



La articulación entre matemática crítica y el concepto de función matemática. Una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de función lineal a estudiantes de grado noveno

Jaime Alexander Gonzalez Palma

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2019



La articulación entre matemática crítica y el concepto de función matemática. Una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de función lineal a estudiantes de grado noveno

Jaime Alexander Gonzalez Palma

Director:

Mg. Fabián Porras Torres

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2019

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	1
INTRODUCCIÓN	1
1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN.....	4
1.1 Planteamiento del problema.....	4
1.2 Justificación	7
1.3 Antecedentes	9
1.4 Objetivos	12
1.4.1 Objetivo general.....	12
1.4.2 Objetivos específicos	12
2. REFERENTES TEÓRICOS.....	14
2.1 Aspectos didácticos.....	14
2.1.1 La educación matemática crítica.....	14
2.1.2 Las crisis, la crítica y el desarrollo del pensamiento crítico	24
2.1.3 La relación matemáticas-educación y matemática-democracia.....	26
2.1.4 El aprendizaje desde las situaciones problema y desde proyectos	29
2.2 Aspectos curriculares.....	30
2.2.1 Lineamientos Curriculares en Matemáticas.....	31
2.2.2 Pensamiento variacional	34
2.2.3 Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.....	35
2.3 El concepto de función matemática	39
2.3.1 Función lineal.....	43
3. METODOLOGÍA.....	45
3.1 Referentes Metodológicos	46
4. DISEÑO Y ANÁLISIS DEL PROYECTO	49
4.1 Proyecto: Tienda Escolar.....	49
4.1.1 Actividad 1: Prueba Diagnóstica	52
4.1.2 Actividad 2: Alimentación Escolar.....	56
4.2 Rejilla de Análisis Actividad 1	81
4.3 Rejilla de Análisis Actividad 2	82
5. CONSIDERACIONES FINALES.....	87
5.1 Consideraciones.....	87
5.2 Características generales del proyecto.....	88
5.3 Análisis y reflexión.....	90

6. CONCLUSIONES.....	92
7. REFERENTES.....	95

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Ejemplo del primer escenario de investigación.	19
Figura 2: Ejemplo de una de las pistas dadas a los estudiantes para descifrar el misterio.	21
Figura 3: Ejercicio propuesto para descifrar el misterio del juego de rol.....	22
Figura 4: Tercer modelo propuesto por los lineamientos curriculares de matemáticas..	33
Figura 5: Coherencia horizontal.	37
Figura 6: Coherencia vertical.	38
Figura 7: Relación entre la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta..	45
Figura 8: Modelo de la nueva factura de servicios públicos domiciliarios..	53
Figura 9: Modelo de la tabla de acueducto y alcantarillado aplicada en el municipio de Santiago de Cali.	55
Figura 10: Ejemplo de diagrama sagital, presenta la relación entre un grupo de estudiantes y su estatura..	63
Figura 11: Ejemplo de diagrama sagital, presenta la relación MC, T e IMC.	64
Figura 12: Representación gráfica correspondiente al IMC del grado para una estatura promedio de los sujetos de estudio.....	67
Figura 13: Resumen de información nutricional de las Galletas Ducales y Festival..	69

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Matriz de ambientes de aprendizaje.	18
Tabla 2: Procesos de aprendizaje.....	33
Tabla 3: Descripción de las actividades propuestas en el proyecto.	49
Tabla 4: Cantidades variables y constantes	54
Tabla 5: Tabulación del valor total respecto al consumo.	55
Tabla 6: Tabulación a partir de la Figura 9.....	56
Tabla 7: Tabla de clasificación del individuo según el IMC o Índice de Quetelet.....	60
Tabla 8: Tabla de clasificación de estudiantes según IMC.....	60
Tabla 9: Cantidad de estudiantes con IMC normal y fuera del rango normal.	61
Tabla 10: Representación numérica correspondiente al IMC.....	65
Tabla 11: Representación numérica correspondiente a T.....	66
Tabla 12: Relación entre porciones consumidas y aporte energético en Kcal.....	69
Tabla 13: Ecuaciones de Harris – Benedict.....	71
Tabla 14: Coeficiente de Actividad Física.....	74
Tabla 15: Gasto energético según actividad física.....	76
Tabla 16: Registro de gasto energético según actividad física.	77
Tabla 17: Rejilla de análisis de la Actividad 1	81
Tabla 18: Rejilla de análisis de la fase 1 de la Actividad 2	82
Tabla 19: Rejilla de análisis de las preguntas 5 a 7 de la fase 2 de la Actividad 2	83
Tabla 20: Rejilla de análisis de las preguntas 8 y 9 de la fase 2 de la Actividad 2	84
Tabla 21: Rejilla de análisis fase 3 de la Actividad 2	85

RESUMEN

En este trabajo se presenta el proceso de desarrollo y análisis de una propuesta didáctica por proyecto configurada desde la perspectiva de la Educación Matemática Crítica (EMC), enfocado desde un ambiente de aprendizaje referenciado en la vida real, cuyo objetivo es la enseñanza y aprendizaje del concepto de función y función lineal de manera que promueva en estudiantes de grado noveno una postura crítica respecto a problemáticas reales del contexto colombiano. Así pues, en el cumplimiento de este objetivo terminan articulándose elementos de la EMC, aspectos curriculares nacionales y los aspectos del concepto de función, cuya articulación también permite lograr el propósito de mostrar elementos teóricos que permitan el montaje de un escenario de aprendizaje matemático en el cual se logre la enseñanza de un nuevo concepto. Concluyendo así, en un proyecto que como resultado muestra como en los referentes teórico de la EMC se encuentran los elementos que permiten introducir a los estudiantes en un nuevo concepto matemático, sin ser necesariamente este, una de las características de la EMC, además de involucrar a los estudiantes en deliberaciones significativas, por el soporte de sus investigaciones, que permiten el aprendizaje y la toma de una postura crítica respecto a su contexto.

PALABRAS CLAVES: educación matemática crítica, ambiente de aprendizaje, función lineal, propuesta didáctica por proyecto.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, se escribe en la línea de investigación en didáctica de la matemática, de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, ofrecida por el Instituto de Educación y Pedagogía (IEP), Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

Inicialmente en el marco de este trabajo de grado se realiza el análisis de los elementos que el concepto de función puede aportar en el desarrollo del pensamiento crítico de un estudiante, para ello se identifica el propósito que tiene el MEN para la enseñanza de este concepto en el ciclo de octavo a noveno, mostrando la estrecha relación que tienen los modelos funcionales con el análisis y modelación de diferentes fenómenos y procesos tanto en problemas de la vida cotidiana como en otras ciencias, siendo esta relación aquella que permite ver el potencial que tiene el estudio de funciones como herramienta que posibilite el aprendizaje crítico y reflexivo de las matemáticas.

En la primera parte de este trabajo se plantea el problema que dio inicio a la propuesta didáctica y su justificación, seguido se exponen los antecedentes, objetivo general y objetivos específicos que conducirán el desarrollo del proyecto.

La segunda parte exhibe los referentes teóricos en que se sustenta el proyecto, esto incluye aspectos tanto teóricos como curriculares, históricos y metodológico.

La tercera parte aborda el diseño del proyecto como recurso didáctico para el desarrollo del pensamiento crítico a partir de la enseñanza del concepto de función lineal, articulándose en esta los aspectos históricos, curriculares y teóricos presentados en la segunda parte.

Finalmente, en la cuarta parte se presentan las consideraciones finales, que muestran en virtud de la investigación, las características que se deben considerar en la construcción de una propuesta didáctica que tiene como finalidad el desarrollo del pensamiento crítico bajo la enseñanza de un concepto matemático.

Capítulo 1

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

El principal reto propuesto por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) en la enseñanza de las matemáticas, es potenciar en la escuela competencia matemática, a través del desarrollo de los cinco pensamientos presentados en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (EBCM) desde el marco de referencia de los Lineamientos Curriculares; que para el ciclo octavo a noveno de la Básica Secundaria da mayor trascendencia al pensamiento variacional en la comprensión y uso del concepto de función, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico.

A pesar de la trascendencia de este pensamiento en estos grados de escolaridad y del hecho de cumplir un papel importante en la “resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas” (MEN, 2006, p. 66), referentes nacionales como las pruebas SABER 11 o referentes internacionales como PISA indican malos resultados en matemáticas, como lo muestra en el Informe Nacional de Resultados (ICFES, 2017, p. 46). En particular al referirnos a las potencialidades que tiene la enseñanza del concepto de función, como una herramienta para la modelación de fenómenos de variación, contextualización de diferentes modelos de dependencia que involucran procesos algebraicos en la comprensión, planteamiento de estrategias y resolución de problemas, el Informe Nacional de Resultados (PISA, 2012, p. 8) muestra que solo dos de cada diez estudiantes colombianos emplean algoritmos básicos, formulas y procedimientos para resolver problemas; así mismo apenas 3 de cada mil estudiantes pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas.

Es un hecho sustentado por J. Orjuela (MEN, 2012, p. 164-117), que la educación colombiana no responde a los estándares nacionales ni internacionales, mostrando que la descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, generalmente se trabajan en la escuela sin que los estudiantes alcancen las competencias que les permitan desarrollar este pensamiento, al punto de llegar a la resolución de problemas en una variedad de dominios y situaciones cotidianos. Situación que podría presentarse por algunos de los siguientes factores:

- Por la dificultad que implica enseñar conceptos matemáticos como el de función, involucrando su naturaleza interdisciplinar, que relaciona los conceptos matemáticos con otras ciencias como biología, sociales, geografía, economía, etc. lo que conlleva un mayor desafío en la planificación de una clase, puesto que exige del docente el estar preparado para discusiones que pueden estar por fuera de su dominio profesional.
- Un segundo fenómeno, que investigaciones en países como Nicaragua y Venezuela, han evidenciado, es la existencia de “una metodología de imposición frontal, en la cual los profesores son el centro de una interacción autocrática de enseñanza-aprendizaje y los estudiantes son oyentes pasivos.” (Skovsmose & Valero, 2012, p. 2), de modo que las matemáticas se convierten en una herramienta de control y régimen en el aula de clase.

Estos factores, además de mostrar algunas de las razones que podrían explicar los bajos resultados de las pruebas en Colombia, también dejan ver que las prácticas de enseñanza no responden a otro de los propósitos que tiene la formación matemática en Colombia, como lo es, el formar ciudadanos políticos, refiriéndose a estos como aquellos que logran tener una postura crítica respecto a problemáticas de su entorno. Así mismo, en la enseñanza del concepto de función siguen predominando procesos rutinarios que solo requieren un análisis directo de

fórmulas, operaciones, algoritmos o procedimientos, sin llegar a resolver problemas que impliquen analizar situaciones de otros contextos y otras ciencias; prueba de ello son los informes de las pruebas externas.

Dados todos estos aspectos que se han mencionado, respecto a los propósitos del MEN y el cumplimiento de estos en la escuela colombiana, además de los factores que lo pueden estar ocasionando, se podría concluir que la problemática (sin ser la única) radica en la enseñanza de las matemáticas como un área independiente de otras ciencias, alejada de contextos cotidianos que le permitan al estudiante encontrar sentido a los procesos numéricos y algebraicos que en ella se desarrollan. Además, esta práctica de enseñanza de la matemática alejada de aspectos sociales y económicos, conlleva al incumplimiento de otro de los propósitos propuestos por el MEN, el de formar ciudadanos políticos, refiriéndose a estos como aquellos que logran desempeñarse de forma activa y crítica en su vida social y política, logrando interpretar la información necesaria que le permita proporcionar justificaciones razonables, participar en discusiones y tomar decisiones o posturas respecto a problemáticas de su entorno.

En consecuencia, otra problemática de la educación matemática en Colombia es la formación de un ciudadano crítico, prueba de ello es el abstencionismo que ha marcado al pueblo colombiano en las elecciones presidenciales, que para los años de 1798 a 2010 fue de un 54% (CEDAE, 2013); otra prueba es el hecho de que en Colombia a pesar de haber muchas situaciones críticas relacionadas con asuntos políticos, económicos, sociales o personales, la ciudadanía expresa críticas, pero sin tener ningún tipo de postura política, ni manifestación, pues carecen de fundamentaciones y argumentos (Amador, B. 2012).

Finalmente, estas problemáticas invitan al planteamiento de una pregunta.

¿Qué elementos debe tener una propuesta didáctica que articule los elementos teóricos referentes a la educación matemática crítica con aspectos relativos a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, de modo que, a través de su potencial para modelar situaciones del contexto, sea posible promover en los estudiantes de grado noveno posturas críticas frente a problemáticas socioeconómicas?

