas de las figuras. Fuente: Elaboración propia.

Con relación a las producciones de los estudiantes en el análisis de las respuestas de la pregunta 1 de la Tarea 4C, se observa que abordaron la noción de la equivalencia de áreas de diferentes polígonos, específicamente un triángulo, un trapecio y un rectángulo, desde una perspectiva elemental.

Los estudiantes emplean unidades de área y proporcionan ejemplos numéricos específicos para argumentar sus respuestas. El menciona que los polígonos pueden ser equivalentes en ciertas situaciones, citando un ejemplo de un triángulo con un área de 100 unidades cuadradas, aunque no muestra la comparación con las otras figuras.

Los estudiantes E13 y E16, por otro lado, afirman directamente que es posible tener polígonos de diferente forma pero con la misma área, usando ejemplos concretos (E13 menciona un triángulo y un rectángulo con áreas de 10 unidades cuadradas). Desde la dimensión conceptual, los estudiantes muestran una comprensión elemental de la caracterización de los

objetos matemáticos en términos de área, reconociendo que la equivalencia de área no implica una equivalencia en forma.

Sin embargo, las respuestas carecen de una exploración de las propiedades geométricas y las fórmulas específicas para el cálculo de las áreas de los diferentes polígonos planteados, lo que sugiere una comprensión conceptual limitada al enfoque aritmético de las unidades cuadradas. A pesar de que reflejan un entendimiento elemental de la equivalencia de áreas entre diferentes figuras geométricas, existe una carencia en el análisis formal y conceptual (ver figuras 124, 125 y 126).

←

E13 Kimberly Oso...

< 1/18 >

Tarea 46

1. Dados los diferentes polígonos (Un triángulo, un trapecio y un rectángulo), ¿Se podría determinar que los polígonos son equivalentes en sus áreas, independientemente de su forma?

Si, argumenta tu respuesta.
No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

si, porque puedo tener un triangulo en el cual su area sea 10u al cuadrado, y un rectangulo en el cual su area sea 10u al cuadrado

Figura 124. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 1 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

 E1 Michel Sofia M...  12/18 

Tarea 46

1. Dados los diferentes polígonos (Un triángulo, un trapecio y un rectángulo), ¿Se podría determinar que los polígonos son equivalentes en sus áreas, independientemente de su forma?

Si, argumenta tu respuesta.
No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

Si se puede deterimar que son equivalentes en ciertas situaciones, por ejemplo, un triangulo con 100 unidades cuadradas

Figura 125. Respuesta de estudiante E1 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E1, a la pregunta 1 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

 E16 juan david ga...  9/18 

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 46

1. Dados los diferentes polígonos (Un triángulo, un trapecio y un rectángulo), ¿Se podría determinar que los polígonos son equivalentes en sus áreas, independientemente de su forma?

Si, argumenta tu respuesta.
No, argumenta tu respuesta.

Respuesta

SI PUEDEN TENER EL MISMO AREA PERO DIFERENTES FORMAS

Figura 126. Respuesta de estudiante E16 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E16, a la pregunta 1 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

En las respuestas proporcionadas por los estudiantes, respecto a la pregunta 2 de la Tarea 4C, se observa que la forma en que abordaron la relación de equivalencia entre el triángulo, el trapecio y el rectángulo fue de una manera elemental y con diferentes niveles de comprensión.

Para el estudiante E2, la relación de equivalencia entre las tres figuras radica en el hecho de que todas poseen un área, una observación correcta pero fundamental que no profundiza en las propiedades matemáticas que pueden ser comparadas o halladas.

Por otro lado, el estudiante E11, muestra una falta de comprensión conceptual al afirmar que no sabe la relación de equivalencia porque las figuras no son idénticas, evidenciando una confusión entre la noción de igualdad y equivalencia.

Finalmente, para el estudiante E13 la equivalencia se basa en que las figuras tienen “lados parecidos”, lo cual muestra una interpretación imprecisa de la relación de equivalencia, puesto que no especifica ni justifica adecuadamente qué aspectos de los lados se consideran equivalentes (como la longitud, por ejemplo).

En cierto modo, las respuestas reflejan una comprensión limitada y en algunos casos, incorrecta de la caracterización del objeto matemático (noción del signo igual como equivalencia), pues los estudiantes no profundizan en cómo se puede establecer una equivalencia en términos de áreas comparables, perímetros, o relaciones geométricas específicas entre las figuras como se muestra en las figuras 127, 128 y 129.

 E2 Silvana Penago...  16/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 47

2. Argumenta ¿Cuál es la relación de equivalencia que hay entre las tres figuras planteadas al inicio?

Respuesta

La relacion equivalente que hay entre las 3 figuras planteadas al inicio es que cada una tiene un area

Figura 127. Respuesta de estudiante E2 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E2, a la pregunta 2 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

 emmanuel E11  7/18 

 Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 47

2. Argumenta ¿Cuál es la relación de equivalencia que hay entre las tres figuras planteadas al inicio?

Respuesta

s no se por qno son las misma figura

Figura 128. Respuesta de estudiante E11 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E11, a la pregunta 2 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

←

E13 Kimberly Oso...

< 1/18 >

⏏

Has pausado la lección. Utiliza REANUDAR para que tus estudiantes puedan continuar trabajando.

