



Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. Un análisis de un texto escolar de octavo grado de la Educación Básica Colombiana

Brigitte Marcela Gómez Rentería

Código: 0831278

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Santiago de Cali, Septiembre 2016



Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. Un análisis de un texto escolar de octavo grado de la Educación Básica Colombiana

Brigitte Marcela Gómez Rentería

Código: 0831278

Director:

Mg. Cristian Andrés Hurtado Moreno

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Santiago de Cali, Septiembre 2016

A Dios, por dar luz en mí cuando la sombra aparecía
A mis padres y Helder, porque soy reflejo de su ejemplo
A mis hermanos, por los sueños compartidos
A Briant Samudio por su apoyo y amor brindado a lo largo de este sueño
A la vida...

Agradecimientos

Para la realización de este trabajo de grado primero quiero agradecerle a Dios por darme la sabiduría en todo este proceso académico y permitirme hacer parte de la Universidad del Valle, “la mejor para los mejores”.

A mis padres, a Helder, Milton, mi abuela y mi novio por apoyarme constantemente para el cumplimiento de mis objetivos a lo largo de esta hermosa carrera.

A mi director de tesis Cristian Andrés Hurtado Moreno por sus conocimientos, consejos, dedicación, comprensión y orientación en el desarrollo del trabajo de grado.

A Gustavo Graciano, Rafael Rojas, Maira Palacios y sus padres por su constante apoyo y por colaborar conmigo solidariamente en cada una de las etapas de mi formación docente.

Brigitte Marcela Gómez Rentería



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y
PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO
DE GRADO

Programa Académico Lic. en ed. básica-maternal

Fecha

Día	Mes	Año
14	Septie.	2016

Código del programa: 3469

Resolución del programa: _____

Título del Trabajo o Proyecto de Grado					
Ecuaciones de primer grado con una incógnita real. Un análisis de un texto escolar					
Se trata de:					
Proyecto ☐			Informe Final ☒		
Director					
Cristian Andres Hurtado Moreno					
Nombre del Primer Evaluador					
Maria Teresa Narvaez					
Nombre del Segundo Evaluador					
Angela Maria Gomez					
Estudiantes					
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto	
Evaluación					
Aprobado	☒	Meritorio	☐	Laureado	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐	Incompleto	☐
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		☐	Primer Evaluador	☐	Segundo Evaluador
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____					
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					
Firmas					
		Maria Teresa Narvaez			
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador	

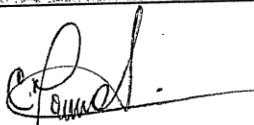
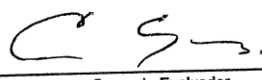
Recomendaciones ☒	Observaciones ☐	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐
Si se considera necesario, usar hojas adicionales.		
1. Las evaluadoras del trabajo consideran que este es claro y coherente, que el marco conceptual presentado es amplio y pertinente. En general el análisis del texto presentado es bueno. Por lo anterior el trabajo se evalúa como aprobado. 2. Es necesario ajustar algunas cuestiones de forma en relación con las referencias, citas y la tabla de contenido. 3. Se sugiere incluir dentro del trabajo la rejilla de análisis y no solamente en los anexos.		
Firmas		
 Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Maria Teresa Narvaez Primer Evaluador	 Segundo Evaluador

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	4
<i>1.1 Presentación de la problemática de estudio</i>	<i>5</i>
<i>1.2. Objetivos</i>	<i>11</i>
<i>1.2.1. Objetivo general</i>	<i>11</i>
<i>1.2.2 Objetivos específicos</i>	<i>11</i>
<i>1.3 Justificación</i>	<i>12</i>
<i>1.4. Diseño metodológico</i>	<i>15</i>
CAPÍTULO II: REFERENTES CONCEPTUALES	17
<i>2.1 Referente curricular</i>	<i>18</i>
<i>2.1.1 Sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en los Lineamientos Curriculares de matemáticas</i>	<i>19</i>
<i>2.1.2 Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas</i>	<i>24</i>
<i>2.2 Referente matemático</i>	<i>28</i>
<i>2.3 Referente didáctico</i>	<i>38</i>
<i>2.3.1 perspectiva de resolución problemas</i>	<i>38</i>
<i>2.3.2 Perspectiva histórica</i>	<i>43</i>
<i>2.3.3 Perspectiva funcional</i>	<i>46</i>
<i>2.3.4 Perspectiva de modelación</i>	<i>49</i>
<i>2.3.5 Perspectiva del álgebra como aritmética generalizada</i>	<i>52</i>
<i>2.4 Rejilla de análisis según los referentes conceptuales</i>	<i>53</i>
CAPÍTULO III: ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN EL TEXTO ESCOLAR	56

3.1 Selección y estructura general del texto escolar	57
3.1.1 Sobre la selección del texto escolar	57
3.1.2 Descripción de la estructura general del libro de texto Hipertexto Matemáticas 8	58
3.1.3 Descripción de la unidad referente a las ecuaciones en el libro Hipertexto Matemáticas 8	72
3.2 Las ecuaciones de primer grado en Hipertexto Matemáticas 8 a la luz de la rejilla de análisis	75
3.2.1 Categoría de análisis: referente curricular.....	75
3.2.2 Categoría de análisis: referente matemático.....	86
3.2.3 Categoría de análisis: referente didáctico.....	92
CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	96
4.1 Conclusiones	97
4.2 Recomendaciones didácticas	99
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101
ANEXOS.....	104
Anexo 1: Encuesta realizada a los docentes seleccionados.....	105
Anexo 2: resultados de la implementación de la encuesta.....	106
Anexo 3: presentación del texto	109
Anexo 4: unidad de análisis	125

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. <i>Dimensión conceptual de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real</i>	37
Tabla 2. <i>Dimensión procedimental de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real</i>	38
Tabla 3. <i>Rejilla de análisis teniendo en cuenta los referentes conceptuales</i>	55
Tabla 4. <i>Información general del texto</i>	59
Tabla 5. <i>Unidad 7: Ecuaciones e Inecuaciones</i>	73
Tabla 6. <i>Rejilla de análisis diligenciada teniendo en cuenta los referentes conceptuales</i>	95
Tabla 7. <i>Pregunta 2 de la encuesta realizada a los docentes</i>	105
Tabla 8. <i>Sistematización de la encuesta aplicada a los docentes</i>	106
Tabla 9. <i>Utilización de recursos externos al libro de texto por docentes encuestados</i>	107

ÍNDICE DE ESQUEMAS

Esquema 1. <i>Coherencia vertical y horizontal que guardan los estándares seleccionados de acuerdo con el trabajo de ecuaciones de primer grado con una incógnita real</i>	26
Esquema 2. <i>Estructura matemática del objeto ecuaciones de primer grado con una incógnita real</i>	33

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. <i>Portda del libro de texto Hipertexto matematicas 8</i>	58
Figura 2. <i>Herramientas generales del libro para docentes</i>	60
Figura 3. <i>Tips para el docente</i>	61
Figura 4. <i>Constructor de evaluaciones</i>	62
Figura 5. <i>Iconos de consulta en el libro para el estudiante</i>	62
Figura 6. <i>Inicio de las unidades de libro de texto Hipertexto matemáticas 8</i>	63
Figura 7. <i>Síntesis al final de cada unidad de Hipertexto matemáticas 8</i>	65
Figura 8. <i>Páginas especiales</i>	66
Figura 9. <i>Laboratorios con Cabri</i>	67
Figura 10. <i>Contenido general del texto Hipertexto matemáticas 8 unidades 1 a 5</i>	70
Figura 11. <i>Contenido general del texto Hipertexto matemáticas 8 unidades 5 a 10</i>	71
Figura 12. <i>Recuadros de dialogo</i>	74
Figura 13. <i>Tomado del de texto Hipertexto matemáticas 8, edición para el docente pag.77</i>	
Figura 14. <i>Competencias generales Vs ejercicios, ejercicios 5 y 6 página 175</i>	78
Figura 15. <i>Competencias generales Vs ejercicios, ejercicios 5 y 6 página 177</i>	79
Figura 16. <i>Ejercicio 7, página 175</i>	80
Figura 17. <i>Ejercicio 4, página 182</i>	81
Figura 18. <i>Ejercicios 5 a 11, página 195</i>	82
Figura 19. <i>Ejemplo 4, página 179</i>	83
Figura 20. <i>Soluciona problemas página 193</i>	85
Figura 21. <i>Definición y partes de una ecuación, página 172</i>	87
Figura 22. <i>Ecuaciones con raíces racionales, página 183</i>	88
Figura 23. <i>Propiedad fundamental de las igualdades</i>	90
Figura 24. <i>Mapa conceptual de las ecuaciones en Hipertexto matemáticas 8</i>	91
Figura 25. <i>Planteamiento de ecuaciones para resolver problemas</i>	93
Figura 26. <i>Datos obtenidos en la sistematización de la encuesta para la selección del libro de texto</i>	107

RESUMEN

En este trabajo se reconoce la importancia de la necesidad formativa que demandan algunos docentes en el momento en que se abordan tareas esenciales de su quehacer cotidiano. Para nadie es un secreto que los libros de texto juegan un papel importante dentro de estas tareas esenciales, son uno de los recursos didácticos de mayor uso por la mayoría de docentes en la planificación, preparación y evaluación de las clases, convirtiéndolos en un recurso valioso, que en efecto, aporta elementos importantes para pensar actividades de aula, no obstante, en otros casos estos pasan de manera transparente por el aula de clase, es decir, sin ningún tipo de análisis, modificación o rediseño.

Por lo anterior, teniendo en cuenta también las múltiples dificultades reportadas en cuanto a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real surge la necesidad de realizar un análisis de texto detallado que gire en torno a la propuesta que se realiza de estas en *Hipertexto matemáticas 8, edición para el docente*. Esto por medio de la construcción de una rejilla de análisis a partir de referentes como el curricular, matemático y el didáctico que dotan de elementos fundamentales para el respectivo análisis.

A lo largo del análisis, se observa que no es tomada en cuenta la propuesta que desde una perspectiva histórica se realiza y que tiene que ver con la introducción del álgebra escolar por medio de la resolución de problemas, de situaciones que propicien contextos enriquecedores y que se articulen de una u otra manera con otras ciencias para enriquecer el conocimiento matemático y generar habilidades en los diferentes pensamientos. Más bien, es notorio como la propuesta realizada por el libro de texto analizado asume una postura que va más hacia la presentación tradicional del objeto matemático en cuestión.

Palabras claves: álgebra escolar, análisis de texto, ecuaciones de primer grado con una incógnita real

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación y formación en Didáctica de las Matemáticas del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. En este se retoman distintas producciones de la investigación comprendida en didáctica del álgebra escolar para sustentar que pese al gran volumen de propuestas de aula, enfoques teóricos, propuestas metodológicas, e incluso distintas perspectivas para la introducción del álgebra escolar como las presentadas por Bednarz & Kieran & Lee (1996), la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela sigue siendo objeto de preocupación y debate para la agenda actual en Educación Matemática, en tanto se siguen presentando múltiples dificultades, obstáculos y errores que se oponen a su aprendizaje (Gallardo & Rojano, 1988; Socas, 1997).

Partiendo de tal reconocimiento, en este trabajo se hace énfasis en aquellas dificultades y errores que presentan los estudiantes en torno al aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, cuando estas emergen como objeto de enseñanza en las aulas de clase, particularmente en los grados séptimo y octavo de la Educación Básica Secundaria. Esta idea es corroborada por investigadores como Gallardo & Rojano (1988), Kieran (1992), Rojano (1994) y Socas (2011), entre otros, en tanto se han encargado de reportar no solo la importancia del álgebra en la educación de los estudiantes para la formación de pensamiento matemático, sino también de resaltar las diferentes dificultades que se presentan tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del concepto matemático en cuestión. Algunas de las dificultades mencionadas por estos autores se relacionan con: el uso de métodos primitivos en la resolución de ecuaciones (la estrategia del tanteo, ensayo y error, entre otros), el corte didáctico en el estudio de estos objetos matemáticos, el cambio de convenciones que se usan de la aritmética al álgebra, la resolución de problemas, entre otros.

Por otra parte, la producción teórica en Educación Matemática también se ha encargado de resaltar el papel del libro de texto tanto en las prácticas de aula, en la planeación y el diseño curricular de los maestros, como en la actividad de los estudiantes, convirtiéndose como lo señala Arbeláez, Arce, Guacaneme & Otro (1999) en el recurso por excelencia de los docentes, siendo incluso en algunos casos en el único recurso para guiar su práctica

pedagógica. Lo anterior pone en evidencia la significativa incidencia que tienen los libros de textos en los contenidos escolares y su influencia tanto en docentes cómo estudiantes.

Por lo anterior, se considera importante revisar en este trabajo el impacto que tienen algunos libros de texto en la presentación de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. De este modo, en este trabajo se articulan dos perspectivas, por un lado, la relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y, por otro lado, aquella que tiene que ver con la influencia que el libro de texto tiene en esta enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Para lograr el propósito trazado en este trabajo el presente informe se estructura a partir de cuatro capítulos, los cuales se describen brevemente a continuación; el primer capítulo contiene la problemática que se fundamenta en algunas dificultades que se generan en el momento de abordar la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado reportadas por algunos investigadores, a su vez, en la importancia de los libros de texto y el análisis detallado que se puede realizar para su selección, cuando sea utilizado para el diseño y planeación en las aulas de clase. También, se encuentran los objetivos de la investigación y la justificación que pretende dar cuenta de la importancia de este trabajo en la Educación Matemática; el segundo capítulo, contempla los referentes conceptuales que se asumen como elementos fundamentales para el respectivo análisis del texto escogido, a saber, el referente curricular, matemático y didáctico.

Del mismo modo, el tercer capítulo contiene la presentación y el análisis del texto escolar *Hipertexto Matemáticas 8*, editorial Santillana (2010), el cual es objeto de estudio en este trabajo y ha sido escogido por medio de una encuesta realizada a treinta docentes en ejercicio del sector oficial y privado de la Educación Básica Colombiana. Para finalizar, el cuarto capítulo, presenta las conclusiones y recomendaciones didácticas del trabajo, las cuales parten de verificar lo realizado en la pregunta de investigación y los objetivos planteados, con el fin de identificar los conocimientos didácticos, que a partir de la recopilación teórica brindada por los referentes presentados en el capítulo II se deberían tener en cuenta en el proceso de realizar el análisis de un texto que será contemplado en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, también identificar los conocimientos curriculares, matemáticos y didácticos que se presentan en la unidad de análisis perteneciente al libro de texto, esto con el fin de aportar algunas recomendaciones

didácticas para las necesidades formativas que todo maestro demanda al llevar a cabo la enseñanza y aprendizaje de algún tema de las matemáticas escolares, específicamente, de las ecuaciones de primer grado.

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se abordan los aspectos generales que forman parte de este trabajo. Así, se presenta entonces la problemática que se basa en el reporte de algunas dificultades que giran en torno a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, la importancia de los libros de textos y el realizar un análisis detallado para su selección en el proceso de ser tenido en cuenta para el diseño y la planeación en las aulas de clase; también se encuentran los objetivos de la investigación, tanto el general como el específico, la justificación que pretende dar cuenta de la importancia de este trabajo en la Educación Matemática y en la formación docente y por último el diseño metodológico con el cual se desarrolla este trabajo

1.1 Presentación de la problemática de estudio

Hace poco más de cuatro décadas que la Educación Matemática como campo interdisciplinar, e incluso transdisciplinar, ha venido centrando su atención en el estudio de distintas problemáticas en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De este modo, el estudio sobre el papel que juegan los recursos, entendidos estos en un sentido amplio¹, en dichos procesos ha tomado relevancia por la investigación generada en este campo. Particularmente, Desde los años ochenta gran cantidad de investigadores como Coriat, (1997), Hernán & Carrillo (1988), Alcalá, M., Cachafeiro, L. & Pérez, L. (1994). Entre otros, se han interesado por estudiar cómo los maestros se apropian de diferentes recursos para afrontar o mediar en la actividad de aula, es decir, cómo enfrentar el diseño, la planificación, implementación y evaluación de actividades que permitan movilizar conocimiento matemático Astudillo, M., & Sierra, M. (2004).

Uno de los focos en el cual la investigación en Educación Matemática ha dedicado considerable atención durante las últimas décadas es el libro de texto en tanto recurso que media en los procesos de enseñanza y aprendizaje, estudios que en sus inicios, a mediados del siglo XX se realizaron de manera escasa, insuficiente y aislada. Posteriormente alrededor de la década de 1990, otras comunidades de investigadores manifestaron un interés genuino por abordar el análisis de textos escolares y comenzaron a realizarse las primeras investigaciones sistemáticas y pormenorizadas Tosi, C, (2011).

En relación con estos estudios Parcerisa (1996), Area (1991) y manifiestan que es habitual que el profesor utilice libros de texto en su práctica docente, mostrando que algunos maestros suelen seguirlos de manera lineal o al pie de la letra para la planeación y desarrollo de sus clases. Algunas de estas investigaciones corroboran la idea que expone Monterrubio, M. & Ortega, T. (2009) cuando afirma que en muchas ocasiones los libros de texto en el momento de ser seleccionados “son elegidos sin criterios profesionales objetivos, sin realizar un estudio sistemático para elegir el más adecuado a la docencia del centro educativo, a las necesidades educativas de sus alumnos y a su contexto” (p.473).

¹ De este modo, el estudio del papel que juegan los recursos entendidos estos en el sentido propuesto por Vega & Garzon (2011). La idea de recurso que proponen estos autores hace referencia “entendemos como recurso pedagógico a lo que congrega en una sola unidad de análisis el uso de los

En este orden de ideas, es posible evidenciar la presencia de una problemática en relación con el uso que los maestros dan a los textos escolares, ya que tal como lo reconocen los investigadores mencionados, es frecuente que los profesores los asumen como una directriz inmodificable para abordar su quehacer cotidiano, especialmente, para la enseñanza de las matemáticas y sin criterios adecuados para su selección. En relación a tal uso los libros de texto Trigo (1993) los considera como otra fuente de información en el proceso que se refiere a cómo las matemáticas se relacionan en el aula de clase y cómo en estas es posible encontrar quienes usan el libro de texto como un instrumento que se sigue al pie de la letra, valiéndose de ciertas sugerencias para presentar el contenido. De este modo, las clases de matemáticas terminan convirtiéndose comúnmente en la explicación y el paso del contenido matemático presentado en los libros de texto al tablero para que los estudiantes lo reproduzcan en sus cuadernos.

Al respecto, autores como Slovin citado por Kieran (1992) reconoce que no solo los profesores de algebra sino aquellos que pertenecen a otras ciencias parecen estar interesados sobre todo, por la organización de sus clases y por cumplir con el programa que se establece, sea por los estándares, lineamientos, políticas curriculares, instituciones, entre otros. También, muchos docentes procuran abordar el libro de texto haciendo énfasis en las explicaciones de los ejemplos que en este se presentan, asignando diferentes ejercicios creados o modificados por ellos mismos y que se obtienen de diferentes fuentes. Por lo que muchos profesores se consideran a sí mismos como fuentes transmisoras de información en este caso contenidos matemáticos.

De acuerdo a lo expuesto, el uso de los libros de texto puede configurarse como una problemática para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que finalmente se convierte en la única fuente de referencia para la mayoría de los profesores sin ningún criterio de selección. Por lo tanto, se torna importante analizar cómo los libros de texto abordan la enseñanza de conceptos particulares de las matemáticas escolares, puesto que tal como se ha venido indicando, estos representan un recurso de primera mano que los maestros usan para llevar a cabo la actividad de aula.

Del mismo modo que ha sido ampliamente reportado el papel que juegan los libros de textos escolares en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, también es de interés para la Educación Matemática reportar las múltiples dificultades que presentan los estudiantes

cuando el álgebra se convierte en objeto de estudio, en particular, aquellas que se presentan en torno a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, tal como se puede percibir en las investigaciones realizadas por Amerom (2002), Filloy & Rojano (1989), Gallardo & Rojano (1988). De igual modo, dificultades que han sido exploradas, expuestas y clasificadas, durante las últimas décadas por investigadores como: Kieran & Filloy (1989), Kieran (1992), Rojano (1994), Socas (2011), entre otros.

A continuación se presentan algunas de las dificultades reportadas por estos y otros investigadores con el propósito de evidenciar que la enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático ha sido y sigue siendo fuente de múltiples dificultades en la escuela.

Kieran (citado por Paralea, 1998) manifiesta que la enseñanza del álgebra en la secundaria generalmente empieza con los siguientes apartados: variables, simplificación de expresiones algebraicas, ecuaciones con una incógnita, y resolución de ecuaciones, y que en estos temas las dificultades que presentan los estudiantes se han centrado en tres aspectos, el primero, hace referencia al significado de las letras, es decir, el valor que se le ata a las variables en los diferentes problemas que se les presenta a los estudiantes, entre los cuales se contemplan problemas que se resuelven por medio de ecuaciones de primer grado; el segundo, relacionado con el cambio de convenciones que se usan de la aritmética al álgebra, por ejemplo, es notable como en la expresión aritmética $3 \times 5 = 15$ la operación multiplicación es representada por la letra x la cual cambia sustancialmente cuando esta misma letra es llevada al trabajo algebraico, connotando según sea el caso una incógnita específica, una variable o un número general (Ursini & otros, 2005); y el último aspecto está relacionado con el reconocimiento y uso de estructuras propias del álgebra, tales como la estructura de expresiones, ecuaciones, funciones, problemas verbales, entre otros.

Además de lo anterior Kieran (1992) también señala que es probable que los estudiantes que utilizan el método de cambiar de lado en la resolución de una ecuación realicen una simplificación del método de operar a ambos lados (propiedad uniforme), lo cual puede ser considerado trivial por el docente pero confundido por los estudiantes, que pueden comprenderlo como dos procesos diferentes. En este orden de ideas, esta investigadora indica que como al operar a ambos lados se hace énfasis en la simetría de la igualdad "...simetría que no se tiene cuando se usa la transposición. Es común que los estudiantes que utilizan el método de cambiar de lado y signo, no estén considerando la ecuación como un objeto

matemático” (p.7) Es decir, no toman en cuenta la propiedad uniforme de la igualdad y su amplio aporte en la resolución de ecuaciones de primer grado.

Por otro lado, Micolta (2008) resalta que frecuentemente algunos docentes cometen el error de pensar que las dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita se deben solamente a la complejidad de los conceptos matemáticos, cuando uno de los factores que influye significativamente en el origen de estas dificultades es el cambio de registro de representación cuando se les solicita a los estudiantes resolver algún problema que sea modelado por una ecuación. Los conflictos que se crean en dicha conversión se ubican, entre otros aspectos, en la identificación y correspondencia de las unidades y expresiones significantes que determinan el grado de congruencia entre las representaciones en ambos registros.

En una investigación generada por Gallardo & Rojano (1988) se establecen algunas áreas de dificultades comunes en el aprendizaje del álgebra elemental, entre las cuales se destacan aquellas que se relacionan con el uso de métodos primitivos en la resolución de ecuaciones (la estrategia del tanteo, ensayo y error, entre otros) y el corte didáctico en el estudio de estos objetos matemáticos.

En relación con la primera dificultad estas investigadoras encontraron como los estudiantes entrevistados (entre los 12 y 13 años de edad), por distintas razones, se enfrentan a la resolución de ecuaciones utilizando métodos que usaban en el trabajo aritmético, aun cuando el uso de estos métodos representa altos costos, esto debido a que les son familiares. En la primera etapa del estudio se encontró como los estudiantes para resolver ecuaciones como $5x = 2570$ hacen uso bien sea por medio de la calculadora o no, de un trabajo sistematizado en cual se intenta con varios números 225, 325, 464, 511 para la incógnita, de tal manera que dé el producto que se pide.

Otra dificultad que se reporta en la misma investigación hace referencia a lo que las autoras llaman el corte didáctico, que consiste en el momento en que se trabaja con ecuaciones aritméticas, es decir, con una ocurrencia de la incógnita (por ejemplo ecuaciones de tipo $ax + b = c$ a trabajar con ecuaciones no aritméticas, aquellas que tienen doble ocurrencia de la incógnita (por ejemplo ecuaciones de tipo $ax + b = cx$). Tales dificultades devienen en que en las primeras ecuaciones no es necesario operar la incógnita (lo

representado) mientras que con el segundo tipo de ecuaciones si lo es, lo cual es propio del razonamiento algebraico, en otras palabras, mientras las ecuaciones aritméticas se pueden resolver por métodos como el tanteo o la sustitución, ensayo y error (métodos informales) la segunda ecuación se ubica en un tratamiento propiamente algebraico en tanto es necesario manipular la incógnita a partir de las propiedades de la igualdad y del conjunto de los números reales, en donde las dos ecuaciones viven en naturalezas distintas. Las ecuaciones aritméticas pertenecen a una naturaleza distinta al de las ecuaciones no aritméticas, esto se debe a que en las primeras no existe la necesidad de manipular el objeto no representado, sino, que se realizan los debidos procedimientos trabajando en aquellas cantidades que se conocen, aplicando en estas métodos de solución como el tanteo, la sustitución, (métodos informales) entre otros. Mientras que la naturaleza de las ecuaciones no aritméticas, lo mencionado es totalmente distinto, esto debido a que a pesar de operar las cantidades conocidas, también debe operarse lo representado (incógnita). Por lo anterior, el trabajar con un tipo de ecuaciones bajo una naturaleza y con otro tipo en otra naturaleza lo que las autoras llaman corte didáctico.

Una de las dificultades que se presenta en este *corte didáctico* (en el trabajo con ecuaciones no aritméticas) es la polisemia de la incógnita, es decir, cuando se les presentan a los estudiantes ecuaciones con doble ocurrencia de la incógnita. Aquí en algunas ocasiones se hacen distintas lecturas de la misma, esto se debe, a que pueden interpretarla como una incógnita en un miembro de la ecuación o como un número generalizado a la vez, en el otro miembro de la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación ($2\underline{x} + 6 = 3x + 3$), la primera letra puede valer 3 (la subrayada) y en esa misma ecuación ($2x + 6 = 3\underline{x} + 3$) la segunda ocurrencia de la letra (la subrayada) puede tener cualquier valor. Estamos ante la presencia de la polisemia de la letra, en otras palabras, en una doble lectura de la incógnita en la misma ecuación. De acuerdo con lo anterior, Gallardo & Rojano (1988) concluyen al respecto, que los estudiantes lo que pretenden en todo momento es en conservar la cantidad en ambos lados de la ecuación, lo que refleja que no tienen conciencia aun de la noción de igualdad condicionada, que en otras palabras, hace referencia a la noción de ecuación.

Por otra parte, el análisis de los resultados de las evaluaciones elaboradas por el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMMS (2007) resaltan, entre otros aspectos, algunas dificultades que presentan los estudiantes en relación con la solución de problemas en el ámbito de las ecuaciones de primer grado, las cuales se pueden ubicar en dos

grandes aspectos esto es: a) la falta de apropiación de procedimientos y algoritmos para hallar la solución de ecuaciones lineales con más de una ocurrencia en la variable, y b) el paso de una situación problema expresada en forma verbal a otro modo de representación, tales deficiencias aumentan si la situación no es directa e involucra relaciones u operaciones. En relación con esta última dificultad, el TIMMS (2007) señala enfáticamente que “El tema relativo al álgebra denominado ecuaciones y fórmulas en el desempeño de resolución de problemas se identifican como particularmente crítico” (p.97)

En suma, se observa que a partir de las dificultades en torno a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real aquí reportadas, cómo la comunidad de investigadores en Educación Matemática ha mostrado gran interés por este objeto matemático.

En relación con las dos problemáticas expuestas, esto es, aquella que gira en torno al uso de los libros de texto y las que se presentan cuando las ecuaciones de primer grado con una incógnita real son objeto de estudio en las aulas de clase, frente a esta situación se intenta abordar de manera articulada lo mencionado y así poder responder en este trabajo a la pregunta:

¿Cuál es la propuesta de enseñanza que se presenta de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en un texto escolar de octavo grado de la Educación Básica Colombiana?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

- Analizar y caracterizar la propuesta de enseñanza que se presenta de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en un texto escolar de la Educación Básica Colombiana.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar elementos teóricos en torno a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real desde las perspectivas curricular, matemática y didáctica, que brinden variables de análisis para el texto escolar.
 - Describir, a la luz de las perspectivas mencionadas, el tratamiento que presentan los textos escolares de octavo grado de la Educación Básica en torno a de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real.
- Determinar algunas bondades o dificultades que presenta el libro de texto analizado para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en la escuela, aportando así algunas recomendaciones.

1.3 Justificación

Para nadie es un secreto que los libros de texto son uno de los recursos didácticos de mayor uso por los maestros en la planificación, preparación, desarrollo y evaluación de las clases de matemáticas, siendo de este modo, un recurso valioso, que en efecto, aportan elementos importantes para pensar actividades del quehacer matemático del docente, tales como, la selección y reproducción de ejercicios, contenidos, actividades, problemas, entre otros, siendo estos modificados en muchas ocasiones por ellos, no obstante, en otros casos los mismos pasan de manera transparente por el aula de clase, es decir, sin ningún tipo de análisis, modificación o rediseño. En consideración con lo anterior Vargas (2003) indica la importancia de los libros de texto al considerarlos como:

“Un valioso instrumento educativo, dado que materializa los programas curriculares, ayuda a la organización y administración del tiempo, presenta información, verbal y gráfica estructurada pedagógicamente y propone actividades y ejercicios en sus páginas y fuera de ellas, que sirven para estimular y ayudar los procesos de pensamiento”. (p.12)

De acuerdo con esta idea y con la de investigadores como Schmidt & otros (citado por Marmolejo & González 2013) es posible caracterizar y definir el libro de texto como parte del currículo formal que circula en las aulas de clase, en tanto, colabora en las decisiones que públicamente toma el maestro para diseñar su plan de trabajo concreto: lecciones, actividades, evaluaciones, entre otros, y en lo que se espera que el alumno aprenda (Caviedes, 2011). Por lo que se puede afirmar, sin duda alguna, que los libros de texto juegan un papel fundamental en el sistema educativo, dada la significativa incidencia que tienen en los contenidos escolares y su influencia tanto en docente como estudiantes. Lo anterior hace que los análisis de textos se conviertan en un elemento valioso para la actividad educativa en general, y en particular para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que estos análisis pueden develar juicios sobre la pertinencia de los libros que circulan en las aulas de clase.

Así, el análisis de textos escolares es importante puesto que brinda a los docentes elementos metodológicos y conceptuales claves con los cuales se logre identificar diferentes potencialidades o dificultades que presentan los libros de textos, con lo que su selección se

realice con criterios claros y fundamentados, atendiendo a las necesidades curriculares, institucionales, estudiantiles y de contexto.

Otro aspecto importante que justifica la pertinencia de este trabajo está relacionado con el concepto matemático sobre el cual se hace énfasis para realizar el análisis de los textos seleccionados, esto es: las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, puesto que, cómo se presentó en la problemática, existen diferentes investigaciones que muestran cómo su enseñanza y aprendizaje en el aula de clases ha sido y siguen siendo fuente de dificultad tanto para profesores como para estudiantes, por lo que se considera aquí que el análisis de textos escolares en relación con la manera en cómo se presenta este objeto matemático puede contribuir a explicar la presencia de algunas de estas dificultades y establecer estrategias para hacerles frente.

Además de esto, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN,1998) y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN,2006) se reconoce la importancia del trabajo con este concepto matemático, estos dos documentos particularmente resaltan que las ecuaciones de primer grado con una incógnita real permiten modelar un gran campo de fenómenos pertenecientes no solo a las matemáticas mismas (Geometría, Estadística, Análisis Matemático, entre otras), sino también, fenómenos relacionados con la vida cotidiana de los sujetos y diferentes ciencias (que se relacionan con porcentajes, química, física, entre otros); permitiendo que los sujetos se desenvuelvan de una mejor manera en cada una de sus áreas.

Otra razón por la escogencia del concepto matemático seleccionado en este trabajo para realizar el análisis de textos parte de reconocer a partir de la experiencia de la autora de este trabajo (como estudiante de la Educación Básica y Media) se identifica como en el aula de clases se le da mayor preponderancia o énfasis a los tratamientos simbólico-algebraicos para hallar la solución de una ecuación, la cual se fundamenta en la memorización de reglas, de otro lado, pocas veces hay una reflexión en torno a la solución misma en relación con la ecuación planteada, aun cuando se hace énfasis en los tratamientos para resolver ecuaciones falta generar más conciencia de porque o como se generan las ecuaciones equivalentes, sobre las propiedades que las fundamentan, el campo semántico de las ecuaciones se desliga del objeto matemático.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de primer grado se convierten en un concepto fundamental de estudio en las matemáticas, pero también, para enfrentar los problemas sociales y culturales que se le puede presentar a cualquier sujeto a lo largo de su vida.

Tal cual como se ha venido describiendo y de acuerdo con todos los elementos descritos en este apartado, se torna importante un análisis de textos en relación con este concepto matemático. Por lo que se articulan de tal manera que brinden o evidencien algunos aspectos que ayuden a aclarar la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, colaborando en la disminución de muchas de las dificultades que pueden presentarse en su momento de enseñanza y aprendizaje, puesto que, manejan cierto grado de dificultad en el momento en que se les relaciona con aspectos numéricos y algebraicos.

Igualmente, es importante resaltar que este trabajo aporta a la formación investigativa de la autora, puesto que el realizar un trabajo sistemático donde se recopilen investigaciones realizadas en didáctica del álgebra en relación con un concepto en particular de su estudio y de los libros de texto de manera organizada permite documentarlas, con lo que se gana elementos formativos de tipo conceptuales, teóricos, sistemáticos, metodológicos y organizados con los que la autora se apropia para una mejor interiorización sobre conceptos relacionados con las matemáticas, el álgebra, las ecuaciones y otras. Por otro lado, la práctica en la realización de este tipo de escritos ayuda a formación de experiencia investigativa.

Todo esto permite aportar algunas reflexiones que giran en torno a la enseñanza y aprendizaje de este concepto matemático, pero además sobre la pertinencia de los libros de texto cuando se enseña y aprende este concepto.

Por lo anterior, se espera que este trabajo genere algunas reflexiones críticas tanto para los maestros en formación como en ejercicio, en relación con el uso de los libros de texto, cómo también otras que permitan dar elementos para la escogencia del libro de texto que se debe llevar al aula de clase teniendo en cuenta las necesidades curriculares, institucionales, estudiantiles y de contexto. De modo que, también muestren la mejor manera en la que se deben agenciar los libros de texto en relación con la enseñanza y aprendizaje del concepto matemático que aquí se propone analizar.

1.4. Diseño metodológico

Este trabajo se enmarca en la línea de Didáctica de las Matemáticas, y en el paradigma de investigación cualitativa, en tanto se busca hacer un análisis de algunos textos escolares a partir de algunos elementos conceptuales tomados como referencia, en relación con un objeto matemático particular de estudio en la escolaridad básica. Para lograr este propósito el trabajo se desarrolla en distintas fases, las cuales se describen a continuación:

1.4.1. Primera fase: construcción del proyecto de trabajo

En esta fase se construyen los elementos que vertebran el trabajo que se está proponiendo, en este sentido, se ubica una problemática de estudio que de sentido al trabajo realizado, lo que concluye con una pregunta de indagación. Además de esto, se generan los objetivos para intentar responder a la pregunta planteada, la justificación del trabajo en términos de su pertinencia, tanto en el marco del análisis de textos escolares de matemáticas como en la didáctica del álgebra.

1.4.2. Segunda fase: análisis preliminares

Aquí se configuran distintos elementos conceptuales con el fin de obtener una rejilla de análisis para ser implementada en el análisis del texto escolar previamente seleccionado, en este sentido, se describen los distintos referentes conceptuales de orden curricular, matemático y didáctico que se articulan para dar soporte al diseño de la rejilla de análisis. Además de lo anterior, en esta fase también se contempla la selección de los dos libros de texto mediante una encuesta² (ver ANEXO 1), la cual fue aplicada a 30 maestros en ejercicio que dictan álgebra en las algunas instituciones de Cali, tanto del sector público como del sector privado.

1.4.3 Tercera fase: análisis de textos escolares

En esta fase, se realiza el análisis del texto escolar basado en la rejilla construida en la fase anterior, de este modo, el texto seleccionado es revisado a partir de los referentes conceptuales especificados en la segunda fase.

² Encuesta realizada al azar.

1.4.4. Cuarta fase: conclusiones y reflexiones

Es esta última, se exponen los resultados que se tienen de la fase anterior, es decir, del análisis del texto seleccionado. Además, se presentan algunas conclusiones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, en particular, se resaltan algunas reflexiones didácticas en relación con el uso de textos escolares en general que movilizan los procesos del objeto matemático en cuestión, identificando algunas bondades y dificultades que estos presentan, de tal manera que se aporte a la formación de profesores, y con ello también al campo de la Educación Matemática, particularmente, de la didáctica del álgebra.

CAPÍTULO II: REFERENTES CONCEPTUALES

En el presente capítulo se exhiben los referentes conceptuales que se asumen como elementos fundamentales para el respectivo análisis del texto escolar escogido, este teniendo en cuenta la rejilla de análisis. En este trabajo, se han considerado tres referentes a saber; el primero teniendo en cuenta los documentos oficiales emanados por el Ministerio de Educación Nacional, es decir, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006); en el segundo referente se encuentran algunas definiciones y conceptos de orden matemático, del mismo modo, se tienen en cuenta la dimensión conceptual y procedimental que emergen dentro del concepto matemático que se pretende analizar en los libros de textos escogidos; en el tercer referente se caracterizan algunas perspectivas de orden didáctico que se consideran importantes a la hora de realizar la introducción al álgebra escolar, los cuales han sido reportados por autores como Bednarz, N., Kieran, C. & Lee (1996); Filloy, & Rojano, (1985); Socas & Palarea, (1997). Tales perspectivas se conforman por: la perspectiva de resolución de problemas, histórica, funcional, de modelación y la perspectiva de aritmética generalizada que a lo largo de este capítulo se describen.

2.1 Referente curricular

La publicación de la Ley General de Educación en el año 1994 y la puesta en práctica de los diferentes mecanismos de evaluación y control que en ella se establecieron, han influenciado notablemente la educación colombiana, y con ello la labor del docente y el papel que este tiene en las aulas de clase, entre otros aspectos. Tal influencia ha conllevado a una nueva manera de pensar el ejercicio pedagógico del docente, que hoy en día de alguna manera es controlado y orientado por medio de distintas directrices permanentes. Así Castrillon, Uribe & Caro (2011) señalan cómo la implementación de las políticas de evaluación de la calidad de la educación y desarrollos curriculares han sido de gran interés convirtiéndose en un gran reto en todos los niveles de la educación colombiana.

Para intentar solucionar estos retos se establecieron años después lo que hoy se conoce como los Lineamientos de Curriculares en Matemáticas (MEN, 1988) y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) que son orientaciones y propuestas del Ministerio de Educación Nacional para guiar y apoyar la enseñanza y aprendizaje, en lo que aquí concierne, de las matemáticas. De este modo, estos documentos oficiales propician una reflexión sobre la actividad matemática del aula, del quehacer del docente, el conocimiento matemático y su naturaleza, la evaluación, los contenidos y su articulación para dar paso al desarrollo de competencias, aspectos curriculares, entre otros.

En este apartado se toman como referencia los aportes que realizan los dos documentos oficiales mencionados para la enseñanza y aprendizaje del álgebra en general, y de las ecuaciones en lo particular, esto con el propósito de analizar las propuestas y orientaciones que desde el Ministerio de Educación Nacional se hacen hacia las instituciones y particularmente hacia el trabajo de aula del maestro con el fin de promover el desarrollo de currículos que permitan generar habilidades y pensamientos matemáticos en los estudiantes.

2.1.1 Sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en los Lineamientos Curriculares de matemáticas

Los Lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el área de matemáticas en 1988, toman como punto de partida diferentes avances que se lograron en la Renovación Curricular, uno de los cuales se relaciona con la enseñanza de las matemáticas por el enfoque de sistemas en donde se tiene en cuenta su conocimiento con la didáctica. Haciendo referencia al trabajo por enfoques con sistemas en la actividad matemática de aula, los Lineamientos apuntan al desarrollo de pensamiento matemático en el estudiante y al desarrollo de competencias con las cuales sean capaces de enfrentarse a los diferentes retos de hoy, tales como los que se proponen en el diario vivir, el trabajo, el tratamiento de conflictos, el tratamiento de la cultura, entre otros, para conseguir y construir una vida sana. (MEN, 2006)

Por lo anterior, estos documentos establecen orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas haciendo un gran énfasis en las diferentes posturas filosóficas de las matemáticas, el quehacer del docente y particularmente la propuesta curricular que emana para las instituciones colombianas y para los maestros de la Educación Básica y Media.

De este modo, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1988) son ante todo una orientación curricular para las instituciones educativas y maestros del país, la cual parte de la articulación coherente de tres aspectos, a saber: el contexto, los conocimientos básicos y los procesos generales. Cada una de estas dimensiones se describe de manera general a continuación.

El contexto hace referencia en su sentido más amplio al entorno sociocultural, al ambiente local, regional, nacional e internacional, donde se viven diferentes situaciones y se estudian distintas áreas de conocimiento. Tiene que ver con los ambientes que rodean a los estudiantes y que le dan sentido a las matemáticas que aprenden, con los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo (MEN, 1998); por otro lado, el contexto debe tenerse en cuenta en el momento en que se diseñan y ejecutan las experiencias didácticas, otorgándole también un papel importante al maestro. Como lo señala el MEN (1998) en la siguiente propuesta: “se hace necesaria la intervención continua del maestro para modificar y enriquecer ese contexto

con la intención de que los estudiantes aprendan” (p.19). Y así, tal intervención genera preguntas y situaciones interesantes donde los estudiantes al relacionarlas con sus entornos diarios les otorgan mayor sentido a las matemáticas.

En relación con este asunto, los Lineamientos Curriculares (MEN, 2006) en una gran relación con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, establecen cómo el contexto donde se genera el aprendizaje de las matemáticas no debe considerarse solamente como un espacio físico sino sociocultural, donde se construye y da significado a las actividades y los contenidos matemáticos que son presentados a los estudiantes, estableciendo de este modo conexiones con la vida cotidiana, con las demás actividades de la institución educativa, con las demás ciencias y otros ámbitos de las mismas matemáticas.

