



CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES: COMPLETACIÓN DE LA ESTRUCTURA TOPOLÓGICA



VIVIANA ANDREA PATIÑO MUÑOZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA (3487)

SANTIAGO DE CALI

2013



CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES: COMPLETACIÓN DE LA ESTRUCTURA TOPOLÓGICA



VIVIANA ANDREA PATIÑO MUÑOZ.

Trabajo de grado presentado para optar al título de:

Licenciado en Matemática y Física

Director

GUILLERMO ORTIZ RICO.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA (3487)
SANTIAGO DE CALI

2013



Universidad
del Valle



Instituto
de Educación
y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	Construcción de los números reales: Completación de la estructura topológica.							
Se trata de:	Proyecto	☐	Informe Final	☒				
Director:	Guillermo Ortiz							
1er Evaluador:	Maribel Anacona							
2do Evaluador:	Mónica Andrea Aponte							
Fecha y Hora	Año:	2013	Mes:	09	Día:	13	Hora:	11:00 a.m
Estudiantes								
Nombres y Apellidos completos			Código		Programa Académico			
Viviana Andrea Patiño Muñoz			200126971		3487			

Evaluación			
Aprobado	☒	Meritorio	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐
Laureado ☐			
Incompleto ☐			
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) ante:			
Director del Trabajo		1er Evaluador	2do Evaluador
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:			
Año:	Mes:	Día:	Hora:
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).			

Firmas:		
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



**PARTE 1. Términos de la licencia gen
repositorio institucional de Acuerdo a
Universidad del Valle**

**licación digital de obras en el
de Propiedad Intelectual de la**

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbalas¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra:

CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES:
COMPLETACIÓN DE LA ESTRUCTURA TOPOLOGICA.

Autores:

Nombre:

VIVIANA ANDREA PATIÑO MUÑOZ

Firma: VIVIANA A. PATIÑO
C.C. 38794908.

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Fecha:

SEPT / 2013

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de grado principalmente a mi familia y en especial a mi hijo Juan Pablo que fue el motor fundamental para querer lograr esta meta tan importante en mi vida.

De igual forma se lo dedico a mi compañero y amigo Julián Getial Getial que aunque se ha ido a un viaje sin regreso en esta vida fue el principal gestor y motivador de este trabajo.

También se lo dedico a mi director de tesis Guillermo Ortiz, que aunque muchas veces quise dejar este sueño, él siempre estuvo ahí con sus buenos consejos para decirme que todo en la vida es posible y que aunque haya dificultades lo que se empieza hay que terminarlo por que vale la pena.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a Dios por permitirme vivir esta experiencia y haber puesto sobre mí tantas bendiciones.

A todos mis profesores que con su conocimiento lograron que me formara como profesional.

A mis compañeros de estudio que con su acompañamiento continuo fueron un peldaño para poder culminar este logro en mi vida.

A mi director de tesis Guillermo Ortiz por su paciencia y dedicación.

Al Instituto de Educación y Pedagogía por permitir que me formara como licenciada en matemáticas y física.

A la Universidad del Valle por esta oportunidad tan grande en mi vida.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO I	8
LOS NÚMEROS REALES: ASPECTOS HISTÓRICOS Y EPISTEMOLÓGICOS	8
1. REVISIÓN HISTÓRICA DE LA CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{R}$	8
1.1 SOBRE LAS CONSTRUCCIONES DE CANTOR Y DEDEKIND	10
1.1.2 La construcción de Dedekind	10
1.1.3 La construcción de Cantor	13
1.2 SOBRE LA COMPLETEZ DE HILBERT	14
CAPÍTULO 2.....	20
PRELIMINARES TOPOLÓGICOS Y ALGEBRAICOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{R}$	20
2.1 PRELIMINARES TOPOLÓGICOS	20
2.1.1 Que es la topología?	20
2.1.2 La noción de vecindad.....	22
2.1.3 Espacios Topológicos.....	23
2.1.4 Funciones continuas.....	30
2.1.5 Teoremas Elementales de Extensión	32
2.2 PRELIMINARES ALGEBRAICOS	35
2.2.1 Anillos y cuerpos	35
2.2.2 Construcción de cocientes.....	36
CAPÍTULO 3.....	41
LA CONSTRUCCIÓN DE LOS REALES POR THOMAS BLYTH	41
3.1 CAMPOS ORDENADOS ARQUIMEDIANOS	41
CAPÍTULO 4.....	62
LOS REALES MEDIANTE COMPLETACIÓN DE UN GRUPO TOPOLÓGICO	62
4.1 ESTRUCTURAS UNIFORMES	65
4.1.1 Topología de un espacio uniforme	66
4.1.2 Una importante caracterización de Hausdorff.....	67
4.1.3 Funciones uniformes continuas.....	67
4.1.4 Espacios uniformes completos	68
4.1.5 Filtro minimal de Cauchy.....	70
4.1.6 La completación de un espacio uniforme	70
4.2 UNIFORMIDAD DE GRUPOS TOPOLÓGICOS.....	72
4.3 A MANERA DE CONCLUSIÓN	73
CONCLUSIONES	75
BIBLIOGRAFÍA	77

RESUMEN

Nosotros presentamos una reconstrucción detallada de la estructura de los números reales al estilo de Cantor con sucesiones de Cauchy. En esta reconstrucción seguimos los lineamientos del texto *Lattices and Ordered Algebraic Structures* de Thomas Blyth (2005) que centra su presentación colocando las estructuras algebraicas y de orden al mismo nivel; lo que contrasta con las habituales presentaciones que se centran solamente en la estructura algebraica. Sin embargo es notoria la no inclusión de la estructura topológica. En contraste comentamos en forma muy general, no detallada, la construcción de los números reales de Bourbaki a fin de exhibir la relevancia e importancia de la estructura topológica.

Esperamos que este trabajo aporte a la reflexión y aprendizaje de los números reales que habitualmente son presentados en una forma axiomática que se centra principalmente en la estructura algebraica, algo de la de orden, pero la topológica queda en cierto grado oculta en un axioma de completitud. En este sentido nuestro trabajo, centrado en los números reales, constituye un llamado a un mayor acercamiento a las estructuras topológicas en la formación de futuros licenciados. Este llamado tiene su sustento en que estas estructuras intervienen en las matemáticas básicas universitarias a través de conceptos como densidad, convergencia y continuidad.

Palabras claves: *Números Reales, Topología, Completez, Estructura Algebraica, Estructura de Orden, Estructura Topológica, Estructura Uniforme, Filtro.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado de carácter exploratorio y descriptivo se inscribe dentro de la línea de investigación de Historia y Epistemología de las matemáticas¹, el cual tiene como propósito general mostrar la relevancia de la estructura topológica en la construcción de los números reales y de igual manera el de exponer mediante un estudio histórico y epistemológico la problemática que subyace alrededor de su presentación axiomática, tema de gran interés y actualidad en la comunidad matemática. Para esto se realiza un análisis y aportes en torno a una de las dos formas de presentar este conjunto numérico y es a través de una construcción formal y rigurosa, partiendo de un conjunto de naturaleza cualquiera con estructura algebraica y ordenada donde los números reales son un caso particular de este.

En las presentaciones axiomáticas tradicionales de los libros de texto de cálculo² en enseñanza media y primeros semestres de universidad, tal como lo indica Puerto (2011), se aborda el sistema de los números reales haciendo una descripción más o menos completa señalando ciertas reglas y propiedades que no son discutidas con un sentido crítico, ocultando conceptos y procedimientos fundamentales en su caracterización como sistema numérico completo, quedando sin analizar propiedades esenciales, tales como densidad y continuidad. El axioma de completez³ expresado

¹ Línea perteneciente al grupo de Historia de las Matemáticas, adscripta al instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle, Cali - Colombia. Siendo su objetivo principal el realizar estudios sobre la génesis, evolución y consolidación de un concepto o teoría matemática.

² Sobre esto puede verse en (Apostol, 1988; Rudin, 1980 & Spivak, 1978) en donde se observa la similitud en la forma en que son expuestos el conjunto de los números reales, adoptándose un punto de vista no constructivista, teniéndolos como objetos indefinidos que satisfacen ciertas propiedades llamados axiomas que son clasificados en Axiomas de Cuerpo, de orden y el supremo llamado también de completez.

³ El axioma de completez nos dice que si un conjunto está acotado superiormente entonces existe un elemento (que puede o no pertenecer al conjunto) que lo acota, este axioma desempeña un

en términos de sucesiones de Cauchy o en términos del supremo de un conjunto acotado superiormente, el cual constituye el punto esencial que nos permite diferenciar los racionales de los reales, se presenta tan acabado que no deja ver fácilmente que, en su interior subyacen conceptos como vecindad⁴, continuidad y convergencia. Conceptos todos de carácter topológico y fundamentales en los distintos procesos de construcción de los números reales.

Los números reales a lo largo de nuestra formación académica siempre han estado presentes, y el estudiante solo tiene una idea intuitiva de algunas de sus propiedades por los cursos de álgebra elemental. Ante la obligación de exponer los fundamentos del cálculo infinitesimal, termina por imponerse una presentación pseudoformal en el cual se toman los reales como elementos primitivos y se axiomatizan algunas de sus propiedades más importantes del cálculo, sobre todo aquellas que no son tan familiares al lector como el axioma de continuidad o del extremo superior, como dice Arboleda (2011) este es el punto de partida del cálculo de Apóstol, uno de los textos que más ha influido en la enseñanza universitaria en los últimos treinta años dada su reputación de obra esmerada y rigurosa.

Teniendo en cuenta que en los cursos de Matemáticas de los primeros años de universidad y últimos en educación media, los reales son presentados generalmente de manera axiomática, lo cual no permite ver y comprender la diversidad y complejidad de conceptos que le subyacen, lo cual es un problema evidente, ya que el

papel fundamental dentro de la construcción del sistema numérico real, pues es el que permite diferenciarlo de los racionales, es más lo extiende hasta completarlo, entendiéndose esto en el sentido de Arquímedes, de que no tiene una extensión arquimediana propia, imponiéndose así una condición de maximabilidad.

4 Este concepto, es el corazón de la topología, pues sobre él se verifican los axiomas de vecindades para un espacio topológico, intuitivamente podemos relacionarla con nociones cotidianas de cercanía y proximidad. “La noción de vecindad como su nombre lo indica, habla de puntos vecinos o próximos a un punto dado. En este sentido, en una vecindad, no interesa el punto en sí mismo sino el **lugar** constituido por los alrededores del punto, el punto con los puntos cercanos que lo rodean”. Anacona & Ortiz (2011, p 166)

También podemos encontrar en Bourbaki (1966 p. 19), acerca del sentido común que tiene la palabra vecindad (neighbourhood) es tal que muchas de las propiedades matemáticas que involucran esta idea aparecen como expresiones intuitivas, la elección de este término por lo tanto tiene la ventaja de hacer el lenguaje más expresivo. Para ello también se permite utilizar las expresiones "suficientemente cerca" y "tan cerca como queramos" en algunas afirmaciones.

no tener una buena comprensión de los reales está afectando el aprendizaje de conceptos importantes como el de límite, continuidad, convergencia y completez. Los conceptos nombrados son todos de naturaleza topológica y este tipo de presentación axiomática no permite capturar de forma clara la importancia de cada una de ellas y el rol que juegan en cada una de las estructuras.

Investigaciones como la presentada por Arboleda (2011), referente a la enseñanza de las matemáticas han mostrado que cuando se exhibe el conjunto de los números reales estos siempre se muestran de forma axiomática, y el estudiante de primeros cursos universitarios termina por no entender la naturaleza y función de las propiedades de $\mathbb{R}$, tanto en su propia objetivación matemática como en la estructuración de las teorías sobre los reales que constituyen el referente principal del currículo universitario. Es por ello que creemos que estudiar una construcción de $\mathbb{R}$ puede dar aportes que permitan avanzar en el conocimiento de una teoría tan fundamental como lo es el sistema de los números reales, además de enfocar la comprensión de los procesos de constitución de objetos y estructuras matemáticas. Por lo tanto tomaremos como base la estructura de orden arquimediana presentada por Blyth (2005), donde nos muestra propiedades de orden y algebraicas de este sistema en tanto cuerpo ordenado arquimediano y completo. Consideramos que el tratamiento y presentación de una teoría tan fundamental, es vital para ayudar no solo a comprender el papel de los conceptos topológicos, sino, en identificar el rol histórico y epistemológico de nociones que consideramos esenciales para la comprensión de los números reales.

Además, a lo largo de la práctica docente se han evidenciado serias dificultades de enseñanza y aprendizaje en la comprensión del sistema de los números reales, a nivel conceptual, analítico, algebraico y topológico que pueden asociarse a la complejidad inherente del objeto matemático.

La apropiación usual del concepto de número real es escasa, entendida como la simple adjunción de un conjunto de números (a uno preexistente) cuyas propiedades, así como sus características, no son explícitas, por lo que no se identifica su necesidad, tanto en la representación de ciertas soluciones a ecuaciones polinómicas como en la cuantificación de la medida de ciertas

magnitudes (longitudes, áreas, pesos) que llevan al concepto de continuidad numérica (Puerto 2011, p.3).

Debido a lo anterior, en este trabajo queremos apostarle a revisar una construcción más moderna en aras de identificar nuevos conceptos, métodos o teorías que puedan aportar en la apropiación de este objeto matemático. Insistimos que queremos realzar precisamente aquello que se esconde en las exposiciones axiomáticas más frecuentes: en primer lugar, el ingreso de los aspectos topológicos y en segundo lugar el paso de una estructura algebraica y de orden. Esperamos que este estudio brinde y aporte al lector algunos elementos que permitan identificar conceptos y metodologías que puedan ser empleados para una mejor comprensión de los reales. Además de presentar una opción para entender la construcción de los números reales y su naturaleza pasando por estructuras de orden, algebraicas, y culminando con estructuras topológicas; de tal manera que permita tener una completa apropiación de estos.

Por lo tanto lo que pretendemos con esta construcción detallada es lograr que haya una apropiación y comprensión de las propiedades fundamentales del sistema numérico real, como son reconocer una estructura algebraica, de orden, y topológica, además de conceptos fundamentales como densidad, completitud, continuidad, convergencia y vecindad entre otras. Se realiza también una aproximación histórica y epistemológica relacionada con las diferentes construcciones del sistema de los números reales, de donde nace esta idea de la nueva construcción presentada y el aporte recibido de las anteriores construcciones.

En este sentido, revisaremos la construcción realizada por Blyth (2005), en donde detalla de manera explícita, en analogía con la construcción de $\mathbb{R}$ las estructuras algebraica y de orden; nosotros estamos interesados en resaltar la relevancia de la estructura topológica, es decir, en los conceptos de vecindad, entorno y convergencia, a fin de que haya una apropiación del conocimiento de este sistema, para ello exploraremos un juicioso análisis que nos permita identificar y aportar claramente en los elementos conceptuales que entran en juego en una moderna construcción, que

esperamos brinde referentes a la estructuración de un objeto matemático como lo es $\mathbb{R}$, en la potencialidad que tiene esta nueva forma de llegar a ellos, y de poder mostrar la importancia de estas nociones que si bien son desconocidas por los alumnos y mal aprehendidas por los docentes, son fundamentales en su desarrollo intelectual y profesional.

En el texto presentado por Blyth (2005), se parte de una estructura algebraica de dominio entero conmutativo asociado mediante transformaciones entre estructuras algebraicas a un cuerpo de cocientes. Como caso particular de Dominio entero, está el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ cuyo cuerpo de cocientes asociado es el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Se generaliza pues la idea de conjunto de números racionales mediante isomorfismos entre conjuntos con la misma estructura. El objetivo aquí es establecer que cada cuerpo totalmente ordenado contiene una copia de $\mathbb{Q}$ el cual es el subcuerpo primo, y salvo isomorfismos el cuerpo arquimediano totalmente ordenado más pequeño. A continuación se trata de proveer al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ de una caracterización formal de completez, en otras palabras se demuestra que no existe un cuerpo arquimediano⁵ del cual los números reales sea un subcuerpo ordenado propio; es decir, se impone una condición de maximabilidad que garantiza su unicidad, y la inmersión de cualquier otro cuerpo arquimediano totalmente ordenado. Teniendo esto formalizado de manera rigurosa se identificaran y/o resaltaran los aspectos topológicos que no son explícitos en la construcción dada por el autor. Más aun esperamos evidenciar que colocar en primera instancia la estructura topológica garantiza cierta comodidad y/o ligereza en las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$, mediante completación por medio del grupo topológico.

⁵ Un grupo G totalmente ordenado es arquimediano, si y solo si, para $x, y \in G_+$ con

$1_G < x \leq y$ existe $n \in \mathbb{Z}$ / $x^n \leq y < x^{n+1}$ como caso particular de cuerpo arquimediano tenemos el conjunto de los números reales: si $x > 0$ y si y es un número real arbitrario, $\exists n > 0$ / $nx > y$. Geométricamente esta propiedad nos dice que todo segmento lineal, por largo que sea, puede recubrirse por medio de un numero finito de segmentos lineales de longitud positiva dada, por pequeña que sea.

