

***SOBRE LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS  
EN EL PROBLEMA DE N-CUERPOS POLIGONAL***

***Tesis Doctoral en Matemáticas***

***JOHANN JEIVER SUÁREZ MOTATO***



**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
DOCTORADO EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS  
SANTIAGO DE CALI**

***SOBRE LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS  
EN EL PROBLEMA  $N$ -CUERPOS POLIGONAL***

**Johann Jeiver Suárez Motato**

***Director de tesis: Óscar Mario Perdomo Ph.D  
Codirector: Andrés Mauricio Rivera Ph.D***

**Palabras claves:**

**Problema de  $N$ -cuerpos poligonal  
Soluciones periódicas  
Método de continuación analítica**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
DOCTORADO EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS  
SANTIAGO DE CALI**

---

## Índice general

---

|                                                                                      |             |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Agradecimientos</b>                                                               | <b>VI</b>   |
| <b>Resumen</b>                                                                       | <b>VII</b>  |
| <b>Introducción</b>                                                                  | <b>VIII</b> |
| <b>1. Preliminares</b>                                                               | <b>1</b>    |
| 1.1. Algunos aspectos de la teoría general de las ecuaciones diferenciales . . . . . | 1           |
| 1.1.1. Teorema de diferenciabilidad respecto a los parámetros . . . . .              | 5           |
| 1.1.2. El Teorema de la función implícita . . . . .                                  | 6           |
| 1.2. Resultados sobre periodicidad de soluciones . . . . .                           | 8           |
| <b>2. Resultados sobre Mecánica Celeste</b>                                          | <b>13</b>   |
| 2.1. Leyes del movimiento de los planetas . . . . .                                  | 13          |
| 2.2. El problema de Kepler . . . . .                                                 | 15          |
| 2.3. El problema de $N$ -cuerpos . . . . .                                           | 21          |
| 2.3.1. Caso particular: El problema de 2-cuerpos . . . . .                           | 23          |
| <b>3. El problema de <math>N</math>-cuerpos poligonal</b>                            | <b>26</b>   |
| 3.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .                                              | 27          |
| 3.2. Búsqueda de soluciones periódicas. . . . .                                      | 31          |
| <b>4. Una simulación numérica</b>                                                    | <b>43</b>   |
| 4.1. Implementación del algoritmo . . . . .                                          | 43          |
| <b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>                                              | <b>54</b>   |

---

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A. Deducción de las ecuaciones de movimiento en el problema de $N$ -cuerpos<br>poligonal | 57 |
| B. Ecuaciones variacionales                                                              | 63 |
| Bibliografía                                                                             | 71 |

---

---

*Para el amor de mi existencia, mi esposa  
y al milagro de nuestras vidas...  
Daniel, Isabel y Raquel.*

---

## Agradecimientos

---

A Dios por darme la oportunidad de continuar con mi formación académica a través del Doctorado en Matemáticas y ser mi fortaleza espiritual durante esta etapa de mi vida.

A mi esposa e hijos por el amor que me brindan, su paciente espera y el apoyo incondicional con el que me motivaron cada día.

A mi familia por darme la educación y formar en mí los valores para ser la persona que soy.

A la Universidad del Valle especialmente a los docentes del Departamento de Matemáticas que ayudaron con mi formación académica. A Colciencias por el apoyo económico que me brindaron.

A la Doctora Doris Hinestroza Gutiérrez (q.e.p.d.), quien me motivó a ingresar al Doctorado y me colaboró incluso hasta los últimos momentos de su vida para que pudiera cumplir con mi sueño de ser Doctor en Matemáticas.

A mis tutores, los Doctores Andrés Mauricio Rivera y Óscar Mario Perdomo quienes se convirtieron en mi familia académica, creyeron en mí y me brindaron su apoyo incondicional.

Al posgrado en Ciencias-Matemáticas, especialmente a los Doctores Juan Carlos Muñoz, Raúl Quintero y Angélica Caicedo por su valiosa ayuda.

A mis compañeros del posgrado que estuvieron compartiendo conmigo sus conocimientos, su tiempo y espacio, pero sobre todo compartieron lo más valioso... su amistad y cariño.

---

## Resumen

---

En este documento se estudia la existencia de familias de soluciones periódicas en una configuración particular del problema de  $N$ -cuerpos en la cual, para cada instante de tiempo,  $(N - 1)$ -cuerpos primarios de igual masa  $m$ , se mueven en los vértices de un polígono regular, y el  $N$ -ésimo cuerpo de masa  $M \geq 0$  se mueve sobre el eje que pasa por el centro de masas del sistema y que es perpendicular al plano de movimiento de los otros cuerpos. En el caso  $N = 3$  la configuración anterior corresponde al problema espacial isósceles de tres cuerpos. Nuestro enfoque se basa en los resultados obtenidos en [21] para el caso  $N = 3$ , en donde a través de un método de continuación numérica se comprueba la existencia de órbitas periódicas que emergen de la solución correspondiente a ubicar el cuerpo de masa  $M$  en el centro de masas del sistema mientras que los cuerpos primarios se mueven de acuerdo a las soluciones de Lagrange para el problema de  $(N - 1)$ -cuerpos. A las familias de órbitas periódicas encontradas en [21] se le asocia un interesante diagrama de condiciones iniciales y periodos que contiene dos ramas de soluciones periódicas caracterizadas de acuerdo al periodo y la simetría de la órbita del  $N$ -ésimo cuerpo respecto al centro de masas. Usando técnicas variacionales y el método de continuación de Poincaré, en este trabajo se proporciona un análisis detallado de unas de las curvas embebidas en dichas ramas y además se extienden los resultados al caso  $N > 3$ .

---

## Introducción

---

A través de la matemática y la astronomía, el ser humano ha intentado analizar, comprender y explicar el movimiento de los cuerpos ubicados en lo que se conoce hoy día como *bóveda celeste*. Así pues, a finales del siglo XIX se estableció el *Problema de  $N$ -cuerpos* y desde su formulación, muchos matemáticos han trabajado en su solución. De manera informal, el problema puede enunciarse así:

*Conocidas las masas de  $N$ -cuerpos que se mueven bajo la acción de sus atracciones gravitatorias mutuas y dadas en cierto instante, la posición y la velocidad de cada uno de ellos, calcular las posiciones y velocidades en otro instante.*

Aunque el origen de este problema puede remontarse hacia el siglo V a.C. cuando los griegos estudiaron el movimiento de las estrellas y los planetas, no fue sino hasta que Johannes Kepler (1571-1630) enunció las leyes del movimiento planetario, que el problema tuvo una primera postulación desde la matemática. Cabe destacar que años después, el estudio hecho por Isaac Newton (1642-1727) de las leyes de Kepler, brindó un sentido físico más concreto a las mismas por medio de la formulación de la Ley de gravitación universal, que sería determinante en la formulación analítica del problema de  $N$ -cuerpos.

El primer caso estudiado y resuelto por el propio Newton en su obra *Philosophie Naturalis Principia Mathematica* (publicada en 1687), fue el caso  $N = 2$ . Por lo que, para dos cuerpos de masas conocidas cuya interacción cumple la Ley de gravitación universal, Newton pudo determinar las trayectorias de movimiento de cada cuerpo con tan solo la información de las posiciones y velocidades en cierto instante.

Sin embargo, Newton no logró demostrar que el problema de tres cuerpos no tenía solución analítica puesto que el sistema de ecuaciones que modela el movimiento en dicho problema era mucho más difícil de resolver por el método de las integrales. Así, los avances más relevantes

en torno al problema de tres cuerpos durante los siguientes 200 años fueron mínimos. Para mencionar los más destacados se tienen:

- Hacia 1772 Leonhard Euler (1707-1783) publica un trabajo donde estudia un *problema restringido de tres cuerpos*; en el cual demuestra que si los tres cuerpos son colocadas inicialmente en línea recta, de tal forma que la razón de sus distancias satisfagan una fórmula que sólo depende del valor de las masas de cada cuerpo, y si además, las velocidades iniciales son escogidas adecuadamente, entonces cada cuerpo se moverá periódicamente sobre una elipse, pero en todo momento los tres cuerpos se mantendrán sobre una línea recta, conservando siempre la misma razón entre sus distancias.
- Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en su obra *Miscellanea Taurinensia* escrita entre 1766-1773, intentando resolver el Problema de los tres cuerpos, redescubre las órbitas de Euler y encuentra una nueva familia de órbitas periódicas, obtenidas al colocar tres cuerpos sobre los vértices de un triángulo equilátero, donde hay que escoger adecuadamente las velocidades iniciales. Cada cuerpo se moverá sobre una órbita elíptica; en todo momento la configuración será de triángulo equilátero, el cual podrá variar de tamaño pero nunca de forma, además descubrió los *puntos de Lagrange* (1772), de interés porque en ellos se han encontrado los asteroides troyanos y los satélites troyanos de Saturno.
- Pierre Laplace (1749-1827) dedicó gran parte de su trabajo a publicar una obra compuesta por 5 volúmenes a la que llamó *Traité de la Mécanique Céleste*, (publicada en Paris entre 1799 y 1825), en ella afirmaba que si se conociera la velocidad y la posición de todas los cuerpos del Universo en un instante, se podrían predecir su trayectoria en cualquier instante.
- En 1887 Henri Poincaré (1854-1912) se dedicó a estudiar sobre el Problema de tres cuerpos, este trabajo lo publicó en la obra *Les Méthodes Nouvelles de Mécanique Céleste* (presentada en 1888), en él, Poincaré establecía que la evolución de un sistema como el que consideró era extremadamente caótica, en el sentido de que una pequeña perturbación en el estado inicial (como por ejemplo una mínima variación en la posición inicial de un cuerpo) podía llevar eventualmente a un estado radicalmente diferente. Por lo tanto, si con los instrumentos de medición disponibles no se puede detectar esa mínima variación, sería imposible predecir el estado final del sistema. Poincaré publicó además, otro trabajo llamado *Leçons de mécanique céleste* (1905-1910) que junto al primero, sentaron las bases matemáticas de la mecánica celeste.
- Mediando el siglo XX, el ruso Kirill A. Sitnikov presentó un modelo del problema de tres cuerpos conocido en la actualidad como *el problema de Sitnikov* (*The existence of oscillatory motions in the three-body problems*, 1960). Dicho problema considera dos cuerpos con igual masa que se mueven en un mismo plano alrededor de su centro de

masas como soluciones de un problema de dos cuerpos y cuyo momento angular es no cero. El tercer cuerpo de masa despreciable frente a la masa de los otros dos, se mueve en la recta que pasa por el centro de masas del sistema y es ortogonal al plano de movimiento de las primarias. El problema de Sitnikov se centra en describir las órbitas de movimiento del tercer cuerpo.

Dada la intrínseca dificultad del problema de  $N$ -cuerpos, se consideraran diversos casos particulares, los cuales involucran en algunas ocasiones condiciones especiales sobre la configuración inicial (en posición y velocidad) de los cuerpos, o también la existencia de uno o más cuerpos de masa despreciable (llamados *problemas restringidos de  $N$ -cuerpos*) para así entender un poco sobre la dinámica del sistema de  $N$ -cuerpos. Recientemente, se han publicado diversos resultados numéricos sobre un conjunto especial de problemas de tres cuerpos (para mencionar algunos relacionados en este trabajo, ver [7] y [18]).

En relación a este problema reducido, en [21] se encuentra una configuración para el caso de tres cuerpos, llamado *problema espacial isósceles de tres cuerpos*. Dicho problema se presenta, cuando dos cuerpos  $P_1$  y  $P_2$  de igual masa  $m$ , tienen sus posiciones y velocidades en cada instante de tiempo, simétricas respecto a la recta que pasa por el centro de masas del sistema y, el tercer cuerpo  $P_3$  de masa  $M$  tiene siempre su posición y velocidad sobre dicha recta. Sin pérdida de generalidad, se puede elegir un sistema de coordenadas cartesianas  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  donde el eje  $z$  es la recta sobre la cual se mueve el cuerpo  $P_3$ . En tal situación, las posiciones y velocidades de los cuerpos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  están dadas por:

$$P_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \quad P_2(t) = (-x_1(t), -y_1(t), z_1(t)) \quad \text{y} \quad P_3(t) = (0, 0, z_3(t)),$$

y

$$\dot{P}_1(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t)), \quad \dot{P}_2(t) = (-\dot{x}_1(t), -\dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t)) \quad \text{y} \quad \dot{P}_3(t) = (0, 0, \dot{z}_3(t)).$$

respectivamente.

A partir de la Ley de atracción gravitacional y asumiendo la constante de atracción gravitacional  $G = 1$ , de los resultados en [22] se deduce:

**Teorema 0.1.** *Dos cuerpos  $P_1$  y  $P_2$  de masa  $m$  y un cuerpo  $P_3$  de masa  $M$ , con coordenadas  $P_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$   $i = 1, 2$  y  $P_3(t) = (0, 0, z_3(t))$ , centro de masas en el origen y momento angular  $\nu \neq 0$ , satisfacen un problema espacial isósceles de tres cuerpos si y solo si*

$$x_1(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y_1(t) = r(t) \sin \theta(t),$$

con  $z_3(t), r(t), \theta(t)$  soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{z}_3 = \frac{-2m\lambda z_3}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, \\ \ddot{r} = \frac{\nu^2}{r^3} - \frac{m}{4r^2} - \frac{Mr}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, \\ \dot{\theta}r^2 = \nu, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\lambda = 1 + \frac{M}{2m}$ ,  $\nu$  es una cantidad conservada conocida como momento angular del sistema y  $x_2(t) = -x_1(t)$ ,  $y_2(t) = -y_1(t)$  y  $z_1(t) = \frac{-M}{2m}z_3(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Nótese que de la última ecuación del sistema (1) se obtiene

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{\nu}{r^2(s)} ds,$$

por lo que (1) puede reducirse al sistema de dos ecuaciones:

$$\ddot{z}_3 = \frac{-2m\lambda z_3}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, \quad \ddot{r} = \frac{\nu^2}{r^3} - \frac{m}{4r^2} - \frac{Mr}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

por lo tanto si  $(z_3(t), r(t))$  es solución del *sistema reducido* (2), entonces  $(z_3(t), r(t), \theta(t))$  es solución del sistema (1).

Quizás, una de las preguntas de mayor interés en todo problema de  $N$ -cuerpos, sea la búsqueda de soluciones recurrentes y en particular, aquellas que sean periódicas. En tal caso, una de las estrategias para la búsqueda de soluciones periódicas consiste en aprovechar las simetrías que tenga el campo vectorial asociado, esto con el propósito de convertir la búsqueda de soluciones periódica a la existencia de soluciones de un problema de contorno adecuado.

De lo anterior se puede demostrar (ver más detalles en el capítulo 3 y [21, 22]), que las soluciones  $\phi(t) = (z_3(t), r(t))$  de los siguientes problemas de contorno

$$\begin{cases} \ddot{z}_3 = \frac{-2m\lambda z_3}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, & z_3(0) = z_3(T) = 0, \\ \ddot{r} = \frac{\nu^2}{r^3} - \frac{m}{4r^2} - \frac{Mr}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, & \dot{r}(0) = \dot{r}(T) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

ó

$$\begin{cases} \ddot{z}_3 = \frac{-2m\lambda z_3}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, & z_3(0) = \dot{z}_3(T) = 0, \\ \ddot{r} = \frac{\nu^2}{r^3} - \frac{m}{4r^2} - \frac{Mr}{(r^2 + \lambda^2 z_3^2)^{3/2}}, & \dot{r}(0) = \dot{r}(T) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

son soluciones  $2T$ -periódicas y  $4T$ -periódicas respectivamente. A partir de estas soluciones se puede probar la existencia de soluciones periódicas para el problema espacial isósceles de 3 cuerpos (1).

Más aún, las soluciones  $\phi(t)$  del problema de contorno (3) se dicen que son del tipo *impar* en el sentido de que  $z_3(t)$  es impar respecto a  $t = 0$  y  $t = T$ , en tanto que las soluciones del problema de contorno (4) se dirán que son del tipo *impar-par* en el sentido de que  $z_3(t)$  es impar respecto a  $t = 0$  y par respecto a  $t = T$ . En el capítulo 1 el lector podrá encontrar con más detalle las simetrías antes mencionadas.

En base a lo anterior, Perdomo en [21, 22] considera el siguiente problema de valor inicial <sup>1</sup>

$$\begin{cases} \ddot{z}_3 = \frac{-400z_3}{\sqrt{(r^2 + 4z_3^2)^3}}, & z_3(0) = 0, \dot{z}_3(0) = b, \\ \ddot{r} = \frac{100a^2}{r^3} - \frac{200r}{\sqrt{(r^2 + 4z_3^2)^3}} - \frac{25}{r^2}, & r(0) = 10, \dot{r}(0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

y comprueba numéricamente la existencia de dos trayectorias

$$S_i \subset \{(T, a, b) : T, a, b, \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2$$

que producen familias de soluciones periódicas y simétricas del sistema (5).

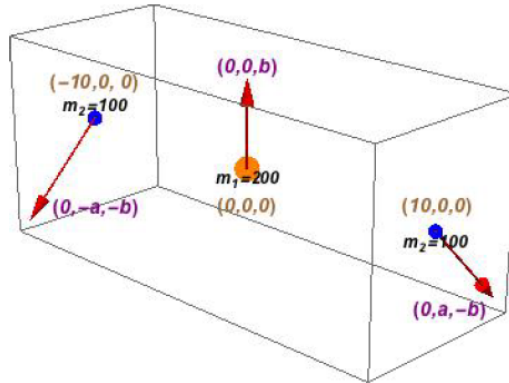


Figura 1: Configuración inicial del problema espacial isósceles de tres cuerpos (5) estudiado por Perdomo. Figura tomada de [21].

De forma más precisa,  $S_1$ : la curva suave que conecta los puntos  $P_3BP_2$  en la Figura 2, representa familias de soluciones  $\phi(t, a, b) = (z_3(t, a, b), r(t, a, b))$   $2T$ -periódicas de (5) que

<sup>1</sup>el cual corresponde a una configuración particular del problema espacial isósceles de 3 cuerpos (2) con masas  $m = 100$ ,  $M = 200$ , momento angular  $\nu = 10a \neq 0$  y parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$ .

satisfacen

$$\begin{cases} z_3(0, a, b) = z_3(T/2, a, b) = 0, \\ \dot{r}(0, a, b) = \dot{r}(T/2, a, b) = 0, \end{cases}$$

esto es  $\phi(t, a, b)$  es una **solución tipo impar**.

Por lo otro lado,  $S_2$ : la curva  $P_1B$  en la Figura 2, representa familias de soluciones  $\phi(t, a, b) = (z_3(t, a, b), r(t, a, b))$   $4T$ -periódicas de (5) que satisfacen

$$\begin{cases} \dot{z}_3(0, a, b) = \dot{z}_3(T/4, a, b) = 0, \\ \dot{r}(0, a, b) = \dot{r}(T/4, a, b) = 0, \end{cases}$$

por lo que en esta situación,  $\phi(t, a, b)$  es una **solución tipo impar-par**.

Ambas trayectorias se interceptan en un único punto  $B$  que representa lo que llamaremos un *punto de bifurcación*<sup>2</sup> en el conjunto de soluciones periódicas reducidas del problema espacial isósceles de 3 cuerpos; esto es, soluciones de (1) donde después de cierta unidad de tiempo las posiciones y velocidades iniciales de los tres cuerpos son la misma salvo un movimiento rígido<sup>3</sup>.

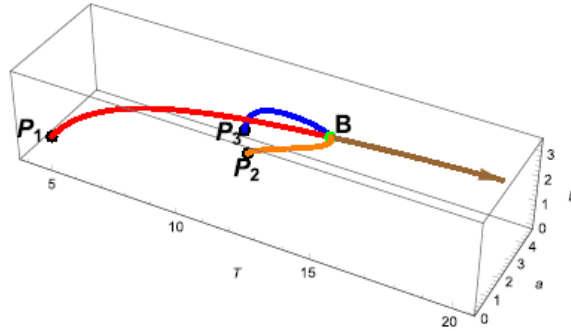


Figura 2: Diagrama de bifurcación de soluciones periódicas numéricas en el espacio de parámetros  $T, a, b$  (imagen tomada de [21]).

Vale la pena resaltar que la curva  $S_1$  inicia cerca de una solución periódica trivial, donde el cuerpo de masa  $M$  permanece inmóvil en el centro de masas del sistema ( $z_3(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ) y los otros cuerpos se mueven en un círculo, (es decir  $b$  cerca de 0). Por lo que se puede pensar que el punto  $P_3$  corresponde a un punto de soluciones no triviales de (5) que emanan de la solución trivial  $z_3 = 0$ . Desafortunadamente, este interesante análisis numérico de las familias de soluciones periódicas y simétricas del sistema (5) estudiado en [21] obtenidas a partir de las curvas  $S_1$  y  $S_2$  (y que posteriormente brindarán soluciones periódicas de

<sup>2</sup>Este término aparece en la definición 1.4.

<sup>3</sup>Esto hace alusión a un movimiento que preserva las distancias entre los cuerpos en cuestión.

(1)), no está acompañado de un detallado estudio analítico. Sin embargo el método numérico presentado por Perdomo, aparece bien expuesto en [23]. Es por eso, que este trabajo de tesis tiene como principal objetivo dar una demostración analítica del fenómeno de bifurcación que se evidencia numéricamente en [21, 22] para la curva  $S_1$ , y extender este mismo análisis matemático al caso de  $(N + 1)$ -cuerpos; en el cual,  $N$ -cuerpos se mueven sobre los vértices de un  $N$ -polígono regular y el  $(N + 1)$ -ésimo cuerpo está en el eje ortogonal al plano de movimiento de los anteriores y pasa por el centro de masa de todo el sistema.

Para facilitar la lectura de este documento, éste se ha escrito en 4 capítulos escritos de la siguiente forma

- En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos tales como definiciones y algunos teoremas muy conocidos en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias que servirán para presentar la notación utilizada a lo largo de este trabajo e introducir los resultados relevantes que trabajan en el capítulo 3. Además se presentan unos resultados importantes sobre la paridad de funciones que permitan simplificar la búsqueda de soluciones periódicas en el problema de  $N$ -cuerpos poligonal.
- En el capítulo 2 se enuncian resultados importantes que sostienen la teoría de la mecánica celeste; tales como las leyes del movimiento de los planetas y otros un poco más especializados como el problema de Kepler y el problema de dos cuerpos. Especialmente se presentan aquellos que son más relevantes en el desarrollo del trabajo. Finalmente, se enuncia el modelo matemático que determina el estudio del movimiento para el problema de  $N$ -cuerpos.
- El capítulo 3 proporciona todo lo relacionado con el estudio del problema de  $N$ -cuerpos poligonal con su respectiva formulación y validación analítica, además se enuncian y demuestran los resultados principales de este trabajo de tesis.
- En el capítulo 4 se presentan ejemplos ilustrativos del método de continuación numérica implementado en [22]. Este método motivó el planteamiento de los resultados obtenidos en este trabajo (teoremas 3.2 y 3.3) y presentados en el capítulo 3.

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

---

Actualmente, muchos fenómenos presentes en la naturaleza se han podido modelar a través de las ecuaciones diferenciales. Por ello, para quienes buscan comprender las leyes dinámicas detrás de cada fenómeno físico, resulta importante el conocimiento y uso de una teoría que valide analíticamente los resultados observados en la práctica. En este capítulo, se enunciarán algunos resultados básicos y bien conocidos de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias que serán de gran utilidad en el análisis de los resultados obtenidos en este trabajo. Hemos tomado como referencia para las definiciones y teoremas lo expuesto en [15] y [14].

### 1.1. Algunos aspectos de la teoría general de las ecuaciones diferenciales

Cuando se modela un fenómeno físico por medio de una ecuación diferencial, un primer paso es la búsqueda de soluciones particulares de dicha ecuación. Esto permitiría entender analíticamente parte del fenómeno bajo estudio. Sin embargo, dado que en general las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse de forma explícita, el siguiente paso natural es hacer un estudio cualitativo de las soluciones. En esta sección se presenta algunos resultados fundamentales que garantizan la existencia de soluciones de toda ecuación diferencial ordinaria, así como una serie de resultados generales de la teoría cualitativa de tales soluciones.

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales en la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{1.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y  $f: (t, x) \in \mathbb{R} \times U \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ , es una función de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ . Respecto al sistema (1.1) se tienen las siguientes definiciones,

1.  $f$  es una función **periódica** en la variable  $t$ , si existe una cantidad positiva  $T$  (llamada periodo) tal que:

$$f(t + T, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times U.$$

2. Una **solución** del sistema (1.1) es una función diferenciable  $\phi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$  que satisface

- $\phi(t) \in U$  para todo  $t \in I$ .
- $\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t))$  para todo  $t \in I$ .