Tarea 47

2. Argumenta ¿Cuál es la relación de equivalencia que hay entre las tres figuras planteadas al inicio?

Respuesta

la equivalencia es que tienen lados parecidos

Figura 129. Respuesta de estudiante E13 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E13, a la pregunta 2 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

Para terminar estos hallazgos de las producciones que realizaron los estudiantes en este Nivel Formal, se tienen las respuestas de tres estudiantes, a la pregunta 3 de la Tarea 4C, donde se evidenciaron diferentes niveles de comprensión y habilidades en la caracterización de objetos matemáticos, específicamente utilizar la noción del signo igual como equivalencia de área.

El estudiante E9 presentó un ejemplo claro y correcto de un triángulo y un rectángulo con áreas equivalentes, usando las formas algebraicas de área de cada figura ($A = \frac{b \times h}{2}$ para el triángulo y $A = b \times h$ para el rectángulo) y realizando correctamente las conversiones y tratamientos para mostrar que ambos tienen un área de 10 unidades cuadradas.

Para el caso del estudiante E10, aunque plantea las mismas formas algebraicas, comete un error al aplicar la forma del área del rectángulo, puesto que incorrectamente la escribe como $\left(A = \frac{b \times h}{2}\right)$ en lugar de $(A = b \times h)$, lo cual podría indicar una confusión “conceptual”. Es importante resaltar que “el planteamiento en ecuación de los datos del enunciado de un

problema, es la conversión de las diferentes expresiones lingüísticas de las relaciones en otras expresiones de esas relaciones en el registro de una escritura simbólica” (Duval, 2017, p. 80).

No obstante, el cálculo final de 10 unidades cuadradas es correcto, pero se deriva de una conversión errónea.

Por otra parte el estudiante E14, menciona figuras irregulares y describe su área como 18 unidades cuadradas basándose en contar cuadrículas, sin proporcionar un análisis matemático detallado ni utilizar formas algebraicas, lo cual limita la precisión y claridad de su respuesta.

Ahora bien, en términos de la relación de equivalencia de los ejemplos planteados por los estudiantes, E9 muestra una comprensión del uso del signo igual como símbolo de equivalencia entre áreas de diferentes figuras, mientras que E10 muestra un “acercamiento” elemental pero con errores en la aplicación de fórmulas.

El estudiante E14 evidencia una aproximación empírica y menos formalizada (ver [Geometría activa](#)). En general, las respuestas de los estudiantes reflejan una variabilidad en la competencia para emplear el lenguaje matemático y natural para explicar la equivalencia de áreas, con una necesidad general de mayor precisión y rigor matemático (ver figuras 130, 131 y 132).

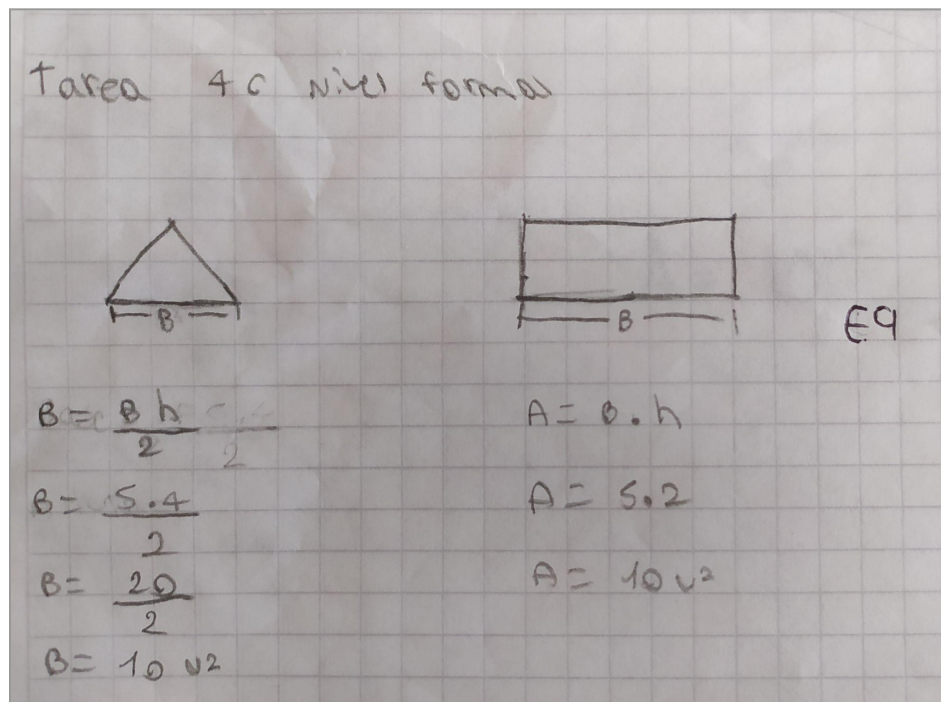


Figura 130. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E9, a la pregunta 3 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