Debido a lo anterior queremos centrar las construcciones a conceptos topológicos para saber cómo explicitar el rol de la estructura topológica a partir de una estructura algebraica y de orden, de tal manera que permita clarificar rigurosa y formalmente, conceptos ocultos en la axiomatización del sistema de los números reales.

En este trabajo de grado esperamos despertar inquietudes y realzar el papel relevante que desempeña la topología en la construcción de los números reales, de tal manera que sea una alternativa exploratoria y una herramienta potencializadora para la comprensión y apropiación de este sistema numérico.

Para lograrlo desarrollaremos lo siguiente: identificar aspectos topológicos esenciales en la construcción de los números reales, como es el caso del concepto de vecindad, que permite una comprensión del continuo numérico; reconocer como el concepto de vecindad nos sitúa dentro de la topología, identificando su rol epistemológico en el proceso de construcción de los reales, y establecer relaciones matemáticas entre las estructuras algebraicas y de orden, que permitan evidenciar la estructura topológica.

CAPÍTULO I

LOS NÚMEROS REALES: ASPECTOS HISTÓRICOS Y EPISTEMOLÓGICOS

En el presente capítulo se presentan a grandes rasgos algunos aspectos de las construcciones clásicas de los números reales, para ello es conveniente hablar de Cantor y Dedekind pues es mediante ellos que la teoría de los números reales toma su forma definitiva, ya que la idea era construir los números irracionales solo desde los racionales debido a que estos eran fácilmente definibles por los naturales. De igual manera, tendremos en cuenta a Hilbert, a quien se le atribuye la moderna axiomatización de dicho sistema en donde su noción de completez se vio muy influenciada por la obra de Dedekind. Esto se hará con el propósito de ubicar al lector en un contexto histórico, que permita ver la formación progresiva y los actores que en ella intervienen.

1. Revisión histórica de la construcción de $\mathbb{R}$

El origen de la teoría de los números reales data de la ciencia babilónica en un sistema cuya numeración designa valores tan aproximados como se quiera de todo número real, pero es la matemática griega la que obtiene la primera teoría rigurosa de los números reales, la cual trae consigo una serie de descubrimientos sobre proporciones y en particular sobre las razones inconmensurables.

La creación de los números reales en el siglo XIX obedece a una necesidad de dar forma matemática a la propiedad de continuidad o completez, dejando de ser una propiedad de objetos a constituirse en objeto matemático.

Hoy en día, existen diversas formas de presentar el conjunto de los números reales a partir de axiomas, y dentro de esa variedad está la caracterización más común mediante las siguientes tres propiedades:

Un conjunto $(K, +, *, \leq)$ es el conjunto de los números reales si satisface las siguientes tres condiciones:

1. $(K, +, *)$ es un cuerpo.
2. $(K, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y el orden es compatible con las operaciones del cuerpo:

Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$;

Si $a \leq b$ y $c \geq 0$ entonces $ac \leq bc$

3. El conjunto K es completo, es decir satisface el axioma del supremo: *todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene un supremo.*

Las primeras dos condiciones definen el concepto de cuerpo totalmente ordenado y la tercera condición es una propiedad de naturaleza topológica y es la que diferencia al conjunto de los números reales de todos los demás cuerpos arquimedianos totalmente ordenados. Hay que decir que en principio pueden existir diferentes conjuntos que satisfagan las mismas condiciones y que podrían ser diferentes al conjunto de los números reales, pero un teorema establece que si eso sucediera, ambas estructuras serían esencialmente la misma. *Cualquier cuerpo arquimedianamente totalmente ordenado que cumpla la tercera propiedad de $\mathbb{R}$ es isomorfo al conjunto de los números reales. Esta unicidad salvo isomorfismos es conocida como la Categoricidad de $\mathbb{R}$.*

En vista de lo anterior podemos hablar del conjunto de los números reales (y no de un conjunto de números reales) y estableciendo su unicidad se puede usar el símbolo $\mathbb{R}$ para representarlo.

Pero también existe diversidad en su presentación mediante construcciones, las más famosas y típicas son las de Cantor y Dedekind. Cantor hace su presentación mediante sucesiones de Cauchy y Dedekind mediante las cortaduras, estos dos grandes matemáticos alemanes lo que buscaban con esto era sentar bases formales que les permitieran producir una teoría rigurosa. Y es por ello que creemos que dar a conocer los reales mediante su construcción puede llegar a ofrecer un entendimiento más profundo de conceptos que no son tan evidentes, como por ejemplo aquellos de naturaleza topológica: convergencia, límite y densidad que se encuentran ocultos en el axioma de completez.

1.1 Sobre las Construcciones de Cantor y Dedekind

En Arboleda (2011), se exponen los procedimientos empleados en la extensión de los números racionales $\mathbb{Q}$ a los reales $\mathbb{R}$, sea por las cortaduras de Dedekind o mediante las sucesiones fundamentales de Cantor. El autor argumenta que allí se recurren a propiedades de la estructura de $\mathbb{Q}$ para llenar dos lagunas operatorias, algunas de naturaleza “algebraica” ($\mathbb{Q}$ no es cerrado para operaciones como raíz cuadrada) o siendo más precisos topológicas ($\mathbb{Q}$ no es cerrado con la operación de paso al límite). Dado que las propiedades de orden y densidad de la estructura de $\mathbb{Q}$ se cumplen de manera correlacionada, no fue posible llenar la laguna algebraica sin llenar al mismo tiempo la laguna topológica. En otras palabras, la extensión de los racionales consistió, en construir el dominio de los reales como objeto explícito a partir de operaciones permitidas por la estructura de los racionales, principalmente de orden y densidad.

1.1.1 La construcción de Dedekind

Dedekind decide emprender la búsqueda de la fundamentación de las matemáticas, cuyo objetivo era construir un dominio numérico continuo y por lo tanto producir una teoría rigurosa. Para ello busca formalizar y generalizar el proceso de aproximación

de algunos irracionales típicos a partir de los racionales. Su método se basa en la definición de cortadura.

Un subconjunto x de $\mathbb{Q}$ es una cortadura de Dedekind si y solo si:

1. x es distinto de vacío y de $\mathbb{Q}$.
2. Si $q \in x$ y $r < q$ entonces $r \in x$ (cerradura hacia abajo).
3. El máximo de x no existe.

Los números reales están formados por todas las cortaduras de Dedekind, es decir, por el conjunto $\mathbb{R} = \{x: x \text{ es una cortadura de Dedekind}\}$.

Orden entre $\mathbb{R}$:

$x < y$ si y sólo si $x \subset y$.

Teorema. El orden $<$ antes definido es un orden lineal.

Teorema. $\mathbb{R}$ es completo, es decir, si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y acotado superiormente entonces el supremo de A existe y es un elemento de $\mathbb{R}$.

Demostración

El supremo de A es $\cup A$:

Si $x \in A$ entonces $x \subseteq \cup A$, lo que es equivalente a $x \leq \cup A$.

Si z es una cota superior para A , entonces para todo $x \in A$ se cumple que $x \leq z$. Por lo tanto $\cup A \leq z$.

Veamos que $\cup A$ es un elemento de $\mathbb{R}$:

Como A no es vacío entonces $\cup A$ no es vacío, puesto que los elementos de A son cortaduras, que por definición son conjuntos no vacíos.

Como A es acotado entonces $\cup A$ también lo es, y por tanto $\cup A$ es diferente de $\mathbb{Q}$.

Por último veamos que $\cup A$ es cerrado hacia abajo: si $r \in \cup A$ entonces existe y tal que $y \in A$ y $r \in y$. Así para cada $s < r$ se cumple que $s \in y$ y por tanto $s \in \cup A$. $\square$

La suma de números reales:

Definición. Si $x, y \in \mathbb{R}$, definimos $x + y = \{q + r : q, r \in \mathbb{Q}, q \in x \wedge r \in y\}$.

Es necesario mostrar que la suma de números reales está bien definida, lo que hacemos a continuación.

Teorema. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$.

Demostración

$x + y$ no es vacío, pues x y y no lo son.

Veamos que $x + y$ no es igual a $\mathbb{Q}$. Como x y y no son iguales a $\mathbb{Q}$, existen $r, s \in \mathbb{Q}$, tales que $r \notin x$ y $s \notin y$, entonces para todos $r' \in x$ y $s' \in y$ se cumple que $r' + s' < r + s$. Por tanto $r + s \notin x + y$.

$x + y$ es cerrado hacia abajo: si $q + r \in x + y$, donde $q \in x$ y $r \in y$, y $p < q + r$, entonces $p - q < r$ y así $p - q \in y$. Entonces $p = q + (p - q) \in x + y$.

$x + y$ no tiene máximo: si $q + r \in x + y$, donde $q \in x$ y $r \in y$, entonces como ni x ni y tienen máximo, entonces existen q' y r' tales que $q < q'$ y $r < r'$ con $q' \in x$ y $r' \in y$. Por tanto $q' + r' \in x + y$ y es mayor que $q + r$. $\square$

Teorema. La suma de números reales antes definida es asociativa, conmutativa, modulativa: el módulo está dado por el conjunto $0_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$, invertiva: el opuesto de un real x está dado por $-x = \{r \in \mathbb{Q} : \exists s > r (-r \notin x)\}$.

Teorema. Para todos x, y y z números reales se cumple: $x < y$ si y sólo si $x + z < y + z$.

Valor absoluto

Definición. Si $x \in \mathbb{R}$ definimos $|x| = x \cup -x$.

Es inmediato que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $|x| > 0$. Diremos que un número real x es positivo si $x > 0$, y negativo si $x < 0$.

La multiplicación de números reales

Definición. Si $x, y \in \mathbb{R}$ son no negativos definimos $x \cdot y = 0_{\mathbb{R}} \cup \{r \cdot s : 0 \leq r \in x \wedge 0 \leq s \in y\}$.

Si $x, y \in \mathbb{R}$ son ambos negativos definimos $x \cdot y = |x| \cdot |y|$.

Si $x, y \in \mathbb{R}$ es uno negativo y el otro positivo definimos $x \cdot y = -(|x| \cdot |y|)$.

Teorema. La multiplicación de números reales antes definida es clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa: el neutro está dado por el conjunto $1_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$, invertiva y la distributiva sobre la suma.

Teorema. La multiplicación por un número real positivo preserva el orden, es decir, si z es un real positivo entonces $x < y$ si y solo si $x \cdot z < y \cdot z$.

Lo anterior es una breve presentación de los números reales como la completación de los números racionales, haciéndose énfasis en la completez y no tanto en las propiedades algebraicas.

1.1.2 La construcción de Cantor

Para Cantor lo realmente importante era desarrollar una teoría de los números irracionales, tomando de antemano un conjunto el cual le permitiera definirlos, por lo tanto creía que los números racionales le servirían para tal fin. Es por ello que advirtió la necesidad de desarrollar una teoría satisfactoria de los números reales.

La construcción de Cantor se basa primordialmente en que define las sucesiones de Cauchy en los racionales y logra que estas se identifiquen con los reales⁶. Cantor logra definir las operaciones suma y producto junto con la relación de orden, sobre el dominio de las sucesiones de Cauchy, de tal manera que la estructura así formada constituye un cuerpo totalmente ordenado, que contenga un subcuerpo isomorfo con $\mathbb{Q}$. Esta condición permite hacer una extensión de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Siguiendo a López (2008), posteriormente se define ya no una sucesión de Cauchy de racionales sino una sucesión de Cauchy cuyos elementos son a su vez sucesiones de Cauchy. Así, se forma un nuevo dominio que podemos llamar C , el cual contiene un subcuerpo isomorfo con $\mathbb{Q}$.

Ahora bien, una sucesión en C es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy y las sucesiones de Cauchy en C tienen un límite en C . De acuerdo con López (2008), esto quiere decir que la operación realizada para pasar de $\mathbb{Q}$ a C no permite extender más a C , sino que al aplicarla sobre éste se obtiene el mismo dominio C . Por tanto C es completo y $C \equiv \mathbb{R}$.

Lo expuesto anteriormente se ha dado a grandes rasgos, debido a que más adelante se explicitará la demostración hecha por Thomas Blyth que en esencia se basa en lo propuesto por Cantor, de ahí la pertinencia de no ahondar en la construcción de los reales por Cantor sino centrarnos en la demostración de Blyth.

1.2 Sobre la completez de Hilbert

Hilbert, la persona responsable de la moderna axiomatización de los reales, comenta Arboleda (2011), decía que hay dos maneras de considerar a $\mathbb{R}$:

⁶ Un sintético análisis sobre la construcción de los reales por Cantor se encuentra en López (2008).

- a) Según el método genético: por sucesivas extensiones del cuerpo numérico hasta llegar a la cortadura o sucesión fundamental.
- b) Según el método axiomático: partiendo de un dominio de objetos que cumplen un sistema de axiomas que reglan relaciones entre ellos, y mostrando la consistencia y completitud del sistema.

Teniendo en cuenta a Kline (1992) veamos cuáles son sus axiomas:

I. Axiomas de conexión

I₁. A partir del número a y el número b se obtiene por adición un determinado número c ; simbólicamente

$$a + b = c \text{ o } c = a + b$$

I₂. Si a y b son números dados, existe uno y solo un número x y existe también uno y solo un número y tales que

$$a + x = b \text{ y } y + a = b$$

I₃. Hay un número determinado, denotado por 0, tal que para cualquier a

$$a + 0 = a \text{ y } 0 + a = a$$

I₄. A partir del número a y el número b se obtiene por otro método, la multiplicación, un número determinado c ; simbólicamente

$$a \cdot b = c \text{ o } c = a \cdot b$$

I₅. Dados dos números arbitrarios, a y b , si a no es 0, existe un número y solo un número x , y también uno y solo un número y , tales que

$$a \cdot x = b \text{ y } y \cdot a = b$$

I₆. Existe un número determinado, denotado por 1, tal que para cada a tenemos

$$a \cdot 1 = a \text{ y } 1 \cdot a = a.$$

II. Axiomas de cálculo

$$\text{II}_1. a + (b + c) = (a + b) + c.$$

$$\text{II}_2. a + b = b + a.$$

$$\text{II}_3. a(bc) = (ab)c.$$

$$\text{II}_4. a(b + c) = ab + ac.$$

$$\text{II}_5. (a + b)c = ac + bc.$$

$$\text{II}_6. ab = ba.$$

III. Axiomas de orden

III_1 . Si a y b son dos números diferentes, entonces uno de ellos es siempre mayor que el otro; este último se dice que es más pequeño que el primero; simbólicamente

$$a > b \text{ y } b < a.$$

III_2 . Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

III_3 . Si $a > b$, entonces siempre es cierto que

$$a + c > b + c \text{ y } c + a > c + b.$$

III_4 . Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $ca > cb$.

IV. Axiomas de continuidad

IV_1 . (Axioma de Arquímedes). Si $a > 0$ y $b > 0$ son dos números arbitrarios, entonces es posible siempre sumar a consigo mismo un número suficiente de veces para tener

$$a + a + \cdots + a > b.$$

IV_2 . (Axioma de Completitud). No es posible añadir al sistema de los números ninguna colección de cosas de manera que la colección resultante siga satisfaciendo los axiomas precedentes; dicho en pocas palabras, los

números forman una colección de objetos que no puede ampliarse sin que deje de cumplirse alguno de los axiomas precedentes.

En Arboleda (2011), se expone de una manera clara que Hilbert afirma que el método genético tiene un gran valor pedagógico y heurístico; mientras que el método axiomático es el más indicado para la investigación lógica sobre los fundamentos de las matemáticas y sus aplicaciones. En particular, un asunto prioritario para el programa de Hilbert de comienzos del siglo XX era estudiar las condiciones que garantizan que la aplicación de los axiomas de una teoría no conduzca a contradicción, es decir, que el sistema de axiomas sea lógicamente consistente. Hilbert, comenta Arboleda (2011), ciertamente creía que la existencia matemática de los números reales dependía de la prueba directa de no contradicción de los axiomas que le aseguran a $\mathbb{R}$ su estructura de cuerpo ordenado arquimediano y completo.

“Hilbert sabía que el concepto de número real no se podía subsumir en una reducción lógica y que era absolutamente necesario tomar en consideración el recurso a una donación intuitiva de la sucesión de números y de la multiplicidad de magnitudes. Contrariamente a las concepciones de Dedekind, Frege y otros logicistas, Hilbert declaraba estar convencido de que ciertas representaciones e ideas intuitivas son previamente necesarias a la posibilidad del conocimiento científico”. (Arboleda, 2011, p 27)

Cuando Hilbert hace su presentación axiomática de los reales y da su noción de completez se puede evocar una influencia fuerte en referencia a los trabajos de Dedekind y el pensamiento filosófico de la época. Existe una manera de caracterizar la completez para la axiomática de los números reales de Hilbert y es mediante la formación de la categoría de todos los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados, en el cual se puede demostrar que los reales son el objeto final de dicha categoría (*Cuerpo arquimediano totalmente ordenado y **completo***).

En Ortiz&Valencia (2010), se discute y analiza una propuesta de formalización para la completez de Hilbert dada por Cohen y Goffman que captura la idea de maximabilidad de Hilbert en su axioma de completez, a través de grupos ordenados arquimedianos y muestra determinadas fortalezas de la axiomatización de Hilbert en comparación con las de Cantor y Dedekind.