1.2 Justificación

El desarrollo del pensamiento variacional y en particular el concepto de función, además de formar en la interpretación de distintos sistemas de representación para situaciones de variación, desarrolla en los estudiantes elementos que le posibilitan dar solución a problemas de su entorno, que asimismo como involucran las matemáticas, también están directamente relacionados con otras disciplinas como las ciencias sociales. En efecto, el plantear o permitirles indagar y proponer problemáticas en contextos socioeconómicos que involucren situaciones de variación representadas de manera numérica (tablas), gráfica o icónica; les facilita comprender elementos técnicos y formales de la información a través de los conceptos inmersos en los modelos funcionales, además de posibilitar en ellos el poder movilizarse entre los distintos sistemas de representación, llevándolos a predecir y modelar resultados en condiciones que cambien los datos iniciales del problema, lo que conlleva a que los estudiantes puedan tomar una postura crítica respecto a falsedades o apariencias, promoviendo así el planteamiento de posibles soluciones a dilemas de su entorno social.

Desde el punto de vista económico, el concepto de función presenta un amplio margen de aplicaciones a la economía, al poder modelar (viendo la modelación como la posibilidad de poder representar situaciones de variaciones físicas o reales) a través de distintos registros de

representación relaciones entre magnitudes partiendo de una regla establecida. Algunos ejemplos que aclaran esta relación son:

- El cambio de divisa al enviar o recibir dinero del extranjero, teniendo presente que gran parte de los hogares colombianos tienen familiares en otros países (Chile, España, Canadá, Estados Unidos, etc.) en búsqueda de una mejor estabilidad económica.
- El costo de llamadas telefónicas depende del tiempo en llamadas a otros operadores realizadas durante el mes y en el caso de planes móviles también depende del tiempo en llamadas adicionales realizadas durante el mes.
- El aumento anual del salario mínimo depende de la inflación presentada durante el año. Y el aumento en el salario mínimo implica aumento en el valor del alquiler de vivienda.
- El poder adquisitivo de la moneda depende del índice del costo de vida.

Al realizar un análisis de cada uno de los ejemplos presentados se puede establecer una relación entre dos o más magnitudes y se puede identificar una dependencia entre la variación de una de las magnitudes respecto al cambio que se presente en la otra, luego, es evidente la importancia de identificar la relación que existe entre el concepto de función y situaciones de problemáticas relacionadas con aspectos económicos y sociales que involucran a los estudiantes.

Es decir, que además de construir un concepto matemático como el de función, el estudiante cuenta con elementos de dicho concepto que permiten que su postura de juicio no solo este fundamentada por un lenguaje argumentativo natural del contexto, si no, que además tenga una comprensión profunda de situaciones económicas, políticas y sociales que lo afecten como individuo o afecten a otros, y sea la comprensión de estas situaciones, lo que le permita tomar una postura clara de decisión u opinión que lo lleve a construir un ambiente socialmente justo.

Justamente, una necesidad manifestada en los últimos años por el MEN en las aulas de clase, es la trascendencia de una educación matemática basada en valores sociales y en la consolidación de valores democráticos. Lo que ha impulsado a tener presente el conocimiento matemático informal de los estudiantes al momento de relacionar el concepto matemático con aspectos de su entorno; asimismo de tener presente aspectos culturales, lingüísticos e históricos; lo que además de construir una educación matemática incluyente, también aporta a la comprensión matemática del estudiante de su entorno. Ahora, la formación en valores democráticos proporciona al estudiante justificaciones razonables o elementos que le permitan poner en tela de juicio las falsedades o apariencias; brindándole fundamentos que le conduzcan a ejercer una ciudadanía crítica. Es decir, prepararlo para hacer juicios respecto a situaciones sociales que le rodean y plantear soluciones que contribuyan al desarrollo social, logrando así que la enseñanza de las matemáticas forme individuos políticamente activos que tenga resonancia en la colectividad.

Precisamente por la necesidad que existe de generar en el aula espacios donde se trabaje la matemática crítica, se desea plantear en esta propuesta un proyecto encaminado a la enseñanza del concepto de función, partiendo de una situación contextualizada (económica o social, salario mínimo, compra de vivienda VIS, etc) que lleve a un razonamiento que converja en soluciones o posturas críticas soportadas en la comprensión del concepto de función y que propicien en el estudiante el poder manifestar posturas a través de un lenguaje formal propio de la matemática.

1.3 Antecedentes

En investigaciones realizadas en el campo de la educación matemática, se hallaron trabajos de grado como el de Martínez, E (2014), “*estudio del aprendizaje de las matemáticas basada en proyectos. Tensiones educativas de su implementación en una escuela de estudiantes*

en posición de frontera”, Universidad del Valle, Cali, en el cual se realiza un estudio de caso desde la perspectiva de la Educación Matemática Crítica (EMC), enfocado en los estudios sobre matemática y democracia, cuyo objetivo consiste en el montaje de un escenario de aprendizaje relacionado con los antecedentes y porvenir de estudiantes de grado sexto en situación de fronteras invisibles de la institución etnoeducativa Monseñor Ramon Arcila de la ciudad de Cali.

Pero a diferencia del propósito que tiene el actual trabajo de grado; dentro del escenario de aprendizaje planteado por Martínez, E (2014), se considera que las matemáticas implícitas en el escenario deben ser del conocimiento de los estudiantes, ya que el propósito del escenario es crear en los estudiantes ideas de donde y como usar las matemáticas que ya conocen y no ser una introducción a un nuevo concepto matemático.

Otro trabajo es el de Cárdenas, Y; Muñoz, D (2014), que presenta una propuesta didáctica sobre secciones cónicas, integrando Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) con referentes teóricos de la matemática crítica, en el grado décimo de la institución educativa Horizontes, situada en un contexto de conflicto de la ciudad de Medellín. Cuyo propósito es generar una reflexión respecto a los aportes que puede tener la educación matemática crítica para crear conexiones entre el contexto, el conocimiento matemático (secciones cónicas) y las TIC, además de identificar los conocimientos que los educadores de matemáticas deben tener para construir una secuencia didáctica sobre secciones cónicas.

La propuesta de Cárdenas (2014), exceptuando el objeto matemático y el uso de las TIC, se acerca más a la intención del presente trabajo de grado. No obstante, a diferencia del propósito de Cárdenas (2014) lo que se pretende además de la enseñanza del concepto de función y de caracterizar una propuesta didáctica que articule la EMC con un concepto matemático, es generar en el estudiante una postura crítica respecto a situaciones de su realidad.

Una tercera propuesta, se desarrolla en Brasil en la Universidad de Madeira, por Oliveira, M; Goncalves, R (2014) “Aprender a Ser Crítico con las Matemáticas”. Cuyo objetivo es comprender cómo la EMC contribuye a formar estudiantes participativos y críticos, capaces de analizar, identificar y validar la veracidad de situaciones cotidianas, utilizando como estrategia el uso de folletos publicitarios sobre promociones de una red de supermercados, de tal forma que se promueva el uso de conceptos matemáticos (porcentajes y regla de tres) al momento de tomar una postura crítica respecto a la situación planteada.

Esta última propuesta al igual que la planteada por Martínez, E (2014) no tiene como finalidad la enseñanza o aprendizaje de un nuevo concepto matemático, sino el desarrollo de un pensamiento crítico por parte de los estudiantes haciendo uso de una matemática que ya es del dominio del grupo.

De esta manera todos estos estudios aportaron al planteamiento del problema de investigación, pues no se encontraron trabajos en los que se articule la EMC y el concepto de función con el fin de caracterizar a través de una propuesta didáctica la enseñanza y aprendizaje de del concepto de función promoviendo la formación de un estudiante crítico hacia su realidad. Además, Uno de los aportes más valiosos, se obtiene de Martínez, E (2014), cuyo trabajo de grado permite identificar las características generales que debe tener un proyecto enmarcado en la EMC. Tales características se hacen visibles en el trabajo de Oliveira, M; Goncalves, R (2014), permitiendo en gran medida tener un punto de partida para establecer los elementos propios de este proyecto.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Proponer una propuesta didáctica por proyecto en el marco del enfoque conocido como la educación matemática crítica, para la enseñanza del concepto de función lineal a estudiantes de grado noveno, que contribuya a la generación de una postura política respecto a aspectos socioeconómicos propios del contexto colombiano.

1.4.2 Objetivos específicos

Se plantean objetivos específicos como guía para encaminar la solución al problema planteado y dar cumplimiento al objetivo general propuesto.

- Precisar elementos teóricos relativos a la educación matemática crítica y a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, que contribuyan al desarrollo del estudiante de grado noveno como sujeto políticamente activo en contextos económicos y sociales.
- Articular en una propuesta didáctica por proyecto los elementos teóricos relativos a la educación matemática crítica y los aspectos relativos a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal.
- Analizar el diseño mismo de la propuesta didáctica y su potencial de implementación en los niveles educativos para los cuales se ha formulado.

Capítulo 2

2. REFERENTES TEÓRICOS

2.1 Aspectos didácticos

2.1.1 La educación matemática crítica

La mirada central de esta propuesta está en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función como herramienta matemática para el desarrollo del estudiante como un sujeto crítico. Lo que ubica la investigación en la línea de la didáctica, particularmente en la matemática crítica enfocada en el desarrollo del pensamiento variacional; marco de referencia que implica reconocer la importancia del contexto en la construcción de significados y potenciar la articulación entre elementos matemáticos del pensamiento variacional y aspectos sociocríticos a través de la generación de actividades en el aula que partan de problemas enmarcados en la cotidianidad social del estudiante en los que se usen conceptos matemáticos como medio para lograr una solución a problemáticas reales; actividades que funcionen como alternativa a la instrucción matemática tradicional (deductiva), donde la matemática es un proceso de hacer matemática que conlleva a un resultado y a la cual Freudenthal (1973, p. 134) caracteriza como “inversión antdidáctica”.

Para Freudenthal la enseñanza de la matemática debe estar relacionada con la “realidad”, la matemática debe ser para todos, no para unos cuantos selectos en el aula de clase, de tal manera que sea cercana al alumno y relevante para la sociedad en orden de construir un valor humano; esta idea puede ser tomada como central de la Educación Matemática Realista (EMR) señalando que “la imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad (Freudenthal, 1991, p. 32).” En efecto la EMR articula temáticas de la realidad con temas de la matemática (matemática pura), aclarando el hecho de que se debe partir

del contexto para construir el concepto matemático. Es así como la enseñanza de las matemáticas debe estar determinada por las situaciones del contexto más no por la aprehensión y memorización de definiciones, procesos repetitivos y algorítmicos sin ningún contexto.

Al respecto, en “Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia: ¿Qué es el “contexto” en educación matemática?” Valero (2002), plantea una definición con visión amplia del contexto identificando tres formas distintas como se puede definir este: el contexto del problema, el contexto de interacción y el contexto situacional.

Contexto del problema: “El contexto de un problema puede referirse o bien al campo de nociones y procedimientos matemáticos dentro de los cuales se ubica un problema, o bien a las referencias que la formulación de un problema evoca en el estudiante.” (Valero, 2002. p. 50). En este sentido el contexto del problema trata de involucrar al estudiante en las concepciones matemáticas que se movilicen al tratar de llegar a la solución, dejando de lado la interacción y las situaciones de un entorno.

Contexto de interacción: “El contexto de interacción abarca no sólo los problemas y sus referencias matemáticas y de la vida real, sino también la manera como esos problemas se abordan en el aula a través de la cooperación entre los participantes” (Valero, 2002. p. 51). A diferencia del contexto del problema, en esta noción de contexto se tienen a consideración los factores que involucran el intercambio de conocimientos entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor, posibilitando así que los estudiantes pueden intercambiar saberes, experiencias e ideas.

Contexto situacional: “El contexto situacional se ha definido como las relaciones históricas, sociales, culturales y psicológicas entre otras, que están presentes y constituyen el aprendizaje, las formas de usar y las maneras de llegar a conocer las matemáticas” (Valero, 2002. p. 52). Esta clasificación del contexto implica pensarse la enseñanza de las matemáticas más allá

de las nociones y procedimientos matemáticos como lo plantea el contexto del problema y de la interacción en el aula; lo que implica un aprendizaje intrínseco a la situación donde se desarrolla. Definidas estas tres visiones del contexto, Valero (2002) plantea una cuarta visión; el contexto sociopolítico de la educación matemática.