Es entonces importante conocer y poner en juego los contextos que se pueden generar en las aulas de clase para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, debido a que, cuando se diseñan y preparan situaciones problema, proyectos de aula, actividades y otras situaciones de aprendizaje, se puedan adaptar al contexto más cercano de los estudiantes con el ánimo de despertar en ellos el interés por las actividades que les son presentadas y así acceder al conocimiento matemático de manera más significativa. Es importante además resaltar que estos contextos no deben dejar por fuera las demás áreas de estudio pues estas también se convierten en escenarios propicios para proponer y generar actividades de aula en las clases de matemáticas.

Por su parte, los *conocimientos básicos* se integran desde dos marcos, los contenidos que serán enseñados, y las habilidades relacionadas con los contenidos matemáticos; cuya finalidad tienen que ver con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con los sistemas propios de las matemáticas. Así cinco tipos de pensamiento se caracterizan como propios del pensamiento matemático, estos son:

El pensamiento numérico que es la comprensión y habilidad que tiene los estudiantes en el manejo de los números y las operaciones, la habilidad para estimar, el trabajo con los algoritmos y la realización de conjeturas sobre tipo de respuestas y procedimientos aritméticos.

El pensamiento espacial, el cual se va desarrollando cuando los estudiantes logran habilidades para visualizar objetos inexistentes y poder manipularlos en el espacio, para ello se requiere el estudio de algunas propiedades que tienen los objetos en el espacio físico y geométrico, con las cuales les sea posible plasmar y realizar las respectivas representaciones mentales de objetos bidimensionales y tridimensionales.

El pensamiento métrico que hace referencia a la transformación de unidades y al estudio del uso de las propiedades geométricas en la resolución de problemas. Tiene que ver con la habilidad que tienen los estudiantes en el momento de desarrollar distintos procesos y construir conceptos, como las magnitudes y la medición.

El pensamiento aleatorio hace referencia a la capacidad de los sujetos para encontrar soluciones lógicas frente a problemas que no poseen soluciones claras. También, fomenta la formación de un espíritu investigativo por medio del cual la exploración, organización e interpretación de datos, conlleva a desarrollar procesos de comparación que posibilita realizar inferencias cualitativas, diseños, pruebas de hipótesis y simulaciones.

Finalmente, *el pensamiento variacional* centra su atención en la variación estableciendo una estrecha relación con los demás pensamientos, debido a que esta es posible identificarla en diferentes contextos, ya sean numéricos, espaciales, métricos. Este pensamiento corresponde a la habilidad que pueden alcanzar los sujetos para estudiar fenómenos de cambio y variación, la identificación y caracterización de estos en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas de representación. Particularmente, dentro del desarrollo de este pensamiento se encuentran diversos contenidos algebraicos como lo son las ecuaciones de primer grado con una incógnita real.

Los anteriores tipos de pensamiento se abordan desde los sistemas que les son propios a cada uno de ellos, los cuales vienen vigentes desde Renovación Curricular, estos son: los sistemas numéricos, los sistemas geométricos, los sistemas de medida, los sistemas de datos y los sistemas algebraicos y analíticos. De este modo, cada uno de estos sistemas permite el desarrollo del pensamiento al cual se le articula, sin embargo cabe resaltar que estos no lo agotan, es decir, es posible trabajar con los sistemas geométricos y apuntar también al

desarrollo del pensamiento numérico o métrico, o trabajar con los sistemas algebraicos y analíticos y apuntar al desarrollo del pensamiento numérico.

Finalmente, el tercer aspecto que se articula en la propuesta curricular emanada desde los Lineamientos son *los procesos generales*, los cuales se relacionan con la enseñanza y aprendizaje de los sujetos. Estos tienen que ver con el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, la comparación y ejercitación de procedimientos.

Así, *el razonamiento* empieza los primeros años de escolaridad apoyándose de los diferentes contextos y materiales físicos que se presentan en las aulas de clase, los cuales junto a otros factores permiten establecer relaciones, dar explicaciones, realizar conjeturas, afirmar o contradecir, proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones de las verdades matemáticas que están siendo presentadas. En los grados superiores, el razonamiento deja a un lado los modelos y materiales mencionados, y trabaja directamente con las diferentes teorías y proposiciones que fundamentan las matemáticas.

La resolución y planteamiento de problemas es un proceso que se presenta no solo en el desarrollo de una actividad matemática, sino a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas. Permite desarrollar la actitud mental y perseverante en los estudiantes, además de desplegar una serie de estrategias para resolver problemas, encontrar resultados, verificar, modificar condiciones y originar otros problemas.

La comunicación es la capacidad que tienen los seres humanos para expresarse, en relación con esta idea el MEN (1998) señala que esta “juega un papel fundamental pues ayuda a los niños a crear vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas” (p.74); por ejemplo, cuando los niños trabajan con ecuaciones y reconocen las distintas formas que hay para representar un problema y que existen unas que son más útiles que otras empiezan a comprender la flexibilidad y la utilidad de las matemáticas. Por lo que la comunicación se convierte así en la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas (MEN, 1998)

La modelación es entendida como un proceso donde se realiza una construcción mentalmente con el fin de usarse como referencia para poder apropiarse y manejar una idea o concepto que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático para lograr su comprensión. En atención con esta idea, el MEN (2006) señala que “puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente” (p.52)

La comparación y ejercitación de procedimientos involucra los estudiantes de tal manera que los lleva a comprometerse en la construcción y ejecución de los procedimientos mecánicos o de rutina que se les han enseñado con anterioridad. Un factor importante en este, es la automatización que requiere de repetidas prácticas para lograr un rápido y seguro desarrollo de procedimientos, lo cual no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento, pero sí a adquirir destrezas en la ejecución fácil y rápida de ciertas tareas. Otro de los factores que contribuye a este proceso general es que se exige al estudiante el hecho de poder explicar y entienda los conceptos, procedimientos y algoritmos que usa de tal manera que le permitan usar una lógica que los sustenta para darse cuenta cuando se puede o no hacer uso de determinado algoritmo para obtener un resultado de manera más económica. (MEN, 1998)

Finalmente, la manera de articular estos tres aspectos que hacen parte de la propuesta curricular del Ministerio de Educación Nacional (los contextos, los conocimientos básicos y los procesos generales) en las actividades es por medio de las situaciones problemáticas, las cuales permiten agenciar el desarrollo de habilidades en distintos contextos para potenciar los diferentes pensamientos y que apuntan a desarrollar ciertos procesos generales. Así, las situaciones problemáticas surgen como los medios que permiten articular los tres elementos mencionados. Las situaciones problemáticas deben involucrar un contexto matemático reconocible para los estudiantes, aportar al desarrollo de unos procesos generales a partir del desarrollo de distintos tipos de pensamiento matemático. Es por ello que el MEN (1998) establece las situaciones problemáticas como “el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas” (p.24).

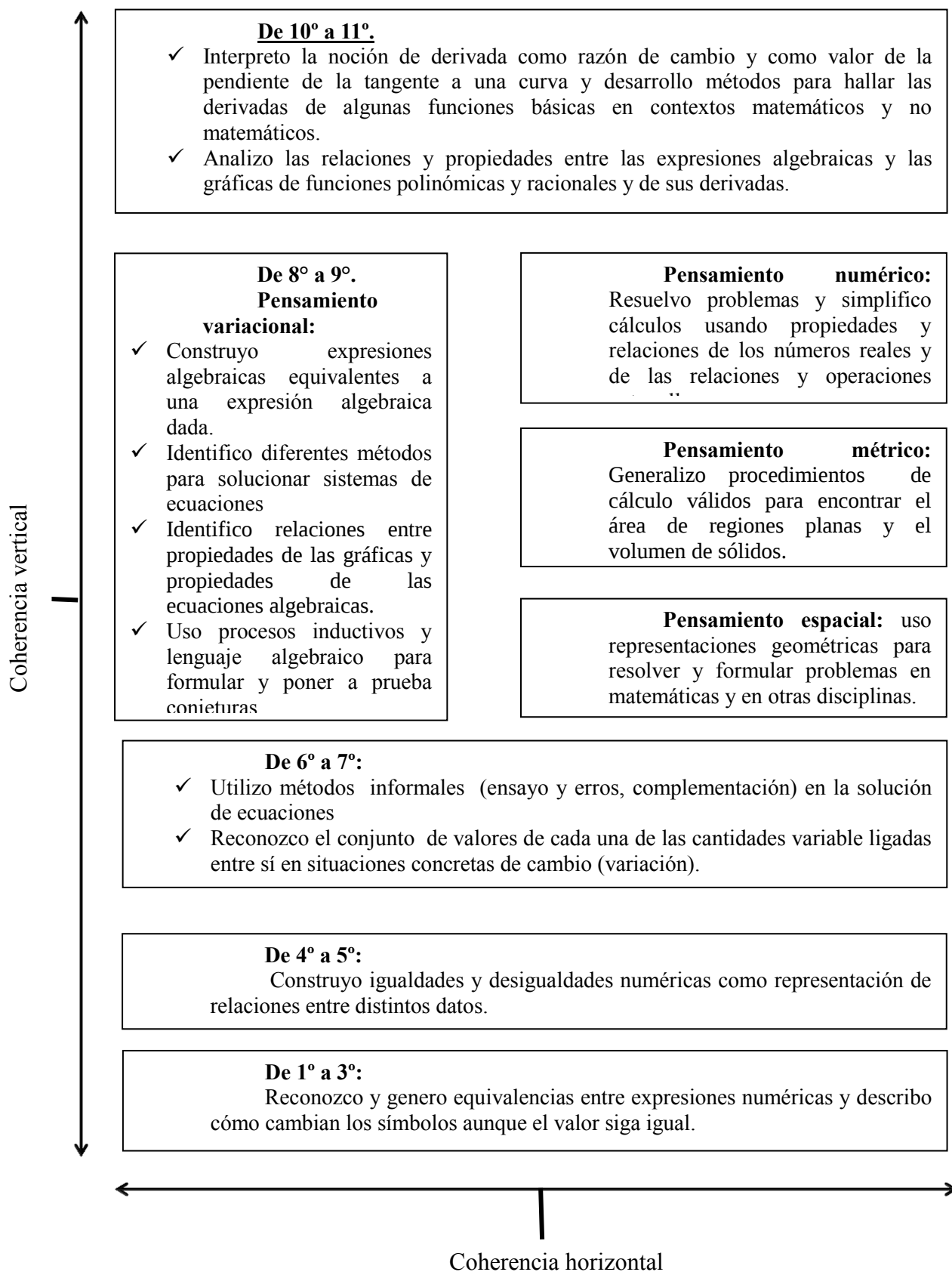
De acuerdo con la anterior descripción, el objeto matemático de interés en este trabajo (las ecuaciones de primer grado con una incógnita real) permite ubicar específicamente dentro de uno de los conocimientos básicos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos como foco prioritario de este proyecto.

2.1.2 Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

La manera como se aborda el pensamiento variacional en los estudiantes está completamente articulado con la idea propuesta en los Lineamientos Curriculares, ya que como se presentó, este pensamiento se caracteriza por la habilidad para estudiar fenómenos de variación y cambio en distintos contextos, así como su modelación y representación en distintos sistemas de representación. Cabe resaltar que este pensamiento sostiene una relación estrecha con los demás pensamientos, debido a que los fenómenos de variación y cambio es posible observarlos en escenarios numéricos, espaciales o métricos. En el desarrollo del pensamiento variacional se encuentran inmersos distintos conceptos matemáticos, entre los cuales se encuentran las expresiones algebraicas, las ecuaciones e inecuaciones, las funciones, etc.

Ahora bien, en relación con ecuaciones de primer grado con una incógnita real los Estándares sitúan el estudio de este concepto de manera central a partir de octavo grado, sin embargo, el trabajo con ecuaciones y particularmente con el concepto de igualdad, se aborda desde años anteriores, por ejemplo, con el estudio de igualdades no necesariamente en un sistema simbólico-algebraico, sino, posiblemente, aritmético. La anterior idea fundamenta el hecho de que el MEN (2006) indique que el conjunto de estándares que se presentan “debe entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo” (p.76). De este modo, los estándares guardan entre sí una coherencia vertical, la cual está dada por la relación existente de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados y, además, una coherencia horizontal dada por la relación que tiene un estándar específico con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados a lo largo del proceso educativo.

Por lo tanto, tomando como base los documentos oficiales, es posible señalar que el estudio de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real se fortalece desde los primeros años de escolaridad pero es abordado de manera central en grado octavo. Teniendo en cuenta lo anterior, y la estrecha relación que guarda este objeto matemático con los aportes que realizan los demás pensamientos matemáticos, surge la necesidad de relacionar estos estándares con las coherencias. Por un lado, con la coherencia horizontal que hace referencia a la manera en que en años anteriores se viene fortaleciendo de alguna manera las competencias que contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional, en general, y particularmente a la comprensión del concepto de ecuación, dentro del cual emergen conceptos como: el concepto de igualdad, relación de orden, relación de equivalencia, entre otros. Por otro lado, los estándares también guardan relación con la coherencia vertical que se da como relación de un estándar con los estándares de otros grados en el mismo pensamiento. Finalmente, considerando el objeto de estudio de este trabajo, a continuación, en el esquema 1 se han escogido los estándares del ciclo 8° - 9° con el que se muestra la relación descrita entre los estándares y las coherencias en ambos sentidos.



Esquema 1. Coherencia vertical y horizontal que guardan los estándares seleccionados de acuerdo con el trabajo de ecuaciones de primer grado con una incógnita real (esquema tomado de MEN, 2006 pag.79)

En el esquema anterior, muestra cómo la coherencia vertical se encarga de fortalecer desde los primeros años de escolaridad el trabajo con ecuaciones en general; como muestra de lo dicho, se hace énfasis en que los estudiantes en el inicio logren reconocer, identificar y construir relaciones equivalentes e igualdades, del mismo modo, a medida que avanzan estos deben contar con la capacidad de construir igualdades, desigualdades, utilizar métodos informales como el ensayo y el error en la solución de ecuaciones, entre otros, pues los objetos matemáticos mencionados son fundamentales en lo que confiere al trabajo con las ecuaciones en álgebra de octavo y noveno, debido a esto, las ecuaciones se convierten en un insumo potente y adquieren un grado de importancia en años posteriores, específicamente, en el momento en que se establece una relación entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones. Donde suscita un fenómeno que se modela por medio de una ecuación en los cuales es necesario que los estudiantes realicen procesos como intentar hallar los ceros de una función con el fin determinar los cortes de las gráficas con los ejes, hallar puntos máximos, mínimos, entre otros.

Del mismo modo, en el momento en el que el estudiante llega a los grados superiores pone en práctica los conocimientos adquiridos en el proceso de la coherencia vertical y horizontal con el fin de desarrollar diferentes situaciones que involucren el estudio de las ecuaciones, por ejemplo, cuando la noción de derivada como razón de cambio aparece, el estudiante se vale de la mayoría de conceptos aprendidos inicialmente para lograr establecer que la solución de situaciones en este contexto se relaciona con la capacidad de establecer variables, utilizar las propiedades de los números reales para encontrar el valor numérico de dichas variables, utilizar técnicas de derivación implícita, entre otros procesos.

En relación con lo anterior, la coherencia horizontal aporta significativamente al desarrollo del objeto matemático en cuestión, puesto que, tal coherencia brinda elementos pertinentes de pensamiento a pensamiento con los cuales es posible fundamentar aún más el trabajo con ecuaciones. Es decir, el pensamiento espacial, destaca el uso de representaciones geométricas, las cuales proveen una fuente de problemas o fenómenos geométricos que son resolubles por medio del trabajo algebraico, particularmente, por medio de ecuaciones. Muchos de estos fenómenos se encuentran dentro de un referente geométrico, dentro del cual, en algunas ocasiones lo que se pretende abordar es la métrica de dichos problemas, es decir,

situaciones en las que se involucran términos como áreas y volúmenes, donde las ecuaciones son fundamentales en la solución de este tipo de situaciones.

Por otro lado, sin desconocer la importancia de los demás pensamientos, se resalta el estándar ubicado en el pensamiento numérico, pues como se mencionó en la solución de ecuaciones en general desempeñan un papel importante las propiedades y relaciones de los números reales (propiedad cerradura, conmutativa, asociativa, distributiva, identidad, inverso, entre otras).

2.2 Referente matemático

Como se ha mencionado en este trabajo, el libro de texto juega un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra, entre otros factores, debido a que este es visto como uno de los recursos principales y de primera mano tanto para docentes como para estudiantes para guiar la actividad de aula. Por lo anterior, es necesario reconocer la influencia no solo de dichos recursos sino también de la presentación conceptual que en ellos se hace de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, objeto de estudio de este trabajo, pues, tal presentación puede favorecer o limitar el proceso de enseñanza y aprendizaje en las aulas de clase. Por este motivo se presenta un estudio acerca del objeto matemático en cuestión desde una perspectiva matemática, lo cual, brinda elementos de análisis importantes para el acercamiento a los libros de texto.

Para la presentación de este apartado, se toman en cuenta los aportes de Cole & Swokowski (2009) y Zill (2006), que se consideran fundamentales para exponer la manera como se entienden aquí los conceptos que emergen alrededor de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real.

Tal como expresan Allendoerfer & Oakley (1990) “**La ecuación**³ es una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas llamadas incógnitas”, o también llamadas

³ A manera de presentación se usaran negrillas para resaltar los conceptos que se exponen en este apartado.

indeterminadas. Del mismo modo, tales autores señalan que una ecuación de primer grado con una incógnita tiene la forma corriente de:

$$ax + b = 0$$

Donde a y b son números reales y $a \neq 0$ (siempre que la ecuación sea consistente o condicional). La cual recibe el nombre de ecuación de primer grado debido a que el mayor exponente de la incógnita x siempre es uno.

Ahora bien, si $ax + b = 0$ entonces $x = \frac{-b}{a}$, siempre que $a \neq 0$, luego la expresión $x = \frac{-b}{a}$ será la solución de la ecuación.

Dependiendo del tipo de ecuación estas se pueden clasificar en: ecuaciones de tipo identidad, consistente e inconsistente, a continuación se realiza la presentación de cada una.

De acuerdo con Calderón & Torres (2000) “**una ecuación será identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen” (p.256), es decir, se logra obtener una expresión de la forma $a = a$, donde a es cualquier expresión. Por ejemplo, la ecuación (1) presentada a continuación:

$$(1) 3x + 3 = 3(x + 1)$$

Es una ecuación identidad.

Las Ecuaciones condicionales tienen solución única (para el caso de las de primer grado), como lo señalan Calderón & Torres (2000) “si hay por lo menos un numero en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación” (p.257), entonces esta será una ecuación condicional, por lo cual existen números en los dominios de las expresiones algebraicas que no pertenecen al conjunto solución de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación:

$$x + 6 = -4(x + 1)$$

Es una ecuación condicional dado que la igualdad se satisface únicamente para $x = -2$, de este modo -2 es solución de la ecuación. Así, una solución o raíz de una ecuación es cualquier número que al ser reemplazado ella, hace que se convierta automáticamente en una proposición verdadera.

Por su parte, en **las ecuaciones inconsistentes** se tiene que

$$\text{Si } ax + b = 0$$

Donde $a = 0$ da lugar a las ecuaciones inconsistentes, es decir, se obtiene la expresión $b = 0$ en donde no necesariamente se cumple la igualdad anterior, pues es posible que se presente una inconsistencia como $3 = 0$. Por lo tanto, en este tipo de ecuaciones es factible exponer que el conjunto solución de la ecuación es vacío. Por ejemplo, la siguiente ecuación es de tipo inconsistente

$$2(2x - 1) = 4x + 5$$

$$4x - 2 = 4x + 5$$

$$4x - 4x = 5 - 2$$

Dado que luego de tratarla se obtiene:

$$0 = 7$$

Tal y como se expresó cuando se definió la ecuación identidad **el dominio de la variable** aparece como concepto fundamental para su estudio. Este se entiende de acuerdo con Calderón & Torres (2000) como un subconjunto del conjunto de referencia el cual se encuentra constituido por los elementos que permiten que la expresión tenga sentido en el conjunto donde ella se define.

Ahora bien, en los tres tipos de ecuaciones mencionados **el conjunto solución** cambia radicalmente de una a otra, pues el conjunto solución para las ecuaciones identidad es infinito, en una condicional está dado por un único elemento, es decir, tiene un conjunto unitario como conjunto solución y en una inconsistente el conjunto solución es vacío $\{ \}$. Tal como lo señalan Allendoerfer & Oakley (1990) “la solución de una ecuación es el subconjunto S de U, formado por los elementos de U que verifican la ecuación dada, S. Este se llama con frecuencia el conjunto solución y es por consiguiente el conjunto de verdad de la proposición definida por la ecuación dada”.

Por otra parte, **las ecuaciones equivalentes** son entendidas como aquellas ecuaciones que tienen exactamente el mismo conjunto solución, por ejemplo, las ecuaciones (1) y (2) siguientes son equivalentes en tanto en ambos casos el conjunto solución está dada por $\{2\}$.

$$(1) 4x + 2 = 10$$

$$(2) 4x = 8$$

De esta manera, en el desarrollo de las ecuaciones presentadas, juegan un papel importante las propiedades y relaciones de los números reales, tales como, elemento inverso, elemento neutro, la propiedad conmutativa, distributiva y asociativa que hacen que dicho conjunto cumpla la propiedad de ser un anillo.

Tal como se indicó una ecuación es una igualdad y las igualdades en tanto relaciones binarias son casos particulares de las relaciones de equivalencia, las cuales cumplen las siguientes propiedades que permiten definir una la relación como *relación de equivalencia*.

- Una relación R en un conjunto A se denomina **reflexiva** si para todo $x \in A$ entonces $(x, x) \in R$

En otras palabras, una relación R sobre un conjunto A será reflexiva si cada elemento de $x \in A$ está relacionado consigo mismo.

Ejemplo:

Para $A = \{a, b\}$, una relación R sobre A será reflexiva si $\{(a, a), (b, b), (a, b)\} \subseteq R$. Por lo que $R_1 = \{(a, a), (b, b)\}$ no es una relación reflexiva en A , mientras que $R_2 = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ si lo es.

- Una relación R en un conjunto A se denomina **simétrica** si para todo $x, y \in A$ entonces $(x, y) \in R$ implica que $(y, x) \in R$

Ejemplo:

Para $A = \{1, 2, 3\}$ una relación R sobre A se tiene que:

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$ Es una relación reflexiva pero no simétrica

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ Es una relación reflexiva y a su vez simétrica

- Una relación R en un conjunto A se denomina **transitiva** si para todos los $x, y, z \in A$ entonces $(x, y), (y, z) \in R$ implica que $(x, z) \in R$

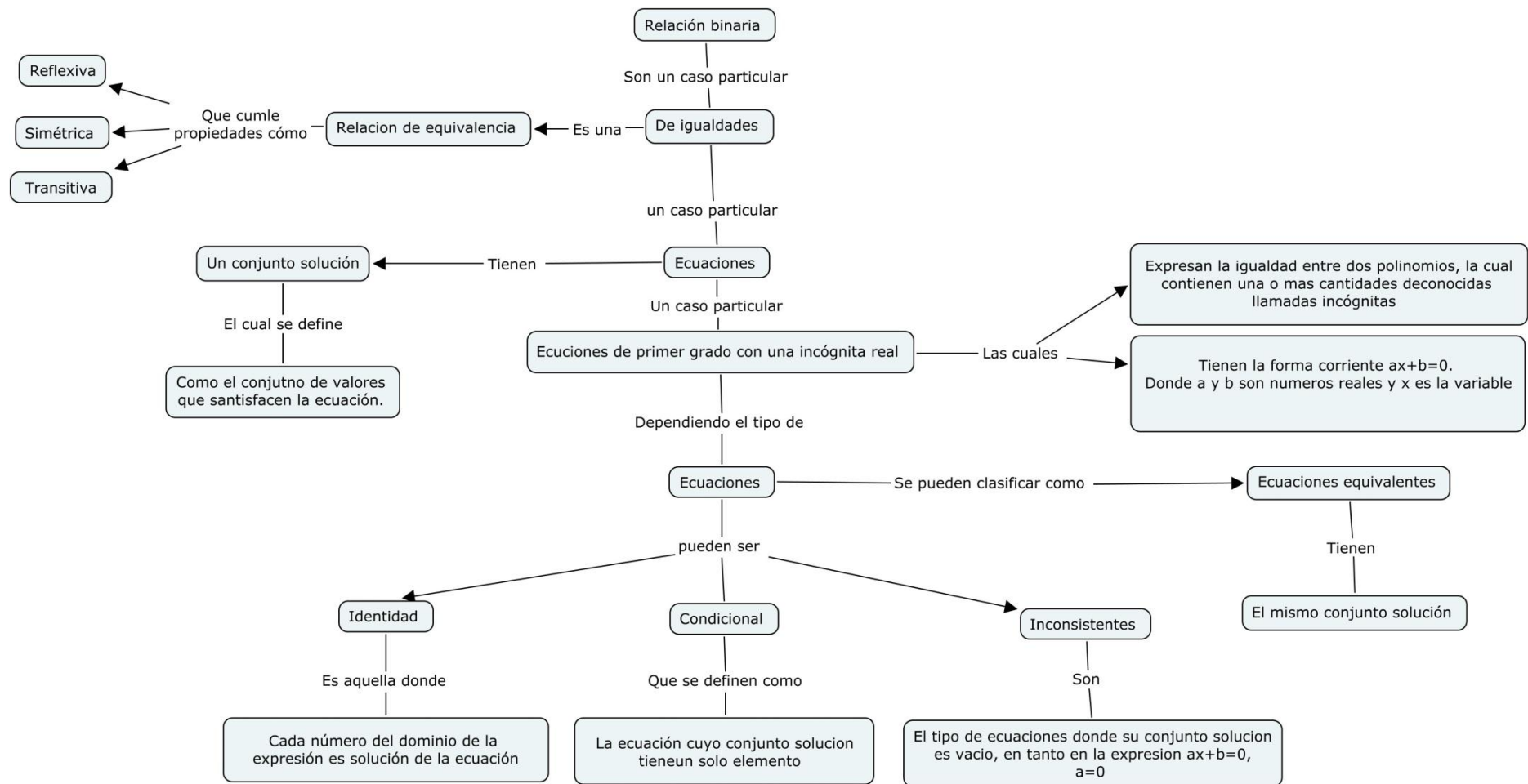
Ejemplo:

Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, una relación R sobre A se tiene que:

$R_1 = \{(2, 2), (3, 4), (4, 5), (3, 5)\}$ Es una relación transitiva en A .

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ No es una relación transitiva pues la pareja ordenada $(2, 4)$ no se encuentra en la relación.

A continuación se muestra el esquema 2 en donde se exhiben las posibles relaciones entre los conceptos expuestos en este apartado.



Esquema 2. Estructura matemática del objeto ecuaciones de primer grado con una incógnita real

Hasta aquí se han presentado conceptos y propiedades que emergen, se relacionan y se articulan en el estudio de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real desde una perspectiva exclusivamente matemática. Sin embargo, tomando como referencia el objetivo de este trabajo, existen varias propuestas para llevar a cabo el análisis de los textos de matemáticas, algunas guiadas a examinar lo curricular, lo semiótico u otras perspectivas. Por ello, para fines de este trabajo, cuyo propósito principal es el análisis de la presentación que realizan los textos de matemáticas alrededor del concepto de ecuación de primer grado con una incógnita real, se toma como punto de partida la postura que desde de los contenidos curriculares para la organización de los contenidos en el currículo actual de matemáticas presenta Rico (1996) quien indica la posibilidad de realizar una lectura de corte cognitivo de las matemáticas escolares, generando la existencia de un corte cognitivo que permita explicar tales matemáticas. Tal postura se fundamenta teniendo en cuenta la articulación de dos ejes, a saber, la dimensión conceptual y procedimental. Así contemplando la investigación del autor, es posible hablar de la dimensión conceptual, entendida como

“El conocimiento conceptual que se caracteriza más claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede pensarse como una membrana conectada de conocimiento, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. Las relaciones saturan los hechos y proposiciones individuales de modo que todas las piezas de información están conectadas a una red. De hecho, una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información: por definición es una parte del conocimiento conceptual solo si su poseedor reconoce su relación con otras piezas de información” (p.15)

Mientras que la dimensión procedimental se fundamenta mediante el conocimiento procedimental el cual consiste en los modos de ejecución ordenada de una tarea y se encuentra constituido por

“Reglas, algoritmos o procedimientos empleados para resolver una tarea. Hay instrucciones paso por paso que prescriben como concluir una tarea. Un rasgo clave de los procedimientos es que se ejecutan en una secuencia lineal predeterminada. Es la naturaleza claramente secuencial de los procedimientos la que probablemente los diferencia de otras formas de conocimiento” (p.16)

Ahora bien, con relación a este autor, en la dimensión conceptual *los conceptos* se entienden como aquellos elementos con los que el ser humano se permite pensar, permitiendo dentro de este campo distinguir tres niveles de conocimiento, los cuales se caracterizan a continuación:

Los hechos son unidades de información que pueden ser utilizados para el registro de acontecimientos, dentro de los cuales es posible distinguir cuatro variables: *los términos* hacen referencia al léxico que se establece para nombrar ciertos conceptos o relaciones entre conceptos. *Las notaciones* son los símbolos que se usan generalmente en matemáticas para expresar ideas breves. *Los convenios* son acuerdos mutuos a los que se llegan con el fin de no generar ambigüedad sobre los significados de algunos objetos matemáticos, evitando realizar largas explicaciones. Por último, se tienen *los resultados* que se obtienen de manera directa cuando se da la relación entre términos, permitiendo de este modo que el trabajo en matemáticas no parta siempre desde cero.

Dentro de esta estructura conceptual también forman parte **los conceptos** y son aquellos que destacan relación entre un conjunto de hechos con los que se admite un modelo el cual es descrito mediante signos. Por otro lado, se encuentran **las estructuras conceptuales** quienes son utilizadas para la unión de conceptos, estableciendo en algunas ocasiones conceptos de orden superior.

Dicho lo anterior, se caracteriza la dimensión procedimental donde *los procedimientos* son las diferentes formas de actuar o ejecutar en su momento una tarea matemática, el cual dentro de este campo conceptual es posible clasificar en tres niveles; las destrezas, los razonamientos y las estrategias.

Las destrezas se refieren a las capacidades que se tienen en procesos de transformación de una expresión simbólica en otra expresión, las cuales se subdividen en destrezas aritméticas, métricas, geométricas, gráficas y de representación. Otro rasgo de esta dimensión, son *los Razonamientos* que realizan su aparición en el momento en el que se relacionan los conceptos, permitiendo establecer relaciones de inferencia entre ellos mismos. Por último, pertenecen a este campo *las estrategias* que se enmarcan dentro de la estructura conceptual, admiten cualquier tipo de procedimiento que pueda realizarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos que emergen en el momento en que la estrategia es utilizada.

A continuación, se presenta la tabla 3 y 4 donde se muestra las características de las ecuaciones de los criterios y niveles mencionados con anterioridad.

DIMENSIÓN CONCEPTUAL					
Los hechos				Conceptos	Estructuras conceptuales
Términos	Notaciones	Convenios	Resultados		
Símbolos Letras Términos Signos Grados Datos conocidos Datos desconocidos Despejar Miembros Incógnitas Identidad Igual Identidad Relación de equivalencia	$a, b, c, \dots, m, n, \dots, x, y, z$ $-3, -2, -, 5, 0, 1, 2, 3$ $=, +, -, \times, /$ $() , [, \{ \}$	Las ecuaciones son igualdades entre las expresiones algebraicas. El objetivo de este tipo de ecuaciones es siempre hallar el valor de la incógnita. Una incógnita es aquel dato que no se conoce. El grado de las ecuaciones lo define el exponente de las variables, por ejemplo: $(x + 3 = 5)$ es de grado uno. Las incógnitas o datos desconocidos se representan generalmente con las letras del alfabeto, particularmente las primeras o las ultimas (a, b, x, y, z). Se excluye el símbolo de la multiplicación $(\times)$, por el $(.)$ o la nada, por ejemplo: $(a \times c = ac = a.c)$ Esto con el fin de que el estudiante no confunda la letra x con el signo $\times$. El conjunto solución se entiende como el conjunto con aquellos elementos que satisfacen la ecuación.	La solución de una ecuación es el proceso que permite encontrar el o los valores que convierten la ecuación en una identidad. Se debe encontrar el valor de la incógnita Haciendo uso de las propiedades de los números reales es posible garantizar que: Si se suma o resta el mismo número a los dos lados de una ecuación, esta no se altera. Dado $a \in R$ si a se multiplica o divide a ambos lados de una ecuación, la ecuación no se altera si y solo si $a \neq 0$	Igualdad Incógnita Primer miembro Segundo miembro Ecuación Propiedades de las igualdades Identidad Polinomios Términos semejantes Ley uniforme	Estructuras numéricas en los Reales: Adición Sustracción Multiplicación División Símbolos Anillos

Tabla 1. Dimensión conceptual de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real

DIMENSIÓN PROCEDIMENTAL		
Destrezas	Razonamientos	Estrategias
Escritura y lectura de las ecuaciones	Inductivo	Presteza para ordenar expresiones
Crear ecuaciones equivalentes	Deductivo	Cálculo mental
Utilización de las operaciones aritméticas en el desarrollo de las ecuaciones		
Resolver ecuaciones a partir de un planteamiento		

Tabla 2. *Dimensión procedimental de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real*

2.3 Referente didáctico

Existen distintos autores que han reportado diferentes perspectivas para introducir el álgebra como objeto de enseñanza y aprendizaje en la escuela, perspectivas tales como: la funcional, generalización de patrones, resolución de problemas, histórica, el uso de las nuevas tecnologías, modelación, entre otras. Mason & otros (1985); Ursin & Tigreros (2005); Bednarz, Kieran & Lee (1996). A partir de lo reportado por estos y otros autores se realiza una descripción de algunas perspectivas que se consideran no solo permiten la introducción al álgebra en la escuela, sino que además se presentan como una vía para la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. El estudio de las perspectivas que se presentan arrojan variables de orden didáctico que deben ser aprovechadas por los maestros para llevar a cabo estos procesos, lo cual a su vez brinda elementos de análisis para revisar los textos escolares que serán objetos de estudio más adelante.

2.3.1 perspectiva de resolución problemas

Durante los últimos años, la resolución de problemas ha sido un tema de interés y debate en la investigación en Educación Matemática lo que ha permitido desarrollar distintos estudios en su entorno; a tal punto que investigadores logran señalar que la resolución de problemas es el eje transversal de la actividad matemática en el aula y la que mayor impulso genera en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Santos (2007), Schoenfeld (1985),

Lester & Kehle (2003). Esta idea se debe en gran medida a que autores como Cuicas (1999) señalan que la resolución de problemas toma en consideración situaciones que tienen aplicación en diversos fenómenos de la vida cotidiana de los sujetos, pero además, porque les brinda la posibilidad de poner en juego distintas maneras de intervenir a la hora de resolver tales situaciones, lo que autores como Schoenfeld (1985) denomina como heurísticas.⁴

En relación con este asunto, Polya (1945), Schoenfeld (1985) entre otros, brindan modelos o aportes importantes para tener en cuenta en la resolución de problemas, los cuales tienen aspectos tanto comunes como no comunes. Además de ello, estos autores caracterizan o de algún modo definen lo que es posible entender como problema y los tipos de problemas a los que un sujeto se puede enfrentar. Lo primero, es entendido como una situación que impone a un sujeto la necesidad de emplear diferentes estrategias para encontrar la solución puesto que no tiene una solución inmediata. Lo segundo, clasifica los tipos de problemas como aquellos rutinarios, no rutinarios, los de demostrar, entre otros.

Ahora bien, la enseñanza del álgebra escolar y en particular de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, a partir de esta perspectiva, toma en consideración la presentación de problemas que comúnmente son expuestos a los estudiantes en diversos contextos y que se caracterizan por presentarse en un lenguaje natural, que bien puede ser escrito o verbal, lo cual establece una articulación entre el problema dado en lengua natural y el sistema de representación simbólico-algebraico, en tanto que en la mayoría de los casos en el primero de estos, no es posible encontrar su solución dado que este sistema de representación no facilita tratamientos para tal fin, por ello nace la necesidad de evaluar la misma situación dentro de otro sistema de representación que cuente con elementos pertinentes para encontrar su solución y es aquí, donde el sistema de representación simbólico-algebraico juega un papel importante, debido a que cuenta con los elementos (monomios, polinomios, operaciones, entre otros) suficientes para lo mencionado anteriormente. Sin embargo, cabe resaltar que en el cambio de un sistema de representación a otro, diferentes autores han reportado dificultades y obstáculos que pueden presentarse.

⁴ Polya (1945) señala la heurística como aquella que busca comprender el método que conduce a la solución de problemas: en particular, las operaciones mentales que son típicamente útiles en el proceso.

Dentro de estos autores, por ejemplo, Puig (1998) alude a tres dificultades que pueden encontrarse al intentar poner un problema en ecuaciones, es decir, al articular el sistema de representación de lengua natural y el simbólico-algebraico, a saber: (a) dificultades para analizar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas, (b) dificultades en la traducción y (c) dificultades al escribir el problema en una ecuación.

Ante esto, el autor propone una regla que permite poner un problema en ecuaciones, dentro de la cual se considera el uso de ciertos elementos heurísticos (entendidos estos como las estrategias iniciales para resolver las distintas situaciones, donde es posible contemplar esquemas, mapas conceptuales, tablas de cantidades, diagramas de árbol, ensayo y error, entre otros) que colaboran en la articulación y el cambio de un sistema de representación a otro, de tal forma que facilitan el proceso de solución de los problemas.

Así pues, *la regla para poner un problema en ecuaciones* propuesta por Puig (1998) consiste en: (i) comprender el enunciado identificando las cantidades conocidas (datos) y las desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas; (ii) dar nombre a las cantidades desconocidas a partir de una variable; (iii) representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades; (iv) escribir una igualdad entre las expresiones algebraicas (una ecuación); (v) resolver la ecuación y (vi) comprobar que el resultado obtenido satisface las condiciones del problema dado.

A continuación, se presenta a manera de ejemplo un enunciado de problema que será puesto en un sistema de representación simbólico algebraico, a partir de la regla que propuso este investigador. Con el propósito de ilustrar como esta regla funciona en la resolución de problemas.

Un grupo de personas desea asistir a un seminario de la facultad de ciencias exactas. Para ello contratan un autobús que los lleve desde el sitio donde se encuentran hasta el lugar donde se dictará el seminario. El autobús cuenta con una capacidad de 30 personas y hay 2 veces más asientos que espacios para ir de pie. De acuerdo a lo anterior, ¿Cuántas personas podrán ir de pie?

- i.** Comprender el enunciado identificando las cantidades desconocidas y desconocidas, así como las relaciones entre ellas:

En el problema se pregunta por el número de personas que podrán ir de pie, lo que indica que es esto lo que se pretende hallar, es decir, la incógnita del problema. En este se dice además que la cantidad de sillas en el bus es 30.

Las cantidades mencionadas en el problema son, por tanto, tres:

- ✓ El número de personas para ir de pie.
- ✓ El número de personas para ubicarse en las sillas.
- ✓ El número total de personas.

Estas cantidades están relacionadas entre sí

El número total de personas es el número de personas sentadas más el número de personas de pie. En el problema también se indica la relación que se presenta entre el número de personas sentadas y de pie.

- ii.** Dar nombre a las cantidades desconocidas a partir de una variable:

En virtud que el número de personas de pie es uno de los datos desconocidos, este será representado con la letra x . Como el número de personas sentado es dos veces el número de personas de pie, se escribe $2x$ para designar el número de grupos sentado.

- iii.** Representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades

Como el número total de personas es el número de personas de pie más el número de personas sentadas, se plantea que $x + 2x$ para designar el número total de

personas que serán transportadas en el autobús. Teniendo en cuenta que el problema dice que el número total de plazas es 30.

- iv. Escribir una igualdad entre las expresiones algebraicas (una ecuación)

Así que al igualar las expresiones $x + 2x$ con la expresión 30 surge la igualdad: $x + 5x = 90$ con lo que se ha llegado entonces a la ecuación que soluciona el problema.

- v. Resolver la ecuación

$$x + 2x = 30$$

$$3x = 30$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 30$$

$$x = 10$$

El número de personas de pie de acuerdo a la solución de la ecuación es 15. Como el número de personas sentadas es dos veces el número de personas de pie, el número de personas sentado será

$$2x = 2(10) = 20$$

- vi. Comprobar que el resultado obtenido satisface las condiciones del problema dado.

Como el número total de personas dentro del autobús es el número de personas de pie más el número de personas sentadas es posible mediante los procedimientos realizados anteriormente corroborar que el resultado obtenido al resolver la ecuación verifica las condiciones del problema.

Con relación a la regla que Puig propone debe tenerse en cuenta que esta permite idealizar un plan para resolver el problema que se enuncia, por lo que hay tener claro que no indica que debe realizarse en cada uno de los pasos que la conforman, esto se debe, a que esta regla no debe verse como un algoritmo para resolver problemas de ecuaciones. Sin embargo,

si se debe reconocer que esta permite entrever elementos fundamentales que no deben ser obviados al articular el sistema de lengua natural y el simbólico algebraico.

Así como Puig reporto dificultades como las mencionadas, otro autor que también aporta en este sentido es Duval con su artículo *L' Apprentissage de l'algèbre et problème cognitif de la designation de objets* donde Echeverry & Martínez (2011) realizan la traducción y exponen distintas dificultades con las que deben enfrentarse los estudiantes en el proceso de conversión de registros al ser introducidos al pensamiento algebraico. Algunas de estas dificultades se enmarcan entorno a, la escogencia de operaciones necesarias para seleccionar incógnitas, la designación de objetos, la selección de objetos de anclaje y las operaciones propias de los procesos de conversión y tratamiento al interior de determinado registro de representación semiótico.

Otro autor que también reporta dificultades en la resolución de problemas que involucra ecuaciones de primer grado es Micolta (2008) a saber, la dificultad para analizar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas; dificultades en la traducción de las frases que aparecen en el enunciado del problema y dificultades al escribir la ecuación.