3. Por lo general, es de interés resolver (1.1) sujeta a condiciones prescritas de la incógnita  $x = x(t)$ . Dados  $t_0 \in I$  y  $x_0 \in U$ , el problema de resolver (1.1) bajo la condición  $x(t_0) = x_0$  y que se expresa en la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

se conoce como **problema de valor inicial**. Al valor dado  $x_0$  de la solución desconocida, se le llama **condición inicial**.

La existencia y unicidad local de una solución de (1.1) se garantiza por el siguiente resultado

**Teorema 1.1** (Teorema de Picard-Lindelöf). *Sea  $\mathcal{O} = I_h \times B_r(x_0)$ <sup>1</sup> y  $f: \mathcal{O} \subset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $D$  (donde  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R} \times U$ ) y Lipschitziana en  $x$  con constante de Lipschitz  $L$ . Entonces existe una única solución,  $\phi: I_\delta \rightarrow B_{M\delta}(x_0)$ , del problema de valor inicial (1.2), donde*

$$\delta = \min \{h, r/M, 1/L\}, \quad \text{con} \quad M = \max \{\|f(t, x)\| : (t, x) \in \mathcal{O}\}.$$

A la solución  $\phi = \phi(t, t_0, x_0)$  de (1.2) que proporciona el Teorema 1.1 se le asocia un *intervalo maximal de definición*  $J' = ]w_-, w_+[$  en donde

$$w_- = w_-(t_0, x_0) \text{ y } w_+ = w_+(t_0, x_0)$$

dependen de las condiciones iniciales del problema y un *dominio de definición*  $E \subset \mathbb{R}^{2+n}$  dado por

$$E = \left\{ (t, t_0, x_0) : w_-(t_0, x_0) < t < w_+(t_0, x_0) \right\}.$$

Más aun, dado que  $\phi$  es solución de (1.2), es diferenciable en  $t$  y satisface

$$\dot{\phi}(t, t_0, x_0) = f(t, \phi(t, t_0, x_0)), \quad \phi(t_0, t_0, x_0) = x_0. \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Aquí se hace uso de la notación:  $I_h := [t_0 - h, t_0 + h]$ ,  $B_r(x_0) := \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ .

**Teorema 1.2.** *Bajo las hipótesis previas sobre el conjunto  $E$ , se tiene que  $E$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n+2}$  y  $\phi$  es continua en  $E$ .*

El resultado anterior nos permite obtener la continuidad de  $\phi$  respecto a cada una de las variables,  $t, t_0$  y  $x_0$ , aunque es posible tener aún más regularidad para  $\phi$  si se imponen condiciones apropiadas sobre  $f$ .

**Teorema 1.3.** *Sea  $f : (t, x) \in D \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ , una función continua definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , tal que  $f_x(t, x)$  existe y es continua en  $D$ , entonces la solución general  $\phi(t, t_0, x_0)$  del problema de valor inicial (1.2) satisface  $\phi \in C^1(E, \mathbb{R}^n)^2$ .*

**El caso autónomo.** Cuando la función  $f$  no depende explícitamente de la variable  $t$ , obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = g(x), \quad (1.4)$$

donde  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Un sistema de ecuaciones de la forma (1.4) se llama *autónomo*, puesto que la ley que predice el estado futuro (o pasado) del sistema no depende del instante en que se observe, dicha ley es siempre la misma y solo depende de las variables de estado correspondientes.

Existen tres tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de la forma (1.4): soluciones de equilibrio o soluciones estacionarias, soluciones recurrentes (periódicas, cuasiperiódicas, ...) y variedades integrales. A continuación presentamos dos resultados simples pero importantes sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos.

**Lema 1.1** (Propiedad de traslación). *Suponga que  $\phi(t)$  es una solución de (1.4) en el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ; entonces  $\psi(t) = \phi(t - t_0)$  con  $t_0 \in \mathbb{R}$  es también solución de (1.4).*

*Demostración.* La prueba se sigue del hecho que (1.4) es invariante bajo la transformación  $t \rightarrow t - t_0$ , para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$  fijo. Así pues, si  $\psi(t) = \phi(t - t_0)$  entonces

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\phi}(t - t_0) = g(\phi(t - t_0)) = g(\psi(t)).$$

lo que finaliza la prueba. □

Un hecho importante es que  $\psi(t)$  y  $\phi(t)$  son soluciones distintas de (1.4); más aún, si  $\phi(t)$  satisface

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>  $C^1(E, \mathbb{R}^n) = \left\{ \phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \phi \text{ es derivable en } E \text{ con derivadas parciales continuas en } E \right\}$

entonces  $\psi(t)$  satisface

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

pero  $\psi(t)$  y  $\phi(t)$  tienen la misma órbita en el espacio de fases  $\Omega$ . Por otro lado, el Teorema 1.1 implica que en el espacio de fases las soluciones de (1.4) no se interceptan.

**Definición 1.1.** *Un punto  $x = x_e \in \Omega$  tal que  $g(x_e) = 0$ , se conoce como **punto de equilibrio** de (1.4).*

Note que un punto de equilibrio determina una solución de equilibrio  $x_e(t) = x_e$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , llamada **solución de equilibrio**. De aquí que, de cumplirse el Teorema de existencia y unicidad de soluciones (Teorema 1.1), ninguna solución de equilibrio puede ser límite en tiempo finito de otra solución.

**Definición 1.2.** *Una **solución**  $\phi = \phi(t)$  de (1.4) con  $\phi(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se dice que es **periódica** si existe  $T > 0$  (el periodo) tal que*

$$\phi(t + T) = \phi(t), \forall t, \quad \text{y} \quad \phi(t + s) \neq \phi(t), \forall s \in ]0, T[.$$

**Lema 1.2.** *A toda solución periódica de la ecuación autónoma (1.4) le corresponde una órbita cerrada simple en el espacio de fases  $\Omega$  y a toda órbita cerrada simple en el espacio de fases  $\Omega$  le corresponde una solución periódica de (1.4).*

*Demostración.* El hecho de que la órbita cerrada sea simple, se sigue directamente de la unicidad de soluciones. Por otro lado si  $\phi = \phi(t)$  es una solución periódica de (1.4), entonces  $\phi$  está definida en todo  $\mathbb{R}$  y además  $\phi(0) = \phi(T)$ , probándose que  $C = \{\phi(t), t \in \mathbb{R}\}$  es una órbita cerrada simple.

Supongamos ahora que  $\phi = \phi(t)$  es una solución no trivial de la ecuación (1.4) cuya órbita  $C = \{\phi(t), t \in \mathbb{R}\}$  es una curva cerrada simple. Entonces existen  $\tau_1, \tau_2$  con  $\tau_1 < \tau_2$  tales que  $\phi(\tau_1) = \phi(\tau_2)$ . Defina  $\delta = \tau_2 - \tau_1$ . Note que por el Lema 1.1 la función

$$\psi(t) = \phi(t + \tau_2 - \tau_1) = \phi(t + \delta),$$

también es solución de (1.4), y además

$$\psi(\tau_1 + \delta) = \phi(\tau_2) = \phi(\tau_1),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En consecuencia, por unicidad se cumple que  $\phi(t + \delta) = \phi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Para probar que  $\phi$  es periódica según la definición 1.2, debemos probar que para el conjunto

$$\mathcal{P} = \{\tau > 0 : \phi(t + \tau) = \phi(t), \forall t\},$$

se verifica que  $T = \inf \mathcal{P} > 0$ . Note que  $\mathcal{P}$  es no vacío ya que  $\delta \in \mathcal{P}$ ; más aún,  $m\tau \in \mathcal{P}$  para todo  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $\tau \in \mathcal{P}$ . De la continuidad de la función  $\phi$ , se sigue directamente que  $\mathcal{P}$  es cerrado en  $]0, \infty[$ ; es decir, si  $\tau > 0$  y  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$  con  $\tau_n \rightarrow \tau$  entonces  $\tau \in \mathcal{P}$ . Por contradicción suponga que  $T = 0$ ; entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\tau \in \mathcal{P}$  tal que  $0 < \tau < \epsilon$ . Más aún, fijando dicho valor  $\tau$ , para todo  $c \in \mathbb{R}^+$  existe  $m \in \mathbb{N}/\{0\}$  tal que

$$(m-1)\tau \leq c \leq m\tau \quad \Rightarrow \quad 0 \leq m\tau - c \leq \tau \leq \epsilon.$$

Esto implica que  $c > 0$  es un punto de acumulación de  $\mathcal{P}$ , por tanto  $c \in \mathcal{P}$ . Dado que  $c > 0$  es arbitrario se deduce que  $\phi$  es una función constante de (1.4), esto significa que  $\phi(t) = \phi_*$  es una solución trivial de (1.4) lo cual es una contradicción.  $\square$

### 1.1.1. Teorema de diferenciabilidad respecto a los parámetros

La continuidad de la solución  $\phi(t, t_0, x_0)$  respecto a  $t_0$  y  $x_0$  en el dominio  $E$  se conoce como la **dependencia continua respecto a condiciones iniciales**. Este resultado se enuncia de manera general en el siguiente teorema, en donde se introduce también la dependencia continua respecto a parámetros, la cual utilizaremos más adelante.

**Teorema 1.4** (Derivabilidad respecto a condiciones iniciales y parámetros). *Si  $f(t, x, \lambda)$  tiene derivadas  $f_x, f_\lambda$  continuas<sup>3</sup> respecto a  $x, \lambda$  para  $(t, x) \in D$  y  $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^s$ , entonces la solución  $\phi(t, t_0, x_0, \lambda)$  de*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

*es continuamente diferenciable respecto a las variables  $t, t_0, x_0$  y  $\lambda$  en su dominio de definición*

$$E_\lambda = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : w_-(t_0, x_0, \lambda) < t < w_+(t_0, x_0, \lambda)\} \subset \mathbb{R}^{2+n} \times \mathbb{R}^s.$$

*En virtud de ello, la matriz  $\phi_{x_0}(t, t_0, x_0, \lambda)$  satisface la ecuación lineal variacional,*

$$\dot{Y} = f_x(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) Y,$$

*con condición inicial  $\phi_{x_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = I_n$ . Además,*

$$\phi_{t_0}(t, t_0, x_0, \lambda) = -\phi_{x_0}(t, t_0, x_0, \lambda) f(t_0, x_0, \lambda).$$

*Por último, la matriz  $\phi_\lambda(t, t_0, x_0, \lambda)$  satisface la ecuación lineal*

$$\dot{Y} = f_x(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) Y + f_\lambda(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda),$$

*con condición inicial  $\phi_\lambda(t_0, t_0, x_0, \lambda) = \mathbf{O}_{n \times s}$  (donde  $\mathbf{O}_{n \times s}$  denota la matriz nula).*

**Nota:** Las demostraciones de los Teoremas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 se pueden encontrar en el Capítulo 1 de [14].

<sup>3</sup>A lo largo del documento, para  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow h(x_1, x_2, x_3)$  se denota por  $h_{x_i}$  a la derivada parcial de  $h$  respecto a la variable  $x_i$  donde  $i = 1, 2, 3$

### 1.1.2. El Teorema de la función implícita

En esta sección enunciamos uno de los teoremas más importante del análisis matemático como lo es el *Teorema de la función implícita*, que como es conocido, establece condiciones suficientes bajo las cuales un conjunto de ecuaciones de varias variables permite definir a una (o varias) de ellas como función de las demás. Por tanto, dado un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n > m$  incógnitas de la forma

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

del que se conoce una solución particular  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ; se busca estudiar cuando es posible despejar localmente  $n - k$  variables, por ejemplo  $(x_{k+1}, \dots, x_n)$  en función de las restantes  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . En adelante, se considerará  $m = n - k$  con  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  de tal forma que  $\mathbb{R}^n$  quede identificado con  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ . Así, un elemento de  $\mathbb{R}^n$  se escribirá en la forma  $(x, y)$  donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Usando notación vectorial,  $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $y = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ,  $b = (b_{k+1}, \dots, b_n)$ , teniendo presente lo anterior, el problema de existencia de la función implícita se plantea así, *Dada la ecuación  $g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ , de la que se conoce una solución particular  $g(a, b) = 0_{\mathbb{R}^n}$ , se busca determinar cuando es posible despejar localmente, en un entorno de  $(a, b)$ , a la variable vectorial  $y$  en función de la variable vectorial  $x$ . Para ello, comencemos con la siguiente definición*

**Definición 1.3.** Sea  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en el abierto  $\Omega$  y  $(a, b) \in \Omega$  un punto tal que  $g(a, b) = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Se dice que la ecuación  $g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^n}$  define un entorno de  $(a, b)$  de la variable  $y \in \mathbb{R}^m$  como función implícita de la variable  $x \in \mathbb{R}^k$  si existe una vecindad  $A$  de  $a$  y una vecindad  $B$  de  $b$  tales que  $A \times B \subset \Omega$  y para cada  $x \in A$  hay un único  $y = f(x) \in B$  que verifica  $g(x, f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$ . En este caso se dice que  $f : A \rightarrow B$  es la **función implícita** determinada por  $A \times B$  en la ecuación  $g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ .

Según esta definición, existirá una función implícita cuando se pueda garantizar la existencia de un entorno abierto  $A \times B \subset \Omega$  de  $(a, b)$  tal que  $\{(x, y) \in A \times B : g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$  sea la gráfica de alguna función  $f : A \rightarrow B$ .

**Teorema 1.5** (Teorema de la función Implícita). Sea  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^p(\Omega)$  ( $p \geq 1$ ), definida en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  y  $(a, b) \in \Omega$  un punto que satisface  $g(a, b) = 0$ . Si el determinante jacobiano de las componentes de  $g$  respecto a las variables  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  no se anula en el punto  $(a, b)$ ,

$$\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0,$$

entonces la ecuación  $g(x, y) = 0$  define, en un entorno de  $(a, b)$ , a la variable  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  como función implícita de la variable  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , es decir existe  $A \times B \subset \Omega$ , entorno abierto de  $(a, b)$ , tal que para cada  $x \in A$  hay un único  $y = f(x) \in B$  que verifica  $g(x, y) = 0$ . La función implícita  $f : A \rightarrow B$  es de clase  $\mathcal{C}^p$ .

**Bifurcaciones.** Si bien la definición de bifurcación no es exacta, en general, se puede decir que este fenómeno se refiere a un cambio cualitativo en el comportamiento de un sistema dinámico con algún parámetro de la que depende el sistema cuando varía continuamente. A continuación se dará una breve presentación sobre el concepto de bifurcación en  $\mathbb{R}^n$ . Considere una función  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , con  $\Omega$  subconjunto abierto y  $(x, \lambda) \rightarrow F(x, \lambda)$ . Nos interesa estudiar el conjunto solución de la ecuación

$$F(x, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (1.6)$$

Es de esperar que para (1.6) exista un conjunto inicial de soluciones (triviales). Defina  $\Omega_\lambda = \{x \in \Omega : \lambda \text{ es fijo}\}$ . En tal situación, suponga que para cada  $\lambda \in \Omega_\lambda \cap \mathbb{R}^m$  se verifica que  $F(x_*, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^n}$ , donde  $x_* \in \Omega$ . Al conjunto

$$\Omega_* = \{x_* \in \Omega_\lambda : F(x_*, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^n}, \forall \lambda\},$$

se le conoce como conjunto de soluciones triviales de (1.6).

Sin embargo, para ciertos valores de  $\lambda$  es posible que aparezcan nuevas soluciones de (1.6) **no triviales** que emanan de la rama trivial  $\Omega_*$ , esto es lo que se denomina un **fenómeno de bifurcación**.

**Definición 1.4.** Sea  $U_\lambda \times V_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  un conjunto abierto que contiene a  $(x_0, \lambda_0)$  tal que, para todo  $\lambda \in V_\lambda$ ,  $F(x_0, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Se dice que  $(x_0, \lambda_0)$  es un **punto de bifurcación** de la ecuación (1.6) si para toda vecindad  $B$  de  $(x_0, \lambda_0)$  existe un punto  $(\tilde{x}, \lambda) \in B$  con  $\tilde{x} \neq x$  tal que  $F(\tilde{x}, \lambda) = 0$ .

**Observación 1.1.** La definición anterior garantiza que existe una sucesión  $\{(x_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$  de soluciones no triviales ( $F(x_n, \lambda_n) = 0$ ,  $\forall n$ ) tales que  $x_n \rightarrow x_0$  y  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Como un resultado básico de la teoría de bifurcaciones a continuación se presenta el siguiente resultado que determina una condición necesaria para que se tenga un punto de bifurcación y cuya demostración puede ser consultada en [27].

**Lema 1.3** (Condición necesaria para la bifurcación). Sea  $F : U_\lambda \times V_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ). Si  $(x_0, \lambda_0) \in U_\lambda \times V_\lambda$  es un punto de bifurcación de (1.6); entonces la matriz (formada por las derivadas parciales de  $F$ )  $F_x(x_0, \lambda_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es no invertible.

Los siguientes ejemplos tomados de [16] ilustran el fenómeno de bifurcación.

**Ejemplo 1.1.** Sea  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Considere la función  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$F(x, \mu) = (\beta - \mu)x + C(x)$$

en donde  $\beta \in \mathbb{R}$  es fijo y  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$C(x) = \begin{pmatrix} \gamma x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \gamma x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad \gamma > 0.$$

Calculamos  $F_x(0_{\mathbb{R}^2}, \mu)$  y obtenemos

$$F_x(0_{\mathbb{R}^2}, \mu) = (\beta - \mu)I_2; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los posibles puntos de bifurcación sólo pueden ocurrir en puntos de la forma  $(0_{\mathbb{R}^2}, \beta)$ . Ahora bien, si  $F(x, \mu) = 0_{\mathbb{R}^2}$  con  $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$  y  $\mu \neq \beta$  entonces

$$\gamma x_i(x_1^2 + x_2^2) = (\mu - \beta)x_i, \quad i = 1, 2.$$

En consecuencia  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{\mu - \beta}{\gamma}$ ; lo cual es la ecuación correspondiente a un paraboloide de revolución alrededor del eje  $\mu$ . En este caso se tiene una función continua que emana del punto de bifurcación  $(0_{\mathbb{R}^2}, \beta)$ . Además, observe que no existen soluciones no triviales para  $\mu < \beta$ .

**Ejemplo 1.2.** Sea  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Considere la función  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)x + d(x)$$

en donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es fijo y  $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se define como  $(x_2^3, -x_1^3)^T$ . Tenemos entonces que

$$F_x(0_{\mathbb{R}^2}, \lambda) = (1 - \lambda)I_2.$$

En consecuencia,  $F_x(0_{\mathbb{R}^2}, \lambda)$  no es invertible si  $\lambda = 1$ . Sin embargo,  $(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$  no es un punto de bifurcación. En efecto; si  $(x, \lambda)$  es solución de  $F(x, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^2}$  entonces  $x_1^4 + x_2^4 = 0$ , por lo que las únicas soluciones son  $x_1 = x_2 = 0$ . De esta forma se observa como la condición de singularidad de la matriz  $F(x, \lambda)$  es una condición necesaria pero no suficiente para la bifurcación (ver lema 1.3).

## 1.2. Resultados sobre periodicidad de soluciones

En general, la búsqueda de soluciones periódicas en un sistema de ecuaciones diferenciales no es una tarea fácil; sin embargo, tal objetivo se puede simplificar al considerar las posibles

simetrías del sistema dado. En esta sección, se mostrarán algunos resultados conocidos sobre simetrías y soluciones periódicas para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= f(z, r) \\ \ddot{r} &= g(z, r)\end{aligned}\tag{1.7}$$

**Lema 1.4** (Simetrías). *Sean  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en el conjunto abierto  $\Omega$ ,  $\psi(t) = (z(t), r(t))$  una solución de (1.7) y suponga que  $\forall (a, b) \in \Omega$ :*

$$(I) \quad \begin{cases} f(a, b) = -f(-a, b) \\ g(a, b) = g(-a, b) \end{cases} \quad \text{ó} \quad (II) \quad \begin{cases} f(a, b) = f(-a, b) \\ g(a, b) = g(-a, b) \end{cases}$$

1. *Si se satisfacen las condiciones (I), entonces  $\bar{\psi}_1(t) = (-z(-t), r(-t))$  también es solución de (1.7).*
2. *Si se satisfacen las condiciones (II), entonces  $\bar{\psi}_2(t) = (z(-t), r(-t))$  también es solución de (1.7).*

*Demostración.* Asuma que se satisfacen las condiciones (I) y defina

$$m_1(t) = -z(-t), \quad n_1(t) = r(-t),$$

un cálculo directo muestra que

$$\ddot{m}_1(t) = -f(z(-t), r(-t)) = -f(-m_1(t), n_1(t)) = f(m_1(t), n_1(t)),$$

y también

$$\ddot{n}_1(t) = g(z(-t), r(-t)) = g(m_1(t), n_1(t)),$$

Por tanto,  $\bar{\psi}(t) = (m_1(t), n_1(t))$  es solución de (1.7).

Ahora, asuma que se satisface la condición (II) y defina

$$m_2(t) = z(-t), \quad n_2(t) = r(-t),$$

entonces

$$\ddot{m}_2(t) = f(z(-t), r(-t)) = f(m_2(t), n_2(t)),$$

y también

$$\ddot{n}_2(t) = g(z(-t), r(-t)) = g(m_2(t), n_2(t)),$$

Por tanto,  $\bar{\psi}(t) = (m_2(t), n_2(t))$  es solución de (1.7). □

**Observación 1.2.** *Del Lema (1.4) se deduce lo siguiente:*

1. El sistema (1.7) se puede reescribir como un sistema de primer orden considerando  $z_1 = z$  y  $r_1 = r$ , y así

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \phi(z_1, r_1) \\ \dot{r}_1 &= r_2 \\ \dot{r}_2 &= g(z_1, r_1) \end{cases} \quad (1.8)$$

La condición (I) asegura que (1.8) es invariante bajo la siguiente simetría

$$S_1 : (t, z, \dot{z}, r, \dot{r}) \rightarrow (-t, -z, \dot{z}, r, -\dot{r}).$$

Esto es, dada una solución  $\vartheta(t) = (z(t), \dot{z}(t), r(t), \dot{r}(t))$  de (1.8) entonces  $S_1(\vartheta(t))$  es también solución de (1.8).

De igual forma, si se asume la condición (II) entonces (1.8) es invariante bajo la simetría:

$$S_2 : (t, z, \dot{z}, r, \dot{r}) \rightarrow (-t, z, -\dot{z}, r, -\dot{r}).$$

Es decir, dada una solución  $\vartheta(t) = (z(t), \dot{z}(t), r(t), \dot{r}(t))$  de (1.8) se garantiza que  $S_2(\vartheta(t))$  es también solución de (1.8).

2. Si existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  para el cual  $z(t_0) = 0$  y  $\dot{r}(t_0) = 0$ , se prueba directamente que

$$z(t + t_0) = -z(t_0 - t) \quad y \quad r(t + t_0) = r(t_0 - t). \quad (1.9)$$

En esta situación, lo anterior muestra que  $z(t)$  y  $r(t)$  son respectivamente impar y par respecto al eje  $t = t_0$ .

De otro lado, si existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\dot{z}(t_0) = 0$  y  $\dot{r}(t_0) = 0$ , entonces

$$z(t + t_0) = z(t_0 - t) \quad y \quad r(t + t_0) = r(t_0 - t). \quad (1.10)$$

En esta situación, lo anterior muestra que  $z(t)$  y  $r(t)$  son funciones pares respecto al eje  $t = t_0$ .

**Teorema 1.6** (Simetrías y periodicidad). Sean  $\tau_1, \tau_2$  y  $T$  constantes tales que

1. Si  $\tau_1 < T$  y además

$$z(\tau_1) = z(\tau_1 + T) = 0 \quad y \quad \dot{r}(\tau_1) = \dot{r}(\tau_1 + T) = 0,$$

y no simultáneamente cero en  $]\tau_1, \tau_1 + T[$  entonces  $z$  y  $r$  son funciones impar y par respecto al eje  $\tau_1$  respectivamente y ambas  $2T$ -periódicas.

2. Si  $\tau_2 < T$  y además

$$\dot{z}(\tau_2) = \dot{z}(\tau_2 + T) = 0 \quad y \quad \dot{r}(\tau_2) = \dot{r}(\tau_2 + T) = 0,$$

y no simultáneamente cero en  $]\tau_2, \tau_2 + T[$  entonces  $z$  y  $r$  son funciones pares respecto al eje  $\tau_2$  y ambas  $2T$ -periódicas.