Esta visión de contexto se asocia con el trabajo de investigadores que intentan conectar el macrocontexto de la educación matemática con su microcontexto. En otras palabras, la noción de contexto en términos sociopolíticos ha surgido en estudios que se preguntan sobre el vínculo que existe entre lo que sucede en el aula con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las estructuras económicas, sociales, políticas y los procesos históricos que dan significado a esos fenómenos. Estos estudios parten del supuesto de que existe una relación estrecha entre las matemáticas, la educación matemática y el espacio social donde éstas dos se construyen (Valero, 2002, p. 54)

Concepción que plantea una apertura al concepto restringido del contexto, dando un lugar a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fuera de los contextos que se ubican en los límites del aula (contexto de un problema, contexto de interacción y contexto situacional), expandiéndose (sin dejar de lado elementos situados en los tres contextos anteriores) a perspectivas políticas, sociales, económicas, históricas y culturales, que integren además de aspectos cognitivos de la enseñanza y aprendizaje, elementos que acerquen las matemáticas al estudiante, permitiéndole encontrar sentido a su aprendizaje, y la posibilidad de comprender la importancia de ser un participante activo, que cuente con herramientas de un conocimiento formal como el de las matemáticas al momento de encontrarse con situaciones sociopolíticas y socioculturales, que permeen el lugar del educador de un mayor dinamismo entre los aspectos que moviliza su enseñanza.

Esta cuarta visión del contexto permite enfocar la formación del estudiante como un individuo crítico, entendiéndose que “ser crítico significa prestarle atención a una situación crítica, identificarla, tratar de captarla, comprenderla y reaccionar frente a ella” (Skovsmose, 1999. P. 16) y por educación crítica como aquella que educa a sus ciudadanos para que estos estén dispuestos a asumir riesgos, desafiar falsedades e irregularidades sociales y creer que las acciones que tomen como individuo impactarán en el colectivo, argumento que da soporte a la importancia de la alfabetización, no solo como un medio para enseñar operaciones o conceptos básicos a los analfabetas, permitiéndoles ser productivos dentro de un mercado laboral, sino también para formar sujetos políticos, tal como lo menciona Skovsmose “la educación crítica debe luchar contra las restricciones ideológicas, debe reaccionar a los conflictos y a la diferenciación de oportunidades que la sociedad encarga a las escuelas y debe otorgar competencias que capaciten a la gente para confrontar la naturaleza crítica de la sociedad” (1999, p. 28).

Justamente Skovsmose & Valero (2012) propone los escenarios de investigación como una herramienta que tome como punto de partida una situación particular con el potencial de promover un trabajo de indagación, escenarios en los cuales un estudiante pueda formular preguntas y buscar explicaciones, donde sea él quien esté al mando; dado que el escenario es quien invita al estudiante a participar en él y es el estudiante quien decide si participar o no, decisión que impulsa a la apropiación del proceso de exploración y explicación, siendo estos dos los constituyentes de un escenario de investigación. Skovsmose propone tres ambientes de investigación en contraposición con el paradigma del ejercicio¹, planteados a partir de una matriz de ambientes de aprendizajes (ver tabla 1).

¹ Enfoque de Actividades orientadas a la exclusivamente a la resolución de ejercicios, en las cuales la relevancia de la justificación del ejercicio no hace parte de la lección matemática.

Tabla 1: Matriz de ambientes de aprendizaje.

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Plantea tres ambientes de aprendizaje (2), (4) y (6) que relacionan escenarios de investigación con tipos de referencia, en contraposición con escenarios que relacionan el paradigma del ejercicio con los tipos de referencia (Skovsmose, O. Valero, P. 2012, p. 116).

Entre los tipos de referencia que plantea Skovsmose, se menciona uno al que denomina semirrealidad, refiriéndose a este, no como una realidad observable, sino como una realidad construida y la cual es establecida en sí por el ejercicio de matemáticas planteado durante la clase.

También, es pertinente mencionar que de los seis ambientes de aprendizajes plantados por Skovsmose serán definidos (2), (4) y (6), por encontrarse dentro del escenario de investigación, siendo este, aquel que encierra la naturaleza de este trabajo de grado, sin dejar de invitar a la lectura de los ambientes (1), (3) y (5) en Skovsmose (2012), pues es el mismo Skovsmose quien plantea la importancia de movilizar la enseñanza por los distintos ambientes de aprendizaje.

El primer escenario de investigación (2) constituye un ambiente de aprendizaje bajo el referente de las “matemáticas puras”. En el cual se promueve la indagación y el cuestionamiento por parte del estudiante respecto a la actividad desarrollada, pero dicha actividad esta alejada de una realidad simulada o un contexto realista, por el contrario, su desarrollo se encuentra enmarcado exclusivamente en las matemáticas. Este ambiente de aprendizaje plantea actividades como la siguiente:

Ejemplo: El docente plantea en clase una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b y c son números reales con $a \neq 0$, y apoyando su propuesta con un software de geometría dinámica como GeoGebra les brinda la posibilidad de visualizar cambios en la gráfica a partir de deslizadores que hagan cambios en los valores de a, b y c (Figura 1), permitiéndole plantear a sus estudiantes ciertos interrogantes respecto a lo que ocurre en la representación gráfica de una función cuadrática.

¿Qué pasa si a es un número negativo y qué si es positivo? ¿Qué ocurre si b y c son igual cero? ¿Qué ocurre cuando solo b es cero, y dejamos el valor de a fijo con c toman valores diferentes a cero? ¿Qué tal si c es cero, y dejamos el valor de a como un número positivo fijo, con b tomando valores diferentes a cero? ¿Qué ocurre si c es cero, y dejamos el valor de a como un número negativo fijo, con b tomando valores diferentes a cero? ... ¿Y qué sucede si a es cero? ...

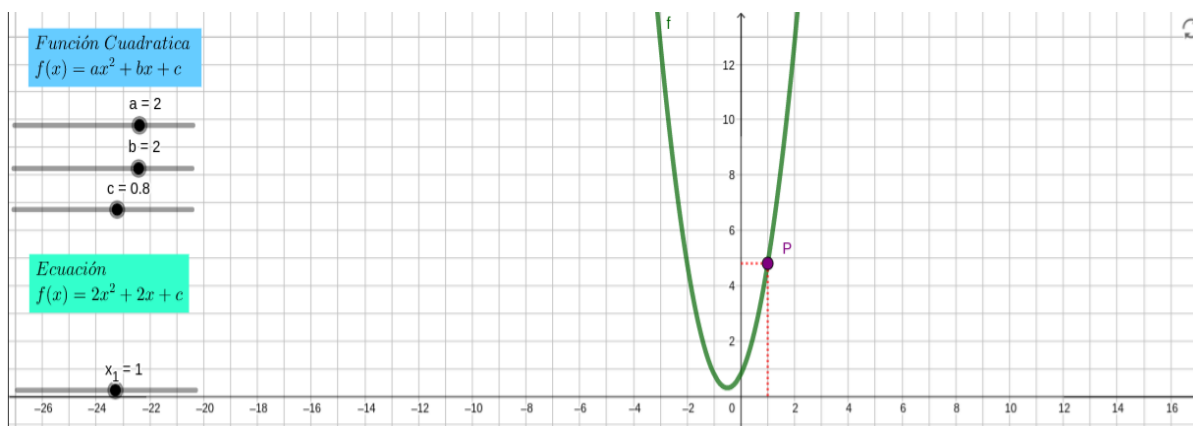


Figura 1: Ejemplo del primer escenario de investigación.

Recurso de GeoGebra diseñado en la cuenta de Delrasa, 9 de octubre de 2017; 3:34 vinculada a través del enlace <https://www.geogebra.org/m/pJumYPpy>

Interrogantes que en algún momento de la actividad invitarán al estudiante a formular preguntas y buscar explicaciones que le permitan entender el significado de cada uno de estos términos en la construcción gráfica de una función cuadrática.

El segundo escenario (4) conforma un ambiente de aprendizaje con el tipo de referencia de la semirrealidad, una actividad que sirve como ejemplo para este tipo de ambiente, podría ser la propuesta planteada Zapata, F. Cano, N. (2010, p. 211 - 222). La cuál crea un escenario con el que los estudiantes realmente interactúan para dar solución a un problema, sin ser observable y completamente inventado según la necesidad matemática que se desea trabajar. Esta actividad en un principio plantea la situación del robo de un rubí.

El laberinto del rubí: Un famoso extranjero; ladrón de joyas llamado Shirleck Hobbes en 1997 robó en el Museo de Piedras, un rubí que cuesta diez millones de dólares. Tras su detención confesó que el rubí no podía ser encontrado por nadie y que todos los esfuerzos que se hicieran serían en vano; por lo que nunca se supo donde lo escondió. Antes de morir dejó unas cajas con algunas cartas, que parecerían ser las pistas para encontrar el Rubí.

Se cree que el secreto para encontrar la joya está en un castillo Romano, ya que las cajas se encontraron abandonadas en una gran ese “S” que se encuentra a las afueras de tan impactante edificación. Muchos son los cazas recompensas, policías, matemáticos y amantes del acertijo, que han intentado hallar la joya siguiendo las pistas que dejó Shirleck; pero su astucia ha logrado frustrar los sueños de todos lo que se han atrevido. Se dice que el ladrón es un genio y que, si alguien logra hallar la joya, también se catalogará como tal. En el año 2009, el millonario Minos Onúaf, persona quién donó al museo la famosa joya, publicó las cartas y contenido de los objetos, dejadas por el ladrón, para que cualquier persona de cualquier región del mundo, lograra descifrar las pistas y recuperar el rubí; quien lo hiciera recibiría del millonario, como recompensa, a su ingenio, un certificado de su gran talento e inteligencia y el compromiso de hacer con el dinero lo que

él o las personas que logren hallar la joya destinen hacer con él. A continuación, se presentan las pistas del laberinto de Rubí nombre que le dio el ladrón a tan majestuosa labor de búsqueda de la joya. En esta historia ustedes serán investigadores. (2010, p. 214, 215)

Posterior al enunciado del robo se les dan a los estudiantes, distintas pistas que con ayuda de su ingenio y conocimientos matemáticos podrán descifrar; pistas (ver figura 2).

El Rubí tiene un código de barras que permite su identificación en el mercado cambiario. Formando parte de este código aparece un número de 14 dígitos que corresponde a ese producto. Este número está formado por varios bloques de dígitos que representan la zona geográfica, la empresa y el producto concreto.

El último dígito es lo que se denomina un **«dígito de control»**, ya que sirve para detectar algunos de los errores que pueden producirse durante el manejo de dicho número como, por ejemplo, equivocarse al introducir uno de los dígitos o intercambiar dos dígitos consecutivos.

Para determinar el dígito de control les voy a facilitar un poco las cosas (este número les dirá el número de la puerta del piso tres “3” por donde dirigirse para avanzar contando de derecha a izquierda).

Deberán entonces calcular la suma de todas las cifras que, de izquierda a derecha, ocupan un lugar par y multiplicar el resultado obtenido por 3.



Luego deberán sumar todas las cifras que ocupan un lugar impar.

El dígito de control es el número que hay que sumar al total, para que el resultado final sea 100. En la imagen tenemos el código de barras del Rubí.

Este código te permitirá abrir la caja donde está guardado el secreto dentro de la caja fuerte. **Shirleck Hobbes.**

Figura 2: Ejemplo de una de las pistas dadas a los estudiantes para descifrar el misterio. (Zapata. F, 2010, p. 218).

Esta actividad, se enmarca en un escenario de investigación donde los estudiantes todo el tiempo son invitados a descubrir, y el escenario de la semirrealidad no es usada como una fuente para formular un ejercicio, sino como un elemento que invita a la exploración y explicación dentro de un contexto matemático que les permita llegar a descifrar el acertijo planteado en una semirrealidad.

La última pista que se plantea a los estudiantes esta propuesta como un sistema de ecuaciones 2×2 . Los resultados de las ecuaciones se encuentran organizados en tablas de tal

forma que le permitan construir al estudiante el mensaje que descifra el secreto del rubí (ver figura 3).

$$\begin{array}{ccccc}
 a - l = 1 & 4j - 0 = 10 & i - 2c = 3 & d + s = 3 & e + y = 10 \\
 2a + l = 2 & 2j + 0 = 2 & i + c = -1 & d - s = -5 & e - y = -4 \\
 \\
 -2u + 5t = 4 & 2p + 5r = 6 & n - 3h = -8 & z - 5q = -4 & \\
 u - 2t = 6 & p - 2r = 1 & n - 2h = 1 & z - 2q = 1 & \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 2 & -2 & 7 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline 7/2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & & & \\ \hline 3 & 19 & 4 & 13 & 3 & 19 & 6 & 8 & 1 \\ \hline \end{array} &
 \end{array}$$

Figura 3: Ejercicio propuesto para descifrar el misterio del juego de rol.

Los estudiantes aplican lo que han aprendido respecto a sistemas de ecuaciones con el método de solución gráfico con ayuda de GeoGebra, con el fin de ser victorioso en el juego de rol. (Zapata. F, 2010, p. 218).

El tercer escenario (6), el cual se privilegia en este trabajo por ser aquel sobre el cual se pretende soportar el proyecto que será planteado en cumplimiento de los objetivos, constituye un ambiente de aprendizaje bajo la referencia de un contexto realista. Como ejemplos de este tipo de ambiente, se proponen uno de los trabajos organizados como proyectos “Energía” en el libro “Hacia una filosofía de la educación matemática crítica” (Skovsmose, 1999. P. 171).

