Vol. XV Nº 1 Junio (2007)
Matemáticas: 67–76

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Caracterización de los espacios de Lipschitz en términos de las derivadas de orden no entero de las integrales de Poisson

Martha Bobadilla Francisco Enríquez Alex Montes
Jaime Tobar

Recibido Nov. 17, 2006 Aceptado Feb. 22, 2007

Abstract

The Lipschitz spaces $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$ are defined and characterized in terms of partial derivatives of the Poisson integrals. In this paper we show a characterization of the functions of $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, in terms of the Riemann-Liouville's non integer order derivative of the Poisson integral. For this we generalize to the non integer case some propierties of the kernel and Poisson integral's partial derivatives.

Keywords: Lipschitz spaces, fractional derivative,Poisson kernel, Poisson integral.

MSC(2000): Primary: 26A33, Secondary: 26A16.

Resumen

Los espacios de Lipschitz $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, se definen y caracterizan en términos de las derivadas parciales de las integrales de Poisson. En este artículo se muestra una caracterización de las funciones de $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, en términos de la derivada de orden no entero de Riemann-Liouville de la integral de Poisson. Para esto se generalizan al caso no entero algunas de las propiedades de las derivadas parciales del núcleo y de la integral de Poisson.

Palabras y frases claves: Espacios de Lipschitz, derivada fraccionaria, núcleo de Poisson, integral de Poisson.

1 Introducción

La idea de generalizar el concepto de diferenciación a órdenes no entero surgió desde el mismo nacimiento del cálculo diferencial, así lo registra por primera vez la historia, en la correspondencia de Leibniz (carta dirigida a L'Hôpital, en 1965, donde se hacen observaciones sobre la posibilidad de considerar derivadas de orden 1/2), y ya en 1820 Lacroix hace explícita la fórmula para el cálculo de la derivada de orden 1/2 de la función x^α. En la actualidad, el cálculo no entero, disciplina dedicada a la investigación de derivadas e integrales de orden arbitrario (real o complejo), se desarrolla intensivamente, ya que se ha comprobado su aplicabilidad en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, como por ejemplo en la dinámica de fluídos, probalidad y estadística, viscoelasticidad, físico-química, entre otros; además a dado origen al área de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Existen diferentes definiciones (no equivalentes) de derivadas no enteras, pero para los fines de este trabajo se ha escogido la derivada de orden no entero según Riemann-Liouville, ya que estas derivadas conservan ciertas propiedades de las derivadas habituales para la convolución. Usando las mencionadas derivadas, en este artículo se presenta una caracterización de los espacios de funciones continuas según Lipschitz $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, espacios ampliamente utilizados en la teoría de espacios funcionales y sus aplicaciones al análisis matemático y a las ecuaciones diferenciales.

Para el caso $0 < \alpha < 1$, los espacios Lipschitz constan de funciones $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que para alguna constante $A > 0$,

$$\|f(x+t) - f(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq A\,|t|^\alpha\,,$$

donde la norma $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ se toma con respecto a la variable x.

Λ_α puede describirse de manera equivalente con la ayuda de la integral de Poisson de la función f:

$$u(x,y) := (P_y * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_y(x-t)f(t)dt,$$

donde P_y es el núcleo de Poisson definido como

$$P_y(x) = c_n y\left(|x|^2 + y^2\right)^{-(n+1)/2},$$

con $y > 0$ y $c_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

M. Taibleson (ver [3] capítulo V, sección 4.2) demostró en particular el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Supóngase que $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si*

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_\infty \leq Ay^{-1+\alpha}.$$

En adelante se simbolizará $\|\,.\,\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|\,.\,\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Las integrales se consideran de Lebesgue. Además se usarán desigualdades clásicas de la teoría de espacios L_p, ver [2] capítulo I.

En la sección 4.2 del trabajo [1] se da una caracterización de Λ_α para $0 < \alpha < 1$, utilizando derivadas de orden fraccionario según Riemann-Liouville:

Teorema 1.2. *Sea $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Entonces $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si*

$$\left\|D_y^\beta u(x,y)\right\|_\infty \leq Ay^{-\beta+\alpha},\ y > 0.$$

Donde $D_y^\beta u$ denota la derivada fraccionaria de orden β con respecto a y. Se acostumbra a usar las acepciones derivada de orden fraccionario y derivada de orden no entero como sinónimos. Igualmente para el caso de las integrales.