*Demostración.* Sea  $\psi(t) = (z(t), r(t))$  una solución de (1.7) y considere la solución  $\phi(t) = (z(t + 2T), r(t + 2T))$ . Sin pérdida de generalidad, se puede tomar  $\tau_1 = 0$  (en caso contrario considere  $Z(t) = z(t + \tau_1)$  y  $R(t) = r(t + \tau_1)$ ). De la parte 2 en la Observación (1.2) se tiene que la función  $z(t)$  es impar y  $r(t)$  es par, en consecuencia

$$\psi(-T) = (z(-T), r(-T)) = (-z(T), r(T)) = (0, r(T)),$$

$$\dot{\psi}(-T) = (\dot{z}(-T), \dot{r}(-T)) = (\dot{z}(T), -\dot{r}(T)) = (\dot{z}(T), 0).$$

Por otro lado,

$$\phi(-T) = (z(T), r(T)) = (0, r(T)) = \psi(-T),$$

$$\dot{\phi}(-T) = (\dot{z}(T), \dot{r}(T)) = (\dot{z}(T), 0) = \dot{\psi}(-T).$$

Del Teorema de existencia y unicidad, se deduce que  $\phi(t) = \psi(t)$  para todo  $t$ . La demostración de la parte 2 se obtiene de manera análoga.  $\square$

Combinando el Teorema (1.6) se tienen los siguientes resultados sobre las dobles simetrías de la función  $z(t)$ :

**Teorema 1.7.** Sean  $t_0 < T$  fijos.

1. Si  $z(t_0) = 0$  y  $\dot{r}(t_0) = 0$ , y además  $\dot{z}(t_0 + T) = 0$  y  $\dot{r}(t_0 + T) = 0$  entonces  $z(t)$  es una función impar respecto al eje  $t = t_0$ ;  $z(t)$  y  $r(t)$  son funciones pares respecto al eje  $t = T$  y ambas son  $4T$ -periódicas.
2. Si  $\dot{z}(t_0) = 0$  y  $\dot{r}(t_0) = 0$ , y además  $z(t_0 + T) = 0$  y  $\dot{r}(t_0 + T) = 0$  entonces  $z(t)$  y  $r(t)$  son funciones pares respecto al eje  $t = t_0$  y  $z(t)$  es una función impar respecto al eje  $t = T$  y ambas son  $4T$ -periódicas.

*Demostración.* La demostración se hará para la parte 1. Observe que basta analizar únicamente la función  $z(t)$ . De la parte 1 del Teorema 1.6 tenemos que

$$z(t + t_0) = -z(-t + t_0), \tag{1.11}$$

y de la parte 2 del mismo se tiene

$$z(t + t_0 + T) = z(-t + t_0 + T). \tag{1.12}$$

Evaluando  $t = T$  en (1.12):

$$z(t_0 + 2T) = z(t_0) = 0.$$

Entonces  $z(t_0 + 2T) = 0$ . De nuevo, por la parte 1 del Teorema 1.6 se concluye que

$$z(t + 2(2T)) = z(t + 4T) = z(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La parte 2 se hace de manera análoga considerando la segunda parte del teorema 1.6.  $\square$

En adelante, si las funciones  $z(t)$  y  $r(t)$  cumplen las propiedades del Teorema 1.6 parte 1 serán llamadas ***soluciones impares***. De igual forma, si las funciones  $z(t)$  y  $r(t)$  cumplen las propiedades del Teorema 1.7 parte 1 serán llamadas ***soluciones impar-par*** (esto debido a que alrededor de  $t = T$  la función  $z(t)$  es par, mientras que alrededor de  $t = 0$  la función  $z(t)$  es impar).

En [21] el autor presenta ejemplos de soluciones no triviales para los problemas de contorno (3) y (4). Lo que brinda soluciones no triviales de tipo impar y tipo impar-par para el problema de valor inicial (5) (ver figura 1.1).

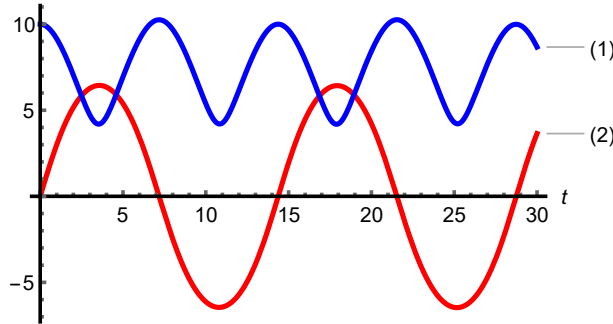


Figura 1.1: La gráfica (2) es la función  $z_3(t)$  y tiene doble simetría mientras la gráfica (1) es la función  $r(t)$  y tiene simetría par. Figura tomada de [21].

Note que la función  $z_3(t)$  tiene periodo  $T = 14,78\dots$  y la función  $r(t)$  tiene periodo  $\frac{T}{2}$ , en este caso se puede evidenciar el fenómeno de doble simetría, ya que respecto a una recta vertical que pase por  $t = \frac{T}{2}$ ,  $z_3(t)$  es *impar* y  $r(t)$  es *par*; sin embargo, ambas son *pares* respecto a una recta vertical que pase por  $t = T$ .

## CAPÍTULO 2

---

### Resultados sobre Mecánica Celeste

---

Desde la antigüedad el hombre ha sido atraído por conocer las causas del movimiento de los astros celestes, en especial los planetas y las estrellas. Han sido varios los personajes que dedicaron gran parte de su vida a este estudio a fin de predecir el movimiento de cada cuerpo que hace parte del firmamento. Al respecto, se pueden citar las contribuciones hechas por Ptolomeo (siglo II d.C.) con la obra *Almagesto* y Nicolás Copérnico (1473-1543) con el trabajo *De revolutionibus orbium coelestium* como los primeros en realizar destacados estudios sobre el movimiento de los planetas. Sin embargo, fue el astrónomo Tycho Brahe (1546-1601) quien propuso que los planetas giraban alrededor del Sol y éste alrededor de la Tierra; dando así, el punto de partida para el posterior desarrollo de lo que hoy se conoce como la *Mecánica Celeste*.

En este capítulo mencionaremos los resultados más importantes en torno al problema de  $N$ -cuerpos, tomando como referencia [20], tales resultados nos servirán de base para desarrollar las ideas expuestas sobre Mecánica Celeste en este trabajo. Para más detalles puede consultar [1] y [15].

### 2.1. Leyes del movimiento de los planetas

Hacia el siglo XVI se dió un avance importante en el campo de la mecánica celeste cuando Johannes Kepler (1571-1630), recopilando los datos de Brahe, realizó un importante trabajo de síntesis que le permitió formular sus tres famosas leyes en la obra *Astronomia Nova* (escrita entre 1609 y 1619) que a continuación presentamos.

**Primera Ley de Kepler:** *Los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.*

**Segunda Ley de Kepler:** *El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*

**Tercera Ley de Kepler:** *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol.*

Si bien fue Kepler quien postuló estas tres leyes para explicar el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del sol; es Isaac Newton (1642-1727) con la Teoría de la Gravedad y la Ley de Gravitación Universal quien unifica la dinámica celeste y terrestre, ofreciendo así una explicación natural de las leyes de Kepler como consecuencia de la atracción gravitacional que sufren los cuerpos.

**Primera Ley de Newton:** *En ausencia de fuerzas externas, un cuerpo, o bien permanece en reposo, o bien sigue un movimiento rectilíneo uniforme.*

Esta primera ley también es conocida como Principio de Galileo o Ley de la inercia, en que los objetos permanecerán en su estado de movimiento cuando no actúan fuerzas externas sobre el mismo para cambiar su movimiento.

**Segunda Ley de Newton:** *La aceleración  $\mathbf{a}$  que adquiere un cuerpo de masa  $m$ , bajo la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$ , es directamente proporcional a la fuerza  $\mathbf{F}$  e inversamente proporcional a la masa  $m$ , esto también se plantea como  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .*

Nótese también que cuando la fuerza resultante es nula ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ) entonces la aceleración también será nula ( $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ) siempre que  $m > 0$ . Este resultado concuerda completamente con la primera ley de Newton.

**Tercera Ley de Newton:** *Siempre que un cuerpo 1 ejerza una fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  sobre otro cuerpo 2, este segundo cuerpo ejerce una fuerza  $\mathbf{F}_{21}$  igual y de sentido contrario sobre el primero:  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ .*

Es decir que, no hay fuerzas aisladas; para cada fuerza externa que actúa sobre un objeto siempre hay otra fuerza de igual magnitud pero en sentido opuesto, que actúa sobre el objeto que ejerce esa fuerza externa (Ley de acción y reacción).

Además Newton encontró que la fuerza con que se atraen dos cuerpos de diferente masa depende sólo del valor de sus masas y del cuadrado de la distancia que los separa.

**Ley de la gravitación universal:** *La magnitud de la fuerza  $\mathbf{F}$  ejercida entre dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  que se atraen mutuamente y están separados una distancia  $r$  en un sistema de coordenadas, es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.*

Esta ley se expresa en la forma,

$$\|\mathbf{F}\| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

La constante  $G$  que aparece en (2.1) se llama **constante de gravitación universal**.

Un dato interesante publicado en 2014 (ver [28]) ofrece un nuevo valor para esta constante  $G$  a partir de una técnica conocida como *interferometría cuántica de átomos fríos*. Su resultado es  $6,67191 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2\text{kg}$  con un error relativo del 0,015 %.

De esta ley se deduce que para grandes distancias de separación entre los cuerpos, dicha fuerza de atracción actúa como si toda la masa de cada uno de los cuerpos estuviera concentrada únicamente en su centro de gravedad (como si dichos objetos fueran un solo punto), lo cual permite reducir enormemente la complejidad de las interacciones entre cuerpos.

## 2.2. El problema de Kepler

La ecuación de Kepler es una de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica Celeste, pues por medio de ella se puede determinar en cada instante de tiempo, la posición de un cuerpo que se encuentra sometido a la atracción gravitatoria de otro cuerpo que está fijo. Por lo que su solución, se puede pensar como la respuesta al *Problema de Kepler*.

**Problema de Kepler:** Suponga que se tiene un sistema formado por un cuerpo muy masivo de masa  $M$  que se encuentra en el origen de coordenadas el cual ejerce una fuerza de atracción  $\mathbf{F}$  sobre otro cuerpo de masa  $m$  ubicado en algún punto  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  a una distancia  $r$  del primero (ver figura 2.1).

De la Ley de atracción gravitacional y de la segunda Ley de Newton se tiene que la posición  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  del cuerpo de masa  $m$  satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = f(\|\mathbf{r}(t)\|) \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}, \quad (2.2)$$

donde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que  $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$  con  $\mu = GM$  es una constante positiva y  $r = \|\mathbf{r}(t)\|$ .

La ecuación (2.2) es conocida como la **ecuación de Kepler** y su importancia radica en el hecho de que describe la posición del cuerpo de masa  $m$  en cada instante.

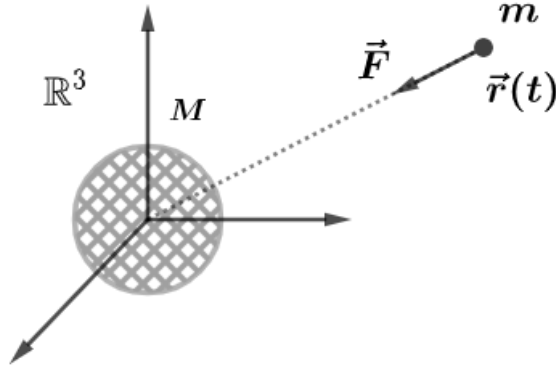


Figura 2.1: Un cuerpo masivo ubicado en el origen que atrae al otro con una fuerza  $\mathbf{F}$ . Fuente: Elaboración propia.

Un hecho importante que caracteriza el movimiento  $\mathbf{r}(t)$  de un cuerpo sometido a una fuerza  $\mathbf{F}$  y que satisface (2.2) es la conservación de su momento angular.

**Definición 2.1.** Sea  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  que representa el vector de posición de un cuerpo que se mueve en el espacio. Se define su **momento angular** como la función  $\mathbf{L} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida para todo  $t \in I$  por el producto vectorial usual en  $\mathbb{R}^3$  entre  $\mathbf{r}(t)$  y  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ :

$$\mathbf{L}(t) := \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t).$$

**Proposición 2.1.** Si un cuerpo se mueve en el espacio de tal forma que su trayectoria  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  satisface la ecuación (2.2), entonces su momento angular  $\mathbf{L}$  es un vector constante.

*Demostración.* Puesto que  $\mathbf{r}(t)$  y  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  son funciones de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  y el producto vectorial es bilineal, se tiene que

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \frac{f(\|\mathbf{r}\|)}{\|\mathbf{r}\|}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Por tanto, el momento angular del cuerpo es un vector  $\mathbf{L}$  constante.  $\square$

Suponga que si  $\mathbf{L} \neq 0$  y sea  $\pi = \mathbf{L}^\perp$  el plano ortogonal a  $\mathbf{L}$  que pasa por el origen. Entonces  $\mathbf{r}(t) \in \pi$ , para todo  $t \in I$  y así, el movimiento es plano (ver figura 2.2).

Suponga que  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$  es una solución de la ecuación (2.2), al expresarla en coordenadas polares

$$\mathbf{r}(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in I.$$

Luego, al derivar y sustituir en (2.2) se encuentra que

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r), \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

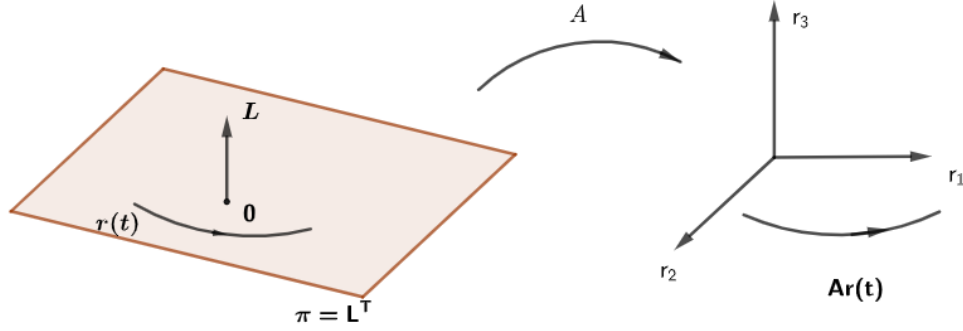


Figura 2.2: Simetría que transforma el plano  $\pi$  en el plano  $r_1r_2$ . Figura tomada de [20].

Es decir que  $r$  y  $\theta$  satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = f(r), \quad \dot{\theta} = \frac{c}{r^2}, \quad (2.3)$$

donde  $c = \|\mathbf{L}\| = r_1(t)\dot{r}_2(t) - r_2(t)\dot{r}_1(t)$ .

Note también que el sistema está desacoplado en el sentido de que fijado el valor  $c > 0$  se puede resolver la primera ecuación y luego obtener  $\theta$  a partir de la segunda:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{c}{r^2(s)} ds, \quad t \in I.$$

Ahora bien, en (2.3) se utiliza un cambio de variable debido a Clairaut (para más detalles consultar la proposición 2.3 dada en [20]) y válido para  $c \neq 0$  con el fin de resolver

$$\ddot{r}(t) = f(r(t)) + \frac{c^2}{r^3(t)}, \quad r > 0. \quad (2.4)$$

Además se tiene que  $\theta = \theta(t) > 0$  es un difeomorfismo entre su dominio  $I$  y su imagen  $J = \theta(I)$ . Sea  $v = \theta^{-1}$  la función inversa de  $\theta$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho : I &\rightarrow I \rightarrow (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \\ \theta &\rightarrow v(\theta) = t \rightarrow r(v(\theta)) \rightarrow \frac{1}{r(v(\theta))} = \rho(\theta). \end{aligned}$$

Así que si  $\theta = \theta(t)$  satisface  $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$ , se tiene

$$\rho(\theta(t)) = \frac{1}{r(v(\theta(t)))} = \frac{1}{r(t)}.$$

Derivando dos veces y sustituyendo esta derivada en (2.4) se tiene

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = -\frac{1}{c^2\rho^2}f\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (2.5)$$

Haciendo  $f = -\frac{\mu}{r^2}$  donde  $\mu > 0$  en (2.5) se tiene

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\mu}{c^2},$$

cuyas soluciones tienen la forma

$$\rho(\theta) = \frac{\mu}{c^2} + A \cos(\theta - \omega), \quad \omega \in [0, 2\pi[, \quad A > 0.$$

Así que  $r = 1/\rho(\theta)$  se expresa como

$$r = r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (2.6)$$

que es justamente la ecuación paramétrica de una elipse  $\mathcal{E}$  con excentricidad  $e = c^2 A/\mu$  y semieje mayor  $\bar{a} = \frac{c^2/\mu}{1 - e^2}$ . De esta forma se recupera la primera Ley de Kepler. Más aún, a partir de este hecho se demuestra que el intervalo maximal de definición de  $r = r(t)$  (y por ende, de todas las soluciones de (2.2)) es  $I = \mathbb{R}$ .

De otro lado, si se considera el dominio  $\mathcal{D}_{a,b} = \{m \mathbf{r}(t) : t \in ]a, b[, m \in ]0, 1[ \}$  un cálculo directo permite demostrar que su área esta dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}_{a,b}) = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(t) \dot{\theta}(t) dt,$$

deduciéndose a partir de la ecuación (2.3) que  $\text{área}(\mathcal{D}_{a,b}) = c(b - a)/2$ , lo cual verifica la segunda Ley de Kepler. Este hecho permite encontrar una expresión para el periodo mínimo  $p$  de la órbita  $r = r(\theta)$ . En efecto, tomando los dominios  $\mathcal{D}_{0,p/2}$  y  $\mathcal{D}_{p/2,p}$  se tiene

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{D}_{0,p/2}) + \text{área}(\mathcal{D}_{p/2,p}) &= \text{área}(\mathcal{E}), \\ \frac{cp}{2} &= \pi \bar{a}^2 \sqrt{1 - e^2}, \end{aligned}$$

de donde

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \bar{a}^{3/2}. \quad (2.7)$$

Lo que comprueba la tercera Ley de Kepler.

Se puede apreciar que la ecuación (2.6) da una relación explícita de  $r$  en términos del argumento  $\theta$ . Así que, si se quiere dar una expresión de  $r$  en términos de  $t$ , debemos considerar el uso de una parametrización de la elipse  $\mathcal{E}$  por medio de lo que se conoce como su *anomalía excéntrica*.

Con este propósito y sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el eje de excentricidad tiene dirección y sentido del vector  $e_1 = (1, 0)$ , esto es  $\omega = 0$ . Posteriormente, se considera la transformación

$$\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow (x - ea, \sqrt{1 - e^2}y),$$

que es una aplicación biyectiva que envía una circunferencia  $C$  de radio  $a$  con centro en el origen, en la elipse  $\mathcal{E}$ . Parametrizando  $C$  en coordenadas polares

$$(a \cos u, a \sin u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

se deduce

$$\Gamma(u) = a(\cos u - e, \sqrt{1 - e^2} \sin u), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Las consideraciones anteriores permiten definir la **anomalía excéntrica** de un punto  $P$  sobre  $\mathcal{E}$  como el ángulo  $u$  tomado desde el eje de excentricidad hasta el vector  $\overrightarrow{CP'}$  con centro  $C(-ea, 0)$  (ver figura 2.3).

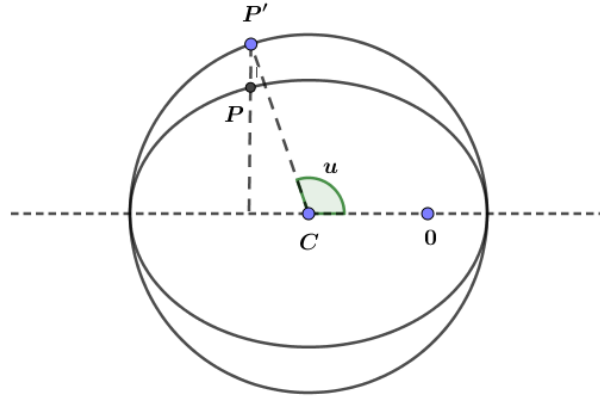


Figura 2.3: *Parametrización de una trayectoria elíptica por medio de la anomalía excéntrica.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

Ahora bien, si  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$  es una solución de (2.2), de la parametrización por anomalía excéntrica (2.8) de la elipse  $\mathcal{E}$  se deduce que

$$\begin{cases} r_1(t) = \bar{a}(\cos u(t) - e), \\ r_2(t) = \bar{a}\sqrt{1 - e^2} \sin u(t). \end{cases} \Rightarrow r(t) = \bar{a}(1 - e \cos u(t)) \quad (2.9)$$

donde  $u = u(t)$  satisface la ecuación diferencial de primer orden separable

$$\dot{u} = \frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}^{3/2}(1 - e \cos u)},$$

y cuya solución está dada por

$$u(t) - e \sin u(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}^{3/2}}(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Puesto que  $\dot{u} \geq \frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}^{3/2}(1 + e)} > 0$ , se tiene que  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo, por lo que se puede definir su función inversa  $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \rightarrow t(u)$  dada por

$$t(u) = t_0 + \frac{\bar{a}^{3/2}}{\sqrt{\mu}}(u - e \sin u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

De esta última expresión se puede deducir de nuevo y en forma analítica la expresión del periodo mínimo  $p$  de una solución de (2.2) que describe la elipse  $\mathcal{E}$ , en efecto:

$$p = t(2\pi) - t(0) = 2\pi \frac{\bar{a}^{3/2}}{\sqrt{\mu}}, \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} \bar{a}^3,$$

lo que verifica la tercera Ley de Kepler.

Así pues, se han obtenido un conjunto de fórmulas para el movimiento del cuerpo de masa  $m$  bajo el campo gravitatorio Newtoniano, con el supuesto que los ejes de la elipse  $\mathcal{E}$  coinciden con los ejes cartesianos. Dichas fórmulas están dadas por

$$\begin{cases} r_1(t) = \bar{a}(\cos u(t) - e), \\ r_2(t) = \bar{a}\sqrt{1 - e^2} \sin u(t), \\ u(t) - e \sin u(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}^{3/2}}(t - t_0), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

En resumen, los cálculos anteriores brindan un bosquejo de la prueba general del siguiente teorema, cuya demostración detallada puede consultarse en [1] o en [20].

**Teorema 2.1.** *Sea  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , un movimiento en un campo gravitatorio Newtoniano:*

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{-\mu}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} \mathbf{r}(t),$$

con momento angular  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$  y  $c = \|\mathbf{L}\|$ .

Entonces  $\mathbf{r}(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , es periódica con periodo mínimo  $p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \bar{a}^{3/2}$  y describe una órbita

elíptica con el origen en uno de sus focos, excentricidad  $e \in [0, 1[$  y semieje mayor  $\bar{a} = \frac{c^2/\mu}{1 - e^2}$ .

## 2.3. El problema de $N$ -cuerpos

El problema de  $N$ -cuerpos es un modelo matemático formulado por primera vez en 1685 por Isaac Newton con el fin de modelar el comportamiento de los cuerpos que hacen parte del Sistema Solar. En términos generales su planteamiento es el siguiente:

*Considere  $N$  cuerpos de masa  $m_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  en un sistema de referencia inercial tridimensional moviéndose bajo la Ley de gravitación universal, determinar la posición y la velocidad de cada cuerpo en cualquier instante.*

De manera más precisa:

Suponga  $N$ -cuerpos  $p_1, p_2, \dots, p_N$  en un sistema de coordenadas euclidiano tridimensional con masa  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  respectivamente, donde la posición  $\mathbf{r}$  de cada cuerpo está descrita por una función vectorial:

$$\mathbf{r}_j : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), \quad i = 1, \dots, N,$$

Además, los cuerpos se mueven bajo el efecto de la Ley de gravitación universal. En consecuencia, por la segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento para el cuerpo  $i$ -ésimo,  $i = 1, \dots, N$  está dada por:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}, \quad (2.11)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $\|\cdot\|$  denota la distancia euclidiana entre los cuerpos.