- Dedekind y la completez de órdenes totales: un conjunto S con un orden total se dice completo si y sólo si todo subconjunto no vacío de S acotado superiormente tiene supremo.
- Cantor y la completez de espacios métricos: un espacio métrico se dice completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge.
- Arquimadiana (o de Hilbert) y la completez de un grupo abeliano totalmente ordenado: un grupo abeliano totalmente ordenado se dice completo si y sólo si no tiene extensiones arquimedianas propias.

De lo anterior se tiene que dado un grupo abeliano totalmente ordenado S , dos elementos $x, y \in S$ con $x, y > 0$ se dicen relativamente arquimedianos si cada uno es menor que un múltiplo del otro. Si S y T son grupos totalmente ordenados, con S un subgrupo ordenado de T tenemos que T es una extensión arquimadiana de S si para cada $x \in T, x > 0$ existe un $y \in S$ tal que x, y son relativamente arquimedianos. Un grupo G es llamado completo en el sentido de Arquímedes ó a-completo si no tiene una extensión arquimadiana propia. Un cuerpo F cuyo grupo aditivo es abeliano totalmente ordenado a-completo, se dice que es un cuerpo ordenado arquimadiano completo. (Ortiz&Valencia, 2010, p 56)

Después de haber expuesto una breve mirada de las construcciones clásicas de los números reales, cabe anotar que tanto su construcción como su forma axiomatizada han estado presentes en la evolución continua de su presentación, y aunque unos axiomas simplifiquen el proceso de presentación, ocultan conceptos importantes para su comprensión. Por lo tanto creemos que es más profundo y significativo para un conocimiento real, tener presente el proceso de construcción, y es por ello que más adelante se esbozara una construcción moderna de los reales ofrecida por Thomas

Blyth y una construcción mediante el grupo topológico⁷ en la que se tratará de mostrar que las operaciones adición y sustracción son continuas, y posteriormente completarlo para llegar a los números reales; esto se logrará gracias a algunos resultados usando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

⁷ Un grupo topológico es un conjunto G el cual lleva una estructura de grupo y una topología y satisface los siguientes dos axiomas: 1) La función $(x, y) \rightarrow xy$ de $G \times G$ en G es continua. 2) La función $x \rightarrow x^{-1}$ de G en G (la simetría del grupo G) es continua.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES TOPOLÓGICOS Y ALGEBRAICOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{R}$

Como la idea es introducir la estructura topológica en el modelo de construcción de los reales que se ofrecerá más adelante, en este capítulo vamos a hacer una rápida revisión de los conceptos topológicos que se requieren para su construcción. De igual forma se darán conceptos algebraicos que son necesarios para el entendimiento de la construcción que nos expone Thomas Blyth. Esto se hará con el fin de lograr que este trabajo sea auto-contenido y el lector pueda encontrar aquí las nociones básicas para entender lo que se exponga a lo largo del documento.

2.1 Preliminares topológicos

2.1.1 ¿Qué es la topología?

La topología como nueva rama de la geometría es una de las más modernas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de números, cuyo origen se remontan a la antigüedad, la topología aparece en el siglo diecisiete y fue conocida, con el nombre de análisis situs, esto es, análisis de la posición.

Dicho de otra manera, “la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas de cualquier manera tal que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan

coincidir puntos ya existentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. Esta última propiedad se llama continuidad, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas, una transformación así se llama un homeomorfismo (más adelante se definirá tal concepto)”. (Kline 1992, p 1529)

“El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible”. (Macho 2002, p 63).

Hoy en día la topología se mueve en dos esferas: la topología conjuntista o general que trata de las figuras geométricas consideradas como conjuntos de puntos y la topología combinatoria o algebraica que trata de las figuras como agregados de bloques.

Debido a que la topología es una estructura matemática que permite la definición formal del concepto de vecindad, Anacona&Ortiz (2011), exponen que, un estudio moderno de construcciones típicas de los números reales, en el cual se tengan en cuenta los fundamentos, las relaciones y la lógica de la construcción, permite comprender el papel de los conceptos de límite y convergencia en el proceso de construcción y ayuda a identificar el rol epistemológico y pedagógico de la noción de vecindad, considerada esencial para la comprensión del continuo numérico.

2.1.2 La noción de vecindad

La noción de vecindad surge a finales del siglo XIX, gracias a la necesidad de extender ciertas propiedades de conjuntos conocidos como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$ a conjuntos abstractos, cuyos elementos son de naturaleza cualquiera.

En Anacona&Ortiz (2011) históricamente se muestra que el primer esfuerzo importante por construir una teoría abstracta de espacios de funciones fue llevado a cabo por Maurice Fréchet, en su tesis doctoral de 1906. Para él, era necesario introducir en los conjuntos abstractos una estructura de espacio mediante la definición de una relación cualquiera de proximidad entre los elementos; lo que condujo al estudio sistemático de los espacios abstractos.⁸

En los espacios abstractos, la relación allí definida nos dice si dos puntos están próximos o no y que no es única la manera de establecer si dos puntos son cercanos. Lo importante es que esta permite precisar el nuevo concepto de vecindad, ubicándonos en el corazón de la topología.

La noción de vecindad en Anacona&Ortiz (2011) habla de puntos vecinos o próximos a un punto dado, es decir una vecindad alrededor de un punto x está conformada por todos los puntos que son “próximos” a x . En este sentido, en una vecindad, no interesa el punto en sí mismo sino el “lugar” constituido por los alrededores del punto, el punto con los puntos cercanos que lo rodean. Para darle sentido a esta definición, se abordara la definición de distancia: históricamente se le atribuye a Maurice Fréchet el planteamiento de la siguiente definición de distancia. Sea X un conjunto. Se dice que $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ define una distancia en X se cumplen las propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$

⁸ Un espacio abstracto es un conjunto de puntos, en el que se ha definido una relación de cercanía entre los puntos del conjunto.

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular)

Con esta generalización de la noción de distancia, Fréchet mostro que la distancia usual no siempre relaciona dos puntos y que esta relación se puede establecer entre objetos diferentes.

Un conjunto al cual se le define una distancia, se denomina espacio métrico, y usualmente nos referimos a la distancia como la métrica. Una vez establecida la distancia en un conjunto se está en condiciones de definir más formalmente la noción de vecindad. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $V \subseteq X$ es vecindad de $x \in X$ si y solo si existe U tal que $x \in U \subseteq V$, donde $U = \{y \in X: d(x, y) < \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$.

Definir vecindad en términos de espacios métricos presupone la existencia de los números reales.

Así es que consideramos más adecuado partir del concepto de vecindad en su forma más general, ya que, la noción de distancia se puede extender a una noción de vecindad, y en este punto estamos en la base de la estructura topológica.

2.1.3 Espacios Topológicos

Según Munkres (2002), en las primeras décadas del siglo XX, numerosos matemáticos (Fréchet, Hausdorff y otros) propusieron distintas definiciones para espacio topológico, pero fue más tarde cuando los matemáticos establecieron la definición que parecía más apropiada. Querían una definición que fuera lo más general posible, de manera que incluyera como casos especiales todos los distintos ejemplos que eran útiles en matemáticas (espacio euclídeo, espacio euclídeo de dimensión infinita y espacios de funciones, entre ellos) pero también querían que la definición fuese lo suficientemente estricta para que los teoremas habituales sobre estos espacios familiares se adaptaran a espacios topológicos en general. Este es siempre el problema cuando se está intentando formular un nuevo concepto matemático, decidir lo general que podría ser su definición. La definición finalmente

adoptada puede parecer un poco abstracta, pero a medida en que se trabaje con las distintas formas de construir espacios topológicos, se tendrá una mejor impresión de lo que el concepto significa.

En los espacios topológicos es posible definir algunos conceptos como continuidad o límite debido a la existencia de los abiertos.

Definición: Una *topología* sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades (Munkres, 2002, p.86):

1. $\emptyset$ y X están en τ .
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ esta en τ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ esta en τ .

Un conjunto X al que se le define una topología τ es llamado *espacio topológico*, por lo tanto un *espacio topológico* es un par (X, τ) , formado por un conjunto X y una topología τ sobre X .

Si X es un espacio topológico con una topología τ , diremos que un subconjunto U de X es un *conjunto abierto* de X si U pertenece a la colección τ . Usando esta terminología, se puede decir que un *espacio topológico* es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X , llamados *conjuntos abiertos*, tales que $\emptyset$ y X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos. (Munkres, 2002, p.86)

Cabe mencionar aquí que en *topología* es costumbre llamar "*espacio*" al conjunto total X , y a los elementos $x \in X$ se les dice "*puntos*".

Esta nomenclatura refleja ideas geométricas, y tiene su origen en el estudio de las *propiedades topológicas* de los *espacios n -euclidianos*.

Nota: Un conjunto puede tener muchas topologías distintas, pero no toda colección de subconjuntos de X es una topología sobre X . Veamos:

Sea X un conjunto de tres elementos $X = \{a, b, c\}$, algunas de las topologías posibles son:

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}\}; \quad \tau_2 = \{X, \emptyset\}; \quad \tau_3 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}\}; \dots$$

Pero ninguna de las siguientes colecciones son topologías:

$$\rho_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}; \quad \rho_2 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}; \dots$$

Ejemplo: si X es un conjunto cualquiera, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina *topología discreta*. La colección compuesta únicamente por X y $\emptyset$ es también una topología sobre X y la llamaremos *topología indiscreta*, o *topología trivial*.

En Munkres (2002) se comenta que regularmente se puede especificar la topología mediante la descripción de la colección completa τ de conjuntos abiertos. Generalmente, esto es bastante complicado. En la mayoría de los casos, se especifica una colección de subconjuntos de X que es capaz de definir dicha topología. Es por ello que es conveniente definir el concepto de base:

Definición: Si X es un conjunto, una *base* para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) que satisfacen:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x .
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, según Munkres (2002) se define la *topología τ generada por $\mathcal{B}$* como sigue: un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (esto es, un elemento de τ), si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Notemos que cada elemento básico es así mismo un elemento de τ .

Otro modo para describir la topología generada por una base es la dada por el siguiente lema:

Lema: sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología τ sobre X . Entonces τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$. (Munkres, 2002, p.90)

Este lema establece que cada conjunto abierto U en X se puede expresar como una unión de elementos básicos.

Definición: Si $\mathcal{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real,

$(a, b) = \{x / a < x < b\}$, la topología generada por $\mathcal{B}$ se denomina *topología usual* sobre la recta real.

La topología del orden:

En Munkres (2002), si X es un conjunto simplemente ordenado, existe una topología obvia para X , definida usando la relación de orden. Se llama *topología del orden*.

Supongamos que X es un conjunto con una relación de orden simple $<$. Dados dos elementos a y b , hay cuatro subconjuntos de X que se llaman *intervalos* determinados por a y b . Son los siguientes:

$$(a, b) = \{x / a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x / a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x / a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x / a \leq x \leq b\}$$

“Un conjunto del primer tipo se denomina *intervalo abierto* en X , un conjunto del último tipo se denomina *intervalo cerrado* en X , y conjuntos del segundo y tercer

tipos se denominan *intervalos semiabiertos*. El uso del término “abierto” en esta relación sugiere que los intervalos abiertos en X deberían convertirse en conjuntos abiertos cuando se introduzca una topología sobre X ” (Munkres, 2002, p.95)

Definición: Sea X un conjunto, con más de un elemento, con una relación de orden simple. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos de los siguientes tipos (Munkres, 2002, p. 96):

- 1) Todos los intervalos abiertos (a, b) en X .
- 2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$ donde a_0 es el mínimo (si lo hay) de X .
- 3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$ donde b_0 es el máximo (si lo hay) de X .

La colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X , que se llama *topología del orden*.

Por lo anterior vemos que la topología usual sobre $\mathbb{R}$ es efectivamente la topología del orden derivada del orden usual en $\mathbb{R}$. Esta topología recibe este nombre puesto que se construye en base a la relación de orden de los números reales, y no se utiliza nada más, vale decir, no se usa la estructura algebraica subyacente, sino sólo el orden.

Por lo tanto, en cualquier conjunto X en el cual haya un orden $<$ con propiedades como el de los números reales, o sea, un orden lineal estricto, es posible definir una topología del orden.

Bastara que se logre definir una noción de *intervalo abierto* en X mediante.

$$(a, b) = \{x / a < x < b\}$$

En todo conjunto X con una relación de orden $<$ en él, hereda el orden a sus subconjuntos. O sea, si $Y \subset X$, entonces Y tiene un orden que proviene de restringir a dicho conjunto el orden que teníamos en el conjunto mayor X .

Como es el caso de $\mathbb{Q}$, el cual hereda la topología del orden de $\mathbb{R}$.

La relación de orden lineal estricto $<$ en X “induce” en forma natural una topología en X . Dicho de otro modo: a partir del orden se puede generar una topología en un conjunto. El modo usual de hacerlo es tomando a los “intervalos abiertos” como elementos de la base de la topología.

2.1.3.1 *Espacios de Hausdorff*

Según Munkres (2002), cuando se ha trabajado constantemente con conjuntos abiertos, cerrados y puntos límite en la recta real y el plano, estos pueden llevarnos a cometer un error cuando se consideran espacios topológicos más generales. Por ejemplo, en los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, cada conjunto unipuntual $\{x_0\}$ es cerrado. Es decir; cada punto distinto de x_0 tiene un entorno que no interseca a $\{x_0\}$, por lo que $\{x_0\}$ es su propia clausura. Pero este hecho no es cierto para espacios topológicos arbitrarios, sea el conjunto $X = \{a, b, c\}$ y consideremos la siguiente topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{\text{Interior } b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, en este espacio el conjunto unipuntual $\{\text{Interior } b\}$ no es cerrado, lo que significa que su complementario no es abierto.

En un espacio topológico arbitrario nos dice Munkres (2002), que una sucesión $x_1, x_2, \dots$ de puntos del espacio X converge al punto x de X siempre que, para cada entorno U de x , exista un entero positivo N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. En $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, una sucesión no puede converger a más de un punto, pero si puede en un espacio arbitrario.

Además, expresa el autor que las topologías en las que los conjuntos unipuntuales no son cerrados, o en las que las sucesiones pueden converger a más de un punto, pueden ser consideradas raras por muchos matemáticos y por ende no ser demasiado interesantes, debido a que raras veces se dan en otras ramas de las matemáticas. Y los teoremas que se pueden probar sobre espacios topológicos están bastante limitados si se permiten dichos ejemplos. Es así como a menudo se impone una condición adicional que evitara ejemplos como este.

La condición que se expondrá a continuación fue dada por el matemático Félix Hausdorff, por lo que se le ha dado su nombre.

Definición. Un espacio topológico X se denomina *espacio de Hausdorff* si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X , existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2 , respectivamente, que son disjuntos (Munkres, 2002, p.112).

Siguiendo a Munkres (2002) la anterior condición es una de entre varias condiciones extra que se pueden imponer a un espacio topológico y cada vez que se impone tal condición se pueden probar teoremas más fuertes, pero se limita la clase de espacios a los que se aplican dichos teoremas. Este espacio de Hausdorff, se denomina el axioma de Hausdorff y es entre otros un axioma de separación, denominado así por el hecho de implicar la “separación” de ciertas clases de conjuntos por conjuntos abiertos disjuntos.

Usualmente se considera que la condición de Hausdorff es una condición débil para imponer a un espacio topológico, por lo que algunos matemáticos en un primer curso de topología toman estos espacios de Hausdorff como condición inicial; por lo que no se consideran espacios que no sean de Hausdorff. Veamos los siguientes teoremas que nos darán algo de fundamento a lo dicho:

Teorema. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X .

Teorema.

1. Cada conjunto totalmente ordenado es un espacio de Hausdorff en la topología del orden.
2. El producto de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.
3. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

Los anteriores teoremas nos evidencian el hecho de que los límites de una sucesión son únicos, y que las propiedades de extensión más las de densidad nos permiten extender muchas de las propiedades de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

En lo dicho anteriormente se definió la topología del orden, es conveniente decir que cada topología del orden es un espacio de Hausdorff, pues la topología del orden son todos los abiertos $(a, b) \in X$ donde $a < b$ es la relación de orden. Si el espacio tiene un mínimo sería $[a, b)$ y si tiene un máximo sería $(a, b]$; supongamos que no tiene máximo ni mínimo, sean x y y dos puntos distintos de un espacio topológico, entonces existen abiertos (a, b) y (c, d) disjuntos tales que $x \in (a, b)$ y $y \in (c, d)$, pero esta es la definición de un espacio de Hausdorff, por lo tanto cada topología del orden es de Hausdorff.

2.1.4 Funciones continuas

Una gran parte del cálculo gira en torno al concepto de función continua, particularmente, la topología tiene en cuenta los conceptos de orden y continuidad principalmente; es así que sabiendo la importancia de un concepto fundamental se considera pertinente definirlo, veamos:

2.1.4.1 Continuidad de una función

En Munkres (2002), Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es *continua* si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Recordemos que $f^{-1}(V)$ es el conjunto de todos los puntos x de X para los que $f(x) \in V$; es vacío si V no interseca al conjunto imagen $f(X)$ de f .