En [3] (capítulo V, sección 4.3) se presenta una descripción de Λ_α para $\alpha > 0$ mediante derivadas de orden entero. Allí se define Λ_α por:

$$\Lambda_\alpha := \left\{f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)\ :\quad \left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty \leq Ay^{-k+\alpha}\right\},$$

donde k es el menor entero mayor que α. Además, se demuestra que esta definición es válida para cualquier entero $k > \alpha$ usando el siguiente resultado:

Teorema 1.3. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, y k y l enteros mayores que α. Entonces las condiciones*

$$\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty \leq A_k y^{-k+\alpha} \quad y \quad \left\|\frac{\partial^l u(x,y)}{\partial y^l}\right\|_\infty \leq A_l y^{-l+\alpha}.$$

son equivalentes.

De manera que, si $\alpha > 0$, $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y k es cualquier entero mayor que α, se tiene que $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si $\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty \leq A_k y^{-k+\alpha}$.

En este trabajo se obtiene una caracterización similar para el caso k no entero. Precisamente,

Si $\alpha > 0$, $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y β es cualquier real mayor que α, entonces $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si $\|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty \leq A y^{-\beta+\alpha}$.

Para obtener este resultado se generaliza el teorema 1.3 al caso de derivadas de orden no entero.

2 Preliminares

En esta sección se presentan las definiciones de integral y derivada fraccionaria, así como algunas propiedades del núcleo y de la integral de Poisson. La notación es la misma utilizada en [2] y [3]

Teorema 2.1 (Propiedades del núcleo de Poisson)**.** *El núcleo de Poisson, $P_y(x)$, satisface las siguientes propiedades:*

1. $P_y(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. *Donde la norma en $L_p(\mathbb{R}^n)$ se toma con respecto a la variable x.*
2. $P_y(x)$ *es una función armónica en*
$$\mathbb{R}^{n+1}_+ := \big\{(x,y)/\ x \in \mathbb{R}^n,\, y > 0\big\}.$$
3. *Es válida la propiedad de semigrupo:*
$$\forall y_1 > 0,\, \forall y_2 > 0,\ P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) = P_{y_1+y_2}(x).$$
4. $\dfrac{\partial^k P_y(x)}{\partial x^k} \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *para* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $k \in \mathbb{N}$.
5. $\dfrac{\partial^{k+m} P_y(x)}{\partial y^{k+m}} = \dfrac{\partial^k P_{y/2}(x)}{\partial y^k} * \dfrac{\partial^m P_{y/2}(x)}{\partial y^m}$, $k,\, m \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$

6. Para $y > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $j = 1, \dots, n$ y se tiene:

$$\left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k}\right| \ll y^{-n-k}, \left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k}\right| \ll |x|^{-n-k}, \left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial x_j^k}\right| \ll y^{-n-k},$$
$$\left|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial x_j^k}\right| \ll |x|^{-n-k}, \left\|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k}\right\|_1 \ll y^{-k}, \left\|\frac{\partial^k P_y(x)}{\partial x_j^k}\right\|_1 \ll y^{-k}.$$

La escritura $A \ll B$ significa que tiene lugar la desigualdad $A \leq cB$, donde c es una constante positiva que no depende ni de A ni de B.

Teorema 2.2 (Propiedades de la integral de Poisson)**.** *Para toda $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, se tiene que su integral de Poisson, $u(x, y)$, cumple lo siguiente:*

1. $u(x, y) \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

2. $u(x, y)$ *es una función armónica en* $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

3. $\dfrac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k} = \dfrac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k} * f(x)$.

4. $\dfrac{\partial^{k+m} u(x, y)}{\partial y^{k+m}} = \dfrac{\partial^k u(x, \frac{y}{2})}{\partial y^k} * \dfrac{\partial^m P_{\frac{y}{2}}(x)}{\partial y^m}$.

La idea de las pruebas de los dos teoremas anteriores puede verse en [3], seccion 2.1 del capítulo III y en 4.2 y 4.3 del capítulo V.

Dado un número real β, $[\beta]$ denotará la parte entera de β y $\{\beta\}$ su parte fraccionaria, de modo que $0 \leq \{\beta\} < 1$ y $\beta = [\beta] + \{\beta\}$.