Como dos cuerpos no se pueden ubicar en la misma posición, se excluyen los *conjuntos de colisión*  $\Delta_{ij}$  definidos como:

$$i < j, \quad \Delta_{ij} = \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\}.$$

Cada  $\Delta_{ij}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{3N}$  de dimensión  $3N - 3$ . Defina:

$$\Delta = \bigcup_{1 < i < j < N} \Delta_{ij}.$$

Considere el cono<sup>1</sup> abierto  $\Omega = \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$ . Las soluciones del problema de  $N$ -cuerpos serán entonces funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty$ ,

$$\mathbf{r} : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega, \quad \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

---

<sup>1</sup>Un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es un **cono** si para todo  $\mathbf{r} \in \Omega$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\lambda \mathbf{r} \in \Omega$ .

que satisfacen

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

donde

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_1 I_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 I_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N I_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N \end{pmatrix}$$

Desde su formulación, se han establecido diversas y muy interesantes propiedades del problema de  $N$ -cuerpos al igual que del comportamiento cualitativo de sus soluciones para el caso general y/o en casos particulares (consultar [1, 20, 21, 27]9. A continuación, se presentan algunas de dichas propiedades.

**Proposición 2.2.** *El campo  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  es **conservativo**; es decir, existe una función  $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $\mathbf{F} = -\nabla \mathcal{V}$ .*

*Demostración.* Por simplicidad, denote  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  donde  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in \Omega$ . La función  $\mathcal{V}$  se llama *potencial newtoniano* y en este caso viene dada por

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|},$$

Así, las ecuaciones de los  $N$ -cuerpos se pueden escribir en la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Defina la *energía cinética*  $\mathcal{T}(t)$  y la *energía mecánica total*  $\mathcal{H}(t)$  de una solución  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  como

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t)\|^2, \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{V}(\mathbf{r}(t)),$$

respectivamente. Se afirma que  $\mathcal{H}(t)$  es una cantidad conservada. En efecto, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno usual en  $\mathbb{R}^N$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \langle \ddot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{r}_i}, \dot{\mathbf{r}}_i \right\rangle, \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{r}_i}, \dot{\mathbf{r}}_i \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

por lo que  $\mathcal{H}(t)$  es una función constante. □

**Proposición 2.3.** *El problema de N-cuerpos (2.11) no posee soluciones de equilibrio.*

*Demostración.* Por contradicción, suponga que el sistema (2.11) admite una solución constante  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ . En tal caso,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

Puesto que  $\mathcal{V}$  es una función homogénea de grado  $s = -1$ , del Teorema de Euler<sup>2</sup> aplicado en el cono  $\Omega$ , si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar usual, se deduce que

$$0 = \langle \nabla \mathcal{V}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle = -\mathcal{V}(\mathbf{r}),$$

lo cual es una contradicción. □

**Proposición 2.4.** *Sea  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  una solución del problema de N-cuerpos (2.11) con intervalo maximal de definición  $]w_-, w_+[$ . Defina la función*

$$\gamma(t) = \min \{ \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\| : 1 \leq i < j \leq N \}$$

*Si  $w_+ < \infty$  (o  $w_- > -\infty$ ) entonces  $\gamma(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow w_+$  (o  $t \rightarrow w_-$ )*

La demostración de este resultado es consecuencia del Teorema de existencia y prolongación de soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas. Para más detalles se remite al lector a [1, 20].

El resultado anterior permite afirmar que si bajo cierta configuración N-cuerpos están siempre a una distancia positiva, entonces la correspondiente solución está definida en  $] -\infty, \infty[$ .

### 2.3.1. Caso particular: El problema de 2-cuerpos

Uno de los problemas más estudiados en la teoría de mecánica celeste es el problema de 2-cuerpos. Esto se debe en parte a que es simple de plantear, es de baja dimensión y es uno de los pocos problemas cuya solución completa se logra a través de un adecuado uso de cantidades conservadas (también llamadas integrales de movimiento). De hecho, algunas de las técnicas de perturbación desarrolladas para abordar problemas de 3 o más cuerpos, descansan en la solución del problema de 2-cuerpos [26].

Considere dos cuerpos en  $\mathbb{R}^3$  de masa  $m_1$  y  $m_2$  que se mueven de acuerdo a la Ley de gravitación. Entonces, sus trayectorias  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$  y  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$  de acuerdo a (2.11) satisfacen

---

<sup>2</sup>El Teorema de Euler para funciones homogéneas dice que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es homogénea y diferenciable de grado  $k$ , entonces para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se verifica  $\langle \nabla f(x), x \rangle = kf(x)$

las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Sea  $\Delta_2 = \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2\}$  y defina  $\Omega = \mathbb{R}^6 \setminus \Delta_2$ . Una solución de (2.12) debe ser una función regular  $\varphi(t) = (\bar{\mathbf{r}}_1(t), \bar{\mathbf{r}}_2(t))$  tal que

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega, \quad t \rightarrow \varphi(t).$$

Hay dos grupos de movimientos en el espacio que actúan sobre las soluciones,

1. **Traslaciones** de  $\mathbb{R}^3$ : Dado  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  y una solución  $\varphi(t)$  de (2.12), entonces

$$\phi(t) = (\bar{\mathbf{r}}_1(t) + \mathbf{a}, \bar{\mathbf{r}}_2(t) + \mathbf{a}),$$

es también una solución [20].

2. **Isometrías** de  $\mathbb{R}^3$ : Dada una matriz ortogonal  $A \in \mathcal{O}(3)$  y una solución  $\varphi(t)$  de (2.12), entonces

$$\phi(t) = (A\bar{\mathbf{r}}_1(t), A\bar{\mathbf{r}}_2(t)),$$

es también una solución [20].

La propiedad 1 se generaliza en lo que se conoce como **Principio de Galileo**:

*Dada una solución  $\varphi(t)$  y constantes  $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , entonces*

$$\phi(t) = (\bar{\mathbf{r}}_1(t) + \mathbf{p} + \mathbf{v}t, \bar{\mathbf{r}}_2(t) + \mathbf{p} + \mathbf{v}t),$$

*también es solución.*

Así, partiendo de una solución  $\varphi(t) = (\bar{\mathbf{r}}_1(t), \bar{\mathbf{r}}_2(t))$ , defina su centro de masas

$$\bar{\mathcal{C}}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{\mathbf{r}}_1(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{\mathbf{r}}_2(t),$$

Derivando y aplicando la segunda y tercera ley de Newton

$$\ddot{\bar{\mathcal{C}}}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_1(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_2(t) = \mathbf{0},$$

esto significa que el centro de masas se desplaza a velocidad constante  $\bar{\mathcal{C}}(t) = \alpha + \beta t$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ .

Dada una solución  $\varphi(t)$  al problema de dos cuerpos, usando el principio de Galileo se tiene que  $\phi(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))$  con

$$\mathbf{r}_1(t) = \bar{\mathbf{r}}_1(t) - \alpha - \beta t, \quad \mathbf{r}_2(t) = \bar{\mathbf{r}}_2(t) - \alpha - \beta t,$$

también es solución con su centro de masas ahora en el origen

$$\mathcal{C}(t) = \bar{\mathcal{C}}(t) - \alpha - \beta t = \mathbf{0}.$$

De lo anterior se deduce que

$$\mathbf{r}_2(t) = -\frac{m_1 \mathbf{r}_1(t)}{m_2}.$$

Por lo tanto, al sustituir esta última ecuación en (2.12) se obtiene

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = -\left( \frac{G m_i m_j^3}{(m_i + m_j)^2 r_i^2} \right) \frac{\mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_i(t)\|}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j,$$

con  $\tilde{\mu}_{i,j} = \frac{G m_j^3}{(m_i + m_j)^2}$ , la última ecuación se reescribe como:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = -\left( \frac{\tilde{\mu}_{i,j}}{r_i^2} \right) \frac{\mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_i(t)\|}, \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Es decir, cada cuerpo se mueve resolviendo una ecuación de Kepler como la presentada en (2.2). De aquí que, los momentos angulares  $\mathbf{L}_{\mathbf{r}_1} = \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1$  y  $\mathbf{L}_{\mathbf{r}_2} = \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2$  de cada cuerpo son constantes. En particular, si  $\|\mathbf{L}_{\mathbf{r}_1}\| \neq 0$  entonces cada cuerpo describe una órbita elíptica como solución del problema de Kepler.

## CAPÍTULO 3

---

### El problema de $N$ -cuerpos poligonal

---

Una vez conocida la solución del problema de 2-cuerpos a través del problema de Kepler, la atención de todos los científicos (incluido el mismo Newton), se enfocó en la búsqueda de una solución al problema de  $N$ -cuerpos para  $N \geq 3$ . En principio, fueron Euler, Lagrange y Laplace quienes considerando casos particulares, intentaron aproximarse a una solución analítica del problema de 3-cuerpos. Fue hasta 1889, cuando la búsqueda de soluciones del problema de 3-cuerpos volvió a tener un impacto significativo en la comunidad científica. Esto debido a Henri Poincaré (en su obra *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [25]) quien estableció que para  $N \geq 3$ -cuerpos es imposible resolver las ecuaciones de movimiento reduciendo la dimensión del sistema con la ayuda de primeras integrales (funciones que se mantienen constantes a lo largo de cualquier solución dada). Desde el trabajo de H. Poincaré, para el problema general de  $N \geq 3$ -cuerpos se han hecho muchos avances sobre la existencia y el comportamiento de soluciones para casos particulares que involucran muchas simplificaciones, por ejemplo: configuraciones con muchas simetrías, problemas con cuerpos de masa infinitesimal (llamados problemas restringidos de  $N$ -cuerpos), configuraciones planares, entre otras (ver [2, 4, 6, 10, 12, 13])

En este capítulo se presentarán las ecuaciones de movimiento de una configuración particular del problema de  $N$ -cuerpos, al igual que unos resultados analíticos sobre sus posibles soluciones periódicas.

### 3.1. Ecuaciones de movimiento

Considere un sistema de coordenadas tridimensional en el cual se tiene  $(N - 1)$ -cuerpos  $P_1, P_2, \dots, P_{N-1}$  cada uno de masa  $m$  y un  $N$ -ésimo cuerpo  $P_N$  con masa  $M \geq 0$ . Asuma que en cada instante, la posición del cuerpo  $P_1$  está dada por el vector  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y que la posición  $\mathbf{r}_j$  de cada cuerpo  $P_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, N - 1$  satisface

$$\mathbf{r}_j = \mathcal{A}^{j-1} \mathbf{r}_1, \quad \text{en donde} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & \Lambda^{tr} \\ \Lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

con  $\Lambda = (0, 0)$  y

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{N-1}) & -\sin(\frac{2\pi}{N-1}) \\ \sin(\frac{2\pi}{N-1}) & \cos(\frac{2\pi}{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Esta configuración donde los cuerpos  $P_1, P_2, \dots, P_{N-1}$  se encuentran ubicados en los vértices de un polígono de  $(N - 1)$ -lados, se denominará *Problema espacial poligonal de  $(N - 1)$ -cuerpos*. En adelante suponga que la posición y la velocidad del cuerpo  $P_1$  (respecto al origen) están dadas respectivamente por

$$\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \quad \dot{\mathbf{r}}_1(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t)),$$

con condiciones iniciales

$$\mathbf{r}_1(0) = (x_1(0), y_1(0), z_1(0)), \quad \dot{\mathbf{r}}_1(0) = (0, \dot{y}_1(0), \dot{z}_1(0)), \quad (3.2)$$

y que el  $N$ -ésimo cuerpo  $P_N$  tiene vector posición y velocidad dados por

$$\mathbf{r}_N(t) = (x_N(t), y_N(t), z_N(t)), \quad \dot{\mathbf{r}}_N(t) = (\dot{x}_N(t), \dot{y}_N(t), \dot{z}_N(t)),$$

con condiciones iniciales

$$\mathbf{r}_N(0) = (0, 0, z_N(0)), \quad \dot{\mathbf{r}}_N(0) = (0, 0, \dot{z}_N(0)).$$

De lo anterior se deduce que las posiciones y velocidades iniciales de los cuerpos  $P_1, \dots, P_{N-1}$  son simétricas respecto al eje  $z$  y que el cuerpo  $P_N$  se mueve siempre sobre dicho eje pasando por el centro de masa del sistema que se ubica en el origen.

Así, el *problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos* consiste en describir el movimiento de los cuerpos  $P_1, \dots, P_N$  en cada instante de tiempo  $t$ .

Eligiendo un sistema de coordenadas cilíndricas

$$x_1 = r \cos \theta, \quad y_1 = r \sin \theta, \quad z_1 = z_1,$$

se puede comprobar (consultar el Apéndice A) que las ecuaciones de movimiento del problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos están dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda_N}{r^2} + \frac{Mr}{h^3(r, z_N)} &= 0, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{z}_N + \sigma z_N/h^3(r, z_N) &= 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

en donde

$$\lambda_N = \frac{m}{4} \sum_{j=1}^{N-2} \csc\left(\frac{\pi j}{N-1}\right), \quad \sigma = (N-1)m + M, \quad \text{y} \quad h(r, z_N) = [r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{1/2}.$$

Al multiplicar la segunda ecuación en (3.3) por  $r$  se deduce que

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}r^2 = \nu, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

lo que brinda justamente la integral de movimiento de momento angular  $\nu$ . En lo que sigue, se van a considerar soluciones del sistema (3.3) con momento angular  $\nu \neq 0$  (en particular, no se consideran posibles colisiones entre los cuerpos). Más aún, un cálculo directo muestra que

$$\nu = x_1(t)\dot{y}_1(t) - y_1(t)\dot{x}_1(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

A partir de este supuesto, se tiene un interesante resultado sobre la invarianza de diagrama de fases respecto al momento angular (consultar [7]).

**Proposición 3.1.** Sean  $\hat{\nu}, \nu \neq 0$  con  $\hat{\nu} = \beta^{1/2}\nu$  y  $\psi_\nu = (r, \theta, z_N)$  una solución de (3.3) con momento angular  $\nu \neq 0$ . Defina

$$R(t) = \beta r(\beta^{-3/2}t), \quad \Theta(t) = \theta(\beta^{-3/2}t), \quad Z_N(t) = \beta z_N(\beta^{-3/2}t).$$

Entonces  $\hat{\Psi}_{\hat{\nu}} = (R, \Theta, Z_N)$  es también solución de (3.3) con momento angular  $\hat{\nu}$ .

*Demostración.* Definiendo  $\tau = \beta^{-3/2}t$ , un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \ddot{R}(t) &= \beta^{-2} \left( r(\tau)\dot{\theta}(\tau)^2 - \frac{\lambda_N}{r^2(\tau)} + \frac{Mr(\tau)}{h^3(r(\tau), z_N(\tau))} \right), \\ &= \beta^{-2} \left( \beta^2 R(t)\Theta(t) - \frac{\beta^2 \lambda_N}{R^2(t)} + \frac{\beta^2 Mr(\tau)}{h^3(R(t), Z_N(t))} \right), \\ &= R(t)\Theta(t) - \frac{\lambda_N}{R^2(t)} + \frac{MR(t)}{h^3(R(t), Z_N(t))}. \end{aligned}$$

De igual forma se comprueba

$$2\dot{R}(t)\dot{\Theta}(t) - R(t)\ddot{\Theta}(t) = \beta^{-2}(2\dot{r}(\tau)\dot{\theta}(\tau) - r(\tau)\ddot{\theta}(\tau)) = 0,$$

y

$$\ddot{Z}_N(t) = -\beta^{-2} \left( \frac{\sigma z_N(\tau)}{h^3(r(\tau), z_N(\tau))} \right) = -\frac{\sigma Z_N(t)}{h^3(R(t), Z_N(t))},$$

probándose así que  $\hat{\Psi}$  es solución de (3.3). Por último, el nuevo momento angular está dado por

$$\hat{\nu} = \dot{\Theta}R^2 = \beta^{1/2}\dot{\theta}r^2 = \beta^{1/2}\nu,$$

lo que completa la demostración.  $\square$

Ahora bien, asumiendo un momento angular  $\nu \neq 0$ , se puede desacoplar la última ecuación en el sistema (3.3) y obtener así un sistema de ecuaciones reducido dado por

$$\begin{aligned} \ddot{z}_N + \frac{\sigma z_N}{h^3(r, z_N)} &= 0, \\ \ddot{r} - \frac{\nu^2}{r^3} + \frac{\lambda_N}{r^2} + \frac{Mr}{h^3(r, z_N)} &= 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

con

$$\dot{\theta} = \frac{\nu}{r^2} \quad \text{y} \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{\nu}{r^2(s)} ds. \tag{3.6}$$

En resumen, todas las consideraciones anteriores presentan una solución explícita del problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos. Más aún, dado que todas las soluciones de (2.11) (con excepción de aquellas que admiten colisiones), están bien definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se deduce que todas las soluciones de (3.3) también están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Configuración inicial del problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos.** Ya presentada una fórmula general para la solución del problema de  $N$ -cuerpos poligonal, en adelante se fijará una configuración inicial de los cuerpos. Esto es, suponga que en (3.2), el cuerpo  $P_1$  tiene condiciones iniciales dadas por

$$\mathbf{r}_1(0) = (r_0, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{r}}_1(0) = (0, a, -\varepsilon b),$$

mientras que el cuerpo  $P_N$  tiene condiciones iniciales

$$\mathbf{r}_N(0) = (0, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{r}}_N(0) = (0, 0, b),$$

con  $r_0, a, b \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon = \frac{M}{(N-1)m}$ . Luego, de (3.4) se deduce que  $\nu = ar_0$ .

Lo expuesto anteriormente, permite afirmar que el siguiente teorema determina una solución del problema de  $N$ -cuerpos poligonal

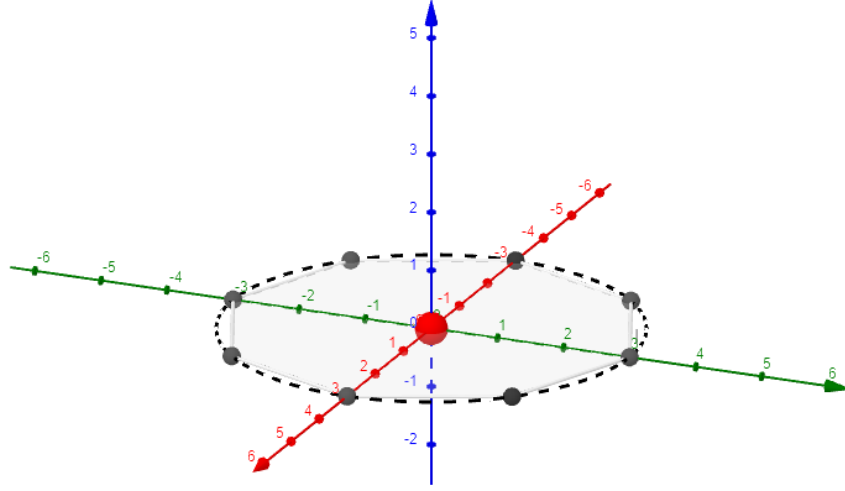


Figura 3.1: Configuración espacial para el problema de 8 cuerpos. Fuente: Elaboración propia.

**Teorema 3.1.** Sean  $r_0, m, M > 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Las funciones

$$\mathbf{r}_N(t) = (0, 0, z_N(t)), \quad \mathbf{r}_j(t) = \mathcal{A}^{j-1} \mathbf{r}_1(t), \quad j = 1, \dots, N-1,$$

con  $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  dada por (3.1) y

$$\mathbf{r}_1(t) = \left( r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)), -\frac{M}{(N-1)m} z_N(t) \right),$$

tales que

$$z_N(0) = 0, \quad \dot{z}_N(0) = b, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \frac{a}{r_0},$$

son solución del problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos con  $N \geq 3$  en donde el cuerpo  $P_N$  que se mueve a lo largo de la trayectoria  $\mathbf{r}_N$  tiene masa  $M$  y los  $(N-1)$ -cuerpos  $P_1, \dots, P_{N-1}$  que se mueven a lo largo de la trayectoria  $\mathbf{r}_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N-1$  tienen masa  $m$ , si y solo si

$$\begin{aligned} \ddot{z}_N &= -\frac{\sigma z_N}{h^3(r, z_N)}, \\ \ddot{r} &= \frac{a^2 r_0^2}{r^3} - \frac{\lambda_N}{r^2} - \frac{Mr}{h^3(r, z_N)}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma &= (N-1)m + M, \quad \gamma_N = \frac{\sigma}{(N-1)m}, \quad \nu = ar_0, \\ \lambda_N &= \frac{m}{4} \sum_{j=1}^{N-2} \csc\left(\frac{\pi j}{N-1}\right), \quad h(r, z_N) = (r^2 + \gamma_N^2 z_N^2)^{1/2} \end{aligned}$$

y

$$\dot{\theta} = \frac{ar_0}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta(t) = \int_0^t \frac{ar_0}{r^2(s)} ds. \quad (3.8)$$

Denotamos por

$$F(a, b, t) = f(t), \quad R(a, b, t) = r(t), \quad \Theta(a, b, t) = \theta(t),$$

a las soluciones del sistema (3.5) y (3.6) con  $\nu = ar_0$ , las cuáles satisfacen las condiciones iniciales

$$f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = b, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \frac{a}{r_0^2}.$$

En lo que sigue se mostrará que bajo una adecuada elección de los parámetros  $M, m$  y  $N$ , es posible probar (para todo  $r_0$ ) la existencia de soluciones periódicas del sistema (3.5), el cual se denominará **problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos reducido**.

**Observación 3.1.** *Si para algunos  $a$  y  $b$  se tiene que  $z(t)$  y  $r(t)$  son funciones  $T$ -periódicas para el sistema (3.5), entonces  $(f(t), r(t), \theta(t))$  definen una solución periódica para el  $N$ -ésimo cuerpo si y solo si  $\theta(T)$  es igual a  $n_1\pi/n_2$ , con  $n_1$  y  $n_2$  números enteros (consultar [22]). En general, soluciones  $T$ -periódicas del sistema (3.5) definen **soluciones periódicas reducidas** del problema espacial de  $N$ -cuerpos. Esto es, soluciones con la propiedad de que cada  $T$  unidades de tiempo, las posiciones y velocidades de los  $N$  cuerpos solamente difieren por un movimiento rígido en  $\mathbb{R}^3$ .*

## 3.2. Búsqueda de soluciones periódicas.

Note que el sistema (3.5) es equivalente al (3.7), por lo que en esta sección se estudia la existencia de soluciones periódicas para el sistema (3.7). Para alcanzar este propósito, requerimos de algunos resultados preliminares que presentamos a continuación. En adelante se definen las funciones

$$\begin{aligned} F(z, r) &= -\frac{\sigma z}{h^3(r, z)}, \\ G(z, r) &= \frac{\nu^2}{r^3} - \frac{\lambda_N}{r^2} - \frac{Mr}{h^3(r, z)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Un cálculo directo muestra que  $F$  y  $G$  satisfacen las siguientes propiedades

$$F(z, r) = -F(-z, r), \quad G(z, r) = G(-z, r), \quad \forall(z, r). \quad (3.10)$$

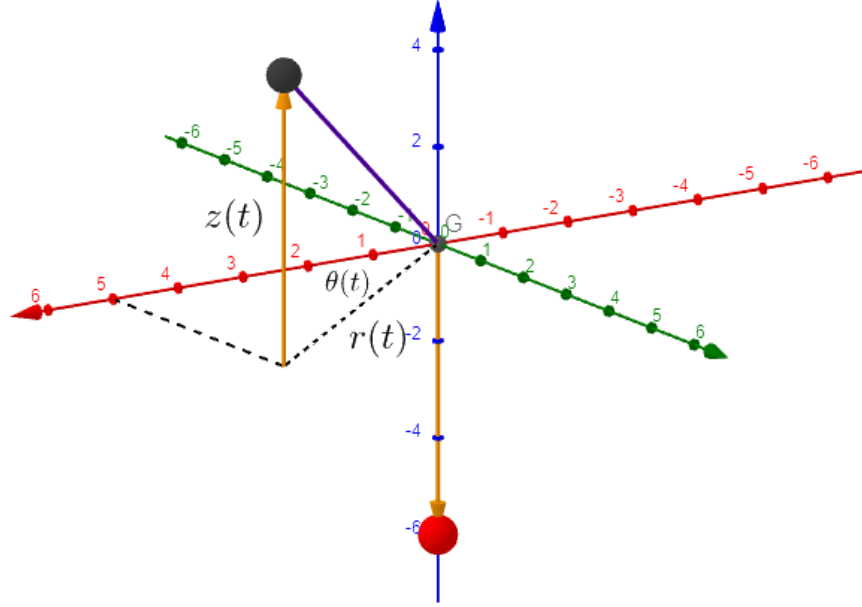


Figura 3.2: Configuración espacial de los cuerpos  $P_1$  y  $P_N$  luego de  $t$  unidades de tiempo.  
Fuente: Elaboración propia.

