



Aplicación de modelos matemáticos en el control de *Diaphorina citri* vía Manejo Integrado de Plagas

Trabajo de Grado

Estudiante:

Alex Santiago Rangel Cabrera

Directora:

Carmen Alicia Ramírez Bernate

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS-3147

Cali - Colombia, abril 2024

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por otorgarme la fortaleza necesaria para llevar a cabo este proyecto. Además, quiero expresar mi gratitud hacia la Universidad del Valle por brindarme la oportunidad de formarme en esta institución. No puedo dejar de mencionar el apoyo inquebrantable de mi familia, en especial el de mis padres, cuyo respaldo constante ha sido invaluable. También deseo reconocer a mis profesores, en particular a la profesora Carmen Ramírez, por su paciencia, sabios consejos y orientación durante todo el desarrollo de este trabajo.

*¿Por qué me despiertas, soplo embalsamado de la primavera? Tú me acaricias y me
dices: "traigo conmigo el rocío del cielo; pero pronto estaré marchito, porque pronto
vendrá la tempestad que arrebatará mis hojas. Mañana llegará el viajero; vendrá el que
me ha conocido en toda mi belleza; su vista me buscará en torno suyo, me buscará y
no me encontrará."
Goethe*

Índice

Resumen	1
Introducción	3
1. Preliminares	5
1.1. Conceptos Biológicos	5
1.2. Conceptos Matemáticos	9
1.3. Conceptos Numéricos	11
2. Modelo de la dinámica temporal	13
2.1. Formulación y descripción del sistema	13
2.2. Puntos de equilibrio	14
2.3. Estabilidad local	15
2.4. Simulación sin MIP	18
2.5. Incorporación de MIP	21
2.6. Conclusión	23
3. Modelo de la dinámica espacio-temporal	24
3.1. Formulación y descripción del sistema	24
3.2. Formulación variacional	25
3.3. Aproximación numérica	27
3.3.1. Discretización espacial	27
3.3.2. Discretización temporal	31
3.3.3. Resolución de no linealidades	36
3.3.4. Simulaciones numéricas	38
3.4. Conclusión	43
4. Discusión	44
Referencias	47

Resumen

En este trabajo se propone un modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la evolución temporal de las poblaciones de la plaga *Diaphorina citri* y su enemigo natural *Tamarixia radiata*, se procede a determinar sus puntos de equilibrios y condiciones de estabilidad. Luego, se propone un modelo en ecuaciones diferenciales parciales que analiza la dinámica en el espacio y en el tiempo de *D. citri* en la presencia de *T. radiata*, se procede a determinar la aproximación numérica del modelo en un dominio cuadrado a partir del Método de Elementos Finitos para la discretización de las variables espaciales, el Método de Crank Nicolson para la discretización de la variable temporal y un esquema del tipo predictor corrector para el tratamiento de las no linealidades. A ambos modelos se les aplica una estrategia de Manejo Integrado de Plagas (MIP), que consiste en rociar insecticidas y liberar enemigos naturales de la plaga, siempre que la densidad de ésta supere un Umbral Económico (UE). Se simulan diferentes escenarios numéricos, para finalmente proponer estrategias que ayuden a controlar al insecto *D. citri*. Los resultados sugieren que es factible implementar estrategias de control sin requerir un monitoreo constante de la densidad de plagas.

Palabras clave

Modelos matemáticos, Ecuaciones diferenciales ordinarias, Ecuaciones diferenciales parciales, *Diaphorina citri*, *Tamarixia radiata*, Manejo integrado de plagas.

Abstract

In this work, a model is proposed in ordinary differential equations that describes the temporal evolution of the populations of the pest *Diaphorina citri* and its natural enemy *Tamarixia radiata*, we determined its equilibrium points and its stability conditions. Then we propose a model in partial differential equations that analyzes the dynamics in space and time of *D. citri* in the presence of *T. radiata*, we determine the numerical approximation of the model in a domain square of the Finite Element Method for the discretization of the variables spatial, the Crank Nicolson Method for the discretization of the temporal variable and a Predictor-corrector scheme for the treatment of nonlinearities. An Integrated Pest Management strategy (IPM) is applied to both models, which consists of the fumigation of insecticides and release natural enemies of the pest, provided that the density of the pest exceeds a Economic Threshold (ET). Different numerical scenarios are stimulated, to finally propose strategies that help control of the insect *D. citri*. The results suggest that it is feasible to implement control strategies without requiring constant monitoring of pest density.

Keywords

Mathematical models, Ordinary differential equations, Partial differential equations, *Diaphorina citri*, *Tamarixia radiata*, Integrated pest management.

Introducción

Durante las últimas décadas, se ha investigado extensamente el empleo de herramientas matemáticas para desarrollar estrategias que mejoren la eficacia en el control de plagas en los agroecosistemas. Se han formulado y se formulan constantemente numerosos modelos matemáticos que involucran las relaciones clásicas presa-depredador, como por ejemplo en [24] y [36], y parasitoide-huésped, como por ejemplo en [32] y [27], con el objetivo de analizar el comportamiento de las más diversas poblaciones biológicas presentes en el ecosistema terrestre.

A través de los años, el control de plagas ha estado principalmente centrado en el uso de insecticidas, pero su uso constante e indiscriminado ha llevado a la resistencia de más de 500 especies de insectos en todo el mundo [5]. En consecuencia, los pesticidas químicos tienen malos resultados en el combate de plagas y causan daños ecológicos, como la reducción de enemigos naturales de las plagas junto a residuos no deseados en productos agrícolas. Estos problemas son más graves en países en desarrollo por la falta de regulación y capacitación adecuada para los agricultores. Debido a estos factores, se ha buscado nuevos métodos de control, y el Manejo Integrado de Plagas (MIP) ha surgido como una opción cada vez más popular entre agricultores, investigadores y formuladores de políticas. El MIP es una estrategia a largo plazo que puede combinar biología, química y técnicas de cultivo, con el objetivo de reducir las poblaciones de plagas a niveles tolerables [38].

Cuando se modelan sistemas ecológicos, generalmente se comienza analizando la evolución temporal de las especies; sin embargo, es importante considerar cómo las especies se distribuyen en el espacio y cómo se mueven en ese entorno. Si solo se tiene en cuenta la evolución temporal, se está asumiendo que el ambiente es homogéneo en términos de distribución espacial y en estos casos, se utilizan modelos con una única variable independiente, que es el tiempo. Para tener en cuenta la distribución espacial de las especies, es necesario agregar otras variables independientes al modelo que representan el espacio, lo que implica una diferencia en los resultados obtenidos en sistemas donde se supone que la distribución es homogénea. Es crucial incorporar una estructura espacial en los modelos matemáticos para el éxito del MIP [20]. Además, la distribución espacial de las poblaciones puede ser heterogénea, lo que implica que el control debe adaptarse según la ubicación espacial [15].

Se especifica la estructura del trabajo, por capítulos. En el primer capítulo, se establecen las bases para comprender el contexto biológico, las estrategias de MIP, así como los fundamentos matemáticos y numéricos que se utilizarán a lo largo del trabajo. En el segundo capítulo, se adentra en el estudio de un modelo basado en ecuaciones diferenciales ordinarias desarrollado por *Silveira* en [11] (para el cual se realizó una modificación en una de sus variables) que describe la evolución temporal de las poblaciones de la plaga *D. citri* y su enemigo natural *T. radiata*. La estrategia de MIP en el contexto de este modelo, y del modelo del siguiente capítulo, se caracteriza por la incorporación de dos componentes cruciales: el control químico mediante la aplicación de pesticidas y el control biológico mediante la liberación del parasitoide *T. radiata*. Con el objetivo de

obtener una mejor comprensión del comportamiento de este modelo con y sin MIP, se realizan simulaciones numéricas utilizando el software Wolfram Mathematica. En el tercer capítulo, se construye un modelo espacio-temporal basado en el modelo previamente desarrollado en el capítulo anterior. Se presenta el modelo en su formulación varacional y se procede a implementar los métodos numéricos previamente descritos en el primer capítulo. A continuación, se desarrolla un algoritmo destinado a su implementación en MATLAB, lo que permite obtener una solución numérica para dicho modelo con y sin MIP. Finalmente, basándose en los resultados obtenidos, se formulan las conclusiones y se realiza una discusión general.

1. Preliminares

1.1. Conceptos Biológicos

Se definen los conceptos biológicos relacionados a los dos organismos que intervienen en la dinámica poblacional que se estudiará.

Diaphorina citri

Comúnmente conocida como psílido asiático de los cítricos, es una pequeña plaga insectil que afecta a los cítricos. A continuación se definen algunos conceptos biológicos de este insecto:

- **Taxonomía:** *D. citri* pertenece al orden Hemiptera y la familia Liviidae [2]. Es un insecto hemíptero, lo que significa que tiene piezas bucales perforadoras-chupadoras para alimentarse de los tejidos vegetales de las plantas.



Figura 1: *D. citri* adulta.

- **Ciclo de vida:** Este se divide en 3 etapas [18]:
 - **Huevo:** Las hembras adultas de *D. citri* colocan los huevos únicamente en las puntas de los brotes en crecimiento y en las yemas axilares, estos son de forma alargada y se asemejan a almendras, tienen un color pálido que luego se vuelve amarillo y finalmente anaranjado justo antes de eclosionar.
 - **Ninfas:** *D. citri* atraviesa cinco instares ninfales, en el primer instar, las ninfas miden 0.25 mm de longitud, mientras que en el quinto instar alcanzan 1.5 a 1.7 mm. Su cuerpo suele ser de color anaranjado amarillento con manchas abdominales, y los esbozos alares (alas en formación) comienzan a aparecer a partir del segundo estadio ninfal [29]. Las ninfas de *D. citri* se alimentan únicamente de brotes en crecimiento y tienden a vivir en grupos.
 - **Adulto:** Recién emergidos presentan el cuerpo de color blanquecino, tornándose posteriormente de color grisáceo. Los adultos de *D. citri* son insectos diminutos, miden entre 3 y 4 mm de longitud. Tienen una cabeza de tono marrón claro y patas de color marrón grisáceo. Las alas son transparentes

con manchas blancas y marrón claro. Los ojos son de un tono marrón oscuro. Durante la alimentación, los adultos tocan la superficie de la planta con la cabeza mientras mantienen el cuerpo inclinado en un ángulo de aproximadamente 45 grados respecto a la horizontal (ver Figura 1). Además, pueden volar o saltar cortas distancias cuando se los molesta.

La duración total del ciclo de vida (ver Figura 2), desde la etapa de huevo hasta la fase adulta, puede durar entre 15 y 47 días. Una vez alcanzada la etapa adulta, la esperanza de vida es de aproximadamente dos meses. En promedio, una hembra de *D. citri* puede poner mas de 800 huevos durante su vida.

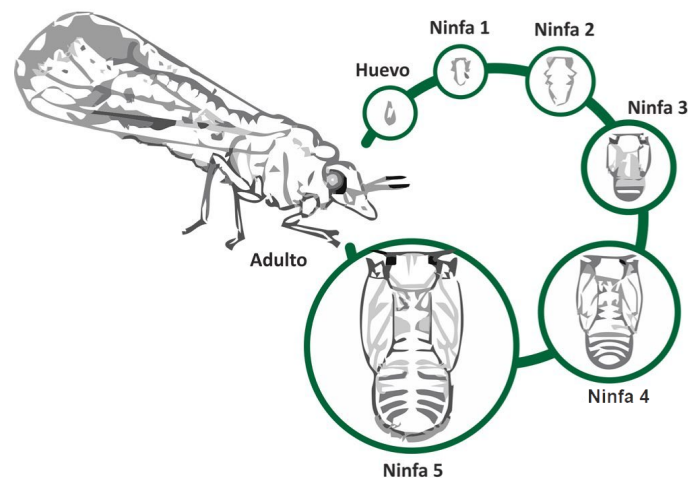


Figura 2: Ciclo de vida de *D. citri*.

- **Alimentación:** *D. citri* se alimenta exclusivamente de la savia de las plantas de cítricos [30]. Sus poblaciones tienden a concentrarse en los nuevos brotes y hojas tiernas de los árboles. La alimentación prolongada por parte de estos insectos puede debilitar a la planta y afectar su crecimiento y rendimiento.
- **Hábitat y distribución:** Esta plaga es originaria de Asia y se ha diseminado a muchas partes del mundo, incluyendo América del Norte y del Sur. Se encuentra principalmente en regiones donde se cultivan cítricos.
- **Daños a los cítricos:** *D. citri* es un vector primario de la bacteria *Candidatus Liberibacter*, uno de los organismos causales de la enfermedad Huanglongbing (HLB) o dragón amarillo (ver Figura 3). Esta enfermedad puede ser devastadora para los cultivos de cítricos, ya que provoca la muerte de los árboles y reduce significativamente la producción de frutas [8].



Figura 3: Enfermedad HLB.

- **Control:** El control de *D. citri* y la prevención de la propagación de HLB son desafíos importantes en la industria de los cítricos. Se utilizan diferentes métodos de manejo, como la aplicación de insecticidas, la eliminación de árboles infectados, la cuarentena de áreas afectadas y la investigación de variedades de cítricos resistentes al HLB.
- **Importancia económica:** *D. citri* y la enfermedad que transmite, HLB, representan una amenaza significativa para la producción de cítricos en todo el mundo, lo que tiene un impacto económico importante en la industria agrícola [1].

D. citri es más activo y prolífico en climas cálidos y húmedos. Las temperaturas óptimas para su desarrollo suelen estar entre los 25°C y 28°C [6]. Sin embargo, este insecto puede sobrevivir en una amplia gama de temperaturas.

Tamarixia radiata

Es una pequeña avispa parasitoide que desempeña un papel importante en el control biológico de *D. citri* [9]. A continuación se definen conceptos biológicos de este insecto:

- **Taxonomía:** *T. radiata* pertenece al orden Hymenoptera y la familia Eulophidae [17]. Estas avispas son pequeñas, generalmente de menos de 0.92 a 1.04 mm de longitud, y son conocidas por ser parasitoides de las ninfas de *D. citri*.



Figura 4: *T. radiata* adulta.

- **Ciclo de vida:** *T. radiata* completa su ciclo de vida en cuatro etapas principales: huevo, larva, pupa y adulto [25]. La hembra adulta (ver Figura 4) busca las ninfas de *D. citri* para poner sus huevos en ellas. Una vez que los huevos eclosionan, las larvas de *T. radiata* se desarrollan dentro de la ninfa huésped, consumiéndola en el proceso.
- **Hábitat y distribución:** *T. radiata* se encuentra en regiones donde *D. citri* y los cítricos son comunes, como partes de Asia, América del Norte y del Sur.
- **Control biológico:** *T. radiata* es un ejemplo de control biológico utilizado en la agricultura para reducir la población de *D. citri*, lo que a su vez ayuda a prevenir la propagación de la enfermedad HLB [35]. Esta estrategia de manejo es preferida sobre el uso de insecticidas porque es más amigable con el medio ambiente y puede contribuir a la preservación de los cultivos de cítricos.