Este proyecto se centra en la entrada y salida de energía, en un principio los estudiantes calculan la cantidad de energía (en kilojulios [kJ]) suministrada por la ingesta de un desayuno. Luego, los estudiantes investigaron algunas fórmulas que permitan calcular la energía consumida en un paseo en bicicleta, lo que permitió hacer cálculos de energía a partir de parámetros como el “área frontal” del ciclista. ¿Cómo medir esta área? Al encontrar el método y realizar los cálculos los estudiantes se aproximaron a una primera idea del modelo de entrada-salida de energía.

Luego, el proyecto se concentró en modelos de entrada-salida para la producción agrícola. Primero calcularon cuánta energía entra en la producción, por ejemplo, el combustible necesario para arar un terreno durante un año, También se calculó la cantidad de energía

contenida por la cebada recolectada. De acuerdo con los cálculos de los estudiantes, la relación de entrada-salida mostro que la cebada recolectada contiene cerca de seis veces más energía que lo que le “entró” al terreno. Este resultado se comparó con las estadísticas oficiales de Dinamarca, que revelaron que el factor es un poco menor.

En esta finca la cebada se usaba para el engorde de cerdos. Lo que permitió construir un nuevo modelo de entrada-salida de energía. Contrastando la cantidad de cebada que comen los cerdos dependiendo de su peso y el tiempo que transcurre antes de llevarlos al matadero. Los cálculos hechos en este modelo permitieron identificar que la producción de carne de cerdo, parecía un mal “negocio” en términos de energía. Las estadísticas oficiales de Dinamarca, también ayudaron a confirmar que los resultados de los estudiantes se aproximaban a la realidad.

Este es un ejemplo que tiene un referente en la vida real y pone en evidencia la aceptación de los estudiantes a la invitación que este escenario de investigación hace, aceptación que se ve en el compromiso con la solución del problema, al recolectar información, plantear modelos, realizar investigaciones, donde las matemáticas eran un elemento necesario para entender el problema a solucionar, así como fueron necesarias para poder plantear el modelo de entrada – salida, dado que para ello los estudiantes tuvieron que hacer cálculos respecto a la cantidad de energía proporcionada por alimentos y emplearon fórmulas que permitan calcular el consumo de energía en algunas actividades físicas.

Este tipo de ejemplo plantea una enseñanza de las matemáticas desde un referente “externo” a ellas, mostrando una contraparte al paradigma del ejercicio, donde la solución del problema, aunque parte de hechos reales en los cuales posiblemente los estudiantes se vean afectados por ellos, se halla a partir de procesos algorítmicos y sistemáticos, cuyos resultados pueden dar pie a cuestionamientos y discusiones, pero no moviliza en los estudiantes la reflexión

respecto a los resultados obtenidos en la investigación como un compromiso a su formación, dejando al docente el papel de supervisor y permitiendo que los libros de texto de la educación tradicional pierdan relevancia en la formación del estudiante.

Una vez más es pertinente recalcar que es el sexto ambiente de aprendizaje el que se usará como soporte para el proyecto de este trabajo, y es bajo la articulación entre un escenario de investigación y un punto de referencia realista que se buscará la construcción del concepto de función lineal, pero antes de esto será necesario ilustrar aspectos del pensamiento variacional que permitirán tener una base más sólida a esta propuesta.

2.1.2 Las crisis, la crítica y el desarrollo del pensamiento crítico

Es posible iniciar afirmando que no existe una sociedad equilibrada o estable, incluso se podría afirmar que durante la historia de la humanidad no se ha podido establecer un equilibrio social, la prueba de ello es evidente ante las situaciones de desigualdad, las diferencias en las oportunidades sociales, la desnutrición, la sobre explotación de los recursos, entre otras muchas situaciones, a las cuales en este trabajo al igual que Skovsmose (1999) se le llamara crisis.

Una vez identificado a que fenómenos se refiere Skovsmose y por consiguiente este trabajo con el término crisis, Skovsmose plantea la definición de crítica. Para ello se inicia estableciendo una relación entre crisis y critica, teniendo presente que ambas tienen referencia con la acción de tomar una decisión y hacer juicio. Al momento de formular una definición de crítica, se presenta un dilema del significado. Por ejemplo, en el campo de la medicina una situación crítica hace refiere a un punto de no retorno o difícil de tratar. Que si lo analizamos tiene relación con una crisis.

Ahora bien, si existe el dilema de significado dependiendo del campo en el que se hable, a que se refiere entonces el ser crítico. En la antigüedad critico (del griego *Kritikos*) hace

referencia a filósofo, así pues, un crítico debería ser aquel que confrontara a las autoridades con errores producto de creencias, mitos o supersticiones, lo que da al término crítica una nueva connotación.

Esta nueva connotación que se adjudica a la crítica, alcanza su apogeo en Europa a lo largo del siglo XVIII denominado el Siglo de las Luces propiciado por el movimiento filosófico, político y literario designado Ilustración. Produciendo su cuerpo ideológico, el Enciclopedismo (1751 - 1765), con sus principales representantes Jean Le Rond, Voltaire, Montesquieu, Denis Diderot, Buffon, entre otros. El ideal de la Ilustración se centraba en la oposición que realizan los intelectuales de esta época a partir de la razón al orden ya establecido, un orden en el que predominaban mitos y supersticiones (ejemplo de ellos es la cacería de brujas). Así pues, en este periodo la crítica y el uso de la razón se convirtieron en sinónimos. Incluso en esta época ya se puede encontrar una relación entre la crítica y la crisis, dado que una de las características de la Ilustración es la búsqueda de la felicidad, que se manifiesta en igualdad, no económica, pero sí frente a la ley y la justicia.

Hasta este punto se podría definir la crítica como una acción de oposición respecto a una autoridad (religiosa, política, feudal...) que hace uso de la razón mas no de la superstición o creencias.

En el siglo XX con el Marxismo, la crítica adquiere el significado de objeto mismo de una teoría. Obteniendo un doble sentido: la crítica orientada hacia la opinión y la crítica orientada hacia la realidad. De esta doble orientación la que interesa en la definición de crítica que enmarca este trabajo, es aquella orientada a la realidad. Así pues, como el mismo Skovsmose (1999, p. 16) lo define, la crítica “se refiere tanto a la actividad de juzgar y de salir de un dilema, como a las connotaciones del término que provienen de la acepción de análisis, evaluación,

juicio y valoración, y como a los significados derivados de la idea de acción” por consiguiente la crítica corresponde al tomar una postura y buscar solución a un problema, sin dejar de lado el análisis, la evaluación, juicio, valoración y las posibles de reaccionar frente a la problemática.

Ahora es posible definir la crisis como un desequilibrio o desigualdad que evoca a una crítica. Así pues, la crítica es consecuencia de una crisis.

2.1.3 La relación matemáticas-educación y matemática-democracia

La relación existente entre las matemáticas, la educación matemática y la democracia, es un aspecto ya pensado en el modelo educativo colombiano; este modelo plantea en la Ley General de Educación que uno de los fines de la educación colombiana es “La formación en el respeto a la vida y a los demás derechos humanos, a la paz, a los principios democráticos, de convivencia, pluralismo, justicia, solidaridad y equidad, así como en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad.” (Ley 115 de febrero 8 de 1994, título I, artículo 5°), además del mensaje del MEN en los Lineamientos Curriculares que plantea como una nueva visión de la educación, el promover una ciudadanía consiente y capaz de ejercer sus derechos al desarrollo justo y equitativo, y que sea participativa en la repartición de los recursos.

Asimismo, son los Lineamientos aquellos que guían el currículo de las instituciones educativas y en efecto el plan de estudio matemático; siendo estos mismos Lineamientos en cumplimiento de la ley general, quienes muestran la pertinencia de relacionar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con los fundamentos democráticos que rigen esta nación, aunque esto no implique que en la práctica sean tenidos en cuenta.

Así pues, Skovsmose y Valero (2000) presentan tres tesis acerca de la conexión existente entre la educación matemática y la democracia: la tesis de la resonancia intrínseca, la tesis de la disonancia y la tesis de las relaciones críticas.

La primera tesis, resonancia intrínseca, se apoya en argumentos que apoyan la contribución de las matemáticas y la educación matemática a la democracia, argumentos que se han tomado como justificación en la enseñanza de las matemáticas en las instituciones escolares, asociadas con ideas tales como: “la educación matemática contribuye al desarrollo tecnológico y socioeconómico de la sociedad; contribuye al mantenimiento y desarrollo político, ideológico y cultural de la sociedad, y proporciona a los individuos los requisitos que deben cumplir para desempeñarse en la vida en sus varias esferas” (Skovsmose, 1999, p. 4). Como ejemplo a la primera idea planteada, está la revolución que se dio en la escuela norteamericana después del lanzamiento del Sputnik por los soviéticos, lo que llevo a una renovación de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria y media, de tal forma que los estudiantes tuvieran conocimientos de las matemáticas a la altura de las exigencias del desarrollo tecnológico; lo que en consecuencia le delega socialmente a las matemáticas la formación que permite el desarrollo de la tecnología, además del económico como consecuencia del avance tecnológico.

Para la segunda y tercera idea Skovsmose citando a Hannaford (1998) quien afirma que la democracia puede ser entendida como ciencia fundamentada en las matemáticas “Las matemáticas llegaron a ser la base del *techne logos*, el debate racional que sustituyó los discursos de la vieja retórica y que apoyó la nueva poli democrática” (Skovsmose, 1999). Este nuevo estilo de discurso apoyado en un razonamiento matemático, que permitió dar más libertad política al ciudadano del común. Lo que brinda a los ciudadanos los elementos necesarios para movilizarse en los distintos aspectos de su entorno social. Respecto a esto se puede decir que “Si los niños reciben una buena enseñanza matemática, esto les enseñará mucho de la libertad, las habilidades y, desde luego, las disciplinas de expresar, disentir y tolerar que necesita la democracia para tener éxito” (Hannaford, 1998, p. 186). Apoyado en estos argumentos Skovsmose afirma que:

hay una resonancia intrínseca entre educación matemática y democracia. Esta tesis se basa en el supuesto de que, debido a la naturaleza de las matemáticas, la educación matemática puede resguardar los intereses y valores democráticos. La relación entre educación matemática y democracia es armoniosa en el sentido de que hay una correspondencia entre las cualidades básicas de la educación matemática y los principios democráticos... Si se puede suponer una resonancia intrínseca, no es necesario que la investigación en educación matemática discuta explícitamente la relación entre la educación matemática y la democracia. Las cualidades políticas atractivas de la educación matemática se pueden suponer a priori para cualquier programa de investigación. (Skovsmose, 2000, p. 5)

La segunda tesis, la tesis de la disonancia “sugiere que la educación matemática ha establecido una negación sistemática al acceso sobre la base del género, de la raza, del idioma y del estatus socioeconómico o clase social de las personas.” (Skovsmose, 1999, p. 7). Para argumentar esto Skovsmose plantea varios referentes; entre estos el discurso de H. Verwoerd al Senado sudafricano, en 1954; donde se pone en evidencia que “la tarea primordial de la educación del apartheid fue asegurarse de que los negros no tuvieran acceso a la escala social. Ser excluido de las matemáticas también significaba ser excluido de la posibilidad de “avance” en la sociedad” (Skovsmose, 1999, P. 8).

La tercera tesis, relación de crítica, plantea un equilibrio entre la resonancia intrínseca y la disonancia intrínseca, afirmando que la relación entre la educación matemática y la democracia puede ir en “ambos sentidos”, pero el sentido que tome es un asunto crítico tanto para la sociedad como para la educación.

La dirección que tome la educación matemática (y la investigación) al estar expuesta a la democracia se hace dependiente de los distintos factores culturales, sociales, políticos y económicos. Ejemplos como el de la educación matemática en la Alemania Nazi y el apartheid en Sudáfrica proponen una relación crítica entre la educación matemática y la democracia al evidenciar que, así como la matemática puede servir a fines democráticos, también lo puede hacer a fines antidemocráticos. En el caso de ver la matemática como elemento que contribuye al desarrollo de la democracia en la sociedad, su potencial “surge de una combinación de factores como: quién está comprometido en las prácticas de educación matemática, a los propósitos de quién sirven las prácticas, qué objetivos persiguen, cuándo y dónde ocurren y por qué se ejecutan.” (Skovsmose 1999, p. 10); pero en el segundo caso, Skovsmose sugiere objetivos generales para la educación matemática que apoyen el desarrollo de conexiones entre la educación matemática y la democracia, teniendo claro que esto no asegura que en la práctica del aula realmente se apoye el desarrollo democrático, pero estos pueden funcionar como sugerencias que ayuden a luchar con asuntos críticos.