La continuidad de una función depende no solo de la propia función f , sino también de las topologías especificadas para su dominio y recorrido. Si se quiere resaltar este

hecho, podemos decir que f es continua relativa a las topologías específicas sobre X e Y .

En análisis se estudian diversas maneras de formular la definición de continuidad, distintas pero equivalentes, algunas de estas se generalizan a espacios arbitrarios.

El teorema que sigue será importante para mostrar que $\mathbb{Q}$ es un grupo topológico, es decir que la adición y la sustracción son funciones continuas. Veamos:

Teorema. Sean X e Y espacios topológicos; sea $f: X \rightarrow Y$. Entonces son equivalentes (Munkres, 2002, p.118):

1. f es continua.
2. Para cada subconjunto A de X , se tiene que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. Para cada subconjunto cerrado B de Y , el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X .
4. Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.

2.1.4.2 Homeomorfismos

El concepto que a continuación se mostrará se requiere para definir la continuidad de las funciones que nos permitirán completar el conjunto de los números reales.

En álgebra moderna, expone Munkres (2002), se estudia la noción de un isomorfismo entre objetos algebraicos tales como grupos o anillos. Un isomorfismo es una correspondencia biyectiva que respeta la estructura algebraica implicada. El concepto análogo en topología es el de homeomorfismo, que es una correspondencia biyectiva que conserva la estructura topológica implicada.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos; sea $f: X \rightarrow Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ son ambas continuas, entonces f se dice que es un *homeomorfismo* (Munkres, 2002, p.119).

La condición de que f^{-1} sea continua significa según Munkres (2002) que, para cada conjunto abierto U de X , la imagen inversa de U mediante la aplicación $f^{-1}: Y \rightarrow X$ es abierta en Y . Sin embargo, la imagen inversa de U mediante la aplicación f^{-1} es la misma que la imagen de U mediante la aplicación f . Por eso otro modo de definir un homeomorfismo es decir que es una correspondencia biyectiva $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(U)$ es abierto si, y solo si, U es abierto.

Munkres (2002), nos dice que lo anterior prueba que un homeomorfismo $f: X \rightarrow Y$ proporciona una correspondencia biyectiva, no solo entre X e Y , sino entre las colecciones de conjuntos abiertos de X y las de Y . Como resultado, cualquier propiedad de X que se exprese completamente en términos de la topología de X (esto es, en términos de los conjuntos abiertos de X) nos da, vía la correspondencia f , la propiedad correspondiente para el espacio Y . Tal propiedad de X se denomina propiedad topológica de X .

2.1.5 Teoremas Elementales de Extensión

Para efectos de la propuesta de construcción que se ofrecerá en el capítulo 4 incorporando topología, se requerirán estos teoremas que permitirán extender al conjunto de los números reales muchas de las propiedades de $\mathbb{Q}$ gracias a la densidad y el hecho que $\mathbb{R}$ se establecerá como un espacio Hausdorff.

Los siguientes teoremas que se van a enunciar son tomados del libro de Bourbaki (1966) topología general.

Teorema 2.1.5.1 los dos resultados siguientes son equivalentes:

- 1. Y Hausdorff si y solo si $Y \times Y$ es cerrado*
- 2. La diagonal del espacio producto $Y \times Y$ es un conjunto cerrado si y solo si cualquier dos puntos distintos de Y tienen vecindades disjuntas.*

Demostración.

$\Rightarrow$)

Supongamos que la diagonal del espacio producto $Y \times Y$ es un conjunto cerrado, por lo tanto $Y \times Y^c$ es abierto, luego $\forall x \times y \in Y \times Y^c \exists$ un abierto w tal que $x \times y \in w \subset Y \times Y^c$ luego $w = u \times v$ donde $x \in u$ y $y \in v$, luego $u \times v = \emptyset$, pues si no lo fuera $u \times v$ tendría puntos de la diagonal, lo cual no es posible pues $u \times v \subset Y \times Y^c$ luego Y es Hausdorff.

$\Leftarrow$)

Supongamos que Y es Hausdorff, para mostrar que la diagonal $Y \times Y$ es cerrada debemos mostrar que su complemento $Y \times Y^c$ es abierto en $Y \times Y$ cuyos elementos son de la forma $x \times y$ con $x \neq y$.

Como $Y \times Y$ es de Hausdorff (pues el producto de dos espacios de Hausdorff es de Hausdorff) entonces existen dos abiertos u y v distintos tales que $x \times y \in u \times v$ donde $x \in u$ y $y \in v$, por lo tanto $Y \times Y^c$ es abierto pues $(u \times v \subset Y \times Y^c)$, así $Y \times Y$ es cerrada. $\square$

El teorema anterior nos evidencia que:

Teorema 2.1.5.2

1. Sean f y g dos aplicaciones continuas de un espacio topológico X dentro de un espacio Hausdorff Y ; entonces el conjunto A de los puntos $x \in X$ tales que $f(x) = g(x)$ es cerrado en X .

Ahora, si tengo una transformación de X en Y (Hausdorff), esta es únicamente determinada por los valores de todos los puntos de un subconjunto denso de X .

Veamos:

Teorema 2.1.5.3 (Principio de extensión de identidades)

Si f, g son dos funciones continuas de un espacio topológico X dentro de un espacio Hausdorff Y . Si $f(x) = g(x)$ en todos los puntos de un subconjunto A denso de X , entonces $f = g$.

Demostración.

El conjunto de puntos x donde $f(x) = g(x)$ es cerrado en virtud del teorema anterior y contiene a A ; por lo tanto $f = g$. $\square$

Este principio permite que las identidades y la estructura algebraica se levanten gracias a la topología y hacer lograr una inmersión de las propiedades de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.5.4

Sea $f: A \rightarrow Y$ continua con $A \subset X$ y Y Hausdorff. Si f puede extenderse a una función continua $g: \bar{A} \rightarrow Y$, entonces g esta unívocamente determinada por f .

Demostración.

Sea $g: \bar{A} \rightarrow Y$ una extensión continua de f y $\tilde{g}: \bar{A} \rightarrow Y$ una extensión continua de f .

Por demostrar que $g(x) = \tilde{g}(x)$.

Si $g(x) \neq \tilde{g}(x)$ para algún $x \in A^*$ (este $x \notin A$) entonces existe u', v' entornos de $g(x), \tilde{g}(x)$ con $u' \cap v' = \emptyset$.

Sean $u = g^{-1}(u')$ y $v = \tilde{g}^{-1}(v')$ ($u \cap v \neq \emptyset, x \in u \cap v$)

Abierto de A^* entonces existe w abierto de X tal que

$$u \cap v = w \cap A^*$$

$$(u \cap v) \cap A = w \cap A \neq \emptyset$$

Como $x \notin A$ entonces existe $y \neq x$ tal que $y \in (u \cap v) \cap A$ entonces

$g(y) \in u'$ y $\tilde{g}(y) \in v'$ entonces $g(y) \neq \tilde{g}(y)$ (por ser u', v' disjuntos)

Pero $y \in A$ entonces $g(y) = \tilde{g}(y)$, lo que es una contradicción, por lo tanto $g(x) = \tilde{g}(x)$.

□

2.2 Preliminares algebraicos

Para efectos de comprensión y autocontenido acerca de la construcción ofrecida por Thomas S. Blyth vamos a recordar algunas definiciones y conceptos básicos de álgebra que permitirán brindar más claridad de lo que se expone:

2.2.1 Anillos y cuerpos

Las definiciones que se mostraran a continuación han sido tomadas del libro *Elementos de Algebra* de Suárez (1994).

Definición. Si R es un anillo que cumple que si dados dos elementos arbitrarios a, b y se cumple que $ab = ba$ entonces se dice que el anillo es conmutativo.

Definición. Si R es un anillo conmutativo, se dice que $0 \neq a \in R$ es un *divisor de cero* si existe $0 \neq b \in R$ tal que $ab = 0$.

Definición. Un anillo conmutativo unitario es un *dominio de integridad* si y solo si, no tiene divisores de cero.

Definición. Si R es un anillo unitario $u \in R$ es una *unidad* si y solo si, existe $u^{-1} \in R$ tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$.

Definición. Un *anillo de división* es un anillo unitario R tal que todo elemento no nulo es unidad.

Si simbolizamos por R^* al conjunto de unidades de un anillo, un anillo de división será un anillo unitario R tal que $R^* = R - 0$.

Definición. Un *cuerpo* es un anillo de división conmutativo.

Teorema. Todo cuerpo es dominio de integridad.

Teorema. Si D es un dominio de integridad finito, entonces D es un cuerpo.

Definición. Un dominio de integridad D tiene *característica 0* si la igualdad $ma = 0$ con $0 \neq a \in D$ ($m \in \mathbb{Z}$) se cumple solo si $m = 0$.

Definición. Un dominio de integridad D es de *característica finita* si existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $ma = 0$ para todo $a \in D$.

En esta situación se llama característica de D al mínimo $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $na = 0$ para todo $a \in D$.

Definición. El *subcampo primo* de F es el mínimo subcampo de F contenido en cualquier otro subcampo de F .

Definición. Un *ideal* I de un anillo R es un subgrupo aditivo tal que para todo $r \in R$,

i) $rI \subset I$,

ii) $Ir \subset I$.

Si el subgrupo I satisface i) (respectivamente ii)) se llamara *ideal a izquierda* (*derecha*).

2.2.2 Construcción de cocientes

Cuando estudiamos las propiedades algebraicas, hemos podido observar como existen estructuras algebraicas que se obtienen a partir de estructuras más elementales que son conocidas y un ejemplo de esto es el caso del cuerpo de cocientes de un dominio de integridad, que constituye una ampliación y un pequeño paso hacia el conocimiento de las estructuras algebraicas.

Las definiciones que se siguen han sido tomadas del libro *Álgebra Abstracta* de Herstein (1988):

2.2.2.1 El cuerpo de cocientes de un dominio de integridad

Dado un dominio de integridad D , necesitamos poder resolver las ecuaciones de la forma $ax = b$. Ahora si $a = 0$ y $b \neq 0$ no existe una solución; si $a = 0$ y $b = 0$ las soluciones serían $x = 0$ y $x = 1$. Pero para garantizar existencia y unicidad es conveniente que $a \neq 0$, sin embargo no existe siempre una solución en D . Ahora para poder resolver la ecuación lo que se pretende es la construcción de un sistema más grande que denotaremos por F el cual contenga a D o una copia isomorfa de este para que se pueda resolver la ecuación.

Como lo que necesitamos es inventar una solución de la ecuación $ax = b$, por eso surge la idea de construir F . Denotemos esta solución mediante la pareja $(a, b) \in D \times D$. Consideremos a $F^* = \{(a, b) \in D \times D | a \neq 0\}$ y veamos cómo podemos sumar y multiplicar estas parejas. Entonces para empezar deberemos definir una relación de equivalencia sobre F^* y tratar de convertir el conjunto de clases de equivalencia en el sistema F buscado. La clave para la definición de la relación de equivalencia sobre F^* es: si $ax = b$ y $cx = d$ tienen la misma solución así sucede con $cax = cb$ y $acx = ad$ concluyendo así que $cb = ad$.

Definición. En F^* , $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si $ad = bc$.

Teorema. “ $\sim$ ” es una relación de equivalencia sobre F^* .

Se denotará por $\frac{b}{a}$ la clase de equivalencia $\{(c, d) | (c, d) \sim (a, b)\}$ y por F al conjunto de todas estas clases.

Ahora vamos a definir la suma y el producto en F , mostrar que F es un cuerpo e identificar un subanillo en F que sea isomorfo a D .

Producto en F:

Para multiplicar dos clases de equivalencia $\frac{b}{a}$ y $\frac{d}{c}$, consideremos las parejas (a, b) y (c, d) como representantes respectivos que son soluciones de $ax = b$ y $cy = d$. Por lo tanto para hallar el significado de $(a, b) \cdot (c, d)$ debemos construir una ecuación cuya solución sea xy ; esta es $acxy = bd$.

Definición. Si $\frac{b}{a}, \frac{d}{c} \in F$ entonces $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$

Como se está definiendo una operación entre clases de equivalencia mediante representantes, veamos que la definición no depende de estos, es decir que está bien definida; pues como $a \neq 0$ y $c \neq 0$, $ac \neq 0$ entonces $(ac, bd) \in F^*$ y $\frac{bd}{ac} \in F$. Formalmente:

Lema. Si $(a, b) \sim (r, s)$ y $(c, d) \sim (u, v)$ entonces $(ac, bd) \sim (ru, sv)$.

Suma en F:

Sean las ecuaciones $ax = b$ y $cy = d$ necesitamos una ecuación cuya solución sea $x + y$. Si $ax = b$ entonces $cax = cb$ y $cy = d$ implica $acy = ad$; se suma miembro a miembro para obtener $ac(x + y) = cb + ad$.

Definición. Si $\frac{b}{a}, \frac{d}{c} \in F$ entonces $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{ad+bc}{ac}$

Ahora veamos que esta operación está bien definida; puesto que $a \neq 0$, $c \neq 0$, entonces $ac \neq 0$ y $\frac{ad+bc}{ac} \in F$. Formalmente:

Lema. Si $(a, b) \sim (r, s)$ y $(c, d) \sim (u, v)$ entonces $(ac, ad + bc) \sim (ru, rv + su)$.

Después de haber definido las operaciones en F , ya estamos listos para decir que F es un cuerpo. Formalmente:

Teorema. $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Teorema. $D^* = \left\{ \frac{d}{1} \mid d \in D \right\}$ es un anillo isomorfo a D y F es el mínimo cuerpo que contiene a D^* .

Demostración. D^* es un dominio de integridad contenido en F . Consideremos la función $\varphi: D \rightarrow D^*$ dada por $\varphi(d) = \frac{d}{1}$; φ es homomorfismo de anillos porque $\varphi(d + d') = \frac{d+d'}{1} = \frac{d}{1} + \frac{d'}{1} = \varphi(d) + \varphi(d')$, y $\varphi(dd') = \frac{dd'}{1} = \frac{d}{1} \cdot \frac{d'}{1} = \varphi(d)\varphi(d')$.

Por otra parte si $\varphi(d) = \frac{d}{1} = \frac{0}{1}$ entonces $d = 0$, luego φ es monomorfismo y es epimorfismo por definición; así φ es el isomorfismo requerido.

Si T es un subcuerpo de F y $D^* \subset T$ entonces para todos $a, b \in D$, T contiene $\frac{a}{1}$ y $\frac{b}{1}$. Si $b \neq 0$, T debe contener también a $\left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{b}$ y así mismo contiene a $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$. Por lo tanto $F \subset T$. □

Hablando de forma estricta aún no se ha construido un cuerpo que contenga a D ; sin embargo mediante el isomorfismo φ identificamos D^* con D y decimos que D está contenido en F . Un ejemplo de esto es que si $d \in D$, identificamos d con $\frac{d}{1}$.

Definición. El cuerpo F anterior se denomina *el cuerpo de cocientes de D* .

Si $D = \mathbb{Z}$, entonces F es isomorfo al campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Además si D es el dominio de los enteros pares, entonces F también es todo el campo $\mathbb{Q}$.

Lo que se hizo anteriormente al construir el campo de cocientes de D fue una manera extensa y formal de realizar algo que es sencillo, no se está haciendo nada más que formar todas las fracciones $\frac{a}{b}$, $a, b \neq 0$ en D , donde se suman y multiplican fracciones como es usual.

Como hemos hablado de “*el cuerpo de cocientes de D* ”. Veamos que es único:

Teorema. Sea $\phi: D \rightarrow D'$ un isomorfismo de dominio de integridad, F el cuerpo de cocientes de D construido anteriormente y F' cualquier cuerpo que contiene a D' . Entonces existe un monomorfismo $\psi: F \rightarrow F'$, es decir, un isomorfismo de F con un subcuerpo de F' tal que $\psi(a) = \phi(a)$ para todo $a \in D$. Decimos en esta situación que ϕ se extiende a un isomorfismo ψ de F .

Corolario. Todo cuerpo F' que contiene un dominio de integridad D , contiene un cuerpo de cocientes de D .

Teniendo en cuenta lo anterior, ya estamos listos teóricamente para abordar las construcciones de los reales que se esbozaran más adelante, tanto algebraicamente como topológicamente y así lograr una mayor apropiación de lo que se expondrá.

CAPÍTULO 3

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS REALES POR THOMAS BLYTH

En el presente capítulo se mostrará una construcción moderna de los reales ofrecida por Blyth (2005), ésta ha sido una traducción libre hecha por los autores del presente trabajo, tomada del libro *Lattices and Ordered Algebraic Structures*, capítulo 10.

Cuando estudiamos las diversas formas de construir a $\mathbb{R}$, hay un momento crucial en el proceso de su construcción a partir del dominio $\mathbb{Q}$, el cual tiene que ver con la manera de interponer una operación entre racionales que genere a los reales como representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales. Esta operación es compatible con la estructura de $\mathbb{Q}$ y determina el dominio de existencia de $\mathbb{R}$. A continuación veremos como Blyth utiliza esta estrategia para su construcción.