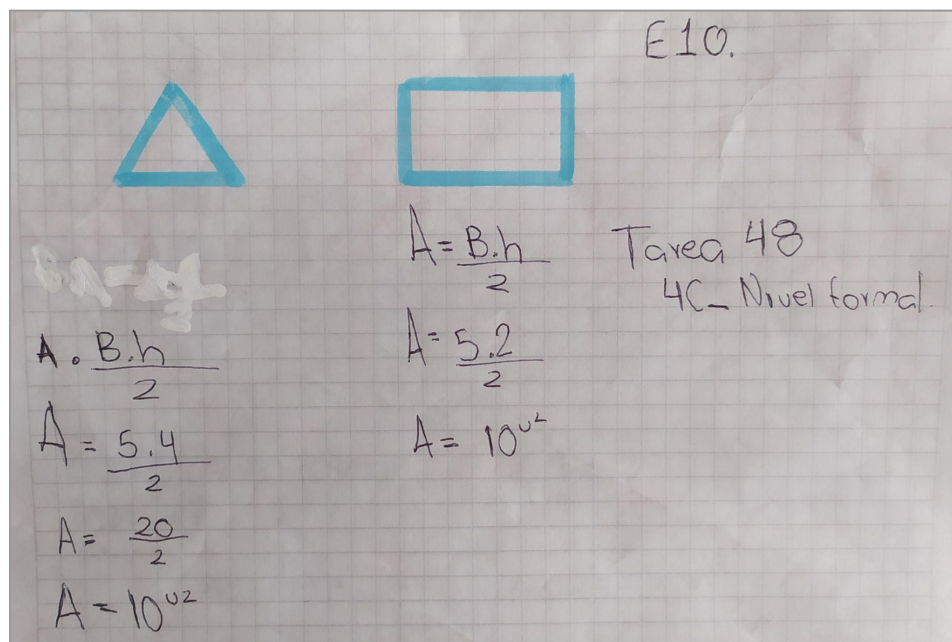


Figura 131. Respuesta de estudiante E10 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E10, a la pregunta 3 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

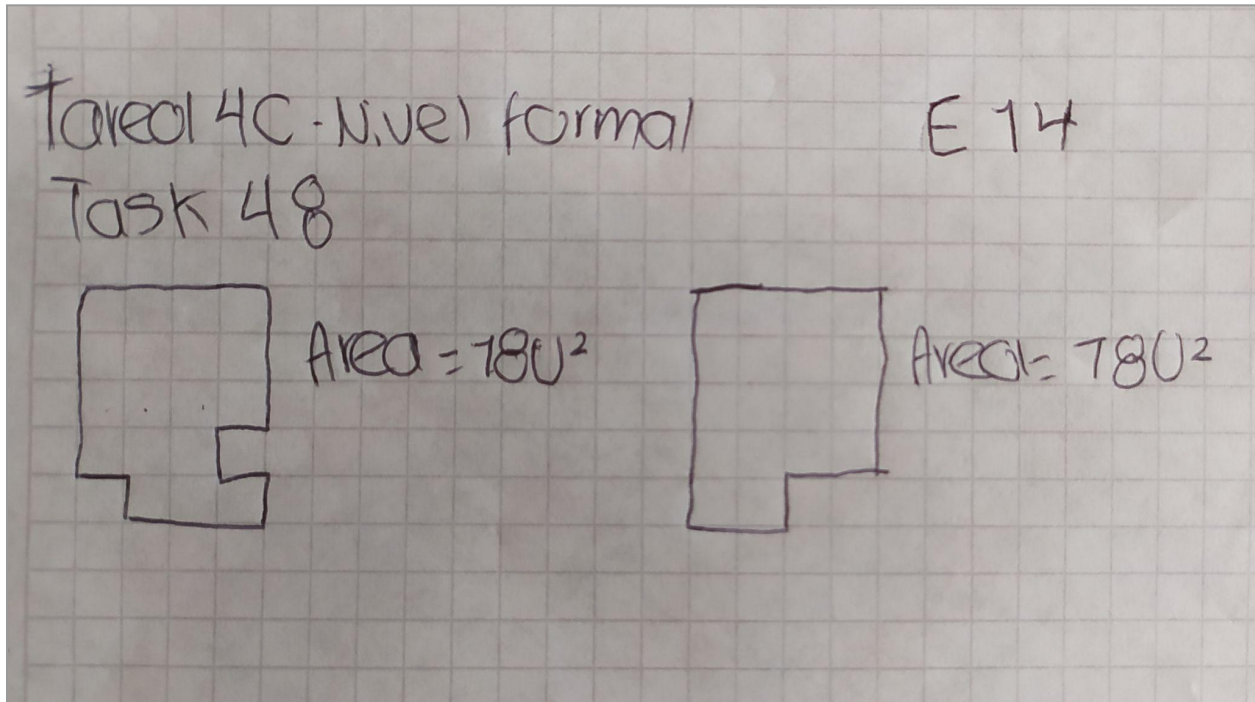


Figura 132. Respuesta de estudiante E9 Tarea 4C. La figura muestra la respuesta del estudiante E9, a la pregunta 3 de la Tarea 4C, respecto a las configuraciones de las figuras (un triángulo, un trapecio y un rectángulo). Fuente: GeoGebra.

A continuación, se presenta al lector algunas observaciones y reflexiones generales sobre la propuesta de diseño, así como la aplicación práctica (implementación).

4.4.2 Observaciones o reflexiones del cuarto nivel

Este análisis tiene la finalidad de verificar y resaltar los elementos más significativos del proceso de enseñanza entre el profesor (P) y dos alumnos, proporcionando una visión completa sobre su efectividad y áreas potenciales de mejora.

Las reflexiones presentadas pretenden ofrecer una perspectiva constructiva, fundamentada en la experiencia y la observación directa del desarrollo de la implementación, utilizando las categorías y códigos de análisis especificados en la Tabla 5.

4.4.2.1 Intervención 7

P: El nivel formal, pues fue chistoso, yo pensé que iba a ser el más duro para todos, pero no siempre. Eran las figuras con las cuadrículas, esta de aquí y esta de aquí, ¿Se acuerdan?

E10: Sí.