Se han considerado elementos curriculares que están sujetos a la relación entre la educación matemática y la democracia, así como tres tesis que exponen esta relación, sin llegar a precisar con exactitud cuál es la relación que existe entre enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de valores democráticos, pero que dejan ver como al estar parado en una de ellas, se pueden modificar aspectos en la otra.

2.1.4 El aprendizaje desde las situaciones problema y desde proyectos

Skovsmos (1999) en su planteamiento de los escenarios de investigación, plantea el trabajo por proyectos como una alternativa a la educación matemática tradicional basada en el paradigma del ejercicio, siendo el trabajo por proyecto una de las muchas formas que puede

tomar el trabajo investigativo y en particular, un trabajo investigativo enfocado en la matemática crítica, la cual Skovsmose (1999) caracterizan en términos de las siguientes preocupaciones:

- Alfabetización matemática, la cual “no solo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas” (Skovsmose, 1999, p. 110).
- “Por el desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia, lo cual quiere decir que la microsociedad del salón de clase de matemáticas debe encarnar aspectos democráticos” (Skovsmose, 1999, p. 110).

Ambas preocupaciones muestran a las matemáticas como un área que no solo debe ser enseñada bajo sus definiciones, axiomas, teoremas y propiedades, sino también en el marco de la reflexión; una reflexión no solo sugerida al estudiante, sino también obligada al docente en su propuesta de aula, teniendo en consideración los muchos aspectos sociales, tecnológicos, culturales y políticos estructurados por la matemática. Todos estos elementos, difícilmente pueden ser abordados en un modelo de enseñanza tradicional basado en el paradigma del ejercicio, lo que implicaría la necesidad de un paradigma de enseñanza diferente. Así pues, un paradigma de la enseñanza orientado por problemas, puede hacerse cargo de la totalidad de un concepto y sus complejidades al interiorizar un problema a través de la investigación.

2.2 Aspectos curriculares

El MEN en aras de dar cumplimiento a las normas colombianas que definen y regulan el modelo curricular de las distintas instituciones educativas, plantea los Lineamientos Curriculares de las Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencia, los cuales apartir la ley general de educación (ley 115 de 1994), decreto 1860 de 1994; presentan pautas que permitan una construcción equilibrada del currículo escolar.

A continuación, se presentan aspectos de los dos documentos mencionados anteriormente, referidos al concepto de función, la sociedad y la democracia.

2.2.1 Lineamientos Curriculares en Matemáticas

Los Lineamientos Curriculares de Matemática (LCM) en Colombia, han tenido presente en su propuesta curricular aspectos como la naturaleza de las matemáticas, las justificaciones para aprender y enseñar matemáticas, los procesos de aprendizaje, la relación entre matemática y cultura; y propone como principal objetivo del currículo “ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan” (1998, p. 18), afirmando que la comprensión de la matemática provee al estudiante de instrumentos que le permiten explorar, representar, explicar y predecir la realidad; en efecto, la enseñanza de las matemáticas debería dar al estudiante la posibilidad de aplicarla fuera del ámbito escolar, en experiencias cotidianas bajo un contexto de situaciones problema.

De acuerdo con esta visión, el MEN propone tres aspectos para organizar el currículo:

- Los **procesos generales** hacen parte de las actividades intelectual que realiza el estudiante para alcanzar las distintas competencias matemáticas. Actividades tales como: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- Los **conocimientos básicos** que tienen que ver con procesos específicos (se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros) que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas (sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos).

- El **contexto** que tiene que ver con los aspectos sociales, económicos, culturales y creencias del entorno sobre el cual se desenvuelve él estúdiate.

Precisamente la articulación de estos tres aspectos es lo que permite cumplir el objetivo que tiene el aprendizaje de las matemáticas. El poder identificar que no es suficiente moverse entre los conocimientos básicos, sino que también es pertinente identificar que estos procesos específicos se deben tomar como un medio para desarrollar en el estudiante los procesos generales de aprendizaje, siendo el contexto una de las formas que puede promover esta meta al darle sentido a los conceptos matemáticos abordados.

Respecto a estos tres aspectos y la relación que pueda existir entre ellos, los lineamientos proponen cuatro modelos (están abiertos a críticas y mejoras respecto a las limitaciones que estos puedan presentar) que pueden servir como guía en la construcción del currículo institucional.

El tercer modelo planteado y sobre el cual estará soportado este trabajo de grado, presenta la construcción 3D de una esfera, cuyos ejes del espacio tridimensional corresponden a los procesos generales, los procesos específicos y los sistemas propios de las matemáticas. Siendo el contexto la superficie esférica que los envuelve. En la figura 4 se puede visualizar este modelo.

La elección de este modelo y no de cualquiera de los otros tres, tiene que ver con la forma de interpretar un punto ubicado sobre la superficie esférica. Dado que sin importar en qué lugar del espacio se ubique, estarán relacionadas las tres dimensiones, las cuales se desarrollan al interior de una situación problema relacionadas con el contexto del estudiante. Siendo esto justamente la intención que tiene este trabajo.

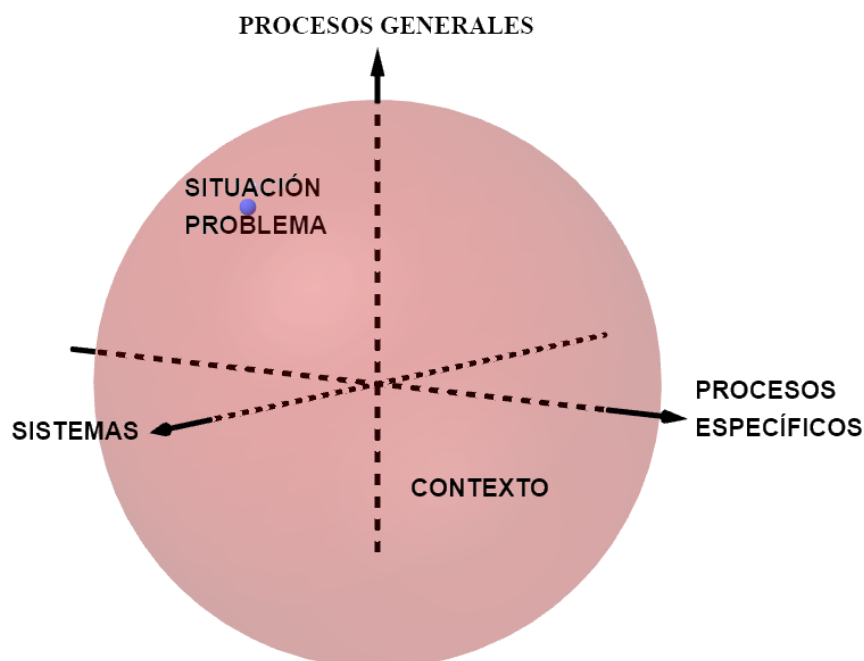


Figura 4: Tercer modelo propuesto por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. (MEN, 1998, p. 21).

Al relacionar el modelo con los objetivos propuestos, se puede establecer que la interrelación y dinámica que se busca en estos tres aspectos es la que se presenta en la tabla 2; la cual muestra los procesos de aprendizaje que se desean movilizar, los conocimientos que se desean potenciar y el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza.

Tabla 2: Procesos de aprendizaje.

Conocimientos básicos	Procesos generales	Contexto
Pensamiento variacional.	Razonamiento Resolución y planteamiento de problemas.	Situaciones problema de la vida diaria y otras ciencias.
Sistemas algébricos y analíticos.	Comunicación. Modelación. Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.	

Procesos de aprendizaje que se movilizan en el modelo planteado (MEN, 1998).

2.2.2 Pensamiento variacional

Desde el inicio de este trabajo se he tenido presente que el pensamiento abordado es el variacional, pero aún no se ha hablado del pensamiento como tal. En efecto se puede iniciar afirmando que “el pensamiento variacional es una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (Vasco, 2003, p. 6).

Esta definición de Vasco (2003) muestra que el pensamiento variacional, no se puede presentar de una manera estática, por el contrario, debe promover la identificación de cambio y los elementos que varían de forma simultánea con este, así como los que permanecen invariantes, todo esto relacionado con los sucesos de la realidad. Es decir, qué, aunque el pensamiento variacional, involucre expresiones algebraicas, ecuaciones, cálculos aritméticos y demás procesos algebraicos, su naturaleza reside en identificar los cambios presentes en la realidad, que, al hacer uso de los elementos numéricos, permite ver la covariación de estos cambios con otras magnitudes y al tomar elementos del algebra logra la generalización de esta covariación, sin olvidar que es una relación de cambio.

Además, tal y como se muestra en la Figura 5, existe una relación del pensamiento variacional con los otros cuatro pensamientos, en particular existe una relación de dependencia del pensamiento variacional respecto a los pensamientos geométricos, métrico y numérico, pero siendo el variacional aquel que le quita el carácter estático a los objetos matemáticos involucrados en estos otros y permite un análisis de cambio de las magnitudes, dimensiones, representaciones y expresiones, de tal forma que al interactuar con estos pensamientos y

relacionarlos entre sí, se llega a uno de los propósitos del pensamiento variaciones, la modelación, que según Vasco (2003) es el principal objetivo del pensamiento variacional.

El mismo Vasco (2003) define la modelación matemática como “el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad” (2003, p. 10). Siendo la modelación uno de los aspectos que permite desarrollar el pensamiento variacional. La modelación numérica, permite identificar cambios a partir del comportamiento secuencial de los números bajo un mismo patrón, ya sea a partir de medición o el registro de datos que evidencien una covariación entre magnitudes. La modelación gráfica, dándole más importancia a los movimientos, cambios, transformaciones y no a la representación estática de esta, permitiendo identificar la variación implícita en la representación espacial, lo que le da a la geometría un aspecto de interpretación dinámico.

Finalmente, al tener una idea de que es el pensamiento variacional y su propósito, se pueden entonces identificar a continuación los Estándares involucrados en este pensamiento y que orientan este trabajo.

2.2.3 Estándares Básicos de Competencias Matemáticas

Los EBCM reconocen que el aprendizaje de las matemáticas inicia en el contexto escolar y extraescolar del estudiante, de tal forma que a partir de las problemáticas se logren trabajar los distintos procesos de aprendizaje entrelazándose con los aspectos formales de la matemática que permitan comprender conceptos que finalmente permitan dar solución a los problemas que hacen parte de la realidad del estudiante. Ciertamente, al verlo de esta manera se estaría afirmando entonces que, para este proyecto se toman como punto de partida problemáticas de la vida diaria y de otras ciencias (sociales y económica) promuevan en el estudiante actividades de razonamiento, comprensión de la simbología que hace parte del sistema algebraico y analítico,

modelación de las variables, planteamiento de problemas producto de la indagación, ejercitación de los procedimientos que permiten llegar a la solución de los problemas que surgieron y a la problemática que en un principio se propuso a solucionar.

Ahora bien, dado que ya se han presentado los elementos a tomar de los tres aspectos propuestos por los LCM y la manera como se entiende la articulación entre estos para el diseño del proyecto, es pertinente entonces identificar los Estándares Básicos de Competencia correspondientes a los conocimientos básicos que sustentan curricularmente este trabajo y al ciclo de escolaridad (octavo a noveno) con el cual se pretende el trabajo por proyecto. El primer estándar se refiere a la modelación de situaciones de variación con funciones polinómicas, el segundo a identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación y el tercero a identificar la relación que existe entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que representa.

Sin embargo, no tendría sentido plantear un proyecto que involucra entre sus propósitos el alcanzar los tres estándares básicos de competencia mencionados, sin identificar el nuevo nivel conceptual que pretenden se alcance en la educación media, así como los niveles de competencia que ya fueron alcanzados en el primer ciclo de la básica secundaria correspondientes al mismo tipo de pensamiento. Además de la relación que tienen estos con el resto de los estándares del mismo ciclo escolar. En efecto se estaría hablando de la coherencia vertical y horizontal planteada en los EBCM (ver figura 5 y 6).

En la Figura 5, se puede ver la relación que existe entre los estándares (1) y (3) con aquellos estándares de los otros pensamientos, ya sea por la relación que existe entre la expresiones polinómicas, la potencia y el área, así como el cambio de representación gráfica y el

identificar patrones en algunas representaciones geométrica para llegar a la solución de problemas, son aspectos que muestran la movilidad existente de los objetos matemáticos en los diferentes pensamientos, hecho que hará parte de la construcción del proyecto. Del estándar (2) se excluye el pensamiento métrico, dado que la definición de pendiente no se articula directamente con el de área o volumen.