2.3.2 Perspectiva histórica

El presente apartado tiene como propósito exhibir algunas ideas desarrolladas por distintitos investigadores sobre la actividad matemática a través de su historia, en particular, sobre algunos elementos de las ideas algebraicas que fueron fundamentales en la constitución de la teoría de ecuaciones. Es necesario, hacer énfasis que en este apartado no se pretende realizar un estudio histórico-epistemológico del álgebra y de las ecuaciones en particular, sino que tal como se indicó aprovechar el estudio de este asunto realizado por otros investigadores para los fines buscados en este trabajo. Para ello se toma en consideración los trabajos realizados por Torres (2010) y Hurtado (2014) y se exponen a continuación algunas de las ideas más sobresalientes que estos autores han reportado en sus trabajos:

- Referentes como el geométrico y el aritmético permiten dotar de campo semántico el sistema de símbolos algebraicos y sus tratamientos, pues, el desarrollo histórico muestra

como desde la tradición griega y aun en los trabajos de Vieta alrededor del siglo XVII se conservaba el problema de la homogeneidad, para ciertas expresiones algebraicas, por ejemplo, se pensó que la interpretación geométrica entre los términos x^2 y x representaban figuras en distintas dimensiones, lo cual se conservó durante veinte siglos más y solo fue hasta “el tratado” brindado por al-Khwarizmi en donde el referente geométrico fue utilizado.

- En relación con la idea anterior, es necesario resaltar que además de los distintos desarrollos dentro del mundo de la cantidad -lo aritmético- el mundo espacial y figural -lo geométrico- y los tratamientos algebraicos que en ellos se procesan para resolver las diferentes situaciones que se planteaban a partir de situaciones cotidianas contextualizadas, las proporciones están presentes en la mayoría de los casos, esto las conlleva a que juegan un papel importante a lo largo de su recorrido histórico, lo cual es corroborado en algunos de los trabajos realizados por autores como Cardano y Vieta quienes hacen uso de la teoría de las proporciones para poder establecer ciertos argumentos que hagan encajar y validar los procedimientos algebraicos de manera correcta.
- Ahora, la historia del álgebra permite evidenciar que la gran necesidad de generalizar y dar solución a ciertos problemas cada vez de manera más estandarizada, tratando de eliminar los casos particulares, se convierte en una ruta efectiva para poder construir ecuaciones como modelos matemáticos, mostrando también que los procesos de generalización han tomado tiempo, es decir, han sido lentos. Es así como al-Khwarizmi en su intento por brindar una manera de solucionar todos aquellos problemas que se relacionaran con áreas, perímetros y demás, finalmente llega a la construcción de formas normales que le permitían modelarlos y solucionarlos. Cardano, por su parte, emprende una búsqueda encaminada a poder hallar algún modo o método general de solucionar las ecuaciones de 3 y 4 grado, encuentra también que dentro del estudio de las ecuaciones se proponen y presentan relaciones entre su estructura, sus raíces y grado.
- Respecto a la naturaleza de las raíces que se obtiene de solucionar las ecuaciones, cabe resaltar que Descartes va un paso más allá que el trabajo de Cardano, pues Descartes en su libro III establece el número de raíces que puede tener una ecuación, en termino de él,

a la dimensión (el grado) de la cantidad desconocida. Por ejemplo, en las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, se tendrían dos, tres y cuatro raíces, respectivamente. Teniendo en cuenta que Descartes contaba con las raíces positivas, falsas e imaginarias y hacia uso de los factores lineales para determinar no solo las soluciones de las ecuaciones, sino también, la correspondencia entre la cantidad de factores, el grado de la ecuación y la cantidad de raíces.

Con esto, tomando como referencia a Descartes se da inicio a lo que hoy se conoce como el Teorema del Factor Lineal, el cual se describe como “una ecuación de grado n , que se puede descomponer en n factores” aunque no de manera formal sino como un principio práctico, para validar, ciertamente, el Teorema Fundamental del Álgebra⁵ como principio para establecer cuántas y cuáles raíces tiene una ecuación.

- Con fines didácticos es posible usar el método o técnica algebraica cartesiana introducido por Descartes que consta de 5 pasos, los cuales Malagon & Valoyes (2011) catalogan de la siguiente manera:
 1. Suponer que el problema ya se encuentra resuelto.
 2. Nombrar todas las líneas involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.
 3. Bajo la condición 1, se debe encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las desconocidas.
 4. Bajo el último punto es posible expresar de dos maneras distinta una misma relación. La igualdad de estas dos expresiones es lo que constituye una ecuación.
 5. La ecuación se debe resolver. Los requerimientos constructivos del problema están dados por los requerimientos constructivos de la ecuación. (Álvarez, 2000, p. 43)

Así, en el primer paso es evidente como se asume lo que es desconocido, siendo este el que pone de manifiesto el análisis cartesiano. En el segundo, el matemático hace uso del lenguaje simbólico con el que cuenta para representar tanto las magnitudes conocidas

⁵ El Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) puede ser enunciado de la siguiente manera: todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos se descompone en un producto de n factores lineales con coeficientes complejos y admite n raíces complejas (distintas o repetidas).

como desconocidas. “... darle el mismo estatus a las cantidades conocidas y desconocidas al tratar a todas las magnitudes a través de la representación de estas por los segmentos; este atañe a uno de los rasgos fundamentales del carácter algébrico del método” (Torres, 2010, p.108). En el tercer y cuarto paso, se alude a una relación entre las magnitudes la cual se realiza por medio del establecimiento de proporciones entre aquellas que se conocen y las desconocidas. Por lo que, la teoría de proporciones juega un papel fundamental dentro de este rol, puesto que se convierte en la herramienta que dará paso a establecer posibles relaciones entre las magnitudes que se involucran como ecuaciones.

El quinto y último paso hace referencia a la necesidad de dar solución a la ecuación que resulta y analizar las condiciones de dicha solución como requisito para construir la curva algebraica que soluciona el problema. En otras palabras, la construcción y solución de problema dependen específicamente de la posibilidad de encontrar solución o soluciones a de la ecuación. Con esto, tal como lo reconocen Valoyes & Malagón (2006) la manera como Descartes lleva a cabo la actividad matemática representa una revolución en el campo de las matemáticas.

Si bien es cierto que a pesar de que el álgebra toma mayor relevancia en tanto no necesita de otros dominios de las matemáticas para validarse o explicarse. A través del breve recorrido histórico mencionado se expone cómo el álgebra durante más de XIX siglos estuvo ligada tanto al campo aritmético como el geométrico. En este sentido, de acuerdo con Hurtado (2014) “la búsqueda de expresar modos generales para solucionar problemas ha sido históricamente una vía efectiva para la construcción de modelos matemáticos que permitan albergar dicha generalidad” (p.105).

2.3.3 Perspectiva funcional

La variación se presenta como un concepto nuclear en un sistema conceptual que involucra otros importantes como el de función. Es decir, que el estudio de los patrones de variación entre magnitudes relacionadas o dependientes una de la otra, puede conducir al estudio de los modelos funcionales. Desde esta perspectiva, el álgebra se redimensiona al presentarse como un sistema potente de representación y de descripción de estos fenómenos de variación y cambio donde (Usiskin, 1988) citado por Hurtado (2014) opina que el

concepto de variable con todas sus connotaciones posibles, usos, tratamientos y conexiones es central al pensamiento algebraico.

Las anteriores consideraciones plantean entonces, que la variación no solo se presenta como un sistema conceptual en el que intervienen conceptos matemáticos importantes, sino que un enfoque funcional no significa necesariamente el estudio de funciones, sin embargo, cabe la posibilidad de usar letras como variables, es decir, la siguiente expresión algebraica $4x + 8$ puede ser interpretada como una relación funcional, debido a que es una asignación que traslada todo número x en otro, de tal modo que x es interpretada como una variable pues puede tomar valores en un dominio determinado. Pero, es importante aclarar que hay más de un enfoque funcional que se relaciona solo con ver las letras como variables, también x puede ser interpretada como la relación entre cantidades que varían, lo que conlleva por ejemplo a reconocer la función como una relación entre los valores de x y sus valores funcionales correspondientes (Bednarz, Kieran & Lee, 1996).

Así, en algunas ocasiones se observa como desde un trabajo didáctico y desde una perspectiva funcional que atiende a fenómenos de variación y cambio, se puede llegar a una estructura matemática que en algunas ocasiones hace referencia a la estructura de las ecuaciones. También se puede observar como en el momento en que se establece una relación de variación y cambio con respecto a dos magnitudes, es posible identificar que se encuentra inmerso el concepto de ecuación, de este modo, dentro de este campo existen situaciones que generan problemas de distinto índole, pero depende de los requerimientos que tenga el problema, de las intenciones y de la relación funcional que este desplegando entre las magnitudes, lo que permite abordar el concepto de ecuación mencionado.

Las ecuaciones en tanto modelo que permiten la descripción de fenómenos de variación y cambio surgen en el momento en que se plantean situaciones en donde existe una relación entre dos variables. Por ejemplo, en el momento en que se fija la variable dependiente para considerar el valor que le corresponde a la independiente. Considérese la siguiente relación funcional como la representación de un fenómeno de la vida diaria.

$$y = 3x + 1 \quad (1)$$

La ecuación (1) representa de forma dinámica la relación entre dos magnitudes, es aquí donde la estructura de las ecuaciones juega un papel fundamental en la relación funcional de este tipo de fenómenos, este papel está relacionado con aquel momento en el que se “estatiza” una de las dos variables para encontrar su relación funcional con respecto a la otra. Es decir, para $x = 1$ ¿cuál es el valor de la variable y ? A lo cual se procede teniendo en cuenta las propiedades fundamentales de los números reales.

$$y = 3x + 1 \quad (1)$$

$$y = 3(1) + 1 \quad (1), \text{ para } x = 1$$

$$y = 3 + 1$$

$$y = 4$$

Otra participación de las ecuaciones, se da cuando una relación de equivalencia entre dos relaciones funcionales existe, por ejemplo, obsérvese el siguiente par de funciones lineales

$$y = 4x + 3 \quad (2)$$

$$y = 8x + 6 \quad (3)$$

De modo que se igualan (2) y (3) de la siguiente manera

$$4x + 3 = 8x + 6 \quad (4)$$

$$4x + 3 - 3 = 8x + 6 - 3 \quad (5)$$

$$4x + 0 = 8x + 3 \quad (6)$$

$$4x - 8x = 8x + 6 - 8x \quad (7)$$

$$-4x = 0 + 6 \quad (8)$$

$$-4x = 6 \quad (9)$$

$$x = \frac{6}{-4} \quad (10)$$

En relación con la igualación de las relaciones (2) y (3), y después de haber realizado los distintos tratamientos simbólicos-algebraicos con el fin de hallar para qué valores de la variable independiente ambas relaciones se hacen iguales, es posible reconocer que desde algunos fenómenos y particularmente desde un sistema de relaciones funcionales, se puede generar una estructura que da cuenta de una ecuación, para incluso responder algunas

cuestiones dentro de la relación funcional. Por lo que surge la necesidad de otorgarle a las ecuaciones un estatus que consiste en además operarlas sistemáticamente para encontrar sus soluciones o establecer relaciones de variación, ubicarlas como un elemento matemático que permite la modelación de fenómenos y problemas de distinta índole.

2.3.4 Perspectiva de modelación

Algunas de las estrategias que se utilizan para aprender matemáticas, en particular, álgebra a partir de situaciones y fenómenos del mundo físico, han cobrado fuerza en el curso de la historia de la humanidad. Dentro de estas estrategias, es posible evidenciar la interpretación de la realidad a partir de la identificación de las variables relacionadas, la recolección de datos que se generan en las situaciones reales o simuladas y modelación de las mismas., estos y otros aspectos son fundamentales y abren paso al proceso llamado modelación.

La modelación matemática de acuerdo con Ruiz & Villa (2009) está siendo fuertemente defendida, en diversos países, como método de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles de escolaridad, puesto que permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema dotando de un gran campo de fenómenos de la vida diaria y de la matemática misma y desarrollando el pensamiento algebraico, siendo, de este modo, fundamental en los estudios algebraicos escolares.

También, debe tenerse en cuenta que hablar de álgebra desde una perspectiva de modelación se relaciona con la resolución de problemas desde algunos campos, por ejemplo, en la resolución de problemas, de acuerdo con Bell (citado por Bednardz, Kieran & Lee, 1992) en tanto se habla del lugar del lenguaje simbólico y su manipulación, el autor resalta y recuerda el importante papel que juega el simbolismo en el desarrollo del pensamiento algebraico. Mientras que en la modelación, Nemirosky (citado por Bednardz, Kieran & Lee, 1992) habla del papel que juega el lenguaje simbólico, es decir, aquel momento en el que el estudiante ha realizado una apropiación y manipulación de este lenguaje para que luego la modelación quien cuenta con cierta verbalización, dote de significado al simbolismo gradualmente desarrollado por el estudiante. Es decir, *“Es a través de la construcción de narraciones matemáticas – nuestra interpretación de “modelación”- que las experiencias de*

los niños con el cambio (con las diferentes maneras en que ocurre) son convertidas en objeto de generalización matemática”.(p.8)

En relación con la idea anterior, es posible evidenciar como el MEN (1998, p. 35) establece que “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista”. De acuerdo con esto, uno de los propósitos de la matemática escolar es el desarrollo del pensamiento matemático y, por tanto, son la modelación y la resolución de problemas dos de los procesos fundamentales para alcanzar este propósito.

De acuerdo con esto, es fundamental especificar que hablar de matemáticas, de álgebra, y específicamente de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real desde una perspectiva de modelación, no puede ser pensada por fuera de la perspectiva de resolución de problemas debido a su estrecha relación. Así, cuando se plantea una situación que se relaciona con contextos del entorno diario donde se modelan situaciones reales o de otro tipo que se enmarcan en el proceso cognitivo de la adquisición del concepto de ecuación, se incita a que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, deba analizar y describir el significado de términos; simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos, aritméticos y numéricos. Pues la diversidad de estos fenómenos permite que sean susceptibles de experiencia, dentro del estudio de las matemáticas u otras ciencias, en las cuales es posible evidenciar y determinar situaciones con respecto a cantidades, precios, edades, medidas de variación y cambio en algún contexto particular, entre otros, que ponen en manifiesto algunas estructuras de las ecuaciones de primer grado tales como $ax = b$ v $ax \pm b = c$.

Una contribución muy importante de la modelización dentro del campo de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real es presentada por Janvier (citado por Bednardz, Kieran & Lee, 1992) quien muestra el amplio bagaje que ofrece su investigación en el desarrollo del sentido que le otorgan los estudiantes a las variables que forman parte de las estructuras de ecuación mencionadas. En esta aproximación al igual que las aproximaciones funcionales las ecuaciones tienen un papel fundamental, en tanto por medio de la noción de variable se convierten en una vía para la introducción del álgebra en la escuela, lo cual, genera dificultades al interpretar dicha noción, por ello debe tenerse en cuenta las nociones no acertadas que aguardan estos sujetos, analizando los distintos

significados que le dan a las representaciones simbólicas y a varias notaciones en las que está basada la modelación. A continuación, se establecen algunas dificultades que giran en torno a lo expuesto.

Las dificultades que serán mencionadas no se agotan, por el contrario, es común encontrar en la mayoría de ocasiones que se ha logrado consolidar muy poco de este objeto matemático en sus distintos entornos (enseñanza y aprendizaje) debido a que se simplifica su conocimiento a simples procedimientos mecánicos, rutinarios y memorísticos para resolver ecuaciones, esto es, pasando de un lado al otro letras y números; que privan o limitan el gran patrimonio que se maneja dentro de esta noción.

De acuerdo con Hurtado (2014) la poca comprensión que logran los estudiantes de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y las múltiples dificultades que enfrentan en el momento en el que son planteados problemas que se modelan a partir de este objeto matemático se manifiesta vía directa en las distintas maneras de tratarlas, es decir, a manera de ejemplo cuando en ocasiones se limitan a simples procedimientos mecánicos, rutinarios y memorísticos para resolver ecuaciones, esto es, pasando de un lado al otro letras y números dejando por fuera la esencia del trabajo algebraico que aquí se pretende.

Otra dificultad, hace referencia a los errores citados por Hurtado (2014) que van desde los métodos de resolución, la concepción de las operaciones, la falta de comprensión de las raíces, la permanencia en un campo exclusivamente numérico, la simplificación de expresiones, la manera de tratar y concebir los números ya sean negativos, positivos o que el dominio numérico de la ecuación se extienda a $\mathbb{Q}$; la concepción de igualdad y la manera de abordar el signo igual, la polisemia tanto de la igualdad como de la variable, entre otros, son dificultades y errores comunes que presentan los estudiantes. Muchas de los cuales han sido reportadas por numerosas investigaciones (Alonso et al., 1993; Gallardo y Rojano, 1988; Alibali, M., Knuth, E., Hattikudur, S., McNeil, N. y Stephens, A., 2007; Filloy, 1999; Kieran, 1981, 2006; Filloy & Rojano, 1989; Castro, Molina & Castro, 2009; Castro & Molina, 2007; Andrews & Sayers, 2012).

Todas estas distinciones que se pueden realizar alrededor de la noción de ecuación particularmente, aquellas que corresponden a la estructura de ecuaciones de primer grado con una incógnita real ayudan a situar mejor las diversas aproximaciones al álgebra, teniendo en

cuenta que estas distinciones no pueden determinarse a priori sino que están vinculadas a las distintas actividades desarrolladas por el estudiante a lo largo de su trayecto escolar, las cuales a su vez, impulsan la construcción de otros registros de representación.

2.3.5 Perspectiva del álgebra como aritmética generalizada

Tomando como referencia los autores Torres (2010) y Hurtado (2014) quienes señalan que el énfasis del álgebra no debe estar exclusivamente en el cálculo literal ni en el tratamiento de símbolos para obtener otros como en la mayoría de situaciones ocurre, pues es común en los primeros años de escolaridad encontrar que el estudio del álgebra a partir de la sintaxis para luego intentar dotar de significado o contenido las expresiones abordadas, es decir, no se debe limitar el trabajo algebraico a la reproducción de reglas que carecen de significado pues esto sería desconocer el significativo campo semántico que poseen las expresiones algebraicas en general.

Debido a que las ecuaciones como objeto matemático forman parte del sistema algebraico y analítico, los Lineamientos curriculares (MEN, 1999) muestran claramente que las ecuaciones se postulan como elemento esencial para el desarrollo de pensamiento variacional, cobrando en los estudios algebraicos gran importancia, tal como se muestra a continuación:

En el álgebra, inicialmente se generalizan patrones aritméticos y posteriormente esto se convierte en una potente herramienta para la modelación de fenómenos de cuantificación y de variación y cambio, es por ello que entre otros aspectos se debe involucrar el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general, para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra (como se ejemplifico en la perspectiva funcional), y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos son desarrollos propios del pensamiento variacional. (MEN, 1999, p.25)

Algunos investigadores como Usiskin, desarrolla la concepción del álgebra como: 1) aritmética generalizada, en donde las variables pueden ser consideradas como patrones generalizadores; 2) estudio de procedimientos para la resolución de ciertos tipos de problemas en los que las variables aparecen como incógnitas o constantes; 3) el estudio de las relaciones entre las cantidades en que las variables varían; y 4) el estudio de la manipulación y justificación de las estructuras en las que la esencia se encuentra en las propiedades de las variables, en las relaciones entre una o varias x , y o n ya sean sumandos, factores, bases, o exponentes. Cabe señalar que en esta percepción, la variable, se ha convertido en un objeto arbitrario, en una estructura abstracta relacionada con ciertas propiedades algebraicas.

Por último, se considera importante destacar aquí que la imagen de álgebra como aritmética generalizada (implícitamente presentada en algunos textos escolares y trabajada por algunos maestros), no garantiza interpretaciones de la letra como número generalizado, en tanto el uso de las letras como modelos o patrones generalizadores puede asociarse con interpretaciones de éstas como objetos –como una manera de nombrar–, sin que necesariamente se les reconozca su carácter operativo, en tanto representantes de números en un cierto universo; en tal sentido, las posibilidades de interpretación de la letra como número generalizado depende, en gran medida, del tratamiento metodológico dado. En relación con los planteamientos de Küchemann, y particularmente con la caracterización que propone de variable, puede inferirse que para él la imagen deseable del álgebra escolar está asociada a la de álgebra como estudio de relaciones entre cantidades.

2.4 Rejilla de análisis según los referentes conceptuales

A partir del estudio del referente curricular, matemático y didáctico que se han presentado alrededor del álgebra en general, particularmente, de las ecuaciones de primer grado los cuales han sido expuestos desde diferentes lecturas en lo curricular desde los documentos oficiales MEN (1998) y MEN (2006); en lo matemático desde dimensiones como la procedimental y conceptual; y, en lo didáctico desde perspectivas basadas en el trabajo desarrollado por Bednarz, Kieran & Lee, (1996) quienes exponen una introducción de cómo se puede presentar el álgebra en la escuela, específicamente las ecuaciones de primer grado, a

continuación se presenta la rejilla de análisis que sintetiza todo el estudio realizado. Del mismo modo, en la Tabla 3 que se expone a continuación las dos últimas columnas se dejan vacías, puesto que será diligenciada completamente al finalizar el capítulo tres, después de llevar a cabo el análisis del texto escolar, dado que este permitirá dar respuesta de forma afirmativa, negativa o parcialmente, a las variables específicas que se toman como objeto de análisis.

REFERENTES CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	SUBCATEGORÍAS DE ANÁLISIS	VARIABLES ESPECÍFICAS DE ANÁLISIS EN EL TEXTO ESCOLAR	RESULTADOS DEL ANÁLISIS			EVIDENCIAS
			SI	NO	P	
REFERENTE CURRICULAR	Organización curricular según MEN (1998)	¿Se apunta al desarrollo de procesos generales (Razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación, comparación y ejercitación de procedimientos) en la presentación de actividades, ejercicios y problemas?				
		¿Se presenta el estudio de las ecuaciones de primer grado mediante situaciones problemáticas?				
	Organización Curricular según MEN (2006)	¿Las actividades propuestas guardan coherencia vertical?				
		¿Las actividades propuestas guardan coherencia horizontal?				
REFERENTE MATEMÁTICO	Dimensión conceptual	¿En la presentación se exponen o evidencian términos, notaciones, convenios, resultados, estructuras?				
		¿En la presentación se exponen o evidencian conceptos?				
	Dimensión procedimental	¿El concepto objeto de estudio es abordado o desarrollado teniendo en cuenta las destrezas, estrategias y razonamientos?				
REFERENTE DIDÁCTICO	Perspectiva de resolución de problemas	¿Se reflejan los pasos propuestos por Puig (1998) para poner un problema en ecuaciones?				
		¿Se estudia el concepto se teniendo en cuenta el componente semántico como eje fundamental?				
	Perspectiva histórica	¿Es posible evidenciar elementos del método cartesiano en la resolución de los problemas?				
		¿Se ve la resolución de problemas como una entrada al estudio del concepto?				
	Perspectiva funcional	¿Se presenta el estudio de las ecuaciones de primer grado a través de fenómenos de variación y cambio?				
		¿Se presenta el estudio del concepto por medio de relaciones funcionales?				
	Perspectiva de modelación	¿Las ecuaciones son presentadas como un modelo matemático para el estudio de ciertas situaciones problema?				
	Perspectiva de aritmética generalizada	¿Se inicia el estudio de las ecuaciones de primer grado a partir de la presentación de conceptos y definiciones como elementos primarios para su posterior abordaje?				
		¿Se presentan reglas y procedimientos para trabajar las transformaciones en el sistema simbólico?				
		¿Para el estudio del concepto se toma en consideración el componente sintáctico como aspecto fundamental?				

Tabla 3. *Rejilla de análisis teniendo en cuenta los referentes conceptuales*

CAPÍTULO III: ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN EL TEXTO ESCOLAR

En este capítulo se realiza la presentación y análisis del texto escolar titulado *Hipertexto Matemáticas 8*, editorial Santillana (2010), el cual es objeto de estudio en este trabajo y ha sido escogido mediante una encuesta realizada a docentes en ejercicio pertenecientes a Instituciones del sector público y privado de la Educación Básica Colombiana. El capítulo se ha estructurado en dos secciones, en la primera se presenta el diseño metodológico que se desarrolla en el trabajo, se expone como se realizó la selección del libro de texto y se describe este a partir de su estructura; en la segunda, se presenta el análisis sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real a la luz de la rejilla de análisis que se presentó en el capítulo anterior.

3.1 Selección y estructura general del texto escolar

3.1.1 Sobre la selección del texto escolar

La selección de los textos escolares se hizo a partir de la encuesta construida que se presenta en el ANEXO 1. El propósito fundamental de esta encuesta fue identificar el texto escolar de mayor uso para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, esta fue puesta en consideración ante un grupo de treinta maestros en ejercicio de la Educación Básica y Media Colombiana pertenecientes a Instituciones del sector público y privado, los cuales fueron seleccionados porque se contó con la colaboración de participar en este estudio y lograr observar sus preferencias en relación a los textos escolares que utilizan para la enseñanza de dicho objeto matemático, cabe anotar que el grado de experiencia con la que contaron estas personas es mayor a 4 años en la labor como docentes y sobre todo experiencia en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. Los resultados arrojados en el desarrollo de la encuesta se presentan en el ANEXO 2. Nótese que de estos análisis es posible evidenciar que el texto con mayor frecuencia absoluta de acuerdo con la tabla expuesta en el ANEXO 2, es decir, el texto mayor reportado por los docentes es *HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 8* de la Editorial Santillana, libro de texto seleccionado para el respectivo análisis.

Uno de los resultados aunque no es el objetivo principal de la encuesta, deja ver que los maestros con más años de experiencia optan por la escogencia de *HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 8*, mientras que los maestros con menos años de experiencia tienen tendencia hacia el libro de texto *ALFA 8*. Por otro lado, se encuentran reportados los textos escolares con menores frecuencias absolutas: Álgebra Intermedia editorial Pearson, Alfa 8 editorial Norma, Matemáticas para Pensar 8 editorial Norma, Conexiones 8 editorial Norma. Además de ello, se exponen otros recursos que van desde los tradicionales (tablero, papel, lápiz, etc) hasta los recursos electrónicos (video beam, Geogebra, guías electrónicas, entre otros) que median la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático en cuestión.

3.1.2 Descripción de la estructura general del libro de texto *Hipertexto Matemáticas 8*

El libro *Hipertexto matemáticas 8* es un texto escolar para la Educación Básica y Media que tiene el objetivo de desarrollar y fortalecer las competencias de los estudiantes en el área de matemáticas. A continuación, en la Figura 1 y la Tabla 1 se presentan la portada y la información general del libro respectivamente.

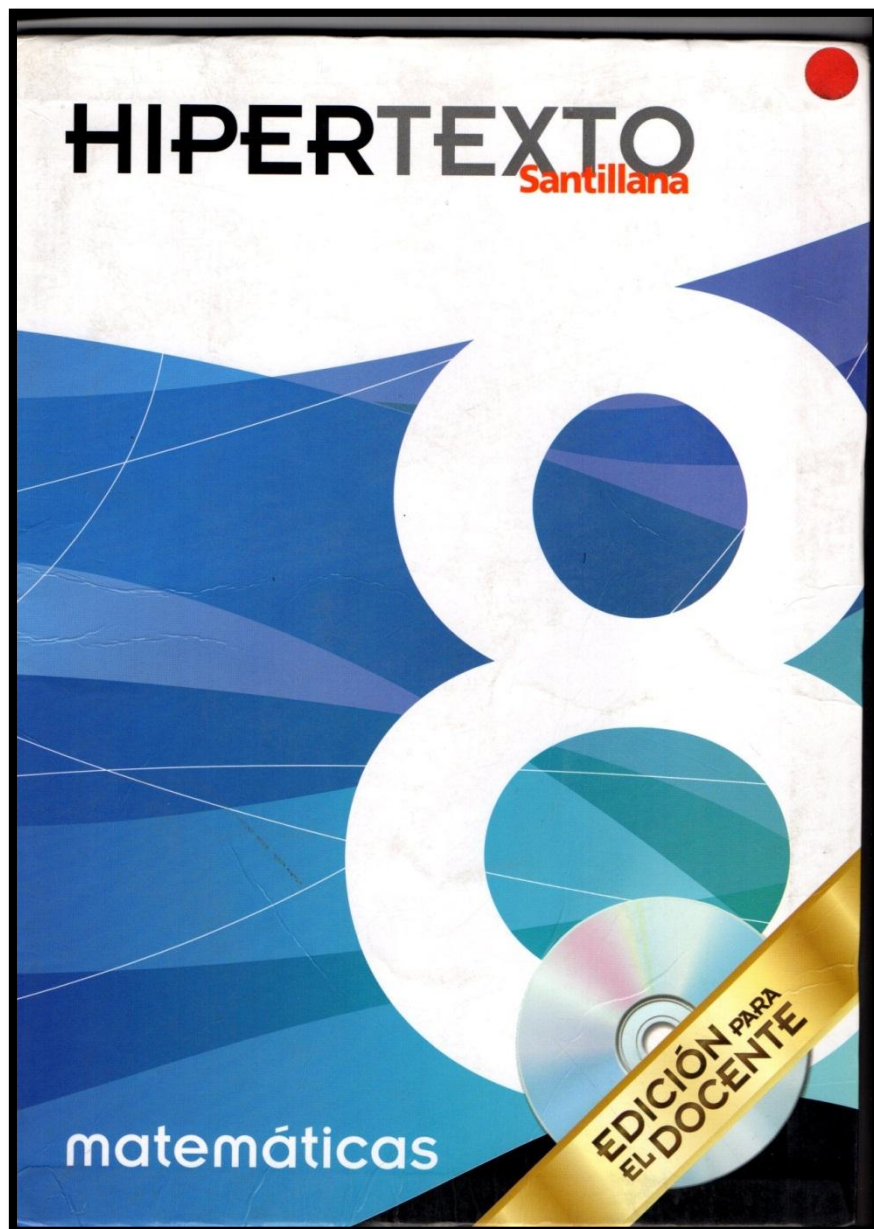


Figura1. Portada del libro de texto *Hipertexto Matemáticas 8*

Título: HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 8 Edición para el docente
Autores edición docente: Julián Cifuentes Rubiano y Francia Leonora Salazar Suarez.
Autores: Marisol Ramírez Rincón, Francia Leonora Salazar Suarez, Anneris del Rocío Joya Vega. Valeria Cely Rojas
Distribuidores: Editorial Santillana S.A
Directora de editorial: Fabiola Nancy Ramírez Sarmiento
Directora de educativas: Ana Julia Mora Torres
ISBN: 978-958-24-1382-8
Ciudad: Bogotá D.C
Año: 2010
Precio: 74.000
Material complementario: CD-ROM
Edición: primera edición
Área: matemáticas
Materias: álgebra, geometría y estadística.
Grados: 8
Formato: 29 x 21 x 1.5
Impresión de páginas interiores: color
Tipo de encuadernación: pegado y cosido
Tipo de cubierta: pasta semi-dura a color
Páginas: 304
Papel: semi- esmaltado

Tabla 4. Información general del libro de texto

La editorial Santillana distribuye dos libros, *HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 8* uno edición para el docente y otro edición para el estudiante. Los cuales solo difieren en que el primero cuenta con herramientas (estándares, logros, mapas conceptuales, etc.) que contribuyen a la preparación y desarrollo de las clases mientras que el segundo, está conformado por los saberes que serán presentados a los estudiantes.

- ✓ **La edición para el docente** cuenta con estándares y objetivos generales por cada uno de los pensamientos, ver figura 2

UNIDAD

HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 8

Ecuaciones e inecuaciones

Temas de la unidad

- Ecuaciones
- El lenguaje algebraico
- Desigualdades
- Inecuaciones

MATRIZ DE PLANEACIÓN

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO VARIACIONAL

Logros	Indicadores de logro
1 Reconoce cuándo una expresión es una ecuación.	• Establece diferencias entre ecuación algebraica e identidad algebraica. • Reconoce y utiliza la propiedad uniforme de las igualdades. • Identifica por simple inspección la solución de una ecuación sencilla.
2 Soluciona ecuaciones.	• Formula y resuelve ecuaciones aditivas y multiplicativas. • Simplifica expresiones algebraicas reduciendo términos semejantes para luego, resolver ecuaciones. • Verifica que la solución obtenida sea de la ecuación planteada. • Plantea y resuelve problemas mediante la formulación y solución de ecuaciones.
3 Reconoce cuándo una expresión es una inecuación.	• Establece la diferencia entre ecuación e inecuación. • Reconoce la relación de orden como generadora de infinitas soluciones para una expresión.
4 Soluciona inecuaciones.	• Reconoce la diferencia entre una única solución y un conjunto de soluciones. • Aplica las propiedades de las desigualdades en la solución de inecuaciones. • Determina el conjunto solución de una inecuación. • Verifica que el conjunto obtenido sea solución de una inecuación planteada. • Interpreta y utiliza el lenguaje algebraico para plantear inecuaciones que relacionan los datos de un problema.

26 • Santillana

Figura 2. Herramientas generales del libro para docentes

Como se puede observar en la Figura anterior, esta edición contiene matrices de planeación (logros, indicadores de logros), mapas conceptuales, sugerencias metodológicas, actividades de aula, actividades lúdicas y competencias generales para cada una de las unidades del libro de texto.

También, cuenta con la incorporación de las TIC que se convierten en una herramienta que contiene hipervínculos y recursos para el docente que apoyan y dinamizan los procesos de aprendizaje, estas vienen de manera electrónica dentro de un CD (Figura 3).



Figura 3. *Tic para el docente*

Para finalizar, cuenta con un constructor de evaluaciones a la medida, este es un programa que le permite aquellos docentes que son usuarios la elaboración, personalización e impresión de las evaluaciones por temas, áreas y grados. Al cual se puede acceder mediante el enlace www.santillana.com.co/hipertextos (Figura 4).

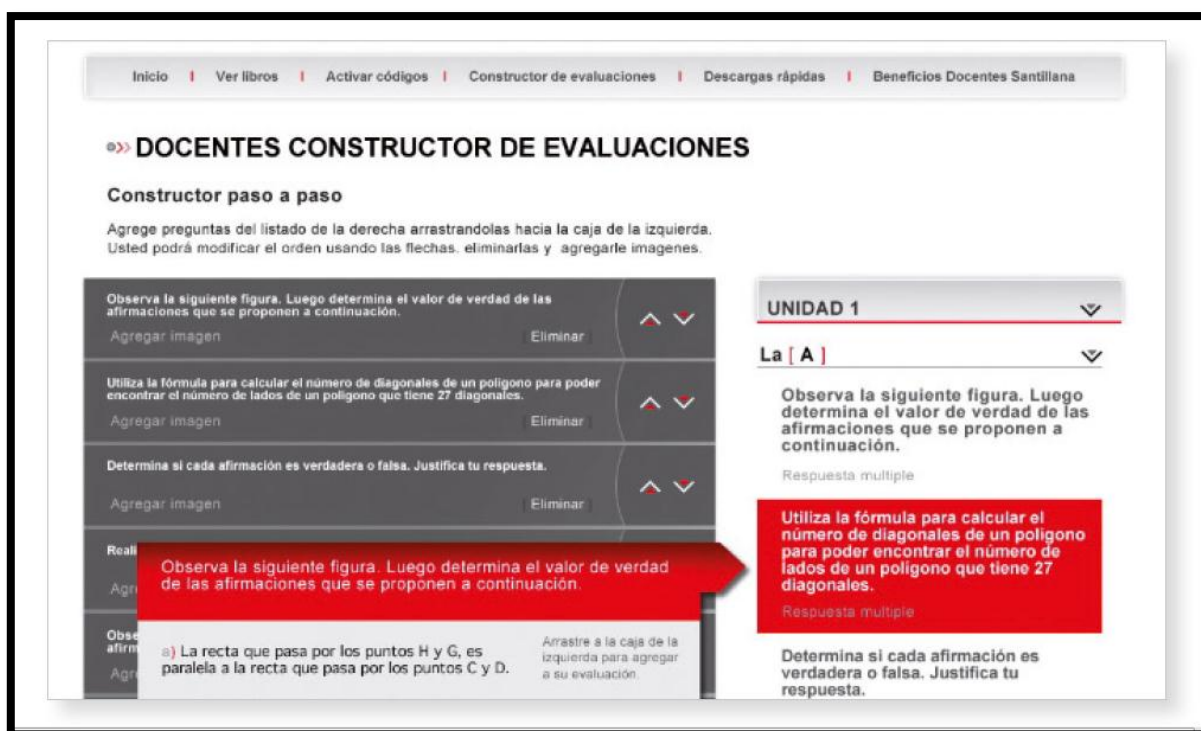


Figura 4. Constructor de evaluaciones

Es notable que este programa esté organizado en el mismo orden en que se encuentran las unidades pertenecientes al libro de texto, cuenta con ejercicios resueltos y enlaces en los que los docentes pueden ingresar y encontrar evaluaciones listas o dado el caso cuentan con la preparación de sus respectivas evaluaciones.

- ✓ **La edición para el estudiante** es el texto donde se presentan los mismos contenidos del área de matemáticas.

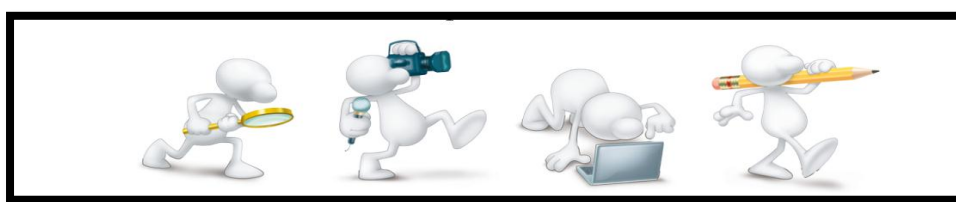


Figura 5. Iconos de consulta en el libro para el estudiante

Además de esto, al interior de este libro de texto se presentan a los estudiantes herramientas como iconos representados por dibujos caricaturizados como se muestra en la Figura 5, que indican hipervínculos que se pueden consultar en la página

www.santillana.com.co/hipertextos con objetivos como profundizar conocimientos, realizar distintas exploraciones, resolver dudas, interactuar, entre otros.

La estructura general del libro se encuentra atendiendo a diversos capítulos, los cuales son referidos en el libro como unidades, cada unidad comparte las mismas **características**, las cuales, son descritas y presentadas en el mismo orden a continuación:

- ✓ **Al inicio de la unidad:** se presentan los temas de la unidad, una actividad de motivación, un pequeño texto que se relaciona con la historia de las matemáticas y un ejercicio de preparación para el estudio de los contenidos a interiorizar (Figura 6).

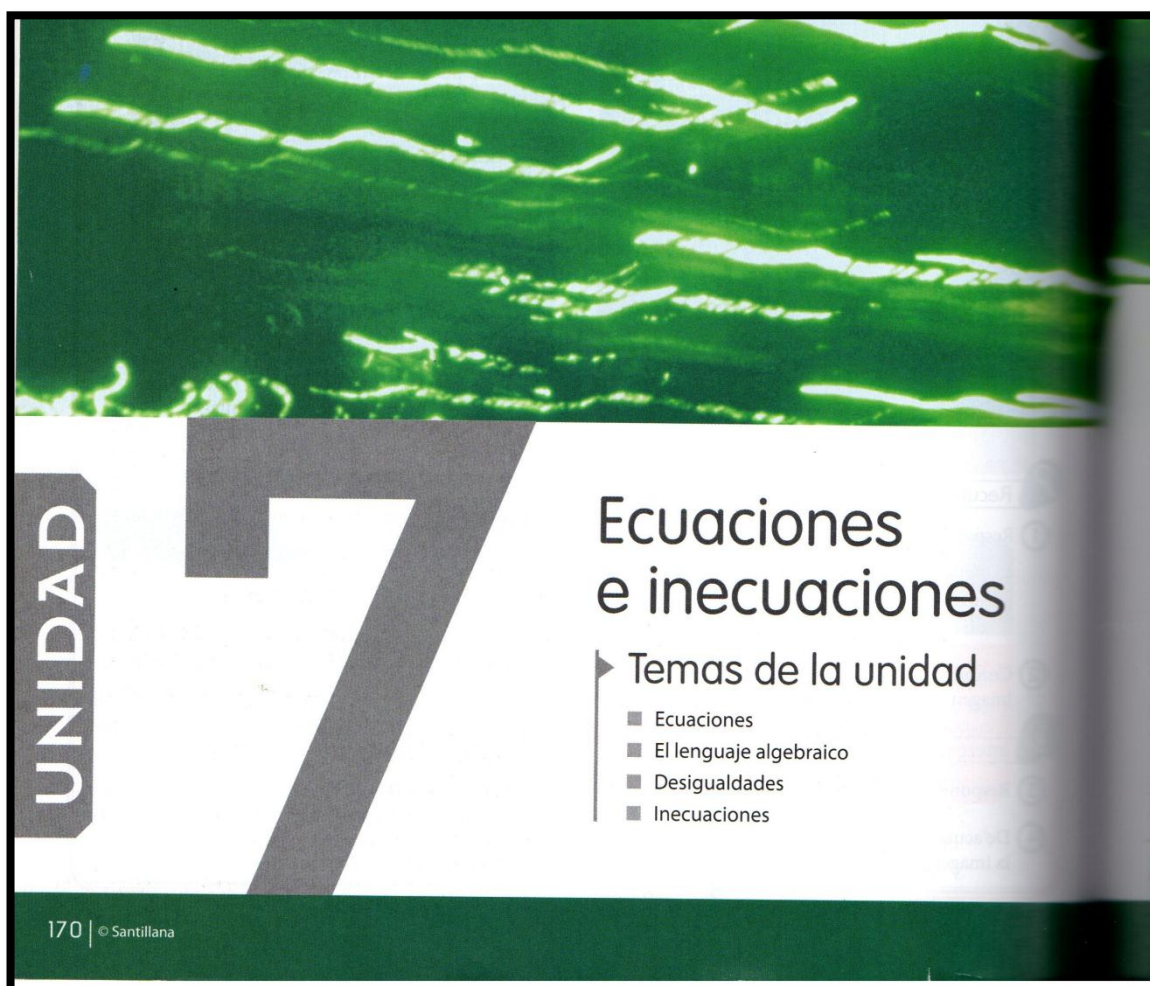


Figura 6. Inicio de las unidades del libro de texto *Hipertexto Matemáticas 8*

Dentro de esta presentación inicial, docentes como estudiantes encuentran actividades de motivación, pequeños textos que se relacionan con la historia de las matemáticas y ejercicios de preparación para el estudio de los contenidos a interiorizar

- ✓ **Desarrollo de los contenidos:** se comprende del desarrollo de los contenidos con ejemplos resueltos; cuadros con breves explicaciones y datos de personajes matemáticos.
- ✓ **Actividades:** dentro de las cuales es posible encontrar ejercicios para desarrollar procesos matemáticos que ejercitan, razonan, modelan, comunican, interpretan reflexionan, plantean, actúan, entre otros.
- ✓ **Taller:** en este se presentan una serie de ejercicios que se encuentran organizados por temas.
- ✓ **Síntesis:** al final de cada unidad se presenta una síntesis de los conceptos fundamentales como se exhibe en la Figura 7

EN SÍNTESIS...