P: Por lo regular era como visualizar las imágenes, no había casi nada que hacer. O sea, ya no tenían que arrastrar nada. Entonces, el propósito del nivel formal, es inferir la equivalencia de áreas entre diferentes configuraciones de figuras planas. Eso depende de la forma y el valor del área. Y también establecer relaciones entre áreas utilizando registros de representación. Registros de representación es lo que yo les decía, colóquelo como en lenguaje algebraico o en palabras o con un dibujo.

Eso son representaciones, registros de representación. Entonces, listo, pasamos a las preguntas. Pues, ¿Cómo describirías el proceso de cálculo de área de una figura plana utilizando fórmulas convencionales? Lo que les enseñaban, digámoslo aquí. Las fórmulas del rectángulo es base por la altura, el triángulo es b por h sobre 2. ¿Qué escribe usted en ese proceso? Como, ¿Qué ves? ¿Qué puedes decir? Comparándolo con lo que nosotros tratamos de enseñarles.

E10: Pues, que es más, supongo, si estoy entendiendo la pregunta, supongo que es más breve la forma en la que ustedes, es más entendible la forma en que ustedes nos la hacen ver que en la postura que hace, por ejemplo, el profesor (del colegio).

P: O sea, desde el colegio, digamos así, tradicional.

E10: Sí, es más breve la forma en la que ustedes lo hacen. Más entendible para nosotros tener más, ¿Qué más? Ah, pues para mí sí fue como más, más fácil entender de la forma que nos hicieron las actividades. Porque hay veces que el profesor, o no le entiendo por la manera que explica, o... Sí, la manera en que se lo redacta.

P: Comprensión. Perfecto. Listo. Entonces, la segunda pregunta sería, ¿Qué estrategias utilizarías para demostrar la equivalencia de áreas entre dos figuras planas? En pocas palabras, ¿Cómo haría usted para saber que dos figuras que a usted le presentan tienen la misma área?

E10: Pues, por ejemplo, contaría, si está sobre una superficie cuadrada, pues contaría los cuadritos que tienen por dentro. Y si son los mismos, pues es obviamente que tienen la misma cantidad de área, aunque sea de diferente forma.

P: Ok. Listo. La última pregunta, ¿Qué papel crees que juegan las representaciones visuales en la comprensión de la equivalencia entre áreas?

E10: Me repite esa pregunta.

P: ¿Qué papel crees que juegan las representaciones visuales? Representaciones visuales es, digámoslo, un dibujo, un esquema, cualquier cosa que se pueda ver, digámoslo así, pues con los ojos, obviamente. Sí. ¿Qué papel crees que juegan las representaciones visuales en la comprensión de la equivalencia entre áreas?

E10: Muy importante, porque es más fácil entender visualmente que, por ejemplo, que se lo digan a ustedes. Imaginárselo, es mucho más... Es mejor uno ver las imágenes y así ya tiene como un ejemplo o una iniciativa para empezar. En la actividad, es más fácil tener un ejemplo para realizar esta actividad, que se nos haga más fácil.

Solamente si se lo dicen, pero uno le tiene que imaginar como la forma o cómo es el procedimiento, pues se va a complicar más, porque uno tiene que, como, hacer más métodos de pensamiento en uno, entonces sí, se me facilita más como verlo visualmente.

P: O sea, es como que se le digan, que les escriban solamente.

E10: Así, exacto y que nosotros aprendimos que era un paralelogramo con ustedes.

4.4.2.2 Análisis parcial 7

El análisis de la intervención se basó en el enfoque de los objetivos de las actividades, el cual uno de ellos fue utilizar registros de representación para “detallar” las configuraciones de las figuras planteadas en las actividades, donde el profesor juega un papel crucial que las actividades fueran más comprensibles y accesibles en comparación con métodos tradicionales. Además, la estrategia de usar representaciones visuales, como cuadrículas, ayudó a los estudiantes a conceptualizar la equivalencia de áreas de manera tangible y concreta, alineándose con los objetivos pedagógicos de la intervención.

Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Énfasis en el objetivo de las actividades

En la intervención, el profesor (P) muestra un claro énfasis en el objetivo de las actividades, que es inferir la equivalencia de áreas entre diferentes configuraciones de figuras planas. El profesor explica que este objetivo se basa en entender la forma y el valor del área, así como en utilizar registros de representación.

El propósito de la actividad se recalca al estudiante E10 al solicitarle que describa el proceso de cálculo de áreas utilizando formas algebraicas y comparándolo con lo aprendido durante las actividades.

Categoría 8: Casos particulares. Códigos: Registros de representación - Apreciaciones del diseño por parte de los estudiantes - Importancia del rol del profesor en la implementación del diseño

Referente al código de registros de representación, el profesor presenta la noción de registros de representación, al mencionar ejemplos como el lenguaje algebraico, palabras, o dibujos; esta

“teoría” busca diversificar las formas en que los estudiantes pueden entender y representar las áreas de figuras planas y E10 muestra una comprensión de esta idea al describir cómo usaría cuadrículas para determinar la equivalencia de áreas.

El estudiante E10 expresa que la forma en que se les enseñó en esta intervención fue más breve y entendible en comparación con el método tradicional del colegio, debido a que su comentario refleja una apreciación positiva hacia el diseño de la intervención, sugiriendo que las actividades diseñadas lograron su propósito de hacer más accesible el aprendizaje de la equivalencia de áreas.