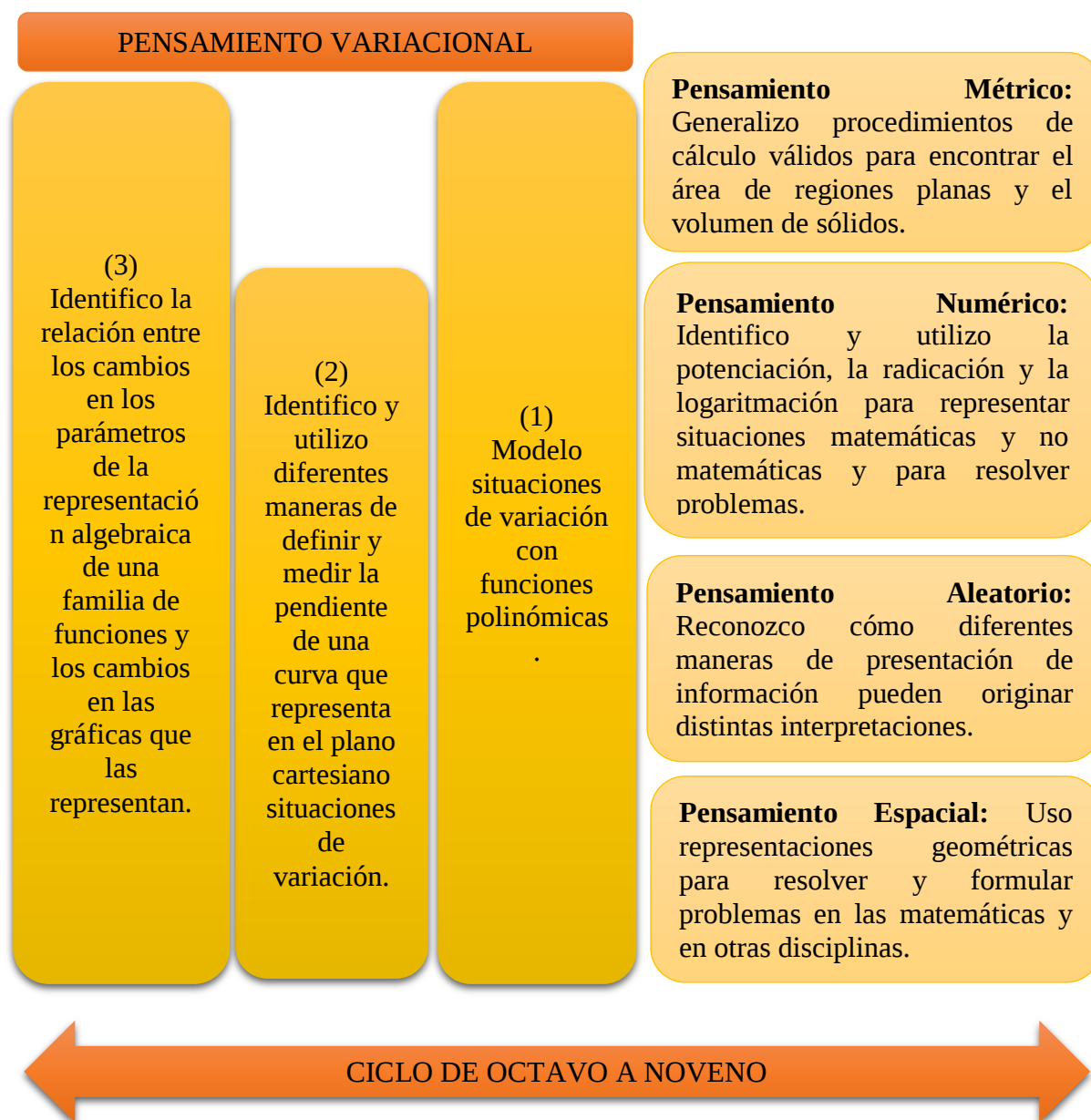


Figura 5: Coherencia horizontal. Autoría propia a partir de EBCM. (MEN, 2016, p. 87)

La Figura 6. permite identificar que los estándares abordados para el desarrollo del proyecto, tiene un soporte en el trabajo de situaciones de variación que posibilita trabajar en el ciclo octavo a noveno la modelación gráfica, algebraica y numérica, así como reconocer conjuntos como dominio y rango. Además, dado que el grado de escolaridad que se trabaja es noveno, se presume que ya existe un trabajo con nociones algebraicas, complementando las competencias de este primer ciclo de la básica secundaria, que permite representar familias de funciones. Así mismo, se espera que la propuesta que plantee el proyecto, le aporte al estudiante elementos que le lleven a comprender aspectos relacionados con la derivada (teniendo presente que esta es una función asociada a un límite), al igual que la modelación de variación periódica e identificar la relación existente entre la expresión algebraica y la representación gráfica de funciones diferentes a la lineal.

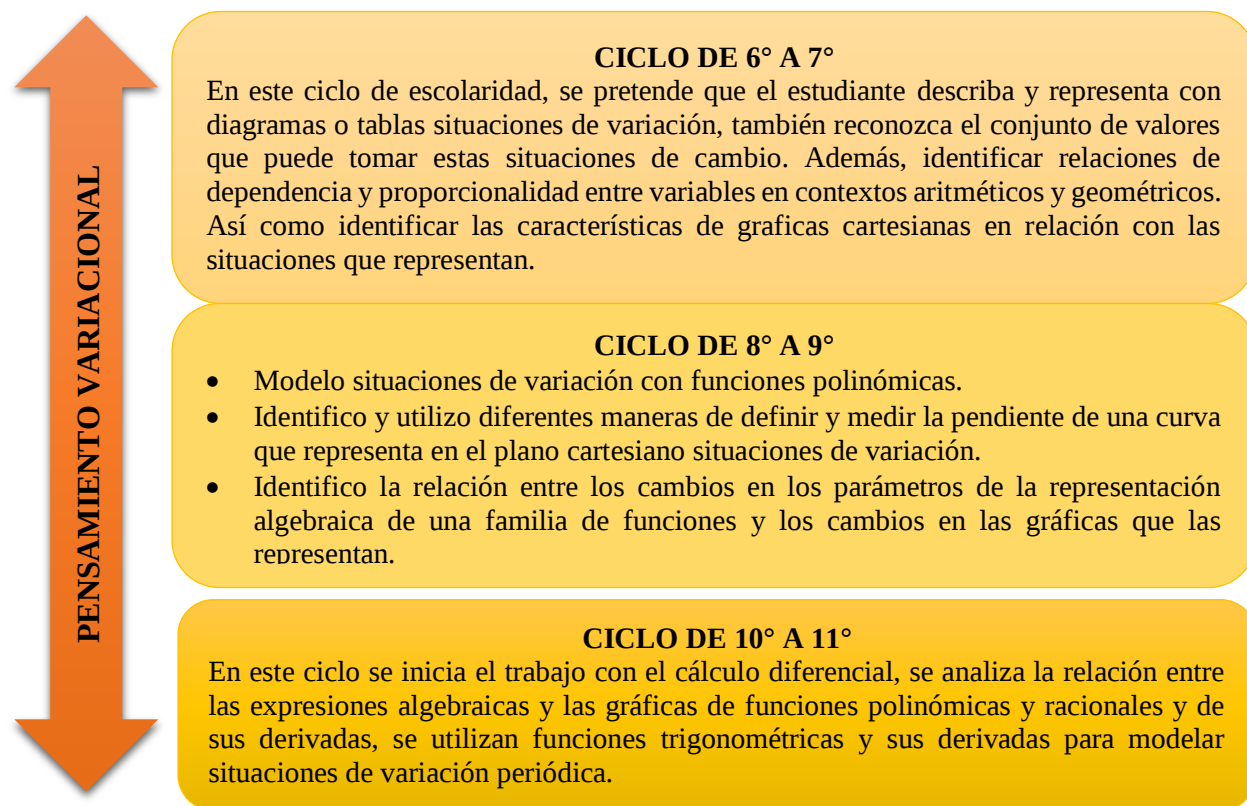


Figura 6: Coherencia vertical. Autoría propia a partir de EBCM. (MEN, 2016, p. 84-89)

Entre los documentos curriculares de actualización se encuentran Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), los cuales según el MEN (2016), funcionan como una herramienta para identificar los saberes básicos que deben aprender los estudiantes en cada grado de escolaridad en articulación con los EBCM.

Respecto al aporte que hacen los DBA a este trabajo, se considera que, aunque el trabajo está dirigido a introducir un concepto como el de función, se debe tener presente que, según los DBA, al terminar el grado octavo los estudiantes deberían:

“DBA 8. Identificar y analizar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

DBA 10. Proponer relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).” DBA (2016, p. 63, 64).

Así pues, existe la posibilidad de que los estudiantes en grado noveno ya hayan tenido un acercamiento al concepto de función, lo que haría viable una actividad diagnóstica como la que se presenta más adelante en el capítulo 3 de este trabajo.

2.3 El concepto de función matemática

Entre los distintos enfoques sobre los cuales se ha definido la noción funcional, será tomado como soporte teórico de este trabajo de grado, la perspectiva analítica del concepto de función. En efecto, la definición de función se presentará partiendo de las distintas

interpretaciones dadas bajo óptica analítica de grandes matemáticos de la historia, las cuales serán planteadas en orden cronológico.

Es James Gregory (1631-1675) quien al parecer expresa por primera vez un acercamiento a la definición actual de función, afirmando “que una cantidad x está compuesta de otras cantidades $a, b, \dots$, si x resulta de $a, b, \dots$, por las cuatro reglas elementales (suma, resta, multiplicación y división), extracción de raíces o por cualquier operación imaginable”.

Sin embargo, fue el abogado, filósofo y matemático alemán G. W. Leibniz (1646 – 1716) quien en su manuscrito de verano de 1763 “De functionibus”, quien emplea por primera vez el término de función para referirse a “cualquier cantidad que varía de un punto a otro, de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada”. Tal definición da cuenta de la claridad que tenía en conceptos como variable, constante, coordenada y parámetros (en términos geométricos de segmento constante o variable), cuyos términos terminan siendo uno de sus aportes a la historia de la matemática.

Luego, tras un intercambio de opiniones entre Leibniz y su discípulo Jean Bernoulli aparece por primera vez en 1718 publicada por Bernoulli (1667 - 1748) la que se podría considerar una definición primitiva de función, aunque algo alejada de la actual, la cual expresa que “Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes.”, entendiéndose que la expresión “de alguna manera” significa que las variables y constantes aparecen en sumas o productos, ya sean finitos o infinitos.

En el siglo XVII en matemático Leonard Euler (1707 – 1783) discípulo de Jean Bernoulli, define en su escrito “Introductio in analysin infinitorum” publicado en 1748, la función como: “Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada

con la cantidad variable y con números o cantidades constantes” y es el mismo Euler quien después de haber planteado varias definiciones propone una idea moderna de función que refiere como “Si algunas cantidades dependen de otras cantidades de modo que, si las últimas cambian, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es de naturaleza amplia e incluye cada método por el cual una cantidad pudiera ser determinada por otras. Si, por consiguiente, x denota una cantidad variable, entonces toda cantidad la cual depende de x en cualquier manera o este determinada por ella es llamada una función de ella”

A inicios del siglo XIX Fourier (1768-1830) discípulo de Lagrange (1736 – 1813) en 1822 escribe: “Una función general $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario, ... No supondremos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; pueden seguir una a otra de una manera completamente arbitraria y cada una de ellas está definida como si fueran una única cantidad”

Finalmente, el actual concepto de función es atribuido a dos matemáticos que de forma independiente expusieron su noción de función.

N. I. Lobachevski (1793-1856) quien en 1834 afirma que: “La concepción general requiere que una función de x sea definida como un numero dado para cada x y variando gradualmente con x . El valor de la función puede ser dado bien por una expresión analítica o por una condición que aporta un modo de examinar todos los números y elegir uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir y resultar desconocida.”

P. G. L. Dirichlet (1805-1859) en 1837 escribe: “Tomaremos dos valores fijos a y b y una cantidad variable x que toma todos los valores entre a y b . Si un único valor finito y corresponde a cada x , y más aun, de tal manera que cuando x toma continuamente los valores

entre a y b , $y = f(x)$ también varía continuamente, entonces y se dice una función continua de x para esta intervalo” ratificando que no es necesario que y este dada en términos de x por una única ley (entre a y b) ni que este expresada por operaciones.

Así pues, una definición actual de función es: una variable y contenida en un conjunto B se denota como función de una variable x contenida en un conjunto A , cuando a cada valor de un x cualesquiera le corresponde un único valor de y , cuya notación algebraica $y = f(x)$ expresa la dependencia de y respecto a x , en efecto la variable x se identifica como variable independiente y la variable y como variable dependiente de x .

Toda función tiene asociados tres conjuntos: dominio, codominio y rango (recorrido, imagen). Para una función f definida en los conjuntos A y B , denotándose como: $f(x): A \rightarrow B$, se tiene que $Dom(f) \subseteq A$, $Cod(f) \subseteq B$ y $Ran(f) \subseteq Cod(f)$. En consecuencia, el dominio de una función está formado por todos los elementos del conjunto A para los cuales la función tiene sentido, mientras que el rango está formado por todos los elementos que se obtienen al aplicar la función sobre un elemento del dominio.