Igualdad

Es una expresión que relaciona dos cantidades mediante el signo igual.

Propiedad fundamental de las igualdades

- Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$
- Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$
- Si $a = b$, entonces $a \div c = b \div c$

Identidad

Es una igualdad algebraica que se cumple para cualquier valor de la variable o las variables.



Lenguaje algebraico

El doble de un número: $2a$

El triple de un número: $3a$

Cuatro veces un número: $4a$

La mitad de un número: $\frac{a}{2}$ o $\frac{1}{2}a$

La tercera parte de un número: $\frac{a}{3}$ o $\frac{1}{3}a$

La cuarta parte de un número: $\frac{1}{4}a$

La suma de dos números: $a + b$

La diferencia de dos números: $a - b$

El producto de dos números: ab

El cociente de dos cantidades diferentes

de cero: $\frac{a}{b}$

El cuadrado de un número: a^2

El cubo de un número: a^3

Pasos para plantear y resolver un problema

Primero, comprender el problema.

Segundo, plantear la ecuación del problema.

Tercero, resolver la ecuación.

Cuarto, comprobar la solución y escribir la respuesta.

Ecuación

Es una igualdad algebraica que se cumple para un valor específico de la variable.

Inecuación

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas y solo se cumple para determinados valores de la variable o variables que se presenten.

Desigualdad

Una desigualdad simboliza una relación matemática de orden entre dos cantidades.

Propiedades de las desigualdades

Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}$, entonces $x + z < y + z$

Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}$, entonces $x - z < y - z$

Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}^+$, entonces $x \times z < y \times z$

Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$

Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}^-$, entonces $x \times z > y \times z$

Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}^-$, entonces $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$

Transposición de términos

La **transposición** consiste en pasar un término de un miembro de la ecuación al otro cambiándole el signo, sin que la ecuación cambie.

Figura 7. Síntesis al final de cada unidad de Hipertexto Matemáticas 8

En esta **característica**, el libro de texto contiene algunos conceptos trabajados durante las unidades que son descritos brevemente.

✓ **Páginas especiales:** y esto que aprendí, ¿para qué me sirve? En este apartado del libro se exhiben las respuestas a preguntas de este tipo. Se reduce la utilidad de las matemáticas en la vida diaria y su transversalidad en otras áreas del conocimiento, está ubicada al final de cada unidad ver Figura 8

Y esto que aprendí, ¿PARA QUÉ ME SIRVE?

Para determinar las capas en las cuales se divide la atmósfera, a partir de la variación de su temperatura.

Los números enteros en nuestra atmósfera

La atmósfera de la Tierra es una mezcla de varios gases, principalmente nitrógeno (78%), oxígeno (21%) y otros gases como argón, dióxido de carbono y vapor de agua. Estos gases rodean constantemente a la atmósfera, debido a que el campo gravitatorio impide que se escapen. La atmósfera se divide en capas, según las temperaturas que se presentan en el interior de la misma. Dichas capas son:

- **Troposfera:** como el aire situado en los primeros kilómetros de la atmósfera es calentado desde abajo, la temperatura disminuye con una altura aproximadamente de 6 °C por cada km. Su espesor varía entre los 8 km y 17 km. En esta capa ocurre la mayor parte de los fenómenos del clima.
- **Estratosfera:** se ubica por encima de la troposfera y en ella la temperatura aumenta desde 253 °C hasta 23 °C a unos 50 km. Su espesor varía entre los 17 km de los polos a los 35 km del ecuador.
- **Mesosfera:** en esta capa la temperatura vuelve a disminuir con la altura desde unos 50 km hasta aproximadamente 90 km, como resultado del rápido descenso de la densidad del aire a esta altura.
- **Termosfera:** en esta capa la temperatura aumenta con la altura, llega hasta 1.500 °C. La termosfera incluye a la ionosfera que es donde se producen las auroras polares.
- **Exosfera:** se localiza a altitudes por encima de los 950 km. Es la zona de transición entre la atmósfera terrestre y el espacio interplanetario.

Recupera información

1 A partir de la información, responde:

- ¿Qué espesor tiene la estratosfera en el ecuador?
- ¿Qué relación hay entre la temperatura y las capas de la atmósfera?
- ¿Cuál es la capa atmosférica de menor temperatura?

Interpreta

2 De acuerdo con el gráfico, ¿qué temperatura tiene la atmósfera a 110 km de altura?

Plantea y actúa

3 Si se asume que la temperatura a nivel del mar es de 26 °C, ¿qué temperatura deberá tener aproximadamente la cima del Everest a 8.856 m de altura?

© Santillana | 187

Figura 8. Páginas especiales

Como se muestra en la Figura anterior, se reduce la utilidad de las matemáticas en la vida diaria y su transversalidad en otras áreas del conocimiento, particularmente, en la unidad 7 por ejemplo, que corresponde al trabajo con ecuaciones, se plantean los interrogantes mencionados **y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** A lo que se responde durante el desarrollo de esta página mediante un proceso trasversal en otra área del conocimiento, es decir, muestra como el trabajo realizado con la estructura de las ecuaciones es útil a la hora de comprender las leyes de los gases. Así, se inicia con una contextualización de que se entiende por gases, seguido de la presentación de las leyes que establecen relaciones entre magnitudes, valiéndose de representaciones gráficas para la comprensión del texto expuesto. Finalmente, se expone un ítem llamado recuperación de la información que se compone de preguntas donde el estudiante debe interpretar, reflexionar, plantear y resolver situaciones que articulan el concepto aprendido durante la unidad y el expuesto por el texto en esta página especial generando una estrecha relación entre el objeto matemático y su utilidad diaria.

- ✓ **Laboratorios con Cabri:** Estas secciones se encuentran al final de las unidades ver Figura 9

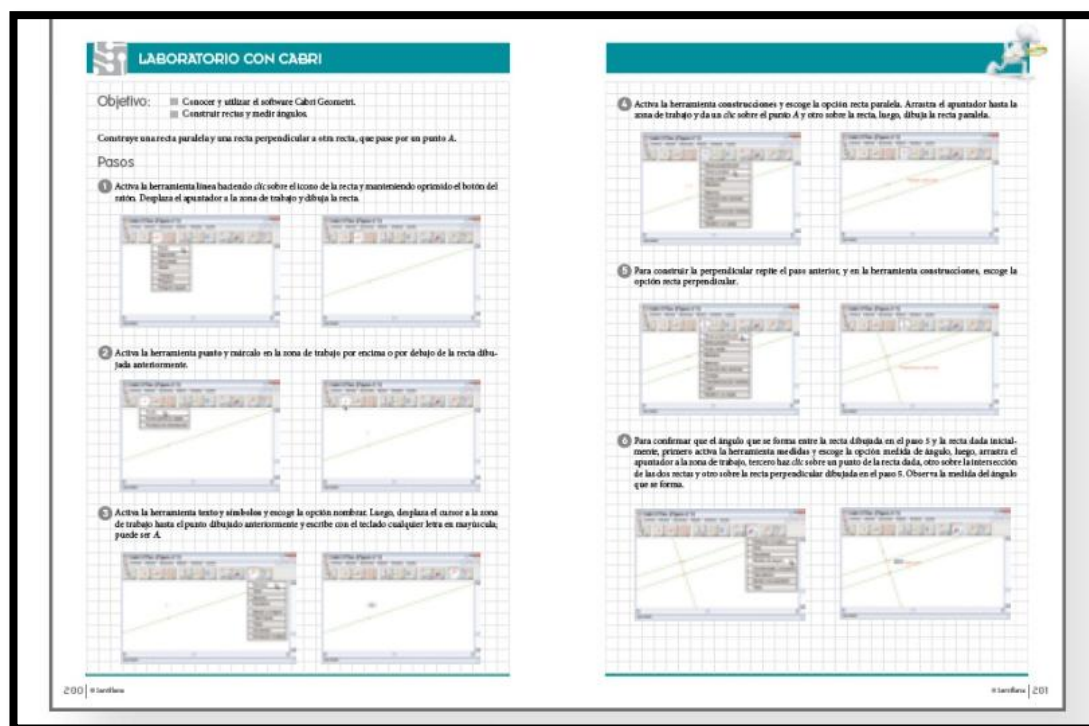


Figura 9. Laboratorios con Cabri

Como se puede observar en la Figura anterior, son secciones donde las actividades se realizan con el software Cabri con el propósito de que los estudiantes utilicen la tecnología para facilitar procesos de análisis los cuales a su vez potencian el pensamiento métrico y espacial.

- ✓ **Bicentenario en datos:** trata el tema de la independencia de Colombia a través de lecturas y actividades que se relacionan y potencian el pensamiento aleatorio.
- ✓ **Matemáticas y tecnología:** páginas que se dedican al trabajo de los estándares de tecnologías, de las cuales se encuentran solamente una página por libro.
- ✓ **Competencias laborales:** solo para los grados decimo y once se presentan al final de los libros páginas que muestran las carreras profesionales en las cuales se hace mayor uso de las matemáticas

Teniendo en cuenta lo anterior, *Hipertexto Matemáticas 8* edición el docente está dividido en diez unidades a saber: la primera unidad atiende al título de conjuntos numéricos donde se puede observar que tiene que ver con el conjunto de los números reales y sus sistemas de representación; la segunda unidad, expresiones algebraicas, presenta cuestiones generales las cuales se relacionan con expresiones algebraicas, términos, características de los monomios y polinomios; la unidad tres, operaciones entre expresiones algebraicas, avanza hacia las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división) entre las expresiones algebraicas; la unidad cuatro, productos y cocientes notables, conlleva a un primer acercamiento y construcción de las ideas, casos o estudios de los productos notables; ya en la unidad cinco, factorización, son presentados los estudios de algunos de los casos de factorización como puede evidenciarse en la Figura 10.

Continuando, en la unidad seis, fracciones algebraicas, se presentan objetos matemáticos como: el mínimo común múltiplo, el máximo común divisor, la simplificación y las operaciones básicas de las expresiones algebraicas racionales; la unidad siete, ecuaciones e inecuaciones, moviliza conceptos fundamentales en la construcción de los procesos algebraicos que atañen a las ecuaciones su definición, sus características, tratamientos, al igual que el manejo de un lenguaje algebraico y el manejo

de las inecuaciones y desigualdades; la unidad ocho, función lineal, nociones como pendiente de una recta, ecuaciones de las rectas y propiedades de las rectas; la unidad nueve, geometría corresponde al pensamiento métrico espacial, pues nociones como las de ángulos, triángulos, sus propiedades y los distintos métodos de demostración juegan un papel importante dentro de esta unidad; finalizando, en la unidad diez, estadística y probabilidad, se contemplan las nociones iniciales de la estadística, así como la caracterización de las variables cualitativas y cuantitativas acompañadas de la probabilidad y sus conceptos como el experimento aleatorio, espacio muestral y técnicas de conteo, como puede evidenciarse en la Figura 10 y 11 que a continuación se muestran

CONTENIDO

UNIDAD 1. Conjuntos numéricos		8	
▶ Números naturales	10	▶ Números irracionales	18
Orden en $\mathbb{N}$		Representación en la recta de los números irracionales	
▶ Números enteros	11	▶ Números reales	20
Valor absoluto de un número entero		Representación de números reales en la recta numérica	
Operaciones entre números enteros		Operaciones y propiedades en los números reales	
Polinomios aritméticos en $\mathbb{Z}$		■ Taller 1	24
▶ Números racionales	13	■ En síntesis	26
Orden en el conjunto de los números racionales		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	27
Operaciones con los números racionales		Números en la música	
Representación fraccionaria de números decimales			
UNIDAD 2. Expresiones algebraicas		28	
▶ Lenguaje algebraico	30	■ Taller 2	40
Términos algebraicos		■ En síntesis	42
▶ Monomios	31	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	43
Características de un monomio		Modelos polinomiales para el crecimiento de especies	
▶ Polinomios	34		
Características de un polinomio			
UNIDAD 3. Operaciones entre expresiones algebraicas		44	
▶ Suma y resta de polinomios	46	▶ División de polinomios	58
Suma de monomios		División de monomios	
Resta de monomios		División de un polinomio entre un monomio	
Suma de polinomios		División entre polinomios	
Resta de polinomios		División sintética	
Signos de agrupación		■ Taller 3	66
▶ Multiplicación de polinomios	52	■ En síntesis	68
Multiplicación de monomios		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	69
Multiplicación de dos polinomios		Polinomios en la aceleración de cuerpos	
Operaciones combinadas entre polinomios			
UNIDAD 4. Productos y cocientes notables		70	
▶ Productos notables	72	▶ Cocientes notables	86
Cuadrado de la suma de dos términos		■ Taller 4	90
Cuadrado de la diferencia de dos términos		■ En síntesis	92
Cuadrado de un trinomio		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	93
Producto de la suma por la diferencia		Los productos notables en las características hereditarias	
Cubo de un binomio		■ Tecnología y matemáticas	94
Triángulo de Pascal			
UNIDAD 5. Factorización		98	
▶ Noción de factorización	100	Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$	
Concepto de factorización		▶ Factorización de un cubo perfecto	123
▶ Factorización de monomios	101	▶ Factorización completa	125
▶ Factorización por factor común	102	Factorización completa con los casos de factorización	
Factor común por agrupación de términos		Factorización de un polinomio con división sintética	
▶ Factorización de binomios	107	■ Taller 5	130
Diferencia de cuadrados		■ En síntesis	132
Factorización de la suma y la diferencia de cubos		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	133
Factorización de la suma o la diferencia de potencias de igual exponente		La factorización en la fabricación de un CD	
▶ Factorización de trinomios	115		
Factorización de un trinomio cuadrado perfecto			

Figura 10. Contenido general del texto Hipertexto matemáticas 8 unidades 1 a 5

UNIDAD 6. Fracciones algebraicas		134
▶ Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	136	División de fracciones algebraicas
Máximo común divisor		Operaciones combinadas
Mínimo común múltiplo		Fracciones complejas
▶ Expresiones algebraicas racionales	143	■ Taller 6
Simplificación de fracciones algebraicas		■ En síntesis
▶ Operaciones entre fracciones algebraicas	147	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
Adición y sustracción de fracciones algebraicas		Las fracciones algebraicas en los espejos esféricos
Multiplicación de fracciones algebraicas		
UNIDAD 7. Ecuaciones e inecuaciones		170
▶ Ecuaciones	172	▶ Desigualdades
Partes y elementos de una ecuación		▶ Inecuaciones
Solución de una ecuación		Solución de problemas con inecuaciones
Transposición de términos		■ Taller 7
Solución de ecuaciones que tienen denominadores		■ En síntesis
Solución de las ecuaciones racionales		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
Solución de las ecuaciones que tienen literales		Las ecuaciones en las leyes de gases
▶ El lenguaje algebraico	189	
Planteamiento de ecuaciones para resolver problemas		
Fórmulas		
UNIDAD 8. Función lineal		206
▶ Función	208	Ecuación de la recta dados dos puntos
Elementos de una función		Ecuación general de la recta
Representación de las funciones		▶ Rectas paralelas
Variables dependientes y variables independientes		▶ Rectas perpendiculares
▶ Función lineal y función afín	216	■ Taller 8
▶ Pendiente de la recta	218	■ En síntesis
Clasificación de las rectas según la pendiente		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
▶ Ecuación de la recta	221	La función lineal en la pérdida de calorías
Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente		
UNIDAD 9. Geometría		238
▶ Ángulos	240	▶ Congruencia
Clasificación de los ángulos		▶ Triángulos y congruencias
Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante		▶ Laboratorio con Cabri
▶ Triángulos	245	▶ Unidades de longitud
Propiedades de los triángulos		▶ Unidades de área
Clasificación de triángulos		■ Taller 9
Líneas y puntos notables en un triángulo		■ En síntesis
▶ Métodos de demostración	255	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
Razonamiento deductivo		Geometría en los edificios
Generalizaciones falsas y contraejemplos		
Método directo de demostración		
UNIDAD 10. Estadística y probabilidad		274
▶ Estadística	276	Espacio muestral
Nociones iniciales		Técnicas de conteo
Caracterización de variables cualitativas		Probabilidad
Caracterización de variables cuantitativas		■ Taller 10
▶ Bicentenario en datos	286	■ En síntesis
▶ Probabilidad	288	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
Experimento aleatorio		Probabilidad en la lotería en línea

Figura 11. Contenido general del texto Hipertexto matemáticas 8 unidades 5 a 10

Presentada la estructura que contiene este libro de texto, evidenciando la ocurrencia de este por los docentes encuestados y dado el interés de este trabajo enmarcado dentro del campo de la didáctica del álgebra escolar, particularmente en las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, el centro de este apartado toma énfasis en el análisis de la unidad 7 pues obsérvese que es donde se presenta el estudio de las ecuaciones como objeto de enseñanza y aprendizaje en la escuela.

3.1.3 Descripción de la unidad referente a las ecuaciones en el libro Hipertexto Matemáticas 8

Esta unidad está comprendida por 35 páginas, corresponde a la unidad número siete de las diez que contiene el libro de texto, se encuentra dividida en cuatro temáticas; ecuaciones, lenguaje algebraico, inecuaciones y desigualdades. El objetivo principal de este análisis centrará su atención en la primera temática, que corresponde al estudio de las ecuaciones, particularmente, en aquellas ecuaciones de primer grado que son presentadas en el libro de texto, desde la página 170 a la 183 y de la 191 hasta la 193. (Ver ANEXO 5).

El inicio de la unidad comienza con la intención de centrarse en un contexto donde se alude a escritos cortos como datos históricos de las matemáticas, el cual es presentado a través de imágenes y preguntas que promueven la identificación de los conocimientos básicos con los que cuentan los estudiantes antes de enfrentarse al objeto matemático. Así mismo, orienta estos estudiantes a partir de preguntas introductorias como, por ejemplo, “¿Qué sabes acerca de las ecuaciones?, ¿Podrías escribir una ecuación y resolverla?, entre otras”.

También, realiza las presentaciones de las temáticas en subtítulos a un tamaño de letra mayor, cada una de estas se divide en subtemas y estos a su vez en el acercamiento a las nociones o definiciones que emergen acerca del concepto de ecuaciones los cuales son remarcados con negrilla, a continuación son enunciadas las temáticas que componen la unidad 7:

Hipertexto Matemáticas 8, edición para el docente. Unidad 7: Ecuaciones e inecuaciones		
Tópicos	Categorías	Conceptos, definiciones y estructuras
Ecuaciones	Ecuación	Igualdad: (numérica y algebraica). Identidad. Ecuación
	La partes de una ecuación	Miembros. Términos. Incógnitas .Grado de la ecuación. Soluciones o raíces
	Solución de una ecuación	Propiedad fundamental de las igualdades Solución de ecuaciones de la forma: $(x \pm a = b, ax = b, ax \pm b = c)$
	Transposición de términos	Transposición Solución de ecuaciones de la forma: $ax \pm b = cx \pm d$ Ecuaciones con paréntesis: $a(x \pm b) = (c \pm dx)e$ solución de ecuaciones que tienen denominadores : $\frac{a}{b}x \pm c = \frac{dx \pm e}{f}$ Solución de ecuaciones racionales * solución de ecuaciones que tienen literales ^{6*}
Lenguaje Algebraico	Lenguaje algebraico	Lenguaje algebraico
	Planteamiento de ecuaciones para resolver problemas	Pasos para resolver problemas con el planteamiento de ecuaciones (1 comprende el problema, 2 plantea la ecuación del problema, 3 resolver la ecuación) Comprobar la solución y escribir la respuesta
	Formulas	Formulas Despeje de variables en formulas
Desigualdades*	Desigualdad	Desigualdad Propiedades de las desigualdades
Inecuaciones*	Inecuaciones	Inecuación Intervalos
	solución de problemas con inecuaciones	Pasos: 1. Comprende el problema 2. Plantea la ecuación del problema 3. Resolver la ecuación

Tabla 5. Unidad 7: Ecuaciones e Inecuaciones.

* Como se puede observar de acuerdo a las temáticas expuestas dentro de la unidad 7, algunas de estas no corresponden al trabajo con ecuaciones de primer grado, por ello, es necesario precisar que las páginas 184 a 190 no serán tomadas en cuenta, pues no son de interés propio en este trabajo.

En las partes laterales de *Hipertexto Matemáticas* se abren pequeños recuadros de diálogos como los que se pueden observar en la Figura 12.

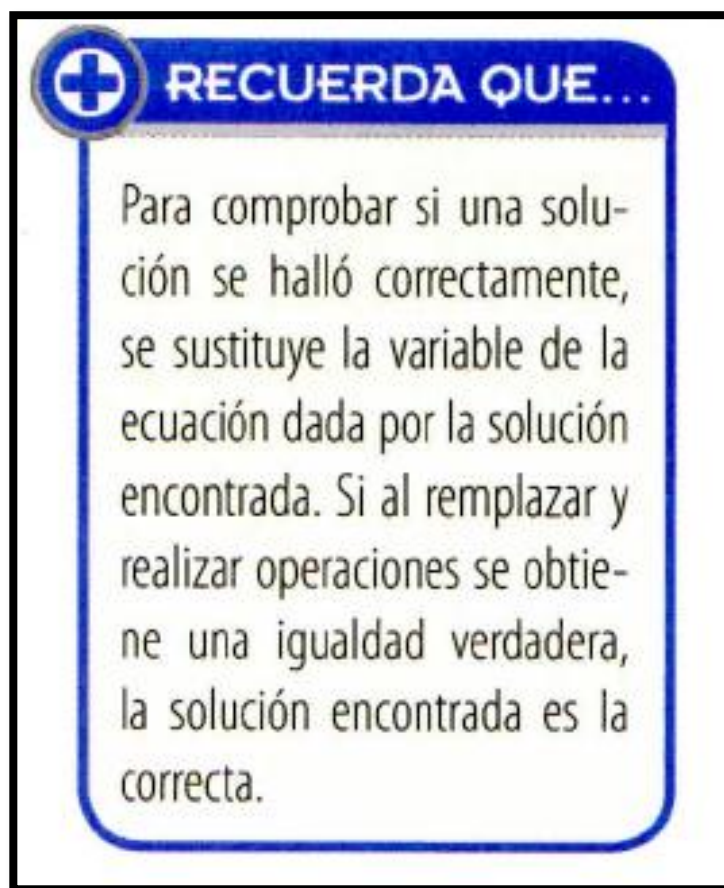


Figura 12. *Recuadros de dialogo*

En los cuales se alude a presentar de forma explícita ciertas ideas que quedan de soslayo en lo que se predica del concepto matemático al interior del texto, también, se considera información previa que deben tener los estudiantes para los temas a tratar.

Ahora, las páginas donde se encuentran las actividades se componen de ejercicios que se encuentran divididos en dos ejes a saber:

- Ejercitación, razonamiento, modelación, comunicación y resolución de problemas
- Recuperar información, interpretar, reflexionar y valorar, plantear y actuar.

Estos ejercicios tienen como objetivo principal desarrollar procesos matemáticos y habilidades como las que se explicitan anteriormente, además, en estas páginas se presenta

de manera anticipada la correspondencia de cada ejercicio con cada proceso o habilidad matemática.

También, se observa que en cada presentación de los temas se sigue un modelo tradicional en el que se ejemplifica, se ejercita y a partir de lo expuesto a nivel teórico se proponen actividades donde el estudiante de una u otra manera debe reproducir lo que se ha trabajado en páginas anteriores.

El análisis de texto se realiza teniendo cuenta la rejilla de análisis que se divide en tres categorías conformadas por el referente curricular, matemático y didáctico que a su vez se relacionan con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, también, se identifican los tratamientos que en el texto se encuentran articulados con dichos procesos.

3.2 Las ecuaciones de primer grado en *Hipertexto Matemáticas 8* a la luz de la rejilla de análisis

Haciendo referencia al marco conceptual de este trabajo y la rejilla que se presentó en el capítulo anterior, el análisis que se realiza en esta sección está dividido en tres categorías, las cuales se componen de los referentes a saber: curricular, matemático y didáctico.

3.2.1 Categoría de análisis: referente curricular

Esta categoría centra su atención en la propuesta que se hace desde el Ministerio de Educación Nacional bajo documentos oficiales como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2006), con el propósito de evaluar en el libro de texto cuestiones como: si las actividades que se desarrollan surgen desde la vida diaria o de las matemáticas mismas, si se relacionan con el contexto o entorno del estudiante, el tipo de procedimientos que se privilegian para la presentación, enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de primer grado (procesos de razonamiento, de comunicación, de resolución de problemas, de modelación, tipos de contexto, entre otros que fueron presentados en el referente curricular) y, si las actividades y metodología que plantea

el libro de texto potencian el desarrollo del pensamiento variacional y sus respectivos sistemas. Es decir, si se ajusta a los requerimientos de la propuesta curricular vigente que consiste en la presencia de situaciones que movilicen estándares, procesos generales de pensamiento y los conocimientos básicos.

Para empezar, se observa que al inicio del libro de texto se presentan los estándares que se movilizan en la unidad 7, los cuales se enuncian a continuación

- Del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se evidencian los siguientes estándares:
 - ✓ Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
 - ✓ Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada
 - ✓ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas
 - ✓ Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas
 - ✓ Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación
 - ✓ Identifico la variación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan
 - ✓ Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familia de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas
- Del pensamiento numérico y sistemas de numeración:
 - ✓ Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos

Tal como se logra evidenciar, en relación con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos apunta hacia el estudio de fenómenos de variación y cambio, situaciones que se dan en representación gráfica en el plano cartesiano, el estudio de las

funciones polinómicas, donde el concepto matemático que surge es el de función, lo cual es posible afirmar al realizar la lectura de los estándares arriba presentados.

Al revisar el contenido de la unidad 7, se observa que no se logra realmente presentar situaciones de variación y cambio para el estudio de las ecuaciones, es decir, aparece una disonancia dado que no es cierto que los estándares expuestos en el principio del texto estén siendo reflejados en las actividades que se movilizan dentro de esta unidad. También se observó, que a manera de encabezado en cada una de las páginas impares se indica que los estándares son los pensamientos que se estipulan dentro de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Tal como se logra ver en la Figura 13.

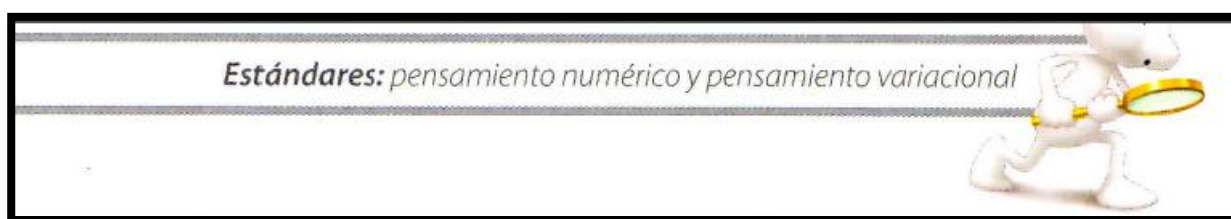


Figura 13. Tomado del libro de texto *Hipertexto matemáticas 8 Edición para el docente* pág. 177

Pareciera que en el libro de texto no hay una claridad entre los estándares que se movilizan para desarrollar tipos de pensamientos matemático y los pensamientos en sí mismo, es decir, es posible que el libro de texto asume que los estándares y los pensamientos es lo mismo, lo cual genera una confusión.

De acuerdo a lo anterior, es notorio que el pensamiento escogido (pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos) en el marco conceptual de este trabajo no es potenciado dentro de esta unidad, puesto que, no coincide con la mayoría de estándares que lo conforman y no genera otros estándares ni actividades encaminadas a desarrollar dicho pensamiento.

Lo anterior se mencionó, tomando como referencia la presentación inicial de la estructura general de los estándares a trabajar durante el desarrollo del texto y la parte inicial de la unidad en estudio.

Ahora, en cuanto a las competencias generales de este texto, todo el tiempo se están realizando procesos de ejercitación, donde el estudiante a partir de propiedades presentadas

por el texto con anterioridad debe poner en práctica para llevar a cabo la solución de los ejercicios planteados. A manera de ejemplo, observe las siguientes situaciones:

- Se encontró que el ejercicio 6 de la página 175 corresponde a la competencia razonar como se muestra en la Figura 14.

Interpretación: 1

Interpreta: 2

Ejercita: 3-4

Razona: 5-6

5 Escribe una ecuación para cada condición.

- De primer grado con dos términos independientes enteros.
- De segundo grado con un término independiente racional.
- De primer grado con un término independiente racional en forma decimal.
- De tercer grado sin términos independientes.
- De primer grado con un término independiente racional.

6 Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa.

- La solución de la ecuación $3x = 12$ es un número entero menor que 4.
- La solución de la ecuación $8x = 16$ es un número par.
- La solución de la ecuación $5x = 100$ es un número divisible entre 4.
- La solución de la ecuación $9y = 54$ es un número divisible entre 6 menor que 10.
- La solución de la ecuación $3 = 75m$ es un múltiplo de 5.
- La solución de la ecuación $144 = 6n$ es un número racional.
- La solución de la ecuación $17 = 238y$ es un número racional con denominador 4.
- La ecuación $-300 = 25n$ es un número negativo mayor que -5 .
- La ecuación $\frac{1}{3} = \frac{2}{5}n$ es un número racional con denominador 6.

Figura 14. Competencias generales Vs ejercicios, ejercicios 5 y 6 página 175

Donde se observa que el ejercicio no corresponde a un razonamiento relacionado propiamente con el trabajo de las ecuaciones, pues el sujeto para dar solución a los ítems propuestos dentro de este, debe seguir un proceso de ejercitación, en el cual, el texto con anterioridad ha presentado elementos (definiciones, propiedades) que debe poner en práctica poder dar con la solución de la ecuación. Después de que se han llevado a cabo todos los procedimientos para dar con dicha solución, aparece el razonamiento al cual es sometido el estudiante, el cual está en función a la comparación (mayor que, menor que o igual) de la solución encontrada y la solución planteada por el ejercicio en el libro de texto.

- De nuevo, en el ejercicio 5 y 6 de la página 177, tal como se logra observar en la Figura 15.

5 Determina si el valor de la incógnita es solución de la ecuación dada, si es incorrecta, resuélvela correctamente.

a. $\frac{1}{2}n + 6 = 15$	n = -18
b. $3a - \frac{1}{2} = -5$	a = $-\frac{3}{2}$
c. $\frac{2}{3}p - \frac{1}{4} = 6$	p = $\frac{11}{2}$
d. $\frac{1}{6}y + \frac{2}{4} = 3$	y = 15
e. $\frac{7}{5}m - 4 = \frac{1}{7}$	m = 2
f. $\frac{4}{9}w - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$	w = $-\frac{2}{5}$
g. $z + 7 = -\frac{4}{9}$	z = $\frac{6}{9}$

6 Escribe una ecuación para cada enunciado. Luego, resuélvela.

- a. El doble de un número, aumentado en 1, equivale a 7.
- b. El triple de un número, aumentado en 15, es igual a 45.
- c. El doble de un número, disminuido en 8, equivale a 12.
- d. El triple de un número disminuido en 2 equivale a 10.
- e. La mitad de un número, aumentado en 4 es igual a 9.

Figura 15. Competencias generales Vs ejercicios, ejercicios 5 y 6 página 177

Continúan llevándose a cabo procesos de ejercitación, donde se orienta a llevar a cabo realizaciones de observaciones de orden sintáctico y donde son presentadas oraciones escritas en lenguaje natural, que debe procurar escribir de forma algebraica de tal modo que construya una ecuación de primer grado, para luego aplicar una serie de propiedades que finalmente den solución a la ecuación planteada.

- En los ejercicios 7, 4, 5 a 11, de las páginas 175, 182 y 195 respectivamente, no se encuentra una propuesta encaminada hacia el pensamiento espacial, más bien se encuentran actividades mecánicas con el objetivo de reproducir lo que ya se ha dicho en términos algebraicos (de nuevo manipulaciones de orden sintáctico, de algoritmos, aplicación de propiedades, etc), por ejemplo, observe las siguientes Figuras:

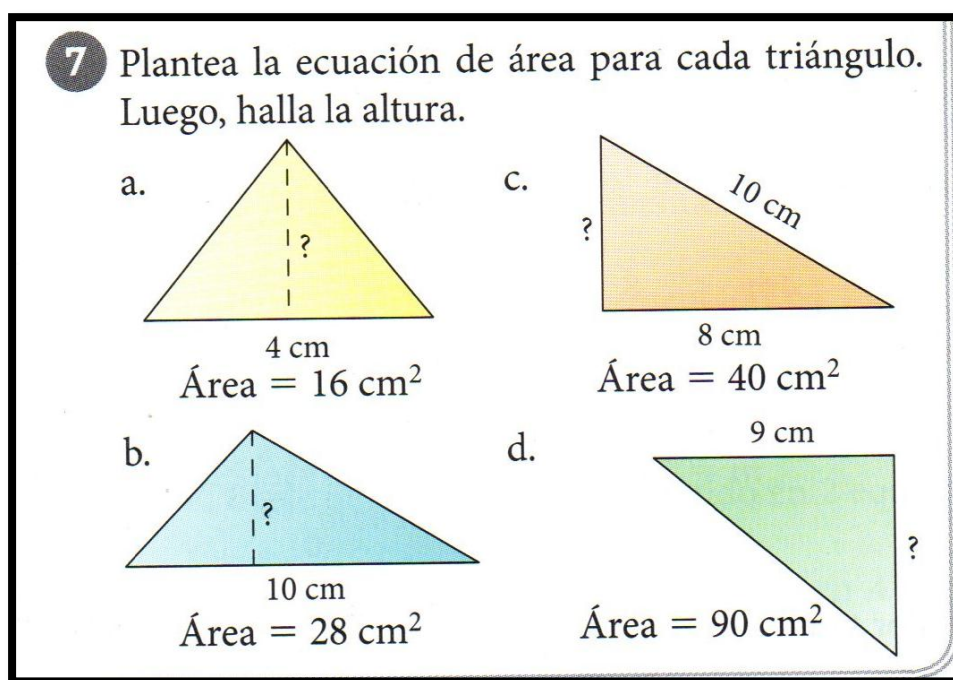


Figura 16. Ejercicio 7, página 175

Es posible notar que: en los triángulos de la Figura 16 son fijadas explícitamente las variables con las que el estudiante debe trabajar, es decir, no se permite que este explore hacia los conocimientos previos de las propiedades y definiciones de un triángulo, en este caso la altura de estos en diferentes posiciones y los distintos tipos de triángulos.

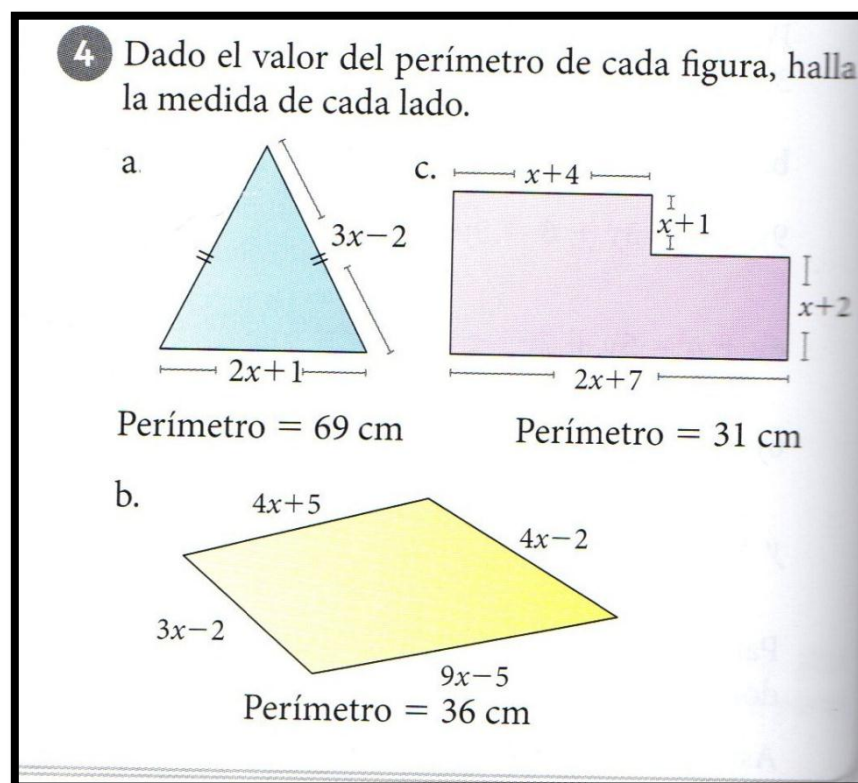
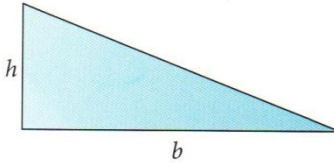


Figura17. Portada del libro de texto *Hipertexto Matemáticas 8*

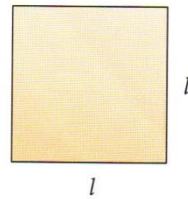
En la Figura 17, el estudiante debe recordar que encontrar el perímetro de una figura geométrica es sumar la longitud de cada lado, después de esto, teniendo en cuenta que cada lado de estas figuras está representado por una expresión algebraica el lector debe realizar los procedimientos necesarios (suma de monomios) para así establecer una expresión que le permita encontrar el lado faltante.

Soluciona problemas

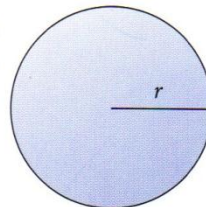
- 5 Halla el área de un triángulo que tiene 30 cm de base y 4 cm de altura. El área del triángulo es la mitad del producto de la base por su altura.



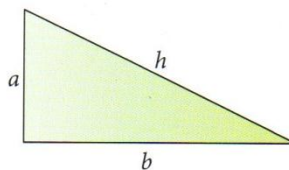
- 6 Halla el área de un cuadrado cuyo lado mide 5 cm. El área de un cuadrado equivale al lado elevado al cuadrado.



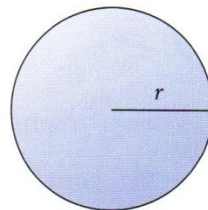
- 7 Halla el área de un círculo que tiene 3 cm de radio. El área de un círculo equivale al producto de π por el radio al cuadrado.



- 8 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm, si uno de sus catetos mide 4 cm. Halla la medida del otro cateto. La hipotenusa al cuadrado equivale a la suma de los cuadrados de los catetos.



- 9 Halla la longitud de un circunferencia cuyo radio mide 4 cm. La longitud de una circunferencia equivale al doble producto entre π y r .



- 10 Halla el volumen de un cilindro que tiene una altura de 10 cm y un radio de 3 cm en la base. El volumen de un cilindro equivale al producto del área de su base por la altura.

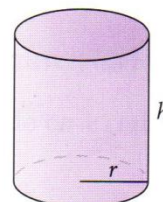


Figura 18. Ejercicios 5 a 11, página 195

Por último, en la Figura 18, en los ejercicios 5 a 11 estatizan y muestran de manera gráfica las nociones de área, perímetro y volumen donde el estudiante lo que debe realizar es la sustitución en una formula dada, para así encontrar el valor de lo desconocido.

Lo anterior evidencia la poca aparición de diferentes situaciones que permitan a los estudiantes desarrollar habilidades que apunten al pensamiento espacial y sistemas de medidas durante el desarrollo de esta unidad.

Por parte de los pensamientos y sus respectivos sistemas, estos presentan poca actividad en cuanto a situaciones que potencien los estándares que dentro de ellos se articulan. Así, las paginas destinadas a las situaciones problemas, siguen un modelo tradicional en el que se ejemplifica, se ejercita y a partir de lo expuesto a nivel teórico se proponen actividades donde el estudiante de una u otra manera debe reproducir lo que se ha trabajado en las temáticas anteriores.

Por otra parte, en relación con los tipos de contextos y situaciones problemáticas, durante la presentación de la unidad 7 y en relación con el objeto de estudio en este trabajo, *Hipertexto matemáticas 8* toma en consideración situaciones que se relacionan con las ecuaciones de primer grado en la contextualización de la vida diaria, como se presenta a continuación en la Figura 19

4 La ecuación $c = 0,25x + 6$ representa los costos de fabricación de bolsos de una empresa. Si x es el número de bolsos que se fabrican y los costos llegan a 200 dólares, ¿cuántos artículos fabricaron en esa empresa?

Sean $c = 0,25x + 6$ la ecuación dada y $c = 200$ los costos alcanzados. Se reemplaza c en la ecuación por los costos alcanzados y se despeja la variable para determinar los artículos fabricados. Así:

$$200 = 0,25x + 6$$

$$200 - 6 = 0,25x \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$194 = 0,25x \quad \text{Se resta.}$$

$$\frac{194}{0,25} = x \quad \text{Se divide ambos lados de la ecuación entre 0,25.}$$

$$x = 776 \quad \text{Se divide.}$$

Por tanto, en la empresa fabricaron 776 bolsos.

Figura 19. Ejemplo 4, página 179

El ejemplo anterior, es una situación que no surge en el contexto de muchas personas, pues atiende a la necesidad de algunas personas en particular. Lo cual tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que de una u otra manera dotan de sentido al objeto matemático que aprende.

También se evidencian situaciones propuestas a desarrollar por el estudiante en la finalización de esta unidad, que apuntan a generar tipos de contextos por medio de la solución de problemas, como se muestra en la Figura 20



Actividades

Soluciona problemas

1 Plantea cada ecuación. Luego, resuélvela.

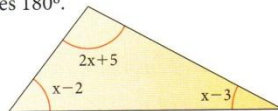
- La suma de dos números consecutivos es 299, ¿cuáles son los números?
- La suma de tres números consecutivos es 186, ¿cuáles son los números?
- La suma de dos números es 840 y el triple del mayor equivale al cuádruplo del menor, ¿cuáles son los números?
- Las tres cuartas partes de un número menos los tres medios del número equivalen a menos un medio, ¿cuál es el número?
- El doble de un número excede en 60 a la mitad del mismo número, ¿cuál es el número?

2 Resuelve los siguientes problemas de edades.

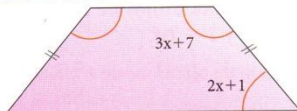
- La edad de Andrés es el triple de la de Pedro y dentro de 20 años será el doble, ¿cuáles son las edades actuales de Andrés y Pedro?
- La edad de Amalia es un tercio de la edad de Bernardo y hace 15 años, la edad de Amalia era un sexto de la edad de Bernardo, ¿cuáles son las edades actuales de Amalia y Bernardo?