También el estudiante resalta la claridad y brevedad con la que el profesor (P) de la intervención explicó los conceptos, contrastándolo con las dificultades encontradas con el profesor del colegio. Esto subraya la importancia del rol del profesor no solo en la planificación, sino también en la ejecución efectiva de las actividades diseñadas, facilitando una mejor comprensión por parte de los estudiantes (ver [Orquestación Instrumental: Un modelo metafórico \(OI\)](#)).

Categoría 3 Equivalencias. Código: Conjetura sobre la cantidad de piezas

La intervención exploró la noción de equivalencia de áreas a través de una pregunta específica sobre estrategias para demostrar esta equivalencia. E10 sugirió “contar los cuadritos dentro de las figuras” en una superficie cuadrada, indicando que si ambas figuras contienen la misma cantidad de “cuadritos”, entonces tienen la misma área.

Esta respuesta revela una comprensión intuitiva de la equivalencia de áreas, basada en la visualización y conteo, Sin embargo, no logra completamente cumplir con los propósitos del diseño.

4.4.2.3 Intervención 8

P: Ok. Entonces sí o sí, tiene que haber profesor. Listo, entonces ya pasamos a la última, al último nivel, para que vayamos cerrando.

Y es el nivel formal, ya como le he dicho, es el nivel más alto, el nivel que tiene que ver ya con la interpretación de lenguaje natural o de alguna representación visual, pero que no hay interacción, no sé si te diste cuenta que en ese nivel ya no había nada que hacer, como arrastrar figuras, nada, sino como que mire y responde a las preguntas.

Entonces los propósitos es inferir equivalencias de áreas entre diferentes configuraciones de figuras planas, es decir, inferir es cómo determinar, aprender que hay figuras que tienen diferentes configuraciones, formas, pero que son equivalentes. Eso se trajo en todos los niveles y pues sería imposible que no se les haya grabado, aprendido.

Y el otro propósito es establecer relaciones entre áreas utilizando registros de representación. Registros de representación es, por ejemplo, cuando había como unas preguntas que decían establezcalo algebraicamente, o numérico, o en lenguaje, o con un dibujo, si eso es un registro de representación. Por ejemplo, usted, ¿Qué registros de representación utilizó en las actividades que se diseñaron?

¿Qué registros de representación lo hiciste algebraico? Muy bien, bueno, entonces paso a mostrar las actividades. La actividad del nivel formal era esta, de las figuras con las cuadrículas. Esta que era esta imagen, solamente la imagen. Y está la del triángulo, el trapecio y el rectángulo. Solo era observar las figuras y responder las preguntas.

Entonces ahora sí, pasemos a las preguntas finales. ¿Cómo describe el proceso del cálculo de área de una figura plana utilizando fórmulas convencionales comparado a, digamos, la

forma en que nosotros tratamos de enseñarles? Cómo comparar lo que les han enseñado aquí en el colegio, como que el área se calcula, digamos, las bases por altura, esto por esto, como fórmulas.

A nosotros, ¿Cómo se lo enseñamos utilizando imágenes, interacciones? ¿Sí me entiende? O sea, ¿Cuál proceso crees que es más fácil, que se te haga más fácil?

E13: Pues, no sé, el profesor nos enseña así, él dibuja y ya empieza a sumar todo. Y ya como que ustedes ya tenían la figura ahí, se me hizo más fácil, usted lo explicó muy bien.

P: Y ya también es como interaccionar con el recurso.

E13: Sí, fue muy chévere.

P: Bueno, la segunda pregunta del nivel formal es, ¿Qué estrategias utilizarías para demostrar que dos figuras son equivalentes en área? ¿Cómo te darías cuenta? ¿Cómo lo harías? Por ejemplo, ¿Utilizando una fórmula o cómo lo harías?

E13: Pues, haciendo la fórmula, con las dos figuras, y pues hago la fórmula de cada una. Base por altura y así.

P: Y es hallar el valor.

E13: Ajá, hallándose.

P: O la otra, no sé si recuerdas también, si tenemos cuadrículas o puntos de referencia también. Mirando la composición de la figura, lo que hay adentro, ¿No? Sin necesidad de medir, sino cuente.

Cuéntenos qué entra ahí. Listo, y por último, ¿Qué papel consideras que juegan las representaciones visuales en la comprensión de las actividades? Es decir, si yo les hubiera colocado simplemente el lenguaje natural, como en palabras, hagan esto, y ya, sin un dibujo, ¿Crees que hubiera sido fácil? ¿Se hubiera podido hacer? ¿O no hubieran comprendido?

E13: No, no hubiéramos comprendido porque las preguntas se basan prácticamente en el dibujo que había. Entonces, pues teníamos que ver bien el dibujo y luego ya contestar.

P: Ok, entonces considera que sí o sí tienen que haber representaciones visuales.

E13: Sí, para ese tipo de presentación.

4.4.2.4 Análisis parcial 8

La intervención del diseño de enseñanza se basa en objetivos claros y una planificación intencionada que incorpora diversas formas de representación y la guía activa del profesor, además de que los estudiantes apreciaron el diseño, encontrándose efectivo y accesible. La utilización del lenguaje matemático y los registros de representación son elementos clave que facilitan la comprensión y aplicación de las nociones de área, mostrando la importancia de un enfoque en la enseñanza de matemáticas.

Categoría 1 Intención de la planificación. Código: Énfasis en el objetivo de las actividades

La intervención refleja claramente la intención de la planificación de las actividades de enseñanza, donde el profesor enfatiza que, a lo largo de todos los niveles de la actividad, los estudiantes deben aprender que distintas figuras pueden tener áreas equivalentes a pesar de sus diferentes configuraciones.