**Observación 3.2.** De las simetrías (3.10) y los Teoremas 1.6 y 1.7 para  $a, b$  fijos se sigue que:

i). Si existe  $T > 0$  tal que

$$\begin{aligned} Z(T, a, b) &= 0, \\ \dot{R}(T, a, b) &= 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

entonces las funciones  $z(t) = Z(t, a, b)$  y  $r(t) = R(t, a, b)$  son  $2T$ -periódicas.

ii). Si existe  $T > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \dot{Z}(T, a, b) &= 0, \\ \dot{R}(T, a, b) &= 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

entonces las funciones  $z(t) = Z(t, a, b)$  y  $r(t) = R(t, a, b)$  son  $4T$ -periódicas.

En este punto vale la pena recordar el siguiente resultado de factorización.

**Lema 3.1.** Sea  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow \Phi(x, y)$  una función de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Si  $\Phi(0, y) = 0$ , para todo  $y \in \mathbb{R}^m$ , entonces existe una función  $\tilde{\Phi}(x, y)$  continua tal que

$$\Phi(x, y) = x\tilde{\Phi}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

*Demostración.* Del Teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$\Phi(x, y) - \Phi(0, y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \Phi(sx, y) ds,$$

luego

$$\Phi(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \Phi(sx, y) ds = x \int_0^1 \Phi_x(sx, y) ds = x \tilde{\Phi}(x, y),$$

con

$$\tilde{\Phi}(x, y) = \int_0^1 \Phi_x(sx, y) ds.$$

□

El Lema 3.1 puede ser aplicado a la función  $Z(t, a, b)$  en cuyo caso se tiene el siguiente resultado.

**Lema 3.2.** *La función  $Z(t, a, b)$  satisface*

1. Para todo  $(t, a, b)$ :

$$Z(t, a, b) = b \tilde{Z}(t, a, b), \quad (3.13)$$

donde  $\tilde{Z}(t, a, b) = \int_0^1 Z_b(s, a, b) ds$ . Más aún, para todo par de enteros  $n \geq 1$  y  $m \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1+m}}{\partial a^m \partial b^n} Z(t, a, b) &= n \frac{\partial^{n-1+m}}{\partial a^m \partial b^{n-1}} \tilde{Z}(t, a, b) + b \frac{\partial^{n+m}}{\partial a^m \partial b^n} \tilde{Z}(t, a, b), \\ \frac{\partial^{n-1+m}}{\partial t^m \partial b^n} Z(t, a, b) &= n \frac{\partial^{n-1+m}}{\partial t^m \partial b^{n-1}} \tilde{Z}(t, a, b) + b \frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial b^n} \tilde{Z}(t, a, b), \end{aligned}$$

en particular para  $b = 0$

$$\frac{\partial^{n-1+m}}{\partial a^m \partial b^{n-1}} \tilde{Z}(t, a, 0) = \frac{1}{n} \frac{\partial^{n+m}}{\partial a^m \partial b^n} Z(t, a, 0), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^{n-1+m}}{\partial t^m \partial b^{n-1}} \tilde{Z}(t, a, 0) = \frac{1}{n} \frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m \partial b^n} Z(t, a, 0), \quad (3.15)$$

2. Dados  $k_1, k_2$  y  $k_3$  enteros positivos tales que  $k_1 + k_2 = k_3$  entonces

$$\frac{\partial^{k_3} Z}{\partial a^{k_1} \partial t^{k_2}}(t, a, 0) = 0, \quad \forall(t, a).$$

*Demostración.* La prueba se sigue directamente del hecho de que  $Z(t, a, 0) = 0$  para todo  $(t, a)$  y el Lema 3.1. □

**Lema 3.3.** Sean  $M, m, N$  y  $r_0$  fijos. Entonces las funciones  $Z(t, a, b)$  y  $R(t, a, b)$  satisfacen

$$Z(p_e, a_e, 0) = 0, \quad y \quad \dot{R}(p_e, a_e, 0) = 0,$$

$$\text{con } p_e = \frac{2\pi}{(1-e)^{3/2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{\lambda_N + M}}, \quad a_e = \sqrt{\frac{(1-e)(\lambda_N + M)}{r_0}} \quad \text{con } e \in [0, 1[.$$

*Demostración.* Note que para  $b = 0$ , se verifica que  $Z(t, a, 0) = 0, \forall t, a \in \mathbb{R}$ .

En efecto, dado que  $F(0, R) = 0$  para todo  $R \in \mathbb{R}$ , la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{z}_N = F(z_N, r), \\ z_N(0) = 0, \quad \dot{z}_N(0) = 0, \end{cases}$$

es la solución trivial  $Z(t, a, 0) = 0 \forall t, a \in \mathbb{R}$ .

Por otro lado, la función  $R(t, a, 0)$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{r} = \frac{a^2 r_0^2}{r^3} - \frac{\lambda_N + M}{r^2}, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0. \quad (3.16)$$

La ecuación diferencial en (3.16) corresponde a un problema de Kepler (2.3) con

$$c = ar_0, \quad f(r) = -\frac{\lambda_N + M}{r^2},$$

cuya solución es

$$r(t, a, 0) = \frac{a^2 r_0^2}{(1-e^2)(\lambda_N + M)} (1 - e \cos(u(t))),$$

con  $e \in [0, 1[$  y  $u(t)$  la anomalía excéntrica, la cual satisface la ecuación

$$u(t) - e \sin u(t) = \frac{2\pi}{p} t, \quad \text{con } p = \frac{2\pi a^3 r_0^3}{(\lambda_N + M)^2 (1-e)^{3/2}}.$$

Un cálculo directo muestra que  $R(t, a, 0)$  satisface el problema de valor inicial (3.16) si  $a = a_e$  donde,

$$a_e = \sqrt{\frac{(1+e)(\lambda_N + M)}{r_0}}.$$

Geométricamente, lo anterior significa que  $R(t, a_e, 0)$  describe una órbita elíptica con semieje mayor  $r_0/(1-e)$  y periodo

$$p_e = \frac{2\pi}{(1-e)^{3/2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{\lambda_N + M}}.$$

Más aún, de la propiedad

$$u(t + p) = u(t) + 2\pi, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

se sigue directamente que

$$\dot{R}(p_e, a_e, 0) = 0.$$

En conclusión, para cada  $e \in [0, 1[$  fijo, la terna  $(p_e, a_e, 0)$  satisface

$$Z(p_e, a_e, 0) = 0, \quad \text{y} \quad \dot{R}(p_e, a_e, 0) = 0.$$

□

**Observación 3.3.** *Del Lema 3.3 y el Teorema 3.1, se deduce que si la posición del cuerpo  $P_1$  está dada por*

$$\mathbf{r}_1(t) = \left( \frac{r_0}{1-e} \cos(u(t) - e), \frac{r_0 \sqrt{1-e^2}}{1-e} \sin(u(t)), 0 \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

*se obtiene una solución  $2p_e$ -periódica del problema de  $N$ -cuerpos poligonal reducido, en donde los cuerpos  $P_1, P_2, \dots, P_{N-1}$  se mueven en órbitas elípticas con excentricidad  $e \in [0, 1[$  y semieje mayor  $r_0/(1-e)$ . Como caso particular, para  $e = 0$  las órbitas son circulares con  $R(t, a_0, 0) = r_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 = \sqrt{\frac{\lambda_N + M}{r_0}}$  y periodo  $p_0 = 2\pi \frac{r_0}{a_0}$ .*

Ya se cuentan con todos los elementos necesarios para la demostración de los resultados principales de este documento. En adelante se definen los parámetros

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(N-1)m + M}{r_0^3}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_N + M}{r_0^3}}.$$

A la luz de la notación del Teorema 3.1, se presenta el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.** *Sea  $N \geq 3$  y suponga que  $m, M$  y  $N$  satisfacen*

$$\lambda_N \neq (N-1)mq^2 + M(q^2 - 1),$$

*para todo  $q \in \mathbb{Z}^+$ . Entonces para cualquier real  $r_0 > 0$  existen  $b \neq 0$  cerca de 0,  $T$  cerca de  $\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{(N-1)m+M}}$  y  $a > 0$  cerca de  $\sqrt{\frac{\lambda_N + M}{r_0}}$  que generan una solución  $2T$ -periódica impar del problema de  $N$ -cuerpos reducido con las condiciones descritas en el Teorema 3.1.*

*Demostración.* Fijados  $M, m$  y  $r_0$ , suponga que  $Z(t, a, b)$  y  $R(t, a, b)$  son las soluciones del sistema (3.7) Es decir,

$$\begin{aligned}\ddot{Z} &= F(Z, R), \\ \ddot{R} &= G(Z, R, a).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Del Lema 3.3 tenemos que

$$Z(t, a_0, 0) = 0 \quad y \quad R(t, a_0, 0) = r_0, \quad \text{con} \quad a_0 = \sqrt{\frac{\lambda_N + M}{r_0}},$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces que sobre la curva  $\alpha(t) = (t, a_0, 0)$ , tenemos que  $Z(\alpha(t))$  y  $R(\alpha(t))$  satisfacen el sistema (3.11), esto es

$$Z(\alpha(t)) = 0, \quad y \quad \dot{R}(\alpha(t)) = 0.$$

El propósito ahora es buscar ternas  $(T, a, b)$  con  $b$  cerca de 0,  $a$  cerca de  $a_0$  y un adecuado  $T$  del tal forma que  $\tilde{Z}(T, a, b)$  y  $R(T, a, b)$  sean soluciones de (3.11), esto es

$$\tilde{Z}(T, a, b) = 0, \quad y \quad \dot{R}(T, a, b) = 0.$$

Del Lema 3.2 sabemos que para todo  $(t, a, b)$  se cumple

$$Z(t, a, b) = b\tilde{Z}(t, a, b).\tag{3.18}$$

En consecuencia

$$Z_b(t, a, b) = \tilde{Z}(t, a, b) + b\tilde{Z}(t, a, b).\tag{3.19}$$

Note que, sobre la curva  $\alpha(t)$  se tiene

$$Z_b(\alpha(t)) = \tilde{Z}(\alpha(t)).\tag{3.20}$$

Lo anterior invita a analizar los posibles ceros de la función  $Z_b(\alpha(t))$ . Para ello estudiamos la ecuación variacional

$$\ddot{Z}_b = F_b(Z, R) = F_Z(Z, R)Z_b + F_R(Z, R)R_b,$$

a lo largo de la curva  $\alpha(t)$ . En tal caso la función  $Z_b(\alpha(t))$  satisface el problema de valor inicial (ver apéndice B)

$$\ddot{n}(t) + \omega_1^2 n(t) = 0, \quad n(0) = 0, \quad \dot{n}(0) = 1,$$

cuya solución está dada por

$$Z_b(\alpha(t)) = \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}.\tag{3.21}$$

En particular, para  $T_0 = \pi/\omega_1$  se tiene que  $Z_b(\alpha(T_0)) = 0$ . Lo anterior prueba que

$$\tilde{Z}(T_0, a_0, 0) = 0, \quad \text{y} \quad \dot{R}(T_0, a_0, 0) = 0.$$

El Teorema de la Función Implícita asegura que si el conjunto  $\left\{ \nabla \tilde{Z}(T_0, a_0, 0), \nabla \dot{R}(T_0, a_0, 0) \right\}$  es linealmente independiente, entonces existe  $b_1 \neq 0$  tal que todos los puntos  $(T_1, a_1, b_1)$  cerca de  $(T_0, a_0, 0)$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\tilde{Z}(T_1, a_1, b_1) = \dot{R}(T_1, a_1, b_1) = 0.$$

Para ello, observe que para todo  $(t, a)$  se tiene

$$\nabla \tilde{Z}(t, a, 0) = \left( \dot{Z}_b(t, a, 0), Z_{ba}(t, a, 0), \frac{1}{2} Z_{bb}(t, a, 0) \right),$$

lo que conlleva a calcular las ecuaciones variacionales de  $R$  y las restantes de  $Z$  a lo largo de la curva  $\alpha(t)$ . Puesto que estos cálculos son un poco extensos, los detalles de sus procedimientos aparecen en el Apéndice B y en lo que sigue solo se consignarán algunos resultados obtenidos y relevantes en la demostración, .

Así pues, un procedimiento análogo al realizado para obtener (3.21) muestra que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\ddot{R}(\alpha(t)) = 0, \quad \dot{R}_a(\alpha(t)) = 2 \sin(\omega_2 t), \quad \dot{R}_b(\alpha(t)) = 0. \quad (3.22)$$

Por lo tanto, dado que  $\omega_2 \neq q\omega_1$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$\nabla \dot{R}(\alpha(T_0)) = \left( 0, 2 \sin\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \pi\right), 0 \right) \neq \mathbf{0}.$$

De otra parte, se puede comprobar que

$$\dot{Z}_b(\alpha(t)) = \cos(\omega_1 t), \quad Z_{bb}(\alpha(t)) = 0.$$

Finalmente, un cálculo directo muestra que

$$\nabla \tilde{Z}(\alpha(T_0)) \times \nabla \dot{R}(\alpha(T_0)) = \left( 0, 0, -2 \sin\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \pi\right) \right) \neq \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, existe  $\epsilon > 0$  y un par de funciones continuas  $T, a : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tales

$$b \rightarrow T = T(b), \quad b \rightarrow a = a(b), \quad (3.23)$$

con  $T(0) = T_0$ ,  $a(0) = a_0$ , que satisfacen

$$\tilde{Z}(T(b), a(b), b) = 0, \quad \text{y} \quad \dot{R}(T(b), a(b), b) = 0.$$

Dado que

$$\tilde{Z}(0, a, b) = 0, \quad \dot{R}(0, a, b) = 0,$$

para todo  $(a, b)$ , entonces para  $b \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\begin{aligned} Z(0, a(b), b) &= b\tilde{Z}(0, a(b), b) = 0, & \dot{R}(0, a(b), b) &= 0, \\ Z(T(b), a(b), b) &= b\tilde{Z}(T(b), a(b), b) = 0, & \dot{R}(T(b), a(b), b) &= 0, \end{aligned}$$

demostrándose así, que sobre la terna  $(T(b), a(b), b)$  las funciones  $Z$  y  $R$  satisfacen (3.11) lo que induce una solución  $2T(b)$ -periódica del problema reducido (3.17) con  $Z(t, a(b), b)$  una función impar y  $R(t, a(b), b)$  una función par para cada  $b \in (-\epsilon, \epsilon)$ .  $\square$

Un resultado semejante al presentado en el Teorema 3.2 y de nuevo a la luz de la notación del Teorema 3.1 es el siguiente

**Teorema 3.3.** *Sea  $N \geq 3$  y suponga que  $m, M$  y  $N$  satisfacen*

$$\lambda_N \neq (N-1)mk^2 + M(k^2 - 1),$$

*para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$  número par. Entonces para cualquier número real  $r_0 > 0$  existen  $b \neq 0$  cerca de 0,  $T$  cerca de  $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{(N-1)m+M}}$  y  $a > 0$  cerca de  $\sqrt{\frac{\lambda_N+M}{r_0}}$  que generan una solución  $4T_*$ -periódica impar-par del problema de  $N$ -cuerpos reducido con las condiciones descritas en el Teorema 3.1.*

*Demostración.* La prueba sigue los mismos pasos que aquella hecha para el Teorema 3.2 y se construye aplicando el Lema 3.2 a la función  $\dot{Z}(t, a, b)$ . En tal caso, existe una función  $W(t, a, b)$  tal que

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t, a, b) &= bW(t, a, b), \\ \dot{Z}_b(t, a, b) &= W(t, a, b) + bW_b(t, a, b). \end{aligned}$$

para todo  $(t, a, b)$ . En particular

$$\dot{Z}_b(t, a, 0) = W(t, a, 0),$$

para todo  $(t, a)$ . La idea ahora es buscar ternas  $(T_*, a, b)$  con  $b$  cerca 0,  $a$  cerca de  $a_0$  y un adecuado  $T_*$  de tal forma que  $W(T, a, b)$  y  $R(T, a, b)$  sean soluciones de (3.12), es decir

$$W(T_*, a, b) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{R}(T_*, a, b) = 0.$$

Así que, basta analizar los posibles ceros de la función  $\dot{Z}_b(T_*, a, b)$ . De (3.21) se sigue que

$$\dot{Z}_b(\alpha(t)) = \cos(\omega_1 t), \quad (3.24)$$

y se observa en particular,  $\dot{Z}_b(\alpha(T_0/2)) = 0$  con esto, se tiene que

$$W(T_0/2, a_0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{R}(T_0/2, a_0, 0) = 0.$$

Nuevamente, con el propósito de aplicar el Teorema de la Función Implícita se debe garantizar que  $\{\nabla W(T_0/2, a_0, 0), \nabla \dot{R}(T_0/2, a_0, 0)\}$  es linealmente independiente. De (3.22) y dado que  $\omega_2 \neq k\omega_1$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  número par, se tiene que

$$\nabla \dot{R}(T_0/2, a_0, 0) = \left(0, 2 \sin\left(\frac{\omega_2 \pi}{2\omega_1}\right), 0\right) \neq \mathbf{0}.$$

Por otro lado, de las ecuaciones variacionales de la función  $\dot{Z}(t, a, b)$  evaluadas en  $\alpha(T_0/2)$  se tiene

$$\ddot{Z}_b(\alpha(T_0/2)) = -\omega_1, \quad \dot{Z}_{bb}(\alpha(T_0/2)) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\nabla W(\alpha(T_0/2)) \times \nabla \dot{R}(\alpha(T_0/2)) = \left(0, 0, -2\omega_1 \sin\left(\frac{\omega_2 \pi}{2\omega_1}\right)\right) \neq \mathbf{0}.$$

Así que existe  $\delta > 0$  y un par de funciones continuas  $T_*, a_* : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  tales

$$b \rightarrow T_* = T_*(b), \quad b \rightarrow a_* = a_*(b),$$

con  $T_*(0) = T_0/2$ ,  $a_*(0) = a_0$  y satisfacen

$$W(T_*(b), a_*(b), b) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{R}(T_*(b), a_*(b), b) = 0.$$

Puesto que

$$Z(0, a, b) = 0, \quad \dot{R}(0, a, b) = 0,$$

para todo  $(a, b)$ , entonces para  $b \in (-\delta, \delta)$

$$\begin{aligned} Z(0, a(b), b) &= 0, & \dot{R}(0, a(b), b) &= 0, \\ \dot{Z}(T_*(b), a(b), b) &= bW(T_*(b), a(b), b) = 0, & \dot{R}(T_*(b), a(b), b) &= 0, \end{aligned}$$

demostrándose así, que sobre la terna  $(T_*(b), a_*(b), b)$  las funciones  $Z$  y  $R$  satisfacen (3.12) lo que induce una solución  $4T_*(b)$ -periódica del problema reducido (3.17) con  $Z(t, a(b), b)$  una función impar respecto a  $t = 0$ ; y  $Z(t, a(b), b)$  par respecto a  $t = T_*$  y  $R(t, a(b), b)$  función par para cada  $b \in (-\delta, \delta)$ .  $\square$

**Soluciones periódicas para el problema completo.** Con el propósito de extender los resultados del Teorema 3.2 al sistema completo (3.7) y (3.8) y probar con ello la existencia de soluciones periódicas para el problema de  $N$ -cuerpos poligonal considerado en este documento, en adelante se considera la curva  $\gamma_1 : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$b \rightarrow \gamma_1(b) = (T(b), a(b), b), \quad \gamma_1(0) = (T_0, a_0, 0).$$

con  $T(b)$  y  $a(b)$  dadas en (3.23). La existencia de soluciones periódicas de (3.7) y (3.8), se obtiene al demostrar que la función  $\Theta(T, a, b)$  con  $(T, a, b) \in \gamma_1(b)$  no es constante. Con este propósito, en una pequeña vecindad del punto  $\gamma_1(0)$  se reparametriza la curva  $\gamma_1$  como  $\beta(\tau) = \gamma_1(b(\tau))$  con  $\beta(\tau)$  la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \beta'(\tau) = X(\beta(\tau)), \\ \beta(0) = (T_0, a_0, 0) \end{cases} \quad \text{con} \quad X = \nabla Z \times \nabla \dot{R}.$$

En consecuencia, calculamos la ecuaciones variacionales de la función  $\xi(\tau) = \Theta(\beta(\tau))$  en el punto  $\tau = 0$ . Los detalles de los procedimientos realizados en esta parte del trabajo, se encuentran en el Apéndice B. Note que

$$\xi(0) = \Theta(T_0, a_0, 0) = \int_0^{T_0} \frac{a}{r_0} ds = \frac{T_0 a_0}{r_0} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi.$$

De otro lado,

$$\xi'(\tau) = \langle \nabla \Theta(\beta(\tau)), \beta'(\tau) \rangle,$$

donde  $\beta'(\tau) = (\beta'_1(\tau), \beta'_2(\tau), \beta'_3(\tau))$  y cada término del vector  $\beta'(\tau)$  está dado

$$\begin{aligned} \beta'_1(\tau) &= Z_{ab}(\beta(\tau)) \dot{R}_b(\beta(\tau)) - \frac{1}{2} Z_{bb}(\beta(\tau)) \dot{R}_a(\beta(\tau)), \\ \beta'_2(\tau) &= \frac{1}{2} Z_{bb}(\beta(\tau)) \ddot{R}(\beta(\tau)) - \dot{Z}_b(\beta(\tau)) \dot{R}_b(\beta(\tau)), \\ \beta'_3(\tau) &= \dot{Z}_b(\beta(\tau)) \dot{R}_a(\beta(\tau)) - Z_{ab}(\beta(\tau)) \ddot{R}(\beta(\tau)). \end{aligned}$$

De las cuentas realizadas en el apéndice B se deduce que  $\beta'(0) = \left(0, 0, -2 \sin\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \pi\right)\right)$  y que  $\nabla \Theta(\beta(0)) = (\dot{\Theta}(\beta(0)), \Theta_a(\beta(0)), 0)$ , con lo que se concluye que  $\xi'(0) = 0$ .