3.1 Campos Ordenados Arquimedianos

Definición. Si G es un grupo ordenado y $x, y \in G$ entonces decimos que x es *infinitamente pequeño* que y , y escribiremos $x \ll y$, si $x^n \leq y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que G es *arquimadiano* si $1_G \leq x \ll y$ implica $x = 1_G$. Si $(R; +, \cdot, \leq)$ es un anillo ordenado (campo) entonces decimos que R es *arquimadiano* si el grupo subyacente ordenado $(R; +, \leq)$ es arquimadiano.

Notemos que un grupo totalmente ordenado G es arquimediano si y solamente si, siempre que $x, y \in G_+$ con $1_G < x \leq y$, existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x^n \leq y < x^{n+1}$.

Ejemplo 1. El campo $\mathbb{Q}$ de racionales, junto con el único orden total el cual se extiende en $\mathbb{Z}$, es arquimediano. Por ejemplo, si $0 < \frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ en $\mathbb{Q}$ con $n, q > 0$ entonces

$(n^2p + 1)\frac{m}{n} > n^2p\frac{m}{n} = npm \geq np \geq \frac{np}{nq} = \frac{p}{q}$. Aquí por supuesto estamos utilizando notación aditiva, de modo que x^n se traduce por nx .

Todo campo totalmente ordenado contiene una copia de $\mathbb{Q}$ que es subcampo primo, se deduce que $\mathbb{Q}$ es, salvo isomorfismos, el campo totalmente ordenado arquimediano más pequeño. Nuestro objetivo ahora es establecer la existencia y unicidad salvo isomorfismos de un campo totalmente ordenado arquimediano que contiene una copia de todos los campos totalmente ordenados arquimedianos, esto proveerá una caracterización formal del campo $\mathbb{R}$ de los números reales, logrando de hecho que podamos obtener $\mathbb{R}$.

Si F es un campo totalmente ordenado y $x \in F$ entonces claramente $|x| = \max\{x, -x\}$.

Las propiedades principales del valor absoluto a continuación se resumen.

Teorema 1. Si F es un campo totalmente ordenado entonces, para todo $x, y \in F$,

- 1) $|x| = 0 \iff x = 0$;
- 2) $x \leq |x|$;
- 3) $|x| = |-x|$;
- 4) $|xy| = |x||y|$;
- 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- 6) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;
- 7) $|x| < y \iff -y < x < y$;

8) Si $x \neq 0$ entonces $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.

Como se ha partido de un conjunto totalmente ordenado, cabe anotar aquí que todo conjunto (totalmente) ordenado es un espacio de Hausdorff con la topología del orden. Pues para efectos de la demostración posterior que se ofrecerá, se tendrá en cuenta para mostrar la relevancia y la importancia de la topología en conceptos que resultan ocultos y que están presentes en todo momento. Además para evidenciar que efectivamente $\mathbb{R}$ es Hausdorff.

Definición 1. Si F es un campo totalmente ordenado. Por una sucesión de elementos de F entenderemos una transformación $a: \mathbb{N} \rightarrow F$. Decimos que una sucesión a de elementos de F es:

- 1) *Una sucesión acotada* si existe un $b \in F$ tal que $|a(n)| \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- 2) *Una sucesión de Cauchy* si, para todo $\varepsilon > 0$ en F , existe un entero positivo a_ε tal que $|a(p) - a(q)| < \varepsilon$ para todo $p, q \geq a_\varepsilon$;
- 3) *Una sucesión nula* si, para todo $\varepsilon > 0$ en F , existe un entero positivo a_ε tal que $|a(p)| < \varepsilon$ para todo $p \geq a_\varepsilon$.

Denotaremos por $B(F), C(F), N(F)$ a los conjuntos de todas las sucesiones acotadas, de Cauchy y nulas respectivamente.

Teorema 2. $N(F) \subset C(F) \subset B(F)$.

Demostración. Si $a \in N(F)$ entonces para algún $\varepsilon > 0$ en F tenemos que para $p, q \geq a_{\varepsilon/2}$

$$\begin{aligned} |a(p) - a(q)| &\leq |a(p)| + |-a(q)| = |a(p)| + |a(q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Rightarrow |a(p) - a(q)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $a \in C(F)$ y así $N(F) \subseteq C(F)$. Que la contención es estricta se sigue observando que la sucesión a con $a(n) = 1$ para todo n pertenece a $C(F)$ pero no a $N(F)$.

Si ahora $a \in C(F)$ entonces tomando $\varepsilon = 1 > 0$ tenemos $|a(p) - a(q)| < 1$ para todo $p, q \geq a_1$. Sea $b = 1 + \max\{|a(1)|, \dots, |a(a_1)|\}$ entonces $|a(p)| \leq b$ para $p \leq a_1$, y para $p > a_1$ tenemos

$$|a(p)| = |a(p) - a(a_1) + a(a_1)| \leq |a(p) - a(a_1)| + |a(a_1)| < 1 + |a(a_1)| \leq b.$$

Por lo tanto $a \in B(F)$ y así $C(F) \subseteq B(F)$. Que la contención es estricta se sigue observando que la sucesión a con $a(n) = (-1)^n$ para todo n pertenece a $B(F)$ pero no a $C(F)$.

□

Como $N(F)$ son un subgrupo aditivo de $C(F)$ vamos a ver como se afirma de antemano que es un ideal, pues este subgrupo induce una estructura algebraica, más precisamente nos proporciona definir un campo cociente, logrando así una caracterización más cercana permitiendo darle forma a lo que será $\mathbb{R}$.

Teorema 3. El conjunto $C(F)$ de sucesiones de Cauchy en un campo totalmente ordenado F forman un anillo conmutativo con una identidad en el cual $a + b$ y ab son dadas por $(a + b)(n) = a(n) + b(n)$, $(ab)(n) = a(n)b(n)$. En este anillo el conjunto $N(F)$ de las sucesiones nulas es un ideal y $C(F)/N(F)$ es un campo.

Demostración. Si $a, b \in C(F)$ entonces para algún $\varepsilon > 0$ en F dado existen enteros positivos $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ tal que $|a(p) - a(q)| < \varepsilon$ y $|b(p) - b(q)| < \varepsilon$ para todo $p, q \geq \max\{a_\varepsilon, b_\varepsilon\}$. Así para $p, q \geq \max\{a_{\varepsilon/2}, b_{\varepsilon/2}\}$ tenemos

$$|a(p) + b(p) - [a(q) + b(q)]| \leq |a(p) - a(q)| + |b(p) - b(q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto $a + b \in C(F)$. Como $C(F) \subset B(F)$ por teorema 2 entonces existe $\delta > 0$ en F tal que $|a(n)|, |b(n)| < \delta$ para todo n . Si $p, q \geq \max\{a_{\varepsilon/2\delta}, b_{\varepsilon/2\delta}\}$ entonces

$$\begin{aligned} |a(p)b(p) - a(q)b(q)| &= |a(p)[b(p) - b(q)] + [a(p) - a(q)]b(q)| \\ &\leq |a(p)||b(p) - b(q)| + |a(p) - a(q)||b(q)| < \delta \frac{\varepsilon}{2\delta} + \frac{\varepsilon}{2\delta} \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $ab \in C(F)$. Es fácil ver ahora que $C(F)$, equipadas con las anteriores leyes de composición, forman un anillo conmutativo. Este anillo tiene una identidad, llamada la sucesión constante $\mathbf{1}$ tal que $\mathbf{1}(n) = 1$ para todo n .

Para probar que $N(F)$ es un ideal de $C(F)$, notemos primero que si $a, b \in N(F)$ entonces $a - b \in N(F)$. Supongamos ahora que $a \in N(F)$ y $b \in C(F)$. Dado que b es acotado existe $d > 0$ en F tal que $|b(n)| \leq d$ para todo n . Dado algún $\varepsilon > 0$ en F , para $p \geq a_{\varepsilon/d}$ tenemos

$$|a(p)b(p)| = |a(p)||b(p)| \leq |a(p)|d < \frac{\varepsilon}{d}d = \varepsilon$$

Y consecuentemente $ab \in N(F)$. Así $N(F)$ es un ideal de $C(F)$. Que este sea un ideal propio es claro ya que $N(F) \subset C(F)$.

Para probar que $C(F)/N(F)$ es un campo, podemos mostrar que para todo $a \in C(F)$ con $a \notin N(F)$ existe un $x \in C(F)$ tal que $ax - \mathbf{1} \in N(F)$. Ahora para decir que a es una sucesión nula significa que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a_\varepsilon > 0)(\forall n \geq a_\varepsilon)|a(n)| < \varepsilon$$

Pero, por hipótesis, a no es una sucesión nula por lo tanto tenemos la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que, para todo entero positivo t , hay algún entero $m \geq t$ para el cual $|a(m)| \geq \varepsilon$. Eligiendo $t = a_{\varepsilon/2}$ entonces tenemos para todo $p \geq a_{\varepsilon/2}$,

$$\varepsilon \leq |a(m)| = |a(m) - a(p) + a(p)| \leq |a(m) - a(p)| + |a(p)| < \frac{\varepsilon}{2} + |a(p)|$$

Y de aquí $|a(p)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Esto prueba que $a(p) \neq 0$.

Ahora definamos la sucesión x por

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{a(n)} & \text{si } n \geq a_{\varepsilon/2} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para ver que $x \in C(F)$ observemos que, para algún $\delta > 0$ y todos $p, q \geq \max\{a_{\varepsilon/2}, a_{\varepsilon^2\delta/4}\}$,

$$|x(p) - x(q)| = \left| \frac{1}{a(p)} - \frac{1}{a(q)} \right| = \left| \frac{a(q) - a(p)}{a(p)a(q)} \right| < \frac{\varepsilon^2 d/4}{(\varepsilon/2)^2} = \delta,$$

Y así $x \in C(F)$. Finalmente, tenemos

$$a(n)x(n) - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq a_{\varepsilon/2}; \\ a(n) - 1 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

Lo cual prueba que $ax - \mathbf{1} \in N(F)$ como se quería. $\square$

De lo anterior podemos ver que se parte de F como campo totalmente ordenado y los elementos de F van a hacer sucesiones, para luego pensar en los números reales como límites de sucesiones, posteriormente lograr que sean compatibles las operaciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y determinar el dominio de lo que será $\mathbb{R}$.

Para el propósito de definir un orden total compatible en $C(F)/N(F)$ se requiere la siguiente noción

Definición 2. Una sucesión a de elementos en un campo totalmente ordenado F diremos que es una *sucesión positiva* si

$$(\exists \varepsilon_a \in F_+ \setminus \{0\})(\exists n_a \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_a) \quad a(n) > \varepsilon_a.$$

Teorema 4. Si F es un campo totalmente ordenado entonces $C(F)/N(F)$ es un campo totalmente ordenado que contiene una copia de F .

Demostración. Supongamos que $a, b \in C(F)$ son tales que $b - a$ es una sucesión positiva; es decir,

$$(\exists \varepsilon_{a,b} \in F_+ \setminus \{0\})(\exists n_{a,b} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_{a,b}) \quad b(n) - a(n) > \varepsilon_{a,b}(1)$$

Si $a^* \in C(F)$ es tal que $a^* - a \in N(F)$ entonces

$$(\exists n_{a,a^*} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_{a,a^*}) |a^*(n) - a(n)| \leq \varepsilon_{a,b}/4.$$

De igual forma, Si $b^* \in C(F)$ es tal que $b - b^* \in N(F)$ entonces

$$(\exists n_{b,b^*} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_{b,b^*}) |b(n) - b^*(n)| \leq \varepsilon_{a,b}/4.$$

Si $n^* = \max\{n_{a,b}, n_{a,a^*}, n_{b,b^*}\}$. Entonces para todo $n \geq n^*$ tenemos

$$\begin{aligned} b^*(n) - a^*(n) &= b^*(n) - b(n) + b(n) - a(n) + a(n) - a^*(n) \\ &\geq -|b^*(n) - b(n)| + b(n) - a(n) - |a(n) - a^*(n)| \\ &> -\varepsilon_{a,b}/4 + \varepsilon_{a,b} - \varepsilon_{a,b}/4 = \varepsilon_{a,b}/2. \end{aligned}$$

Así vemos que $b^* - a^*$ es una sucesión positiva.

Se sigue de esto que podemos definir una relación binaria $<$ en el campo de cocientes $C(F)/N(F)$ y la escribiremos por $[x] < [y]$ si y solo si existe un $a \in [x]$ y $b \in [y]$ tal que $b - a$ es una sucesión positiva.

La relación $<$ así definida es transitiva. Para ver esto, supongamos que $[x] < [y]$ y $[y] < [z]$. Entonces existe $a \in [x], b \in [y]$ y $c \in [z]$ tal que a, b y b, c satisfacen (1).

Si $\varepsilon = \varepsilon_{b,c} + \varepsilon_{a,b}$ y si $n^* = \max\{n_{a,b}, n_{b,c}\}$. Entonces para todo $n \geq n^*$ tenemos

$$c(n) - a(n) = c(n) - b(n) + b(n) - a(n) > \varepsilon_{b,c} + \varepsilon_{a,b} = \varepsilon$$

Lo cual prueba que a, c también satisface (1) y de aquí que $[x] < [z]$.

Para probar que $C(F)/N(F)$ es totalmente ordenado bajo $\leq$ es suficiente probar que para algún $[x], [y]$ precisamente una de las afirmaciones $[x] < [y], [x] = [y], [y] < [x]$ se tiene. Claramente no dos de estas pueden tenerse simultáneamente, será suficiente probar que si $[x] < [y]$ y $[y] < [x]$ son falsas entonces se debe tener

$[x] = [y]$. Ahora dado $a \in [x]$ y $b \in [y]$ tenemos que cada una de estas es una sucesión de Cauchy,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n^*)|a(m) - a(n)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |b(m) - b(n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dado que $[y] < [x]$ es falso entonces tenemos la negación de (1) es decir la existencia de $p \geq n^*$ tal que $a(p) - b(p) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces para todo $n \geq n^*$ se tiene

$$\begin{aligned} a(n) - b(n) &= a(n) - a(p) + a(p) - b(p) + b(p) - b(n) \\ &\leq |a(n) - a(p)| + a(p) - b(p) + |b(p) - b(n)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dado que $[x] < [y]$ es falso deducimos similarmente que $b(n) - a(n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n^*$. De aquí que $|a(n) - b(n)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n^*$ y así $a - b \in N(F)$. Por lo tanto $[x] = [y]$ como se quería.

Para la compatibilidad esto se sigue inmediatamente de (1) esto es si $[a] \leq [b]$ entonces para algún $[c]$ tenemos $[a] + [c] \leq [b] + [c]$, y para algún $[d]$ con $[0] \leq [d]$ tenemos $[a][d] \leq [b][d]$. Así $(C(F)/N(F); \leq)$ es un campo totalmente ordenado. Finalmente, observemos que si, para todo $x \in F$, asociamos la sucesión constante $\mathbf{x}$ (nombremos la sucesión en donde cada elemento es x) entonces la asignación $x \mapsto [\mathbf{x}]$ es un monomorfismo y

$$x < y \Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow [x] < [y].$$

Así $C(F)/N(F)$ contiene una copia de F .

□

Por otro lado, la topología comienza a surgir cuando aparecen las nociones de convergencia, o sea, cuando se estudia el concepto de límite. En los espacios métricos y normados es posible definir algunos conceptos como continuidad o límite debido a la existencia de la métrica o de la norma. En los espacios topológicos esto

también es posible, debido a la existencia de los abiertos. Vamos a mostrar el concepto de límite de una sucesión. Veamos:

Definición 3. Si F es un campo totalmente ordenado entonces decimos que $t \in F$ es un *límite* de una sucesión a de elementos de F si

$$(\forall \varepsilon \in F_+ \setminus \{0\})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geq m)|a(n) - t| < \varepsilon.$$

Decimos que la sucesión de elementos de F es *convergente* si este tiene un límite en F .

Teorema 5. Si a es una sucesión convergente en un campo totalmente ordenado F entonces a tiene un único límite y es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Supongamos que t_1 y t_2 son cada uno límites de a . Probaremos que $t_1 < t_2$ es imposible. Supongamos de hecho que $t_1 < t_2$. Entonces tomemos $\varepsilon = (t_2 - t_1)/2$ existen $m, p \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq m)|a(n) - t_1| < (t_2 - t_1)/2$ y $(\forall n \geq p)|a(n) - t_2| < (t_2 - t_1)/2$. Si $q = \max\{m, p\}$ tenemos la contradicción

$$t_2 - t_1 = t_2 - a(n) + a(n) - t_1 < |a(n) - t_2| + |a(n) - t_1| < t_2 - t_1.$$

De esto se sigue que $t_1 = t_2$ y así la sucesión a tiene un único límite el cual denotamos por t .

Ahora existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$, $|a(n) - t| < \varepsilon/2$. Si $n, p \geq m$ entonces tenemos $|a(n) - a(p)| = |a(n) - t + t - a(p)| \leq |a(n) - t| + |a(p) - t| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Y así a es una sucesión de Cauchy. □

El límite único de una sucesión convergente a se escribe a menudo $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$. En lo que sigue vamos a escribir simplemente $\lim a$.

Definición 4. Un cuerpo totalmente ordenado F es llamado *Cauchy completo* si toda sucesión de Cauchy en F es convergente.