Esta intención se evidencia cuando se discuten las actividades diseñadas para el Nivel Formal, donde los estudiantes deben observar figuras y responder preguntas sin interacción dinámica con el recurso, además el énfasis en la utilización de diversos registros de representación, como algebraico, numérico, lenguaje y dibujo, subraya el objetivo de que los estudiantes comprendan y utilicen múltiples formas de representar las áreas.

Categoría 8: Casos particulares***Código: Utilización de lenguaje matemático para referirse a las figuras***

Durante la intervención, se observa un uso consistente del lenguaje matemático para referirse a las figuras y sus áreas. Por ejemplo, el profesor menciona términos como “configuraciones de figuras planas”, “inferir equivalencias de áreas” y “registros de representación”. Esto no solo facilita la comprensión de las nociones matemáticas por parte de los estudiantes, sino que también les permite familiarizarse con el lenguaje matemático, que es esencial para su aprendizaje.

Código: Apreciaciones del diseño por parte de los estudiantes

El estudiante E13 expresa su apreciación del diseño de las actividades, destacando que tener las figuras ya dibujadas y las explicaciones del profesor hicieron que el proceso de aprendizaje fuera “más fácil”. Esta retroalimentación positiva sugiere que el diseño de las actividades, que al incluir representaciones visuales e interacciones con el recurso, es efectivo para mejorar la comprensión de la noción del signo igual como equivalencia a partir de áreas iguales.

No obstante, las producciones de los estudiantes se quedaron cortas para lo que se esperaba con los propósitos del nivel.

Código: Importancia del rol del profesor en la implementación del diseño

El rol del profesor se destaca como crucial en la implementación del diseño de enseñanza, pues E13 menciona que la explicación del profesor fue clara, lo que facilitó el

aprendizaje, pues en su respuesta se muestra que la guía y las explicaciones del profesor son vitales para que los estudiantes comprendan y realicen las actividades correctamente.

Código: Registros de representación

El profesor hace un énfasis significativo en la utilización de diferentes registros de representación (algebraico, numérico, lenguaje y dibujo) para enseñar las nociones de equivalencias de área, pues pregunta específicamente a E13 qué registros de representación utilizó en las actividades y cómo esto ayudó en su comprensión.

La diversidad en los registros de representación permite a los estudiantes abordar el problema desde diferentes ángulos y profundizar su comprensión de las nociones matemáticas. Esto se refuerza con la pregunta final del profesor sobre la importancia de las representaciones visuales, a la que E13 responde afirmativamente, destacando que sin las representaciones visuales, no hubieran comprendido las preguntas.

Conclusiones

El diseño de una secuencia de actividades mediada por los recursos del Tangram y GeoGebra, fue útil para la enseñanza del signo igual como equivalencia, a través de la configuración de áreas equivalentes de figuras geométricas, gracias a los hallazgos de los resultados de la implementación, la cual permitió un enfoque que no solo facilitó la comprensión de nociones geométricas, sino que también, promueve el desarrollo de competencias de visualización y pensamiento espacial en los estudiantes de octavo grado.

Sobre los fundamentos teóricos y referenciales

El Diseño de esta secuencia de actividades mediada por el Tangram con GeoGebra, se ha fundamentado en un marco teórico y documental, el cual demuestra su acercamiento a la enseñanza del signo igual como equivalencia, mediante la configuración de áreas equivalentes de figuras geométricas planas.

La investigación se basó en teorías del aprendizaje geométrico y en estudios previos que resaltan la importancia de la visualización y manipulación de figuras para el desarrollo del pensamiento espacial, lo cual permitió estructurar actividades que no solo son coherentes con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje THA, sino que también están alineadas con las competencias educativas específicas del grado octavo en la educación en Colombia.

En relación con el diseño y el estudio de la evolución de los niveles de aprendizaje

El diseño e implementación de la secuencia de actividades mostró que los estudiantes pueden progresar significativamente en su comprensión de “conceptos” geométricos y de la noción del signo igual como equivalencia.

Los análisis revelaron que a través de niveles de aprendizaje bien estructurados (Situacional, Referencial, General y Formal), los estudiantes pudieron desarrollar competencias para reconocer y manipular áreas equivalentes, comprender la relación entre formas y número de piezas, y mejorar la visualización en geometría. Los hallazgos de este trabajo de grado evidenciaron que los estudiantes lograron identificar patrones, equivalencias de área y las relaciones geométricas necesarias para resolver las actividades planteadas en el primer nivel (Situacional).

El diseño de actividades utilizando Tangram y GeoGebra ha demostrado ser efectivo para enseñar la noción del signo igual como equivalencia a través de la configuración de áreas de figuras planas. Sin embargo, se ha identificado la necesidad de simplificar la redacción de las preguntas y ajustar el nivel de complejidad de las figuras utilizadas, pues la intervención del profesor fue crucial para guiar a los estudiantes y clarificar los objetivos de las actividades.

La investigación sobre la trayectoria de aprendizaje ha permitido identificar dificultades específicas como las anteriormente mencionadas, las cuales pueden ser abordadas mediante la adaptación y mejora continua del diseño de las actividades.

Las tareas del Nivel Formal permitieron observar que algunos estudiantes lograron identificar y justificar correctamente la equivalencia de áreas, mientras que otros mostraron una comprensión más superficial o cometen errores en la aplicación de las formas algebraicas.