Las hembras adultas de *T. radiata* se alimentan de las ninfas de *D. citri* en sus dos primeros instares y parásita a las ninfas en tercer, cuarto y quinto instar [37]. Una sola hembra de *T. radiata* tiene la capacidad de eliminar más de 500 ninfas de *D. citri* en toda su vida [10].

Manejo Integrado de Plagas (MIP)

Es una estrategia de gestión que utiliza una combinación de métodos y técnicas diversas para minimizar el impacto de las plagas en la agricultura [14]. El MIP se desarrolló en respuesta a las limitaciones y desafíos de depender exclusivamente de pesticidas químicos para el control de plagas. A continuación se presentan los principios y conceptos clave del MIP:

- **Diversificación de métodos:** El MIP utiliza una variedad de métodos de control de plagas en lugar de depender únicamente de pesticidas químicos. Esto incluye el uso de enemigos naturales (depredadores, parasitoides), prácticas culturales (rotación de cultivos, selección de variedades resistentes), control biológico, trampas, barreras físicas y técnicas de manejo ambiental.

- **Monitoreo y toma de decisiones basada en datos:** Se lleva a cabo un monitoreo constante de las poblaciones de plagas y sus enemigos naturales [4]. Con base en estos datos, se toman decisiones informadas sobre cuándo y cómo intervenir.
- **Umbral económico:** El MIP establece umbrales económicos, es decir, niveles de población de plagas que, si se superan, justifican la aplicación de medidas de control [21]. Antes de alcanzar estos umbrales, se pueden tolerar poblaciones de plagas en ciertos niveles sin que causen daños significativos.

1.2. Conceptos Matemáticos

Los principales conceptos matemáticos que se requieren para el entendimiento del trabajo se describen a continuación:

Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Es un conjunto de ecuaciones en las que las tasas de cambio de las variables dependen solo de las propias variables y no de una variable independiente, como el tiempo. Estos sistemas (como (1)), son útiles para modelar sistemas dinámicos cuyos cambios dependen únicamente de las interacciones internas de las variables y no de factores externos como el tiempo o el espacio.

Equilibrio o punto estacionario

Dado un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{1}$$

un punto $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es un equilibrio si y solo si:

$$\begin{aligned}f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0, \\ f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0.\end{aligned}$$

En un equilibrio, las derivadas de todas las variables con respecto al tiempo son nulas, lo que implica que el sistema se encuentra en un estado estacionario. La comprensión de los equilibrios es esencial para el estudio de la estabilidad y la evolución de los sistemas a lo largo del tiempo.

Estabilidad local de un punto de equilibrio

Se refiere al comportamiento de las soluciones de un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales, cuando están cerca de un punto de equilibrio. En otras palabras, se investiga si las pequeñas perturbaciones alrededor del punto de equilibrio tienden a alejarse de él, permanecer cerca o converger nuevamente hacia él con el tiempo [13].

La determinación de la estabilidad local generalmente se realiza a través del análisis de los autovalores de la matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio. Si todos los autovalores tienen partes reales negativas, el punto de equilibrio es estable. Si al menos un autovalor tiene parte real positiva, el punto de equilibrio es inestable. Los detalles acerca de este resultado pueden ser consultado en [7] y [33].

Criterio de Routh-Hurwitz

Criterio que permite determinar la estabilidad local de un sistema y se define de la siguiente forma de acuerdo con [26].

Se considera el polinomio de grado n con coeficientes constantes reales:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n, \quad (2)$$

se definen las n matrices de Hurwitz utilizando los coeficientes del polinomio característico (2):

$$H_1 = \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \dots$$
$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

donde $a_j = 0$ si $j > n$. Todas las raíces del polinomio (2) son negativas o tienen parte real negativa si y solo si los determinantes de todas las matrices de Hurwitz son positivos:

$$\text{Det}(H_j) > 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Una condición necesaria pero no suficiente para que las raíces del polinomio (2) sean negativas o tengan parte real negativa, es que todos los coeficientes sean estrictamente positivos. El criterio de Routh-Hurwitz para polinomios hasta grado 5 se da en la Tabla 1

n	Signos de coeficientes	Condiciones adicionales
2	$a_1 > 0, a_2 > 0$	-
3	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$	$a_1 a_2 > a_3$
4	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$	$a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$
5	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0,$ $a_5 > 0$	$a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4,$ $(a_1 a_4 - a_5) (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$

Tabla 1: Criterios de Routh-Hurwitz.

Sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Es un conjunto de ecuaciones que describen cómo cambian las funciones de varias variables con respecto a una variable t que representa el tiempo y a unas variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ que representan las coordenadas espaciales. Estas ecuaciones se utilizan para modelar una amplia variedad de fenómenos físicos y naturales. Resolver un sistema de EDP implica encontrar las funciones que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente y suele requerir técnicas avanzadas de análisis y cálculo.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de las funciones incógnitas $u_1, u_2, \dots, u_N$ respecto a las variables independientes $t, x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = f_i \left(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_N, \dots \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right), \quad (3)$$

donde $k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leq n_j$, $k_0 < n_j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Como se ve de las ecuaciones anteriores, para cada una de las funciones incógnitas u_i existe un orden superior n_i de las derivadas de esta función que figuran en el sistema considerado. La variable independiente t juega un papel especial entre las variables ya que, en primer lugar, entre las derivadas de orden superior n_i de cada función u_i que aparecen en el sistema dado, debe estar contenida la derivada $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}}$ y, además, el sistema esta resuelto a estas derivadas. El número de ecuaciones es igual al número de funciones incógnitas [34].

1.3. Conceptos Numéricos

Para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales se hace uso de herramientas numéricas bien conocidas y utilizadas, gracias a sus buenas propiedades de convergencia [22], como son el Método de Elementos Finitos, el Método de Crank Nicolson y un esquema del tipo predictor corrector para resolver sistemas que involucran no linealidades. Aquí se proporciona una descripción general de cada uno de ellos:

Método de Elementos Finitos (MEF)

El MEF se utiliza para discretizar el dominio espacial del problema, subdividiéndolo en elementos finitos, que son pequeñas regiones o subdominios. El sistema de EDP se convierte en un sistema de EDO en la variable tiempo, mediante la aproximación de las derivadas espaciales.

Método de Diferencias Finitas (Crank Nicolson)

El Método de Crank-Nicolson es un método numérico para discretizar el tiempo en problemas de EDP. Permite una discretización en pasos de tiempo finito y se basa en un promedio de los valores en los niveles de tiempo anterior y posterior. En el contexto del problema, se aplica este método para reducir el sistema de EDO a un sistema de ecuaciones algebraicas, cuya solución aproxima la solución del sistema de EDP inicial.

Esquema Predictor-Corrector

Este esquema se utiliza para abordar no linealidades. se divide el proceso de avance en el tiempo en dos etapas:

- **Predicción:** Se realiza una estimación inicial de las variables desconocidas utilizando las soluciones obtenidas en el paso anterior o algún otro método de predicción.
- **Corrección:** Se refinan las estimaciones utilizando las no linealidades presentes en el sistema. Esto puede requerir iteraciones hasta converger a una solución satisfactoria.

2. Modelo de la dinámica temporal

Se estudia un modelo en EDO para describir la evolución temporal de las poblaciones de *D. citri* y su enemigo natural *T. radiata*. Después de obtener los puntos de equilibrio de este modelo, se deducen las condiciones locales de estabilidad del sistema. Luego se incorpora una estrategia de MIP al modelo, que consiste en la aplicación de insecticida y liberación de *T. radiata*. Se llevan a cabo simulaciones gráficas mediante el uso del software Wolfram Mathematica y posteriormente se analizan los resultados.

2.1. Formulación y descripción del sistema

El modelo considera tres etapas de desarrollo para *D. citri*, cuyas densidades poblacionales están representadas respectivamente por: $N_1(t)$ ninfas en el primero y segundo instar, $N_2(t)$ ninfas en tercer, cuarto y quinto instar, y $F(t)$ hembras adultas. Para su enemigo natural *T. radiata* solo se considera la etapa adulta con densidad poblacional $P(t)$ que depreda y parásita respectivamente a $N_1(t)$ y $N_2(t)$.

El sistema que describe la dinámica poblacional natural de las dos especies es:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \chi F \left(1 - \frac{N_1 + N_2}{K}\right) - (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1})N_1 - \frac{\gamma N_1 P}{1 + \phi N_1}, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \sigma_{N_1} N_1 - (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})N_2 - \frac{\epsilon N_2 P}{1 + \beta N_2}, \\ \frac{dF}{dt} &= \psi \sigma_{N_2} N_2 - \mu_F F, \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{\omega \gamma N_1 P}{1 + \phi N_1} + \frac{\theta \epsilon N_2 P}{1 + \beta N_2} - \mu_P P,\end{aligned}\tag{4}$$

donde:

- $\chi \left(1 - \frac{N_1 + N_2}{K}\right)$ es la tasa de oviposición.
- σ_{N_1} y σ_{N_2} son las tasas per cápita de transición.
- ψ es la proporción de hembras adultas.
- $\frac{\gamma N_1}{1 + \phi N_1}$ es la tasa a la cual se depreda una presa N_1 , donde el predador invierte un tiempo ϕ .
- $\frac{\epsilon N_2}{1 + \beta N_2}$ es la tasa a la cual el hospedero N_2 es parasitado, donde el parasitoide invierte un tiempo β .
- ω y θ son los factores de conversión de presas para predador y de hospederos para parasitoide respectivamente.
- μ_{N_1} , μ_{N_2} , μ_F , μ_P son las tasas de mortalidad per cápita de cada población.

2.2. Puntos de equilibrio

El sistema (4) tiene tres puntos de equilibrio:

El punto de equilibrio trivial, que corresponde a la extinción de todas las poblaciones:

$$E_0 = (0, 0, 0, 0),$$

El punto de equilibrio que corresponde a la extinción de la población depredador-parasitoide y la persistencia de las poblaciones de plagas:

$$E_1 = (n_1^1, n_2^1, f^1, 0),$$

donde

$$\begin{aligned} n_1^1 &= \frac{K(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})q}{\sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi (\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})}, \\ n_2^1 &= \frac{Kq}{\sigma_{N_2} \chi \psi (\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})}, \\ f^1 &= \frac{Kq}{\mu_F \chi (\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})}, \end{aligned} \tag{5}$$

con $q = \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \phi - (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1})(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})\mu_F$, el cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$q = \mu_F(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1})(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})(R_0 - 1), \tag{6}$$

donde

$$R_0 = \frac{\sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi}{\mu_F(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1})(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})}, \tag{7}$$

R_0 se interpreta como el umbral de supervivencia.

Y el punto de equilibrio donde persisten todas las poblaciones

$$E_2 = (n_1^*, n_2^*, f^*, p^*),$$

el cual no es calculado en este trabajo debido a su complejidad.

2.3. Estabilidad local

El análisis de la estabilidad local de cada uno de estos puntos de equilibrio se basa en las raíces λ de la ecuación característica

$$\text{Det}(J(E_i) - \lambda I) = 0, \quad (8)$$

donde $J(E_i)$, $i = 0, 1, 2$, es la matriz jacobina del sistema evaluada en el punto de equilibrio E_i e I es la matriz identidad. El equilibrio es estable si, y sólo si, todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa [7] [33].

La matriz jacobina J asociada al sistema (4) es la siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma_{N_1} - \mu_{N_1} - \frac{F\chi}{K} - \frac{\gamma P}{1-N_1\phi} - \frac{\gamma N_1 P \phi}{(1-N_1\phi)^2} & -\frac{F\chi}{K} & \chi \left(1 - \frac{N_1+N_2}{K}\right) & -\frac{\gamma N_1}{1-N_1\phi} \\ \sigma_{N_1} & -\sigma_{N_2} - \mu_{N_2} - \frac{P\epsilon}{\beta N_2+1} + \frac{\beta N_2 P \epsilon}{(\beta N_2+1)^2} & 0 & -\frac{N_2 \epsilon}{\beta N_2+1} \\ 0 & \sigma_{N_2} \psi & -\mu_F & 0 \\ \frac{\gamma P \omega}{N_1 \phi+1} - \frac{\gamma N_1 P \omega \phi}{(N_1 \phi+1)^2} & \frac{\theta P \epsilon}{\beta N_2+1} - \frac{\beta \theta N_2 P \epsilon}{(\beta N_2+1)^2} & 0 & -\mu_P + \frac{\theta N_2 \epsilon}{\beta N_2+1} + \frac{\gamma N_1 \omega}{N_1 \phi+1} \end{pmatrix}.$$

Se evalúa E_0 en la matriz jacobiana J y se obtiene lo siguiente:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\sigma_{N_1} - \mu_{N_1} & 0 & \chi & 0 \\ \sigma_{N_1} & -\sigma_{N_2} - \mu_{N_2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{N_2} \psi & -\mu_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_P \end{pmatrix}, \quad (9)$$

luego se evalúa E_0 en la ecuación (8) y se obtiene:

$$(\mu_P + \lambda)((\mu_F + \lambda)(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \lambda)(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \lambda) - \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi) = 0, \quad (10)$$

para que esta expresión sea cero

$$\lambda = -\mu_P \quad \text{o} \quad (11)$$

$$(\mu_F + \lambda)(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \lambda)(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \lambda) - \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi = 0. \quad (12)$$

Se expande (12) y se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \mu_F + \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \lambda - \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi + \sigma_{N_1} \mu_{N_2} \mu_F + \sigma_{N_1} \mu_{N_2} \lambda \\ & + \sigma_{N_1} \mu_F \lambda + \sigma_{N_1} \lambda^2 + \mu_{N_1} \sigma_{N_2} \mu_F + \mu_{N_1} \sigma_{N_2} \lambda + \mu_{N_1} \mu_{N_2} \mu_F + \mu_{N_1} \mu_{N_2} \lambda \\ & + \mu_{N_1} \mu_F \lambda + \mu_{N_1} \lambda^2 + \sigma_{N_2} \mu_F \lambda + \sigma_{N_2} \lambda^2 + \mu_{N_2} \mu_F \lambda + \mu_{N_2} \lambda^2 + \mu_F \lambda^2 + \lambda^3 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

se ordenan términos y se obtiene el polinomio:

$$\lambda^3 + \varkappa_1 \lambda^2 + \varkappa_2 \lambda + \varkappa_3 = 0, \quad (14)$$

donde

$$\varkappa_1 = \sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_2 = & \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} + \sigma_{N_1} \mu_{N_2} + \sigma_{N_1} \mu_F + \mu_{N_1} \sigma_{N_2} + \mu_{N_1} \mu_{N_2} + \mu_{N_1} \mu_F + \sigma_{N_2} \mu_F \\ & + \mu_{N_2} \mu_F, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\varkappa_3 = \sigma_{N_1} \mu_{N_2} \mu_F - \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi + \sigma_{N_1} \mu_{N_2} \mu_F + \mu_{N_1} \sigma_{N_2} \mu_F + \mu_{N_1} \mu_{N_2} \mu_F, \quad (17)$$

además se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \varkappa_1 & 1 \\ \varkappa_3 & \varkappa_2 \end{vmatrix} = & (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \mu_F)(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F)(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) \\ & + \sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi. \end{aligned} \quad (18)$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, y $\begin{vmatrix} \varkappa_1 & 1 \\ \varkappa_3 & \varkappa_2 \end{vmatrix}$ son positivos, para que el polinomio (14) satisfaga las condiciones del Criterio de Routh-Hurwitz $\varkappa_3$ tiene que ser positivo, esto sucede si $R_0 < 1$.