Una función puede ser representada de cinco formas: verbal (una oración que relaciona la variable dependiente con la independiente), numérica (a través del uso de tablas o lista de pares ordenados que asigna a cada valor de la variable independiente un resultado en la variable dependiente), formula (corresponde a la expresión algebraica de la función), gráfica (puede ser un diagrama en el plano cartesiano, para el cual el conjunto de entrada esta representa en el eje de las abscisas y el conjunto de salida por el eje de las ordenada; o un diagrama sagital).

En la clasificación de las funciones se tiene en cuenta su dominio y su rango, por ejemplo, f es una función de variable real si su dominio y rango se encuentran en el conjunto de los números reales, de igual forma se denotan aquellas funciones cuyo dominio y rango estén

contenidos en cualquier otro conjunto numérico. Cuando cada elemento del rango de una función f está asociado a un único elemento del dominio, se dice que f es inyectiva; también, si el rango de f resulta siendo el codominio, la función f es sobreyectiva, y si una función f es inyectiva y sobreyectiva, f es denominada biyectiva.

Además, en la enseñanza del concepto de función se estudian también las funciones: polinómicas (definidas como una combinación lineal de potencias con exponente natural, entre las cuales se encuentra la función de una línea recta, cuadrática, cubica, ...) algebraica (una función polinómica cuyos coeficientes resultan siendo polinomios con exponentes racionales) funciones trascendentes (toda aquella función que no satisface una ecuación polinómica).

Finalmente, para el planteamiento del proyecto, las actividades pretenderán movilizar el concepto de función entre las distintas representaciones (verbal, numérica, formal y gráfica), recurriendo a problemas en los que se identifique la biyectividad como un aspecto importante de la investigación de los estudiantes sin tener que llegar a definirse durante el trabajo y estará enmarcado en tipo de funciones polinómicas, dado que en estas se encuentra la función lineal.

2.3.1 Función lineal

La función lineal al igual que otros modelos funcionales, tiene un valor importante en la descripción de la realidad, incluso, se podría decir que la función lineal se encuentra constantemente en acción con el entorno de un estudiante, por ejemplo, la relación funcional que existe entre el grupo de alimentos que consumimos a diario y la cantidad de energía que liberan los nutrientes contenidos en estos, de igual forma se puede encontrar en el recibo de los servicios públicos como una función que expresa el consumo energético de los hogares, la conexión que existe entre el consumo energía eléctrica y su efecto al medio ambiente, entre otros muchos ejemplos.

2.3.1.1 Definición

Una función polinómica de primer grado f de variable real y cuya fórmula está dada por $f(x) = a \cdot x + b$ tal que a, b son números reales. El número b corresponde a la segunda componente del punto $(0, b)$ en el que la recta corta al eje de las ordenadas. El número a es la pendiente de la recta y determina el grado de inclinación de la gráfica, siendo esta la tangente del ángulo que forma recta con la dirección positiva del eje de las abscisas.

La pendiente y la función lineal se definen a partir de dos puntos pertenecientes a la recta. Sean $P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$ puntos de una recta no paralela al eje y ; la pendiente:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta \quad (\text{ver Figura 7. A})$$

- Si la pendiente es mayor a cero o el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas esta entre cero y noventa grados, se dice que la pendiente es positiva y la recta es creciente (ver **Figura 7.A**).
- Si la pendiente es menor a cero o el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas esta entre noventa y ciento ochenta grados, se dice que la pendiente es negativa y la recta es decreciente (ver **Figura 7.B**).
- Si la pendiente es cero, la recta es paralela al eje x ($\theta = 0$) y si la $\theta = 90^\circ$ la pendiente es indefinida o la recta es paralela al eje y (ver **Figura 7.C**).

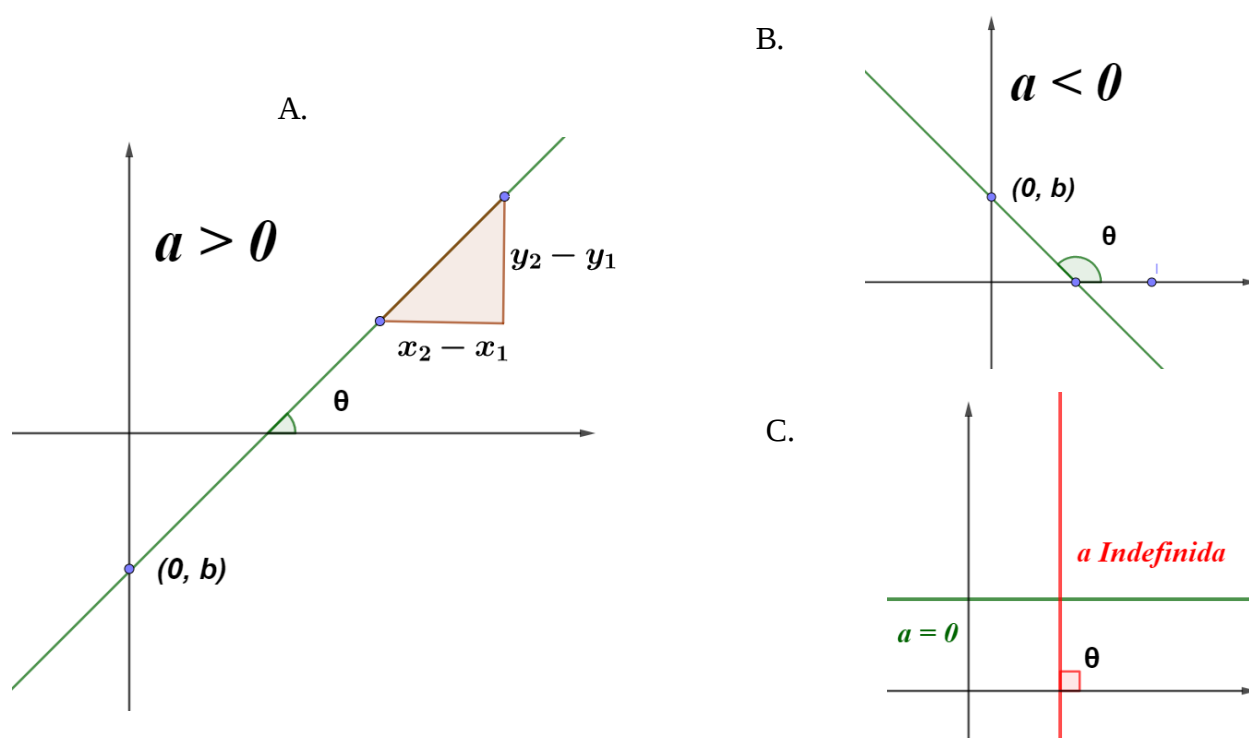


Figura 7: Relación entre de la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta. Diseño propio.

3. METODOLOGÍA

El presente trabajo propone una investigación con enfoque cualitativo² y utiliza los dos primeros ciclos del diseño³ de investigación-acción (detección del problema y elaboración del plan), diseño cuyo “propósito fundamental se centra en aportar información que guíe la toma de decisiones para programas, procesos y reformas estructurales” (Sampieri, Fenández, Baptista, 2010, p. 509), en general la mayoría de los autores lo sitúan en un campo social, con el propósito

² Sampieri, R (2010, p. 358) Se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto. El enfoque cualitativo se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados

³ En el enfoque cualitativo, el diseño se refiere al abordaje general que habremos de utilizar en el proceso de investigación. Miller y Crabtree (1992) lo denominan aproximación, Álvarez-Gayou (2003) marco interpretativo y Denzin y Lincoln (2005) estrategia de indagación.

de generar cambios positivos que involucren de manera participativa a la población sobre la cual se hace el estudio, ubicándolo así en un marco de referencia crítico.

3.1 Referentes Metodológicos

En búsqueda del cumplimiento del objetivo propuesto en este trabajo, se han utilizado referentes que permiten alcanzar cada uno de los objetivos específicos, como se presentan a continuación:

- Las abstracciones matemáticas relacionadas al concepto de función se adoptan desde una visión analítica, tomando como referente bibliográfico documentos tales como: “Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo” Duran, G. (1996). “Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales” Frank, F. Budnick (2007), “Introducción al Calculo” Stewart. J (2002).
- Los elementos teóricos asociados a la matemática crítica se construirán a través de la lectura y análisis de las principales publicaciones de Ole Skovsmose y Paola Valero. Dos de las obras más extensas y relevantes son los libros “hacia una filosofía de la educación matemática crítica” de Skovsmose (1998) y “Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de la educación matemática” de Skovsmose y Valero (2013).
- Para el diseño de la propuesta didáctica que articule ámbitos de la educación matemática crítica con la enseñanza del concepto de función, se han tenido en cuenta aspectos curriculares que permiten ubicar el proyecto y su objetivo en un ciclo de escolaridad, así como aspectos teóricos que dan claridad al concepto que se desea trabajar y muestra de alguna forma la manera de construir el concepto de función a partir de un problema. Además, serán de gran ayuda los ejemplos de proyectos presentados por Skovsmose (1998) en su obra “hacia una

filosofía de la educación matemática crítica”. En particular, uno de los referentes que permitirán trabajar las distintas representaciones de la función lineal es el proyecto “Energía”. Asimismo, serán tenidos en cuenta trabajos como: “El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno” Vargas (2011).

Otro referente teórico que permite construir el proyecto contextualizándolo en la realidad colombiana, es la Encuesta Nacional de la Situación Nutricional en Colombia (ENSIN) que aporta datos estadísticos sobre el estado nutricional de la población en los años 2005, 2010 y 2015.

Para dar cumplimiento al análisis reflexivo del proyecto, se pretende tomar referentes teóricos que soporten y den cuenta de su potencial de implementación. Uno de los referentes que se tendrán en cuenta para culminar este objetivo es Sampieri, R., Fernández. (2010). El cual permite examinar la propuesta a partir de un proceso de investigación cualitativo, dando claridad en el planteamiento del problema y las hipótesis, además de permitir señalar los aportes que puede (y pretende) tener este proyecto al ser aplicada en un ambiente escolar. El otro referente teórico es el trabajo desarrollado por Martínez (2014), el cual permite realizar un análisis a partir de las características que debe tener el proyecto para que permita el aprendizaje en condiciones de conflicto socioeconómico.

Capítulo 3

4. DISEÑO Y ANÁLISIS DEL PROYECTO

Este proyecto está enfocado en la línea de la matemática crítica, involucrando situaciones de la cotidianidad social, política y económica del contexto colombiano, cuya comprensión o planteamiento de solución implique nociones como las de función lineal en estudiantes de grado noveno.

En el diseño de la propuesta, se han planteado tres fases en las que se busca articular elementos teóricos de la matemática crítica con la enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal, propiciando en los estudiantes posturas políticas frente a situaciones cotidianas.

4.1 Proyecto: Tienda Escolar

El Proyecto cuenta con dos actividades; la primera es diagnóstica, busca reconocer saberes previos relacionados al concepto de función, proporcionando un punto de partida al docente que le permita planificar la manera como debe orientar la segunda actividad. Esta segunda actividad, relaciona la dieta de un estudiante, la energía que el cuerpo puede metabolizar y el desgaste energético en actividades diarias, involucrando al estudiante con aspectos relacionados a su salud (y la de sus compañeros) y dirigiendo la actividad hacia una postura crítica respecto a la diversidad del menú escolar, propiciando en ellos el planteamiento de posibles soluciones a una crisis.

Tabla 3: Descripción de las actividades propuestas en el proyecto.

Contenido	Descripción
Título	Tienda Escolar.
Objetivo general	Propiciar un acercamiento al lenguaje funcional, haciendo uso de las distintas formas de representar una función, para ser usado como un elemento que permita al estudiante entender y analizar de manera crítica

	situaciones relevantes (por involucrar problemáticas de su cotidianidad) de su entorno.
Intención de aprendizaje en las actividades	En cada una de las sesiones se espera un aprendizaje por parte de los estudiantes, de tal forma que permita dar cumplimiento al objetivo de la propuesta didáctica. Actividad 1 (Prueba diagnóstica): Pretende darle un punto de partida al docente, que le permita desarrollar la planeación, de tal manera que oriente la participación de los estudiantes, direccionando las discusiones que se presenten, interfiriendo en la terminología y la formalización de definiciones previas encaminadas al concepto de función. Justamente, la intención es que el docente pueda evidenciar en los estudiantes la identificación de relaciones de cambio entre las variables independientes y dependientes, la interpretación de las formas simbólicas del lenguaje algebraico y su operacionalización, la representación de relaciones numéricas por medio de expresiones algebraicas, el reconocimiento de la definición de función y de sus modos de representación. Actividad 2. Fase No 1: Busca que los estudiantes se sientan involucrados en la crisis que plantea el problema, viéndose y viendo reflejados a sus compañeros en los datos hallados y en la problemática que se presenta, de manera que asuman y comuniquen una postura crítica frente a la temática de discusión y la sustenten con argumentos basados en aspectos de dependencia presentes en el concepto de función y en sus diferentes representaciones, de manera que

reconozcan la importancia del conocimiento matemático al momento de participar democráticamente con argumentos que den soporte a sus afirmaciones.