3 Lee la información y observa las figuras. Luego, halla el valor de los ángulos en cada caso.

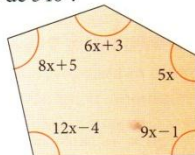
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .



- La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360° .



- La suma de los ángulos internos de un pentágono es de 540° .



4 Resuelve los siguientes problemas.

- Un balón, un libro y un afiche tienen un costo de \$20.000. Si el balón costó el triple del afiche y el libro el doble del afiche más \$2.000, ¿cuál es el costo de cada objeto?
- El perímetro de un triángulo es de 28 cm, si está formado de tal manera que su segundo lado es 2 cm más largo que el primer lado y el tercer lado es 3 cm más largo que el segundo lado, ¿cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?
- En una granja hay gallinas y marranos, si el número de marranos es la tercera parte del número de gallinas y hay 132 marranos, ¿cuántas gallinas hay?
- Se tienen 24 flores para hacer 2 ramos. Si se quiere que un ramo tenga el triple de flores del otro, ¿cuántas flores debe tener cada ramo?
- Una distribuidora de balones vendió en marzo la mitad de los balones, y a los dos meses, un tercio de los que quedaban. ¿Cuántos balones tenía al comienzo si ahora hay 40.000 balones?
- Se dispone de dos tipos de té, uno de Tailandia a \$15.000 el kilo y el otro de la India a \$18.000 el kilo. Si se quiere obtener 100 kg de té a \$16.500 el kg, ¿cuántos kilos de cada tipo de té se deben mezclar?
- ¿Cuántos litros de leche de \$1.500 el litro hay que mezclar con leche de \$2.000 el litro para conseguir 100 litros de leche a \$1.700 el litro?
- En una fábrica de ladrillos se mezcla arcilla de \$69.000 la tonelada con arcilla de \$135.000 la tonelada. ¿Cuántas toneladas de cada clase hay que emplear para conseguir 500 toneladas de arcilla a \$120.000 la tonelada?

5 Lee la información y luego, resuelve. Un camión sale de una ciudad A y se lleva una velocidad constante de 80 km/h, y dos horas más tarde, sale un automóvil de la misma ciudad a 120 km/h. ¿A qué distancia de la ciudad alcanzará el automóvil al camión?



Figura 20. Soluciona problemas, página 193

Con esto, realizando un paralelo entre la propuesta emanada por los documentos oficiales, se logra identificar que *Hipertexto Matemáticas 8* en la presentación de las páginas 172 a 183 toma una postura muy particular, puesto que no parte de la idea que plantean los Lineamientos acerca de empezar el trabajo del concepto matemático - ecuaciones de primer grado- desde situaciones problemáticas en un contexto que propicie la resolución de problemas, la modelación y la comunicación. Este texto, más bien, centra su atención en realizar la introducción de este concepto desde la exposición de definiciones y conceptos, es decir, desde un modelo más tradicional para la enseñanza de las matemáticas, el cual parte de definir unos conceptos y objetos de trabajo para luego presentar ejemplos y actividades mecánicas donde el objetivo principal es reproducir lo que se ha presentado con anterioridad. Por ello se abre paso a evidenciar el trabajo de este objeto propiamente desde un referente matemático

3.2.2 Categoría de análisis: referente matemático

En la unidad, se evidencian la exposición de conceptos que son fundamentales para el estudio de las ecuaciones, por ejemplo, el concepto de *igualdad* que es presentado en el texto a través de la comparación de cantidades, estableciendo distinción entre *igualdad numérica* e *igualdad algebraica* por medio de las cuales, se abre paso a las nociones de *identidad* y *ecuación*. Del mismo modo, se presentan los elementos que forman parte de una ecuación, a saber; *miembros*, *términos*, *incógnitas*, *grado de una ecuación* y *soluciones o raíces*. Lo anterior puede ser observado en la figura 21



Ecuaciones

Una expresión que compara dos cantidades mediante el signo igual "=", se denomina **igualdad**, y puede ser numérica o algebraica. La **igualdad numérica** incluye operaciones entre números solamente, y una **igualdad algebraica** incluye expresiones algebraicas.

Por ejemplo, la expresión $2 + 3 - 8^2 = 5 - 64$ es una igualdad numérica y la expresión $3x + 2y = 9$ es una igualdad algebraica.

Una igualdad algebraica que se cumple para cualquier valor de la variable o las variables se denomina **identidad**. Y una igualdad algebraica que se cumple para un valor específico de la variable se denomina **ecuación**.

Por ejemplo, la expresión $5x + 2y = 4x + x + 3y - y$ es una identidad pues se cumple para cualquier valor de x y de y . Si se toma a $x = 1$ y $y = 4$ y se reemplaza en la expresión anterior se tiene:

$$5x + 2y = 4x + x + 3y - y$$

$$5(1) + 2(4) = 4(1) + (1) + 3(4) - 4$$
 Se reemplazan los valores x y y .

$$5 + 8 = 4 + 1 + 12 - 4$$
 Se realizan las multiplicaciones.

$$13 = 13$$
 Se realizan las sumas y restas.

La expresión $2 + x = 5$ es una ecuación ya que se cumple únicamente cuando $x = 3$.

Partes y elementos de una ecuación



RECUERDA QUE...

Los términos que no tienen variable se denominan términos independientes.

En una ecuación, a la expresión que se encuentra antes del signo igual, es decir, en el lado izquierdo de la igualdad se le denomina **primer miembro** y a la expresión que se encuentra después del signo igual, es decir, al lado derecho del igual se le denomina **segundo miembro**.

A cada uno de los sumandos que se presentan en cada miembro de la ecuación se les denomina **términos**.

A los valores desconocidos o variables de la ecuación se les denomina **incógnitas**.

Al mayor exponente de la variable o las variables que tienen una ecuación se les denomina **grado de la ecuación**.

Al valor o valores que satisfacen la ecuación se les denomina **soluciones** o **raíces**.

Por ejemplo, en la ecuación $2 + x = 5$, el primer miembro es $2 + x$ y el segundo miembro es 5 y los términos de la ecuación son 2 , x y 5 . La incógnita es x y la ecuación es de primer grado por que el mayor exponente que tiene x en la ecuación es 1 .

En la ecuación $n^2 + 5n = 4n + 2$, el primer miembro es $n^2 + 5n$, el segundo miembro es $4n + 2$, los términos de la ecuación son n^2 , $5n$, $4n$ y 2 . La incógnita es n y la ecuación es de segundo grado porque el mayor exponente de la variable es 2 .

En la ecuación $x^3 - 1 = 0$, el primer miembro es $x^3 - 1$, el segundo miembro es 0 , los términos de la ecuación son x^3 , 1 y 0 . La incógnita es x y la ecuación es de tercer grado ya que el mayor exponente de x es 3 .

Figura 21. Definición y partes de una ecuación, página 172⁷

⁷ Los óvalos rojos que encierran los conceptos en la Figura 21 son propios del autor de este trabajo con el objetivo de hacer énfasis en ellos, se aclara que no son producto del libro de texto.

De esta Figura, es posible indicar que los conceptos ahí presentados, coinciden con los expuestos en la conceptualización realizada en el referente matemático de este trabajo.

De acuerdo con lo anterior, es posible evidenciar que los elementos expuestos tanto en el campo procedimental como el campo conceptual que se exponen en el referente matemático del capítulo II se presentan en gran medida. No obstante, es necesario aclarar que muchos de estos no se presentan explícitamente, sino que se hace uso de ellos puesto que algunos de ellos no son propiamente conceptos tal como se presenta en las tablas 2 y 3. Dado que se movilizan los términos, estructuras, notaciones, convenios, no de manera explícita en tanto que no son conceptos que necesitan esta presentación y las destrezas, razonamientos y estrategias son abordadas a lo largo de toda la unidad.

A partir del análisis de esta unidad del libro de texto, se observa que las raíces o soluciones que se proponen para el estudio de las ecuaciones, tanto en ejemplos como en ejercicios presentados a los estudiantes, son elementos que se ubican en el conjunto de los números racionales tanto en su expresión fraccionaria o decimal entera. Sin embargo, es importante resaltar que a lo largo de toda la unidad, solo se presenta un ejemplo en el cual se expone una ecuación con una raíz decimal no entera, tal como se logra apreciar en la figura 22.

× Ejemplos

Resolver las ecuaciones con denominadores

a. $\frac{3x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4} + \frac{7}{12}$

$\frac{3x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4} + \frac{7}{12}$ — Ecuación dada.

Se busca el mcm de 2, 3, 4 y 12.

Así, mcm (2, 3, 4, 12) = 12.

$12\left(\frac{3x}{2} + \frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{x}{4} + \frac{7}{12}\right)$ — Se multiplica cada miembro de la ecuación por 12.

$12\left(\frac{3x}{2}\right) + 12\left(\frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{x}{4}\right) + 12\left(\frac{7}{12}\right)$ — Se aplica la propiedad distributiva.

$18x + 4 = 3x + 7$ — Se realizan las operaciones indicadas.

$18x - 3x = 7 - 4$ — Se transponen términos.

$15x = 3$ — Se reducen términos semejantes.

$x = \frac{3}{15}$ — Se divide entre 15 en ambos miembros de la ecuación.

$x = \frac{1}{5}$ — Se simplifica.

La solución de $\frac{3x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4} + \frac{7}{12}$ es $x = \frac{1}{5}$.

Figura 22. Ecuaciones con raíces racionales, página 183

Del mismo modo, es importante resaltar que la mayoría de coeficientes de las ecuaciones que se presentan a lo largo de la unidad estudiada son enteros, salvo cuatro (ver anexo 4, pag 179) ecuaciones en las cuales los coeficientes son racionales en su expresión decimal no entera. Lo anterior es importante anotarlo, dado que, el estudiar las ecuaciones solo en este conjunto numérico, deja por fuera el estudio de ecuaciones con coeficientes o raíces dentro del conjunto de números irracionales. Desde esta perspectiva, por ejemplo, no se evidencia la presentación de ecuaciones de tipo $\sqrt{2}x + 3\pi x = 5x$ donde sus coeficientes y raíces se movilizan en los irracionales.

Sin embargo, cabe resaltar que hay algunos conceptos que pese a que también tienen relación con el concepto de ecuación, estos no se presentan en el libro de texto, por ejemplo, no se hace referencia al *dominio de la variable*, ni al *conjunto solución* de la ecuación, si bien si se hace alusión a la solución o a la raíz se obvia que todas las soluciones o raíces pueden conformar un conjunto. Pese a que estos dos conceptos no son una cuestión central o indispensable para el estudio de las ecuaciones de primer grado, que el dominio de las variables es $\mathbb{R}$ y el conjunto solución es unitario en estas ecuaciones. La falta de presentación de estos conceptos en el libro de texto deja por fuera por ejemplo, ecuaciones no polinómicas, o ecuaciones racionales como $\frac{3}{x} + x = 3$ donde la solución tiene que ser excluida porque no hace parte del dominio lo cual, brinda la posibilidad de generar acercamientos para el estudio posterior de ecuaciones como la presentada.

Otro de los conceptos que no se movilizan en el libro de texto es el de *ecuación equivalente*, el cual es fundamental en el proceso de resolución de una ecuación, dado que la cadena de ecuaciones que se van generando para efectos de hallar la raíz de la propuesta (ecuación inicial o ecuación dada) son ecuaciones equivalentes. Otro concepto que también es fundamental y no se evidencia es el concepto de *ecuación inconsistente*, es decir, pareciera ser que de entrada el libro de texto asume que todas las ecuaciones tienen solución, pues no da lugar a pensar sobre ecuaciones en donde su solución sea vacía, despreciando el estudio de ecuaciones como $3x + 1 = 2x - 1 + x$ con las cuales sería posible plantear debates de orden matemático que giren en torno a aquellas cuyo conjunto solución es vacío, reflexionando desde dos perspectivas: la matemática, que atiende a interrogantes como: ¿todas las ecuaciones tienen solución? ¿Qué ocurre con

aquellas que no tenga solución? ¿Qué se puede concluir de la ecuación anterior al llegar a $1 = -1$? Y la didáctica, con preguntas como ¿Qué significa que una ecuación no tiene solución? ¿Qué puede pensar un estudiante, sobre el proceso de resolución de este tipo de ecuaciones?

Ahora bien, otro elemento de análisis que es posible identificar en el libro de texto es la forma en cómo se presenta la *propiedad uniforme de la igualdad* y las operaciones en las cuales ella tiene presencia.

Estándares: pensamiento numérico y pensamiento variacional



Solución de una ecuación

La solución de una ecuación es el valor o conjunto de valores que puede tomar la variable para que la igualdad se cumpla.

Para encontrar la solución de una ecuación se realiza un proceso que consiste en transformar una ecuación en otra. Para ello es necesario aplicar la propiedad fundamental de las igualdades.

Propiedad fundamental de las igualdades

Si a los dos miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide entre una expresión algebraica o numérica, la igualdad se mantiene. Es decir, si $a = b$ se cumple que:

$$a + c = b + c$$

$$a - c = b - c$$

$$a \cdot c = b \cdot c$$

$$a \div c = b \div c$$

RECUERDA QUE...

Para comprobar si una solución se halló correctamente, se sustituye la variable de la ecuación dada por la solución encontrada. Si al reemplazar y realizar operaciones se obtiene una igualdad verdadera, la solución encontrada es la correcta.

Figura 23. *Propiedad fundamental de las igualdades*

Como se puede evidenciar en la figura 23, se resaltan dos cuestiones; la primera, en el libro de texto no se designa a la propiedad como debiera ser, sino que se indica como la propiedad fundamental de las igualdades, que si bien esto es cierto no se le adjudica la etiqueta que matemáticamente le corresponde; y, la segunda, hace referencia a la distinción que se realiza entre la suma y la resta, y entre la multiplicación y la división, es decir, el texto realiza la presentación de esta propiedad bajo cuatro condiciones, cuando se conoce que desde una perspectiva matemática solamente está definida la propiedad uniforme de las igualdades para la suma y para la multiplicación, en tanto que la resta hace parte de la estructura aditiva y la división hace parte de la estructura de la multiplicación.

Al inicio del libro de texto se presenta lo que en él se indica como mapa conceptual, que se relaciona con las ecuaciones, el cual se exhibe en la figura 24

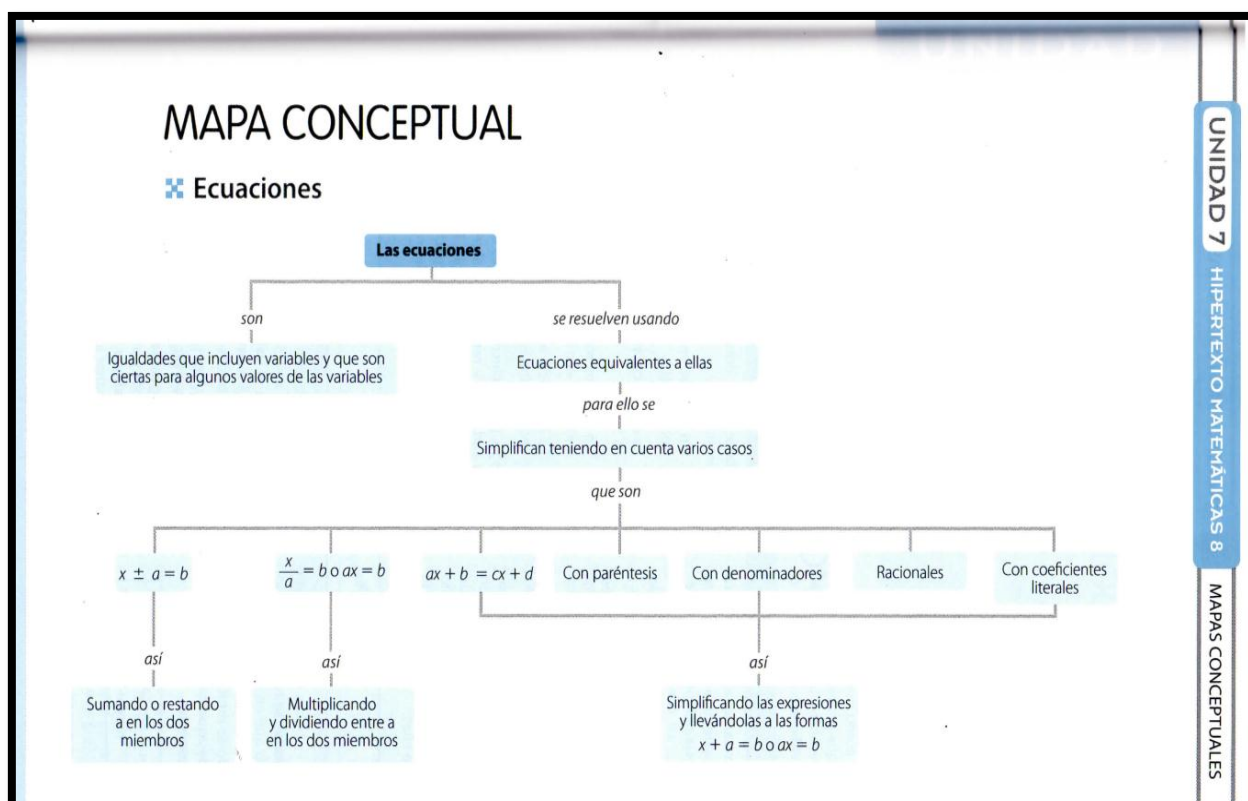


Figura 24. Mapa conceptual de las ecuaciones en *Hipertexto Matemáticas 8*.

Sin embargo, como se puede observar, realmente no hay una red conceptual que articule y relacione la multiplicidad de conceptos que hacen presencia en el estudio del el concepto de ecuación, sino que lo que se expone en el mapa conceptual centra más la atención en la resolución de las ecuaciones, dependiendo del tipo de estructuras que estas presentan, a saber $x \pm a = b$, $\frac{x}{a} = b \Rightarrow ax = b$, $ax + b = cx + d$ y si tienen paréntesis, denominadores, racionales, coeficientes literales, dejando de lado realmente el valor conceptual que se supone debería tener el esquema, en tanto así lo están denominando. Es decir, pareciera que lo llevan más hacia la resolución de las ecuaciones a partir de la identificación de sus estructuras que a la misma conceptualización de las ecuaciones.

3.2.3 Categoría de análisis: referente didáctico

No hay una correspondencia entre lo que diferentes estudios históricos en Educación Matemática han develado acerca de abordar la entrada al trabajo de las ecuaciones desde una perspectiva histórica y el trabajo de las actividades algebraicas, dado que la historia indica que las ecuaciones surgen como modelos matemáticos para resolver problemas de contextos históricos temporales. Por ejemplo, como las distintas situaciones que ocurrían hace algunos años, en donde a partir de problemas de trueques y de terrenos surge la necesidad de tratar las ecuaciones, es decir, el trabajo no está en la necesidad de resolver problemas sino de plantear modelos para después con la búsqueda de mayores niveles de generalidad se empiezan a trabajar las ecuaciones propiamente

Tal cual como se ha entendido aquí la modelación, el libro de texto desconoce elementos que la historia a develado para el estudio de las ecuaciones. No reconoce la perspectiva histórica como un elemento que brinda insumos para el estudio de este objeto matemático, en particular, no es esta la entrada para el estudio de las ecuaciones especificada en el cuerpo histórico de este trabajo. Sin embargo, cabe anotar que el texto nombra un tópico que es presentado luego de estudiar todos los conceptos, estructuras y formas de resolver las ecuaciones, este tópico recibe el nombre de resolución de problemas, donde son expuestas cierta cantidad de situaciones que se modelan por medio del objeto matemático en cuestión, lo cual va en contravía de la perspectiva de resolución de problemas, pues esta no se asume como entrada sino que se deja como un tópico aparte donde se aplica el aprendizaje que los estudiantes han construido sobre las ecuaciones, como se puede evidenciar en la figura 25.

Planteamiento de ecuaciones para resolver problemas

Para resolver problemas con el planteamiento de ecuaciones es necesario llevar a cabo los siguientes pasos:

Primero, comprender el problema.

Este paso consiste en leer e interpretar el enunciado. Para ello se debe distinguir la incógnita del problema, asignarle una variable y expresar la información del problema en el lenguaje algebraico.

Segundo, plantear la ecuación del problema.

Se escribe una ecuación en la que se relacionen los datos con la incógnita.

Tercero, resolver la ecuación.

Se resuelve la ecuación planteada de acuerdo con los procedimientos presentados anteriormente.

Cuarto, comprobar la solución y escribir la respuesta.

Se verifica que la solución de la ecuación se resolvió correctamente y que cumple con las condiciones del problema. Se redacta la respuesta de acuerdo con la pregunta o condición del problema.

Figura 25. *Planteamiento de ecuaciones para resolver problema*

De esta Figura, es posible reconocer desde Puig (1998) los elementos que el autor propone no como el mismo nombre pero si con la misma secuencia, que también son develados por elementos de tipo históricos propuestos por ejemplo por descartes, del mismo modo, en el trabajo cartesiano tal como se expone en el referente histórico.

También, se observa en la figura 25 que las situaciones que se presentan en este apartado contienen un factor común y hace referencia a que en todos estos ejercicios son proporcionados los datos desconocidos al igual que las fórmulas que deberían ser propuestas para desarrollar tales situaciones, es decir, el trabajo del estudiante más que generar situaciones de resolución de problemas consiste en sustituir en formulas planteadas, valores establecidos para encontrar la solución a dichas situaciones. Por lo que realmente, no se logra evidenciar incluso un apartado que se relacione con la resolución de problemas como tal.

Tal como se mencionó en la perspectiva curricular, a pesar de que el libro de texto en su parte inicial hace énfasis en que los estándares que se movilizan en la unidad 7 para el estudio de ecuaciones tienen que ver con la mayoría de estándares relacionados con el pensamiento variacional (con el estudio de fenómenos de variación y cambio). Realmente no es posible afirmar que el libro de texto movilice una perspectiva funcional o variacional para el estudio de las ecuaciones. Dado que no se parte de fenómenos de variación y cambio para llegar al

estudio de las ecuaciones particularmente ecuaciones de primer grado, más bien se observan procesos que van desde la presentación de estructuras de ecuaciones y respectivas formas de resolverlas.

En relación con lo anterior y con lo que se entiende aquí por aritmética generalizada es posible evidenciar que desde el inicio de la unidad el libro de texto centra su atención en lo simbólico, en el tratamiento de lo sintáctico, en que hay ciertas estructuras de las ecuaciones así mismo formas para resolverlas. Tal como se mencionó, en el texto se da relevancia a las estructuras y formas de resolver las ecuaciones bajo esas estructuras presentadas, dejando de lado, la importancia de generar conciencia en el estudiante, en cuanto al verdadero trasfondo existente para resolver las ecuaciones de primer grado y que esto es independiente de la estructura que estas presenten, dado que es la propiedad uniforme de la igualdad y los axiomas de R los elementos suficientes para resolver cualquier ecuación.

REFERENTES CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	SUBCATEGORÍAS DE ANÁLISIS	VARIABLES ESPECÍFICAS DE ANÁLISIS EN EL TEXTO ESCOLAR	RESULTADOS DEL ANÁLISIS			EVIDENCIAS
			S	I	NO	P
REFERENTE CURRICULAR	Organización curricular según MEN (1998)	¿Se apunta al desarrollo de procesos generales (Razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación, comparación y ejercitación de procedimientos) en la presentación de actividades, ejercicios y problemas?	X			Ejercicios Pág.175 Ejercicios Pág.177 Ejemplos Pág.179
		¿Se presenta el estudio de las ecuaciones de primer grado mediante situaciones problemáticas?			X	
	Organización Curricular según MEN (2006)	¿Las actividades propuestas guardan coherencia vertical?			X	
		¿Las actividades propuestas guardan coherencia horizontal?				X Ejercicios Pág.175 Ejercicios Pág.195
REFERENTE MATEMÁTICO	Dimensión conceptual	¿En la presentación se exponen o evidencian términos, notaciones, convenios, resultados, estructuras?	X			Ejercicios Pág.172 Ejercicios Pág.173
		¿En la presentación se exponen o evidencian conceptos?				X Ejercicios Pág.172
	Dimensión procedimental	¿El concepto objeto de estudio es abordado o desarrollado teniendo en cuenta las destrezas, estrategias y razonamientos?				X Ejercicios Pág.175 Ejercicios Pág.182
REFERENTE DIDÁCTICO	Perspectiva de resolución de problemas	¿Se reflejan los pasos propuestos por Puig (1998) para poner un problema en ecuaciones?	X			Ejercicios Pág.191
		¿Se estudia el concepto se teniendo en cuenta el componente semántico como eje fundamental?				X Página 191 Ejercicios Pág.193
	Perspectiva histórica	¿Es posible evidenciar elementos del método cartesiano en la resolución de los problemas?				X Página 191
		¿Se ve la resolución de problemas como una entrada al estudio del concepto?			X	
	Perspectiva funcional	¿Se presenta el estudio de las ecuaciones de primer grado a través de fenómenos de variación y cambio?			X	
		¿Se presenta el estudio del concepto por medio de relaciones funcionales?			X	
	Perspectiva de modelación	¿Las ecuaciones son presentadas como un modelo matemático para el estudio de ciertas situaciones problema?				X Ejemplos Pág.179
	Perspectiva de aritmética generalizada	¿Se inicia el estudio de las ecuaciones de primer grado a partir de la presentación de conceptos y definiciones como elementos primarios para su posterior abordaje?	X			Página 172 Página 173 Página 176
		¿Se presentan reglas y procedimientos para trabajar las transformaciones en el sistema simbólico?	X			Página 191
		¿Para el estudio del concepto se toma en consideración el componente sintáctico como aspecto fundamental?	X			Ejemplos, página 173

Tabla 6. *Rejilla de análisis diligenciada teniendo en cuenta los referentes conceptuales*

CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este último capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo, las cuales parten de verificar lo realizado en la pregunta de investigación y los objetivos planteados para identificar, por un lado, los conocimientos didácticos que, a partir de la recopilación teórica por medio de referentes como el curricular, matemático y didáctico se deberían tener en el proceso de realizar el análisis de un texto para ser contemplado en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado. Por otro lado, los conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos que fueron posibles identificar en unidad de análisis perteneciente al libro de texto en cuestión. Esto último con el fin de aportar recomendaciones didácticas para las necesidades formativas que todo maestro demanda en el momento de llevar a cabo la enseñanza y aprendizaje de algún tema de las matemáticas escolares, particularmente, las ecuaciones de primer grado en grado octavo.

4.1 Conclusiones

El propósito fundamental de este trabajo fue realizar el análisis al libro de texto *hipertexto matemáticas 8 edición para el docente*, específicamente, a la unidad 7 correspondiente al estudio de las ecuaciones de primer grado, esto teniendo en cuenta que se realizaría desde perspectivas curricular, matemática y didáctica. Tomando en consideración los aspectos fundamentales de los referentes expuestos en el capítulo II y los resultados del análisis realizado en el capítulo III los resultados observados fueron los siguientes:

En la propuesta que presenta el libro de texto poco se logra recoger la propuesta curricular emanada por los Estándares Básicos en Competencias y los Lineamientos Curriculares (MEN 2006) para el diseño de actividades de aula, puesto que hace falta realmente en el libro de texto que se estudien las ecuaciones de primer grado a partir de situaciones problemáticas contextualizadas que movilizaran procesos de aprendizajes para el desarrollo de pensamientos. Pese a que se mencionan ciertas competencias en su mayoría corresponden al desarrollo de procedimientos algorítmicos.

En relación con el objeto matemático de estudio y desde la perspectiva curricular, hace falta articular la relación de estándares que movilicen situaciones o acercamientos desde fenómenos de variación y cambio con el estudio de las ecuaciones de primer grado. De hecho, a pesar de que en la presentación inicial del texto se estipulan cuáles estándares serán abordados durante la unidad, no se encuentran ningún tipo de situaciones específicas que se relacionen con tal presentación, por ejemplo, objetos matemáticos como la pendiente de una recta, situaciones de variación con funciones polinómicas, representación algebraica de funciones y su comportamiento no se evidencian en ningún momento.

Igualmente, es notorio como el texto centra su atención en realizar la introducción de este objeto matemático desde la exposición de definiciones y conceptos, seguido de la presentación de ejemplos y finaliza con una serie de ejercicios, desarrollando a la largo de la unidad un modelo más tradicional para la enseñanza de las ecuaciones, en el cual el estudiante debe enfrentarse a ciertas actividades donde el objetivo principal es reproducir casi de manera mecánica lo que ha visto con anterioridad.

Desde la perspectiva histórica, cabe mencionar que el texto poco toma en cuenta lo que el estudio realizado a lo largo del tiempo por diferentes investigadores en Historia del álgebra en particular, devela acerca de introducir el álgebra escolar por medio de la resolución de problemas, es decir, deja por fuera el estudio de fenómenos como determinar edades, precios, cantidades, medidas, de variación y cambio en ciertos contextos particulares, más bien, se adopta un modelo más tradicional en la presentación conceptual, de ejemplos y de ejercicios, lo cual deja por fuera un amplio bagaje de conocimientos que se pueden adquirir en el momento de generar situaciones transversales en otras ciencias y que doten de conocimiento matemático al estudiante.

Sin embargo, se debe reconocer que por un lado, El libro de texto hace un intento por estudiar la resolución de problemas para lo cual dedica una sección específica en donde es posible reconocer elementos que históricamente y didácticamente se presentan como fundamentales en la resolución de problemas, tal sección comprende de una serie de ejercicios en los cuales se pretende que el estudiante aplique los conocimientos interiorizados en la unidad, los cuales de una u otra manera limitan al estudiante pues, en algunos ejercicios el proceso de razonamiento se queda en simplemente sustituir valores en formulas dadas, dejando de un lado fenómenos donde el objetivo sea por ejemplo: determinar edades, medidas, cantidades, de variación y cambio dentro de un contexto en particular. Por otro lado, Hipertexto Matemáticas 8 retoma esta perspectiva cuando el objetivo principal es el planteamiento de ecuaciones para resolver problemas, dado que toma en cuenta el método cartesiano y la propuesta emanada por Luis Puig (1998) referente a los pasos que se deben seguir en el proceso de poner un problema en ecuaciones, lo cual es importante en el estudio de las mismas.

Ahora, en cuanto al referente matemático, se observa la presentación de conceptos, propiedades y procedimientos fundamentales para abordar el estudio de ecuaciones de primer grado, se resalta el tratamiento que se hace de estos. Por ejemplo, en la unidad 7, se hace énfasis en las diferentes maneras de solucionar las ecuaciones atendiendo a sus distintas estructuras ($ax = b \rightarrow ax \pm b = c \rightarrow ax \pm b = cx \pm d$), para ello, el proceso de resolución es abordado teniendo en cuenta la propiedad uniforme de la igualdad, sin embargo, hace falta generar conciencia de que independientemente de la estructura que se presente al emplear tal propiedad, es posible darle solución, del mismo modo, se encuentran ciertas dificultades que

giran en torno a la resolución de problemas cuando el objetivo es generar una cadena de ecuaciones equivalentes, dado que en relación con los axiomas del conjunto de los números reales, estos son entendidos como operaciones, lo cual, a largo plazo o al intentar analizar, comprender o solucionar ecuaciones de mayor grado puede generar algún tipo de confusión.

Teniendo en consideración la perspectiva funcional, tal como lo corroboran algunas investigaciones, surge la necesidad de articular distintos sistemas de representación para el estudio de las ecuaciones de primer grado, es claro que si el sistema simbólico-algebraico es potente para abordar su estudio, este no puede quedar reducido a las transformaciones posibles en este sistema. Es necesario resaltar aquí, el grado de complejidad existente en la traducción de un sistema de representación a otro, tal complejidad va desde la designación de las cantidades que en este se involucran hasta el planteamiento de la igualdad. De este modo, es importante atender el estudio de las ecuaciones desde un enfoque funcional en correspondencia con el llamado realizado por los referentes curriculares, puede permitir abordar el sistema de representación gráfico – cartesiano, haciendo especial énfasis en los procesos de variación y cambio.

En relación con la rejilla de análisis se destaca su importancia, puesto que permitió lograr la articulación de todos los aspectos que giran en torno a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, evidenciar y sintetizar diferentes aspectos de tipo curriculares, matemáticos y didácticos que se podían presentar a lo largo de la unidad en el texto seleccionado, convirtiéndose esta en un recurso fundamental para el desarrollo de este trabajo.

4.2 Recomendaciones

- Se propone a los docentes interesados que en cuanto a la planeación curricular presentada al inicio del libro de texto, por una parte, es importante tener en cuenta la correspondencia con los estándares iniciales y los abordados durante la unidad de estudio. Por otra parte, que la introducción del objeto matemático en cuestión se articule por medio de fenómenos de variación y cambio, de tal modo, que propongan situaciones problemáticas, contextos, competencias y rozamientos donde potencien de una u otra forma los diferentes pensamientos para la construcción de conocimiento matemático en los estudiantes.

- Así mismo, que la entrada para el estudio del álgebra escolar, particularmente, de las ecuaciones de primer grado, debe realizarse por medio de perspectivas como la resolución de problemas y la modelación, es decir, por medio de fenómenos para los cuales el objeto de estudio surge como un modelo matemático que permite describirlos, expresarlos o cuantificarlos; dado que la diversidad de estos dota de experiencia y de estudio en las matemáticas mismas u otras ciencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Area, M. (1991). *Los medios, los profesores y el currículo*. Barcelona: Sendai.
- Alcalá, M., Cachafeiro, L. & Pérez, L. (1994). *Materiales curriculares y criterios para medios, modelos y recursos en el aula de matemáticas*. En Rico, L. y J. Gutiérrez (eds), *Formación científico didáctica del profesor de matemáticas de secundaria*. Granada: ICE.
- Alibali, M., Knuth, E., Hattikudur, S., McNeil, N. y Stephens, A. (2007). *A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations*. *Mathematical thinking and learning*, 9(3), 221-246.
- Alonso, F., Barbero, C., Fuente, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S.,...Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Andrews, P. & Sayers, J. (2012). *Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary*. *Journal of Mathematical Behavior*, (31), 476-488.
- Arbeláez, Arce y Guacaneme, (1999), *Análisis de Textos escolares de matemáticas*. Convenio UNIVALLE- MEN-ICETEX. Instituto de Educación y Pedagogía. Artes Gráficas Univalle, Cali.
- Astudillo, M. T. G., & Sierra, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 22(3), 389-408.
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996) (Eds). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Londres: Kluwer Academics Publisher.
- Castro, E. Molina, M. & Castro, E. (2009). *Cómo entienden los alumnos de primaria el signo igual en las ecuaciones numéricas*. En: *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*; 7(1), 341 – 368.
- Castro, E. & Molina, M. (2007). *Desarrollo del Pensamiento Relacional Mediante Trabajo con igualdades Numéricas en Aritmética Básica*. En *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal*. *Educación Matemática*, 19(2), 67-94.
- Cole, J. A., & Swoicowski, E. W. (2009) *álgebra y trigonometría: con geometría analítica*/SWOKOWSKI, EARL W. Y JEFFERY A. COLE.
- Coriat, M. (1997). *Materiales, recursos y actividades: un panorama*. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 155-177). Barcelona: Horsori.

- Filloy, E. (1999). *Los modelos de enseñanza. En E. Filloy, Aspectos teóricos del álgebra educativa* (pp. 23-35). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E. & Rojano T. (1985). *Obstructions to the acquisition of elementary algebraic concepts and teaching strategies*. En L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp.154-158). Utrecht, Holanda.
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). *Solving Equations: The transitions from arithmetic to algebra. For the learning of mathematics*, 9 (2), 19 – 25.
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). *Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. Researchs in Didactique dec Mathématiques*, 9, 155- 188.
- Garzón & Vega(2011). *Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría*. En: XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.
- Hurtado, C. A. (2012). *Análisis didáctico de las ecuaciones algebraicas de primer grado y su impacto en la educación básica*. Tesis de maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Hernán, F. & Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol. Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 390-419). New York:
- Kieran, C & Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias*, 7(3), 229-240.
- Kieran, C. (2006). *Research on the learning and teaching of algebra*, en A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp.11-49). Sense Publishers: UK
- Kilpatrick, J. (2009). *The mathematics teacher and curriculum change*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Santa Fé de Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fé de Bogotá, Colombia.

- Micolta, J. (2008). *Reflexión sobre el planteamiento de problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita desde una teoría semiótica de representación* (trabajo de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Santos Trigo, L. (1993). *La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas*. Mathesis, 9 (4), 419-432.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación*. Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77, 5-34.
- Socas, M. & Palarea, M. (1997). *Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en álgebra escolar*. UNO: revista de didáctica de la matemática, (14), 7-24.
- Puig, L. (1998). *Cómo poner un problema en ecuaciones*. Valencia. Recuperado de <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>
- TIMMS(2007), *visión de resultados por Áreas temáticas*. Álgebra. Pág. 97
- Torres, A. (2010). *Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Tosi, C. (2011). *El texto escolar como objeto de análisis. Un recorrido a través de los estudios ideológicos, didácticos, editoriales y lingüísticos*. Revista Lenguaje, (39), 469-500.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Zill, D. y Dewar J. (1992). *Álgebra y trigonometría*. New York: McGraw-Hill.

ANEXOS



Anexo 1: Encuesta realizada a los docentes seleccionados



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS

ENCUESTA DOCENTE

Apreciado docente, de la manera más respetuosa queremos solicitarle su colaboración resolviendo la siguiente encuesta, cuya única intención es identificar los textos escolares de mayor uso para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. Es importante resaltar que esta encuesta se genera como propósito académico y en el marco del trabajo de grado “Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. Un análisis de texto escolar de octavo grado de la Educación Básica Colombiana”, desarrollado actualmente por la estudiante Brighitte Marcela Gómez Rentería de la Universidad del Valle.

Nombre: _____
Institución educativa en la que labora: _____

1. Indique los años de experiencia que tiene como docente en ejercicio y los grados de escolaridad en los que ha trabajado.

2. Indique cuál o cuáles son los libros de texto que usted utiliza para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en su trabajo de aula, para ello haga uso de la siguiente tabla.

No.	Título del ejemplar	Autor del libro	Editorial	Año de publicación

Tabla 7. Pregunta 2 encuesta realizada a docentes

3. Diga qué otro tipo de recursos, distinto al libro de texto, utiliza para abordar las ecuaciones de primer grado con una incógnita real como objeto de enseñanza y aprendizaje en su aula de clase.

Agradecemos totalmente su colaboración.

Anexo 2: resultados de la implementación de la encuesta

2.1 La población de la investigación

La selección de los textos escolares se hizo a partir de la encuesta construida que se presenta en el ANEXO 1. esta fue puesta en consideración ante un grupo de treinta maestros en ejercicio de la Educación básica y media Colombiana pertenecientes a Instituciones del sector público y privado, los cuales fueron seleccionados porque se contó con la colaboración de participar en este estudio y lograr observar sus preferencias en relación a los textos escolares que utilizan para la enseñanza de dicho objeto matemático, cabe anotar que el grado de experiencia con la que contaron estas personas es mayor a 4 años en la labor como docentes y sobre todo experiencia en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real.

2.2 Resultados de la encuesta aplicada

A continuación se presenta la información detallada de los resultados de la encuesta en donde se presenta el libro de texto seleccionado para el respectivo análisis así como su respectiva editorial y la cantidad de profesores que seleccionaron el mismo. Lo cual es posible evidenciar en la tabla 5 y la figura 30 que se muestran a continuación:

Nombre del libro	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa
Algebra intermedia Editorial: Pearson	2	2	6,7%
Hipertexto 8 Editorial: Santillana	18	20	60,0%
Alfa 8 Editorial: Norma	5	25	16,7%
Matemáticas para pensar 8 Editorial: Norma	2	27	6,7%
Pre-calculo Editorial: Thomson	2	29	6,7%
Conexiones 8 Editorial: Norma	1	30	3,3%

Tabla 8. Sistematización de la encuesta aplicada a docentes

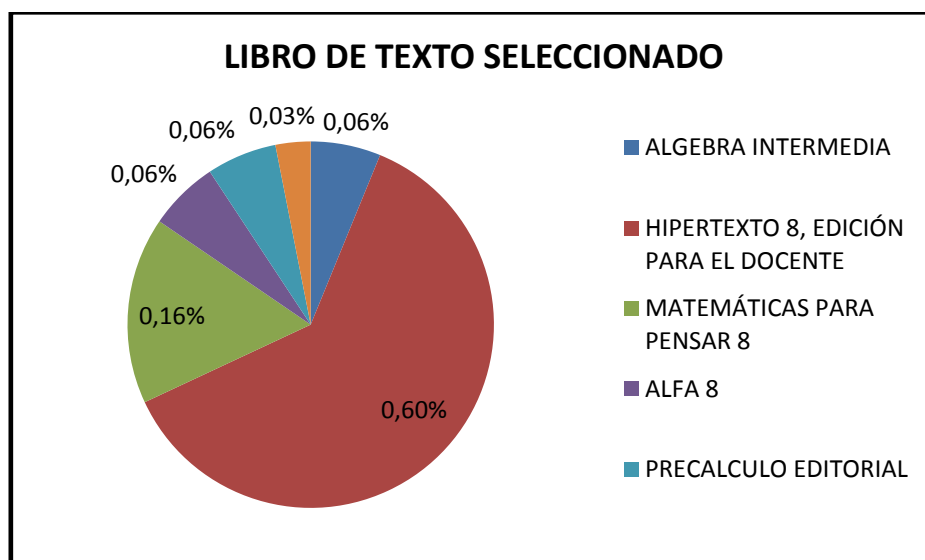


Figura 26. Representación gráfica, datos obtenidos en la sistematización de la encuesta para la selección del libro de texto

De acuerdo a la tabla 5 y la figura 30, es posible observar que el libro de texto que con mayor frecuencia utilizan los docentes para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado es *Hipertexto Matemáticas 8* de la editorial Santillana. Otros libros nombrados durante la realización de la encuesta, comparten la característica de contar con la misma cantidad de docentes que lo seleccionan (siendo esta poca), motivo por el cual y debido a su mayor frecuencia absoluta, *Hipertexto matemáticas 8* es el libro para realizar el respectivo análisis dentro de este trabajo.