Ahora, vamos a calcular una expresión para  $\xi''(0) \neq 0$ . Para ello, observe que

$$\ddot{R}_{bb} = (G_{ZZ} Z_b + G_{ZR} R_b) Z_b + G_Z Z_{bb} + (G_{RZ} Z_b + G_{RR} R_b) R_b + G_R R_{bb}, \quad (3.25)$$

de donde se sigue que la función  $R_{bb}(\beta(\tau))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{q}(\tau) + \omega_2^2 q(\tau) = \frac{3M\gamma_N^2}{r_0^4} Z_b^2(\beta(\tau)), \quad \text{con} \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0,$$

del que se obtiene la solución

$$R_{bb}(\beta(\tau)) = \frac{3M\gamma_N^2[4\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_2^2 \cos(2\omega_1\tau) - 4\omega_1^2 \cos(\omega_2\tau)]}{2(r_0^2\omega_1\omega_2)^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

En particular, se tiene

$$R_{bb}(\beta(0)) = \frac{6M\gamma_N^2\left(1 - \cos\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\pi\right)\right)}{\omega_2^2 r_0^4(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \quad \text{y} \quad \dot{R}_{bb}(\beta(0)) = \frac{3M\gamma_N^2 \dot{R}_a(\beta(0))}{\omega_2 r_0^4(4\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Finalmente, se encuentra que  $Z_{bbb}(\beta(\tau))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{c}(\tau) + \omega_1^2 c(\tau) = \frac{9\omega_1}{r_0} \left( R_{bb}(\beta(\tau)) + \frac{\gamma_N^2}{r_0} Z_b^2(\beta(\tau)) \right) Z_b(\beta(\tau)), \quad \text{con} \quad c(0) = 0, \quad \dot{c}(0) = 0.$$

y se encuentra que

$$Z_{bbb}(\beta(0)) = \frac{27\pi\gamma_N^2[r_0^3\omega_2^2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2) + M(-8\omega_1^2 + 3\omega_2^2)]}{8r_0^5\omega_1^4\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} - \frac{54M\gamma_N^2\omega_1\dot{R}_a(\beta(0))}{r_0^5\omega_2^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}$$

Sin embargo,

$$\ddot{\xi}(t) = \langle [\text{Hess}\Theta(\beta(t))] \dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t) \rangle + \langle \nabla\Theta(\beta(t)), \ddot{\beta}(t) \rangle.$$

Donde

$$[\text{Hess}\Theta(\beta(t))] \dot{\beta}(t) \Big|_{t=0} = -\dot{R}_a(\alpha(T_0)) \left( \dot{\Theta}_b(\alpha(T_0)), \Theta_{ba}(\alpha(T_0)), \Theta_{bb}(\alpha(T_0)) \right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle [\text{Hess}\Theta(\beta(t))] \dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t) \rangle &= \Theta_{bb}(\alpha(T_0)) \dot{R}_a^2(\alpha(T_0)), \\ \langle \nabla\Theta(\beta(t)), \ddot{\beta}(t) \rangle \Big|_{t=0} &= \dot{\Theta}(\alpha(T_0)) \ddot{\beta}_1(0) + \Theta_a(\alpha(T_0)) \ddot{\beta}_2(0), \end{aligned}$$

así que

$$\ddot{\xi}(0) = \Theta_{bb}(\alpha(T_0)) \dot{R}_a^2(\alpha(T_0)) + \dot{\Theta}(\alpha(T_0)) \ddot{\beta}_1(0) + \Theta_a(\alpha(T_0)) \ddot{\beta}_2(0). \quad (3.26)$$

donde luego de derivar y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1(0) &= -\dot{R}_a(\alpha(T_0)) \left( Z_{ab}(\alpha(T_0)) \dot{R}_{bb}(\alpha(T_0)) + \frac{1}{2} Z_{bbb}(\alpha(T_0)) \dot{R}_a(\alpha(T_0)) \right), \\ \ddot{\beta}_2(0) &= -\dot{R}_{bb}(\alpha(T_0)) \dot{R}_a(\alpha(T_0)). \end{aligned}$$

Un cálculo directo muestra que

$$Z_{ab}(\alpha(T_0)) \dot{R}_{bb}(\alpha(T_0)) = \frac{9\gamma_N^2}{r_0^5\omega_1\omega_2^2} \left( \frac{M\pi}{4\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{2M\omega_1^3 \dot{R}_a(\alpha(T_0))}{\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right) \dot{R}_a(\alpha(T_0)),$$

y como

$$\frac{1}{2}Z_{bbb}(\alpha(T_0)) = \frac{9\gamma_N^2}{r_0^5\omega_1\omega_2^2} \left( \frac{3\pi[M(8\omega_1^2 - 3\omega_2^2) + r_0^3\omega_2^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)]}{16\omega_1^3(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} - \frac{3M\omega_1^2\dot{R}_a(\alpha(T_0))}{\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1(0) &= \frac{-9\gamma_N^2\dot{R}_a^2(\alpha(T_0))}{r_0^5\omega_1\omega_2^2} \left( \frac{3\pi[M(8\omega_1^2 - 3\omega_2^2 + \frac{16}{3}\omega_1^3) + r_0^3\omega_2^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)]}{16\omega_1^3(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M\omega_1^2(2\omega_1 + 3)\dot{R}_a(\alpha(T_0))}{\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right) \\ \ddot{\beta}_2(0) &= \frac{-3\gamma_N^2M}{r_0^4\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)}\dot{R}_a^2(\alpha(T_0)). \end{aligned}$$

Esto significa que, si y

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\gamma_N^2\pi \left( 8M\omega_1^2(9 + 8\omega_1) - M\omega_2^2(27 + 16\omega_1) + 9r_0^3\omega_2^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2) \right)}{4r_0^5\omega_1^4\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \\ B &= \frac{36\gamma_N^2M\omega_1(2\omega_1 + 3)}{r_0^5\omega_2^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, \end{aligned}$$

entonces

$$\ddot{\xi}(0) = -\left( A - B\dot{R}_a(\alpha(T_0)) \right)\dot{R}_a^2(\alpha(T_0)).$$

Dado que  $\dot{R}_a(\alpha(T_0)) \neq 0$  cuando  $w_2 \neq qw_1$  para todo  $q \in \mathbb{Z}$ , la fórmula anterior nos deja en evidencia que existe un arbitrario número de parámetros  $w_1, w_2$  donde  $\xi''(0) \neq 0$ , esto implicará la existencia de una familia de soluciones periódicas del problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos dado en el Teorema 3.1. La tabla adjunta muestra para la elección particular de los parámetros, el valor de  $\xi''(0)$  obtenido numéricamente,

| Tabla 1: Valores arbitrarios de los parámetros |     |     |       |       |       |            |
|------------------------------------------------|-----|-----|-------|-------|-------|------------|
| $N$                                            | $M$ | $m$ | $r_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $\xi''(0)$ |
| 3                                              | 0   | 0.5 | 0.5   | 2.828 | 1.000 | -1.064     |
| 3                                              | 0   | 10  | 1     | 4.472 | 1.581 | -0.067     |
| 3                                              | 5   | 9   | 10    | 0.151 | 0.085 | -81.075    |
| 4                                              | 7   | 3   | 11    | 0.109 | 0.080 | -316.695   |
| 5                                              | 20  | 10  | 5     | 0.692 | 0.486 | -5.620     |

**Observación 3.4.** Siguiendo las mismas ideas expuestas anteriormente, la existencia de soluciones periódicas para el problema espacial poligonal de  $N$ -cuerpos, se sigue al considerar las soluciones periódicas dadas por el Teorema 3.3.

## CAPÍTULO 4

---

### Una simulación numérica

---

Con el propósito de dar validación numérica de los resultados obtenidos en el Capítulo 3 sobre la existencia de soluciones periódicas para el problema de  $N$ -cuerpos poligonal, en este capítulo se presentan unos ejemplos de simulación numérica utilizando el algoritmo de continuación expuesto en [23], el cual es una pequeña variación del método de Taylor. En dicho documento, el autor presenta de forma detallada, un método de continuación numérica (denominado *Round Taylor method*) cuya implementación le permite construir y/o evidenciar la existencia de una solución periódica del problema espacial isósceles de 3 cuerpos. Cabe mencionar que los aspectos técnicos y analíticos sobre la validez del mismo, están presentados con todo rigor en [23]. El software utilizado para presentar los resultados numéricos expuestos en este capítulo es *Mathematica*<sup>1</sup>.

### 4.1. Implementación del algoritmo

A continuación, se indicará la forma como se implementó el algoritmo de continuación numérica mencionado para solucionar problemas de valor inicial que involucran sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Considere dos funciones  $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables junto con el sistema

$$\begin{cases} F_1(T, a, b) = 0, \\ F_2(T, a, b) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>Wolfram Research (1988). Wolfram Mathematica. (Versión 11.1)

Técnicas analíticas como el *Teorema de Poincaré-Miranda* o en general, la *teoría del grado topológico* (para más información al respecto puede consultar [11],[17]), sirven para demostrar la existencia de ternas  $(T, a, b)$  que satisfagan el sistema (4.1) en dominios abiertos de  $\mathbb{R}^3$ . Por otro lado, existen diversos métodos numéricos que permiten analizar las soluciones de (4.1), en particular en [22] se encuentra un algoritmo de continuación, el cuál propone que a partir de una solución conocida  $p_1 = (T_1, a_1, b_1)$  para dicho sistema, se conjugan dos procedimientos que brindan ternas  $(T, a, b)$  que resuelven numéricamente el sistema (4.1). En esta situación, de acuerdo a lo propuesto en [23] se dice que se está haciendo una continuación numérica de la solución  $p_1$ . Tales procedimientos se denominan *procedimiento de corrección* y *procedimiento de extensión*.

**Parámetros del algoritmo:** Inicialmente se escogen  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  dos números positivos fijos. Estos números permitirán determinar qué tan cerca de cero se tienen los valores de las funciones  $F_1$  y  $F_2$  cuando son evaluadas en cada nuevo punto  $p_k$  generado por el algoritmo de continuación (esto es,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  miden tolerancia del error). En este trabajo se ha elegido  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 10^{-6}$ .

Si al hacer la continuación numérica en el paso  $k$  se encuentra que  $F_i(p_k) > 10^{-6}$  ( $i = 1, 2$ ), el algoritmo se detiene y en este punto es necesario elegir un tercer número positivo  $\epsilon_3$  con el cual establecemos *el error en la corrección de  $p_k$* , esto servirá para medir la distancia entre los puntos  $p_{k-1}$  y el nuevo  $p_k$  de la curva solución. Para poner en funcionamiento el algoritmo es necesario que el campo vectorial dado por  $\nabla F_1(p_1) \times \nabla F_2(p_1)$  no sea nulo y así poder utilizar el Teorema de la función implícita (ver teorema 1.5 sección 1.1.2). En consecuencia, existe una pequeña vecindad de  $p_1$  tal que todas las soluciones del sistema (4.1) están sobre una curva  $\alpha(t) = (T, a, b)$  con  $\alpha(0) = p_1$  y  $\dot{\alpha}(t) = (\nabla F_1 \times \nabla F_2)(\alpha(t))$ .

Geométricamente, el conjunto de puntos  $p_i = (t_i, a_i, b_i)$  donde  $F_1(p_i) = 0$  y  $F_2(p_i) = 0$  es la intersección de las superficies

$$\Omega_1 = \{(t, a, b) \in \mathbb{R}^3 : F_1(t, a, b) = 0\} \quad \text{y} \quad \Omega_2 = \{(t, a, b) \in \mathbb{R}^3 : F_2(t, a, b) = 0\}.$$

La curva  $\alpha(t)$  está en ambas superficies y su vector velocidad es ortogonal a los gradientes  $\nabla F_1(\alpha(t))$  y  $\nabla F_2(\alpha(t))$ .

**Procedimiento de corrección:** Si en el proceso  $k$ -ésimo de continuación, se obtiene un punto  $q_k = (T_k, a_k, b_k)$  donde  $F_1(q_k) > \epsilon_1$  y/o  $F_2(q_k) > \epsilon_2$  entonces el algoritmo se detiene y se implementa la corrección desde  $q_k$  de la siguiente forma,

- Se debe calcular  $\nabla F_1(q_k)$  y  $\nabla F_2(q_k)$ .
- Se reduce el error primero en  $F_1(P)$  haciendo  $P = q_k - h_1 \frac{\nabla F_1(q_k)}{\|\nabla F_1(q_k)\|}$ .

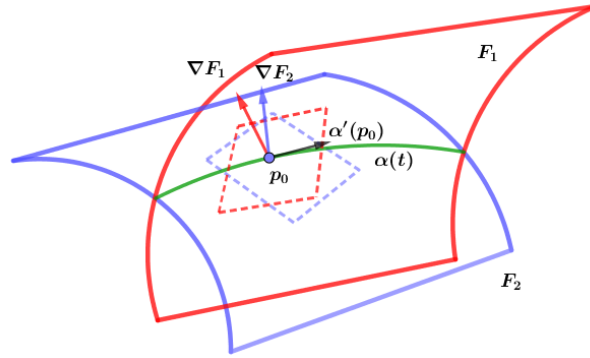


Figura 4.1: Interpretación geométrica del método de continuación.

. Fuente: Elaboración propia

- A continuación, se calcula

$$Q_1 = P + h_2 \frac{\nabla F_1(q_k) \times \nabla F_2(q_k)}{\|\nabla F_1(q_k) \times \nabla F_2(q_k)\|},$$

esto hace que el nuevo punto esté en dirección perpendicular a  $\nabla F_1$  (esto con el fin de conservar el error en  $F_1$  menor que  $\epsilon_1$ ). Aquí se observa numéricamente que en tal dirección el error de  $F_2$  empieza a ser decreciente.

En este punto se debe verificar que  $|F_i(p_0) - F_i(Q_1)| < \epsilon_3$ .

A continuación se explica un poco más detallado este método desde lo expuesto en [22].

### Procedimiento de extensión y corrección

1. Comience con la terna solución conocida  $p_0 = (T_0, a_0, b_0)$  que verifica  $|F_1(p_0)| < \epsilon_1$  y  $|F_2(p_0)| < \epsilon_2$ .
2. Haga  $Y = p_0$  y seleccione un número positivo  $h < \epsilon_3$  (para definir el paso) y un entero positivo  $k$  para el número de iteraciones (así los puntos que forman la curva solución estarán tan cercanos como se quiera).
3. Para  $i = 1$  hasta  $i = k$  haga lo siguiente
  - Encuentre numéricamente el sistema extendido formado por las ecuaciones variacionales (de cada función  $F_1$  y  $F_2$ ) usando las entradas de  $Y$  y calcule  $W = \nabla F_1 \times \nabla F_2$ .
  - Haga  $Y = Y + \frac{h}{|W|}W$  y  $q_i = Y$  (de esta forma se va generando la curva solución, ya que los valores de  $q_i$  están sobre  $\alpha(t)$ ).

4. Si para todo  $i = 1, \dots, k$ ,  $|F_1(q_i)| < \epsilon_2$  y  $|F_2(q_i)| < \epsilon_2$  entonces continúe al paso (5), en otro caso regrese al paso (2) y seleccione un  $h$  más pequeño y/o un  $k$  más pequeño (esto permite la continuación y/o corrección de la solución).
5. Determine  $Q_1$  tal que  $|F_1(Q_1)| < \epsilon_1$  y  $|F_2(Q_1)| < \epsilon_2$  y tal que  $|q_k - Q_1| < \epsilon_3$  (El punto  $Q_1$  es el obtenido luego de corregir en la continuación).
6. Haga  $Cj = Cj \cup \{Q_1\} \cup \bigcup_{i=1}^k q_i$  (esto hace que los puntos se coleccionen en el conjunto  $Cj$ ).
7. Regrese al paso (1) para comenzar de nuevo el proceso haciendo  $p_0 = Q_1$  (así se va a generar una familia suficientemente grande de ternas solución del sistema).

Los siguientes ejemplos ilustran una aplicación del método numérico anterior para casos más sencillos.

**Ejemplo 4.1.** *Considere el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (t + a)x^2(t), \\ x(0) = b. \end{cases} \quad (4.2)$$

donde  $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, a, b) \rightarrow x(t, a, b) = x(t)$ . Buscamos valores para los parámetros  $a$  y  $b$  tales que  $x(3, a, b) = 2$  (el valor 2 solo es escogido para ilustrar el procedimiento, este puede cambiarse por otro valor según se desee).

Note que la solución analítica de (4.2) se puede calcular explícitamente y está dada por

$$x(t) = \frac{-2b}{-2 + 2abt + bt^2} \quad (4.3)$$

Un cálculo directo muestra que la curva de nivel que satisface  $x(3, a, b) = 2$  es

$$h(b) = \frac{1}{3b} - \frac{5}{3}.$$

Se quiere registrar gráficamente, como el método de continuación numérica puede generar una curva solución que se superpone (partiendo desde un punto inicial conocido) sobre la curva  $h(b)$ . Podemos considerar por ejemplo como punto inicial  $p_1 = (3, -\frac{3}{2}, 2)$  y los valores fijos

$$\epsilon_1 = 10^{-6}, \quad \epsilon_2 = 10^{-5}, \quad \epsilon_3 = 10^{-4}, \quad k = 200 \quad y \quad h = 10^{-4}.$$

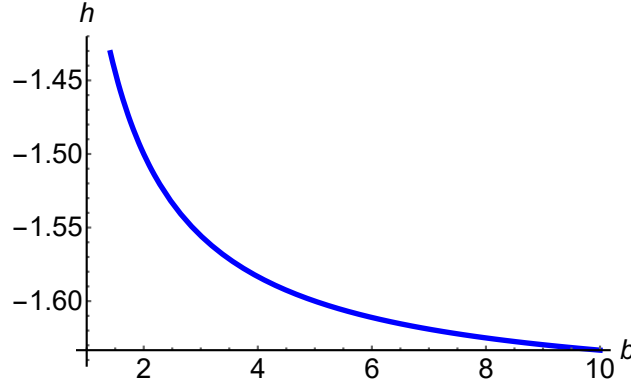


Figura 4.2: Curva de nivel de la solución del problema de valor inicial (4.2) dada por  $h(b)$ . Gráfica generada por **Mathematica 11.1**.

El algoritmo ejecutará las iteraciones indicadas y luego guardará las ternas obtenidas en una tabla para que a partir de ello, éstos puntos sean graficados en el mismo plano de la curva de nivel correspondiente.

Al calcular las derivadas parciales de  $F(t, a, b) = (t + a)x^2(t)$  se puede verificar que se obtiene

$$\nabla F = \left( x^2 + 2(t + a)x(t)\dot{x}(t), x^2(t) + 2(t + a)x(t)x_a(t), 2(t + a)x(t)x_b(t) \right)$$

denotamos por  $\nabla F = (x_1, x_2, x_3)$ . Como el vector  $v_2 = (0, -x_3, x_2)$  es ortogonal a  $\nabla F$  se puede aplicar la continuación numérica.

En el paso 3 del algoritmo, se quiere que podamos “movernos” sobre la curva de nivel desde el punto inicial, para ello se hace  $W = \frac{v_2}{\|v_2\|}$  y  $p_1 = p_1 + hW$ .

Una forma sencilla de evidenciar que el algoritmo funciona, es graficando los puntos obtenidos numéricamente en el mismo plano de la curva solución dada en figura 4.2. Esta situación se muestra en la siguiente gráfica:

Luego de generar 500 puntos solución con el algoritmo de continuación numérica, se observa como en la figura 4.3 la colección de estos puntos cubren la curva de nivel obtenida analíticamente, lo cual significa que el algoritmo está generando la misma curva.

**Ejemplo 4.2.** Considere ahora el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (t + a)x^2(t), & x(0) = b, \\ \dot{y}(t) = (t^2 + b)y^2(t), & y(0) = a. \end{cases} \quad (4.4)$$

donde  $x, y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, a, b) \rightarrow x(t, a, b) = x(t)$  y  $(t, a, b) \rightarrow y(t, a, b) = y(t)$  son funciones diferenciables. Fijamos el punto  $p_1 = (3, -4, 2)$  y buscamos valores para los parámetros  $a$  y  $b$  tales que por ejemplo, se satisfaga que

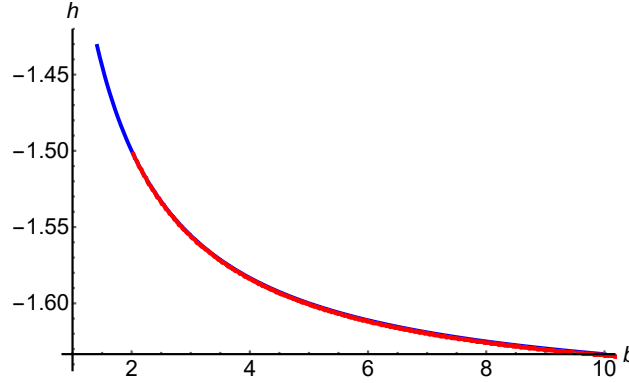


Figura 4.3: Solución analítica (azul) vs solución numérica (rojo) del problema de valor inicial (4.2). Gráfica generada por **Mathematica 11.1**.

$$x(3, -4, 2) = \frac{1}{8} \quad y \quad y(3, -4, 2) = -\frac{4}{61}.$$

Se puede verificar que la solución analítica de (4.4) está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-2b}{-2 + 2abt + bt^2}, \\ y(t) &= \frac{-3a}{-3 + 3abt + at^3}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Las superficies de nivel correspondientes se intersectan en la curva dada en la figura 4.4. Se utilizará el método de continuación numérica tomando el punto inicial  $p_1 = (3, -4, 2)$  y los valores fijos

$$\epsilon_1 = 10^{-6}, \quad \epsilon_2 = 10^{-5}, \quad \epsilon_3 = 10^{-4}, \quad k = 400 \quad y \quad h = 10^{-4}.$$

Puesto que  $F_1(t, a, b) = (t + a)x^2(t)$  y  $F_2(t, a, b) = (t^2 + b)y^2(t)$  entonces

$$\begin{aligned} \nabla F_1 &= \left( x^2 + 2(t + a)x(t)\dot{x}(t), x^2(t) + 2(t + a)x(t)x_a(t), 2(t + a)x(t)x_b(t) \right), \\ \nabla F_2 &= \left( 2ty^2 + 2(t^2 + a)y(t)\dot{y}(t), 2(t^2 + b)y(t)y_a(t), y^2(t) + 2(t^2 + b)y(t)y_b(t) \right). \end{aligned}$$

Definiendo  $\nabla F_1 = v_1$  y  $\nabla F_2 = v_2$ , se tiene que  $W = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$  es un vector unitario ortogonal a ambos gradientes.

El vector  $W$  permitirá encontrar los puntos que están dispuestos a lo largo de la curva intersección de las dos superficies al hacer las iteraciones desde el punto  $p_0 = p_0 + hW$ .

Luego de realizar 400 iteraciones del algoritmo de continuación numérica, se tiene que  $Q_{400} = (3,35735, -3,63827, 0,703102)$ , y al medir cuánto se ha alejado de la solución inicial  $(x(p_0), y(p_0))$  se verifica que

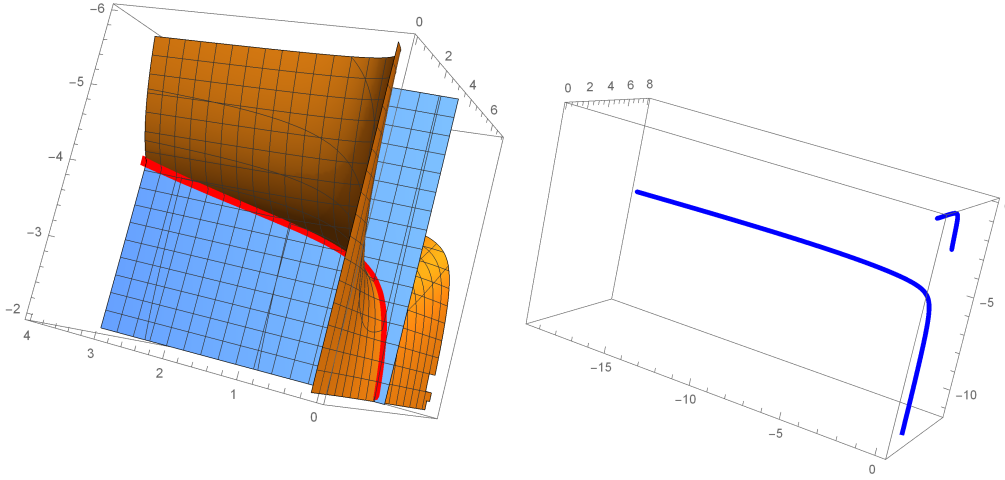


Figura 4.4: Curva intersección de las superficies de nivel  $x(t, a, b) = \frac{1}{8}$  y  $y(t, a, b) = -\frac{4}{61}$ . Gráfica generada por **Mathematica 11.1**

$$|x(p_0) - x(Q_{400})| = 2,1 \times 10^{-5} \quad y \quad |y(p_0) - y(Q_{400})| = 4 \times 10^{-6}.$$

Si se desea obtener un error más pequeño, hacemos la corrección calculando  $\nabla x(Q_{400})$  y  $\nabla y(Q_{400})$ , para posteriormente ejecutar de nuevo el algoritmo y así encontrar nuevos puntos con una mejor aproximación a la solución que los anteriores,

- $Q = Q_{400} + h_1 \frac{\nabla F_1(Q_{400})}{|\nabla F_2(Q_{400})|}.$
- $Q_n = Q + h_2 \frac{\nabla y(Q_{400})}{|\nabla y(Q_{400})|}.$

Luego de hacer dicha corrección, se verifica que

$$|x(p_0) - x(Q_n)| = 10^{-7} \quad y \quad |y(p_0) - y(Q_n)| = 10^{-8}.$$

Así, el nuevo punto de partida para seguir con la continuación numérica es

$$Q_n = (1,26421, -0,0692436, 0,114803).$$

Al cabo de 500 iteraciones más se encuentra un nuevo punto  $Q_f$  donde

$$|x(p_0) - x(Q_f)| = 1,2 \times 10^{-6} \quad y \quad |y(p_0) - y(Q_f)| = 4 \times 10^{-7}.$$

La figura 4.5 muestra como los puntos obtenidos en la continuación numérica van cubriendo la curva de nivel cuando ambas curvas se muestran en un mismo plano.

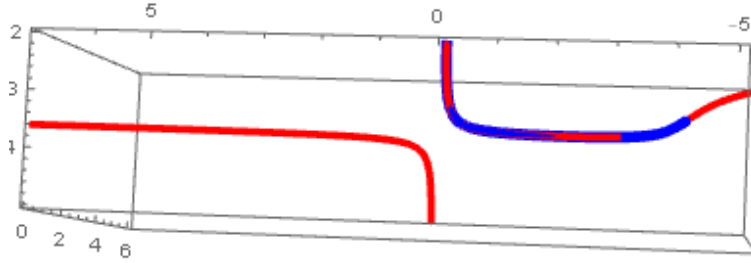


Figura 4.5: *Solución analítica (rojo) vs solución numérica (azul) dada por el algoritmo, del problema de valor inicial (4.4). Gráfica generada por **Mathematica 11.1**.*

Una vez se ha puesto a prueba el método de continuación con ejemplos sencillos y fáciles de verificar, a continuación se explica la forma como se implementó en el problema de 4-cuerpos para encontrar soluciones periódicas que validan numéricamente los resultados expuestos en el teorema 3.2.