En relación con los procesos de visualización, tratamientos figúrales y registros de representación

La utilización del recurso de GeoGebra con el Tangram ayudó a los procesos de visualización y de tratamiento figural en los estudiantes. Las construcciones de las figuras del

Tangram en los dos primeros niveles, permitió a los estudiantes explorar las propiedades geométricas de manera activa y significativa, desarrollando una comprensión de las nociones de área y equivalencia.

Las actividades diseñadas promovieron un aprendizaje que tiene en cuenta el contexto del estudiante, permitiendo visualizar no solo la configuración espacial de las piezas del Tangram, sino también cómo estas configuraciones afectan las propiedades geométricas como el área y el perímetro. Nuevamente se resalta que esta propuesta de enseñanza se enfocó en la equivalencia de áreas para determinar la noción del signo igual como equivalencia.

Los hallazgos indicaron que la visualización no icónica desempeña un papel crucial en la facilitación del aprendizaje geométrico, tal como lo plantea Duval (2005), permitiendo a los estudiantes trascender en la identificación de figuras equivalentes en términos del área e independientemente de su forma hacia una comprensión más abstracta y relacional.

Los resultados obtenidos a través de las actividades indicaron variaciones en los niveles de comprensión de los estudiantes, mientras algunos lograron identificar y explicar las equivalencias geométricas, otros mostraron dificultades, especialmente en la transición de la visualización de las figuras a la formalización algebraica o de otro registro (lenguaje natural, un diagrama, un dibujo). La reconfiguración de figuras geométricas y la descomposición en componentes “elementales” ayudaron a los estudiantes a entender las propiedades y equivalencias geométricas.

La capacidad de los estudiantes para proponer configuraciones de figuras con áreas equivalentes, a pesar de la variabilidad en forma, demuestra un avance en la comprensión de la geometría.

Sin embargo, la precisión en la comunicación de las soluciones y la capacidad para utilizar registros de representación más allá del lenguaje natural siguen siendo aspectos que requieren fortalecimiento, pues los hallazgos de las tareas diseñadas mostraron que los estudiantes necesitan un mayor enfoque en la visualización icónica y no icónica, así como en la aplicación de notaciones matemáticas convencionales para expresar sus conclusiones de manera formal y rigurosa.

Para cerrar este apartado, se evidenció que la propuesta de enseñanza demostró ser eficaz para “facilitar” la comprensión del signo igual como equivalencia a través de la configuración de áreas equivalentes de figuras geométricas, promoviendo el desarrollo de competencias además de la visualización y pensamiento espacial en estudiantes de octavo grado.

El uso de recursos tecnológicos educativos como GeoGebra y el Tangram, apoyado en un marco teórico, el cual permitió estructurar las actividades con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) y alineadas con las competencias educativas en Colombia.

Los hallazgos indicaron que los estudiantes pueden progresar significativamente en su comprensión geométrica y la noción del signo igual como equivalencia, aunque se identifican aspectos a mejorar, como la simplificación de la redacción de preguntas y el ajuste de la complejidad de las figuras.

Además, es crucial fortalecer la competencia de los estudiantes para utilizar registros de representación más allá del lenguaje natural, como (registro algebraico, diagramas, dibujos, entre otros). La intervención activa del docente y la mejora continua en el diseño de actividades serán esenciales para seguir optimizando el aprendizaje geométrico y matemático.

Alcances de la investigación

La investigación demostró ser una contribución significativa en la enseñanza del signo igual como equivalencia. El impacto de esta investigación se amplió al ser leída y apreciada no solo en Colombia sino también en México, lo que evidencia la relevancia y aplicabilidad de sus resultados en contextos educativos diversos. Este reconocimiento internacional facilitó el desarrollo de un nuevo proyecto de investigación, titulado “Equivalencias geométricas: Igualdad entre áreas de figuras bidimensionales”, realizado durante el verano Jaguar 2024 en la Universidad Autónoma de Yucatán.

Este segundo proyecto se enfocó en estudiantes de tercer año de secundaria, mostrando otro enfoque, donde el objetivo fue mejorar la enseñanza de la geometría, especialmente el objeto matemático de la equivalencia geométrica entre áreas de figuras bidimensionales, al utilizar el recurso de GeoGebra en el Diseño de la secuencia de actividades.

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140). Grupo Editorial Iberoamericana, Bogotá. <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Bonelo-Ayala, Y., y Maca-Cortés, Óscar E. (2023). La visualización de las transformaciones isométricas, un elemento para la conceptualización en DGE en estudiantes de básica secundaria. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (8), 1-21.
https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i8.12413
- Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8. <https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865>
- Camargo Uribe, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquía.
- Cárcamo Bahamonde, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado* [Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona] Depòsit Digital de Documents de la UAB. https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2017/hdl_10803_458629/acb1de1.pdf
- Corberán-Salvador, Rosa M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria hasta universidad* [Tesis de doctorado, Universitat de València] Biblioteca Virtual: Buscador ETSE-UV.
<http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf>

- Correa Repizo, M. (2020). *Los procesos de visualización en la comprensión del área de figuras planas: una trayectoria hipotética de aprendizaje en grado séptimo* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia] Repositorio institucional. Biblioteca digital UN.
<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78182>
- Clements, D.H y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2.^a ed.). Routledge. Nueva York.
- Cumbal Acosta, L. (2020). *Caracterización de las prácticas de profesores noveles que integran recursos digitales con una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la enseñanza de la traslación*. [Tesis de maestría, Universidad del Valle] Biblioteca digital.
<https://hdl.handle.net/10893/18487>
- Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H y van Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 132-151. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538294>
- Drijvers, P., Kieran, C., y Mariotti, M. A. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In Hoyles, C. y Lagrange, JB. (Eds.). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89-132) New ICMI Study Series. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 18(10), 5-53.
<https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST05010/IST05010.pdf>
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.; 2.^a ed.). Programa Editorial Universidad del Valle. (Trabajo

original publicado en 1999).