Para proveer un importante ejemplo de un cuerpo totalmente ordenado que es arquimediano y Cauchy completo requeriremos de la siguiente caracterización de un cuerpo arquimediano totalmente ordenado en términos de su subcuerpo primo.

Definición 5. Un subconjunto no vacío S de un cuerpo totalmente ordenado F es llamado denso sí, siempre que $a < b$ en F existe un $x \in S$ tal que $a < x < b$.

Teorema 6. Un campo totalmente ordenado F es arquimediano si y solamente si su subcuerpo primo es denso.

Demostración:

$\Leftarrow$)

Dado que el subcampo primo de F es isomorfo a $\mathbb{Q}$ por conveniencia. Supongamos entonces que $\mathbb{Q}$ es denso en F y si $a, b \in F$ es tal que $0 < a < b$, por la densidad existen enteros $m, n > 0$ tal que $0 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b}$. Consecuentemente $na = bn \frac{a}{b} > bn \frac{m}{n} = bm \geq b$ y así F es arquimediano.

$\Rightarrow$) Supongamos que F es arquimediano y sean $a, b \in F$ tal que $a < b$. Existen varios casos a considerar:

- 1) $a < 0 < b$: en este caso $0 \in \mathbb{Q}$ satisface los requerimientos
- 2) $0 < a < b$: en este caso $b - a > 0$ y así $\frac{1}{b-a} > 0$ de aquí existe $n > 0$ tal que $n1 > \frac{1}{b-a}$ de aquí $b - a > \frac{1}{n}$

Dado que F es arquimediano y $\mathbb{N}$ es bien ordenado existe un $m \in \mathbb{N}$ más pequeño tal que $b \leq m \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$. Entonces tenemos $b > \frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > b - (b - a) = a$ y así en este caso $\frac{m-1}{n}$ sirve como el elemento requerido de $\mathbb{Q}$.

- 3) $a < b < 0$: en este caso tenemos $0 < -b < -a$ y así por el caso 2) existe $x \in \mathbb{Q}$ con $-b < x < -a$ o lo que es lo mismo $a < -x < b$.

□

Teorema 7. El cuerpo totalmente ordenado $C(\mathbb{Q})/N(\mathbb{Q})$ es arquimediano y Cauchy completo.

Demostración:

Por conveniencia escribiremos $C(\mathbb{Q})/N(\mathbb{Q})$ como R y los elementos de R son $[x]$ donde $x \in C(\mathbb{Q})$. Más aun, $[q]$ denotara la sucesión constante de cada término del cual q es el racional.

Para probar que R es arquimediano, primero se probara que el subcuerpo primo de R es denso en R y apelaremos al teorema 6.

Ahora el subcampo primo de R consiste de los elementos $[q]$ donde $q \in \mathbb{Q}$.

Nuestro objetivo por lo tanto es probar que para algún $[x], [y] \in R$ con $[x] < [y]$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $[x] < [q] < [y]$.

Ahora dado $a \in [x]$ y $b \in [y]$, tenemos que $b - a$ es una sucesión positiva

$$(\exists \varepsilon_{a,b} \in F_+ \setminus \{0\})(\exists n_{a,b} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_{a,b}) \quad b(n) - a(n) > \varepsilon_{a,b}$$

Dado que a y b son sucesiones de Cauchy también tenemos:

$$(\exists n_{a,b}^* \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_{a,b}^*) |a(m) - a(n)|, |b(m) - b(n)| \leq \varepsilon_{a,b}/3$$

Sea $n^* = \max\{n_{a,b}, n_{a,b}^*\}$ y sea $p = a(n^* + 1) + b(n^* + 1) \in \mathbb{Q}$ entonces para todo $n \geq n^*$ tenemos

$$\frac{p}{2} - a(n) = \frac{1}{2}[b(n^* + 1) - a(n^* + 1)] + a(n^* + 1) - a(n) > \frac{\varepsilon_{a,b}}{2} - \frac{\varepsilon_{a,b}}{3} = \frac{\varepsilon_{a,b}}{6},$$

$$b(n) - \frac{p}{2} = \frac{1}{2}[b(n^* + 1) - a(n^* + 1)] + b(n) - b(n^* + 1) > \frac{\varepsilon_{a,b}}{2} - \frac{\varepsilon_{a,b}}{3} = \frac{\varepsilon_{a,b}}{6},$$

Y consecuentemente, tomando $q = \frac{p}{2}$, obtenemos $[x] < [q] < [y]$.

Ahora probaremos que R es Cauchy completo. Para este propósito probaremos primero que

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \Rightarrow \lim[\mathbf{a}(n)] = [a]$$

De lo anterior, dado cualquier $[\delta] > [0]$ existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que $[0] < [\varepsilon] < [\delta]$

Dado que a es una sucesión de Cauchy tenemos que

$$(\forall m, n \geq a_{\varepsilon/2}) |a(m) - a(n)| < \varepsilon/2.$$

Sea $n \geq a_{\varepsilon/2}$ fijo. Entonces para $p \geq a_{\varepsilon/2}$ tenemos $a(p) - a(n) < \varepsilon/2$ y

$$a(n) - a(p) < \varepsilon/2 \quad \text{Así que } \varepsilon - (a(p) - a(n)) > \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad \varepsilon - (a(n) - a(p)) > \varepsilon/2.$$

De esto se sigue que, en R ,

$$[a] - [\mathbf{a}(n)] < [\varepsilon] < [\delta], \quad [\mathbf{a}(n)] - [a] < [\varepsilon] < [\delta]$$

Consecuentemente

$$(\forall n \geq a_{\varepsilon/2}) |[a] - [\mathbf{a}(n)]| < [\delta]$$

y así $\lim [\mathbf{a}(n)] = [a]$.

Supongamos ahora que A^* es una sucesión de Cauchy en R , así que los elementos de A^* son de la forma $A^*(m) = [A(m)]$ donde $A(m) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ para cada m . Como no hemos probado que A^* es una sucesión constante, podemos asumir sin pérdida de generalidad que todos los términos de A^* son distintos.

Por lo anterior, para todo p podemos elegir $a(p) \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|[\mathbf{a}(p)] - [A(p)]| < |[A(p+1)] - [A(p)]|.$$

La desigualdad

$$|[\mathbf{a}(p)] - [\mathbf{a}(q)]| \leq |[\mathbf{a}(p)] - [A(p)]| + |[A(p)] - [A(q)]| + |[A(q)] - [\mathbf{a}(q)]|$$

Y el isomorfismo isótono $[x] \mapsto x$ entonces prueban que la sucesión dada por

$a: p \mapsto a(p)$ pertenece a $C(\mathbb{Q})$. Finalmente, dado $[a] = \lim [a(n)]$ y

$$|[A(n)] - [a]| \leq |[A(n)] - [a(n)]| + |[a(n)] - [a]|$$

Así vemos que $[a] = \lim [A(n)]$.

□

De acuerdo a lo expuesto anteriormente podemos decir que se ha elegido al conjunto de los números racionales con su estructura de cuerpo ordenado tomándose cada racional no como un número sino como una sucesión de Cauchy y como candidatas las sucesiones constantes, posteriormente se toman las clases de sucesiones que tengan el mismo límite y estas asumen el papel de los nuevos números y para ello se toma un representante, una vez formadas estas clases se define una estructura básica, así que las sucesiones de Cauchy forman un cuerpo numérico ordenado y goza de la característica de contener una copia exacta de $\mathbb{Q}$; es decir que se tiene una inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

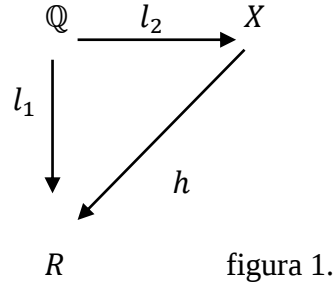
Definición 6. Un cuerpo ordenado decimos que es *Dedekind completo* si todo subconjunto no vacío el cual es acotado tiene un supremo.

Ejemplo 2. Un ejemplo de un campo totalmente ordenado que no es Dedekind completo destacaremos $\mathbb{Q}$. Aquí por ejemplo, $\sup\{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$ no existe en $\mathbb{Q}$. Para ver esto, supongamos que $t \in \mathbb{Q}$ es el supremo, entonces dado que 2 no es la raíz cuadrada de algún racional tenemos $(t + 1)^2 > 2$. De esto sigue que $2 - t^2 < 2t + 1$. Si $r = \frac{2-t^2}{2t+1}$.

Entonces $0 < r < 1$ y así $r^2 < r$. Consecuentemente $2tr + r^2 < 2tr + r = 2 - t^2$ y tenemos $(t + r)^2 < 2$ lo cual contradice la suposición que t es el supremo.

De hecho veremos que hay salvo isomorfismos, solamente un campo totalmente ordenado Dedekind completo y solamente un campo totalmente ordenado arquimediano y Cauchy completo; además, ellos son isomorfos.

Definición 7. Por un *cuerpo arquimediano universal* entenderemos un campo totalmente ordenado R que es arquimediano y tal que, si X es algún cuerpo arquimediano totalmente ordenado, hay un único monomorfismo $h: X \rightarrow R$ tal que el diagrama



Es conmutativo donde l_1 y l_2 son los embebimientos canónicos.

Ahora establezcamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 8. Salvo isomorfismos, existe un único campo arquimediano universal. Además, las siguientes condiciones en un campo totalmente ordenado F son equivalentes:

- 1) F es un campo arquimediano
- 2) F es Dedekind completo
- 3) F es arquimediano y Cauchy Completo

Demostración:

Probaremos que

(3) $\rightarrow$ (2)

Supongamos que F es arquimediano y Cauchy completo. Sea A un subconjunto no vacío de F . Para todo entero positivo p se define

$$E_p = \{k \in \mathbb{Z} \mid 2^{-p}k \in A^\uparrow\}.$$

Que $E_p \neq \emptyset$ se sigue del hecho que si $x \in A^\uparrow \cap \mathbb{N}$ entonces $2^p x \in E_p$. Ahora dado algún $x \in A$ vemos que si $k \leq 2^p(x - 1)$ entonces $2^{-p}k \leq x - 1 < x$ por lo cual $k \notin E_p$. Así E_p es acotado hacia abajo y por lo tanto tiene un elemento pequeño E_p . Definimos una sucesión a de elementos de F por $a(p) = 2^{-p}k(p)$.

Entonces $a(p) \in A^\uparrow$ y $a(p) - 2^{-p} = 2^{-p}[k(p) - 1] \notin A^\uparrow$. Equivalentemente tenemos $2^{-(p+1)}[2k(p)] \in A^\uparrow$ y $2^{-(p+1)}[2k(p) - 1] \notin A^\uparrow$. Se sigue de esto que

- (i) $k(p + 1) = 2k(p)$, o
- (ii) $k(p + 1) = 2k(p) - 1$.

Correspondientemente,

$$a(p + 1) = 2^{-(p+1)}k(p + 1) = \begin{cases} 2^{-p}k(p) = a(p) & \text{(i)} \\ 2^{-(p+1)}[2k(p) - 1] = a(p) - 2^{-(p+1)} & \text{(ii)} \end{cases}$$

Así a es tal que $0 \leq a(p) - a(p + 1) \leq 2^{-(p+1)}$. Dejamos al lector la tarea de mostrar que a es una sucesión de Cauchy. Por la hipótesis de que F es Cauchy completo, se sigue entonces que $\alpha = \lim a$ existe en F . Ahora probaremos que $\alpha = \sup A$, por lo cual sigue (2).

Notemos primero que $\alpha \leq a(p)$ para todo p . (de hecho, existe un p tal que $\alpha > a(p)$ entonces $\alpha - a(p + 1) > a(p) - a(p + 1) \geq 0$ por lo cual, por inducción, $\alpha > a(t) \geq a(t + 1)$ para todo $t \geq p$; y esto contradice el hecho que $\alpha = \lim a$). Además notemos que $\alpha \in A^\uparrow$. (De hecho, si $\alpha \notin A^\uparrow$ entonces existe un $x \in A$ tal que $x > \alpha$ y así, para algún p tenemos $a(p) - \alpha = |a(p) - \alpha| < x - \alpha$ por lo cual $a(p) < x$; y esto contradice el hecho que $a(p) \in A^\uparrow$). Supongamos ahora que $\beta \in A^\uparrow$ con $\beta < \alpha$. Ya que F es arquimediano podemos elegir p tal que $2^{-p} < \alpha - \beta$

por lo cual

$a(p) - 2^{-p} \geq \alpha - 2^{-p} > \beta$ y consecuentemente tenemos la contradicción $a(p) - 2^{-p} \in A^\dagger$. Concluimos por lo tanto que todo $\beta \in A^\dagger$ es tal que $\beta \geq \alpha$ y de aquí que $\alpha = \sup A$.

(2) $\rightarrow$ (1)

Supongamos ahora que F es Dedekind completo. Si $0 < a < b$ en F dejemos

$E = \{na | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$. Si ahora tuvimos $na \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces b será una cota superior para E y así, por la hipótesis, E tendrá un supremo α . Dado $0 < a$ tenemos que $\alpha - a < \alpha$ por lo cual existe $n > 0$ tal que $\alpha - a < na$ (pero si tal n no existe entonces $\alpha - a$ será una cota superior el cual es estrictamente menor que la menor cota superior α , lo cual no es posible). Entonces tenemos $\alpha = \alpha - a + a < na + a = (n + 1)a < \alpha$. Esta contradicción por consiguiente prueba que para algún n debemos tener $na > b$. De aquí F es arquimediano.

Supongamos ahora que X es un campo arquimediano totalmente ordenado. Para todo $x \in X$ definimos el subconjunto L_x de F por

$$L_x = \{q1_F | q \in \mathbb{Q}, q1_X < x\}$$

Dado que X es arquimediano existe $n > 0$ en $\mathbb{N}$ tal que $n1_X > -x$ por lo cual $(-n)1_X < x$ y así $L_x \neq \emptyset$. De nuevo dado que X es arquimediano existe $p > 0$ en $\mathbb{N}$ tal que $p1_X > x$ y así $p1_F$ es una cota superior para L_x . Dado que, por hipótesis, F es Dedekind completo, $\sup L_x$ existe. Para todo $x \in X$ se define también el subconjunto

$$G_x = \{q1_F | q \in \mathbb{Q}, x < q1_X\}$$

Por un argumento similar al anterior el conjunto $-G_x$ tiene un supremo por lo cual el $\inf G_x$ existe. Ahora probaremos que

$$\sup L_x = \inf G_x$$

Ahora es claro que todo elemento de G_x es estrictamente más grande que todo elemento de L_x y así todo elemento de G_x es una cota superior para L_x por lo cual

tenemos $\inf G_x \geq \sup L_x$. Aquí debemos tener igualdad, pues de otra manera, F será arquimediano, allí existirá $t \in \mathbb{Q}$ tal que $\sup L_x < t1_F < \inf G_x$ y así mismo $r, s \in \mathbb{Q}$ tal que $\sup L_x < r1_F < t1_F < s1_F < \inf G_x$. Luego tendríamos $r1_x \geq x$ y $s1_x \leq x$ por lo cual $r \geq s$, que da la contradicción $r1_F \geq s1_F$.

Ahora definamos una transformación $h: X \rightarrow F$ por la función $h(x) = \sup L_x$, notemos que si $l_1: \mathbb{Q} \rightarrow F$ y $l_2: \mathbb{Q} \rightarrow X$ son los embebimientos canónicos entonces para todo $q \in \mathbb{Q}$ obtenemos $(h \circ l_2)(q) = h(q1_x) = \sup L_{q1_x} = q1_F = l_1(q)$ así que $h \circ l_2 = l_1$.

Ahora probaremos que h es un morfismo. Supongamos primero que $x, y \in X$ son tal que $0 < x, y$. Entonces si $0 < p1_F \in L_x$ y $0 < q1_F \in L_y$ tenemos $pq1_x = p1_x q1_x < xy$ y así $pq1_F = \sup L_{pq1_x} \leq \sup L_{xy} = h(xy)$. De esto sigue que $p1_F \leq h(xy)(q1_F)^{-1}$ y así $h(x) \leq h(xy)(q1_F)^{-1}$ por lo cual $q1_F \leq h(xy)(h(x))^{-1}$ y así $h(y) \leq h(xy)(h(x))^{-1}$ por lo cual $h(x)h(y) \leq h(xy)$. Ya que también se tiene $h(x) = \inf G_x$ para todo $x \in X$ se puede argumentar similarmente para deducir que $h(xy) \leq h(x)h(y)$. Así para $x, y > 0$ tenemos $h(xy) = h(x)h(y)$. Claramente esta igualdad también se tiene cada vez que uno de x, y es 0.

Un argumento similar, usando la suma en lugar de productos, prueba que $h(x + y) = h(x) + h(y)$, independientemente de que $x, y > 0$ o no; y en particular tenemos $h(-x) = -h(x)$.