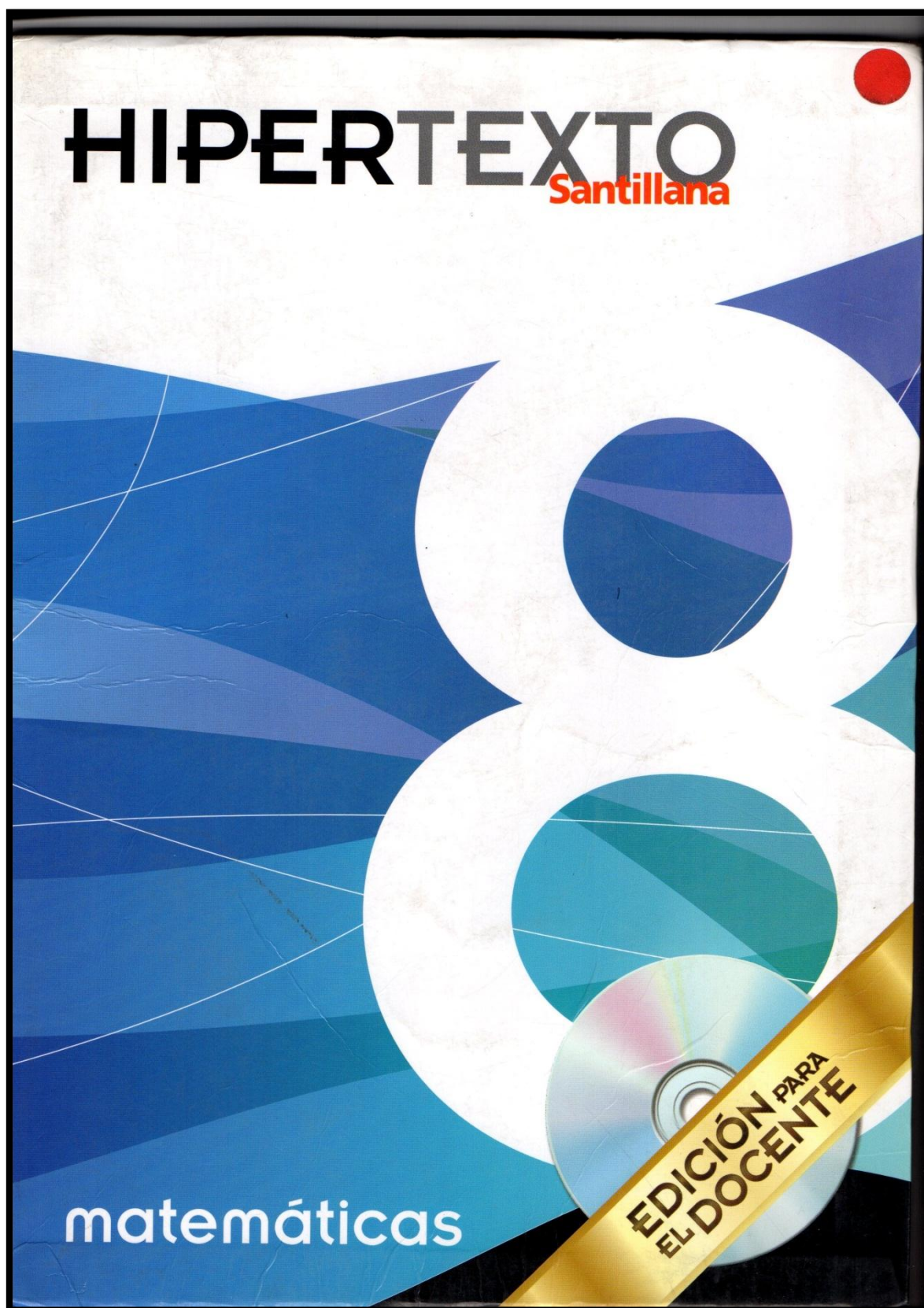
También, hacen parte de la estructura de la encuesta realizada la cantidad de años ejercidos en la docencia y particularmente la enseñanza del objeto matemático analizar, así como los tipos de recursos utilizados en las aulas de clase en el momento planificar o llevar a cabo la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de primer grado obsérvese la tabla 7.

	Entre 1- 2 años de experiencia	Entre 2-4 años de experiencia	Entre 4-6 años de experiencia	6 o más años de experiencia	Total de docentes encuestados
Cantidad de docentes	2	3	9	16	30
Recursos tradicionales	3	5	9	13	30
Recursos electrónicos	14	6	4	4	30

Tabla9. Utilización de recursos alternos al libro de texto por docentes encuestados

De la tabla 7, es posible identificar que en la mayoría de casos se contó con docentes que tienen más experiencia en este campo, al mismo tiempo evidenciar que recursos que van desde los tradicionales (tablero, papel, lápiz, etc) hasta los recursos electrónicos (video beam, Geogebra, guías electrónicas, entre otros) median la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático en cuestión.

Anexo 3: presentación del texto





HIPERTEXTO

Santillana

matemáticas

Autores

Julian Cifuentes Rubiano
Francia Leonora Salazar Suárez



EDICIÓN PARA
EL DOCENTE

PROHIBIDA SU VENTA

HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 8

Edición docente

Directora de Educativas

Ana Julia Mora Torres

Directora Editorial

Fabiola Nancy Ramírez Sarmiento

Equipo editorial

Isabel Hernández Ayala. *Coordinadora de contenidos*
Diana Constanza Salgado Ramírez. *Editora Ejecutiva del área de matemáticas*
Carlos David Sánchez. *Editor júnior del área de matemáticas*
Edgar Alexander Olarte Chaparro. *Editor júnior del área de matemáticas*
Lucero Bombiela Zambrano. *Asistente editorial del área de matemáticas*
Anily Marcela Díaz Gil. *Coordinadora TICS*

Autores

Edición docente

Julian Cifuentes Rubiano
Matemático. Universidad Nacional de Colombia.

Francia Leonora Salazar Suárez

Licenciada en física. Universidad Distrital José de Caldas. Especialista en Edumática. Universidad Autónoma de Colombia. Magister en educación con énfasis en investigación. Universidad de La Sabana

Autores

Marisol Ramírez Rincón

Licenciada en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Estudios de especialización en Matemática aplicada. Universidad Sergio Arboleda.

Francia Leonora Salazar Suárez

Licenciada en física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Especialista en Edumática. Universidad Autónoma de Colombia. Magister en docencia con énfasis en investigación. Universidad de La Sabana

Anneris del Rocío Joya Vega

Licenciada en matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Especialista en matemáticas aplicada. Universidad Sergio Arboleda. Magister en docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional

Valeria Cely Rojas

Licenciada en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Estudios de maestría en matemáticas. Universidad Nacional de Colombia

La especialista encargada de avalar este texto desde el punto de vista de la disciplina específica y desde su pedagogía fue *Lucía Victoria Cabrera Díaz*. Licenciada en Matemáticas. Pontificia Universidad Javeriana. Magister en Economía. Universidad de Los Andes.

El especialista encargado de avalar este texto desde la equidad de género y de su adecuación a la diversidad cultural fue *Auri Waldron Bulla*. Psicólogo. Pontificia Universidad Javeriana. Especialista en psicología médica y de la salud. Universidad del Bosque.

Las pruebas de campo del texto fueron realizadas por el Departamento de Investigación de Editorial Santillana bajo la dirección de *Ximena Galvis Ortiz*.

Se han hecho todos los esfuerzos para ubicar a los propietarios de los derechos de autor. Sin embargo, si es necesario hacer alguna rectificación, la editorial está dispuesta a hacer los arreglos necesarios.

Equipo gráfico y técnico

Ivan Merchán Rodríguez. *Coordinador de arte creativo. Diseñador del modelo gráfico y carátulas*

Carlos Ernesto Tamayo Sánchez. *Coordinador de Arte Educativas*

Martha Jeanet Pulido Delgado, Orlando Bermúdez Rodríguez. *Correctores de estilo*

Beatriz Román Campos. *Correctora de estilo edición para el docente*

Alveiro Javier Bueno Aguirre. *Coordinador de soporte técnico*

Luis Nelson Colmenares Barragán. *Documentalista gráfico y de escáner*

Sandra Patricia Acosta Tovar, Edward Guerrero Chinome, Luz Dary Villamil Velasco. *Diagramadores*

Magdalena Medio. Jorge Eduardo Sandoval, Ricardo Alexis Fajardo, Alejandro Redondo. *Armadores edición para el docente*

Claudia Jaime Tapia, Anacelia Blanco Suárez. *Documentalistas*

Diomedes Guilombo Ramírez, Edwin Hernando Cruz Delgado, Miguel Darío Martínez, Yein Barreto,

Daniilo Ramírez Parra. *Ilustradores*

Ana María Restrepo, Jorge Hernán Vallejo, Carlos Díez Polanco, Gustavo Rodríguez. *Fotógrafos*

Getty Images, Repositorio Santillana (archivo de imágenes). Corel professional Photos, Images

provided by Photodisc, Inc., Corbis Images, Archivo Santillana. *Fotografía*

Francisco Rey González. *Director de producción*

© 2010 EDITORIAL SANTILLANA S.A.

Calle 80 No. 9-69, Bogotá, Colombia

I.S.B.N. 978-958-24-1365-1 Obra completa

I.S.B.N. 978-958-24-1367-5 Edición para el alumno

I.S.B.N. 978-958-24-1382-8 Edición para el docente

Este libro está elaborado de acuerdo con las normas ICONTEC NTC-4724 y NTC-4725 para textos escolares.

Depósito legal en trámite

Impreso en Colombia por Printer Colombiana S.A.

Prohibida la reproducción total o parcial, el registro o la transmisión por cualquier medio de recuperación de información, sin permiso previo por escrito de la editorial.

Santillana



ÁREA DE MATEMÁTICAS

ESTÁNDARES	UNIDADES
Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Octavo
① Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
② Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y las operaciones entre ellos.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10
③ Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes.	3
④ Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	1, 2, 3, 4

Pensamiento espacial y sistemas geométricos	
⑤ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	9
⑥ Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).	9
⑦ Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.	9
⑧ Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en las otras disciplinas.	9



ESTÁNDARES		UNIDADES
Pensamiento métrico y sistemas de medidas		Octavo
9	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	9
10	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficie, volúmenes y ángulos con nivel de precisión apropiados.	9
11	Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.	9

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos		
12	Reconozco cómo diferentes maneras de representación de información, pueden originar distintas interpretaciones.	10
13	Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).	10
14	Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explico sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.	10
15	Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).	10
16	Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.	10
17	Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).	10
18	Reconozco tendencias que se representan en conjuntos de variables relacionadas.	10
19	Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).	10
20	Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia...).	10



ESTÁNDARES		UNIDADES
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos		Octavo
21	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	7, 8, 9, 10
22	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	2, 3, 4, 5, 6, 7
23	Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	3, 4, 5, 7, 8, 9, 10
24	Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.	4, 5, 7
25	Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.	
26	Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	1
27	Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.	7, 8
28	Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.	7, 8
29	Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familia de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.	7, 8

Ecuaciones e inecuaciones

Temas de la unidad

- Ecuaciones
- El lenguaje algebraico
- Desigualdades
- Inecuaciones

MATRIZ DE PLANEACIÓN

Logros	Indicadores de logro
1 Reconoce cuándo una expresión es una ecuación.	• Establece diferencias entre ecuación algebraica e identidad algebraica. • Reconoce y utiliza la propiedad uniforme de las igualdades. • Identifica por simple inspección la solución de una ecuación sencilla.
2 Soluciona ecuaciones.	• Formula y resuelve ecuaciones aditivas y multiplicativas. • Simplifica expresiones algebraicas reduciendo términos semejantes para luego, resolver ecuaciones. • Verifica que la solución obtenida sea de la ecuación planteada. • Plantea y resuelve problemas mediante la formulación y solución de ecuaciones.
3 Reconoce cuándo una expresión es una inecuación.	• Establece la diferencia entre ecuación e inecuación. • Reconoce la relación de orden como generadora de infinitas soluciones para una expresión.
4 Soluciona inecuaciones.	• Reconoce la diferencia entre una única solución y un conjunto de soluciones. • Aplica las propiedades de las desigualdades en la solución de inecuaciones. • Determina el conjunto solución de una inecuación. • Verifica que el conjunto obtenido sea solución de una inecuación planteada. • Interpreta y utiliza el lenguaje algebraico para plantear inecuaciones que relacionan los datos de un problema.



OBJETIVOS GENERALES PARA EL GRADO OCTAVO

● PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- Reconocer y aplicar las relaciones y las operaciones que existen entre los conjuntos numéricos.
- Identificar las características que debe tener un número para pertenecer a un determinado conjunto numérico.
- Formular y resolver problemas asociados a las operaciones entre los diferentes conjuntos numéricos.

● PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Demostrar la validez de afirmaciones en referencia a los ángulos.
- Reconocer las propiedades geométricas de los objetos.
- Clasificar objetos geométricos a partir de características propias.
- Reconocer y aplicar criterios que determinan la congruencia entre dos figuras.
- Aplicar los conceptos y criterios aprendidos en el planteamiento y solución de situaciones en contextos reales de dos o tres dimensiones.

● PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

- Generalizar estrategias para hallar mediciones.
- Usar propiedades métricas para caracterizar figuras geométricas.
- Formular y resolver problemas asociados a la medición de figuras.
- Formular y resolver problemas asociados a la congruencia de figuras vista desde la métrica.

● PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

- Caracterizar variables cualitativas y plantear conclusiones sobre su comportamiento.
- Caracterizar variables cuantitativas y plantear conclusiones sobre su comportamiento.
- Utilizar las medidas de tendencia central para el planteamiento y verificación de conclusiones sobre un conjunto de datos.
- Reconocer el comportamiento de una situación y determinar su número de elementos.
- Establecer la probabilidad de ocurrencia de un evento.

● PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

- Reconocer expresiones en las cuales se presentan variables.
- Plantear expresiones que muestren la variabilidad de una situación dada.
- Resolver operaciones y plantear relaciones entre expresiones en las cuales se involucre variables.



COMPETENCIAS GENERALES PARA EL GRADO OCTAVO

INTERPRETATIVA

1. Identificar la función de las variables dentro del contexto algebraico (como número generalizado, como objeto concreto, como elemento cambiante).
2. Reconocer, en situaciones concretas, el concepto de variación entre objetos matemáticos.
3. Establecer relaciones de variación en una situación dada.

ARGUMENTATIVA

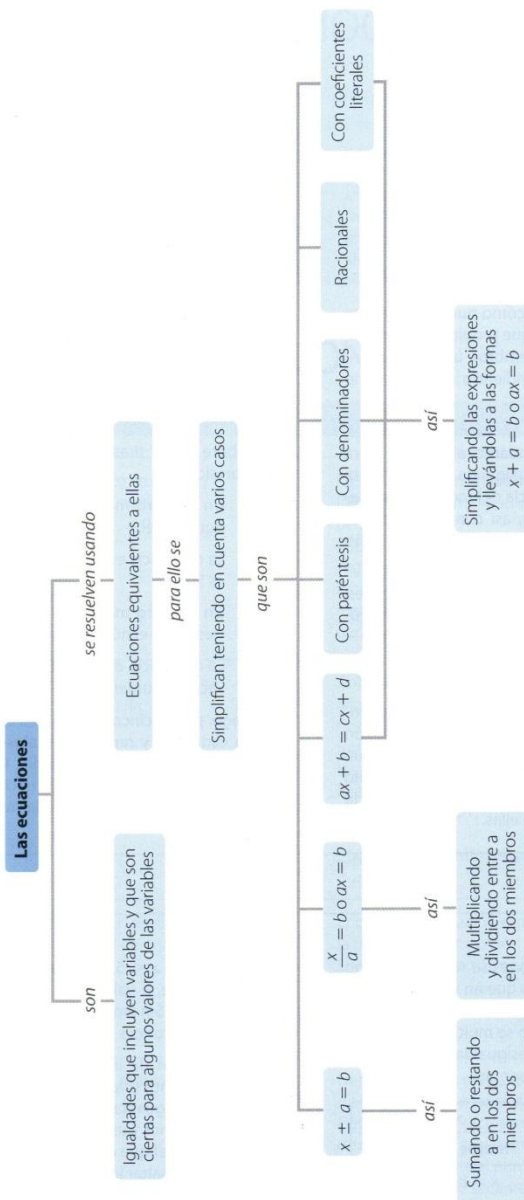
4. Justificar el planteamiento y solución de situaciones que involucran la variación entre objetos.
5. Explicar, usando elementos de variación como representaciones gráficas, tablas, diagramas, figuras y esquemas, el planteamiento de situaciones concretas.

PROPOSITIVA

6. Plantear y resolver problemas que involucren los conceptos de variación relacionados con números, figuras, medidas y variables estadísticas.
7. Proponer situaciones modelo para el planteamiento y solución de un problema en cualquier tipo de pensamiento matemático.

MAPA CONCEPTUAL

Ecuaciones



PRESENTACIÓN DEL MODELO

HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 8

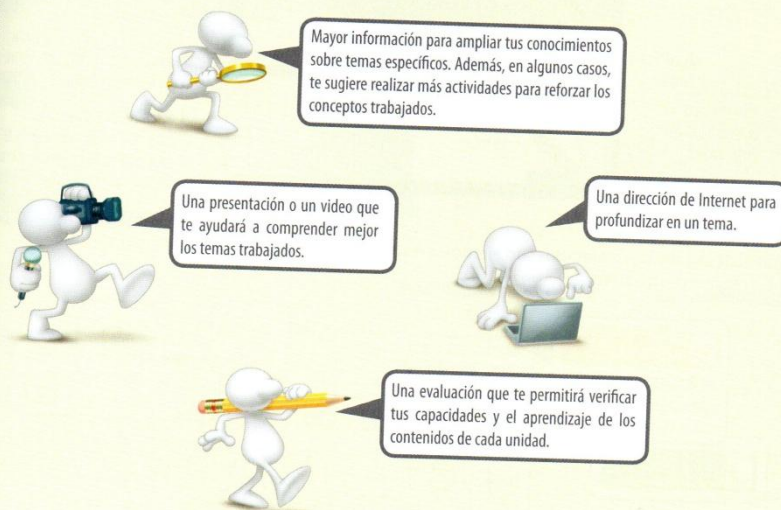
De la serie HIPERTEXTOS SANTILLANA, es una nueva propuesta pedagógica que responde a los lineamientos curriculares y a los estándares básicos en competencias exigidos por el MEN. Tu hipertexto te permitirá potenciar tus capacidades de manera que puedas aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas, analizar, razonar, interpretar y resolver problemas en distintas situaciones.

¡Tu Hipertexto Matemáticas 8 hace tu aprendizaje más dinámico!

¿Qué hay en tu hipertexto?

✖ Estos hipervínculos.

Cuando los veas debes saber que cada uno de ellos te indica que, además de lo que hay en la página, vas a encontrar:



Para acceder a esta información debes consultar la página www.santillana.com.co/hipertextos.

✖ Un método para que desarrolles destrezas en la comprensión de los contenidos propios de Matemáticas.

Comprender para aprender



✖ Actividades para desarrollar las habilidades matemáticas.



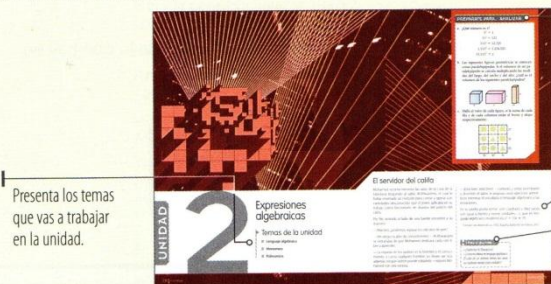
¿Cómo está organizado tu hipertexto?

Tu hipertexto consta de diez unidades y los contenidos están organizados de acuerdo con los cinco pensamientos matemáticos: pensamiento numérico, pensamiento variacional, pensamiento espacial, pensamiento métrico y pensamiento aleatorio.

Ahora prepárate para conocer la estructura de cada unidad.

❖ Página inicial

Al comienzo de cada unidad encontrarás una doble página de apertura con los temas que vas a trabajar, una narración sobre historia de las matemáticas y algunas preguntas sobre ella.



Presenta los temas que vas a trabajar en la unidad.

Prepárate para...

Propone actividades de motivación que te preparan para trabajar con la temática de la unidad.

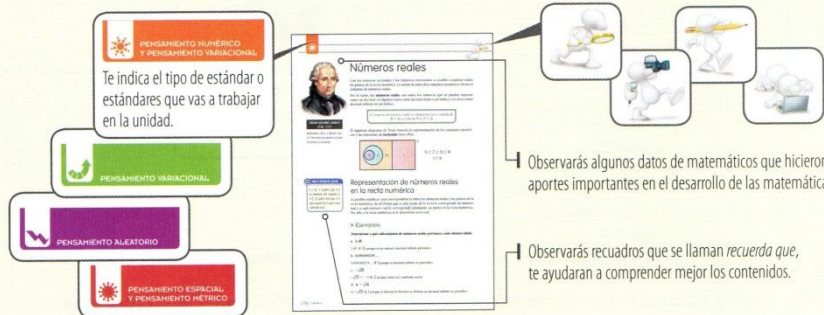
Una narración que relaciona la historia de las matemáticas con los temas de la unidad.

Para responder...

Las preguntas de esta sección te permitirán fortalecer tu capacidad de interpretar textos relacionados con las matemáticas.

❖ Desarrollo de temáticas

Encontrarás el desarrollo de contenidos con ejemplos resueltos que explican el procedimiento que se debe realizar paso a paso.



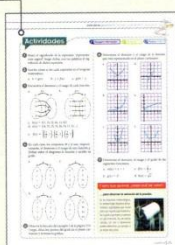
Te indica el tipo de estándar o estándares que vas a trabajar en la unidad.

Observarás algunos datos de matemáticos que hicieron aportes importantes en el desarrollo de las matemáticas.

Observarás recuadros que se llaman *recuerda que*, te ayudarán a comprender mejor los contenidos.

❖ Además tu hipertexto contiene:

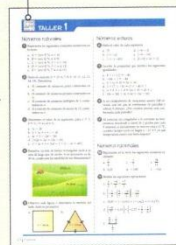
Actividades
con ejercicios enfocados al desarrollo de procesos matemáticos y habilidades de la competencia lectora.



En síntesis
Es un resumen de las temáticas trabajadas que te servirá para recordar los conceptos más importantes.



Taller
Es una selección de ejercicios de toda la unidad que te servirán para reforzar conocimientos y preparar tus evaluaciones.



❖ Secciones especiales

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

La encuentras al final de la unidad, en ella podrás leer situaciones que se relacionan con las temáticas estudiadas y que tienen aplicaciones fuera de las matemáticas, con esta sección mejorarás tu competencia lectora.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Números en la música

Las matemáticas están presentes en la música. Desde la estructura de las escalas musicales hasta la forma en que se combinan los instrumentos, la música es un fenómeno matemático. En esta sección, exploraremos algunas de las matemáticas que se encuentran en la música.

1. **La escala musical:** La escala musical es una serie de notas que se van elevando o bajando en un intervalo constante. Este intervalo se conoce como el intervalo de octava. En la escala de do mayor, las notas son: do, re, mi, fa, sol, la, si, do. El intervalo entre do y re es de un semitono, entre re y mi de un semitono, entre mi y fa de un semitono, entre fa y sol de un semitono, entre sol y la de un semitono, entre la y si de un semitono, y entre si y do de un semitono.

2. **La armonía:** La armonía es la combinación de varias notas que se escuchan al mismo tiempo. En la música, la armonía se crea al combinar diferentes intervalos. Por ejemplo, si combinamos la nota do con la nota re, creamos un intervalo de un semitono. Si combinamos la nota do con la nota sol, creamos un intervalo de una quinta.

3. **La métrica:** La métrica es la forma en que se organizan las notas en el tiempo. En la música, la métrica se crea al dividir el tiempo en unidades iguales. Por ejemplo, si dividimos el tiempo en cuatro partes iguales, creamos una métrica de 4/4.

4. **La estructura de la música:** La estructura de la música es la forma en que se organiza la música en el tiempo. En la música, la estructura se crea al combinar diferentes elementos, como la melodía, la armonía y la métrica.

MATEMÁTICAS + TECNOLOGÍA

LA HOJA DE CÁLCULO

La hoja de cálculo es una herramienta que nos permite organizar y analizar datos. En esta sección, exploraremos algunas de las funciones más importantes de la hoja de cálculo.

1. **Las fórmulas:** Las fórmulas son expresiones que nos permiten realizar cálculos. En la hoja de cálculo, las fórmulas se escriben en las celdas. Por ejemplo, si queremos sumar dos números, podemos escribir la fórmula =A1+B1.

2. **Los gráficos:** Los gráficos son representaciones visuales de los datos. En la hoja de cálculo, los gráficos se crean a partir de los datos que tenemos en las celdas. Por ejemplo, si tenemos una lista de ventas, podemos crear un gráfico de barras para visualizar los datos.

3. **Los filtros:** Los filtros nos permiten seleccionar solo los datos que nos interesan. En la hoja de cálculo, los filtros se activan haciendo clic en el icono de filtro que aparece en la barra de herramientas.

4. **Los rangos:** Los rangos son grupos de celdas que se refieren a una sola celda. En la hoja de cálculo, los rangos se definen escribiendo la dirección de la celda superior izquierda y la dirección de la celda inferior derecha. Por ejemplo, si queremos referirnos a un grupo de celdas que van desde A1 hasta D4, podemos escribir el rango A1:D4.

Matemáticas y tecnología

Te informa sobre avances tecnológicos, útiles en matemáticas, y la manera como influyen en la sociedad. Tiene como objetivo que desarrolles los componentes de los estándares de tecnología: naturaleza y evolución de la tecnología, apropiación y uso de la tecnología, solución de problemas con tecnología y tecnología y sociedad.

Laboratorio con Cabri

La encuentras en la unidad de pensamiento espacial y pensamiento métrico, en ella se proponen actividades para que desarrolles con el uso del programa Cabri. Esta sección tiene como finalidad la utilización de la tecnología como herramienta para mejorar tu análisis matemático.

LABORATORIO CON CABRI

Objetivo: Utilizar el programa Cabri para resolver problemas de geometría.

Procedimiento:

1. Construye un triángulo cualquiera con los segmentos que se indican.
2. Construye la mediana de la base del triángulo.
3. Construye la altura del triángulo.
4. Construye la bisectriz de uno de los ángulos del triángulo.
5. Construye la mediatriz de uno de los lados del triángulo.
6. Construye la tangente a la circunferencia en uno de los puntos de la circunferencia.
7. Construye la normal a la tangente en el punto de tangencia.
8. Construye la recta secante a la circunferencia que pasa por el centro.
9. Construye la recta tangente a la circunferencia que es perpendicular a la recta secante.
10. Construye la recta tangente a la circunferencia que es paralela a la recta secante.

El bicentenario en datos

El bicentenario de la independencia de Colombia se celebra en 2010. En esta sección, exploraremos algunas de las estadísticas más importantes de la época de la independencia de Colombia.

Actividades:

1. Construye un gráfico de barras que muestre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario.
2. Construye un gráfico de líneas que muestre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario a lo largo del tiempo.
3. Construye un gráfico de sectores que muestre la proporción de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario.
4. Construye un gráfico de dispersión que muestre la relación entre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario y el tiempo.
5. Construye un gráfico de barras apiladas que muestre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario.
6. Construye un gráfico de líneas apiladas que muestre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario a lo largo del tiempo.
7. Construye un gráfico de sectores apilados que muestre la proporción de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario.
8. Construye un gráfico de dispersión apilados que muestre la relación entre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario y el tiempo.
9. Construye un gráfico de barras de grupo que muestre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario.
10. Construye un gráfico de líneas de grupo que muestre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario a lo largo del tiempo.
11. Construye un gráfico de sectores de grupo que muestre la proporción de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario.
12. Construye un gráfico de dispersión de grupo que muestre la relación entre el número de personas que participaron en las diferentes actividades del bicentenario y el tiempo.

Bicentenario en datos

La encuentras en la unidad de pensamiento aleatorio, presenta una lectura con datos verídicos de la época de la independencia de Colombia y propone actividades relacionadas con estadística.

CONTENIDO

UNIDAD 1. Conjuntos numéricos 8

► Números naturales	10	► Números irracionales	18
Orden en $\mathbb{N}$		Representación en la recta de los números irracionales	
► Números enteros	11	► Números reales	20
Valor absoluto de un número entero		Representación de números reales en la recta numérica	
Operaciones entre números enteros		Operaciones y propiedades en los números reales	
Polinomios aritméticos en $\mathbb{Z}$		■ Taller 1	24
► Números racionales	13	■ En síntesis	26
Orden en el conjunto de los números racionales		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	27
Operaciones con los números racionales		Números en la música	
Representación fraccionaria de números decimales			

UNIDAD 2. Expresiones algebraicas 28

► Lenguaje algebraico	30	■ Taller 2	40
Términos algebraicos		■ En síntesis	42
► Monomios	31	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	43
Características de un monomio		Modelos polinomiales para el crecimiento de especies	
► Polinomios	34		
Características de un polinomio			

UNIDAD 3. Operaciones entre expresiones algebraicas 44

► Suma y resta de polinomios	46	► División de polinomios	58
Suma de monomios		División de monomios	
Resta de monomios		División de un polinomio entre un monomio	
Suma de polinomios		División entre polinomios	
Resta de polinomios		División sintética	
Signos de agrupación		■ Taller 3	66
► Multiplicación de polinomios	52	■ En síntesis	68
Multiplicación de monomios		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	69
Multiplicación de dos polinomios		Polinomios en la aceleración de cuerpos	
Operaciones combinadas entre polinomios			

UNIDAD 4. Productos y cocientes notables 70

► Productos notables	72	► Cocientes notables	86
Cuadrado de la suma de dos términos		■ Taller 4	90
Cuadrado de la diferencia de dos términos		■ En síntesis	92
Cuadrado de un trinomio		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	93
Producto de la suma por la diferencia		Los productos notables en las características hereditarias	
Cubo de un binomio		■ Tecnología y matemáticas	94
Triángulo de Pascal			

UNIDAD 5. Factorización 98

► Noción de factorización	100	Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$	
Concepto de factorización		► Factorización de un cubo perfecto	123
► Factorización de monomios	101	► Factorización completa	125
► Factorización por factor común	102	Factorización completa con los casos de factorización	
Factor común por agrupación de términos		Factorización de un polinomio con división sintética	
► Factorización de binomios	107	■ Taller 5	130
Diferencia de cuadrados		■ En síntesis	132
Factorización de la suma y la diferencia de cubos		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	133
Factorización de la suma o la diferencia de potencias de igual exponente		La factorización en la fabricación de un CD	
► Factorización de trinomios	115		
Factorización de un trinomio cuadrado perfecto			

UNIDAD 6. Fracciones algebraicas**134**

► Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	136	División de fracciones algebraicas	
Máximo común divisor		Operaciones combinadas	
Mínimo común múltiplo		Fracciones complejas	
► Expresiones algebraicas racionales	143	■ Taller 6	166
Simplificación de fracciones algebraicas		■ En síntesis	168
► Operaciones entre fracciones algebraicas	147	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	169
Adición y sustracción de fracciones algebraicas		Las fracciones algebraicas en los espejos esféricos	
Multiplicación de fracciones algebraicas			

UNIDAD 7. Ecuaciones e inecuaciones**170**

► Ecuaciones	172	► Desigualdades	196
Partes y elementos de una ecuación		► Inecuaciones	197
Solución de una ecuación		Solución de problemas con inecuaciones	
Transposición de términos		■ Taller 7	202
Solución de ecuaciones que tienen denominadores		■ En síntesis	204
Solución de las ecuaciones racionales		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	205
Solución de las ecuaciones que tienen literales		Las ecuaciones en las leyes de gases	
► El lenguaje algebraico	189		
Planteamiento de ecuaciones para resolver problemas			
Fórmulas			

UNIDAD 8. Función lineal**206**

► Función	208	Ecuación de la recta dados dos puntos	
Elementos de una función		Ecuación general de la recta	
Representación de las funciones		► Rectas paralelas	230
Variables dependientes y variables independientes		► Rectas perpendiculares	231
► Función lineal y función afin	216	■ Taller 8	234
► Pendiente de la recta	218	■ En síntesis	236
Clasificación de las rectas según la pendiente		■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	237
► Ecuación de la recta	221	La función lineal en la pérdida de calorías	
Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente			

UNIDAD 9. Geometría**238**

► Ángulos	240	► Congruencia	259
Clasificación de los ángulos		► Triángulos y congruencias	260
Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante		► Laboratorio con Cabri	264
► Triángulos	245	► Unidades de longitud	266
Propiedades de los triángulos		► Unidades de área	268
Clasificación de triángulos		■ Taller 9	270
Líneas y puntos notables en un triángulo		■ En síntesis	272
► Métodos de demostración	255	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	273
Razonamiento deductivo		Geometría en los edificios	
Generalizaciones falsas y contraejemplos			
Método directo de demostración			

UNIDAD 10. Estadística y probabilidad**274**

► Estadística	276	Espacio muestral	
Nociones iniciales		Técnicas de conteo	
Caracterización de variables cualitativas		Probabilidad	
Caracterización de variables cuantitativas		■ Taller 10	298
► Bicentenario en datos	286	■ En síntesis	300
► Probabilidad	288	■ Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	301
Experimento aleatorio		Probabilidad en la lotería en línea	

HIPERTEXTOS

Santillana

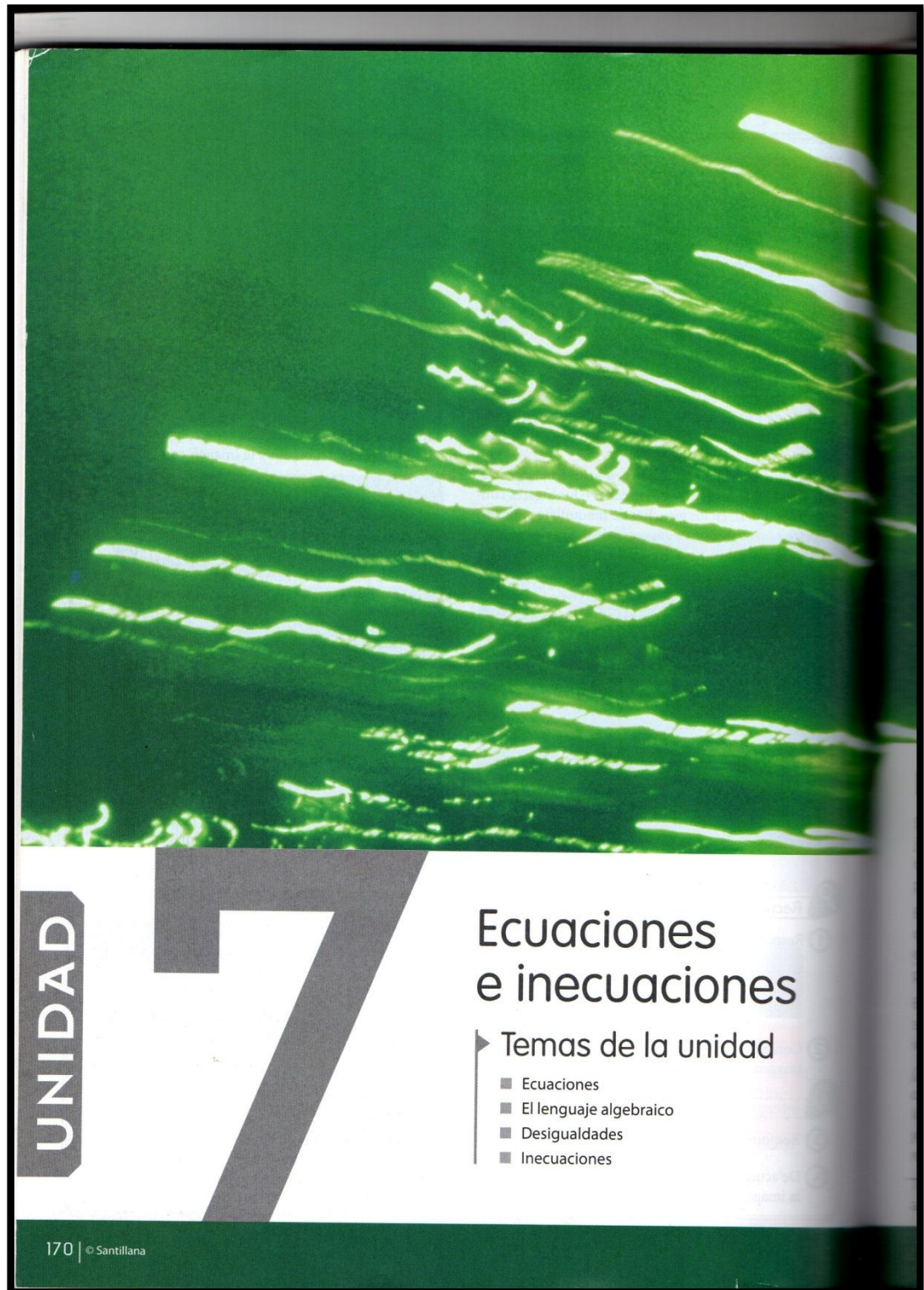
Los Hiper textos para el docente incluyen:

- Hipertexto Santillana: Edición para el docente.
- CD de TICS (Tecnologías de la Información y la Comunicación Santillana).
- Acceso al "Constructor de Evaluaciones a la medida" en: www.santillana.com.co/hipertextosdocente/constructor

Otros Hiper textos para su área:

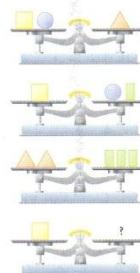


Anexo 4: *unidad de análisis*



PREPÁRATE PARA... ANALIZAR

- a. Responde: ¿cuántos círculos necesitas para equilibrar la última balanza?



- b. Mueve solamente un palillo para formar una expresión verdadera.



La última noche

Durante un corto intervalo de tiempo la actividad del joven cesó, y en la pequeña habitación de la pensión donde vivía solo se escuchaba su agitada respiración, pues parecía que ni durmiendo descansaba.

El ruido producido por un carruaje sobre el empedrado de la calle hizo que primero entornara los ojos y después, como si hubiera sido poseído, tomó pluma y papel y comenzó a escribir.

Evariste Galois, presumiendo lo inevitable, escribió sus cartas con un carácter inequívoco de última voluntad, como si se dictara a sí mismo.

[...] vuestra tarea es sencilla: demostrad que he de combatir contra mi voluntad, tras haber agotado todos los medios de reconciliación [...] Por favor recordadme, ya que el destino no me ha dado vida bastante para ser recordado por mi patria.

Tras sellar esta primera carta, más tranquilo, comenzó a escribir la segunda:

[...] He hecho algunos descubrimientos nuevos en matemáticas que puedes ver en tres memorias que dejo aquí... Haz llegar estos trabajos a la Academia de las Ciencias [...] Confío en que después de leerlos alguien encuentre provecho en organizarlo todo [...].

El premonitorio estado de ánimo de Galois estaba plenamente justificado: al amanecer sería herido de muerte en un duelo y moriría al día siguiente, abandonado por todos en un hospital de París.

Pese a fallecer con tan solo veinte años, sus trabajos sobre ecuaciones fueron absolutamente geniales.

Tomado de *Matemáticas 4 ESO*, España, Editorial Santillana, 2008.

Para responder...

- ¿Conoces algo de Evariste Galois?
- ¿Qué crees que le pasaba a Galois?
- ¿Qué sabes acerca de las ecuaciones?
- ¿Podrías escribir una ecuación y resolverla?



Ecuaciones

Una expresión que compara dos cantidades mediante el signo igual "=", se denomina **igualdad**, y puede ser numérica o algebraica. La **igualdad numérica** incluye operaciones entre números solamente, y una **igualdad algebraica** incluye expresiones algebraicas.

Por ejemplo, la expresión $2 + 3 - 8^2 = 5 - 64$ es una igualdad numérica y la expresión $3x + 2y = 9$ es una igualdad algebraica.

Una igualdad algebraica que se cumple para cualquier valor de la variable o las variables se denomina **identidad**. Y una igualdad algebraica que se cumple para un valor específico de la variable se denomina **ecuación**.

Por ejemplo, la expresión $5x + 2y = 4x + x + 3y - y$ es una identidad pues se cumple para cualquier valor de x y de y . Si se toma a $x = 1$ y $y = 4$ y se reemplaza en la expresión anterior se tiene:

$$5x + 2y = 4x + x + 3y - y$$

$$5(1) + 2(4) = 4(1) + (1) + 3(4) - 4$$

Se reemplazan los valores x y y .

$$5 + 8 = 4 + 1 + 12 - 4$$

Se realizan las multiplicaciones.

$$13 = 13$$

Se realizan las sumas y restas.

La expresión $2 + x = 5$ es una ecuación ya que se cumple únicamente cuando $x = 3$.

Partes y elementos de una ecuación

RECUERDA QUE...

Los términos que no tienen variable se denominan **términos independientes**.

En una ecuación, a la expresión que se encuentra antes del signo igual, es decir, en el lado izquierdo de la igualdad se le denomina **primer miembro** y a la expresión que se encuentra después del signo igual, es decir, al lado derecho del igual se le denomina **segundo miembro**.

A cada uno de los sumandos que se presentan en cada miembro de la ecuación se les denomina **términos**.

A los valores desconocidos o variables de la ecuación se les denomina **incógnitas**.

Al mayor exponente de la variable o las variables que tienen una ecuación se les denomina **grado de la ecuación**.

Al valor o valores que satisfacen la ecuación se les denomina **soluciones o raíces**.

Por ejemplo, en la ecuación $2 + x = 5$, el primer miembro es $2 + x$ y el segundo miembro es 5 y los términos de la ecuación son 2 , x y 5 . La incógnita es x y la ecuación es de primer grado por que el mayor exponente que tiene x en la ecuación es 1 .

En la ecuación $n^2 + 5n = 4n + 2$, el primer miembro es $n^2 + 5n$, el segundo miembro es $4n + 2$, los términos de la ecuación son n^2 , $5n$, $4n$ y 2 . La incógnita es n y la ecuación es de segundo grado porque el mayor exponente de la variable es 2 .

En la ecuación $x^3 - 1 = 0$, el primer miembro es $x^3 - 1$, el segundo miembro es 0 , los términos de la ecuación son x^3 , 1 y 0 . La incógnita es x y la ecuación es de tercer grado ya que el mayor exponente de x es 3 .



Solución de una ecuación

La solución de una ecuación es el valor o conjunto de valores que puede tomar la variable para que la igualdad se cumpla.

Para encontrar la solución de una ecuación se realiza un proceso que consiste en transformar una ecuación en otra. Para ello es necesario aplicar la propiedad fundamental de las igualdades.

Propiedad fundamental de las igualdades

Si a los dos miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide entre una expresión algebraica o numérica, la igualdad se mantiene. Es decir, si $a = b$ se cumple que:

$$a + c = b + c$$

$$a - c = b - c$$

$$a \cdot c = b \cdot c$$

$$a \div c = b \div c$$

RECUERDA QUE...