Definición 2.3. *Sean $\beta > 0$ y f una función definida en $\mathbb{R}$. Si la siguiente integral existe*

$$(I^\beta f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t - x)^{\beta - 1} f(t) dt,$$

ella se denomina integral fraccionaria (integral de Riemann-Liouville) de orden β de la función f.

Definición 2.4. *Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$, β un real positivo no entero y $m = [\beta] + 1$. Entonces se define la derivada fraccionaria (derivada de Riemann-Liouville) de orden β de la función f mediante*

$$(D^\beta f)(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m - \beta)} \frac{d^m}{dx^m} \int_x^\infty (t - x)^{-\{\beta\}} f(t) dt,$$

si dicha expresión tiene sentido. Para $\beta \in \mathbb{N}_0$ se define la derivada fraccionaria por

$$(D^\beta f)(x) = (-1)^\beta \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x).$$

Ejemplo 2.5. *Para $f(x) = x^{-\mu}$, donde $0 < \beta < \mu < 1$, tenemos:*

$$I^{\beta}(x^{-\mu}) = \frac{\Gamma(\mu - \beta)}{\Gamma(\mu)}\, x^{\beta-\mu},$$
$$D^{\beta}(x^{-\mu}) = \frac{\Gamma(\mu + \beta)}{\Gamma(\mu)}\, x^{-\beta-\mu}, \quad \mu > 1 - \beta.$$

Definición 2.6. *Sean $\beta > 0$ y f una función definida en $\mathbb{R}^n$. Si la siguiente integral existe*

$$(I^{\beta}_{x_k} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{x_k}^{\infty} (t - x_k)^{\beta-1} f(x + (t - x_k)\overrightarrow{e_k})dt,$$

se denomina integral parcial fraccionaria de orden β, con respecto a la variable x_k, de la función f.

Definición 2.7. *Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}^n$, β un real positivo no entero y $m = [\beta] + 1$, entonces se define la derivada parcial fraccionaria de orden β, con respecto a la variable x_k, de la función f por*

$$(D^{\beta}_{x_k} f)(x) := \frac{(-1)^m}{\Gamma(m - \beta)} \frac{\partial^m}{\partial x_k^m} \int_{x_k}^{\infty} (t - x_k)^{-\{\beta\}} f(x + (t - x_k)\overrightarrow{e_k})dt,$$

si dicha expresión tiene sentido.

Para $\beta \in \mathbb{N}_0$ se define la derivada parcial fraccionaria por

$$(D^{\beta}_{x_k} f)(x) = (-1)^{\beta} \frac{\partial^{\beta}}{\partial x_k^{\beta}} f(x).$$

En [2] se establecen condiciones para la existencia de la integral y de la derivada fraccionaria; además se presentan distintas definiciones de derivadas e integrales fraccionarias, las cuales en general no son equivalentes. Para los fines de este trabajo, la variante elegida (definiciones 2.3 y 2.4) es la más apropiada, pues con ella tienen validez las fórmulas habituales de diferenciación de la convolución, con las cuales en [1] (secciones 2.3, 3.1 y 4.1) se establece que $D^{\beta}_y P_y(x)$ y $D^{\beta}_y u(x, y)$ existen para $f \in L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \beta < 1$, así como los siguientes lemas.

Lema 2.8. *Sean $0 < \beta < 1$, $j = 1, \ldots, n$, y f y g funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\Big((I^{\beta}_{x_j} |f|) * |g|\Big)(x) < \infty.$$

Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$I^{\beta}_{x_j}(f(x) * g(x)) = (I^{\beta}_{x_j} f(x)) * g(x).$$

Lema 2.9. *Para $0 < \beta < 1$, $y > 0$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$D_y^\beta u(x,y) = D_y^\beta (P_y(x) * f(x)) = D_y^\beta P_y(x) * f(x).$$

Lema 2.10. *Para $0 < \beta < 1$, $y > 0$ y $j = 1, \dots, n$ se tiene:*

$$\left|D_y^\beta P_y(x)\right| \ll y^{-n-\beta}, \quad \left|D_y^\beta P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-\beta}, \quad \left|D_{x_j}^\beta P_y(x)\right| \ll y^{-n-\beta},$$
$$\left|D_{x_j}^\beta P_y(x)\right| \ll |x|^{-n-\beta}, \quad \left\|D_y^\beta P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-\beta}, \quad \left\|D_{x_j}^\beta P_y(x)\right\|_1 \ll y^{-\beta}.$$

3 Caracterización de Λ_α, $\alpha > 0$, en términos de derivadas fraccionarias.

Para obtener el resultado enunciado en la página 3, se usan los siguientes lemas auxiliares.