Para completar la prueba de que h es un morfismo, queda por considerar el caso donde $x < 0$ y $y > 0$. Aquí tenemos $x = -z$ donde $z > 0$ y así

$$\begin{aligned} h(x)h(y) &= h(-z)h(y) = -h(z)h(y) \\ &= -h(zy) \\ &= -h(-xy) = -[-h(xy)] = h(xy) \end{aligned}$$

Como se requiere.

luego, probaremos que h es inyectiva. Para este propósito, supongamos que $x < y$ en X . Dado que X es arquimediano existe un entero n tal que $\frac{1}{n}1_X < y - x$ por lo cual

$\frac{1}{n}1_F \in L_{y-x}$. Entonces tenemos $h(y) = h(y - x + x) = h(y - x) + h(x) \geq \frac{1}{n}1_F + h(x) > h(x)$. Así h es inyectivo y también un monomorfismo.

Queda por establecer la unicidad de h . Para este propósito, supongamos que $g: X \rightarrow F$ es también un monomorfismo isótono tal que $g \circ l_2 = l_1$. Supongamos, a modo de obtener una contradicción, que existe $x \in X$ tal que $g(x) < h(x)$. Entonces dado que F es arquimediano existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $g(x) < q1_F < h(x)$. Se sigue entonces de la definición de h que $q1_F \in L_x$ y así $q1_X < x$. De esta forma obtenemos la contradicción

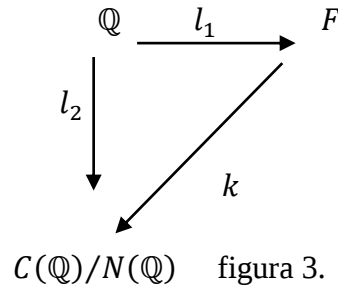
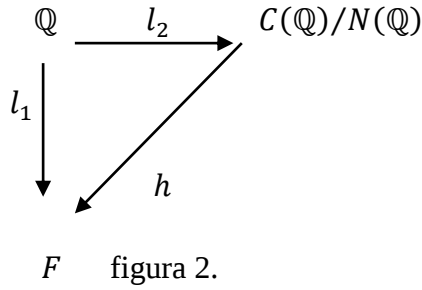
$$q1_F = l_1(q) = g[l_2(q)] = g(q1_X) < g(x) < q1_F.$$

Se deduce por lo tanto que $(\forall x \in X) g(x) \geq h(x)$. Supongamos ahora que existe $x \in X$ tal que $g(x) > h(x)$. Entonces existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $h(x) < q1_F < g(x)$. En este caso

$q1_F \notin L_x$ y así $q1_X \geq x$ y tenemos una contradicción similar. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que $g(x) = h(x)$ para todo $x \in X$ y así $g = h$.

$$(1) \rightarrow (3)$$

Notemos primero que, por teorema 7, el campo totalmente ordenado $C(\mathbb{Q})/N(\mathbb{Q})$ es arquimediano y Cauchy completo. Por las implicaciones $(3) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$ anteriores, este es entonces un cuerpo arquimediano universal. Ahora si F es algún campo arquimediano universal entonces la unicidad del monomorfismo isótono h, k en los diagramas



Prueba que $h \circ k: F \rightarrow F$ es un monomorfismo isótono tal que $h \circ k \circ l_1 = l_1$. Pero dado que F es arquimediano universal solamente tal monomorfismo posible es id_F . De aquí $h \circ k = id_F$ y así h también es sobreyectiva. Así vemos que h es un isomorfismo isótono cuya inversa es el isomorfismo isótono k . Esto entonces establece la existencia y unicidad salvo isomorfismos de un campo arquimediano universal. También establece (1) $\rightarrow$ (3) que F es isomorfo a $C(\mathbb{Q})/N(\mathbb{Q})$ que satisface (3) del teorema 7.

□

Los anteriores resultados prueban que hay esencialmente un único campo arquimediano universal. Como un modelo de esto podemos elegir $C(\mathbb{Q})/N(\mathbb{Q})$. Este campo esencialmente único es llamado el campo de los *números reales* y es denotado por $\mathbb{R}$.

Resumiendo, se ha formado un nuevo campo ordenado mediante las clases de sucesiones de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$ que tiene inmerso a $\mathbb{Q}$ y por lo tanto tiene las mismas propiedades algebraicas y de orden que $\mathbb{Q}$, y en el nuevo campo las sucesiones de Cauchy coinciden con las sucesiones convergentes, o sea que se ha obtenido un nuevo campo numérico ordenado donde ya se encuentran aquellos límites que le hacían falta a las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, y por lo tanto es completo. Y este nuevo campo que se ha completado se denomina los números reales que era el objetivo principal de este capítulo.

Por supuesto este no es el único modelo que puede ser elegido, como expresa Blyth(2005), otra manera útil de definir los números reales (salvo isomorfismos) implica la noción de una sección Dedekind de los racionales, esta consiste de una partición de $\mathbb{Q}$ en un conjunto abajo L y un conjunto arriba R complementario. Si L tiene un elemento mayor, o R tiene un elemento menor, entonces la sección (L, R) se dice que define un *número real racional*; por otra parte si L no tiene elemento mayor y R no tiene elemento pequeño entonces la sección (L, R) se dice que define un *número real irracional*. Si X, Y son subconjuntos de $\mathbb{Q}$ y si definimos:

$X + Y = \{x + y | x \in X, y \in Y\}$ y $XY = \{xy | x \in X, y \in Y\}$ entonces la adición y la multiplicación pueden ser definidas en el conjunto de secciones de Dedekind estableciendo $(L, R) + (L', R') = (L + L', R + R')$ y $(L, R)(L', R') = (LL', RR')$. Cabe agregar que, con un orden puede ser definido por $(L, R) \leq (L', R')$ si y solamente si $L \subseteq L'$ o, equivalentemente $R \supseteq R'$. Se puede demostrar que, equipado con estas operaciones, el conjunto de secciones de Dedekind de $\mathbb{Q}$ forma un campo totalmente ordenado que es Dedekind completo y por lo tanto, sirve también como un modelo adecuado para $\mathbb{R}$. El hecho que $\mathbb{R}$ es Dedekind completo es de inmensa importancia en análisis.

Como se dijo anteriormente Thomas Blyth parte de una estructura algebraica de dominio entero conmutativo asociado mediante transformaciones entre estructuras algebraicas a un cuerpo de cocientes. Como caso particular de Dominio Entero, está el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ cuyo cuerpo de cocientes asociado es el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Se generaliza pues la idea de conjunto de números racionales mediante isomorfismos entre conjuntos con la misma estructura. El primer objetivo es establecer que cada cuerpo totalmente ordenado contiene una copia de $\mathbb{Q}$ el cual es el subcuerpo primo, y salvo isomorfismos el cuerpo arquimediano totalmente ordenado más pequeño. Luego se trata de proveer al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ de una caracterización formal de completez, en otras palabras se demuestra que no existe un cuerpo arquimediano del cual los números reales sea un subcuerpo ordenado propio; es decir, se impone una condición de

maximabilidad que garantiza su unicidad, y la inmersión de cualquier otro cuerpo arquimediato totalmente ordenado.

CAPÍTULO 4

LOS REALES MEDIANTE COMPLETACIÓN DE UN GRUPO TOPOLÓGICO

En el presente capítulo se comentará en forma abreviada una opción para construir los números reales usando como herramienta principal la topología, realzando la importancia que tiene esta, quizá para una mayor comprensión y apropiación del cuerpo arquimediato totalmente ordenado de los números reales. En esta aproximación se inicia con el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ sólo como un grupo topológico, aquí intentaremos resaltar a través de un esbozo de dicha propuesta que tomando al inicio las estructuras topológicas se garantiza una cierta ganancia, representada en cierto grado de comodidad en la obtención de todas las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$. Para ser más precisos lo que le falta a la estructura de grupo para obtener la estructura de cuerpo sale “gratis” contando con las estructuras topológicas en el inicio.

Como $\mathbb{Q}$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces existe una topología para $\mathbb{Q}$, definida usando la relación de orden y se denomina la *topología del orden*. Es decir, a partir del orden se puede generar una topología en un conjunto. El modo usual de hacerlo es tomando a los "intervalos abiertos" como elementos de la base de la topología:

$$(a, b) = \{x / a < x < b\}$$

y esta coincide con la topología usual. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ posee la topología del orden o topología usual. Más aún mostremos que $\mathbb{Q}$ es un grupo topológico, es decir, que se

tiene la compatibilidad de la estructura de grupo con la estructura topológica. Formalmente en (Bourbaki 1966) se define grupo topológico de la siguiente manera:

Definición 1: Un grupo topológico es un conjunto G el cual lleva una estructura de grupo y una topología que satisface los siguientes dos axiomas:

1. La función $(x, y) \rightarrow xy$ de $G \times G$ en G es continua, donde la topología en $G \times G$ es la topología producto de la topología de G .
2. La función $x \rightarrow x^{-1}$ de G en G (la simetría del grupo G) es continua.

Si usamos la notación aditiva, lo anterior equivale a mostrar que la suma y la resta son continuas. En lo que nos interesa, nos centraremos en el caso de $\mathbb{Q}$, en este camino veamos que $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x, y) = x + y$ es una función continua:

Según Sánchez (2012), dada $V' = (x + y - a, x + y + a)$ una vecindad de $\mathbb{Q}$, entonces existe el entorno

$$V = \left(x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}\right) \times \left(y - \frac{a}{2}, y + \frac{a}{2}\right) \text{ de } \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ tal que}$$

$$(1) \quad x - \frac{a}{2} < x < x + \frac{a}{2}$$

$$(2) \quad y - \frac{a}{2} < y < y + \frac{a}{2}$$

Este entorno resulta ser una vecindad de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ pues la topología considerada es la producto de la usual.

Sumando las ecuaciones (1) y (2)

$$x + y - a < x + y < x + y + a$$

Por lo tanto $f(V) \subseteq V'$ y así tenemos que efectivamente f es continua.

Para concluir veamos ahora que $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = -x$ es una función continua:

Dada $V' = (-x - a, -x + a)$ una vecindad de $g(x)$ entonces existe la vecindad $V = (x - a, x + a)$ de x tal que

$$\begin{aligned}
x - a &< x < x + a \\
-(x - a) &> -x > -(x + a) \\
-x + a &> -x > -x - a
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g(V) \subseteq V'$ y así g es continua.

Así estamos listos para empezar, pues tenemos que $\mathbb{Q}$ es un grupo topológico.

Como la técnica de completación de Bourbaki es muy diferente a las tradicionales de Dedekind y Cantor intentaremos dar una visión general de cómo se completa un grupo topológico. Realmente Bourbaki parte de un espacio uniforme U y da una técnica general para “extenderlo” a un espacio U^* que sea completo. Esta completez generaliza la de Cantor, pues cambia las sucesiones de Cauchy por los denominados filtros de Cauchy que esencialmente permiten tomar sucesiones en cardinalidades mayores a la de los números naturales. Técnicamente podría decirse que la idea es la misma aunque más general. En un esbozo amplio dado un espacio uniforme U se construye U^* dándole estructura uniforme al conjunto de todos los filtros minimales de Cauchy en el espacio U .

Así las cosas, para poder entender la completación de los números racionales en los Bourbaki, será necesario revisar otra técnica general: como se asocia una estructura de espacio uniforme a un grupo topológico.

Bueno este camino por recorrer es algo extenso, sin embargo confiamos en que dando algunos pasos grandes, sin entrar en demasiados detalles técnicos, podremos llegar al objetivo propuesto. Es así que detallaremos algunos aspectos generales empezando con la definición de filtros y estructuras uniformes.

Las definiciones, proposiciones y teoremas han sido tomadas del libro *General Topology* de Bourbaki (1966)

4.1 Estructuras Uniformes

La estructura uniforme generaliza la estructura de espacio métrico y la de grupo topológico, es decir, a todo espacio métrico le corresponde un espacio uniforme y así mismo para los grupos topológicos. La gracia fundamental de los espacios uniformes es poder desprenderse de los tediosos cálculos con los tradicionales ϵ s y usar un álgebra alternativa: la de los conjuntos.

La noción de filtro como se dijo anteriormente reemplaza la noción de sucesión, debido a que se convierte en una herramienta potente para introducir la convergencia en los espacios topológicos, (pues las sucesiones no alcanzan a cubrir ciertos conjuntos como por ejemplo los que no son numerables en estos espacios), logrando así definir la noción de límite, tanto en los espacios topológicos como en los uniformes. Posteriormente cuando se define el límite, para determinar su unicidad el espacio ha de ser Hausdorff.

Debido a la importancia de la noción de filtro veamos cómo se define.

Definición 1: Un filtro en un conjunto X es un conjunto F de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades (Bourbaki, 1966, p. 57):

(F_I) Cada subconjunto de X que contiene un conjunto de F pertenece a F .

(F_{II}) Cada intersección finita de subconjuntos de F pertenece a F .

(F_{III}) el conjunto vacío no está en F .

Definición 2: Una estructura uniforme (o uniformidad) en un conjunto X es una estructura dada por un conjunto U de subconjuntos de $X \times X$ que satisface los axiomas: (F_I) y (F_{II}) y también satisface los siguientes axiomas (Bourbaki, 1966, p.169):

(U_I) Cada conjunto que pertenece a U contiene la diagonal Δ .

(U_{II}) Si $V \in U$ entonces $V^{-1} \in U$ si y solo si la propiedad simétrica.

(U_{III}) Para cada $V \in U$ existe $W \in U$ tal que $W \circ W \subset V$ si y solo si la desigualdad triangular.

Obsérvese que las propiedades anteriores equivalen a una noción generalizada de distancia.

Comentario: Para hacer el lenguaje más expresivo podemos usar las expresiones “ x es lo suficientemente cerca a y ” y “ x y y están tan cerca como queramos” en algunas afirmaciones.

Ejemplo 1: En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales podemos definir una uniformidad, llamada la uniformidad aditiva, como sigue: para cada $\alpha > 0$ sea V_α el subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que consiste de todos los pares (x, y) tal que $|x - y| < \alpha$; como α atraviesa el conjunto de todos los números reales > 0 , los V_α forman un sistema fundamental de entornos para la uniformidad aditiva en $\mathbb{R}$. Similarmente podemos definir una uniformidad (de nuevo llamada la uniformidad aditiva) en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Análogamente se le da estructura uniforme a todo espacio métrico.

Ejemplo 2: En un grupo topológico G podemos percibir la posibilidad de definir una noción de “puntos suficientemente cercanos” y por lo tanto una estructura uniforme, mediante la operación de la siguiente manera: si x y y son dos puntos cualesquiera de G , aplicamos a los dos puntos la traslación que envía uno de ellos, es decir x , al elemento identidad e , la “proximidad” de x y y se evalúa entonces en algún sentido por el entorno V de e en el que y es trasladado. Esta traslación, que consiste en la multiplicación de ambos x y y por x^{-1} , puede llevarse a cabo a la derecha o a la izquierda, y veremos al final de este capítulo que en cualquier caso obtenemos eficazmente una uniformidad en G la cual es compatible con la topología de G .

4.1.1 Topología de un espacio uniforme

Proposición 1. Sea X un conjunto dotado con una estructura uniforme U y para cada $x \in X$ sea $B(x)$ el conjunto de subconjuntos $V(x)$, la colección de todos los y tales que el par (x,y) está en V , cuando V recorre todos los entornos de U . Los $V(x)$ son las proyecciones sobre el eje Y de los segmentos de recta en V que tienen como primera coordenada a x . Entonces existe una única topología en X , tal que, para cada $x \in X$, $B(x)$ es el filtro de vecindades de x en esta topología (Bourbaki, 1966, p.171).

Definición 3: La topología definida en la proposición anterior es llamada la topología inducida por la estructura uniforme U . Las propiedades de este espacio topológico se refieren al espacio uniforme U , así diremos que el espacio uniforme es Hausdorff si su topología inducida es Hausdorff (Bourbaki, 1966, p.172).

Ejemplo 3: La topología inducida por la uniformidad aditiva en el conjunto de los números reales es la topología de la línea real; similarmente la topología inducida por la uniformidad aditiva en el conjunto de los números racionales es la topología de la línea racional.

4.1.2 Una importante caracterización de Hausdorff

Proposición 2: Un espacio uniforme X es Hausdorff si y solo si la intersección de todos los entornos de esta estructura uniforme es la diagonal Δ de $X \times X$. Cada espacio uniforme Hausdorff es regular (Bourbaki, 1966, p.174).

4.1.3 Funciones uniformes continuas

Definición 4: Una función f de un espacio uniforme X en un espacio uniforme X' se dice que es uniformemente continua si, para cada entorno V' de X' , existe un entorno V de X tal que la relación $(x, y) \in V$ implica que $(f(x), f(y)) \in V'$ (Bourbaki, 1966, p.174).

En términos más expresivos podemos decir que f es uniformemente continua si $f(x)$ y $f(y)$ están tan cerca uno del otro como queramos siempre que x y y estén lo suficientemente cerca.

Si ponemos $g = f \times f$, entonces la definición anterior significa que siempre que V' es un entorno de X' , $g^{-1}(V')$ es un entorno de X .

Ejemplos:

- 1) La función identidad de un espacio uniforme sobre sí misma es uniformemente continua.
- 2) Una función constante de un espacio uniforme en un espacio uniforme es uniformemente continua.
- 3) Toda función de un espacio uniforme discreto en un espacio uniforme es uniformemente continua.