**Ejemplo 4.3.** *Considere las constantes fijas  $N = 4$ ,  $m = 3$ ,  $M = 7$  y  $r_0 = 11$  y el sistema*

$$\begin{aligned} Z(T, a, b) &= 0, \\ \dot{R}(T, a, b) &= 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

*entonces de la Observación 3.2, se tiene que existe  $T > 0$  tal que las funciones  $Z(t, a, b)$  y  $R(t, a, b)$  son  $2T$ -periódicas. Más aún, el Teorema 3.2 garantiza a lo largo de la línea solución dada por*

$$L = \{(T, a_0, b) : a_0 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{3}}{11}}, b = 0\},$$

*la existencia de una bifurcación en el punto (para más detalles consultar [21])*

$$p_0 = (T_0, a_0, 0) = \left( \frac{11\sqrt{11}\pi}{4}, \sqrt{\frac{7 + \sqrt{3}}{11}}, 0 \right) = (28.6536, 0.890967, 0).$$

Note que las funciones  $Z(T, a, b)$ ,  $R(T, a, b)$  y  $\Theta(T, a, b)$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{-16x_1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 x_1^2 + x_2^2\right)^{3/2}}, \\ \dot{x}_4 &= \frac{121a^2}{x_2^2} - \frac{\sqrt{3}}{x_2^2} - \frac{7x_2}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 x_1^2 + x_2^2\right)^{3/2}}, \\ \dot{x}_5 &= \frac{11a}{x_2^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

con condiciones iniciales

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 11, x_3(0) = b, x_4(0) = 0 \text{ y } x_5(0) = 0,$$

donde

$$x_1(t) = Z(T, a, b), \quad x_2(t) = R(T, a, b), \quad \dot{x}_1(t) = \dot{Z}(T, a, b), \quad \dot{x}_2(t) = \dot{R}(T, a, b) \text{ y } x_5(t) = \Theta(T, a, b).$$

Para implementar el algoritmo y así generar una solución numérica, de nuevo se hace uso del software Mathematica 11.1. Se comienza resolviendo el sistema extendido de ecuaciones diferenciales formado con las derivadas parciales respecto a los parámetros  $(T, a, b)$  de cada una de las ecuaciones del sistema (4.7). Se obtiene así, un sistema formado por 15 ecuaciones diferenciales de primer orden.

Una vez se han fijado los valores  $\epsilon_1, \epsilon_2 \leq 10^{-6}$ , se puede utilizar el teorema 3.2 que garantiza la continuación analítica a través de la existencia de una curva  $T(b)$  en una vecindad del punto  $p_0$ . A continuación, se busca (por ensayo y error) una solución no trivial del sistema extendido en dicha vecindad. Ésta se encontró escogiendo  $b = 0.05$ , verificando que en este valor de  $b$  los ceros de las funciones  $Z$  y  $\dot{R}$  están en el orden establecido al comienzo. Luego, haciendo pequeños cambios en los valores de  $a_0$  y  $T_0$ , se tiene que **el punto inicial**  $p_1$  desde el que se realiza la continuación numérica es

$$p_1 = (T_1, a_1, b_1) = (28.708, 0.8892815, 0.05).$$

Este punto satisface  $|Z(p_1)| \leq \epsilon_1$  y  $|\dot{R}(p_1)| \leq \epsilon_2$ . Note que se puede calcular el valor exacto de  $\Theta(p_0)$ ,

$$\Theta(p_0) = \frac{a_0 T_0}{11} = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{3}}}{4} = 2.32086.$$

Además, numericamente se calcula  $T(p_1) \approx 2.32327$ .

En [21] se muestra la gráfica obtenida luego de calcular 12000 soluciones numéricas no triviales para el sistema (4.6) (ver figura 4.6). La recta  $L$  está de color rojo, y cerca de ella se encuentra el punto  $p_1$ .

La función  $\Theta$  cambia a lo largo de tales soluciones tomando valores cada vez mas grandes que  $\pi$  y por continuidad, tenemos que para alguna solución  $p(T, a, b)$  del sistema, se verifica que  $\Theta(p) = \frac{u}{v}2\pi$  con  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Es por ello que además del punto  $p_1$ , en la figura 4.6 aparecen marcados sobre la curva que es formada por la continuación numérica (en color azul), los puntos  $p_2, p_3$  y  $p_4$ . En ellos se aplicó el algoritmo de corrección de tal forma que el valor de  $\Theta$  fuera respectivamente  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{4\pi}{5}$  y  $\pi$ .

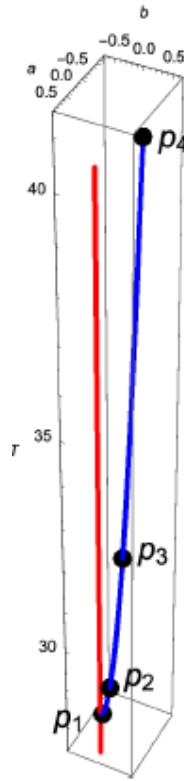


Figura 4.6: La curva en azul está formada por 12000 puntos. Cada punto genera una solución periódica del problema de 4-cuerpos y fueron obtenidos por la continuación numérica desde el punto  $p_1$  tomado cerca del punto  $p_0$  (figura tomada de [24]).

Bajo esta situación en el caso del problema de 4-cuerpos y de acuerdo al teorema 3.2, se

tiene que las ecuaciones de movimiento que determinan órbitas periódicas están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_4(t) &= (0, 0, F(t, a, b),) \\ \mathbf{r}_1(t) &= \left( R(t, a, b) \cos(\Theta(t, a, b)), R(t) \sin(\Theta(t, a, b)), -\frac{11}{9} F(a, b, t) \right) \\ \mathbf{r}_2(t) &= \left( R(t, a, b) \cos(\Theta(t, a, b) + \frac{2\pi}{3}), R(t) \sin(\Theta(t, a, b) + \frac{2\pi}{3}), -\frac{11}{9} F(t, a, b) \right), \\ \mathbf{r}_3(t) &= \left( R(t, a, b) \cos(\Theta(t, a, b) + \frac{4\pi}{3}), R(t) \sin(\Theta(t, a, b) + \frac{4\pi}{3}), -\frac{11}{9} F(t, a, b) \right), \end{aligned}$$

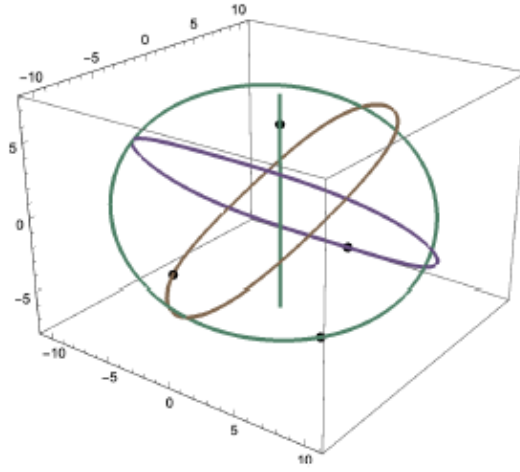


Figura 4.7: Imagen de las funciones  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  y  $\mathbf{r}_4$  que determinan el movimiento de cada cuerpo (tomada de [24])

## CAPÍTULO 5

---

### Conclusiones y trabajo futuro

---

El problema de  $N$ -cuerpos es quizás uno de los problemas de mayor estudio en las matemáticas. Desde su planteamiento en 1687 por Isacc Newton en *Philosophie Naturalis Principia Mathematica*, como un modelo de estudio para la dinámica del sistema solar, ha llamado la atención de muchos matemáticos, por ejemplo J. Bernoulli, L. Euler, J.L. Lagrange, H. Poincaré, K. Sundmann, K.A. Sitnikov, G.D. Birkhoff entre otros. De manera más reciente encontramos a C. L. Siegel, A. Kolmogorov, V.M. Alekseev, J. Moser, V. Arnold, A. Chen-ciner, D. Saari entre otros. Toda esta afluencia de científicos alrededor de este problema ha sido fuente de inspiración, creación y desarrollo de diversas teorías matemáticas que hoy día son insumo fundamental del quehacer matemático, a tal punto que hoy día sigue siendo un tema de investigación muy activo sirviendo como punto de encuentro entre varias disciplinas. Usando argumentos geométricos I. Newton resolvió el problema de 1-cuerpo (problema de Kepler) y el problema de 2-cuerpos (el cual puede reducirse a un problema de Kepler). Posteriormente Johann Bernoulli en 1710, Daniel Bernoulli en 1734 y Leonard Euler en 1744 resuelven analíticamente el problema de dos cuerpos. El reto siguiente fue efectivamente el problema de 3-cuerpos, pero encontrar su solución resultó ser un problema muy complicado. Fue hasta 1889, cuando Henri Poincaré en su obra *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* estableció que para  $N \geq 3$ -cuerpos es imposible resolver las ecuaciones de movimiento reduciendo la dimensión del sistema con la ayuda de primeras integrales (funciones que se mantienen constantes a lo largo de cualquier solución dada).

**Conclusiones:** Desde el trabajo de H. Poincaré para el problema general de  $N \geq 3$ -cuerpos, se han hecho muchos avances sobre la existencia y el comportamiento de soluciones para casos particulares que involucran muchas simplificaciones, por ejemplo: configuraciones

con muchas simetrías, problemas con cuerpos de masa infinitesimal (llamados problemas restringidos de  $N$ -cuerpos), configuraciones planares, entre otras (ver [2, 4, 6, 10, 12, 13, 18]). En este sentido, uno de los principales objetos de estudio sobre el sistema de ecuaciones diferenciales (2.11) es el comportamiento de las soluciones en un intervalo de tiempo no acotado al igual que dar respuestas a preguntas como tales como, la existencia o no de soluciones acotadas, la posible colisión en tiempo finito, la existencia de soluciones recurrentes y la existencia y construcción de soluciones periódicas. En este último caso el conocimiento de la órbita periódica para un tiempo finito permite conocerla para todo valor del tiempo. Por esta razón, en este trabajo de investigación nos preocupamos por el problema de existencia de familias de soluciones periódicas y simétricas en una configuración particular del problema de  $N$ -cuerpos: El *problema de  $(N + 1)$ -cuerpos poligonal espacial* (en forma breve: problema poligonal espacial) y el *problema de  $(2N + 1)$ -cuerpos antiprismal restringido* (en forma breve: problema antiprismal restringido).

De este modo, podemos decir que en este trabajo se han obtenido importantes resultados que proporcionan condiciones iniciales para hallar soluciones periódicas del problema de  $N$ -cuerpos poligonal, en ese sentido se puede mencionar lo siguiente:

- Se presenta un estudio analítico que aporta condiciones especiales para la obtención de soluciones periódicas del problema de  $N$ -cuerpos poligonal que permite establecer los resultados principales del trabajo (Teoremas 3.2 y 3.3).
- El capítulo 4 propone una simulación numérica considerando una configuración particular del problema de  $N$ -cuerpos poligonal, como un ejemplo que permite validar numéricamente lo expuesto en los resultados principales del trabajo (los detalles en cuanto a la validez del uso de este algoritmo de continuación no pretenden ser parte de los resultados obtenidos en el trabajo (para ello consultar [23])).
- Los resultados obtenidos en los Teoremas 3.2 y 3.3 presentan la forma explícita de las curvas paramétricas  $(\alpha(T, a, b))$  obtenidas producto de la continuación analítica de las soluciones de los sistemas estudiados en el capítulo 3.
- Puesto que no hay mucha documentación previa al respecto de la forma de las soluciones del problema de  $N$  cuerpos poligonal, este trabajo constituye un aporte importante encaminado al estudio de otros tipos de configuraciones especiales que aún son objeto de investigación por parte de la comunidad científica que trabaja en torno al problema.

**Trabajo futuro:** En el desarrollo de esta investigación nos hemos encontrados con problemas interesantes derivados de este trabajo, si bien ellos no hacen parte de los objetivos planteados al inicio del mismo, se proponen como posibles estudios posteriores que permitan obtener resultados complementarios. En este sentido, el trabajo a futuro se puede abordar desde los siguientes temas:

- Estudiar desde esta perspectiva, otras configuraciones especiales derivadas del problema de  $N$ -cuerpos poligonal. Por ejemplo, aquella configuración en donde los cuerpos primarios se mueven en los vértices de un antiprisma regular de  $2N$ -lados.
- Analizar la estabilidad de las soluciones periódicas obtenidas para el problema de  $N$ -cuerpos poligonal. En este caso, un estudio de las ecuaciones variacionales, la teoría de Floquet o métodos de perturbación local son herramientas claves para lograr este objetivo.

## APÉNDICE A

---

### Deducción de las ecuaciones de movimiento en el problema de $N$ -cuerpos poligonal

---

En este apéndice se deducen las ecuaciones de movimiento del problema de  $N$ -cuerpos poligonal presentadas en el Capítulo 3. Cabe mencionar que algunos de los cálculos presentados en esta parte en lo referente a la deducción de estas ecuaciones, también se pueden encontrar en [23] y [27].

Para iniciar, es preciso recordar que la posición del cuerpo  $P_1$  está dada por el vector  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y que la posición  $r_j$  de cada cuerpo  $P_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, N-1$  satisface  $\mathbf{r}_j = \mathcal{A}^{j-1} \mathbf{r}_1$  en donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & \Lambda^{tr} \\ \Lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = (0, 0) \quad (\text{A.1})$$

y

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{N-1}) & -\sin(\frac{2\pi}{N-1}) \\ \sin(\frac{2\pi}{N-1}) & \cos(\frac{2\pi}{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar las siguientes propiedades de la matriz  $A$

- a.  $A$  es una isometría en  $\mathbb{R}^2$ .
- b.  $(A^{j-1})^{-1} = A^{N-j}$  y  $A^{N-1} = I_2$ .
- c.  $\mathcal{D} = \{I_2, A, \dots, A^{N-2}\}$  es un grupo cíclico de orden  $N-1$ .

Note que estas mismas propiedades se extienden de manera directa sobre la matriz  $\mathcal{A}$  dada en (A.1). De otro lado, otra interesante propiedad de la matriz  $A$  se presenta en el siguiente resultado.

**Lema A.1.** Sea  $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por (3.1) y  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ . Entonces:

$$\sum_{k=1, k \neq j}^{N-1} \frac{(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}\|^3} = \sum_{k=1}^{N-2} \frac{(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}\|^3},$$

para cada  $j \in \{1, \dots, N-1\}$ .

*Demostración.* Sea  $j \in \{1, \dots, N-1\}$  fijo. Es claro que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, k \neq j}^{N-1} \frac{(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}\|^3} &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}\|^3} + \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}\|^3}, \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\mathcal{A}^{-k} - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^{-k} - I_3)\mathbf{r}\|^3} + \sum_{k=1}^{N-1-j} \frac{(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}\|^3}, \end{aligned}$$

Dado que  $\mathcal{A}^{-k} = \mathcal{A}^{(N-1)-k}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}\|^3} &= \sum_{k=(N-1)-(j-1)}^{N-2} \frac{(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}\|^3} + \sum_{k=1}^{N-1-j} \frac{(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}\|^3}, \\ &= \sum_{k=1}^{N-2} \frac{(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}}{\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}\|^3}. \end{aligned}$$

Probándose así el lema. □

De la condición (A.1) y puesto que  $\mathcal{A}$  es no singular, la ecuación de movimiento de cada cuerpo  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, N-1$  para el *problema de  $N$ -cuerpos poligonal*, aquí planteado está dada por

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{k=1, k \neq j}^{N-1} \frac{m(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3} + \frac{M(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_j\|^3},$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{j-1}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \sum_{k=1, k \neq j}^{N-1} \frac{m(\mathcal{A}^{k-1} - \mathcal{A}^{j-1})\mathbf{r}_1}{\|(\mathcal{A}^{k-1} - \mathcal{A}^{j-1})\mathbf{r}_1\|^3} + \frac{M(\mathbf{r}_N - \mathcal{A}^{j-1}\mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_N - \mathcal{A}^{j-1}\mathbf{r}_1\|^3}, \\
\mathcal{A}^{j-1}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \sum_{k=1, k \neq j}^{N-1} \frac{m\mathcal{A}^{j-1}[(\mathcal{A}^{j-1})^{-1}\mathcal{A}^{k-1} - I_3]\mathbf{r}_1}{\|\mathcal{A}^{j-1}[(\mathcal{A}^{j-1})^{-1}\mathcal{A}^{k-1} - I_3]\mathbf{r}_1\|^3} + \frac{M(\mathbf{r}_N - \mathcal{A}^{j-1}\mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_N - \mathcal{A}^{j-1}\mathbf{r}_1\|^3}, \\
\mathcal{A}^{j-1}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \sum_{k=1, k \neq j}^{N-1} \frac{m\mathcal{A}^{j-1}[(\mathcal{A}^{j-1})^{-1}\mathcal{A}^{k-j} - I_3]\mathbf{r}_1}{\|\mathcal{A}^{j-1}(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}_1\|^3} + \frac{M(\mathbf{r}_N - \mathcal{A}^{j-1}\mathbf{r}_1)}{\|\mathcal{A}^{j-1}(\mathcal{A}^{N-j}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1)\|^3}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \sum_{k=1, k \neq j}^{N-1} \frac{m(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}_1}{\|(\mathcal{A}^{k-j} - I_3)\mathbf{r}_1\|^3} + \frac{M(\mathcal{A}^{j-1})^{-1}(\mathbf{r}_N - \mathcal{A}^{j-1}\mathbf{r}_1)}{\|\mathcal{A}^{N-j}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1\|^3}.
\end{aligned}$$

Por último, del Lema A.1 obtenemos que para cada  $j = 1, \dots, N-1$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \sum_{k=1}^{N-2} \frac{m(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}_1}{\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}_1\|^3} + \frac{M(\mathcal{A}^{N-j}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1)}{\|\mathcal{A}^{N-j}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1\|^3}. \quad (\text{A.2})$$

A continuación analizamos cada término de la ecuación (A.2). Para alcanzar este propósito, escribimos la posición del cuerpo  $\mathbf{r}_1$  en coordenadas cilíndricas,

$$x_1(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y_1(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad z_1(t) = z_1(t),$$

en donde

$$\|\mathbf{r}_1(t)\|^2 = r^2(t) + z_1^2(t).$$

En este nuevo sistema de coordenadas obtenemos

$$(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} r(c_k - 1)c_\theta - r s_k s_\theta \\ r s_k c_\theta + r(c_k - 1)s_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(c_k c_\theta - s_k s_\theta - c_\theta) \\ r(s_k c_\theta + c_k s_\theta - s_\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(c_{k+\theta} - c_\theta) \\ r(s_{k+\theta} - s_\theta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde se ha usado la notación

$$c_k := \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right), \quad c_\theta := \cos \theta \quad \text{y} \quad s_k := \sin\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right), \quad s_\theta := \sin \theta.$$

por simplicidad. En consecuencia, el primer denominador en la sumatoria (A.2) satisface

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}_1\|^3 &= \left( [r(c_{k+\theta} - c_\theta)]^2 + [r(s_{k+\theta} - s_\theta)]^2 \right)^{3/2}, \\
&= \left( 2(1 - c_k)r^2 \right)^{3/2}.
\end{aligned}$$

De la identidad

$$1 - c_k = 2s_{k/2}^2 = 2\sin^2\left(\frac{\pi k}{N-1}\right),$$

y dado que  $\frac{\pi}{N-1} \leq \frac{\pi k}{N-1} < \pi$  para todo  $1 \leq k \leq N-2$ , se deduce finalmente que

$$\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}_1\|^3 = (4s_{k/2}^2 r^2)^{3/2} = 8s_{k/2}^3 r^3 = 8\sin^3\left(\frac{\pi k}{N-1}\right) r^3.$$

Un cálculo directo, muestra que el segundo denominador en la sumatoria (A.2) satisface

$$\|\mathcal{A}^{N-j}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1\| = \|(\mathcal{A}^{j-1})^{-1}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_j)\| = \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_j\|. \quad (\text{A.3})$$

Por hipótesis, como el centro de masas de todo el sistema está en el origen, se tiene la condición

$$m \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{r}_j(t) + M\mathbf{r}_N(t) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^3.$$

De (A.1), la anterior ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} m \sum_{j=1}^{N-1} (c_{j-1}x_1(t) - s_{j-1}y_1(t)) + Mx_N &= 0, \\ m \sum_{j=1}^{N-1} (s_{j-1}x_1(t) + c_{j-1}y_1(t)) + My_N &= 0, \\ m \sum_{j=1}^{N-1} z_1(t) + Mz_N(t) &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $\sum_{j=1}^{N-1} c_{j-1} = \sum_{j=1}^{N-1} s_{j-1} = 0$  se concluye:

$$x_N(t) = y_N(t) = 0 \quad \text{y} \quad (N-1)mz_1(t) + Mz_N(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^3.$$

La última ecuación brinda una relación entre la posición sobre el eje  $z$  del cuerpo  $P_N$  y la tercera coordenada del cuerpo  $P_1$ . Dada su importancia la resaltamos aquí

$$z_1(t) = -\frac{M}{(N-1)m}z_N(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.4})$$

Más aún, de (A.3) se deduce

$$\|\mathcal{A}^{N-j}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_j\| = \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1\|,$$

para todo  $j = 1, \dots, N-1$ , con

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1\|^3 &= \left\| \left( -rc_\theta, -rs_\theta, z_N + \frac{Mz_N}{(N-1)m} \right) \right\|^3, \\ &= \left[ r^2 + \left( \left( 1 + \frac{M}{(N-1)m} \right) z_N \right)^2 \right]^{3/2}. \\ &= [r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{3/2}. \end{aligned}$$

donde  $\gamma_N = \frac{(N-1)m + M}{(N-1)m}$ .

De estos últimos cálculos se desprenden dos hechos importantes

a. Para todo  $k = 1, \dots, N-2$  se satisface

$$\frac{(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}_1}{\|(\mathcal{A}^k - I_3)\mathbf{r}_1\|^3} = \begin{pmatrix} (c_{k+\theta} - c_\theta)/8s_{k/2}^3 r^2 \\ (s_{k+\theta} - s_\theta)/8s_{k/2}^3 r^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b. Para todo  $j = 1, \dots, N-1$  se satisface

$$\frac{\mathcal{A}^{N-j}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1}{\|\mathcal{A}^{j-1}\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1\|^3} = \begin{pmatrix} -rc_\theta/[r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{3/2} \\ -rs_\theta/[r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{3/2} \\ \gamma_N z_N/[r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{3/2} \end{pmatrix}.$$

De lo anterior, la ecuación diferencial de cada coordenada en (A.2) en coordenadas cilíndricas<sup>1</sup> están dadas por

$$\begin{aligned} (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)c_\theta - 2(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})s_\theta &= m \sum_{k=1}^{N-2} \frac{c_{k+\theta} - c_\theta}{8r^2 s_{k/2}^3} - \frac{Mrc_\theta}{[r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{3/2}}, \\ (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)s_\theta - 2(2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta})c_\theta &= m \sum_{k=1}^{N-2} \frac{s_{k+\theta} - s_\theta}{8r^2 s_{k/2}^3} - \frac{Mrs_\theta}{[r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{3/2}}, \\ -M\ddot{z}_N/(N-1)m &= M\gamma_N z_N/[r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{3/2}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

En este punto es conveniente analizar el coeficiente en la sumatoria del lado derecho de las dos primeras ecuaciones en (A.5) a través de simples identidades trigonométricas.

---

<sup>1</sup> $\ddot{x}_1 = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)c_\theta - 2(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})s_\theta$ ,  $\ddot{y}_1 = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)s_\theta - 2(2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta})c_\theta$  y  $\ddot{z}_1 = -M\ddot{z}_N/(N-1)m$ .