Se concluye que E_0 es biológicamente viable para cualquier elección de parámetros positivos del sistema y es localmente estable si $R_0 < 1$.

Ahora para analizar la estabilidad local del punto de equilibrio E_1 , se calcula la ecuación (8) evaluada en E_1 y se obtiene lo siguiente:

$$XY = 0, \quad (19)$$

donde

$$\begin{aligned} X = & Kq \left(\frac{\theta \varepsilon}{\sigma_{N_2} \chi \psi (\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + \beta Kq} + \frac{\gamma \omega (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})}{\sigma_{N_1} \sigma_{N_2} \chi \psi (\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + Kq \phi (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} \right) \\ & - \mu_P - \lambda \end{aligned} \quad (20)$$

y

$$Y = -\frac{(\mu_F + \lambda)((\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \lambda)(\mu_F(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \lambda)(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + q) + \sigma_{N_1}q)}{\mu_F(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} + \sigma_{N_1}\sigma_{N_2}\chi\psi - q \quad (21)$$

De la expresión (20) se concluye que si $X = 0$, entonces

$$\lambda = Kq \left(\frac{\theta\epsilon}{\sigma_{N_2}\chi\psi(\sigma_{N_1} + c + \mu_{N_2}) + \beta Kq} + \frac{\gamma\omega(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})}{\sigma_{N_1}\sigma_{N_2}\chi\psi(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + Kq\phi(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} \right) - \mu_P$$

esta raíz es negativa si $R_1 < 1$, donde:

$$R_1 = \frac{Kq}{\mu_P} \left(\frac{\theta\epsilon}{\sigma_{N_2}\chi\psi(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + \beta Kq} + \frac{\gamma\omega(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})}{\sigma_{N_1}\sigma_{N_2}\chi\psi(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + Kq\phi(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} \right). \quad (22)$$

De la expresión (21) si $Y = 0$, se organizan términos y se obtiene el siguiente polinomio:

$$\lambda^3 + \varpi_1\lambda^2 + \varpi_2\lambda + \varpi_3 = 0, \quad (23)$$

donde

$$\varpi_1 = \frac{q}{\mu_F(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} + \sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varpi_2 = & \mu_F(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1})(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + \frac{q}{\mu_F} \\ & + \frac{q}{\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\varpi_3 = q, \quad (26)$$

además se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \varpi_1 & 1 \\ \varpi_3 & \varpi_2 \end{vmatrix} = & \sigma_{N_1} \left(\frac{q(\mu_{N_1} + 2(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F))}{\mu_F(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} + 2\mu_{N_1}(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F) + 3\mu_F(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})^2 + \mu_F^2 \right) \\ & + \mu_{N_1} \left(\frac{2q(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F)}{\mu_F(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} + 3\mu_F(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})^2 + \mu_F^2 \right) + \sigma_{N_1}^2 \left(\frac{q}{\mu_F(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F \right) \\ & + \frac{(\mu_F(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2})(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) + q)(\mu_F^2(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F) + q(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F))}{\mu_F^2(\sigma_{N_1} + \sigma_{N_2} + \mu_{N_2})^2} + \mu_{N_1}^2(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2} + \mu_F). \end{aligned} \quad (27)$$

El punto de equilibrio E_1 es biológicamente viable si $R_0 > 1$, lo que implica que $q > 0$. Luego, $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ y $\begin{vmatrix} \varpi_1 & 1 \\ \varpi_3 & \varpi_2 \end{vmatrix}$ son positivos, por tanto el polinomio (23) satisface las condiciones del Criterio de Routh-Hurwitz. Se concluye que E_1 es localmente estable si $R_1 < 1$.

Aunque el punto de equilibrio E_2 no fue calculado, en las simulaciones se percibe que es biológicamente viable si $R_0 > 1$ y $R_1 > 1$.

2.4. Simulación sin MIP

Se emplea el software Wolfram Mathematica en el sistema (4), para llevar a cabo simulaciones gráficas con el objetivo de analizar el comportamiento en el tiempo de las poblaciones de *D. citri* y *T. radiata*. Los valores para los parámetros se detallan en el Tabla 2, es importante señalar que tanto estos valores como las condiciones iniciales derivan del trabajo de *Silveira* [11]. Estas simulaciones gráficas abarcan varios escenarios distintos: en primer lugar, el comportamiento de *D. citri* en ausencia de *T. radiata*, y en segundo lugar, el comportamiento de *D. citri* en coexistencia con *T. radiata*.

Parámetro	Valor	Descripción
χ	2.1	Numero de huevos por hembra de F .
K	2.1 y 5	Capacidad de carga del sistema.
σ_{N_1}	0.18	Tasa de transición de N_1 a N_2 .
μ_{N_1}	0.01	Tasa de mortalidad de N_1 .
γ	0.3	Tasa de predacion de P a N_1 .
ϕ	1	Tiempo invertido en la predacion de P a N_1 .
σ_{N_2}	0.1	Tasa de transición de N_2 a F .
μ_{N_2}	0.01	Tasa de mortalidad de N_2 .
ε	0.15	Tasa de parasitismo de P a N_2 .
β	1	Tiempo invertido en parasitar P a N_2 .
ψ	2	Tasa de aumento de F .
μ_F	0.3	Tasa de mortalidad de F .
ω	1.88	Tasa con la que aumenta P respecto a N_1 .
θ	2	Tasa con la que aumenta P respecto a N_2 .
μ_p	0.41	Tasa de mortalidad de P .

Tabla 2: Valores de los parámetros para el sistema (4).

Escenario 1: *D. citri* en ausencia de *T. radiata*

En este escenario, se considera exclusivamente la población de *D. citri*, sin la influencia de *T. radiata* u otros factores externos relevantes. El objetivo principal es observar cómo evoluciona la población de *D. citri* a lo largo del tiempo en condiciones aisladas.

En la Figura 5 las poblaciones N_1 y N_2 tienden a disminuir, evolucionando hacia un equilibrio asintótico constante, que está definido de acuerdo con la capacidad de carga. Se puede observar un incremento en la población F estabilizándose también a lo largo del tiempo. Aumentando la capacidad de carga K , se observa en la Figura 6 que todas las poblaciones de *D. citri* crecen, evolucionando hacia un equilibrio asintótico constante.

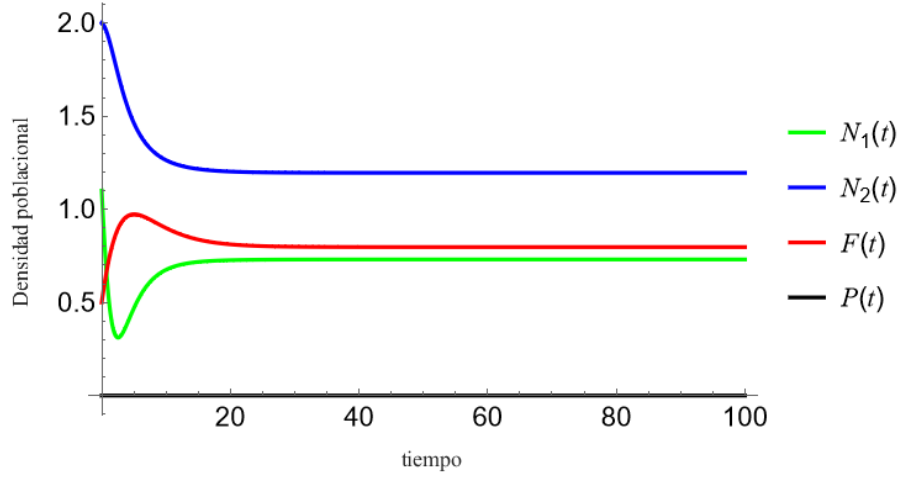


Figura 5: Densidades poblacionales del sistema (4). Considerando la dinámica natural de *D. citri* en ausencia de *T. radiata* en el tiempo, $K = 2.1$, condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0)$, $R_0 = 12.0574$ y $R_1 = 0.979092$.

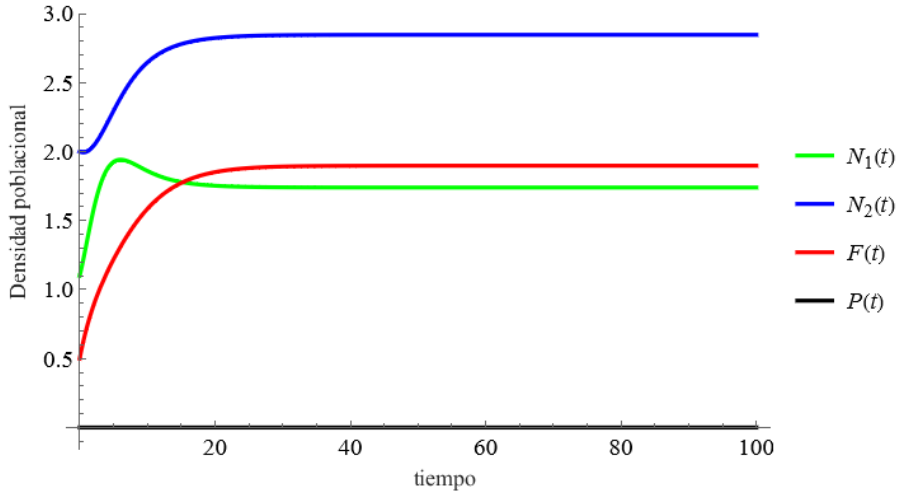


Figura 6: Densidades poblacionales del sistema (4). Considerando la dinámica natural de *D. citri* en ausencia de *T. radiata* en el tiempo, $K = 5$, condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0)$, $R_0 = 12.0574$ y $R_1 = 1.41489$.

Escenario 2: *D. citri* en presencia de *T. radiata*

En este escenario, se incorpora la interacción entre *D. citri* y *T. radiata* mediante una pequeña cantidad en la condición inicial ($P_0 = 0.75$). Aquí, el objetivo es analizar cómo las dos poblaciones coexisten y cómo se afectan mutuamente en un entorno compartido.

Comparando la Figura 7 con la Figura 5, se observa que la inclusión de una población inicial de *T. radiata* afecta un poco el equilibrio de las poblaciones de *D. citri*. Note que *T. radiata* persiste a lo largo de cierto tiempo con tendencia a desaparecer. Aumentando la capacidad de carga K , respecto a la Figura 6 se observa en la Figura 8 un comportamiento oscilatorio con amplitud cada vez menor en cada una de las poblaciones, las cuales a lo largo del tiempo se estabilizan hacia un equilibrio asintótico constante.

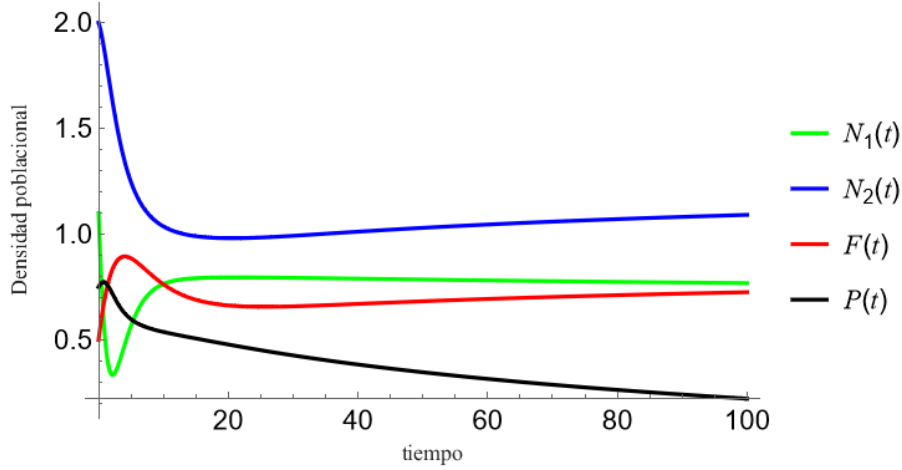


Figura 7: Densidades poblacionales del sistema (4). Considerando la dinámica natural de *D. citri* y *T. radiata* en el tiempo, $K = 2.1$, condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0.75)$, $R_0 = 12.0574$ y $R_1 = 0.979092$.

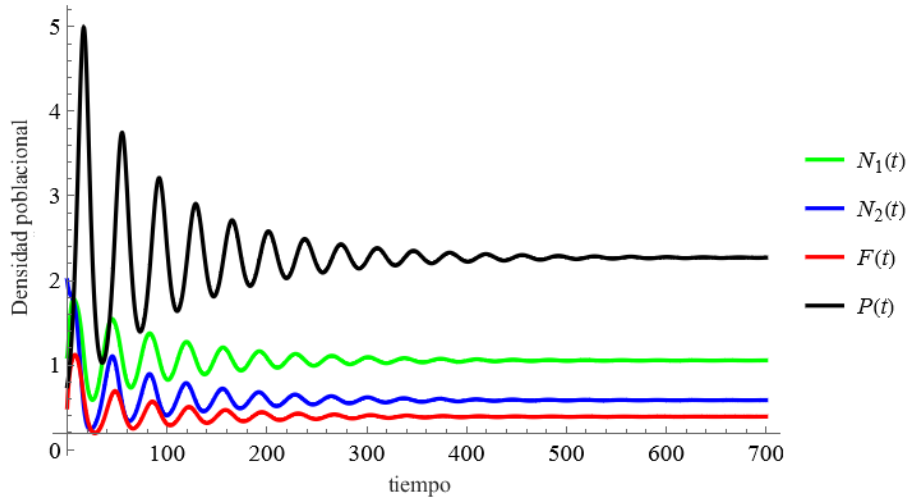


Figura 8: Densidades poblacionales del sistema (4). Considerando la dinámica natural de *D. citri* y *T. radiata* en el tiempo, $K = 5$, condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0.75)$, $R_0 = 12.0574$ y $R_1 = 1.41489$.