Proposición 3: Toda función uniformemente continua es continua (Bourbaki, 1966, p.175).

4.1.4 Espacios uniformes completos

Filtros de Cauchy

Una vez que un conjunto X se ha dotado con una estructura uniforme podemos definir lo que se entiende por un “pequeño” subconjunto de X (relativa a esta estructura): un “pequeño” subconjunto de X es uno en el que todos los puntos están “muy cerca” el uno al otro. Precisamente:

Definición 5: Si X es un espacio uniforme y si V es un entorno de X , un subconjunto A de X se dice que es V – pequeño si todo par de puntos de A son V – cerrados (en otras palabras, si $A \times A \subset V$) (Bourbaki, 1966, p.181).

Proposición 4: En un espacio uniforme X si dos conjuntos A y B son V – pequeño y se intersectan, entonces su unión $A \cup B$ es V^2 – pequeño (Bourbaki, 1966, p.181).

Sean x y y cualquier dos puntos de $A \cup B$, y sea $z \in A \cap B$. Entonces $(x, z) \in V$ y $(z, y) \in V$, de modo que $(x, y) \in V^2$.

Definición 6: Un filtro F en un espacio uniforme X es un filtro de Cauchy si para cada entorno V de X existe un subconjunto de X el cual es V – pequeño y pertenece a F (Bourbaki, 1966, p.182).

Se puede hacer que el lenguaje sea más expresivo usando las expresiones “conjunto suficientemente pequeño” y “un conjunto tan pequeño como queramos”; así la definición anterior puede ser reexpresada diciendo que un filtro de Cauchy es aquella que contiene conjuntos arbitrariamente pequeños.

Una sucesión infinita (u_n) de puntos de un espacio uniforme X se dice que es una sucesión de Cauchy si el filtro elemental asociado con la sucesión es un filtro de Cauchy. Se trata de la misma cosa que decir que para cada entorno V de X existe un entero n_0 de tal manera que para todos los enteros $m \geq n_0$ y $n \geq n_0$ tenemos $(u_m, u_n) \in V$.

Proposición 5: En un espacio uniforme X todo filtro convergente es un filtro de Cauchy (Bourbaki, 1966, p.182).

Claramente cada filtro que es más fino que un filtro de Cauchy es un filtro de Cauchy.

Proposición 6: Sea $f: X \rightarrow X'$ es una función uniformemente continua. Entonces la imagen bajo f de una base de filtro de Cauchy en X es una base de filtro de Cauchy en X' (Bourbaki, 1966, p.182).

Se deduce en particular que si la uniformidad de un espacio uniforme X se sustituye por una uniformidad más gruesa, entonces todo filtro de Cauchy con respecto al resto de la uniformidad original es un filtro de Cauchy con respecto a la nueva uniformidad.

Este hecho puede ser recordado fácilmente con lo siguiente: entre más fina es la uniformidad, menos filtros de Cauchy hay.

Proposición 7: Sea X un conjunto, sea $(Y_i)_{i \in I}$ una familia de espacios uniformes, y para cada $i \in I$ sea f_i una función de X en Y_i . Sea X que lleva la uniformidad gruesa U para el que los f_i son uniformemente continuas. A continuación con el fin de que una base de filtro B en X debe ser una base de filtro de Cauchy es necesario y suficiente que $f_i(B)$ debe ser una base de filtro de Cauchy en Y_i , para cada $i \in I$ (Bourbaki, 1966, p.182).

4.1.5 Filtro minimal de Cauchy

Los elementos minimales (con respecto a la inclusión) del conjunto de filtros de Cauchy en un espacio uniforme X son llamados filtros minimales de Cauchy en X .

Definición 7: Un espacio completo es un espacio uniforme en el que todo filtro de Cauchy converge (Bourbaki, 1966, p.185).

4.1.6 La completación de un espacio uniforme

Teorema: Sea X un espacio uniforme. Entonces existe un espacio uniforme completo Hausdorff $\hat{X}$ y una función uniformemente continua $i: X \rightarrow \hat{X}$ que tiene la siguiente propiedad (Bourbaki, 1966, p.191):

(P) Dada alguna función uniformemente continua f de X en un espacio uniforme completo Hausdorff Y , hay una única función uniformemente continua $g: \hat{X} \rightarrow Y$ tal que $f = g \circ i$.

Si (i_1, X_1) es un par que consiste de un espacio uniforme completo Hausdorff X_1 y una función uniformemente continua $i_1: X \rightarrow X_1$ que tiene la propiedad (P), entonces existe un único isomorfismo $\varphi: \hat{X} \rightarrow X_1$ tal que $i_1 = \varphi \circ i$.

Aunque dar una prueba precisa de la prueba de esta técnica de completación puede resultar bastante tedioso, a fin de sustentar algunas de nuestras afirmaciones en el presente trabajo nos permitiremos describir los dos pasos globales fundamentales en la misma:

1. *Definición de $\hat{X}$.* Dado X un espacio uniforme se define $\hat{X}$ el conjunto de filtros minimales de Cauchy en X . Vamos a definir una estructura uniforme en $\hat{X}$. Para este propósito, si V es algún entorno simétrico de X , sea $\tilde{V}$ el conjunto de todos los pares $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ de filtros minimales de Cauchy que tienen en común un conjunto V – *pequeño*. Se prueba que los conjuntos $\tilde{V}$ forman un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme en $\hat{X}$.

Veamos que el espacio uniforme $\hat{X}$ es Hausdorff. Sea $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$ dos filtros minimales de Cauchy en X tal que $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \in \tilde{V}$ para todo entorno simétrico V de X . Se deduce inmediatamente que los conjuntos $M \cup N$, donde $M \in \mathfrak{X}$ y $N \in \mathfrak{Y}$ forman una base de un filtro $\mathfrak{Z}$ mas gruesa que $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$. Ahora $\mathfrak{Z}$ es un filtro de Cauchy ya que por cada entorno simétrico V de X hay por hipótesis un conjunto V – *pequeño* P perteneciente tanto a $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$ y por lo tanto perteneciente a $\mathfrak{Z}$. Por la definición de filtros de Cauchy minimal, tenemos que $\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}$, y esto prueba que $\hat{X}$ es Hausdorff.

2. *Definición de i :*

$$i: X \rightarrow \hat{X}$$

$$x \rightarrow B(x) \equiv \text{filtro de vecindades}$$

$\hat{X}$ es completo e $i(X)$ es denso en $\hat{X}$.

□

Definición 8: El espacio uniforme completo Hausdorff $\hat{X}$ definido en la prueba del teorema anterior es llamado la *completación Hausdorff de X* , y la función $i: X \rightarrow \hat{X}$ es llamada la *inmersión canónica de X en su completación Hausdorff* (Bourbaki, 1966, p.194).

4.2 Uniformidad de grupos topológicos

Uniformidades izquierda y derecha en un grupo topológico

Según Bourbaki (1966) en un grupo topológico G podemos percibir la posibilidad de definir una noción de “puntos suficientemente cercanos” y por lo tanto una estructura uniforme, mediante la operación de la siguiente manera: si x y y son dos puntos cualesquiera de G , aplicamos a los dos puntos la traslación que envía uno de ellos, es decir x , al elemento identidad e , la “proximidad” de x y y se evalúa entonces en algún sentido por el entorno V de e en el que y es trasladado.

Esta traslación, que consiste en la multiplicación de ambos x y y por x^{-1} , puede llevarse a cabo a la derecha o a la izquierda, y veremos que en cualquier caso obtenemos eficazmente una uniformidad en G la cual es compatible con la topología de G . Tomemos el caso en el que se realizan las traslaciones a la derecha; a continuación a cada vecindad V de e le corresponde el conjunto V_d de pares $(x, y) \in G \times G$ tal que $yx^{-1} \in V$. Sea $\mathfrak{G}_d$ la familia de conjuntos V_d , como V atraviesa la vecindad del filtro $\mathfrak{B}$ de e . Entonces $\mathfrak{G}_d$ es un sistema fundamental de entornos. Porque ya $e \in V$, la diagonal Δ de $G \times G$ está contenida en V_d para cada $V \in \mathfrak{B}$, por lo tanto $\mathfrak{G}_d$ es una base de filtro; pues las relaciones $yx^{-1} \in V$ y $xy^{-1} \in V^{-1}$ son equivalentes, tenemos que $V_d^{-1} = (V^{-1})_d$, por lo tanto $V_d^{-1} \in \mathfrak{G}_d$ y finalmente, las relaciones $zx^{-1} \in V$ y $yz^{-1} \in V$ implica $yx^{-1} \in V.V$; por lo tanto $V_d \circ V_d$ está contenido en $(V.V)_d$.

La uniformidad definida por $\mathfrak{G}_d$ es compatible con la topología de G , para las relaciones $y \in V_d(x)$ y $y \in V.x$ son equivalentes por definición; en otras palabras $V_d(x) = V.x$.

El argumento es análogo cuando las traslaciones están a la izquierda, y por lo tanto podemos hacer la siguiente definición:

Definición 9: La uniformidad derecha (respectivamente izquierda) en un grupo topológico G es la uniformidad para el cual un sistema fundamental de entornos se obtiene haciendo corresponder a cada vecindad V el elemento identidad e , el conjunto V_d (respectivamente V_s) de pares (x, y) tal que $yx^{-1} \in V$ (respectivamente $x^{-1}y \in V$) (Bourbaki, 1966, p.243)

Así siguiendo a Bourbaki, si tenemos a G un grupo topológico de Hausdorff, el espacio uniforme G_d puede ser considerado como un subespacio denso de su completación $\widehat{G_d}$, y G es considerada un subgrupo denso de un grupo Hausdorff completo G' , entonces el espacio uniforme G'_d es isomorfo a $\widehat{G_d}$ y por lo tanto se define en $\widehat{G_d}$ una estructura de grupo topológico que es inducida gracias a la estructura de grupo topológico en G . En consecuencia se pueden extender por continuidad las funciones xy y x^{-1} a $\widehat{G_d} \times \widehat{G_d}$ y $\widehat{G_d}$ respectivamente, definiendo así una estructura de grupo en $\widehat{G_d}$, gracias al principio de extensión de identidades, logrando definir que el grupo topológico es completo y único salvo isomorfismos. En pocas palabras y para resumir un grupo topológico Hausdorff G es isomorfo a un subgrupo denso de un grupo completo $\widehat{G}$, si y solamente si la imagen, bajo la simetría $x \rightarrow x^{-1}$, de un filtro de Cauchy con respecto a la uniformidad derecha de G es un filtro de Cauchy con respecto a esta uniformidad. El grupo completo $\widehat{G}$ el cual es llamado la completación de G , es único salvo isomorfismos.

4.3 A manera de conclusión

Como habíamos detallado al inicio del presente capítulo tenemos que $\mathbb{Q}$ es un grupo topológico; y acabamos de revisar la técnica general para asociar una estructura de espacio uniforme a este grupo topológico enriqueciéndolo con propiedades que permitirá lograr su completación. Este espacio uniforme se completa usando la técnica general de completación de espacios uniformes obteniéndose los números reales como un espacio uniforme que goza de estructura de grupo. Para ser más precisos, ahora tenemos que los números reales son los filtros minimales de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$. No está por demás resaltar que en esta construcción no hay necesidad de hablar de clases de equivalencia como en la original de Cantor, pues todos los filtros de Cauchy que convergen a un mismo número real se representan justamente por el filtro minimal de Cauchy.

De otro lado la topología de la línea racional $\mathbb{Q}$ es compatible no solamente con la estructura aditiva de grupo, sino también con la estructura de campo de $\mathbb{Q}$.

La función xy es continua en todo punto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y la función $\frac{1}{x}$ es uniformemente continua, con respecto a la estructura aditiva en el complemento de algún entorno V de 0.

Es así como la imagen bajo la función $\frac{1}{x}$, de cualquier filtro de Cauchy en $\mathbb{Q}^*$ con respecto a la uniformidad aditiva que no tiene el 0 es un filtro de Cauchy con respecto a la uniformidad aditiva; por lo tanto las funciones xy y $\frac{1}{x}$ definidas en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^*$ pueden ser extendidas continuamente, gracias a los teoremas de extensión dada la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^*$ respectivamente y se obtiene una estructura de campo en $\mathbb{R}$.

Por otra parte la relación de orden $x \leq y$ es compatible con lo multiplicativo de la estructura de grupo de $\mathbb{R}^*$; y es así que $\mathbb{R}$ dotado con esta estructura de cuerpo arquimediano totalmente ordenado es llamado sucintamente *los números reales*.

CONCLUSIONES

Actualmente en los currículos universitarios para presentar el conjunto de los números reales la forma axiomática es la más implementada, y puede no ser la más indicada para una mayor apropiación de conceptos que son importantes y que resultan ocultos cuando se presentan de esta manera. Es por ello que las construcciones son una muy buena alternativa y sobre todo aquellas donde la topología está presente, pues en este tipo de construcciones no se necesita todas las propiedades de cuerpo, ya que es suficiente completar a partir de una estructura de grupo totalmente ordenado. Es importante resaltar que la estructura algebraica escogida debe ser compatible con una estructura de orden total y es suficiente partir de la de grupo topológico. Aunque repitamos queremos resaltar que en esta construcción no hay necesidad de hablar de clases de equivalencia como en la original de Cantor, pues todos los filtros de Cauchy que convergen a un mismo número real se representan justamente por el filtro minimal de Cauchy.

Además hemos podido observar como Thomas Blyth utiliza la estructura algebraica y de orden al estilo de Cantor mediante las sucesiones de Cauchy para completar el conjunto de los números reales, mientras que mediante el grupo topológico todas estas propiedades se extienden gracias a los teoremas de extensión basados en la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y el principio de extensión de identidades, permitiendo así lograr un “ahorro” para obtener la estructura de cuerpo algebraico en dicho sistema. Lo que nos permite decir con claridad que la estructura topológica es una herramienta conceptual más rica y general además de facilitar cálculos que pueden ser tediosos, por lo tanto nos parece muy importante resaltar lo valioso de este método.

Aunque ambas construcciones son modernas e importantes lo que diferencia una de la otra es su estilo. Mientras que la una utiliza algunos cálculos algebraicos tediosos, la otra usando la estructura conceptual de topología los simplifica; estructura

fundamental en la aprehensión de los conceptos de convergencia y continuidad propios de las matemáticas básicas universitarias.

Aunque nos hemos centrado particularmente en los números reales, creemos que no es para nada una conclusión ligera: considerar en la formación de futuros licenciados una apropiación de conceptos fundamentales que intervienen en las matemáticas básicas universitarias. Dentro de estos conceptos tenemos en un eje ineludible *la topología* que involucra nociones como densidad, convergencia y continuidad.

También hay que decir que a pesar de que no se logra explícitamente evidenciar el tratamiento de la estructura topológica, si es un buen llamado de atención y una toma de conciencia para hacer caer en la cuenta, que la estructura topológica es un buen camino para entender nociones tales como densidad, límite y convergencia, ya que creemos que son esenciales en la comprensión del sistema de los números reales. Y sobre todo para aquellos que se están formando como futuros docentes.

BIBLIOGRAFÍA

Apóstol, T. (1988). *Análisis Matemático*. (2da Ed). Barcelona: Editorial Reverte, S.A.

Anaconda, M. & Ortiz, G. (2011). La noción de vecindad en la apropiación de los reales. En: *Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórica-epistemológica* (pp. 163-192). Santiago de Cali, Colombia.: Universidad del Valle.

Arboleda, L. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En: *Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórica-epistemológica* (pp.19-38). Santiago de Cali, Colombia.: Universidad del Valle.

Arboleda, L. C. (2007). *Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales*. Revista Brasileira de História da Matemática. Especial Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, 1, 215-230.

<http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20Festschrift/20%20-%20Arboleda%20-%20final.pdf>

Blyth, T. S. (2005). *Lattices and Ordered Algebraic Structures* (1ra Ed.). London: Springer-Verlag London Limited.

Bourbaki, N. (1966). *General topology. Elements of Mathematics*. Paris: Hermann.

Bourbaki, N. (1976). *La Arquitectura de las Matemáticas*. En: Lelionnais, Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Campos, A. (1994) *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Herstein I.N (1988). *Álgebra Abstracta*. México D.F Grupo editorial Iberoamérica.

Kline, M (1992). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*, (3ra Ed). Madrid: Alianza Editorial, S.A.

López, L. (2008). *Los números reales y la noción de completez en Cantor, Dedekind e Hilbert: un análisis histórico-epistemológico*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Macho, M. (2002). *¿Qué es la topología?*. Revista Sigma, 20, 63.
<http://casanchi.com/mat/topologia.pdf>

Munkres, J.R. (2002). *Topología*. (2da Ed.). Madrid: Pearson Educación S.A.

Ortiz, G. & Valencia, S. (2010). *La Categoricidad de los reales en Hilbert*. Revista Brasileira de História da Matemática, 10, (19), 39-65.

Puerto, Y. E. (2011). *Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo*. Tesis de maestría. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Sánchez, D. (2012). *Los números reales por Bourbaki y por Choquet: un estudio comparativo de las construcciones con fines educativos*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Suarez, M. (1994). *Elementos de Álgebra*. (1ra Ed.). Cali: Centro Editorial Universidad del Valle.