Lema 3.1. *Sean $\beta > 0$ y f una función tal que $D_y^\beta f(y)$ existe. Si c es constante y $y = z + c$ entonces se tiene que $D_z^\beta f(y) = D_y^\beta f(y)$.*

Demostración. Como

$$D_z^\beta f(y) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dz^m} \int_z^\infty (t-z)^{-\{\beta\}} f(t+c)dt,$$

donde $m = [\beta] + 1$, entonces haciendo $u = t + c$ se obtiene

$$D_z^\beta f(y) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dy^m} \int_y^\infty (u-y)^{-\{\beta\}} f(u)du = D_y^\beta f(y).$$

□

Lema 3.2. *Para todo $0 < \beta < 1$ y $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que*

$$D_y^{m+\beta} P_y(x) = D_y^m P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x).$$

Demostración. Para la prueba se usa inducción matemática. Tomando $y = y_1 + y_2$, y_1, $y_2 > 0$ y aplicando el lema 3.1, se tiene que

$$D_y^\beta P_y(x) = D_{y_1}^\beta [P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x)],$$

de donde (ver lema 2.9)

$$D_y^\beta P_y(x) = D_{y_1}^\beta P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) = D_y^\beta P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x);$$

por consiguiente $D_y^\beta P_y(x) = D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x) * P_{\frac{y}{2}}(x)$ para $y_1 = y_2 = \frac{y}{2}$. Además,

$$\begin{aligned} D_y^{m+1+\beta} P_y(x) &= -\frac{\partial}{\partial y}[D_y^{m+\beta} P_y(x)] = -\frac{\partial}{\partial y}[D_y^m P_{\frac{y}{2}} y(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x)] \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}[(-1)^m \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x)] \\ &= D_y^{m+1} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado. □

Observación 3.3. *Del lema 3.2 se tiene la existencia de* $D_y^\beta P_y(x)$ *para todo* $\beta > 0$.

Lema 3.4. *Para todo* $0 < \beta < 1$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$D_y^{m-\beta} P_y(x) = I_y^\beta D_y^m P_y(x).$$

Demostración. En [1] (sección 2.1) se prueba que para $0 < \beta < 1$,

$$D_y^\beta P_y(x) = -I_y^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial y} P_y(x),$$

o sea que

$$\frac{d}{dy} \int_y^\infty (t-y)^{-\beta} P_t(x) dt = \int_y^\infty (t-y)^{-\beta} \frac{\partial}{\partial t} P_t(x) dt.$$

Argumentos similares a los que se usan en [1], demuestran que para $k \in \mathbb{N}$ y $0 < \beta < 1$,

$$\frac{d^k}{dy^k} \int_y^\infty (t-y)^{-\beta} P_t(x) dt = \int_y^\infty (t-y)^{-\beta} \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_t(x) dt. \tag{1}$$

De manera que

$$\begin{aligned} D_y^{m-\beta} P_y(x) &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(\beta)} \frac{d^m}{dy^m} \int_y^\infty (t-y)^{-(1-\beta)} P_t(x) dt \\ &= I_y^\beta D_y^m P_y(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_y^\infty (t-y)^{-(1-\beta)} D_t^m P_t(x) dt. \end{aligned}$$

□

Observación 3.5. *Haciendo algunos cálculos y usando la ecuación (3.1) se prueba que* $D_y^{\beta+\alpha} P_y(x) = D_y^\beta D_y^\alpha P_y(x)$ *para todo* α, $\beta > 0$.

Lema 3.6. *Para todo* $\beta > 0$ *y* $m \in \mathbb{N}_0$ *se tiene que*

$$D_y^{m+\beta} P_y(x) = D_y^m P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x).$$

Demostración. Tomando $k = [\beta]$ y $\lambda = \{\beta\}$, y usando la propiedad *5* del núcleo de Poisson y el lema 3.2 se tiene

$$\begin{aligned} D_y^{m+\beta} P_y(x) &= D_y^{m+k} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\lambda P_{\frac{y}{2}}(x) \\ &= D_y^m P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^k P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^\lambda P_{\frac{y}{4}}(x) * P_{\frac{y}{4}}(x) \\ &= D_y^m P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{k+\lambda} P_{\frac{y}{2}}(x) = D_y^m P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x). \end{aligned}$$

□

El siguiente lema generaliza la propiedad *5* del núcleo de Poisson.