Estas simulaciones gráficas se han llevado a cabo con el propósito de arrojar luz sobre el comportamiento temporal de las poblaciones de *D. citri*, tanto en situaciones aisladas como en presencia de *T. radiata*. Este enfoque permite obtener una visión completa

de las dinámicas poblacionales y las posibles relaciones entre estas dos especies, lo que resultará valioso para el análisis y comprensión del sistema estudiado.

2.5. Incorporación de MIP

La metodología propuesta para el MIP se basa en una estrategia que combina dos acciones humanas: la aplicación de insecticida y la liberación controlada de enemigos naturales en una cantidad específica. Estas medidas se ejecutan únicamente cuando la densidad poblacional de hembras adultas de la plaga excede un Umbral Económico (UE), en la agricultura este umbral determina el punto en el que los costos de control de la plaga son iguales a los beneficios obtenidos al prevenir los daños causados por la misma. Bajo este enfoque, se asume que el insecticida afecta de manera uniforme a todos los organismos implicados en el MIP propuesto.

Para *D. citri* no existe un nivel de control aceptable ya que, además de alimentarse de las plantas, *D. citri* es vector de una enfermedad, por lo que el nivel de control adoptado es nulo, es decir, en presencia de una planta infestada, se debe de llevar a cabo el control. Sin embargo, en la práctica esto puede llegar a ser extremadamente costoso para el agricultor.

El sistema que describe la incorporación del MIP queda descrito de la siguiente forma:

- Mientras la población de hembras F este por debajo del UE. El sistema que describe la dinámica poblacional de *D. citri* y *T. radiata* en el tiempo es (4).
- En el momento en que la densidad poblacional de hembras F supera el UE, la intervención humana implica la aplicación de insecticida (δ_c) y la liberación de hembras adultas de *T. radiata* (ρ). Se asume que todas las poblaciones disminuyen a una tasa de $\delta_c = 1 - \frac{UE}{F}$ y a su vez la población P aumenta a una tasa ρ , esto es

$$\begin{aligned} N_1(t^+) &= (1 - \delta_c)N_1(t), \\ N_2(t^+) &= (1 - \delta_c)N_2(t), \\ F(t^+) &= (1 - \delta_c)F(t), \\ P(t^+) &= (1 - \delta_c)P(t) + \rho, \end{aligned} \tag{28}$$

donde $N_1(t^+)$, $N_2(t^+)$, $F(t^+)$, $P(t^+)$ son las densidades poblacionales en el instante en que la estrategia de control es aplicada.

La intervención anterior se repetirá cada vez que la densidad poblacional de *D. citri* adulta alcance el UE.

Escenario 3: *D. citri* con MIP

Se proporcionan ejemplos ilustrativos de la aplicación de MIP, para ello se usaron los mismos parámetros y condiciones iniciales que se usaron en la Figura 8. Para incorporar MIP, debemos establecer un UE y una cantidad ρ de *T. radiata* a liberar.

La Figura 9 nos muestra el comportamiento de las poblaciones para un $UE = 0.3$. Si $\rho = 2$ la densidad total de insectos de *T. radiata* liberados es de 26 en un tiempo $T = 200$. El valor de $\delta_c = 0.032$ señala que en la ultima instancia de aplicación se requirió una cantidad adecuada de pesticida para erradicar al menos el 3.2% de la población de *D. citri*. Aumentando el UE a 0.5 y usando el mismo $\rho = 2$ de la Figura 9, en la Figura 10 se ilustra el comportamiento de las poblaciones, liberando una densidad total de insectos de *T. radiata* de 12. En esta situación específica, en la ultima aplicación se utilizó la cantidad apropiada de pesticida para eliminar al menos el 1.9% de la población de *D. citri*. Se puede apreciar la variación del periodo de liberación en este caso.

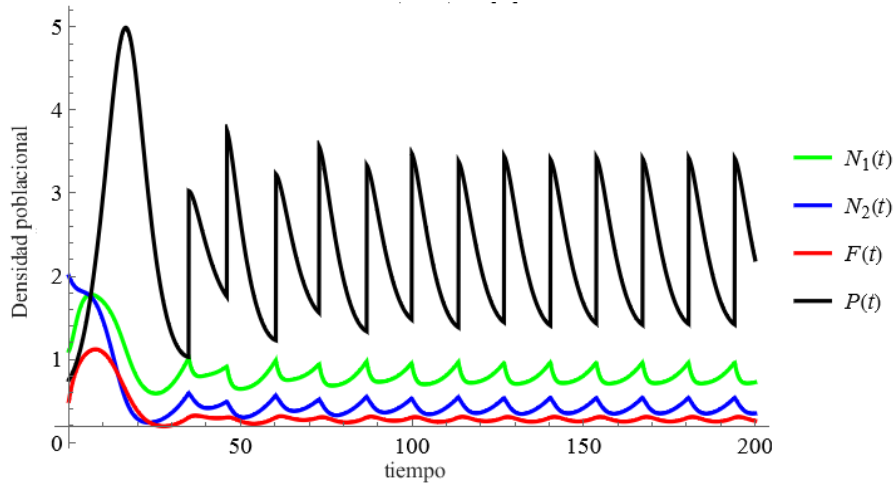


Figura 9: Densidades poblacionales del sistema (4). Considerando MIP, $K = 5$, $UE = 0.3$, $\rho = 2$, condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0.75)$, $R_0 = 12.0574$ y $R_1 = 1.41489$.

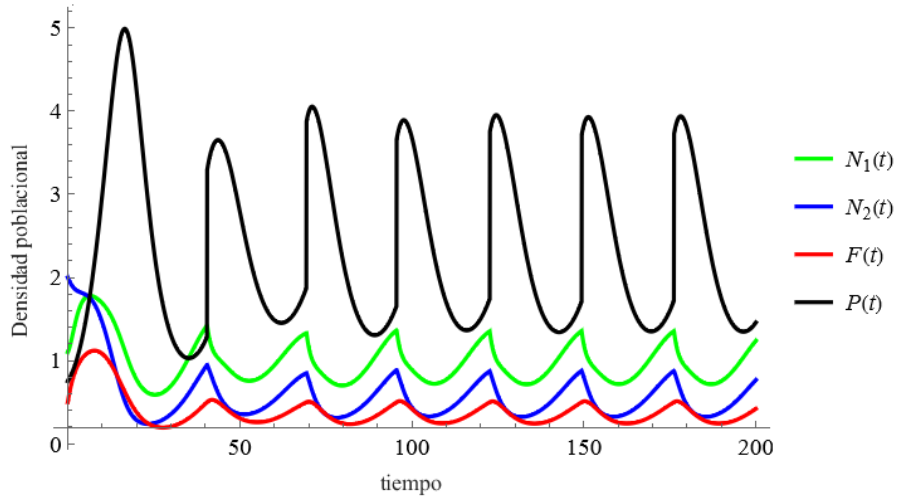


Figura 10: Densidades poblacionales del sistema (4). Considerando MIP, $K = 5$, $UE = 5$, $\rho = 2$, $\rho = 2$, condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0.75)$, $R_0 = 12.0574$ y $R_1 = 1.41489$.

2.6. Conclusión

La estrategia de MIP propuesta, demostró ser eficiente en las simulaciones, manteniendo la población de plagas en niveles tolerables en todos los casos analizados. La aplicación de MIP se vuelve periódica, esto es muy importante desde el punto de vista de la aplicación concreta de esta estrategia, ya que, en estos casos, después de cierto tiempo, el productor ya no necesita medir la población de plagas antes de aplicar las técnicas de control. Las simulaciones nos muestran que, para aumentar este periodo de aplicación en el modelo temporal es necesario aumentar el umbral económico.

3. Modelo de la dinámica espacio-temporal

Se estudia un modelo en EDP que describe la evolución espacio temporal de las poblaciones de *D. citri* y su enemigo natural *T. radiata*. Se transforma el modelo a su forma variacional y luego se procede a aproximar su solución de manera numérica. Luego, se desarrolla un algoritmo específico destinado a su implementación en MATLAB, se hacen simulaciones en varios escenarios y finalmente presentamos nuestras conclusiones.

3.1. Formulación y descripción del sistema

A partir del modelo descrito en (4), se construye el modelo espacio temporal. Los componentes espaciales correspondientes a los términos de dispersión y advección (o migración) están presentes solo para *D. citri* adulta y *T. radiata*. Esto se debe al supuesto de que las ninfas de *D. citri* permanecen en los brotes de los cítricos sin desplazarse.

Otros supuestos adicionales relacionados con el desplazamiento, el comportamiento y el control de *D. citri* y *T. radiata* son los siguientes: Se supone que *D. citri* y *T. radiata* se mueven aleatoriamente en cualquier dirección, esto conduce a una ecuación de difusión que tiene en cuenta la caminata aleatoria correlacionada o no con otros factores, como por ejemplo la heterogeneidad del paisaje, lo cual será modelado mediante los coeficientes de dispersión representados por las constantes α_D y α_T para *D. citri* y *T. radiata* respectivamente. Además, cuando *D. citri* y *T. radiata* son estimulados por atrayentes o cuando son desplazados por el viento o otros factores ambientales, se desplazan preferentemente en determinadas direcciones, en estos casos, se debe incorporar términos de advección para simular esta dinámica, que se explicita mediante el vector constante $\mathbb{W} = (\omega_1, \omega_2)$, que en este caso representa los campos de velocidades relacionados con el movimiento migratorio, que pueden depender o no del espacio.

El modelo con dinámica espacio-temporal es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= \chi F \left(1 - \frac{N_1 + N_2}{K} \right) - (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}) N_1 - \frac{\gamma N_1 P}{1 + \phi N_1}, \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= \sigma_{N_1} N_1 - (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) N_2 - \frac{\varepsilon N_2 P}{1 + \beta N_2}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \alpha_D \Delta F - \nabla(\mathbb{W}F) + \psi \sigma_{N_2} N_2 - \mu_F F, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \alpha_T \Delta P - \nabla(\mathbb{W}P) + \frac{\omega \gamma N_1 P}{1 + \phi N_1} + \frac{\theta \varepsilon N_2 P}{1 + \beta N_2} - \mu_P P, \end{aligned} \tag{29}$$

definido en el dominio $Q = \Omega \times (0, T]$, donde $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

Con condiciones de frontera tipo Neuman homogéneas, definidas para todo $(x, y) \in \partial\Omega$, donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω y η es el vector normal unitario externo sobre $\partial\Omega$, esto es

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad (30)$$

y las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} N_1(0, X) &= N_{10}(X) \geq 0, \\ N_2(0, X) &= N_{20}(X) \geq 0, \\ F(0, X) &= F_0(X) \geq 0, \\ P(0, X) &= P_0(X) \geq 0, \end{aligned} \quad (31)$$

definidas para todo $X = (x, y) \in \Omega$, donde Ω es un dominio abierto acotado de $\mathbb{R}^2$, cuya frontera $\partial\Omega$ es de clase C^2 casi en todas partes.

3.2. Formulaci3n variacional

Es necesario transformar el sistema (29) dado en su formulaci3n fuerte, en la formulaci3n d3bil o variacional esto con el fin de aplicar los m3todos num3ricos. Para ello se utilizan las condiciones de contorno (30), y se debe prestar especial atenci3n a los espacios en los que se desarrollar3 la forma d3bil.

El espacio de funciones de prueba se define como

$$\mathcal{V} = H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2((0, T], \mathcal{U}) : \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega) \text{ y } \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (32)$$

con $\mathcal{U}$ el espacio definido por

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad (33)$$

aqu3 H^1 es un espacio de Sobolev de orden 1 y L^2 es un espacio funcional cuadrado integrable con integraci3n en el sentido de Lebesgue. Adem3s, las inclusiones

$$H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset L^2(\Omega),$$

donde H_0^1 es un espacio de Sobolev con soporte compacto.

Se definen los productos internos de los espacios anteriores, de la siguiente manera:

$$(u|v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u v d\mu \quad \text{y} \quad (34)$$

$$(u|v)_{H^1(\Omega)} = (u|v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big| \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big| \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{L^2(\Omega)}. \quad (35)$$

Para obtener la formulación débil, se fija t y cada término de las ecuaciones del sistema (29) se multiplica por una función de prueba $v \in \mathcal{V}$. Luego se realiza la integración en el sentido de Lebesgue y usando la notación de producto interior (34), donde para simplificar la escritura del problema variacional se denota $(u|v)_{L^2(\Omega)}$ como $(u|v)$ y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} | v \right) + (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}) (N_1 | v) = \\
& \chi (F | v) - \frac{\chi}{K} (FN_1 | v) - \frac{\chi}{K} (FN_2 | v) - \gamma \left(\frac{N_1 P}{1 + \phi N_1} | v \right), \\
& \left(\frac{\partial N_2}{\partial t} | v \right) + (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) (N_2 | v) = \\
& \sigma_{N_1} (N_1 | v) - \varepsilon \left(\frac{N_2 P}{1 + \beta N_2} | v \right), \tag{36} \\
& \left(\frac{\partial F}{\partial t} | v \right) - \alpha_D (\Delta F | v) + \mu_F (F | v) + \omega_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x} | v \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial F}{\partial y} | v \right) = \\
& \psi \sigma_{N_2} (N_2 | v), \\
& \left(\frac{\partial P}{\partial t} | v \right) - \alpha_T (\Delta P | v) + \mu_P (P | v) + \omega_1 \left(\frac{\partial P}{\partial x} | v \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial P}{\partial y} | v \right) = \\
& \omega \gamma \left(\frac{N_1 P}{1 + \phi N_1} | v \right) + \theta \varepsilon \left(\frac{N_2 P}{1 + \beta N_2} | v \right),
\end{aligned}$$

donde ω_1 y ω_2 son las componentes del vector constante $\mathbb{W} = (\omega_1, \omega_2)$, por lo tanto:

$$(\mathbb{W} \nabla U | v) = \omega_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} | v \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} | v \right).$$

En el término que involucra el laplaciano, se aplica la identidad Green de la siguiente forma:

Sea $U = U(t, x, y) = (N_1, N_2, F, P)$ y $v = v(x, y)$, entonces :

$$\begin{aligned}
-\alpha_U (\Delta U | v) &= \alpha_U (\nabla U | |\nabla v|)_{\Omega} - \alpha_U \left\langle \frac{\partial U}{\partial \eta} | v \right\rangle_{\partial \Omega}, \\
&= \alpha_U (\nabla U | |\nabla v|)_{\Omega},
\end{aligned} \tag{37}$$

el segundo término del lado derecho de (37) es igual a cero debido a las condiciones de frontera (30).