Note que

$$\begin{aligned} \frac{c_{k+\theta} - c_\theta}{s_{k/2}^3} &= \frac{(c_k - 1)c_\theta - s_k s_\theta}{s_{k/2}^3} \\ &= \frac{-2s_{k/2}^2}{s_{k/2}^3} c_\theta - \frac{s_k}{s_{k/2}^3} s_\theta = -2 \left( \frac{1}{s_{k/2}} c_\theta + \frac{c_{k/2}}{s_{k/2}^2} s_\theta \right). \end{aligned}$$

Puesto que  $c_{\pi-\alpha} = -c_\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , un cálculo directo muestra que  $\sum_{k=1}^{N-2} \frac{c_{k/2}}{s_{k/2}^2} = 0$ . En consecuencia

$$m \sum_{k=1}^{N-2} \frac{c_{k+\theta} - c_\theta}{8r^2 s_{k/2}^3} = -\frac{m}{4r^2} \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{s_{k/2}} c_\theta.$$

Análogamente se demuestra que

$$m \sum_{k=1}^{N-2} \frac{s_{k+\theta} - s_\theta}{8r^2 s_{k/2}^3} = -\frac{m}{4r^2} \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{s_{k/2}} s_\theta.$$

Finalmente se tiene que (A.5) equivale al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda_N}{r^2} + \frac{Mr}{h^3(r, z_N)} &= 0, \\ \ddot{z}_N + \sigma z_N / h^3(r, z_N) &= 0, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

en donde

$$\lambda_N = \frac{m}{4} \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{s_{k/2}}, \quad \sigma = (N-1)m + M, \quad \text{y} \quad h(r, z_N) = [r^2 + \gamma_N^2 z_N^2]^{1/2}.$$

## APÉNDICE B

---

### Ecuaciones variacionales

---

En esta parte del documento, se presentan los cálculos realizados en las ecuaciones variacionales derivadas del sistema (3.7) y que fueron utilizadas en la Sección 3.2. Para ello, recordemos que dicho sistema es

$$\begin{aligned} F(z, r) &= -\frac{\sigma z}{h^3(r, z)}, \\ G(z, r) &= \frac{a^2 r^2}{r^3} - \frac{\lambda_N}{r^2} - \frac{Mr}{h^3(r, z)}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde  $h(r, z) = \sqrt{r^2 + \gamma_N^2 z^2}$ . Comencemos considerando las funciones  $Z = Z(t, a, b)$  y  $R = R(t, a, b)$  como soluciones de (B.1) y definamos la función

$$m(t, a, b) = [h(R(t, a, b), Z(t, a, b))]^{-3}.$$

A continuación se calculan las derivadas de  $m$  respecto a los parámetros  $a$  y  $b$ . Así que, derivando  $m$  respecto de  $a$  tenemos

$$m_a = -3h^{-4}h_a,$$

en donde

$$h_a = \frac{1}{h} \left( R R_a + \gamma_N^2 Z Z_a \right).$$

De forma análoga, al derivar respecto al parámetro  $b$  se obtiene

$$\begin{aligned} m_b &= -3h^{-4}h_b, \\ m_{bb} &= 12h^{-5}h_b - 3h^{-4}h_{bb}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} h_b &= \frac{1}{h} \left( R R_b + \gamma_N^2 Z Z_b \right), \\ h_{bb} &= \frac{-1}{h^2} \left( R R_b + \gamma_N^2 Z Z_b \right) + \frac{1}{h} \left( R_b^2 + R R_{bb} + \gamma_N^2 [(Z_b)^2 + Z Z_{bb}] \right). \end{aligned}$$

Puesto que  $\alpha(t) = (t, a_0, 0)$  se tiene directamente que

$$Z(\alpha(t)) = \dot{R}(\alpha(t)) = 0, \quad \text{y} \quad h(\alpha(t)) = R(\alpha(t)) = r_0,$$

más aún, al reemplazar en las derivadas parciales de  $h$  se obtiene

$$h_a(\alpha(t)) = R_a(\alpha(t)), \quad h_b(\alpha(t)) = R_b(\alpha(t))$$

y

$$h_{bb}(\alpha(t)) = \frac{-R_b(\alpha(t)) + R_b^2(\alpha(t))}{r_0} + R_{bb}(\alpha(t)) + \frac{\gamma_N^2 Z_b^2(\alpha(t))}{r_0}.$$

Por lo tanto,

$$m_a(\alpha(t)) = \frac{-3}{r_0^4} R_a(\alpha(t)), \quad m_b(\alpha(t)) = \frac{-3}{r_0^4} R_b(\alpha(t))$$

y

$$m_{bb}(\alpha(t)) = -\frac{3}{r_0^4} \left( R_{bb}(\alpha(t)) + \frac{\gamma_N^2}{r_0} Z_b^2(\alpha(t)) \right).$$

De la primera ecuación en (B.1) tenemos

$$F(R, Z) = \frac{-\sigma Z(t, a, b)}{h^3(R, Z)},$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} F_Z(R, Z) &= \frac{-\sigma(R^2(t, a, b) - 2\gamma_N^2 Z^2(t, a, b))}{h^5(R, Z)}, \\ F_R(R, Z) &= \frac{3\sigma Z(t, a, b)R(t, a, b)}{h^5(R, Z)}, \end{aligned}$$

y evaluando a lo largo de  $\alpha(t)$  obtenemos

$$F_Z(0, r_0) = \frac{-\sigma}{r_0^3}, \quad F_R(0, r_0) = 0.$$

Un cálculo directo muestra que las derivadas de segundo orden de la función  $F$  están dadas por

$$\begin{aligned} F_{ZZ}(R, Z) &= \frac{3\sigma\gamma_N^2 Z(t, a, b)(3R^2(t, a, b) - 2\gamma_N^2 Z^2(t, a, b))}{h^7(R, Z)}, \\ F_{ZR}(R, Z) &= \frac{3\sigma R(t, a, b)(R^2(t, a, b) - 4\gamma_N^2 Z^2(t, a, b))}{h^7(R, Z)}, \\ F_{RR}(R, Z) &= \frac{3\sigma Z(t, a, b)(-4R^2(t, a, b) + \gamma_N^2 Z^2(t, a, b))}{h^7(R, Z)}, \end{aligned}$$

y evaluando a lo largo de  $\alpha(t)$  cada derivada se obtiene

$$F_{ZZ}(0, r_0) = 0, \quad F_{ZR}(0, r_0) = \frac{3\sigma}{r_0^4} \quad \text{y} \quad F_{RR}(0, r_0) = 0.$$

Por otra parte, considerando la segunda ecuación de (B.1)

$$G(R, Z) = \frac{a^2 r_0^2}{R^3} - \frac{\lambda_N}{R^2} - \frac{MR}{h^3(R, Z)},$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} G_Z(R, Z) &= \frac{3M\gamma_N^2 R(t, a, b)Z(t, a, b)}{h^5(R, Z)}, \\ G_R(R, Z) &= \frac{-3a^2 r_0^2}{R^4} + \frac{2\lambda_N}{R^3} - \frac{M}{h^3(R, Z)} + \frac{3MR^2}{h^5(R, Z)}, \end{aligned}$$

y evaluando a lo largo de  $\alpha(t)$

$$G_Z(0, r_0) = 0, \quad G_R(0, r_0) = \frac{-3a_*^2}{r_0^2} + \frac{2\lambda_N + 2M}{r_0^3} = \frac{-a_*^2}{r_0^2}.$$

De igual forma, obtenemos las derivadas de segundo orden de  $G$

$$\begin{aligned} G_{ZZ}(R, Z) &= \frac{3M\gamma_N^2 R(t, a, b)(R^2(t, a, b) - 4\gamma_N^2 Z^2(t, a, b))}{h^7(Z, R)}, \\ G_{ZR}(R, Z) &= \frac{3M\gamma_N^2 Z(t, a, b)(-4R^2(t, a, b) + \gamma_N^2 Z^2(t, a, b))}{h^7(Z, R)}, \\ G_{RR}(R, Z) &= \frac{12a^2 r_0^2 - 6\lambda_N R(t, a, b)}{R^5(t, a, b)} + \frac{3MR(t, a, b)(h^2(Z, R) - 3R^2(t, a, b) + 2\gamma_N^2 Z^2(t, a, b))}{h^7(Z, R)}. \end{aligned}$$

y al evaluar en  $\alpha(t)$

$$G_{ZZ}(0, r_0) = \frac{3M\gamma_N^2}{r_0^4}, \quad G_{ZR}(0, r_0) = 0, \quad G_{RR}(0, r_0) = \frac{12a_*^2}{r_0^3} - \frac{6M + 6\lambda_N}{r_0^4}.$$

Las anteriores derivadas parciales de primer y segundo orden de las funciones  $F$  y  $G$ , permitirán deducir las ecuaciones variacionales del sistema (B.1).

**Derivadas parciales de las funciones  $Z$  y  $R$ .** Con el propósito de complementar los resultados citados en la demostración del Teorema 3.2, a continuación se deducen las ecuaciones variacionales correspondientes a la función  $Z(t, a, b)$  y  $R(t, a, b)$  a partir del sistema (3.17).

**Derivadas de primer orden.** Al derivar respecto al parámetro  $a$ , se obtiene que

$$\ddot{R}_a = G_a(Z, R) + G_Z(Z, R)Z_a + G_R(Z, R)R_a.$$

De lo que se sigue

$$\begin{aligned}\ddot{R}_a(\alpha(t)) &= G_a(0, r_0) + G_Z(0, r_0)Z_a(\alpha(t)) + G_R(0, r_0)R_a(\alpha(t)), \\ &= \frac{2a_0}{r_0} + \left( \frac{-3a_0^2}{r_0^2} + \frac{2(\lambda_N + M)}{r_0^3} \right) R_a(\alpha(t)), \\ &= 2\omega_2 - \omega_2^2 R_a(\alpha(t)),\end{aligned}$$

por lo que la función  $R_a(\alpha(t))$ , satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{v}(t) + \omega_2^2 v(t) = 2\omega_2 \quad \text{con} \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0,$$

cuya solución está dada por

$$v(t) = R_a(\alpha(t)) = \frac{2}{\omega_2} \left( 1 - \cos(\omega_2 t) \right).$$

Así mismo, al derivar respecto al parámetro  $b$  se tiene que

$$\ddot{R}_b = G_Z(Z, R)Z_b + G_R(Z, R)R_b,$$

entonces, a lo largo de  $\alpha(t)$  se tiene

$$\begin{aligned}\ddot{R}_b(\alpha(t)) &= G_Z(0, r_0)Z_b(\alpha(t)) + G_R(0, r_0)R_b(\alpha(t)), \\ &= \frac{-a_0^2}{r_0^2} R_b(\alpha(t)), \\ &= -\omega_2^2 R_b(\alpha(t)),\end{aligned}$$

por tanto, la función  $R_b(\alpha(t))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{w}(t) + \omega_2^2 w(t) = 0, \quad \text{con} \quad w(0) = 0, \quad \dot{w}(0) = 0,$$

cuya solución es  $w(t) = 0$ , esto implica que

$$R_b(\alpha(t)) = \dot{R}_b(\alpha(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, de la segunda ecuación en (3.17) se sigue directamente que

$$\ddot{R}(\alpha(t)) = \frac{a_0^2}{r_0} - \frac{\lambda_N + M}{r_0^2} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De otro lado,

$$\ddot{Z}_b = F_Z(Z, R)Z_b + F_R(Z, R)R_b,$$

y puesto que  $R_b(\alpha(t)) = 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_b(\alpha(t)) &= F_Z(0, r_0)Z_b(\alpha(t)) + F_R(0, r_0)R_b(\alpha(t)), \\ &= \frac{-\sigma}{r_0^3}Z_b(\alpha(t)), \\ &= -\omega_1^2 Z_b(\alpha(t)), \end{aligned}$$

note que,  $Z_b(\alpha(t))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{n}(t) + \omega_1^2 n(t) = 0, \quad \text{con} \quad n(0) = 0, \quad \dot{n}(0) = 1.$$

que tiene solución

$$Z_b(\alpha(t)) = \frac{\text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1}.$$

**Derivadas de segundo orden.** Continuando con la derivada de segundo orden de la función  $Z$  respecto de  $b$ ,

$$\ddot{Z}_{bb} = F_Z Z_{bb} + (F_{ZZ} Z_b + F_{ZR} R_b) Z_b + F_R R_{bb} + (F_{RR} R_b + F_{ZR} Z_b) R_b,$$

En consecuencia, sobre la curva  $\alpha(t)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_{bb}(\alpha(t)) &= F_Z(0, r_0)Z_{bb}(\alpha(t)) + 2F_{ZR}(0, r_0)Z_b(\alpha(t))R_b(\alpha(t)), \\ &= \frac{-\sigma}{r_0^3}Z_{bb}(\alpha(t)), \\ &= -\omega_1^2 Z_{bb}(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $Z_{bb}(\alpha(t))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{k}(t) + \omega_1^2 k(t) = 0, \quad \text{con} \quad k(0) = 0, \quad \dot{k}(0) = 0. \quad (\text{B.2})$$

cuya solución es  $Z_{bb}(\alpha(t)) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

De otro lado, se tiene

$$\ddot{Z}_{ba} = F_Z Z_{ba} + (F_{ZZ} Z_a + F_{ZR} R_a) Z_b + F_R R_{ba} + (F_{RR} R_a + F_{ZR} Z_a) R_b,$$

y sobre la curva  $\alpha(t)$

$$\begin{aligned}\ddot{Z}_{ba}(\alpha(t)) &= F_Z(0, r_0)Z_{ba}(\alpha(t)) + F_{ZR}(0, r_0)R_a(\alpha(t))Z_b(\alpha(t)), \\ &= -\frac{\sigma}{r_0^3}Z_{ba}(\alpha(t)) + \frac{3\sigma}{r_0^4}R_a(\alpha(t))Z_b(\alpha(t)), \\ &= -\omega_1^2 Z_{ba}(\alpha(t)) + \frac{3\omega_1^2}{r_0}R_a(\alpha(t))Z_b(\alpha(t)),\end{aligned}$$

luego,  $Z_{ba}(\alpha(t))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{s}(t) + \omega_1^2 s(t) = \frac{3\omega_1^2}{r_0}v(t)n(t), \quad s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = 0, \quad (\text{B.3})$$

y bajo la condición

$$4\omega_1^2 - \omega_2^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_N \neq 4(N-1)m + 3M,$$

su solución es

$$Z_{ba}(\alpha(t)) = \frac{3\omega_1 \cos(\omega_1 t)[\omega_2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)t + 4\omega_1^2 \sin(\omega_2 t)] - 3\omega_2[\omega_2^2 - 2\omega_1^2 + 2\omega_1^2 \cos(\omega_2 t)] \sin(\omega_1 t)}{\omega_1 \omega_2^2 (4\omega_1^2 - \omega_2^2) r_0}.$$

en particular,

$$Z_{ba}(\alpha(T_0)) = \frac{3\pi}{r_0 \omega_1 \omega_2} - \frac{6\omega_1^2 \dot{v}(T_0)}{r_0 \omega_2 (4\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

De otra parte,

$$\ddot{R}_{bb} = (G_{ZZ}Z_b + G_{ZR}R_b)Z_b + G_Z Z_{bb} + (G_{RZ}Z_b + G_{RR}(0, r_0)R_b)R_b + G_R(0, r_0)R_{bb},$$

de aquí que

$$\begin{aligned}\ddot{R}_{bb}(\alpha(t)) &= G_{ZZ}Z_b^2(\alpha(t)) + G_R R_{bb}(\alpha(t)), \\ &= \frac{3M\gamma_N^2}{r_0^4}Z_b^2(\alpha(t)) - \frac{a_*^2}{r_0^2}R_{bb}(\alpha(t)), \\ &= \frac{3M\gamma_N^2}{r_0^4}Z_b^2(\alpha(t)) - \omega_2^2 R_{bb}(\alpha(t)),\end{aligned}$$

y se tiene que  $R_{bb}(\alpha(t))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{q}(t) + \omega_2^2 q(t) = \frac{3M\gamma_N^2}{r_0^4}Z_b^2(\alpha(t)), \quad \text{con} \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Cuya solución es

$$R_{bb}(\alpha(t)) = \frac{3M\gamma_N^2[4\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_2^2 \cos(2\omega_1\tau) - 4\omega_1^2 \cos(\omega_2\tau)]}{2(r_0^2\omega_1\omega_2)^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

En particular, se tiene

$$R_{bb}(\alpha(T_0)) = \frac{6M\gamma_N^2\left(1 - \cos\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\pi\right)\right)}{\omega_2^2 r_0^4(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \quad \text{y} \quad \dot{R}_{bb}(\alpha(T_0)) = \frac{3M\gamma_N^2 \dot{R}_a(\alpha(T_0))}{\omega_2 r_0^4(4\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Finalmente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_{bbb}(\alpha(t)) &= F_Z(0, r_0)Z_{bbb}(\alpha(t)) + [3F_{RZ}(0, r_0)R_{bb}(\alpha(t)) + F_{ZZZ}(0, r_0)Z_b^2(\alpha(t))]Z_b(\alpha(t)), \\ &= \frac{-\sigma}{r_0^3}Z_{bbb}(\alpha(t)) + \frac{9\sigma}{r_0^4}\left(R_{bb}(\alpha(t)) + \frac{\gamma_N^2}{r_0}Z_b^2(\alpha(t))\right)Z_b(\alpha(t)), \end{aligned}$$

de aquí que  $Z_{bbb}(\alpha(T_0))$  satisface el problema de valor inicial

$$\ddot{c}(t) + \omega_1^2 c(t) = \frac{9\omega_1}{r_0}\left(R_{bb}(\alpha(T_0)) + \frac{\gamma_N^2}{r_0}Z_b^2(\alpha(T_0))\right)Z_b(\alpha(T_0)), \quad \text{con} \quad c(0) = 0, \quad \dot{c}(0) = 0.$$

y se encuentra que su solución es

$$Z_{bbb}(\alpha(T_0)) = \frac{27\pi\gamma_N^2[r_0^3\omega_2^2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2) + M(-8\omega_1^2 + 3\omega_2^2)]}{8r_0^5\omega_1^4\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} - \frac{54M\gamma_N^2\omega_1\dot{R}_a(\alpha(T_0))}{r_0^5\omega_2^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}.$$

**Ecuaciones variacionales de  $\Theta(t, a, b)$ .** Dado que  $\dot{\Theta}(t, a, b) = \frac{r_0 a}{R^2(t, a, b)}$ , entonces

$$\Theta(t, a, b) = \int_0^t \frac{r_0 a}{R^2(s, a, b)} ds,$$

y por tanto,

$$R(\alpha(T_0)) = r_0, \quad \dot{\Theta}(\alpha(T_0)) = \omega_2 \quad \text{y} \quad \Theta(\alpha(T_0)) = \omega_2 T_0 = \frac{\omega_2}{\omega_1}\pi.$$

Un cálculo directo muestra que para todo  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \Theta_a(t, a, b) &= r_0 \left[ \int_0^t \frac{ds}{R^2(s, a, b)} - 2a \int_0^t \frac{R_a(s, a, b) ds}{R^3(s, a, b)} \right], \\ \Theta_b(t, a, b) &= -2r_0 a \int_0^t \frac{R_b(s, a, b) ds}{R^3(s, a, b)}, \end{aligned}$$

De lo que se deduce,

$$\begin{aligned}\Theta_a(\alpha(T_0)) &= \frac{\pi}{\omega_1 r_0} - \frac{2\omega_2}{r_0} \int_0^{T_0} R_a(s, a_0, 0) ds, \\ &= \frac{\pi}{\omega_1 r_0} - \frac{4(\pi\omega_2 - \omega_1 \sin(\frac{\omega_2}{\omega_1}))}{r_0 \omega_1 \omega_2}, \\ \Theta_b(\alpha(T_0)) &= 0,\end{aligned}$$

y así

$$\nabla\Theta(T, a_0, 0) = \left( \omega_2, \frac{\pi}{\omega_1 r_0} - \frac{4(\pi\omega_2 - \omega_1 \sin(\frac{\omega_2}{\omega_1}))}{r_0 \omega_1 \omega_2}, 0 \right).$$

De otro lado

$$\Theta_{bb}(t, a, b) = -2r_0 a \int_0^t \left( \frac{-3R_b^2(s, a, b)}{R^4(s, a, b)} + \frac{R_{bb}(s, a, b)}{R^3(s, a, b)} \right) ds,$$

y obtiene que

$$\begin{aligned}\Theta_{bb}(\alpha(T_0)) &= \frac{-2\omega_2}{r_0} \int_0^{T_0} R_{bb}(s, a_0, 0) ds, \\ &= \frac{-3M\gamma_N^2 \left( \pi\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2) - 4\omega_1^3 \sin(\frac{\omega_2}{\omega_1}\pi) \right)}{r_0^5 \omega_1^3 \omega_2^2 (4\omega_1^2 - \omega_2^2)}.\end{aligned}$$

---

## Bibliografía

---

- [1] Arnold, Kozlov & Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer. Third Edition. 2002.
- [2] Arredondo, J.A. (2018) *Relative equilibria in quasi-homogeneous planar three body problems*. Advances in Space Research **61**, No.1, 111-121.
- [3] Arredondo, J.A. & Manotas, A.T. (2019) *Potencial homogéneo generalizado y el problema de Kepler*. Miscelánea Matemática **68**, 85-112.
- [4] Barrabés, E., Cors, J.M., Conxita, P. & Soler, J. (2006) *Hip-Hop solutions of the  $2N$ -body problem*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. **95**, 55-66.
- [5] Barrabés, E., Cors, J.M., Conxita, P. & Soler, J. (2010) *Highly eccentric hip-hop solutions of the  $2N$ -body problem*. Physica D. **95**, 214-219.
- [6] Chenciner, A. & Montgomery, R. (2000) *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*. Annals of Mathematics. **152**. No 3, 881-901.
- [7] Corbera, M. & LLibre, J. (2010) *Family of periodic orbits for the spatial isosceles 3-body problem*. Siam. J. Math. Anal. **35** No 5, 1311-1346.
- [8] Corbera, M. (1999) *Periodic and Quasi-periodic motions for the spatial isosceles 3-Body problem*, Ph.D. thesis, Universitat Autònoma de Barcelona.
- [9] Davies, I., Truman, A. & Williams, D. (1983) *Classical periodic solution of the equal-mass  $2n$ -body problem,  $2n$ -ion problem and the  $n$ -electron atom problem*. Phys. Lett. A **99**. No 1, 15-18.

- 
- [10] Devaney, R. (1980) *Triple collision in the planar isosceles three-body problem*. *Inventions Math* **60**, pp. 249-267
- [11] Dugundji, J. & Granas, A. (2003) *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Nueva York: Springer-Verlag.
- [12] Fenucci, M. & Gronchi, G.F. (2020) *Symmetric constellations of satellites moving around a central body of large mass*. Research-Gate. Preprint.
- [13] Galán, J., Núñez, D. & Rivera, A. (2018) *Quantitative stability of certain periodic solutions in the Sitnikov problem*. *Siam J. Applied Dynamical Systems*. **17** No 1, 52-77.
- [14] Hale, J. *Ordinary Differential Equations*. Malabar, FL: Wiley and Sons, 1980.
- [15] Hirsch & Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, Inc. 1974.
- [16] Kesavan. S. *Nonlinear Functional Analysis. A first course*. Hindustan Book Agency. 2004.
- [17] Lloyd, N. *Degree theory*. Cambridge University Press. 1978.
- [18] Martinez, R. & Simo. (1987) *Qualitative study of the planar isosceles three-body problem*. *Celestial Mechanics* **41**, 179-251.
- [19] Offin, D. & Cabral, H. (2009) *Hyperbolicity for symetric periodics orbits in the isosceles three body problem*. *Discrete and continuos dynamical systems series S*. **2** No 2, 379-392.
- [20] Ortega, R. & Ureña, A. *Introducción a la Mecánica Celeste*. Editorial Universidad de Granada. 2010.
- [21] Perdomo, O. (2017) *Bifurcation in the Family of Periodic Orbits for the Spatial Isosceles 3 Body Problem* *Qual. Theory Dyn. Syst.* <https://doi.org/10.1007/s12346-017-0244-1>.
- [22] Perdomo, O. (2014) *A family of solutions of the N-body problem*. <http://arxiv.org/pdf/1507.01100.pdf>.
- [23] Perdomo, O. (2015) *A small variation of the Taylor method and periodic solution of the 3-body problem*. <http://arxiv.org/pdf/1410.1757.pdf>.
- [24] Perdomo, O. Rivera, A. & Suárez, J. (2020). *Bifurcation of periodic orbits for the N body problem, from a non geometrical family of solutions*. *Siam Journal on Applied Dynamical Systems (SIADS)*. Submitted: Sept 29 2020. (Current Stage: In review)

- 
- [25] Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tres volúmenes publicados en París entre 1892 y 1899 por Gauthier-Villars et fils.
- [26] Portilla, J. (2015) *El movimiento rectilíneo en el problema de los dos cuerpos*. Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Sede Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- [27] Rivera, A. (2013) *Periodic Solutions in the Generalized Sitnikov  $(N+1)$ -body problem*. SIAM Journal On Applied Dynamical Systems, ISSN: 1536-0040, **12**, 1515 - 1540.
- [28] Rossi, Sorrentino, Cacciapouti & Prevedelli (2014) *Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms*. **Nature** **510**. p.518-521.