Lema 3.7. *Para todo β y λ mayores que cero, se tiene*

$$D_y^{\beta+\lambda} P_y(x) = D_y^{\beta} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{\lambda} P_{\frac{y}{2}}(x).$$

Demostración. Para $k = [\beta]$, $l = [\lambda]$, $\beta_1 = \{\beta\}$, $\lambda_1 = \{\lambda\}$ se tiene

$$\begin{aligned} D_y^{\beta+\lambda} P_y(x) &= D_y^{k+l} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{\beta_1} D_y^{\lambda_1} P_{\frac{y}{2}}(x) \\ &= D_y^{k} P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^{l} P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^{\beta_1} P_{\frac{y}{4}}(x) * D_y^{\lambda_1} P_{\frac{y}{4}}(x) \\ &= D_y^{\beta} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{\lambda} P_{\frac{y}{2}}(x), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

Lema 3.8. *Para todo $0 < \beta < 1$, $m \in \mathbb{N}_0$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ se verifica*

$$D_y^{m+\beta} u(x,y) = D_y^{m+\beta} P_y(x) * f(x).$$

Demostración. Tomando $y = y_1 + y_2$ y usando los lemas 3.1 y 2.9 se obtiene:

$$\begin{aligned} D_y^{m+\beta} u(x,y) &= D_y^{m}[D_y^{\beta} P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) * f(x)] = D_{y_2}^{m}[D_y^{\beta} P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) * f(x)] \\ &= D_y^{\beta} P_{y_1}(x) * D_{y_2}^{m} P_{y_2}(x) * f(x), \end{aligned}$$

y haciendo $y_1 = y_2 = \frac{y}{2}$ resulta

$$D_y^{m+\beta} u(x,y) = D_y^{\beta} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^{m} P_{\frac{y}{2}}(x) * f(x) = D_y^{m+\beta} P_y(x) * f(x).$$

□

Observación 3.9. *Del lema 3.8 se sigue que para todo $\beta > 0$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$D_y^{\beta} u(x,y) = D_y^{\beta} P_y(x) * f(x),$$

lo que generaliza la propiedad 3 *de la integral de Poisson.*

Lema 3.10. *Para todo $0 < \beta < 1$, $m \in \mathbb{N}$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$D_y^{m-\beta} u(x,y) = I_y^{\beta} D_y^{m} u(x,y).$$

Demostración.

$$D_y^{m-\beta} u(x,y) = D_y^{m-\beta} P_y(x) * f(x) = I_y^{\beta} D_y^{m} P_y(x) * f(x).$$

De aquí, con ayuda del lema 2.8 se tiene:

$$D_y^{m-\beta} u(x,y) = I_y^{\beta}[D_y^{m} P_y(x) * f(x)] = I_y^{\beta} D_y^{m}[P_y(x) * f(x)] = I_y^{\beta} D_y^{m} u(x,y).$$

□

Los resultados aquí obtenidos sobre integración fraccionaria de la integral de Poisson no son de relevancia en la demostración de la caracterización de los espacios de Lipschitz, pero se presentan como información, ya que los conceptos de integral y derivada fraccionaria están relacionados (ver [2]).

Lema 3.11. *Para todo $\beta > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$D_y^{m+\beta} u(x,y) = D_y^m u(x, \tfrac{y}{2}) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x).$$

Demostración. Bajo las condiciones señaladas se tiene:

$$\begin{aligned} D_y^{m+\beta} u(x,y) &= D_y^{m+\beta} P_y(x) * f(x) = D_y^m P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x) * f(x) \\ &= D_y^m u(x, \tfrac{y}{2}) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x). \end{aligned}$$

□

El lema 3.12 generaliza la propiedad *4* de la integral de Poisson, y su demostración se obtiene de la observación 3.3 y el lema 3.7.

Lema 3.12. *Para todo β y λ mayores que cero y $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ se verifica*

$$D_y^{\beta+\lambda} u(x,y) = D_y^\beta u(x, \tfrac{y}{2}) * D_y^\lambda P_{\frac{y}{2}}(x).$$

Con el siguiente teorema se obtiene la caracterización de las funciones $f \in \Lambda_\alpha$ en términos de las derivadas de orden no entero de su integral de Poisson $u(x,y)$.