Por lo tanto, la formulación variacional del sistema queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} |v \right) + (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}) (N_1 |v) = \\
& \chi(F|v) - \frac{\chi}{K} (FN_1|v) - \frac{\chi}{K} (FN_2|v) - \gamma \left(\frac{N_1 P}{1 + \phi N_1} |v \right), \\
& \left(\frac{\partial N_2}{\partial t} |v \right) + (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) (N_2 |v) = \\
& \sigma_{N_1} (N_1 |v) - \varepsilon \left(\frac{N_2 P}{1 + \beta N_2} |v \right), \tag{38} \\
& \left(\frac{\partial F}{\partial t} |v \right) + \alpha_D (\nabla F || \nabla v) + \mu_F (F|v) + \omega_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x} |v \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial F}{\partial y} |v \right) = \\
& \psi \sigma_{N_2} (N_2 |v), \\
& \left(\frac{\partial P}{\partial t} |v \right) + \alpha_T (\nabla P || \nabla v) + \mu_P (P|v) + \omega_1 \left(\frac{\partial P}{\partial x} |v \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial P}{\partial y} |v \right) = \\
& \omega \gamma \left(\frac{N_1 P}{1 + \phi N_1} |v \right) + \theta \varepsilon \left(\frac{N_2 P}{1 + \beta N_2} |v \right).
\end{aligned}$$

3.3. Aproximación numérica

Se emplean herramientas numéricas ampliamente reconocidas y altamente efectivas gracias a sus sobresalientes propiedades de convergencia. Estas herramientas incluyen el Método de Elementos Finitos (Galerkin Standard) para la discretización espacial, el Método de Diferencias Finitas (Crank-Nicolson) para la discretización temporal, y un esquema tipo predictor-corrector para abordar las no lineales.

3.3.1. Discretización espacial

Utilizando la forma débil (38) se realiza la discretización de las variables espaciales mediante la técnica Galerkin Standard del método de los elementos finitos, donde en vez de obtener funciones en el espacio $\mathcal{V}$, se obtienen numéricamente aproximaciones de la forma:

$$U(t, x, y) \approx U_h(t, x, y) = \sum_{j=1}^{N_h} U_j(t) \varphi_j(x, y), \tag{39}$$

donde $U = U(t, x, y) = (N_1, N_2, F, P)$, $U_h \in \mathcal{V}$ y $U_j = (N_{1j}, N_{2j}, F_j, P_j)$ son coeficientes a determinar, ya que las funciones de base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ están dadas. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{\partial U_h}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{dU_j}{dt} \varphi_j, \\
\frac{\partial U}{\partial x} &\approx \frac{\partial U_h}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N_h} U_j \frac{d\varphi_j}{dx}, \\
\frac{\partial U}{\partial y} &\approx \frac{\partial U_h}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N_h} U_j \frac{d\varphi_j}{dy},
\end{aligned} \tag{40}$$

y llamando $\mathcal{V}_h$ al subespacio $\mathcal{V}$ de dimensión $N_h < +\infty$ generado por las funciones base $\varphi_j(x, y)$ de $\mathcal{V}_h$.

Intuitivamente, la idea central del método de los elementos finitos es referirse a un método tradicional de resolución analítica de ecuaciones diferenciales parciales llamado separación de variables, que asume la solución como un producto de funciones independientes sobre variables temporales y espaciales. En la técnica de Galerkin, también se tiene esta separación, no de la solución, sino del espacio en el que buscamos esta solución (similar al intento de descomponer $\mathcal{V}$ como una suma directa de subespacios convenientes, excepto que aquí la descomposición no es una descomposición directa).

La elección de las funciones de prueba φ_i se realiza utilizando elementos finitos triangulares de primer orden, que consiste en la construcción de una malla de elementos finitos bajo el dominio Ω , esto normalmente significa que el dominio discretizado Ω_h ya no corresponde al original, sino que en un cierto sentido se acerca, cuando los tamaños de los triángulos mayores en cada discretización van a cero, el dominio discretizado tiende al original, sin embargo, mantenemos la misma identificación, es decir, Ω , sin pérdida de información.

Estas funciones base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$ se definen globalmente de tipo lineal por partes y cumplen la condición

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \tag{41}$$

donde (x_j, y_j) son las coordenadas j -ésimas en la malla. Estas funciones se construyen como polinomios que imponen un orden de continuidad con cada elemento adyacente. Así, estos polinomios resultan ser funciones continuas por partes en el dominio completo, obteniendo así una función piramidal para cada nodo que es lineal por partes, asumiendo el valor 1 en el nodo j -ésimo y 0 en caso contrario, (ver Figura 11).

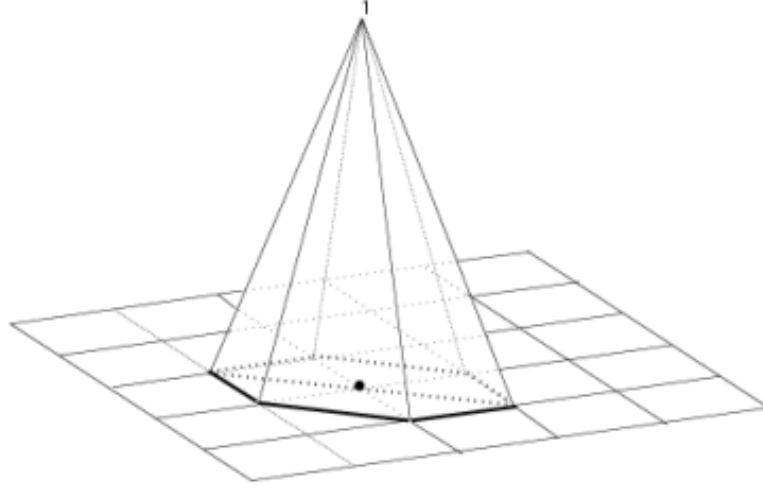


Figura 11: Gráfico de la función piramidal para el nodo j.

Sustituyendo las expresiones (39) y (40) en la formulación débil (38) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{dN_{1j}}{dt} \varphi_j |v \right) + (\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}) \left(\sum_{j=1}^{N_h} N_{1j} \varphi_j |v \right) = \\
 & \chi \left(\sum_{j=1}^{N_h} F_j \varphi_j |v \right) - \frac{\chi}{K} \left(\sum_{j=1}^{N_h} F_j \varphi_j \sum_{l=1}^{N_h} N_{1l} \varphi_l |v \right) - \frac{\chi}{K} \left(\sum_{j=1}^{N_h} F_j \varphi_j \sum_{l=1}^{N_h} N_{2l} \varphi_l |v \right) - \gamma \left(\frac{\sum_{j=1}^{N_h} N_{1j} \varphi_j \sum_{l=1}^{N_h} P_l \varphi_l}{1 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} N_{1k} \varphi_k} |v \right), \\
 & \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{dN_{2j}}{dt} \varphi_j |v \right) + (\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) \left(\sum_{j=1}^{N_h} N_{2j} \varphi_j |v \right) = \\
 & \sigma_{N_1} \left(\sum_{j=1}^{N_h} N_{1j} \varphi_j |v \right) - \varepsilon \left(\frac{\sum_{j=1}^{N_h} N_{2j} \varphi_j \sum_{l=1}^{N_h} P_l \varphi_l}{1 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} N_{2k} \varphi_k} |v \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{dF_j}{dt} \varphi_j |v \right) + \alpha_D \left(\nabla \sum_{j=1}^{N_h} F_j \varphi_j | |\nabla v \right) + \mu_F \left(\sum_{j=1}^{N_h} F_j \varphi_j |v \right) + \omega_1 \left(\sum_{j=1}^{N_h} F_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} |v \right) + \omega_2 \left(\sum_{j=1}^{N_h} F_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} |v \right) = \\
& \psi \sigma_{N_2} \left(\sum_{j=1}^{N_h} N_{2j} \varphi_j |v \right), \\
& \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{dP_j}{dt} \varphi_j |v \right) + \alpha_T \left(\nabla \sum_{j=1}^{N_h} P_j \varphi_j | |\nabla v \right) + \mu_P \left(\sum_{j=1}^{N_h} P_j \varphi_j |v \right) + \omega_1 \left(\sum_{j=1}^{N_h} P_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} |v \right) + \omega_2 \left(\sum_{j=1}^{N_h} P_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} |v \right) = \\
& + \omega \gamma \left(\frac{\sum_{j=1}^{N_h} N_{1j} \varphi_j \sum_{l=1}^{N_h} P_l \varphi_l}{1 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} N_{1k} \varphi_k} |v \right) + \theta \varepsilon \left(\frac{\sum_{j=1}^{N_h} N_{2j} \varphi_j \sum_{l=1}^{N_h} P_l \varphi_l}{1 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} N_{2k} \varphi_k} |v \right), \tag{42}
\end{aligned}$$

como la expresión anterior es válida para todo $v \in \mathcal{V}_h$ entonces es posible remplazar v por φ_i , $i = 1, \dots, N_h$ funciones de base del espacio $\mathcal{V}_h$. Haciendo esto, usando la linealidad de las integrales y ordenando términos en las sumatorias, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_h} \frac{dN_{1j}}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} N_{1j} \left[(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\chi}{K} \sum_{l=1}^{N_h} F_l (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) + \gamma \sum_{l=1}^{N_h} P_l \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} N_{1k} \varphi_k} | \varphi_i \right) \right] = \\
& \sum_{j=1}^{N_h} F_j \left(\chi (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\chi}{K} \sum_{l=1}^{N_h} N_{2l} (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) \right), \\
& \sum_{j=1}^{N_h} \frac{dN_{2j}}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} N_{2j} \left[(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) (\varphi_j | \varphi_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N_h} P_l \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} N_{2k} \varphi_k} | \varphi_i \right) \right] = \\
& \sigma_{n_1} \sum_{j=1}^{N_h} N_{1j} (\varphi_j | \varphi_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_h} \frac{dF_j}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} F_j \left[\alpha_D (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \mu_F (\varphi_j | \varphi_i) + \omega_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) \right] = \\
\sum_{j=1}^{N_h} N_{2j} (\psi \sigma_{N_2} (\varphi_j | \varphi_i)), \\
\sum_{j=1}^{N_h} \frac{dP_j}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_j} P_j \left[\alpha_T (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \mu_P (\varphi_j | \varphi_i) + \omega_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) \right. \\
\left. - \omega \gamma \sum_{l=1}^{N_h} N_{1l} \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} N_{1k} \varphi_k} | \varphi_i \right) - \theta \varepsilon \sum_{l=1}^{N_h} N_{2l} \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} N_{2k} \varphi_k} | \varphi_i \right) \right] = \\
0. \tag{43}
\end{aligned}$$

3.3.2. Discretización temporal

Ahora, la variable temporal del sistema (43) se aproxima usando el esquema de Crank-Nicolson con diferencias centradas de segundo orden, usando las aproximaciones dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{dU_j}{dt} (t_{n+1/2}) &\approx \frac{U_j(t_{n+1}) - U_j(t_n)}{\Delta t} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} \quad y \\
U_j(t_{n+1/2}) &\approx \frac{U_j(t_{n+1}) + U_j(t_n)}{2} = \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2},
\end{aligned} \tag{44}$$

donde los índices j se refieren a la discretización del dominio espacial y U_j es el valor de la solución aproximada en el nodo $(x_j, y_j) \in \Omega$.

Sustituyendo las aproximaciones (44) en la expresión (43) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_h} \frac{N_{1j}^{n+1} - N_{1j}^n}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{N_{1j}^{n+1} + N_{1j}^n}{2} \left[(\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\chi}{K} \sum_{l=1}^{N_h} \frac{F_l^{n+1} + F_l^n}{2} (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) \right. \\
\left. + \gamma \sum_{l=1}^{N_h} \frac{P_l^{n+1} + P_l^n}{2} \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} \frac{N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n}{2} \varphi_k} | \varphi_i \right) \right] = \\
\sum_{j=1}^{N_h} \frac{F_j^{n+1} + F_j^n}{2} \left[\chi (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\chi}{K} \sum_{l=1}^{N_h} \frac{N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n}{2} (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_h} \frac{N_{2j}^{n+1} - N_{2j}^n}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{N_{2j}^{n+1} + N_{2j}^n}{2} [(\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}) (\varphi_j | \varphi_i) \\
& + \varepsilon \sum_{l=1}^{N_h} \frac{P_l^{n+1} + P_l^n}{2} \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} \frac{N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n}{2} \varphi_k} | \varphi_i \right)] = \\
& \sigma_{N_1} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{N_{1j}^{n+1} + N_{1j}^n}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_{j=1}^{N_h} \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{F_j^{n+1} + F_j^n}{2} [\alpha_D (\nabla \varphi_j | |\nabla \varphi_i) + \mu_F (\varphi_j | \varphi_i) \\
& + \omega_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \omega_2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right)] = \\
& \psi \sigma_{N_2} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{N_{2j}^{n+1} + N_{2j}^n}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_{j=1}^{N_h} \frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{P_j^{n+1} + P_j^n}{2} \left[\alpha_T (\nabla \varphi_j | |\nabla \varphi_i) + \mu_p (\varphi_j | \varphi_i) + \omega_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \right. \\
& + \omega_2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) - \omega \gamma \sum_{l=1}^{N_h} \frac{N_{1l}^{n+1} + N_{1l}^n}{2} \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} \frac{N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n}{2} \varphi_k} | \varphi_i \right) \\
& \left. - \theta \varepsilon \sum_{l=1}^{N_h} \frac{N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n}{2} \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{1 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} \frac{N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n}{2} \varphi_k} | \varphi_i \right) \right] = \\
& 0. \tag{45}
\end{aligned}$$