Para comprobar si una solución se halló correctamente, se sustituye la variable de la ecuación dada por la solución encontrada. Si al remplazar y realizar operaciones se obtiene una igualdad verdadera, la solución encontrada es la correcta.

Resolución de ecuaciones de la forma $x \pm a = b$

Para resolver una ecuación de la forma $x \pm a = b$ se usa la propiedad fundamental de las igualdades. Así, se suma o se resta a en ambas partes de la ecuación para despejar la incógnita. Por ejemplo, para resolver la ecuación $x + a = b$ se realiza el siguiente procedimiento:

$$x + a = b$$

$$x + a - a = b - a$$

Se resta a en ambos miembros de la ecuación.

$$x + 0 = b - a$$

Se reducen términos semejantes.

$$x = b - a$$

Se aplica la propiedad modulativa.

Ejemplos

Resolver las ecuaciones dadas.

a. $x + 5 = 11$

$$x + 5 = 11$$
 Ecuación dada.

$$x + 5 - 5 = 11 - 5$$
 Se resta 5 en ambos miembros.

$$x + 0 = 6$$
 Se realizan las operaciones indicadas.

$$x = 6$$
 Se halla el valor de x .

La solución de $x + 5 = 11$ es $x = 6$.

b. $y - 2 = 7$

$$y - 2 = 7$$
 Ecuación dada.

$$y - 2 + 2 = 7 + 2$$
 Se suma 2 en ambos miembros.

$$y + 0 = 9$$
 Se realizan las operaciones indicadas.

$$y = 9$$
 Se halla el valor de y .

La solución de $y - 2 = 7$ es $y = 9$

c. $x - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$$x - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$
 Ecuación dada.

$$x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$$
 Se suma $\frac{1}{4}$ en ambos miembros de la ecuación.

$$x + 0 = \frac{6}{4} + \frac{1}{4}$$
 Se realizan las sumas, de fracciones equivalentes.

$$x = \frac{7}{4}$$

Se halla el valor de x .

La solución de $x - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ es $x = \frac{7}{4}$

RECUERDA QUE...

En la expresión $ax = b$ el coeficiente $a \neq 0$.

Solución de ecuaciones de la forma $ax = b$

Para resolver las ecuaciones de la forma $ax = b$ se usa la propiedad uniforme de las igualdades. Para esto, se dividen ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de la variable x .

La ecuación $ax = b$ se resuelve de la siguiente manera:

$$ax = b$$

Ecuación dada.

$$\frac{a}{a}x = \frac{b}{a}$$

Se dividen ambos miembros de la ecuación entre a para despejar la incógnita.

$$x = \frac{b}{a}$$

Se simplifican las fracciones y se obtiene el valor de la incógnita.

✖ Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $7x = 14$

$$\frac{7}{7}x = \frac{14}{7}$$

Se divide entre 7 que es el coeficiente de la incógnita.

$$x = 2$$

Se realizan las operaciones indicadas y se obtiene el valor de x .

La solución de la ecuación $7x = 14$ es $x = 2$.

b. $-3y = -16$

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-16}{-3}$$

Se divide entre -3 ambos miembros de la ecuación para cancelar el coeficiente de y .

$$y = \frac{16}{3}$$

Se realizan las operaciones indicadas y se obtiene el valor de y .

La solución de la ecuación $-3y = -16$ es $y = \frac{16}{3}$

c. $\frac{3}{4}x = 6$

$$\frac{3}{4}x \div \frac{3}{4} = 6 \div \frac{3}{4}$$

Se divide entre $\frac{3}{4}$ en ambos miembros de la ecuación para cancelar el coeficiente de la variable.

$$\frac{12}{12}x = \frac{24}{3}$$

Se realiza la división de fracciones.

$$x = 8$$

Se simplifican las fracciones y se obtiene el valor de la variable.

La solución de la ecuación $\frac{3}{4}x = 6$ es $x = 8$.



Actividades

Recupera información: 1

Interpreta: 2

Ejercita: 3-4

Razona: 5-6

1 Responde.

- ¿Cuál es la diferencia entre identidad y ecuación?
- ¿Qué determina el grado de una ecuación?

2 Determina cuáles de las siguientes expresiones son identidades y cuáles son ecuaciones. Explica tu respuesta.

- $x - 8 = 7$
- $36 = 2 - m - 3m^2$
- $z^3 - 8z^2 + z = 7$
- $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
- $y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$
- $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$

3 Completa la siguiente tabla.

Ecuación	Incógnita	Número de términos	Grado
$2x = -6$			
$5 = y - 7$			
$3m^2 - 4 = 6m - 9$			
$8 - 5a = 0$			
$2x^2 - 7 = 0$			
$8(z - 4) = (z - 2)^2$			
$w^3 - 7w^2 + 3w - 8 = 0$			
$\frac{1}{4}b = \frac{3}{8}$			
$\frac{2}{3}c^2 - \frac{1}{5}c = -7$			
$\frac{1}{2}r^3 + \frac{2}{9}r^2 - 5 = 0$			

4 Resuelve las ecuaciones de la forma $x \pm a = b$. Luego, comprueba tu respuesta.

- | | |
|-----------------|--------------------|
| a. $x + 8 = 4$ | g. $-6 = p + 3$ |
| b. $7 = m + 9$ | h. $-3 + q = -2$ |
| c. $a - 5 = 3$ | i. $9 = 2 + n$ |
| d. $n - 9 = -2$ | j. $-18 = -25 - d$ |
| e. $z - 7 = -3$ | k. $-81 - k = 100$ |
| f. $r + 4 = -8$ | l. $-75 - s = 10$ |

5 Escribe una ecuación para cada condición.

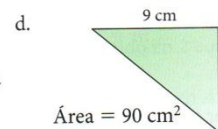
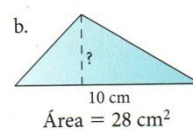
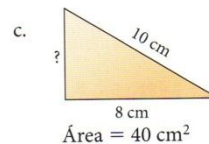
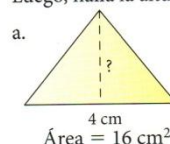
- De primer grado con dos términos independientes enteros.
- De segundo grado con un término independiente racional.
- De primer grado con un término independiente racional en forma decimal.
- De tercer grado sin términos independientes.
- De primer grado con un término independiente racional.

6 Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa.

- La solución de la ecuación $3x = 12$ es un número entero menor que 4.
- La solución de la ecuación $8x = 16$ es un número par.
- La solución de la ecuación $5x = 100$ es un número divisible entre 4.
- La solución de la ecuación $9y = 54$ es un número divisible entre 6 menor que 10.
- La solución de la ecuación $3 = 75m$ es un múltiplo de 5.
- La solución de la ecuación $144 = 6n$ es un número racional.
- La solución de la ecuación $17 = 238y$ es un número racional con denominador 4.
- La ecuación $-300 = 25n$ es un número negativo mayor que -5.
- La ecuación $\frac{1}{3} = \frac{2}{5}n$ es un número racional con denominador 6.

Soluciona problemas

7 Plantea la ecuación de área para cada triángulo. Luego, halla la altura.





Solución de ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$

En las ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ se utilizan las propiedades de la igualdad para encontrar el valor de la variable.

La ecuación $ax + b = c$ se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} ax + b - b = c - b & \text{Se resta } b \text{ en ambos miembros de la ecuación.} \\ ax + 0 = c - b & \text{Se reducen términos semejantes.} \\ ax = c - b & \text{Se aplica la propiedad modulativa.} \\ \frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a} & \text{Se dividen ambos miembros de la ecuación entre } a. \\ x = \frac{c - b}{a} & \text{Se simplifican las fracciones y se obtiene el valor de la incógnita.} \end{array}$$

Así, la solución de la ecuación $ax + b = c$ es $x = \frac{c - b}{a}$.

La ecuación $ax - b = c$ se resuelve así:

$$\begin{array}{ll} ax - b + b = c + b & \text{Se suma } b \text{ en ambos miembros de la ecuación.} \\ ax + 0 = c + b & \text{Se reducen términos semejantes.} \\ ax = c + b & \text{Se suma.} \\ \frac{ax}{a} = \frac{c + b}{a} & \text{Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de } x \text{ que es } a. \\ x = \frac{c + b}{a} & \text{Se realizan las operaciones indicadas y se obtiene el valor de la variable.} \end{array}$$

Por tanto, la solución de $ax - b = c$ es $x = \frac{c + b}{a}$.

✖ Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $4m + 2 = 10$

$$\begin{array}{ll} 4m + 2 - 2 = 10 - 2 & \text{Se resta 2 en ambos miembros de la ecuación.} \\ 4m = 8 & \text{Se realizan las operaciones respectivas.} \\ \frac{4m}{4} = \frac{8}{4} & \text{Se divide el resultado entre el coeficiente de } m \text{ que es 4.} \\ m = 2 & \text{Se simplifican las fracciones y se obtiene el valor de } m. \end{array}$$

Por tanto, la solución de la ecuación $4m + 2 = 10$ es $m = 2$.

b. $3y - 7 = -9$

$$\begin{array}{ll} 3y - 7 + 7 = -9 + 7 & \text{Se suma 7 en ambos miembros de la ecuación.} \\ 3y = -2 & \text{Se realizan las operaciones indicadas.} \\ \frac{3y}{3} = \frac{-2}{3} & \text{Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 3.} \\ y = -\frac{2}{3} & \text{Se simplifican las fracciones y se obtiene el valor de la variable.} \end{array}$$

Luego, la solución es $y = -\frac{2}{3}$.



$$c. \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{2}$$

Se suma $\frac{1}{2}$ en ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{2}{3}x = \frac{8}{6}$$

Se realizan las sumas indicadas.

$$\frac{2}{3}x \div \frac{2}{3} = \frac{8}{6} \div \frac{2}{3}$$

Se divide entre $\frac{2}{3}$ ambos miembros de la igualdad.

$$\frac{6}{6}x = \frac{24}{12}$$

Se realizan las divisiones entre fracciones.

$$x = 2$$

Se simplifican las fracciones.

Actividades

Recupera información: 1

Ejercita: 2

Razona: 3-4-5-6

- 1 Escribe el procedimiento para resolver la ecuación $9x - 2 = 7$.

- 2 Resuelve las siguientes ecuaciones. Luego, comprueba tu respuesta.

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| a. $2x + 15 = 3$ | g. $-9 + 20x = -26$ |
| b. $3a - 7 = 8$ | h. $40 = 5y - 75$ |
| c. $-4b - 5 = 6$ | i. $3,2y + 6 = 1,2$ |
| d. $3m + 6 = -12$ | j. $9,5m - 2,3 = 1,7$ |
| e. $-26 + 4n = -45$ | k. $2 = 35p - 4$ |
| f. $18 - 5p = 16$ | l. $5 + 5x = 3$ |

- 3 Determina el error que se cometió al resolver las siguientes ecuaciones.

- | | |
|---------------------|------------------------------|
| a. $-7m + 10 = -39$ | c. $-14 = \frac{1}{3}a + 40$ |
| $-7m = -39 - 10$ | $\frac{1}{3}a = 40 - 14$ |
| $m = \frac{-49}{7}$ | $a = 3(26)$ |
| $m = -7$ | $a = 78$ |

- | | |
|----------------------|---------------------|
| b. $5 - 9x = -50$ | d. $-24 = 12 - 8r$ |
| $-9x = -50 + 5$ | $-24 = 8r$ |
| $x = \frac{-45}{-9}$ | $\frac{-24}{8} = r$ |
| $x = 5$ | $-3 = r$ |

- 4 Observa la ecuación: $pq + r = 5$. Luego despeja:

- a. p b. q c. r

- 5 Determina si el valor de la incógnita es solución de la ecuación dada, si es incorrecta, resuélvela correctamente.

- | | |
|--|--------------------|
| a. $\frac{1}{2}n + 6 = 15$ | $n = -18$ |
| b. $3a - \frac{1}{2} = -5$ | $a = -\frac{3}{2}$ |
| c. $\frac{2}{3}p - \frac{1}{4} = 6$ | $p = \frac{11}{2}$ |
| d. $\frac{1}{6}y + \frac{2}{4} = 3$ | $y = 15$ |
| e. $\frac{7}{5}m - 4 = \frac{1}{7}$ | $m = 2$ |
| f. $\frac{4}{9}w - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$ | $w = -\frac{2}{5}$ |
| g. $z + 7 = -\frac{4}{9}$ | $z = \frac{6}{9}$ |

- 6 Escribe una ecuación para cada enunciado. Luego, resuélvela.

- El doble de un número, aumentado en 1, equivale a 7.
- El triple de un número, aumentado en 15, es igual a 45.
- El doble de un número, disminuido en 8, equivale a 12.
- El triple de un número disminuido en 2 equivale a 10.
- La mitad de un número, aumentado en 4 es igual a 9.

RECUERDA QUE...

Los signos de los términos de una ecuación se cambian al multiplicar por -1 en ambos miembros de la ecuación.

Transposición de términos

La **transposición** consiste en pasar un término de un miembro de la ecuación al otro cambiándole el signo, sin que la ecuación cambie.

Así, si en la ecuación $5m - 3 = 6$ se suma 3 a ambos miembros de la ecuación y se realizan las operaciones del primer miembro, se obtiene $5m = 6 + 3$. Luego, se observa que 3 estaba en el primer miembro con signo negativo y quedó en el segundo miembro con signo positivo.

Solución de ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$

Para resolver ecuaciones de la forma $ax \pm b = cx \pm d$, se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se transponen términos dejando en un solo miembro los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro, los términos independientes.
- Segundo, se reducen los términos semejantes de cada miembro.
- Tercero, se despeja la incógnita dividiendo en ambos lados de la ecuación entre el coeficiente de la incógnita.

Ejemplos

① Verificar que $a = -1$ es solución de la ecuación $7a - 15 = 2a - 20$.

Para comprobar la solución se sustituye el valor de la variable en la ecuación dada y se verifica la igualdad:

$$7(-1) - 15 = 2(-1) - 20 \quad \text{Se reemplaza } a \text{ por } -1.$$

$$-7 - 15 = -2 - 20 \quad \text{Se realizan las operaciones indicadas.}$$

$$-22 = -22$$

Por tanto, $a = -1$ es la solución de la ecuación $7a - 15 = 2a - 20$.

② Resolver la siguiente ecuación y comprobar la solución.

$$9x + 5 = 7x + 11$$

$$9x - 7x = 11 - 5 \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$2x = 6 \quad \text{Se reducen términos semejantes.}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \text{Se dividen ambos términos entre 2.}$$

$$x = 3 \quad \text{Se simplifican las fracciones y se obtiene el valor de la incógnita.}$$

Para comprobar la solución, se reemplaza x por 3 en la ecuación dada.

$$9(3) + 5 = 7(3) + 11 \quad \text{Se reemplaza } x \text{ por 3.}$$

$$27 + 5 = 21 + 11 \quad \text{Se realizan las multiplicaciones.}$$

$$32 = 32 \quad \text{Se realizan las sumas en ambos miembros de la igualdad.}$$

Se comprueba que $x = 3$ es la solución de la ecuación $9x + 5 = 7x + 11$.



- 3 Resolver las ecuaciones que contienen fracciones y decimales. Luego, comprobar la solución.

a. $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{3}{2}x - 5$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x = -5 - 3$$

Se transponen términos.

$$-\frac{2}{2}x = -8$$

Se realizan las operaciones indicadas.

$$-1x = -8$$

Se simplifica la fracción.

$$x = 8$$

Se divide entre -1 en ambos miembros de la ecuación.

Para comprobar la solución se sustituye la x por 8 en la ecuación dada y se verifica la igualdad:

$$\frac{1}{2}(8) + 3 = \frac{3}{2}(8) - 5$$

Se reemplaza x por 8.

$$\frac{8}{2} + 3 = \frac{24}{2} - 5$$

Se multiplica.

$$4 + 3 = 12 - 5$$

Se divide.

$$7 = 7$$

La solución de la ecuación $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{3}{2}x - 5$ es $x = 8$

b. $2,5n + 5 = -0,5n + 2$

$$2,5n + 0,5n = 2 - 5$$

Se transponen términos.

$$3n = -3$$

Se realizan las operaciones en ambos lados de la ecuación.

$$n = -1$$

Se divide entre 3 a ambos lados de la ecuación.

Para comprobar se reemplaza n por -1 en la ecuación dada, así:

$$2,5(-1) + 5 = -0,5(-1) + 2$$

$$-2,5 + 5 = 0,5 + 2$$

$$2,5 = 2,5$$

La solución de la ecuación $2,5n + 5 = -0,5n + 2$ es $n = -1$.

- 4 La ecuación $c = 0,25x + 6$ representa los costos de fabricación de bolsos de una empresa. Si x es el número de bolsos que se fabrican y los costos llegan a 200 dólares, ¿cuántos artículos fabricaron en esa empresa?

Sean $c = 0,25x + 6$ la ecuación dada y $c = 200$ los costos alcanzados. Se reemplaza c en la ecuación por los costos alcanzados y se despeja la variable para determinar los artículos fabricados. Así:

$$200 = 0,25x + 6$$

$$200 - 6 = 0,25x$$

Se transponen términos.

$$194 = 0,25x$$

Se resta.

$$\frac{194}{0,25} = x$$

Se divide ambos lados de la ecuación entre 0,25.

$$x = 776$$

Se divide.

Por tanto, en la empresa fabricaron 776 bolsos.

Actividades

Recupera información: 1

Ejercita: 2-4

Razona: 3-5-6

1 Responde: ¿Qué pasos se deben realizar para solucionar una ecuación de la forma $ax + b = cx + d$?

2 Encierra en un círculo el elemento que es solución de la ecuación.

a. $3x + 5 = 2x - 8$ $\left\{-\frac{13}{5}, -13, -3\right\}$

b. $2x - 9 = 7x + 6$ $\left\{-\frac{15}{9}, -\frac{1}{3}, -3\right\}$

c. $2(x + 6) = 5x - 2$ $\left\{\frac{10}{7}, 2, \frac{14}{3}\right\}$

d. $x - 6 = 3(x + 4)$ $\left\{-9, -3, -\frac{5}{4}\right\}$

e. $-4(x - 3) = x + 7$ $\left\{\frac{10}{4}, 1, \frac{19}{5}\right\}$

f. $5(x - 2) = 2(x + 7)$ $\left\{8, \frac{24}{7}, \frac{5}{3}\right\}$

g. $5(2x - 4) = -4(x - 2)$ $\left\{-2, \frac{6}{7}, 2\right\}$

h. $-8(3x - 9) = -3(2x + 6)$ $\{-5, 3, 5\}$

i. $-6(2x - 4) = 5(3x - 6)$ $\{2, -2, 4\}$

j. $4x + 5 - 2x + 6 = 3x - 4$ $\left\{0, \frac{7}{6}, 15\right\}$

k. $-3(x - 4) = 5(x - 8)$ $\left\{\frac{13}{2}, \frac{13}{4}, 26\right\}$

3 Determina cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución un número entero.

a. $6x - 8 = 3x + 7$

b. $9m - 12 = -3m + 72$

c. $-7a + 14 = -3a - 28$

d. $-6y + 9 = y - 40$

e. $3x - 12 = -6x - 42$

f. $2n + 7 = 4n + 48$

g. $5p - 7 = -6p - 48$

h. $-5x - 45 = 3x - 3$

i. $7b - 21 = 2b + 4$

j. $6c + 42 = -3c - 12$

4 Reduce términos semejantes y resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $3x + 5 - 8x + 2 = 6x - 1$

b. $-5x + 4 + 9x - 6 = 2x - 8$

c. $-9x + 12 = 3x - 8 + 6x - 9$

d. $10x - 21 = 8x - 7 - 12x - 6$

e. $7x - 12 + 9x - 5 - 6x + 8 = -3x + 4$

f. $-5x - 21 - 8x - 7 + 9x + 20 = -6x + 12$

g. $15x - 29 = -8x + 7 - 5x + 6 + 9x - 21$

h. $-24x - 31 = -9x + 6 + 18x - 25 - 5x + 10$

i. $-11x + 31 - 8x + 40x - 9 = -5x + 8 + 15x$

j. $-4x + 5 + 7x - 8 + 12x - 5 = -9x + 7x + 8$

k. $8x + 7x + 5 - 3x + 4 - 12x = 12x + 3 - 5x$

l. $9x - 7 - 3x + 5 + 6x - 10 = 2x - 3 + 8x$

m. $5 + 8x - 15 - 16x + 25 - 3x - 8 - 18x - 9 = 0$

5 Encuentra el error cometido al solucionar la ecuación y corrígelo en tu cuaderno.

a. $2x - 9 = 8x + 15$

$2x - 8x = 15 - 9$

$-6x = 6$

$x = \frac{6}{-6}$

$x = -1$

b. $3x + 5 = -4(2x - 7)$

$3x + 5 = -8x - 28$

$3x + 8x = -28 - 5$

$11x = -33$

$x = \frac{-33}{11} = -3$

c. $3(x - 4) = 7x - 8$

$3x - 12 = 7x - 8$

$-12 + 8 = 7x - 3x$

$4 = 4x$

$\frac{4}{4} = x$

$1 = x$

d. $5(x + 8) = -2(x + 1)$

$5x + 40 = -2x - 2$

$5x + 2x = -2 - 40$

$7x = 42$

$x = \frac{42}{7}$

$x = 6$

6 Resuelve. Ana tiene 10 años y su mamá 42. ¿En cuántos años la edad de Ana será la tercera parte de la edad de su mamá?



Solución de ecuaciones que tienen paréntesis

Para solucionar **ecuaciones con paréntesis** se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se eliminan los paréntesis de la misma forma como se realiza en las expresiones que tienen signos de agrupación.
Se debe tener en cuenta que si el paréntesis está precedido del signo más (+) las cantidades que están dentro de paréntesis, permanecen con el signo, y si el paréntesis está precedido del signo menos (−) las cantidades que están dentro del paréntesis cambian de signo.
- Segundo, se aplican los procedimientos de solución de ecuaciones estudiados anteriormente.
- Tercero, se despeja la incógnita y se comprueba la solución.

Ejemplos

1 Resolver las ecuaciones. Luego, comprobarlas.

a. $3(2x + 1) = 5x + 10$

$$6x + 3 = 5x + 10$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$6x - 5x = 10 - 3$$

Se transponen términos.

$$x = 7$$

se realizan operaciones.

Para comprobar la solución, se realiza el siguiente procedimiento:

$$3(2(7) + 1) = 5(7) + 10$$

Se reemplaza x por 7.

$$3(14 + 1) = 35 + 10$$

Se realizan las multiplicaciones.

$$3(15) = 45$$

Se resuelve la suma.

$$45 = 45$$

Se multiplica.

Por tanto, la solución de la ecuación

$$3(2x + 1) = 5x + 10 \text{ es } x = 7$$

b. $(9y - 2) - (3y - 6) = 5y + 7$

$$9y - 2 - 3y + 6 = 5y + 7$$

Se suprime el paréntesis.

$$6y + 4 = 5y + 7$$

Se reducen términos semejantes.

$$6y - 5y = 7 - 4$$

Se transponen términos.

$$y = 0$$

Se reducen términos semejantes.

Para comprobar la solución se reemplaza $y = 0$ de donde se obtiene la igualdad $7 = 7$.

Así, $y = 0$ es solución de la ecuación.

c. $4x - [3x - (7x + 8)] = 2$

$$4x - [3x - 7x - 8] = 2$$

Se suprimen paréntesis teniendo en cuenta el cambio de signos en el paréntesis precedido de signo menos.

$$4x - [-4x - 8] = 2$$

Se reducen términos semejantes.

$$4x + 4x + 8 = 2$$

Se suprimen corchetes.

$$8x + 8 = 2$$

Se reducen términos semejantes.

$$8x = 2 - 8$$

Se transponen términos.

$$x = -\frac{6}{8}$$

Se divide entre 8 a ambos lados de la ecuación.

Para comprobar la solución se reemplaza $x = -\frac{6}{8}$ y se realizan las operaciones indicadas, así:

$$4\left(-\frac{6}{8}\right) - \left[3\left(-\frac{6}{8}\right) - \left(7\left(-\frac{6}{8}\right) + 8\right)\right] = 2$$

$$-\frac{24}{8} - \left[-\frac{18}{8} - \left(-\frac{42}{8} + 8\right)\right] = 2$$

$$-\frac{24}{8} - \left[-\frac{18}{8} + \frac{42}{8} - 8\right] = 2$$

$$-\frac{24}{8} - \left[-\frac{40}{8}\right] = 2$$

$$-\frac{24}{8} + \frac{40}{8} = 2$$

$$2 = 2$$

Por tanto, $x = -\frac{6}{8}$ es solución de la ecuación.



Ejemplos

② Resolver la ecuación $-3 + \{2x - 5[(4x - 1) - (x + 3)]\} = 5x - 8$.

$$-3 + \{2x - 5[4x - 1 - x - 3]\} = 5x - 8 \quad \text{Se eliminan paréntesis.}$$

$$-3 + \{2x - 5[3x - 4]\} = 5x - 8 \quad \text{Se reducen términos semejantes.}$$

$$-3 + \{2x - 15x + 20\} = 5x - 8 \quad \text{Se aplica la propiedad distributiva.}$$

$$-3 + \{-13x + 20\} = 5x - 8 \quad \text{Se reducen términos semejantes.}$$

$$-3 - 13x + 20 = 5x - 8 \quad \text{Se eliminan llaves.}$$

$$-13x - 5x = -8 + 3 - 20 \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$-18x = -25 \quad \text{Se realizan las operaciones indicadas.}$$

$$x = \frac{-25}{-18} = \frac{25}{18} \quad \text{Se divide a ambos miembros de la ecuación entre -18 y se simplifica.}$$

Actividades

Interpreta: 1

Ejercita: 2

Razona: 3-4

① Responde: ¿cómo se resuelven ecuaciones que contienen paréntesis?

② Resuelve las ecuaciones que tienen paréntesis.

a. $5(x + 1) = 8(x - 3)$

b. $9(a - 3) = -4(a + 2)$

c. $12(b + 8) = -16(b + 1)$

d. $13 + 2(x + 1) = 4(x + 2)$

e. $-29 + 14(y - 3) = -9(y - 8)$

f. $\frac{1}{4}(x - 2) = \frac{9}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right)$

g. $\frac{9}{5}\left(w + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(2w + \frac{8}{9}\right)$

h. $\frac{3}{4}(a + 5) = -\frac{1}{2}(a - 3)$

i. $4\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}(x + 2) = \frac{1}{5}(x + 2)$

j. $16\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}y\right) = \frac{1}{5}y + \frac{7}{9}(y + 2)$

k. $\frac{14}{5}(x + 2) + \frac{1}{9}(x - 3) = \frac{2}{5}(x + 1)$

l. $\frac{4}{7}(t + 9) - 4\left(\frac{1}{5} - 2t\right) = t - 2$

③ Resuelve las ecuaciones.

a. $3x - [4x - (5x + 1)] - 3 = -(4x + 2)$

b. $-5(x - 4) = 2x - 3[2x - (2x + 1)] + 4x$

c. $-2(x - 6) + 3(2x - 4) = -2[-x - (7x + 1) - 3x]$

d. $-[3x - 4(2x - 1) - 6x] + 4x = -5x + 3(x - 6)$

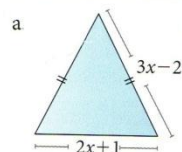
e. $-4[x(2x - 3) - 2(x + 5)] + 3x = -2(2x - 3)^2$

f. $5(x - 3) - (3x + 2)(x - 2) - 7x = -3(x + 1)^2$

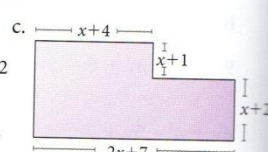
g. $2\{3x - 4[3x - (6x + 2) + 2x]\} = 2(x - 4)$

h. $-5(x - 7) = -4\{2(x - 3) - 3[x - 4(3x - 2)]\}$

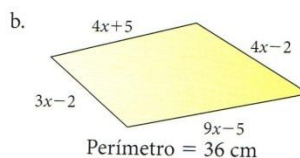
④ Dado el valor del perímetro de cada figura, halla la medida de cada lado.



Perímetro = 69 cm



Perímetro = 31 cm



Perímetro = 36 cm



Solución de ecuaciones que tienen denominadores

Las ecuaciones que tienen denominadores se resuelven de la siguiente manera:

- Primero, se halla el mcm de los denominadores.
- Segundo, se multiplica cada miembro de la ecuación por el mcm hallado anteriormente.
- Tercero, se simplifican las fracciones obtenidas para obtener una ecuación sin denominador y se resuelve utilizando la transposición de términos.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $\frac{3}{4}x - \frac{21}{12} = 2$ se tiene que $\text{mcm}(4, 12) = 12$.

Luego, se realiza el siguiente procedimiento:

$$12\left(\frac{3}{4}x\right) - 12\left(\frac{21}{12}\right) = 12(2)$$

Se multiplica por el mcm a ambos lados de la ecuación.

$$9x - 21 = 24$$

Se simplifica.

$$9x = 45$$

Se transponen términos.

$$x = 5$$

Se despeja x.

✖ Ejemplos

Resolver las ecuaciones con denominadores

a. $\frac{3x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4} + \frac{7}{12}$

$$\frac{3x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4} + \frac{7}{12}$$

Ecuación dada.

Se busca el mcm de 2, 3, 4 y 12.

Así, $\text{mcm}(2, 3, 4, 12) = 12$.

$$12\left(\frac{3x}{2} + \frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{x}{4} + \frac{7}{12}\right)$$

Se multiplica cada miembro de la ecuación por 12.

$$12\left(\frac{3x}{2}\right) + 12\left(\frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{x}{4}\right) + 12\left(\frac{7}{12}\right)$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$18x + 4 = 3x + 7$$

Se realizan las operaciones indicadas.

$$18x - 3x = 7 - 4$$

Se transponen términos.

$$15x = 3$$

Se reducen términos semejantes.

$$x = \frac{3}{15}$$

Se divide entre 15 en ambos miembros de la ecuación.

$$x = \frac{1}{5}$$

Se simplifica.

La solución de $\frac{3x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4} + \frac{7}{12}$ es $x = \frac{1}{5}$.

b. $\frac{5y}{6} - \frac{y-3}{2} = \frac{2y-1}{3} - \frac{1}{2}$

Se halla el mcm de 6, 2 y 3. Así, $\text{mcm}(2, 3, 6) = 6$.

Luego, se tiene:

$$\frac{5y}{6} - \frac{y-3}{2} = \frac{2y-1}{3} - \frac{1}{2}$$

Ecuación dada.

$$6\left(\frac{5y}{6} - \frac{y-3}{2}\right) = 6\left(\frac{2y-1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Se multiplica cada miembro por 6.

$$6\left(\frac{5y}{6}\right) - 6\left(\frac{y-3}{2}\right) = 6\left(\frac{2y-1}{3}\right) - 6\left(\frac{1}{2}\right)$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$5y - 3y + 9 = 4y - 2 - 3$$

Se realizan las operaciones indicadas.

$$5y - 3y - 4y = -2 - 3 - 9$$

Se transponen términos.

$$-2y = -14$$

Se reducen términos semejantes.

$$y = \frac{-14}{-2}$$

Se divide entre -2 a ambos lados de la ecuación.

$$y = 7$$

Se simplifica y se halla el valor de y.

La solución de $\frac{5y}{6} - \frac{y-3}{2} = \frac{2y-1}{3} - \frac{1}{2}$ es $y = 7$.



Solución de las ecuaciones racionales

Las **ecuaciones racionales** son aquellas que contienen una o más fracciones algebraicas. Por ejemplo, $\frac{3}{x} + \frac{1}{2x} = -\frac{5}{4}$ es una ecuación racional.

Para resolver las ecuaciones racionales se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se halla el mcm de los denominadores de las fracciones de la ecuación.
- Segundo, se multiplica cada miembro de la ecuación por el mcm de los denominadores.
- Tercero, se simplifica la ecuación de tal manera que no queden denominadores en la ecuación.
- Cuarto, se resuelve la ecuación resultante.

Por ejemplo, la ecuación $\frac{3}{x} + \frac{1}{2x} = -\frac{5}{4}$ se resuelve de la siguiente forma:

Se busca el mcm de x , $2x$ y 4 . Así, $\text{mcm}(x, 2x, 4) = 4x$.

$$4x \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2x} \right) = 4x \left(-\frac{5}{4} \right)$$

Se multiplica cada miembro de la ecuación por el mcm hallado, en este caso $4x$.

$$4x \left(\frac{3}{x} \right) + 4x \left(\frac{1}{2x} \right) = 4x \left(-\frac{5}{4} \right)$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$12 + 2 = -5x$$

Se realizan operaciones.

$$5x = -14$$

Se transponen términos.

$$7x = -14$$

Se reducen términos semejantes.

$$x = -\frac{14}{7} = -2$$

Se dividen los miembros de la ecuación entre 7.

La solución de la ecuación $\frac{3}{x} + \frac{1}{2x} = -\frac{5}{4}$ es $x = -2$.

✖ Ejemplos

① Resolver la siguiente ecuación: $\frac{2}{x} + \frac{4}{3} = \frac{1}{5x} - \frac{1}{2}$.

$$\frac{2}{x} + \frac{4}{3} = \frac{1}{5x} - \frac{1}{2}$$

El mcm de los denominadores es $30x$.

$$30x \left(\frac{2}{x} + \frac{4}{3} \right) = 30x \left(\frac{1}{5x} - \frac{1}{2} \right)$$

Se multiplica cada miembro de la ecuación por $30x$.

$$30x \left(\frac{2}{x} \right) + 30x \left(\frac{4}{3} \right) = 30x \left(\frac{1}{5x} \right) - 30x \left(\frac{1}{2} \right)$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$60 + 40x = 6 - 15x$$

Se realizan las multiplicaciones y se simplifican las expresiones.

$$40x + 15x = 6 - 60$$

Se transponen términos.

$$55x = -54$$

Se reducen términos semejantes.

$$x = \frac{-54}{55}$$

Se dividen entre 55 ambos miembros de la ecuación.



2 Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} = -\frac{5}{(x+2)(x-1)}$

Se halla el mcm de los denominadores en este caso es $(x+2)(x-1)$. Luego, se realiza el siguiente procedimiento.

$\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} = -\frac{5}{(x+2)(x-1)}$ Ecuación dada.

$(x+2)(x-1)\left(\frac{1}{x+2}\right) + (x+2)(x-1)\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{(x+2)(x-1)(-5)}{(x+2)(x-1)}$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por $(x+2)(x-1)$.

$(x-1) + 2(x+2) = -5$ Se realiza la multiplicación de polinomios y se simplifica.

$x-1+2x+4 = -5$ Se realizan las operaciones indicadas con paréntesis.

$3x+3 = -5$ Se reducen términos semejantes.

$3x = -5-3$ Se realiza transposición de términos.

$3x = -8$ Se realizan operaciones.

$x = -\frac{8}{3}$ Se divide el segundo miembro por 3.

b. $\frac{5}{x-4} - \frac{3}{x+4} = \frac{1}{x^2-16}$

Se determina el mcm de los denominadores, en este caso es $(x-4)(x+4)$, y se realizan los siguientes pasos.

$\frac{5}{x-4} - \frac{3}{x+4} = \frac{1}{x^2-16}$ Ecuación dada.

$5(x+4) - 3(x-4) = 1$ Se multiplica por el mcm.

$5x+20-3x+12 = 1$ Se aplica la propiedad distributiva en el primer miembro.

$2x+32 = 1$ Se reducen términos semejantes.

$2x+32 = 1$ Se efectúan operaciones.

$2x = 1-32$ Se realiza transposición de términos.

$2x = -31$ Se realizan operaciones.

$x = -\frac{31}{2}$ Se dividen entre 2 ambos miembros de la ecuación.



Actividades

Recupera inf.: 1

Interpreta: 2

Ejercita: 3-5-6-7

Razona: 4

1 Responde.

- a. ¿Cuál es el procedimiento que se debe realizar para resolver una ecuación con denominadores?
b. ¿Qué ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones racionales?

2 Escribe al frente de cada ecuación, racional o no racional, según sea el caso.

- a. $\frac{2x}{3} + \frac{x}{8} - \frac{x}{5} = 3$ _____
b. $\frac{3x-1}{2} + \frac{x}{3} = 4$ _____
c. $\frac{2x+1}{3x-3} + \frac{4}{x-1} = 5$ _____
d. $\frac{x+5}{3x-2} + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ _____
e. $\frac{1}{5}\left(\frac{3a-1}{2}\right) + 2\left(\frac{x-7}{3}\right) = 5$ _____
f. $\frac{m-3}{4} + \frac{3}{m+1} = \frac{4}{5}$ _____

3 Resuelve las siguientes ecuaciones y verifica el resultado.

- a. $\frac{2m}{5} - \frac{1}{3} = 4$ e. $\frac{3y}{4} - \frac{2}{5} = 2y$
b. $\frac{a}{5} + \frac{2a}{3} = \frac{2}{3}$ f. $\frac{7x}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$
c. $\frac{8w}{3} - \frac{7w}{2} + \frac{1}{5} = 0$ g. $\frac{9b}{6} - \frac{1}{3} + \frac{b}{4} = 0$
d. $\frac{2m}{3} - \frac{8m}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ h. $\frac{7y}{3} + \frac{5y}{4} - \frac{y}{12} = \frac{1}{6}$

4 Marca con un ✓ las ecuaciones que no tienen solución y justifica tu respuesta.

- a. $\frac{6a}{3} + \frac{1}{2} = 2a - 4$ d. $\frac{3n+1}{3} - \frac{2}{5} = n + 6$
b. $\frac{5x-3}{4} + \frac{2x}{7} = x$ e. $\frac{2y}{3} - \frac{y+1}{4} = \frac{1}{3}$
c. $\frac{3}{5}m - \frac{1}{3} = 4m$ f. $\frac{4x-2}{6} - \frac{2x-1}{3} = 1$

5 Relaciona cada ecuación con su solución.

- a. $\frac{x+2}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{1}{2}$ 1. -2
b. $\frac{2m-1}{2} + \frac{m}{3} = m-3$ 2. $\frac{69}{13}$
c. $-\frac{p+1}{5} + \frac{p}{3} - p = \frac{1}{2}$ 3. -1
d. $\frac{a-4}{3} - \frac{a-2}{4} = \frac{a}{2}$ 4. 5
e. $\frac{x-3}{5} + \frac{2x+4}{15} - \frac{x+5}{30} = 1$ 5. $-\frac{21}{26}$
f. $\frac{c-4}{3} + \frac{c}{5} - \frac{c+3}{10} = \frac{2}{3}$ 6. 21
g. $\frac{2+n}{4} + \frac{3-n}{6} - \frac{3+n}{24} = \frac{n}{12}$ 7. $-\frac{15}{2}$
h. $\frac{3n+1}{2} - \frac{2n-2}{4} + \frac{3n-1}{8} = \frac{-1}{2}$ 8. $\frac{8}{5}$

6 Resuelve las ecuaciones racionales.

- a. $\frac{2}{3x-2} - \frac{7}{4} = 0$ f. $\frac{4x+5}{3x-3} - \frac{4x+2}{3x+5} = 0$
b. $\frac{5}{x+4} = \frac{3}{x+3}$ g. $\frac{3}{5x-1} - \frac{4}{5x+1} = 0$
c. $\frac{5}{x-3} = \frac{2}{x^2-9}$ h. $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = 0$
d. $\frac{2}{5} + \frac{x^2+5x}{5x+4} = \frac{x}{5}$ i. $\frac{3x-4}{2x+1} = \frac{3x-2}{2x+3}$
e. $\frac{6}{4x-5} = \frac{9}{5}$ j. $\frac{x}{3} - \frac{x^2-8x}{3x-2} = \frac{5}{3}$

7 Resuelve.

- a. $\frac{1+3x}{1+2x} - \frac{1-3x}{1-2x} = -\frac{2x-12}{1-4x^2}$
b. $\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+4} = \frac{6}{x^2+2x-8}$
c. $\frac{5x-2}{x^2+x-12} - \frac{7}{x+4} = \frac{2}{2x-6}$
d. $\frac{9}{2x+10} - \frac{2x-3}{x^2+2x-15} = \frac{11}{3x-9}$



Actividades

Recupera inf.: 1

Interpreta: 2

Razona: 3-7

Ejercita: 4-5-6-8

1 Responde: ¿cómo se resuelven ecuaciones que tienen coeficientes literales?

2 Marca con ☒ las ecuaciones que tiene coeficientes literales.

a. $3x(x-1) = 4$

b. $\frac{x^2-2}{x} = 3$

c. $4(y+5) = 3(x-3)$

d. $\frac{2y+3z}{w} = 4$

e. $5xy - 3x + 2xy = 4$

f. $2x(y-2) = 3y$

g. $ax + 3x = 3ax$

h. $8(m-2) = 3m$

i. $b(b-3) = b^2 + 7b - 1$

j. $\frac{2m-3}{5m} = 6$

3 Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa y justifica tu respuesta.

• Para la ecuación $ax + b = c$ se tiene:

a. $x = (c-b)a$

b. $b = c - ax$

c. $a = \frac{b-c}{x}$

• Para la ecuación $x^2 = y^2 + wz$ se tiene:

d. $z = (x^2 - y^2)w$

e. $y^2 = x^2 - wz$

f. $w = \frac{x^2 - y^2}{z}$

4 Despeja la incógnita que se indica en cada ecuación.

a. $x = \frac{m+n}{l}$, despejar n .

b. $p = xy + mn$, despejar x .

c. $b = xc + \frac{yc}{2}$, despejar y .

d. $t = \frac{2x+3y}{2} + 5x$, despejar x .

e. $m = \frac{3a-2b}{3} - \frac{x}{4}$, despejar a .

f. $c = \frac{d}{2} - \frac{3a+4b}{3}$, despejar b .