Teorema 3.13. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$ y λ y β reales mayores que α. Entonces son equivalentes las condiciones*

$$\|D_y^\lambda u(x,y)\|_\infty \leq A y^{-\lambda+\alpha} \quad y \quad \|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty \leq B y^{-\beta+\alpha}.$$

Para demostrarlo es suficiente aplicar el teorema 1.3 y el siguiente lema:

Lema 3.14. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$ y $k = [\beta] + 1$. Entonces son equivalentes las condiciones*

$$\|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty \leq A_\beta y^{-\beta+\alpha} \quad y \quad \|D_y^k u(x,y)\|_\infty \leq A_k y^{-k+\alpha}.$$

Demostración. Si $\gamma = \{\beta\}$, entonces $\|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty \leq A_\beta y^{-\beta+\alpha}$ implica que

$$\begin{aligned} \|D_y^k u(x,y)\|_\infty &= \|D_y^\beta u(x, \tfrac{y}{2}) * D_y^{1-\gamma} P_{\frac{y}{2}}(x)\|_\infty \leq \|D_y^\beta u(x, \tfrac{y}{2})\|_\infty \|D_y^{1-\gamma} P_{\frac{y}{2}}(x)\|_1 \\ &\leq A_k y^{-k+\alpha}. \end{aligned}$$

La otra parte de la demostración se divide en dos casos. Primero supóngase $[\beta] > [\alpha]$. Si $m \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left\| \frac{\partial^m u(x,y)}{\partial y^m} \right\|_\infty = \left\| \frac{\partial^m P_y(x)}{\partial y^m} * f(x) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial^m P_y(x)}{\partial y^m} \right\|_1 \|f\|_\infty \leq A y^{-m} \|f\|_\infty,$$

luego $\dfrac{\partial^m u(x,y)}{\partial y^m} \to 0$ cuando $y \to \infty$, por eso

$$\frac{\partial^{m-1} u(x,y)}{\partial y^{m-1}} = -\int_y^\infty \frac{\partial^m u(x,z)}{\partial z^m} dz.$$

De donde

$$\begin{aligned}\|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty = \|D_y^{k-1} u(x,\tfrac{y}{2}) * D_y^\gamma P_{\frac{y}{2}}(x)\|_\infty &\le Ay^{-\gamma} \left\| \int_y^\infty \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(x,\tfrac{z}{2}) dz \right\|_\infty \\ &\le Ay^{-\gamma} \int_y^\infty \left\| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(x,\tfrac{z}{2}) \right\|_\infty dz \le A_\beta y^{-\beta+\alpha}.\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $[\beta] = [\alpha]$. Si $\|D_y^k u(x,y)\|_\infty \le A_k y^{-k+\alpha}$, entonces por teorema 1.3 $\|D_y^{k+1} u(x,y)\|_\infty \le A_{k+1} y^{-(k+1)+\alpha}$, de donde por el caso anterior $\|D_y^{\beta+1} u(x,y)\|_\infty \le A_{\beta+1} y^{-(\beta+1)+\alpha}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty &= \left\| \int_y^\infty D_z^{\beta+1} u(x,z) dz \right\|_\infty \\ &\le \int_y^\infty \left\| D_z^{\beta+1} u(x,z) \right\|_\infty dz \le A_\beta y^{-\beta+\alpha}.\end{aligned}$$

□

Agradecimientos. Los autores expresan su agradecimiento a la Universidad del Cauca, por el apoyo al Grupo de Análisis Funcional mediante el Proyecto 1402.

Referencias

[1] Enríquez, F. E. Caracterización de espacios con orden no entero de diferenciación en términos de prolongaciones armónicas. Manuscrito Tesis de Maestría, Universidad de Rusia de la amistad de los pueblos, Moscú, 1995.

[2] Samko, S. G.; Kilvas, A. A. y Marichev, O. I. fractional integrals and derivatives: theory and applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[3] Stein, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princenton University Press, New Jersey, 1970.

Dirección de los autores: Martha Bobadilla, Universidad del Cauca, mlbobadi@unicauca.edu.co. — Francisco Enríquez, Universidad del Cauca, enriquezfrancisc@hotmail.com. — Alex Montes, Universidad del Cauca, amontes@unicauca.edu.co. — Jaime Tobar, Universidad del Cauca, jaitomu@unicauca.edu.co.