Se agrupan términos U^{n+1} y U^n en los lados izquierdo y derecho, se reorganizan términos y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n_h} N_{1j}^{n+1} \left\{ \left(1 + \frac{\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\chi}{4K} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (F_l^{n+1} + F_l^n) (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + P_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) \right\} = \\
& \sum_{j=1}^{N_h} N_{1j}^n \left\{ \left(1 - \frac{\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\chi}{4K} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (F_l^{n+1} + F_l^n) (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) - \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + P_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) \right\} \\
& + \frac{\chi}{2} \Delta t \sum_{j=1}^{N_h} (F_j^{n+1} + F_j^n) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\chi}{4K} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n) \sum_{j=1}^{N_h} (F_j^{n+1} + F_j^n) (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i), \\
& \sum_{j=1}^{N_h} N_{2j}^{n+1} \left\{ \left(1 + \frac{\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\varepsilon}{4} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + P_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) \right\} = \\
& \sum_{j=1}^{N_h} N_{2j}^n \left\{ \left(1 - \frac{\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\varepsilon}{4} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + P_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) \right\} + \frac{\sigma_{n_1}}{2} \Delta t \sum_{j=1}^{N_h} (N_{2j}^{n+1} + N_{2j}^n) (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_{j=1}^{N_h} F_j^{n+1} \left\{ \frac{\alpha_D}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 + \frac{\mu_F}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_{j=1}^{N_h} F_j^n \left\{ -\frac{\alpha_D}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 - \frac{\mu_F}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) \right\} + \frac{\psi \sigma_{N_2}}{2} \Delta t \sum_{j=1}^{N_h} (N_{2j}^{n+1} + N_{2j}^n) (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_{j=1}^{N_h} P_j^{n+1} \left\{ \frac{\alpha_T}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 + \frac{\mu_P}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) \right\} \\
& - \omega \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{1l}^{n+1} + N_{1l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) - \theta \varepsilon \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) = \\
& \sum_{j=1}^{N_h} P_j^n \left\{ -\frac{\alpha_T}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 - \frac{\mu_P}{2} \Delta t \right) (\varphi_j | \varphi_i) \right\} \\
& + \omega \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{1l}^{n+1} + N_{1l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) + \theta \varepsilon \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) \Bigg\}. \tag{46}
\end{aligned}$$

El sistema discretizado (46) se puede representar de la siguiente forma matricial

$$\begin{aligned}
[\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^{n+1}, F^n, P^{n+1}, P^n, N_1^{n+1}, N_1^n)]N_1^{n+1} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^{n+1}, F^n, P^{n+1}, P^n, N_1^{n+1}, N_1^n)]N_1^n + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^{n+1}, F^n, N_2^{n+1}, N_2^n), \\
[\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^{n+1}, N_2^n, P^{n+1}, P^n)]N_2^{n+1} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^{n+1}, N_2^n, P^{n+1}, P^n)]N_2^n + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^{n+1}, N_1^n), \\
[\mathbb{R}_F^c]F^{n+1} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^n + \mathbb{B}_F^v(N_2^{n+1}, N_2^n), \\
[\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^{n+1}, N_1^n, N_2^{n+1}, N_2^n)]P^{n+1} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^{n+1}, N_1^n, N_2^{n+1}, N_2^n)]P^n,
\end{aligned} \tag{47}$$

donde los coeficientes del sistema (47) para cada ecuación vienen dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{N_1}^c &= \left(1 + \frac{\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{R}_{N_1}^v &= \frac{\chi}{4K} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (F_l^{n+1} + F_l^n) (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + P_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + n_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right), \\
\mathbb{Q}_{N_1}^c &= \left(1 - \frac{\sigma_{N_1} + \mu_{N_1}}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{Q}_{N_1}^v &= -\frac{\chi}{4K} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (F_l^{n+1} + F_l^n) (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i) - \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + P_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right), \\
\mathbb{B}_{N_1}^v &= \frac{\chi}{2} \Delta t \sum_{j=1}^{N_h} (F_j^{n+1} + F_j^n) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\chi}{4K} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n) \sum_{j=1}^{N_h} (F_j^{n+1} + F_j^n) (\varphi_j \varphi_l | \varphi_i), \\
\mathbb{R}_{N_2}^c &= \left(1 + \frac{\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{R}_{N_2}^v &= \frac{\varepsilon}{4} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + P_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{N_2}^c &= \left(1 - \frac{\sigma_{N_2} + \mu_{N_2}}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{Q}_{N_2}^v &= -\frac{\varepsilon}{4} \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (P_l^{n+1} + p_l^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right), \\
\mathbb{B}_{N_2}^v &= \frac{\sigma_{n_1}}{2} \Delta t \sum_{j=1}^{N_h} (N_{2j}^{n+1} + N_{2j}^n) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{R}_F^c &= \frac{\alpha_D}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 + \frac{\mu_F}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{Q}_F^c &= -\frac{\alpha_D}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 - \frac{\mu_F}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{B}_F^v &= \frac{\psi \sigma_{N_2}}{2} \Delta t \sum_{j=1}^{N_h} (N_{2j}^{n+1} + N_{2j}^n) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{R}_P^c &= \frac{\alpha_T}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 + \frac{\mu_P}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i), \\
\mathbb{R}_P^v &= -\omega \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{1l}^{n+1} + N_{1l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) \\
&\quad - \theta \varepsilon \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right), \\
\mathbb{Q}_P^c &= -\frac{\alpha_T}{2} \Delta t (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \frac{\omega_1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\omega_2}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) + \left(1 - \frac{\mu_P}{2} \Delta t\right) (\varphi_j | \varphi_i) \quad y \\
\mathbb{Q}_P^v &= \omega \gamma \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{1l}^{n+1} + N_{1l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \phi \sum_{k=1}^{N_h} (N_{1k}^{n+1} + N_{1k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right) \\
&\quad + \theta \varepsilon \Delta t \sum_{l=1}^{N_h} (N_{2l}^{n+1} + N_{2l}^n) \left(\frac{\varphi_j \varphi_l}{2 + \beta \sum_{k=1}^{N_h} (N_{2k}^{n+1} + N_{2k}^n) \varphi_k} | \varphi_i \right). \tag{48}
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}_{N_1}^c, \mathbb{R}_{N_2}^c, \mathbb{R}_F^c, \mathbb{R}_P^c, \mathbb{Q}_{N_1}^c, \mathbb{Q}_{N_2}^c, \mathbb{Q}_F^c, \mathbb{Q}_P^c$ son matrices con componentes lineales o constantes

$\mathbb{R}_{N_1}^v, \mathbb{R}_{N_2}^v, \mathbb{R}_F^v, \mathbb{Q}_{N_1}^v, \mathbb{Q}_{N_2}^v, \mathbb{Q}_F^v, \mathbb{Q}_P^v$ son matrices con componentes no lineales,

$\mathbb{B}_{N_1}^v, \mathbb{B}_{N_2}^v, \mathbb{B}_F^v$ son vectores con componentes no lineales.

Se debe de resolver el sistema (47) para cada n , comenzando con $n = 0$, ya que tenemos la información de las condiciones iniciales para obtener N_1^1, N_2^1, F^1 y P^1 , con estos valores obtenemos N_1^2, N_2^2, F^2 y P^2 , y así sucesivamente hasta $n = tf$ donde tf significa tiempo final.

3.3.3. Resolución de no linealidades

Para resolver el sistema (47) se utiliza un esquema del tipo predictor-corrector que garantiza la convergencia de los problemas generados a partir de la aplicación del método de Galerkin. El esquema consiste en resolver en cada iteración n el sistema no lineal mediante el uso de iteraciones intermedias, tratando de corregir el error obtenido cuando se sustituye los datos conocidos en la parte no lineal.

En (47) tenemos que $U^0 = (N_1^0, N_2^0, F^0, P^0)$, este valor se conoce debido a las condiciones iniciales (31).

Observemos el sistema para $n = 0$

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^1, F^0, P^1, P^0, N_1^1, N_1^0)]N_1^{(1)} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^1, F^0, P^1, P^0, N_1^1, N_1^0)]N_1^{(0)} + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^1, F^0, N_2^1, N_2^0), \\ [\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^1, N_2^0, P^1, P^0)]N_2^{(1)} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^1, N_2^0, P^1, P^0)]N_2^{(0)} + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^1, N_1^0), \\ [\mathbb{R}_F^c]F^{(1)} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^{(0)} + \mathbb{B}_F^v(N_2^1, N_2^0), \\ [\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^1, N_1^0, N_2^1, N_2^0)]P^{(1)} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^1, N_1^0, N_2^1, N_2^0)]P^{(0)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Para calcular $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, F^{(1)}$ y $P^{(1)}$ a partir de $N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, F^{(0)}$ y $P^{(0)}$ (condiciones iniciales), se determina una solución intermedia $N_1^{(*)}, N_2^{(*)}, F^{(*)}$ y $P^{(*)}$, luego se hacen 3 iteraciones mas (ya que las aproximaciones espaciales son de orden cuadrático, con 4 iteraciones intermedias es suficiente para obtener resultados confiables [12], en la siguiente forma:

1. Se calcula $U^{(*)} = (N_1^{(*)}, N_2^{(*)}, F^{(*)}, P^{(*)})$, haciendo $U^{(1)} = U^{(0)}$

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^0, F^0, P^0, P^0, N_1^0, N_1^0)]N_1^{(*)} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^0, F^0, P^0, P^0, N_1^0, N_1^0)]N_1^{(0)} + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^0, F^0, N_2^0, N_2^0), \\ [\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^0, N_2^0, P^0, P^0)]N_2^{(*)} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^0, N_2^0, P^0, P^0)]N_2^{(0)} + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^0, N_1^0), \\ [\mathbb{R}_F^c]F^{(*)} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^{(0)} + \mathbb{B}_F^v(N_2^0, N_2^0), \\ [\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^0, N_1^0, N_2^0, N_2^0)]P^{(*)} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^0, N_1^0, N_2^0, N_2^0)]P^{(0)}. \end{aligned} \quad (50)$$

2. Se calcula $U^{(2*)} = (N_1^{(2*)}, N_2^{(2*)}, F^{(2*)}, P^{(2*)})$, haciendo $U^{(0)} = U^{(*)}$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^*, F^0, P^*, P^0, N_1^*, N_1^0)]N_1^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^*, F^0, P^*, P^0, N_1^*, N_1^0)]N_1^{(0)} + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^*, F^0, N_2^*, N_2^0), \\
[\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^*, N_2^0, P^*, P^0)]N_2^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^*, N_2^0, P^*, P^0)]N_2^{(0)} + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^*, N_1^0), \\
[\mathbb{R}_F^c]F^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^{(0)} + \mathbb{B}_F^v(N_2^*, N_2^0), \\
[\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^*, N_1^0, N_2^*, N_2^0)]P^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^*, N_1^0, N_2^*, N_2^0)]P^{(0)}.
\end{aligned} \tag{51}$$

3. Se calcula $U^{(3*)} = (N_1^{(3*)}, N_2^{(3*)}, F^{(3*)}, P^{(3*)})$, haciendo $U^{(*)} = U^{(2*)}$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^{2*}, F^0, P^{2*}, P^0, N_1^{2*}, N_1^0)]N_1^{(3*)} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^{2*}, F^0, P^{2*}, P^0, N_1^{2*}, N_1^0)]N_1^{(0)} + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^{2*}, F^0, N_2^{2*}, N_2^0), \\
[\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^{2*}, N_2^0, P^{2*}, P^0)]N_2^{(3*)} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^{2*}, N_2^0, P^{2*}, P^0)]N_2^{(0)} + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^{2*}, N_1^0), \\
[\mathbb{R}_F^c]F^{(3*)} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^{(0)} + \mathbb{B}_F^v(N_2^{2*}, N_2^0), \\
[\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^{2*}, N_1^0, N_2^{2*}, N_2^0)]P^{(3*)} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^{2*}, N_1^0, N_2^{2*}, N_2^0)]P^{(0)}.
\end{aligned} \tag{52}$$

4. Se calcula $U^{(4*)} = (N_1^{(4*)}, N_2^{(4*)}, F^{(4*)}, P^{(4*)})$, haciendo $U^{(2*)} = U^{(3*)}$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^{3*}, F^0, P^{3*}, P^0, N_1^{3*}, N_1^0)]N_1^{(4*)} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^{3*}, F^0, P^{3*}, P^0, N_1^{3*}, N_1^0)]N_1^{(0)} + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^{3*}, F^0, N_2^{3*}, N_2^0), \\
[\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^{3*}, N_2^0, P^{3*}, P^0)]N_2^{(4*)} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^{3*}, N_2^0, P^{3*}, P^0)]N_2^{(0)} + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^{3*}, N_1^0), \\
[\mathbb{R}_F^c]F^{(4*)} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^{(0)} + \mathbb{B}_F^v(N_2^{3*}, N_2^0), \\
[\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^{3*}, N_1^0, N_2^{3*}, N_2^0)]P^{(4*)} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^{3*}, N_1^0, N_2^{3*}, N_2^0)]P^{(0)}.
\end{aligned} \tag{53}$$

5. Finalmente hacemos $U^{(1)} = (N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, F^{(1)}, P^{(1)}) \approx U^{(4*)}$.

Ahora para $n = k$, con $k \geq 1$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
[\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^k, F^k, P^k, P^k, N_1^k, N_1^k)]N_1^{(*)} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^k, F^k, P^k, P^k, N_1^k, N_1^k)]N_1^{(k)} + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^k, F^k, N_2^k, N_2^k), \\
[\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^k, N_2^k, P^k, P^k)]N_2^{(*)} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^k, N_2^k, P^k, P^k)]N_2^{(k)} + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^k, N_1^k), \\
[\mathbb{R}_F^c]F^{(*)} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^{(k)} + \mathbb{B}_F^v(N_2^k, N_2^k), \\
[\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^k, N_1^k, N_2^k, N_2^k)]P^{(*)} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^k, N_1^k, N_2^k, N_2^k)]P^{(k)},
\end{aligned}$$

después,

$$\begin{aligned}
[\mathbb{R}_{N_1}^c + \mathbb{R}_{N_1}^v(F^*, F^k, P^*, P^k, N_1^*, N_1^k)]N_1^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_{N_1}^c + \mathbb{Q}_{N_1}^v(F^*, F^k, P^*, P^k, N_1^*, N_1^k)]N_1^{(k)} + \mathbb{B}_{N_1}^v(F^*, F^k, N_2^*, N_2^k), \\
[\mathbb{R}_{N_2}^c + \mathbb{R}_{N_2}^v(N_2^*, N_2^k, P^*, P^k)]N_2^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_{N_2}^c + \mathbb{Q}_{N_2}^v(N_2^*, N_2^k, P^*, P^k)]N_2^{(k)} + \mathbb{B}_{N_2}^v(N_1^*, N_1^k), \\
[\mathbb{R}_F^c]F^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_F^c]F^{(k)} + \mathbb{B}_F^v(N_2^*, N_2^k), \\
[\mathbb{R}_P^c + \mathbb{R}_P^v(N_1^*, N_1^k, N_2^*, N_2^k)]P^{(2*)} &= [\mathbb{Q}_P^c + \mathbb{Q}_P^v(N_1^*, N_1^k, N_2^*, N_2^k)]P^{(k)}.
\end{aligned}$$

Así hasta llegar a $U^{(4*)} = (N_1^{(4*)}, N_2^{(4*)}, F^{(4*)}, P^{(4*)})$, luego se obtiene $U^{(k+1)} \approx U^{(4*)}$.