5 Despeja n en cada ecuación.

a. $p = \frac{n}{4}$

b. $q = 3n - 2$

c. $m = 3n + 5p$

d. $x = \frac{4z-n}{6}$

e. $t = \frac{2n-4y}{5}$

f. $b = \frac{3}{5}d + \frac{2}{3}n - 4$

g. $l = 9n$

h. $y = 7 - 5n$

i. $r = \frac{2n-5}{3}$

6 Determina el valor de x en cada ecuación.

a. $3(x-n) + 7x = 2(x-n)$

b. $7(x-4) + 5(x+a) = -3(x+a)$

c. $5(3a-x) - 4(2a-x) = 2(a-x)$

d. $2(5n-x) - 6(x+n) = -3(x-4)$

7 Escribe una ecuación para cada solución.

a. $x = 5n$

b. $x = 2y - 5$

c. $x = \frac{5w-2}{3}$

d. $x = \frac{1}{5}n + \frac{1}{2}$

e. $x = 3y - \frac{n}{5}$

8 Halla la solución de cada ecuación para x .

a. $\frac{x}{n} + \frac{3}{n} = \frac{5}{n}$

b. $\frac{m-3}{m} + \frac{3}{2} = \frac{2m-1}{x}$

c. $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{y(2x+y)}{x^2-y^2}$

d. $\frac{x^2}{b^2+bx} + \frac{1}{b+x} = \frac{b+x}{b}$

e. $\frac{x-m}{3x-m} + \frac{4xm-4m^2}{12x-4m} = \frac{m}{4}$

f. $\frac{x^2-y^2}{xy} - 2 = \frac{x+y}{y} - \frac{x+y}{x}$



El lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico permite realizar generalizaciones de situaciones aritméticas y expresar de manera simbólica diferentes situaciones de la vida real.

Las expresiones verbales como el doble de un número, la mitad de un número, se pueden representar en forma algebraica usando variables para expresar cantidades numéricas que se desconocen. De igual forma las expresiones algebraicas se pueden traducir al lenguaje verbal.

Las siguientes expresiones son algunos ejemplos del uso del lenguaje algebraico, para dos números a y b .

El doble de un número se expresa algebraicamente como: $2a$.

El triple de un número se expresa como: $3a$.

Tres veces un número se expresa como: $3a$.

La mitad de un número se expresa como: $\frac{a}{2}$ o $\frac{1}{2}a$.

La cuarta parte de un número es: $\frac{1}{4}a$.

Un número aumentado en 5 se expresa como: $a + 5$.

La diferencia de dos números es: $a - b$.

La suma de dos números es: $a + b$.

El producto de dos cantidades es: ab .

El cuadrado de un número es: a^2 .

El cociente de dos cantidades diferentes de cero es: $\frac{a}{b}$.

El cubo de un número más su mitad es: $a^3 + \frac{a}{2}$.

✖ Ejemplos

① Traducir al lenguaje verbal las siguientes expresiones:

a. $\frac{2}{3}x$

$\frac{2}{3}x$ se traduce al lenguaje verbal como los dos tercios de un número.

b. $\frac{x}{4} + x^2$

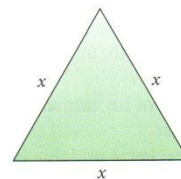
$\frac{x}{4} + x^2$ se traduce al lenguaje verbal como el cuarto de un número más su cuadrado.

c. $\frac{y}{2} - \frac{y}{5}$

$\frac{y}{2} - \frac{y}{5}$ se traduce como la mitad de un número disminuido en su quinta parte, o también la diferencia entre la mitad de un número y su quinta parte.

② Escribir una expresión algebraica que describa la situación de acuerdo con la figura.

El doble del perímetro del triángulo equilátero aumentado en 1.



Se representa con x la medida del lado del triángulo. Así, el perímetro del triángulo es $3x$ ya que es la suma de sus lados.

El doble del perímetro se escribe $6x$.

El doble del perímetro aumentado en uno es $6x + 1$.



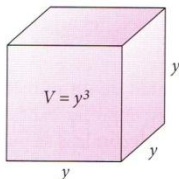
Ejemplos

3 Escribir en lenguaje algebraico:

- a. La diferencia entre el volumen del cubo y su arista.

El volumen del cubo es y^3 .

La diferencia del volumen y la arista del cubo es $y^3 - y$.



- b. Las edades de Mariana, Martín y Manuel, si se sabe que Manuel es mayor que Mariana en cinco años y Mariana tiene ocho años más que Martín.

La edad de Martín es x .

La edad de Mariana es $x + 8$.

La edad de Manuel es $x + 8 + 5$, es decir, $x + 13$.

Actividades

Interpreta: 1

Modela: 2

Razona: 3

1 Marca con ✓ la expresión que corresponde a cada enunciado.

- a. Un número aumentado en 8

☐ $x - 8$ ☐ $x \times 8$ ☐ $x + 8$

- b. Un número excede a m en 10.

☐ $m - 10$ ☐ $m + 10$ ☐ $10 - m$

- c. La tercera parte de un número aumentado en 10.

☐ $\frac{1}{3}x + 10$ ☐ $\frac{x + 10}{3}$ ☐ $x + \frac{10}{3}$

- d. Las dos terceras partes de la suma de dos números.

☐ $\frac{2}{3}a + b$ ☐ $\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b$ ☐ $\frac{2}{3}(a + b)$

2 Escribir algebraicamente cada expresión verbal.

- La quinta parte de la diferencia de un número y 6.
- Las tres quintas partes de un número aumentado en $\frac{1}{4}$.
- La suma de dos números consecutivos.
- La diferencia entre un número y el doble de su anterior.
- La suma entre un número par y el triple del siguiente par.
- El producto entre el doble de un número y la tercera parte de su consecutivo.
- El cociente entre un número y su mitad.
- La mitad de la suma de dos números multiplicado por el cuadrado del producto de ambos números.
- La raíz cúbica del cuadrado de la suma de dos números.

3 Traduce al lenguaje verbal cada expresión.

- | | |
|-------------------------|---|
| a. $x - 15$ | g. $4(x + y)$ |
| b. $3x + 10$ | h. $2x - (x - 1)$ |
| c. $\frac{1}{5}x$ | i. $8x + \frac{4}{5}$ |
| d. $\frac{2}{3}x - 8$ | j. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y$ |
| e. $\frac{3}{2}(x - 5)$ | k. $\frac{9}{5}y - 3y + 2y$ |
| f. $\frac{x + y}{4}$ | l. $\frac{4}{3}\left[\frac{2}{5}(x + y)\right]$ |

Soluciona problemas

4 Para cada situación plantea una ecuación y resuelve.

- El doble de un número aumentado en 8 es -24 . ¿Cuál es el número?
- La quinta parte de la diferencia entre un número y -8 es 6. ¿Cuál es el número?
- La suma de un número y su consecutivo es 73. ¿Cuál es el número?
- La diferencia entre un número y el triple de su consecutivo es 5. ¿Cuál es el número?

5 Escribe cada oración como una ecuación.

- La longitud de una circunferencia equivale al doble producto entre π y el radio r de la circunferencia.
- La energía E de un objeto equivale al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v .
- El área A de un polígono regular equivale a la mitad del producto entre el perímetro P y su apotema a .



Planteamiento de ecuaciones para resolver problemas

Para resolver problemas con el planteamiento de ecuaciones es necesario llevar a cabo los siguientes pasos:

Primero, comprender el problema.

Este paso consiste en leer e interpretar el enunciado. Para ello se debe distinguir la incógnita del problema, asignarle una variable y expresar la información del problema en el lenguaje algebraico.

Segundo, plantear la ecuación del problema.

Se escribe una ecuación en la que se relacionen los datos con la incógnita.

Tercero, resolver la ecuación.

Se resuelve la ecuación planteada de acuerdo con los procedimientos presentados anteriormente.

Cuarto, comprobar la solución y escribir la respuesta.

Se verifica que la solución de la ecuación se resolvió correctamente y que cumple con las condiciones del problema. Se redacta la respuesta de acuerdo con la pregunta o condición del problema.

✖ Ejemplos

① Plantear y resolver el siguiente problema.

La suma de dos números naturales consecutivos es 345. ¿Cuáles son los números?

- Primero, se asigna la incógnita al primer número natural y se expresa el otro número en términos de primero, de la siguiente manera:

El primer número: x

El siguiente número natural: $x + 1$

- Segundo, teniendo en cuenta que la suma de los números es 345 así se plantea la ecuación: $x + x + 1 = 345$.
- Tercero, se resuelve la ecuación siguiendo los procedimientos para resolver la ecuación, así:

$$x + x + 1 = 345$$

$$2x + 1 = 345$$

Se reducen términos semejantes.

$$2x = 345 - 1$$

Se transponen términos.

$$2x = 344$$

Se resta.

$$x = \frac{344}{2}$$

Se divide.

$$x = 172$$

Luego, los números buscados son 172 y 173.

Como $172 + 173 = 345$, las soluciones satisfacen las condiciones del problema.

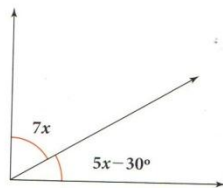
Finalmente, se comprueban las soluciones.



✖ Ejemplos

② Resolver los siguientes problemas.

- a. Hallar la medida de los ángulos de la siguiente figura.



Los ángulos son complementarios, es decir, se suman 90° . Luego, se tiene la ecuación:

$$7x + 5x - 30 = 90$$

Para resolver la ecuación, se realiza el siguiente procedimiento:

$$7x + 5x - 30 = 90$$

$$12x - 30 = 90$$

Se reducen términos semejantes.

$$12x = 90 + 30$$

Se transponen términos.

$$12x = 120$$

Se suma.

$$x = \frac{120}{12}$$

Se divide entre 12.

$$x = 10$$

Se simplifica.

Para hallar el valor de los ángulos se reemplaza x en las expresiones de los ángulos. Así, $7(10) = 70$, y $5(10) - 30 = 20$, como $70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$, se tiene que $x = 10$ es solución de la ecuación.

- b. Al nacer, los gemelos Santiago y Alejandro pesaron juntos 8.500 gramos. Alejandro pesó 930 gramos más que Santiago, ¿cuánto pesó cada niño?

- Primero, se representa con x al peso de Santiago, de modo que el peso de Alejandro es $x + 930$.
- Segundo, se plantea una ecuación para expresar el peso de los dos niños: $x + x + 930 = 8.500$
- Tercero, se resuelve la ecuación.

$$x + x + 930 = 8.500$$

$$2x + 930 = 8.500$$

$$2x = 8.500 - 930$$

$$x = \frac{7.570}{2}$$

$$x = 3.785$$

Por tanto, Santiago pesó 3.785 g y Alejandro pesó 4.715 g.

- c. La edad actual de Susan es el triple de la edad de su hijo. Hace 6 años Susan tenía el doble de la edad que tendrá su hijo en 8 años. ¿Cuáles son las edades actuales de Susan y de su hijo?

- Primero, se asigna la incógnita a una de las edades y las otras se expresan en términos de la edad dada inicialmente.

La edad actual del hijo de Susan: x .

La edad actual de Susan: $3x$.

La edad de Susan hace 6 años: $3x - 6$.

La edad del hijo de Susan en 8 años: $x + 8$.

La edad de Susan dentro de 8 años: $2(x + 8)$.

- Segundo, Se plantea la ecuación.

$$3x - 6 = 2 \times (x + 8)$$

- Tercero, se resuelve la ecuación.

$$3x - 6 = 2x + 16$$

$$3x - 2x = 16 + 6$$

$$x = 22$$

Se reemplaza x en los datos del problema:

La edad actual del hijo de Susan es $x = 22$ años.

La edad actual de Susan es $3x = 22 \times 3 = 66$ años.

Cuarto, se comprueba que se cumplen las condiciones del problema.

La edad de Susan hace 6 años es 60 años.

La edad del hijo de Susan en 8 años es 30 años.

Como 60 es el doble de 30, se cumplen las condiciones del problema.

Por tanto, las edades de Susan y de su hijo son 66 años y 22 años respectivamente.

- d. La suma de dos números es 216 y el triple del número menor aumentado en 107 equivale al doble del número mayor. ¿Cuáles son los números?

Se representa con x el número menor. Luego, el número mayor se representa como $216 - x$, con lo cual se plantea la ecuación $3x + 107 = 2(216 - x)$ que se resuelve así:

$$3x + 107 = 2(216 - x)$$

$$3x + 107 = 432 - 2x$$

$$5x = 432 - 107$$

$$5x = 325$$

$$x = 65$$

Por tanto, el número menor es 65 y el mayor es 151.



Actividades

Soluciona problemas

1 Plantea cada ecuación. Luego, resuélvela.

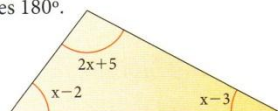
- La suma de dos números consecutivos es 299, ¿cuáles son los números?
- La suma de tres números consecutivos es 186, ¿cuáles son los números?
- La suma de dos números es 840 y el triple del mayor equivale al cuádruplo del menor, ¿cuáles son los números?
- Las tres cuartas partes de un número menos los tres medios del número equivalen a menos un medio, ¿cuál es el número?
- El doble de un número excede en 60 a la mitad del mismo número, ¿cuál es el número?

2 Resuelve los siguientes problemas de edades.

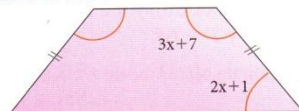
- La edad de Andrés es el triple de la de Pedro y dentro de 20 años será el doble, ¿cuáles son las edades actuales de Andrés y Pedro?
- La edad de Amalia es un tercio de la edad de Bernardo y hace 15 años, la edad de Amalia era un sexto de la edad de Bernardo, ¿cuáles son las edades actuales de Amalia y Bernardo?

3 Lee la información y observa las figuras. Luego, halla el valor de los ángulos en cada caso.

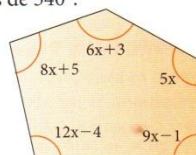
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .



- La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360° .



- La suma de los ángulos internos de un pentágono es de 540° .



4 Resuelve los siguientes problemas.

- Un balón, un libro y un afiche tienen un costo de \$20.000. Si el balón costó el triple del afiche y el libro el doble del afiche más \$2.000, ¿cuál es el costo de cada objeto?
- El perímetro de un triángulo es de 28 cm, si está formado de tal manera que su segundo lado es 2 cm más largo que el primer lado y el tercer lado es 3 cm más largo que el segundo lado, ¿cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?
- En una granja hay gallinas y marranos, si el número de marranos es la tercera parte del número de gallinas y hay 132 marranos, ¿cuántas gallinas hay?
- Se tienen 24 flores para hacer 2 ramos. Si se quiere que un ramo tenga el triple de flores del otro, ¿cuántas flores debe tener cada ramo?
- Una distribuidora de balones vendió en marzo la mitad de los balones, y a los dos meses, un tercio de los que quedaban. ¿Cuántos balones tenía al comienzo si ahora hay 40.000 balones?
- Se dispone de dos tipos de té, uno de Tailandia a \$15.000 el kilo y el otro de la India a \$18.000 el kilo. Si se quiere obtener 100 kg de té a \$16.500 el kg, ¿cuántos kilos de cada tipo de té se deben mezclar?
- ¿Cuántos litros de leche de \$1.500 el litro hay que mezclar con leche de \$2.000 el litro para conseguir 100 litros de leche a \$1.700 el litro?
- En una fábrica de ladrillos se mezcla arcilla de \$69.000 la tonelada con arcilla de \$135.000 la tonelada. ¿Cuántas toneladas de cada clase hay que emplear para conseguir 500 toneladas de arcilla a \$120.000 la tonelada?

5 Lee la información y luego, resuelve. Un camión sale de una ciudad A y se lleva una velocidad constante de 80 km/h, y dos horas más tarde, sale un automóvil de la misma ciudad a 120 km/h. ¿A qué distancia de la ciudad alcanzará el automóvil al camión?





Fórmulas

Las **fórmulas** son expresiones algebraicas que relacionan magnitudes (dadas mediante variables), que intervienen en una ley o principio. La variable que se utiliza para nombrar una magnitud es generalmente la letra inicial de su nombre. Por ejemplo el área se simboliza A , el tiempo t , la distancia d y el perímetro p .

Despeje de variables en las fórmulas

Despejar una variable, significa expresarla en términos de las otras variables.

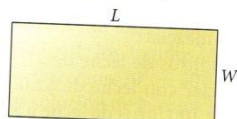
Por ejemplo, una fórmula comúnmente utilizada en física es la que estudia la velocidad de un cuerpo, y se define como la relación entre la distancia recorrida y el tiempo que tarda en recorrer dicha distancia, esta se expresa mediante $v = \frac{d}{t}$.

De aquí se puede despejar la distancia en términos de la velocidad y el tiempo como: $d = v \times t$ o también se puede despejar el tiempo en términos de la distancia y la velocidad así: $t = \frac{d}{v}$.

Para despejar la variable de una fórmula, se realizan los procedimientos que se trabajaron anteriormente para resolver una ecuación, y la propiedad fundamental de las igualdades.

✖ Ejemplos

- ① El perímetro del rectángulo de la figura es $P = 2W + 2L$. Escribir una expresión para el largo (L) en términos del perímetro y el ancho.



Se despeja L en la fórmula del perímetro, así:

$$P = 2W + 2L \quad \text{Fórmula del perímetro.}$$

$$P - 2W = 2L$$

$$\frac{P - 2W}{2} = L \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$\text{Así, } L = \frac{P - 2W}{2} \quad \text{Se divide a ambos lados de la fórmula entre 2.}$$

- b. Escribir una expresión para el ancho (W) en términos del perímetro y el largo.

Se despeja W en la fórmula del perímetro, así:

$$P = 2W + 2L \quad \text{Fórmula del perímetro.}$$

$$P - 2L = 2W$$

$$\frac{P - 2L}{2} = W \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$\text{Así, } W = \frac{P - 2L}{2} \quad \text{Se divide a ambos lados de la fórmula entre 2.}$$

- ② Despejar t en cada una de las fórmulas.

a. $a = \frac{v_f - v_i}{t}$

$$at = v_f - v_i \quad \text{Se multiplica a ambos lados por } t.$$

$$t = \frac{v_f - v_i}{a} \quad \text{Se dividen entre ambos lados de la ecuación.}$$

b. $g = \frac{v_0}{t}$

$$tg = v_0 \quad \text{Se multiplican ambos lados por } t.$$

$$t = \frac{v_0}{g} \quad \text{Se dividen ambos lados de la ecuación entre } g.$$

- ③ Expresar m en términos de a , T y d , si se sabe que: $F = ma$ y $T = Fd$.

Se expresa m en términos de F y a , así: $m = \frac{F}{a}$

Luego, se expresa F en términos de T y d , así:

$$F = \frac{T}{d}$$

Finalmente, se reemplaza F por $\frac{T}{d}$ en la ecuación donde se despejó m así:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{\frac{T}{d}}{a} = \frac{T}{ad}$$



Actividades

Razona: 1-2

Ejercita: 3-4

1 Despeja $\star$ en términos de $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$.

a. $\blacktriangledown = \blacktriangle - \star$

b. $\blacktriangle = \frac{\blacktriangledown}{\star + \blacktriangle}$

c. $\frac{\blacktriangledown + \blacktriangle}{\blacktriangle} = \star - \blacktriangle$

2 Escribe en el lenguaje verbal la regla correspondiente a cada fórmula.

a. $A = \frac{1}{2}bh$, donde A es el área de un triángulo de base b y altura h .

b. $T = Fe$, donde T es el trabajo, F es la fuerza y e es el espacio recorrido.

c. $m = Vd$, donde m es la masa, V es el volumen y d es la densidad.

d. $A = \pi r^2$, donde A es el área del círculo y r el radio.

3 Despeja en cada fórmula las magnitudes que se indican. Luego, completa la tabla.

Fórmula	Variable para despejar	Fórmula despejada
$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$	t_1	
$V = V_0 + at$	a	
$h = \frac{v^2 \times t^2}{2 \times r}$	t	
$T_f = \frac{9}{5}T + 32$	T_c	
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	m	

4 Escribe cada fórmula. Luego, despeja las magnitudes que se indican.

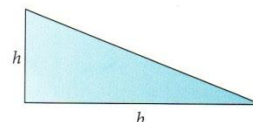
a. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa h es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos a y b .

b. El volumen V de un cubo equivale al cubo de su arista a . Despeja a .

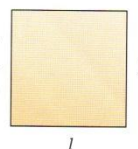
c. La base b de un triángulo es igual al cociente entre el doble de su área a y su altura h . Despeja h .

Soluciona problemas

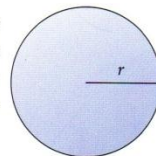
5 Halla el área de un triángulo que tiene 30 cm de base y 4 cm de altura. El área del triángulo es la mitad del producto de la base por su altura.



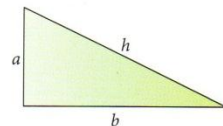
6 Halla el área de un cuadrado cuyo lado mide 5 cm. El área de un cuadrado equivale al lado elevado al cuadrado.



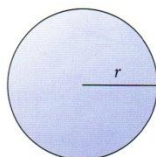
7 Halla el área de un círculo que tiene 3 cm de radio. El área de un círculo equivale al producto de π por el radio al cuadrado.



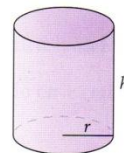
8 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm, si uno de sus catetos mide 4 cm. Halla la medida del otro cateto. La hipotenusa al cuadrado equivale a la suma de los cuadrados de los catetos.



9 Halla la longitud de un círculo cuyo radio mide 4 cm. La longitud de una circunferencia equivale al doble producto entre π y r .



10 Halla el volumen de un cilindro que tiene una altura de 10 cm y un radio de 3 cm en la base. El volumen de un cilindro equivale al producto del área de su base por la altura.



11 Halla el área de la superficie del cilindro del punto anterior si esta corresponde a la suma del producto de la altura y el radio más el área de las bases.



Desigualdades

Se dice que una cantidad m es mayor que una cantidad n si su diferencia $m - n$ es positiva, así 7 es mayor que 3, porque $7 - 3 = 4$ y 4 es un número positivo. De igual manera se dice que una cantidad m es menor que una cantidad n cuando la diferencia $m - n$ es negativa, así 3 es menor que 8 porque $3 - 8 = -5$ y -5 es un número negativo.

Una **desigualdad** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra, es decir, una desigualdad simboliza una relación matemática de orden entre dos cantidades.

Algunas expresiones que muestran desigualdades numéricas son:

$$3 < 1, 4 + 10 > 2 + 9, y, 20 < 40 + 12$$

En una desigualdad, el primer miembro es el que está a la izquierda del signo y el segundo miembro es el que está a la derecha del signo. Así, en la expresión:

$4 + 10 > 2 + 9$, el primer miembro es $4 + 10$ y el segundo miembro es $2 + 9$.

Los términos de una desigualdad son las expresiones que están separadas de las otras por los signos $+$ o $-$. En la desigualdad $4 + 10 > 2 + 9$, los términos son 4, 10, 2 y 9.

En las desigualdades se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si se suma o se resta un mismo número a ambos miembros de la desigualdad, la desigualdad se mantiene.

$$\text{Si } x < y, y z \in \mathbb{R}, \text{ entonces } x + z < y + z$$

O también

$$\text{Si } x < y, y z \in \mathbb{R}, \text{ entonces } x - z < y - z$$

Por ejemplo, si se tiene que $3 < 5$, y se suma -2 a ambos miembros de la desigualdad, se tiene que $3 + (-2) < 5 + (-2)$ porque $1 < 3$.

2. Si se multiplica o se divide por una cantidad positiva a ambos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene.

$$\text{Si } x < y, y z \in \mathbb{R}^+, \text{ entonces } xz < yz$$

O también

$$\text{Si } x < y, y z \in \mathbb{R}^+, \text{ entonces } \frac{x}{z} < \frac{y}{z}$$

Por ejemplo en la desigualdad $3 < 5$, se puede multiplicar a ambos miembros por 8 y se tiene que $3 \times 8 < 5 \times 8$, porque $24 < 40$.

3. Si se multiplica o se divide por un número negativo a ambos lados de la desigualdad, la desigualdad cambia de sentido.

$$\text{Si } x < y, y z \in \mathbb{R}^-, \text{ entonces } xz > yz$$

O también

$$\text{Si } x < y, y z \in \mathbb{R}^-, \text{ entonces } \frac{x}{z} > \frac{y}{z}$$

Por ejemplo, en la desigualdad $3 < 5$, se puede multiplicar a ambos miembros por -6 y se tiene que $3 \times (-6) > 5 \times (-6)$, porque $-18 > -30$.



Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que solo se cumple para determinados valores de la variable o variables que se presenten.

Las soluciones de las inecuaciones son subconjuntos de números que se pueden representar en la recta real a los cuales se les denomina **intervalos**.

Por ejemplo, la expresión $3x - 5 < 9x$ es una inecuación porque tiene expresiones algebraicas y en este caso hay una sola incógnita que es x .

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que satisfacen la inecuación dada. Para ello se debe seguir un proceso similar al de la solución de ecuaciones y se aplican las propiedades de las desigualdades que se nombraron anteriormente.

Por ejemplo, la inecuación $2x + 1 > 3$ se resuelve de la siguiente manera:

$$2x + 1 > 3 \quad \text{Inecuación dada.}$$

$$2x > 3 - 1 \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$2x > 2 \quad \text{Se realiza la resta.}$$

$$x > 1 \quad \text{Se divide entre 2 a ambos miembros de la desigualdad.}$$

La solución de la desigualdad $2x + 1 > 3$ son todos los valores que cumplen la relación $x > 1$, es decir, los números mayores que 1.

La solución se puede representar en la recta numérica de la siguiente manera:

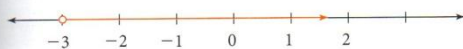


Ejemplos

① Representar las siguientes expresiones en la recta real.

a. $x > -3$

$x > -3$ es el conjunto de todos los números reales mayores que -3 , el punto -3 no se incluye. Gráficamente se tiene:



b. $x \leq 6$

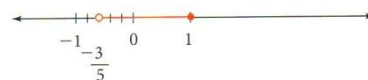
$x \leq 6$ es el conjunto de números menores o iguales que 6, el punto 6 sí se incluye. La representación gráfica de la recta numérica es:



c. $-\frac{3}{5} \leq x < 1$

$-\frac{3}{5} \leq x < 1$ es el conjunto de números mayores o iguales que $-\frac{3}{5}$, y menores que 1 en el cual $-\frac{3}{5}$ se incluye pero 1 no se incluye.

Por tanto, la representación gráfica corresponde a un intervalo abierto en $-\frac{3}{5}$ y cerrado en 1 como se muestra a continuación:





✖ Ejemplos

- ② Comprobar que cualquier valor del conjunto $x < 2$ es la solución de la siguiente inecuación $5x < 10$.

Se toma un valor cualquiera del conjunto de números menores que 2, por ejemplo 1, y se reemplaza en la inecuación.

$$5x < 10 \quad \text{Inecuación dada.}$$

$$5(1) < 10 \quad \text{Se reemplaza } x \text{ por } 1.$$

$$5 < 10 \quad \text{Se cumple la desigualdad.}$$

Luego, se cumple la desigualdad para 1.

- ③ Resolver las siguientes inecuaciones y representar la solución en la recta numérica.

a. $3x + 6 < 36$

$$3x + 6 < 36 \quad \text{Inecuación dada.}$$

$$3x < 36 - 6 \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$3x < 30 \quad \text{Se realiza la resta.}$$

$$\frac{3x}{3} < \frac{30}{3} \quad \text{Se divide entre 3 a ambos miembros de la desigualdad.}$$

$$x < 10 \quad \text{Se despeja la incógnita.}$$

Luego, la solución de la inecuación $3x + 6 < 36$ es $x < 10$, la representación en la recta numérica de la solución es:



b. $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} > \frac{x+5}{4}$

$$\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} > \frac{x+5}{4} \quad \text{mcm}(2, 3, 4) = 12$$

$$12\left(\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3}\right) > 12\left(\frac{x+5}{4}\right) \quad \text{Se multiplica a ambos lados de la desigualdad por 12.}$$

$$12\left(\frac{x}{2}\right) - 12\left(\frac{x+1}{3}\right) > 12\left(\frac{x+5}{4}\right) \quad \text{Se aplica la propiedad distributiva.}$$

$$6x - 4(x+1) > 3(x+5) \quad \text{Se simplifican las fracciones.}$$

$$6x - 4x - 4 > 3x + 15 \quad \text{Se resuelven los productos indicados.}$$

$$6x - 4x - 3x > 15 + 4 \quad \text{Se transponen términos.}$$

$$-1x > 19 \quad \text{Se realizan operaciones.}$$

$$x < -19 \quad \text{Se divide entre } -1 \text{ a ambos lados de la inecuación, y se aplica la tercera propiedad de las desigualdades.}$$

Luego, la solución de la desigualdad $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} > \frac{x+5}{4}$ es $x < -19$ y su representación gráfica en la recta numérica es:





Actividades

Recupera info.: 1

Ejercita: 2-5

Razona: 3-4

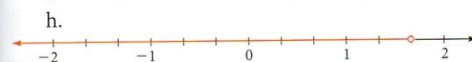
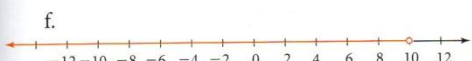
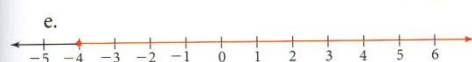
- 1 Nombra cada una de las propiedades de las desigualdades y da un ejemplo.

¿Qué diferencia existe entre una ecuación y una inecuación?

- 2 Escribe la expresión que represente la situación dada.

- La edad de los estudiantes no es superior a 17 años.
- La temperatura mínima de la muestra debe ser 12°C .
- La tasa de préstamo de un banco es superior al 13% efectivo anual.
- La presión atmosférica en Bogotá no alcanza a ser de una atmósfera.
- La masa de una persona de 1,5 m de altura, no debe ser inferior a 45 kg ni superior a 54 kg.

- 3 Expresa cada recta numérica mediante la desigualdad que representa.



- 4 Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

- Si $3x - 2 < -5$ entonces $3x < -3$ porque al sumarle un mismo número a los dos miembros de la desigualdad esta no se altera.
- Si $2x > -4$ entonces $-2x > 4$, porque al multiplicar los dos miembros de la desigualdad por un número real, esta no se altera.
- -3 hace parte del conjunto solución de la inecuación $2x - 8 > -12$.
- La inecuación $x + \frac{3}{5} \geq 18$ representa la expresión: el mínimo valor de la suma de tres quintos con el número x es 18.

- 5 Resuelve cada inecuación y representa gráficamente su solución.

- $x - 3 > 7$
- $x + 9 \leq 10$
- $3x - 9 < -6$
- $-12 \geq 5x - 9$
- $5x + 2 \geq 3x - 8$
- $-2x + 5 < 6x - 11$
- $7x - 6 - 3x > -10$
- $-8x - 4 > -12x - 18$
- $2x - 4 - 6x \leq 3x + 3$
- $-5x - 9 - 3x \leq -4x + 11$
- $x - 8 - 5x \geq 2x + 2$
- $11x - 6 - 5x > 2x - 9$
- $x - \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$
- $x - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{8}$
- $\frac{3}{2}x - 7 + \frac{1}{4}x > \frac{3}{12}$
- $-\frac{2}{3}x + 9 \leq \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$

- 6 Escribe los elementos del conjunto que cumplen la relación de la inecuación.

- $\frac{1}{4}(x + 5) - 6 \geq \frac{1}{2}(x - 3)$
- $4x - 3(x - 1) \geq 2(x - 5)$
- $\frac{3}{2}(x + 4) < \frac{1}{4}(2x - 12)$
- $\frac{3(2x - 5)}{2} < \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}$



Solución de problemas con inecuaciones

Para resolver problemas utilizando inecuaciones se deben realizar los mismos pasos que se utilizan para resolver problemas que tienen ecuaciones:

- Primero, comprender el problema.
- Segundo, plantear la inecuación del problema.
- Tercero, resolver la inecuación.
- Cuarto, comprobar la solución y escribir la respuesta.

✖ Ejemplos

- ① La suma de tres números enteros consecutivos debe ser menor que 21. ¿Cuáles son los tres números más grandes que cumplen esta condición?

Primero, se asigna una variable para indicar al menor de los enteros y los otros se escriben en términos de ese entero.

El menor entero: x , el siguiente entero: $x + 1$, el siguiente a $x + 1$: $x + 2$, la suma de los tres enteros.

Segundo, se plantea la inecuación.

$$x + (x + 1) + (x + 2) < 21$$

Tercero, se resuelve la inecuación.

$$x + x + 1 + x + 2 < 21$$

Se destruyen los paréntesis.

$$3x + 3 < 21$$

Se reducen términos semejantes.

$$3x < 21 - 3$$

Se trasponen términos.

$$3x < 18$$

Se realizan las operaciones indicadas.

$$x < 6$$

Se divide a ambos lados entre el coeficiente de x que es 3.

Como el entero más grande que cumple la condición es 5, entonces se reemplaza por 5 en los datos del problema.

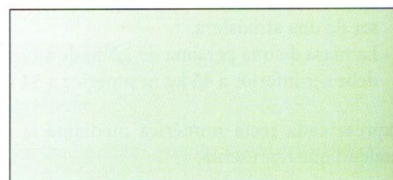
El mayor entero es $x = 5$

El siguiente entero es $x + 1 = 5 + 1 = 6$

El siguiente a $x + 1$ es $x + 2 = 5 + 2 = 7$

Cuarto, se comprueba que $5 + 6 + 7 = 18$ es menor que 21, la solución cumple con las condiciones del problema ya que $18 < 21$, la respuesta es: los números enteros más grandes cuya suma es menor que 21 son 5, 6 y 7.

- ② ¿Cuál es el ancho que debe tener el terreno rectangular de la figura para que su perímetro sea menor de 120 m?



50 m

- Primero, se asigna una incógnita a la información desconocida.

Ancho del terreno: x

Perímetro del terreno P : 120 m

Largo del terreno: 50 m

El perímetro se puede escribir como

$$P = 2x + 100$$

- Segundo, como $P < 120$ se plantea la inecuación.

$$2x + 100 < 120$$

- Tercero, se resuelve la inecuación.

$$2x + 100 < 120$$

Inecuación dada.

$$2x < 120 - 100$$

Se trasponen términos.

$$2x < 20$$

Se divide entre 2 a ambos lados.

$$x < 10$$

Se simplifica.

- Cuarto, se comprueba con el mayor número que cumple la condición, 9, así $2 \cdot 9 + 100 = 118$ y 118 m es menor que 120 m, la solución cumple la condición del problema. Luego, la respuesta es: el ancho del terreno debe ser menor que 10 m para obtener un perímetro menor a 120 m.



Actividades

Ejercita: 1

Razona: 2-3

- 1 Traduce los enunciados al lenguaje algebraico y completa la tabla.

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
8 menos un número es menor que 9.	
Un número aumentado en 2 es mayor que 13.	
El doble de un número es mayor que 25.	
El triple de un número es menor que 30.	
La carga máxima del camión es de 1.400 gramos.	
Hay por lo menos 20 animales en el zoológico.	
La temperatura máxima es 20°.	

- 2 Escribe un enunciado para cada inecuación y resuélvela.

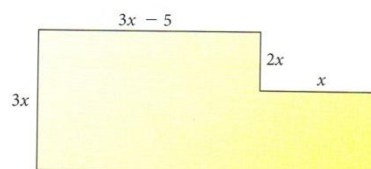
- a. $x > \frac{1}{4}$ d. $2x + 5 > 0$
 b. $x \geq 4$ e. $3x - \frac{1}{2} > 3$
 c. $x + 5 < 3$ f. $2x < 1 + \frac{2}{3}x$

- 3 Determina si la inecuación corresponde al enunciado dado. En caso contrario, escribe la inecuación correcta.

- a. Mateo gana mínimo \$890.000 al mes.
 $m > 890.000$
 b. Lo máximo que se puede demorar Ana en realizar la cartelera es 45 minutos.
 $T > 45$
 c. La temperatura de la ciudad varía entre 25 °C y 30 °C.
 $25 < t < 30$
 d. La edad de José no supera los 29 años.
 $e > 29$
 e. Las deudas de Manuela no superan los \$500.000 en el banco.
 $d < 500.000$
 f. La velocidad máxima permitida para conducir en carretera es de 80 km por hora.
 $v > 80$

Soluciona problemas

- 4 La zona infantil de un parque tiene forma rectangular y su largo mide 8 m más que el triple del ancho. Si el perímetro de la zona infantil es máximo 320 m, ¿qué medida puede tener el ancho?
- 5 Si la suma de las edades de tres hermanos que nacieron en años consecutivos es mayor que la suma entre la edad del menor y 31, ¿cuáles son las mínimas edades posibles?
- 6 En un bazar se vendieron más de \$700.000 entre perros calientes y hamburguesas. Si en hamburguesas se vendieron más de \$18.000 más dos terceras partes de lo que se vendió en perros, por lo menos, ¿cuánto pudo venderse en perros? ¿cuánto en hamburguesas?
- 7 ¿Cuál es el menor número entero que disminuido en 8, es menor que su triple?
- 8 El piso de un piscina rectangular tiene un área menor que 72 m². Si el ancho mide 8 m, ¿cuál es el mayor valor entero que puede medir el largo?
- 9 Observa la siguiente figura y sus medidas.



¿Cuánto debe medir cada lado de la figura para que su perímetro sea como máximo 314 m?

- 10 Observa las fracciones. Luego, responde.

Fracción A	Fracción B
$\frac{m}{2m+1}$	$\frac{m+3}{m+1}$

- a. Si $m > 0$, ¿cuál de las fracciones es mayor?
 b. Si $m > 3$ ¿cuál es el menor valor que puede tomar cada una de las fracciones?



TALLER 7

Ecuaciones

- 1 Escribe V, si la expresión es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

- La expresión $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ es una identidad.
- La ecuación $3x(x^2 - 1) = 2x + 7$, es de segundo grado con tres términos.
- La expresión $2x(7 - x) = 8$ es una ecuación y es de segundo grado.
- Tres es la única raíz de la ecuación $8x - 24 = 0$.
- La expresión $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$ se cumple para cualquier valor de x , por lo tanto, la expresión es una ecuación.

- 2 Para los siguientes valores de distancia y tiempo, plantea la ecuación y determina la velocidad, sabiendo que $x = vt$.

Distancia (x)	18	78	54	72	120
Tiempo (t)	3	13	9	12	20

Ecuación de la forma

$$ax + b = cx + d$$

- 3 Construye la ecuación que representa la situación de la figura y determina la masa de a .



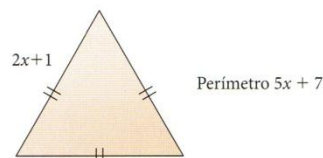
- 4 Diego tiene 3 años más que Nicolás. Si la suma de las edades de los dos es 21, ¿cuáles son las edades de Diego y Nicolás?

Ecuación de la forma

$$ax + b = cx + d$$

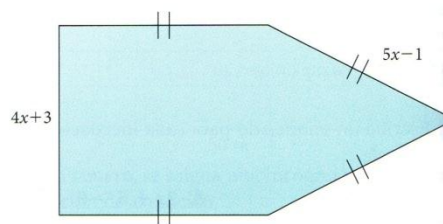
- 5 El lado de un cuadrado está dado por la expresión $x - 3$ y su perímetro por $3x + 2$, ¿cuál es la longitud del perímetro y de cada uno de sus lados?

- 6 Para el siguiente triángulo equilátero, determina la longitud de cada lado y su perímetro.



Ecuaciones con paréntesis

- El ancho de un rectángulo está dado por la expresión $3x - 2$. Si el largo es tres veces el ancho y el perímetro es 224 cm, ¿cuál es la longitud de cada uno de sus lados?
- Si el perímetro de la siguiente figura es 38 cm, ¿cuál es la longitud de cada uno de sus lados?



Ecuaciones con fracciones y ecuaciones racionales

- 9 Resolver las ecuaciones.

a. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{x+4}{5}$

b. $\frac{5n}{3} - \frac{n}{2} + \frac{3n}{4} - \frac{1}{7} = 0$

c. $\frac{2a}{5} - \frac{3a}{40} + \frac{7}{8} = \frac{1}{16}$

d. $\frac{3}{x+4} - \frac{5}{x-3} = \frac{1}{x-3}$

e. $\frac{8}{y+5} + \frac{9}{y-2} = \frac{1}{y+5}$

f. $\frac{1}{2x+2} + \frac{1}{3x-3} = \frac{1}{6x-6}$

- 10 La tercera parte de un número impar menos la cuarta parte de su consecutivo impar, es igual a $\frac{5}{4}$. ¿Cuál es el número?

Y esto que aprendí, ¿PARA QUÉ ME SIRVE?

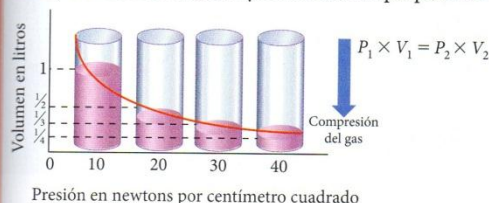
Para comprender las leyes de los gases.

Las ecuaciones en las leyes de los gases

Uno de los estados de la materia es el gaseoso. Un gas es un fluido que tiende a expandirse hasta ocupar completamente el volumen del recipiente que lo contiene. Al inflar los neumáticos de un carro o un globo, observamos que el gas produce presión.

Para estudiar el comportamiento de un gas, se creó el concepto de *gas ideal* que es un gas hipotético formado por partículas puntuales, sin atracción ni repulsión entre ellas y cuyos choques son elásticos. El estado de un gas queda determinado al relacionar cuatro magnitudes: volumen (V), temperatura (T), presión (P) y cantidad de gas expresada en moles (n). Las leyes que establecen estas relaciones son:

La ley de Boyle-Mariotte. Si se mantiene la temperatura constante, cuando se aumenta la presión de un gas ideal, su volumen disminuye en la misma proporción.



Recupera información

- 1 Explica qué es un gas.



Interpreta

- 2 ¿Cuáles son las variables que intervienen en la ley de Boyle-Mariotte?
- 3 Explica con tus palabras el significado de la gráfica que se muestra en la lectura.
- 4 Explica con tus palabras la fórmula $PV = nRT$.



La ley de Gay-Lussac. Si se mantiene la presión constante, el volumen del gas aumentará en la misma proporción en que aumente su temperatura absoluta:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

La ley de Charles. Si se mantiene el volumen constante, la presión de un gas aumenta en la misma proporción en la que aumenta la temperatura absoluta:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Existe una ecuación que relaciona las leyes y es conocida como *Ecuación de estado de los gases ideales*:

$PV = nRT$ donde R es la constante de los gases ideales ($0,082 \text{ atm} \times \text{L/K} \times \text{mol}$)



Reflexiona y valora

- 4 ¿Para qué se usan los subíndices 1 y 2 en las variables V y T en la ley de Gay-Lussac?
- 5 ¿Es correcto decir que en la ley de Boyle-Mariotte se afirma que la presión es inversamente proporcional al volumen?



Plantea y actúa

- 6 Consulta cómo funciona la ley de los gases, con relación a la presión cuando una persona bucea. Elabora un informe al respecto y preséntalo en clase.