Euclides. (1991). *Elementos. Libro I-IV*. (M. Puertas, Trad.). Editorial Gredos S.A. (Trabajo original publicado en 300 a. c).

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.). *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*. (pp. 315-343). Hove, UK: Psychology Press Ltd.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155- 177.

Gravemeijer, K. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. En B. Phillips (Ed.). *Developing a Statistically Literate Society. Proceedings of the Sixth International Conference of Teaching Statistics* [CD-ROM]. Voorburg, the Netherlands: International Statistics Institute.

Gravemeijer, K. (2004b, Julio). Creating opportunities for students to reinvent mathematics [conferencia]. *10Th International Congress in Mathematics Education (ICME 10)*, Copenhagen, Dinamarca.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225 - 273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ii, C., Lewis, B. A., y Livingston, S. J. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher*, 41(4), 200-204.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2023). *Informe nacional de resultados Saber 11° 2022*.

https://www.icfes.gov.co/documents/39286/21440788/Informe_nacional_de_resultados_Saber_11_2022.pdf

Kieran, C. y Filloy Yagüe, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 7(3), 229-240. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51268>

Laikin, R. y Dinur, S. (2003). Patterns of flexibility: Teachers' behavior in mathematical discussion [conferencia]. *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italia.

<https://pdfs.semanticscholar.org/cb4a/d5bee79fa96ac21ceee1d3cd28f8e19efb4a.pdf>

Marmolejo Avenia, G. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles* [Tesis de doctorado, Universidad de Salamanca]. Repositorio documental GREDOS.

<http://hdl.handle.net/10366/125728>

Marmolejo A., G. A., y González A., M. T. (2013). Función de la visualización en la McClain, construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106.

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327028023008>

McClain, K. y Cobb, P. (1998). The role of imagery and discourse in supporting students' mathematical development. *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning*, 56-81.

- Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). Serie *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá D.C.
https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán. (Ed.). *Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinarios y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 249-261). Editorial Atrio. Granada.
<http://hdl.handle.net/10481/4722>
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. [Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna]. Repositorio institucional RIULL. <http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21205>
- Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*, 53(2), 129-150. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333331210008>
- Perrin, M. (1992) *Aires de surfaces planes et nombres décimaux: questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Histoire et perspectives sur les mathématiques math.HO. [Tesis de doctorado, Université Paris VII, Français] Hall theses.
<https://theses.hal.science/tel-01251423>
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Trad. M. Acosta). Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1995).

- Ramírez García, M., y Rodríguez Marcos, P. (2011). Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 7(26), 41-55. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/926>
- Santacruz, M. (2009, del 8 al 10 de octubre). La gestión del profesor desde la perspectiva de la mediación instrumental [conferencia]. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Pasto, Colombia. <http://funes.uniandes.edu.co/754/1/lagestion.pdf>
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Simon, M. A. (2014). Hypothetical learning trajectories in Mathematics Education. En S. Leman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-275). Springer. Países Bajos.
- Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2
- Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A Rapid Evolution of Tools, with Differential Effects. In: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. Mathematics Education Library, vol 36. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_2
- Tzur, R. (2019). HTL: A Lens on conceptual transition between mathematical “markers”. En D. Siemon., T. Barkatsas. y R. Seah (Eds.). *Researching and learning progressions (trajectories) in mathematics education* (pp. 56-74). Brill Sense. Boston.
- Wang- Fu, T., y Hsiung- Chuan, C. (1942). A Theorem on the Tangram. *The American Mathematical Monthly*, 49(9), 596-599. <https://doi.org/10.2307/2303340>

Zolkower, B. y Bressan, A. (2012). Educación matemática realista. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Eds.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Capítulo 7.* (pp. 175- 200). UNGS- EDUVIM. Argentina.

<http://repositorio.ungs.edu.ar:8080/xmlui/handle/UNGS/780>

Zuluaga- Cardona, Franklin y Cruz- Rojas, Gilberth. A. (2019). Análisis de prácticas evaluativas y reflexivas de un grupo de profesores de matemáticas. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa*, 12, 4-14.

<http://funes.uniandes.edu.co/17535/1/Zuluaga2019Análisis.pdf>

Anexos

Anexo 1. Prueba diagnóstica (Pre-test) implementada.

https://drive.google.com/file/d/1MRXQ18W9hHaaNYb_UWM9laug97CSKK9y/view?usp=sharing

Anexo 2. Aspectos de la estructuración del Diseño.

<https://drive.google.com/file/d/1fXCw7RruzJih07vAygVsmoLepRtUwjwX/view?usp=sharing>

Anexo 3. Libro equivalencias geométricas planas.

<https://www.geogebra.org/m/pbe2rbqv>

Anexo 4. Evidencias fotográficas y audiovisuales de la implementación.

<https://drive.google.com/drive/folders/1WAs5feU4UJwelATecYsiHyK-bAHe6bIn?usp=sharing>