3.3.4. Simulaciones numéricas

Para las simulaciones se desarrolló un código numérico en el software MATLAB, a partir del cual se realizaron algunas pruebas para obtener los escenarios y resultados que se presentan más adelante. Se considera un cuadrado de tamaño $L \times L$ dentro del dominio, redimensionado para ajustarse a la región cuadrada $[0,1] \times [0,1]$. Esta región se divide en 20 subintervalos equidistantes en cada dirección, lo que da como resultado una malla con un total de 441 nodos, las longitudes de paso en ambas direcciones son iguales, es decir, $dx = dy = 0.05$. En este contexto, cada nodo específico representa un árbol de cítricos, es decir tenemos 441 árboles distribuidos de manera uniforme sobre el dominio espacial considerado que en este caso representa una hectárea. Para el dominio temporal, se considera un período de 200 días, es decir, t se encuentra en el intervalo $(0,200]$, en este análisis temporal se realizaron 4000 iteraciones, lo que nos proporciona un valor de $dt = 0.05$.

Para el modelo espacial se usaron los mismos valores de los parámetros del modelo temporal dados en la Tabla 2 y los coeficientes de difusión $\alpha_D = 0.085$ y $\alpha_T = 0.06$ para $D. citri$ y $T. radiata$ respectivamente [23]. Por simplicidad, el campo de velocidades o componentes advectivas en todos los casos son iguales a cero ($W = 0$). El valor de la capacidad de carga K se define para cada nodo del dominio, es decir, si hay 441 nodos en el dominio y la capacidad de carga es igual a 5, entonces la capacidad de carga global es $441 \times 5 = 2205$. La condición inicial se establece únicamente en un nodo central y en los demás nodos de la malla igual a cero.

Se han generado gráficos que ilustran la distribución espacial en el dominio en distintos momentos temporales. Estas representaciones visuales se generaron a partir de simulaciones realizadas en dos escenarios diferentes, con el propósito de analizar de manera detallada la evolución de las poblaciones de $D. citri$ y $T. radiata$ bajo el efecto de la difusión por dispersión.

Escenario 1: Sin MIP

Se simula la dinámica del comportamiento de las poblaciones de $D. citri$ sin la aplicación de MIP y con dispersión. Se considera $K = 5 \times 441 = 2205$ y la condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0)$. La distribución espacial de cada una de las poblaciones sobre el dominio se muestra en las Figuras 12, 13 y 14, en los instantes de tiempo $t = 0, 100$ y 200 respectivamente. Se observa que a medida que pasa el tiempo las poblaciones aumentan, llegando al punto de tener una distribución casi homogénea en todo el dominio. La Figura 15 muestra la dinámica en el tiempo sobre todo el dominio, allí se puede observar que en las primeras iteraciones todas las poblaciones van en aumento llegando a estabilizarse hacia un equilibrio asintótico constante.

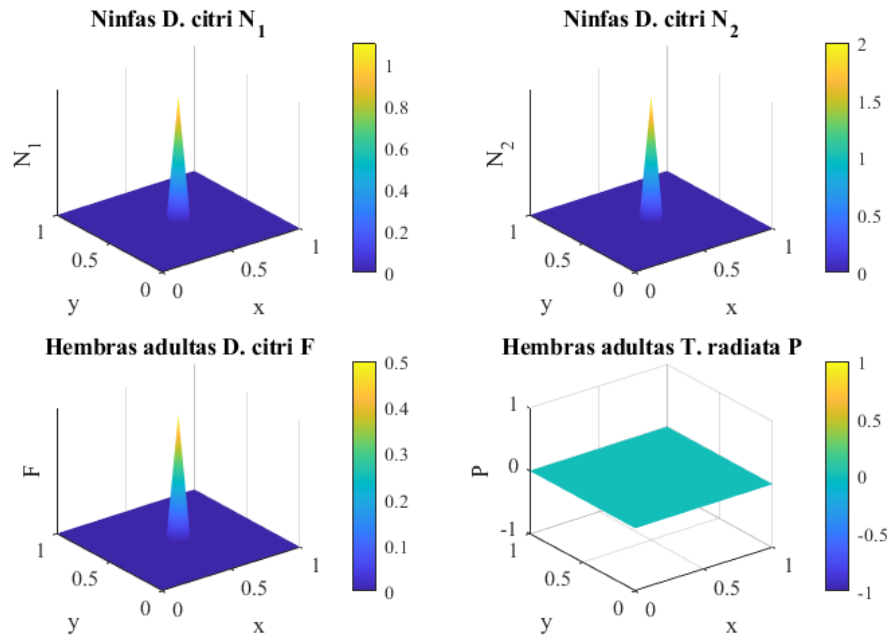


Figura 12: Dinámica espacial del sistema (29), en el instante $t = 0$, sin MIP y con dispersión.

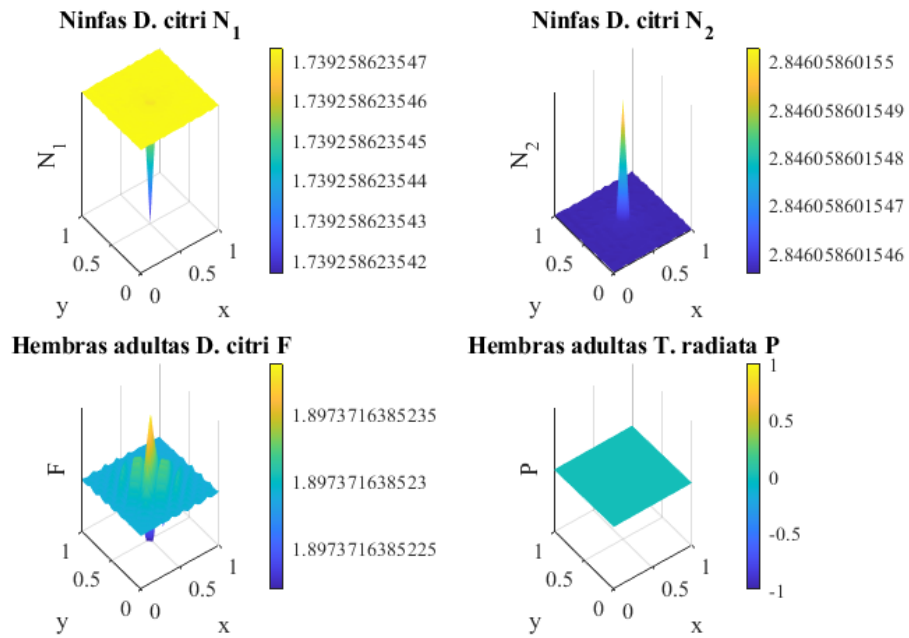


Figura 13: Dinámica espacial del sistema (29), en el instante $t = 100$, sin MIP y con dispersión.

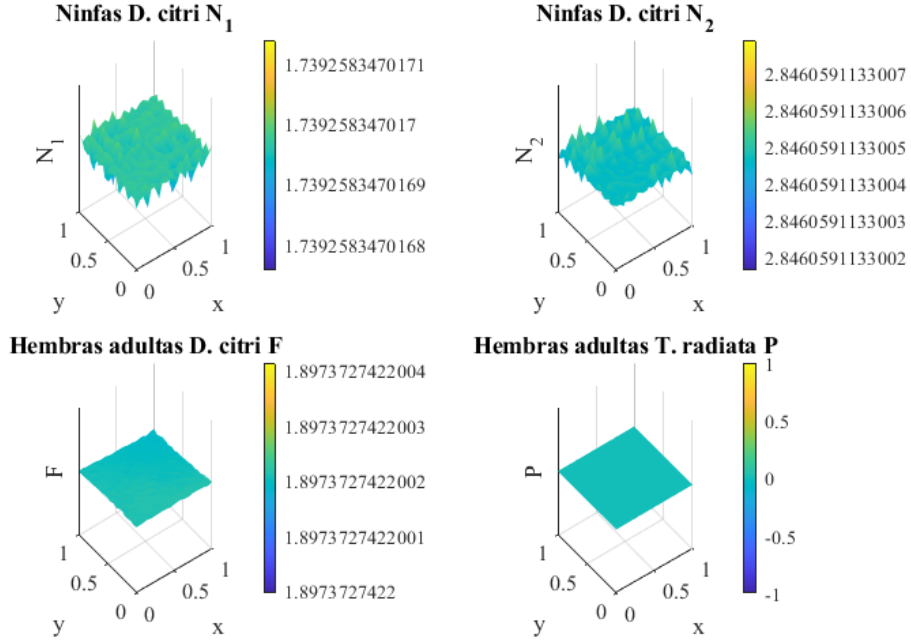


Figura 14: Dinámica espacial del sistema (29), en el instante $t = 200$, sin MIP y con dispersión.

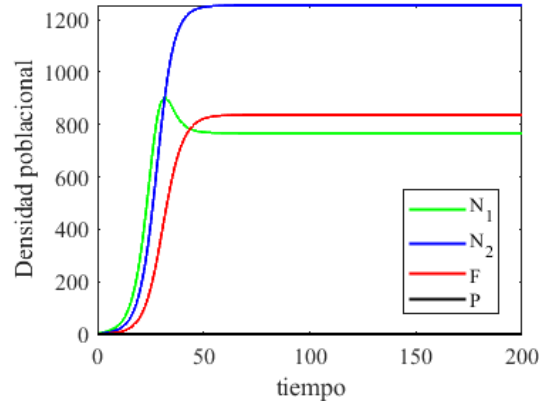


Figura 15: Densidades poblacionales del sistema (29). Considerando la dinámica natural de *D. citri* en ausencia de *T. radiata* y sin MIP, en todo el dominio espacio-tiempo. $K = 2205$ y condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0)$.

Escenario 2: Con MIP

Se simula la dinámica poblacional de *D. citri* con la aplicación de MIP y con dispersión. La incorporación del MIP queda descrita de la siguiente forma:

- Mientras la población de hembras F este por debajo del UE. El sistema que describe la dinámica poblacional de *D. citri* y *T. radiata* en el espacio y en el tiempo es (29).
- En el momento en que la densidad poblacional de hembras F supera el UE, la intervención humana implica la aplicación de insecticida (δ_c) que se hace de manera homogénea en todo el dominio y la liberación de una determinada población de *T. radiata* (ρ) que

se hace únicamente en el nodo central. Esto se encuentra descrito por el sistema (28), donde las variables en este contexto corresponden a las soluciones del sistema (29). Se asume que el insecticida afecta de manera uniforme a todos los organismos implicados en el MIP propuesto, a una tasa $\delta_c = 1 - \frac{UC}{F}$.

La intervención anterior se repetirá cada vez que la densidad poblacional de *D. citri* adulta alcance el UE.

Para las simulaciones se considera la condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0.75)$, $K = 2205$, $\rho = 2$, $UE = 0.3$ y $\delta_c = 0.2020$, que señala que en la ultima instancia de aplicación se requirió una cantidad adecuada de pesticida para erradicar al menos el 20% de la población de *D. citri*. En las Figuras 16, 17 y 18 se muestra la distribución espacial de cada una de las poblaciones sobre el dominio en los instantes $t = 0, 25$ y 50 respectivamente, en las primeras iteraciones, se nota un aumento en las poblaciones seguido de una estabilización en su distribución en momentos posteriores. Es importante destacar que en las gráficas correspondientes a tiempos posteriores, no se observa una variación espacial significativa, esto se debe al comportamiento oscilatorio de todas las poblaciones como se puede ver en la dinámica temporal de la Figura 19, el cual depende del UE establecido para la aplicación del MIP. El periodo de estas oscilaciones es aproximadamente de un día.

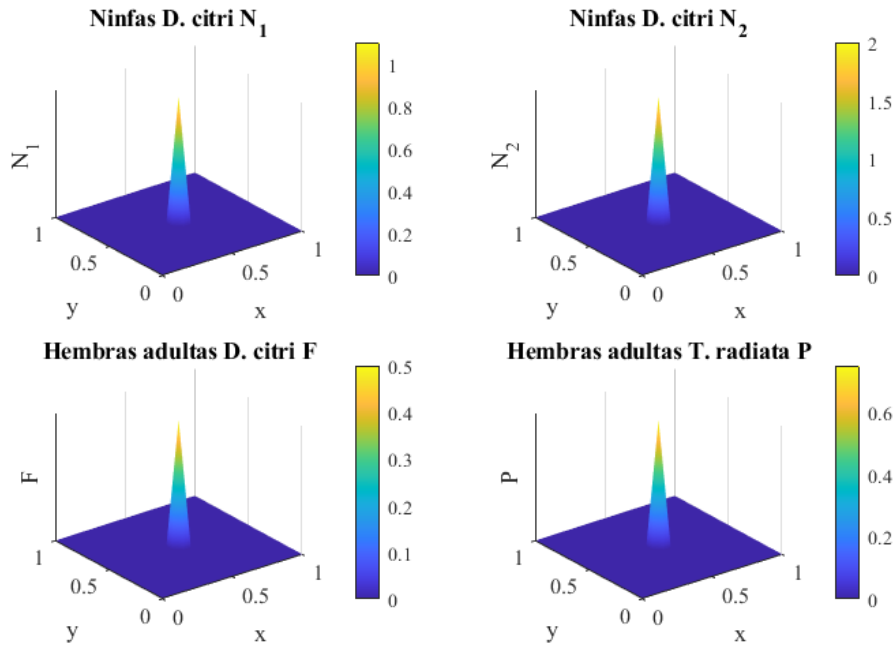


Figura 16: Dinámica espacial del sistema (29), en el instante $t = 0$, con MIP y con dispersión.

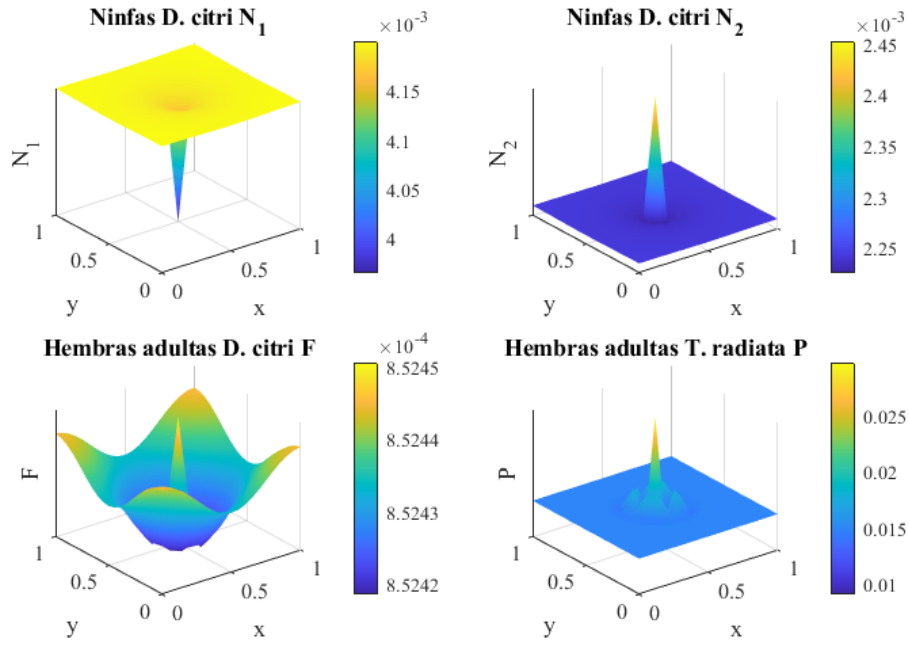


Figura 17: Dinámica espacial del sistema (29), en el instante $t = 25$, con MIP y con dispersión.

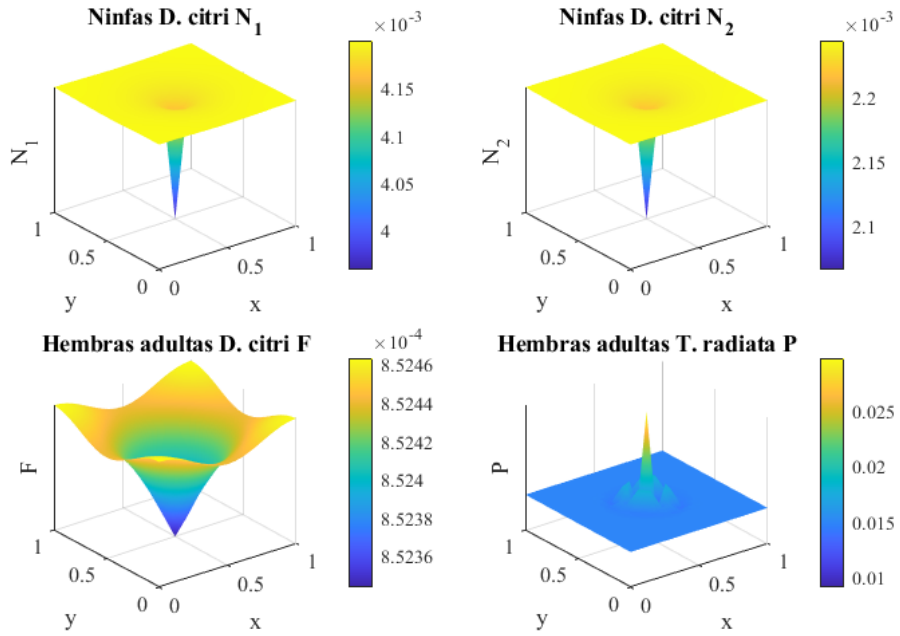


Figura 18: Dinámica espacial del sistema (29), en el instante $t = 50$, con MIP y con dispersión.

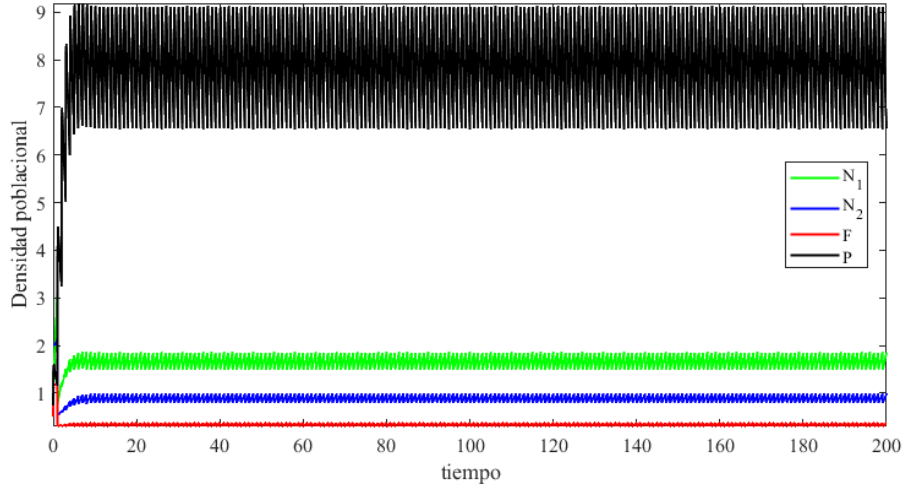


Figura 19: Densidades poblacionales del sistema (29). Considerando la dinámica natural de *D. citri* en presencia de *T. radiata* y con MIP, en todo el dominio espacio-tiempo. $K = 2205$ y condición inicial $(N_1^0, N_2^0, F^0, P^0) = (1.1, 2, 0.5, 0.75)$.

3.4. Conclusión

Comparando el modelo con distribución espacial con el modelo sin distribución espacial (Figura 19 y 9), se tiene que el intervalo de aplicación de los métodos de control es menor cuando se considera el espacio, lo que conlleva a un planeamiento de prácticas de control más eficientes y muy probablemente mas costosos. Al simular la dinámica espacio-temporal aumentado el UE a 0.5, no se aprecian diferencias significativas con respecto a la variación del periodo de aplicación de la estrategia MIP, por tanto no se incluye esta simulación. Lo que si se puede inferir de manera intuitiva para este último caso, es que entre mas alto sea el UE mayor será el perjuicio causado por las plagas en los arboles de cítricos y por tanto habrá mayor gasto o pérdida para el productor.

4. Discusión

El modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias propuesto fue capaz de reproducir el efecto de aplicación de las estrategias de manejo integrado de plagas (MIP). El hecho de que *T. radiata* no sea solo un parasitoide de *D. citri* sino también una especie depredadora se torna eficiente en el control de esta plaga. Los resultados nos indican que hay varios factores que pueden afectar el éxito de los programas de MIP, entre ellos el Umbral Económico (UE), el intervalo de las aplicaciones y la eficiencia de los insecticidas.

En general se puede concluir que conociendo la biología de la plaga y el parasitoide, y conociendo un UE necesario, teóricamente se pueden establecer estrategias de control sin que haya necesidad de un acompañamiento regular de la densidad de plagas. Esto se puede notar en los resultados, determinando un intervalo entre cada aplicación en condiciones normales de equilibrio ambiental, para que la población permanezca en una solución de equilibrio oscilatoria con una amplitud máxima por debajo del UE. De esta manera se pueden desarrollar estrategias periódicas de control, con cantidades fijas de insecticida y de parasitoides a liberar, lo que es una ganancia para el productor, dado que la verificación constante de la densidad poblacional de plagas genera un costo para su realización.

Este trabajo proporciona una base para realizar un estudio más exhaustivo. Uno de los aspectos que podría ser objeto de investigación en un futuro trabajo es el análisis del modelo sin predación, es decir, centrándose únicamente en el parasitismo. Además, sería interesante explorar la posibilidad de realizar más simulaciones utilizando diferentes valores para los parámetros. tal vez se podría llegar hacer algunas estimaciones de los mismos.

Referencias

- [1] Alemán, J., Baños, H., & Ravelo, J. (2007). *Diaphorina citri* y la enfermedad huanglongbing: una combinación destructiva para la producción citrícola. *Revista de Protección Vegetal*, 22(3), 154-165.
- [2] Alves, G. R., Diniz, A. J. F., & Parra, J. R. P. (2014). Biology of the huanglongbing vector *Diaphorina citri* (Hemiptera: Liviidae) on different host plants. *Journal of economic entomology*, 107(2), 691-696.
- [3] Ammar, E. D., Hall, D. G., & Shatters Jr, R. G. (2013). Stylet morphometrics and citrus leaf vein structure in relation to feeding behavior of the Asian citrus psyllid *Diaphorina citri*, vector of citrus huanglongbing bacterium. *PLoS One*, 8(3), e59914.
- [4] Bennett, G. W., Owens, J. M., & Corrigan, R. M. (2005). *Truman's scientific guide to pest management operations*. Purdue University.
- [5] Bhattacharyya, S. y Bhattacharya, DK (2006). Control de plagas a través de enfermedades virales: modelado y análisis matemático. *Revista de Biología Teórica*, 238 (1), 177-197.
- [6] Bouvet, J. P., Hochmaier, V. E., & Burdyn, L. (2023). Guía para identificar Huanglongbing (HLB) y su insecto vector. Ediciones INTA.
- [7] Carmen Chicon. (2006) *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, (vid. págs. 7, 9, 10).
- [8] Catling, H. D. (1970). Distribution of the psyllid vectors of citrus greening disease, with notes on the biology and bionomics of *Diaphorina citri*. *FAO Plant Protection Bulletin*, 18(1), 8-15.
- [9] Chen, X., & Stansly, P. A. (2014). Biology of *Tamarixia radiata* (Hymenoptera: Eulophidae), parasitoid of the citrus greening disease vector *Diaphorina citri* (Hemiptera: Psylloidea): a mini review. *Florida entomologist*, 97(4), 1404-1413.
- [10] Chien, C. C. (1995). The role of parasitoids in the pest management of citrus psyllid. In *proceedings of the symposium on research and development of citrus in Taiwan*, Taichung, Taiwan (pp. 245-261).
- [11] da Silveira, P. A. (2012). Modelo dinâmico incluindo Manejo Integrado de Pragas (MIP) e estrutura espacial no combatea *Diaphorina Citri*. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática* (Vid. pag 30).
- [12] Douglas, Jr, J., & Dupont, T. (1970). Galerkin methods for parabolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 7(4), 575-626.
- [13] Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [14] Ehi-Eromosele, C. O., Nwinyi, O. C., & Ajani, O. O. (2013). Integrated pest management. In *Weed and pest control-conventional and new challenges*. IntechOpen.
- [15] Ferguson, AW, Klukowski, Z., Walczak, B., Clark, SJ, Mugglestone, MA, Perry, JN y Williams, IH (2003). Distribución espacial de insectos plaga en la colza: implicaciones para el manejo integrado de plagas. *Agricultura, ecosistemas y medio ambiente*, 95 (2-3), 509-521.

- [16] French, J. B. (1989). Métodos de análisis económico para su aplicación en el manejo integrado de plagas. Manejo Integrado de Plagas y Agroecología Número 12 (Junio 1989), páginas 48-66.
- [17] Graham, M. W. R. D. V. (1991). A reclassification of the European Tetrastichinae (Hymenoptera: Eulophidae): revision of the remaining genera. Mem. Amer. Ent. Inst., 49, 1-322.
- [18] Grafton-Cardwell, E. E., Godfrey, E. K., Rogers, M. E., Childers, C. C., & Stansly, P. A. (2006). Asian Citrus Psyllid. University of California Agriculture and Natural Resources Publication. Publication 8131. Oakland CA. 8pp.(En línea).
- [19] Higgins, S. A., Igwe, D. O., Ramsey, J. S., DeBlasio, S. L., Pitino, M., Niedz, R., ... & Heck, M. L. (2023). Plant-derived, nodule-specific cysteine rich peptides inhibit growth and psyllid acquisition of 'Candidatus Liberibacter asiaticus', the citrus Huanglongbing bacterium. bioRxiv, 2023-06.
- [20] Hughes, G. (1996). Incorporar patrones espaciales de organismos nocivos en modelos de pérdida de cultivos. Protección de cultivos , 15 (5), 407-421.
- [21] Koppenhöfer, A. M., Latin, R., McGraw, B. A., Brosnan, J. T., & Crow, W. T. (2013). Integrated pest management. Turfgrass: Biology, Use, and Management, 56, 933-1006.
- [22] LeVeque, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematic
- [23] Lima, E. A. B. D. F. (2010). Desenvolvimento e aplicação de modelos matemáticos para o controle da Diaphorina citri via manejo integrado e estudo da influência da temperatura sobre a dinâmica populacional de Talitroides topitotum.
- [24] Lotka, A. J. (1925). Elements of Physical Biology. Williams & Wilkins.
- [25] Mann, R. S., & Stelinski, L. L. (2010). an Asian citrus psyllid parasitoid Tamarixia radiata (Waterston)(Insecta: Hymenoptera: Eulophidae): EENY 475/IN858, 6/2010. EDIS, 2010(4).
- [26] Martcheva, M. (2015). An introduction to mathematical epidemiology (Vol. 61, pp. 9-31). New York: Springer.
- [27] May, R. M. (1977). Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states. Nature, 269(5628), 471-477
- [28] Mateus Cagua, D. M., & Ordúz Rodríguez, J. O. (2012). Generalidades de los cítricos y recomendaciones agronómicas para su cultivo en Colombia. Corporación Universitaria Lasallista (Vid. pág 50).
- [29] Mead, F. W. (1977). The Asiatic citrus psyllid, Diaphorina citri Kuwayama (Homoptera: Psyllidae).
- [30] Michaud, J. P. (2004). Natural mortality of Asian citrus psyllid (Homoptera: Psyllidae) in central Florida. Biological control, 29(2), 260-269.
- [31] Nava, D. E., Torres, M. L. G., Rodrigues, M. D. L., Bento, J. M. S., & Parra, J. R. P. (2007). Biology of Diaphorina citri (Hem., Psyllidae) on different hosts and at different temperatures. Journal of Applied Entomology, 131(9-10), 709-715.

- [32] Nicholson, A. J., & Bailey, V. A. (1935). The balance of animal populations. Part I. Proceedings of the Zoological Society of London, 1935(2), 551-598.
- [33] Perko, L. (2013). Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos (Vol. 7). Medios de ciencia y negocios de Springer.
- [34] Petrovski, I. G. (1985). Lecciones sobre ecuaciones en derivadas parciales.
- [35] Rae, D. J., Liang, W. G., Watson, D. M., Beattie, G. A. C., & Huang, M. D. (1997). Evaluation of petroleum spray oils for control of the Asian citrus psylla, *Diaphorina citri* (Kuwayama)(Hemiptera: Psyllidae), in China. International Journal of Pest Management, 43(1), 71-75.
- [36] Rosenzweig, M. L., & MacArthur, R. H. (1963). Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. The American Naturalist, 97(895), 209-223.
- [37] Skelley, L. H., & Hoy, M. A. (2004). A synchronous rearing method for the Asian citrus psyllid and its parasitoids in quarantine. Biological Control, 29(1), 14-23.
- [38] Tang, S. y Cheke, RA (2008). Modelos de control integrado de plagas y sus implicaciones biológicas. Biociencias Matemáticas , 215 (1), 115-125.
- [39] Tiwari, S., Killiny, N., Mann, R. S., Wenninger, E. J., & Stelinski, L. L. (2013). Abdominal color of the Asian citrus psyllid, *Diaphorina citri*, is associated with susceptibility to various insecticides. Pest Management Science, 69(4), 535-541.