Fase No 2: Se le brindan al estudiante las herramientas necesarias para entender las causas de la crisis que han trabajado en la fase anterior, involucrando en su comprensión el uso de funciones lineales, de tal manera que además de tener una postura crítica respecto a la problemática, también logre plantear una solución o presentar a la comunidad educativa medidas que se puedan tomar, convirtiéndose en un agente políticamente activo.

Fase No 3: En este punto el estudiante compara sus resultados de investigación con los nacionales, además abre la discusión a toda la comunidad educativa, divulgando los resultados de la investigación a través de una publicación hecha en algún medio de divulgación escolar (revista escolar), en la que se ratifique la importancia de los conceptos matemáticos y de otras ciencias al momento de presentar los resultados de su trabajo.

Conceptos	Fase No 1: Pares ordenados, dependencia entre variables, relaciones, funciones, dominio, codominio, rango, biyectividad y representaciones (numérica, gráfica y algebraica). Fase No 2: Función lineal, pendiente como razón de cambio, intercepción entre dos rectas.
------------------	--

Presenta el objetivo del proyecto, la descripción de las fases que componen cada actividad junto a los conceptos matemáticos involucrados en ellas.

4.1.1 Actividad 1: Prueba Diagnóstica

Para esta prueba diagnóstica se han tenido presente los elementos curriculares que el MEN plantea en la segunda edición de los DBA para los estudiantes de grado octavo y los cuales se presentaron en el capítulo 2 de este trabajo.

En efecto, lo que se pretende no es generar un pensamiento crítico, sino identificar los presaberes que según lo establecido por documentos de actualización como los DBA los estudiantes de grado noveno deberían tener.

4.1.1.1 Problema 1.

Observe el recibo de los servicios públicos⁴ presente en la **Figura 8**. Luego, responda junto a un compañero, cada uno de los puntos planteados a continuación y espere el momento para discutir en clase las respuestas de tu grupo⁵.

1. ¿Qué información muestran las columnas Cantidad M³, Valor Unitario, Valor Total, Subsidio, Total a Pagar en acueducto y alcantarillado, y las columnas Cantidad, Valor Unitario, Valor Total, Subsidio, Total a Pagar en energía?

⁴ Se le puede pedir a los estudiantes que presenten una copia del recibo de sus hogares.

⁵ Se espera que el docente sea quien advierta al grupo cuál es el momento de compartir sus respuestas con la clase.

ACUEDUCTO						CUENTA(S) VENCIDA(S): Su servicio será suspendido.			
Uso	Residencial		CONCEPTOS	Cantidad M3	Valor Unitario	Valor Total	Subsidio	Total a Pagar	
Estrato	3		Cargo Básico			8,060.09	-80.60	7,979.49	
No. Medidor M1	7D 5497		Consumo Básico Hasta 20	20.00	1,324.07	26,481.40	-264.80	26,216.60	
Lectura Actual	2,240		Consumo Mayor Al Básico 27	27.00	1,324.07	35,749.89		35,749.89	
Lectura Anterior	2,193		Interes de Mora (0,5%)					58.43	
Diferencia	47		(-) Otros Cobros					23,969.00	
Consumo del Mes en M3	47		(-) Ajuste al Peso					.41	
Tasa De Uso \$/M3	\$1.72								
TOTAL						\$46,035.00			

ALCANTARILLADO						CUENTA(S) VENCIDA(S): Su servicio será suspendido.			
Uso	Residencial		CONCEPTOS	Cantidad M3	Valor Unitario	Valor Total	Subsidio	Total a Pagar	
Estrato	3		Cargo Básico			3,945.37	-78.91	3,866.46	
Vertimiento	47 M3		Consumo Básico Hasta 20	20.00	1,553.50	31,070.00	-621.40	30,448.60	
Tasa Retributiva \$/M3	\$25.94		Consumo Mayor Al Básico 27	27.00	1,553.50	41,944.50		41,944.50	
			Interes de Mora (0,5%)					61.79	
			(-) Otros Cobros					15,319.00	
			(-) Ajuste al Peso					.35	
TOTAL						\$61,002.00			

ENERGÍA						CUENTA(S) VENCIDA(S): Su servicio será suspendido.			
Uso	Residencial		CONCEPTOS	Cantidad	Valor Unitario	Valor Total	Subsidio	Total a Pagar	
Estrato	3		Consumo De Energía Activa	173.00	383.86	66,408.15	-9,961.22	56,446.93	
Consumo de energía Activa			Consumo Básico Hasta 173	369.00	383.86	141,645.13		141,645.13	
Medidor	C2AA_1603057		Consumo Mayor Al Básico 369					228.52	
Lectura Actual	8,601		Interes de Mora (0,5%)					48,830.00	
Lectura Anterior	8,059		(-) Otros Cobros					.13	
Diferencia	542		(-) Ajuste al Peso						
Consumo Actual	542 KWH								
TOTAL						\$149,490.45			

Figura 8: Modelo de la nueva factura de servicios públicos domiciliarios. Replica por autoría propia.

2. Complete la siguiente tabla, marcando con X al identificar las variables y las constantes que aparecen en los conceptos de cada uno de los servicios (acueducto y alcantarillado).

Tabla 4: *Cantidades variables y constantes*

	Constante	Variable
Cargo básico		
Consumo básico hasta 20 (Cantidad M3)		
Consumo básico hasta 20 (Valor Unitario)		
Consumo básico hasta 20 (Valor Total)		
<i>Permite identificar que cantidades presentes en el recibo de los servicios públicos son variables o constantes. Autoría propia.</i>		

3. Discuta con su compañero de trabajo, cuál o cuáles de las columnas cantidad M3, valor unitario, valor total, subsidio y total a pagar son variables dependientes (relacionando la dependencia entre las cuatro cantidades) e identifica de qué depende (si en lugar de ser variables, son constantes, anótelos para tenerlo presente en la socialización con la clase).

4. En la **Figura 8** se presentan para los tres servicios las columnas Valor Total y Total a Pagar. Verifique los cálculos que permitieron a la empresa de servicios determinar el monto de estas dos columnas para los tres primeros conceptos.

5. Calcule el valor total de consumo básico para hogares que consumen al mes: (a) acueducto 15 M3, (b) acueducto 37 M3, (c) energía 150 KWH (d) energía 630 KWH. Luego, determine para cada uno de los servicios ¿Cuáles son las ecuaciones que permiten calcular el Valor Total del consumo básico para acueducto (hasta 20 M3 y mayor a 20M3) y energía (hasta 170 KWH)? (Note que, en el recibo una columna es Valor Total y la otra es Total a Pagar).

6. Complete la siguiente tabla con la información de consumos anteriores en M3 (lado izquierdo de la factura de los servicios públicos presente en la **Figura 8**).

Tabla 5: Tabulación del valor total respecto al consumo.

Meses	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.
Consumo (M3)						
Valor total consumo básico (\$)						

Correspondiente a la relación entre variable independiente y dependiente. Autoría propia.

Construya una gráfica correspondiente a los valores de la tabla (sugerencia: el eje de las abscisas por lo general es el de la variable independiente y el de las ordenadas el de la variable dependiente). Luego, conteste las siguientes preguntas dando, discutiendo su justificación con el resto del grupo.

- ¿Es correcto afirmar que existe una relación entre el consumo y valor total consumido?
- ¿es correcto afirmar que, para cada valor de consumo, existe solo un valor total de consumo básico (es decir: no pueden existir dos valores de consumo básico para un consumo en M3)?

4.1.1.2 Problema 2

A continuación, se presentan las tarifas de acueducto y alcantarillado que EMCALI aplica a partir del 1 de julio de 2018 en la ciudad de Santiago de Cali.

CALI			
Estrato	C. Fijo (\$)	0 – 16 m3 (\$/m3)	> 16 m3 (\$/m3)
Estrato 1	2.131,01	687,99	2.149,96
Estrato 2	4.594,99	1.483,47	2.149,96
Estrato 3	6.592,82	2.128,46	2.149,96
Estrato	C. Fijo (\$)	Consumo m3 (\$/m3)	Subsidios
Estrato 4	6.659,41	2.149,96	E1: 68,00 %
Estrato 5	10.055,71	3.246,44	E2: 31,00 %
Estrato 6	10.721,65	3.461,44	E3: 1,00 %
Comercial	10.122,30	3.267,94	Aportes Solid.
Industrial	8.790,42	2.837,95	E5: 51,00 %
Oficial y Especial	6.659,41	2.149,96	E6: 61,00 %
Temporal	10.721,65	3.461,44	Com: 52,00 %
			Ind: 32,00%

Figura 9: Modelo de la tabla de acueducto y alcantarillado aplicada en el municipio de Santiago de Cali. Diseño tomado de www.emcali.com.co

Observe la información presente en la **Figura 9**. Luego:

- Discuta con su compañero de trabajo las siguientes cuestiones ¿Qué información muestra la columna estrato? ¿a qué corresponden la cantidad 1.483,47 de la columna 0 – 16 m3 (\$/m3)? ¿una persona de estrato 3 que consume 22 m3 en el mes, cuanto pagaría por cada m3 consumido? ¿una persona de estrato 2 con un cobro de consumo de \$45.000, cuánto recibe de subsidio?
- Complete la tabla que se muestra a continuación.

Tabla 6: Tabulación a partir de la **Figura 9**.

Meses	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.
Consumo (M3)	0	10	9	15	8	13
Total a pagar consumo básico (\$)						

*Tabulación correspondiente a la relación entre variable independiente y dependiente según la tabla de **Figura 9**. Autoría propia*

4.1.2 Actividad 2: Alimentación Escolar

4.1.2.1 Fase 1: Planteamiento del problema

Lea el siguiente texto. Luego, solucione los puntos del 1 al 4.

Según el artículo publicado en la revista Prolegómenos - Derechos y Valores, por López, G., Torres, K. & Gómez, C. (2017), sobre la alimentación escolar en las instituciones educativas públicas de Colombia, muestra que el 13,7% de los adultos entre los 18 y 64 años de edad padecen sobrepeso y 32,3% de esta población padece de obesidad; siendo Cali (50,9%), Boyacá, Cundinamarca y Meta (50,6 %) y Valle sin Cali y sin litoral (50 %) los territorios con un mayor índice de estos padecimientos. Este mal es ocasionado en gran medida por los malos hábitos creados en la etapa escolar de la población, prueba de ello es el hecho de que el 56,3 % de los

niños colombianos ven dos o más horas diarias de televisión, siendo las ciudades de Medellín (71,9 %), Bogotá (70,5 %) y Cali (70,1 %) las que evidencian más altas prevalencias, mostrando un alto índice en los niños de cinco a doce años en el tiempo dedicado a ver televisión o a jugar con videojuegos, indicador que se conecta con un patrón de vida sedentario y con un consumo mayor de alimentos de alta densidad energética⁶.

Respecto al consumo de frutas y verduras, esta investigación pudo determinar que 27,9 % de las personas no incluyó ninguna verdura en su alimentación diaria y 35,3 % no incluyó alguna fruta. Lo anterior puede estar correlacionado con el déficit encontrado en el nivel de vitamina A y C, que ejercen un efecto protector contra las enfermedades cardiovasculares y algunos tipos de cáncer. Además, se reporta que 13,7 % de los adolescentes de 14 a 18 años presente valores excesivos de ingreso de calorías mayores al 110%, teniendo un exceso en el consumo de carbohidratos y grasas saturadas⁶.

Dado que este escenario puede ocasionar en los niños y adolescentes problemas en huesos y articulaciones, dificultad en el desarrollo de actividades físicas, hipertensión, enfermedades cardiovasculares, depresión, baja autoestima, etc. el congreso de la república por medio de la ley 1355/2009 ha declarado la obesidad y las enfermedades crónicas no transmisibles asociadas a esta como una prioridad de salud pública, adoptando medidas de control, atención y prevención. Justamente en el artículo 4 se establece que: los establecimientos educativos públicos y privados que ofrezcan alimentos deberán garantizar la disponibilidad de frutas y verduras; además, deberán adoptar un Programa de Educación Alimentaria, que promueva una alimentación balanceada y saludable consecuente con las características culturales de la región.

⁶ La información estadística presentada por el artículo es extraída de estudios hechos por las Encuestas Nacional de Situación Nutricional (ENSIN) en el 2005.

En el artículo 5° habla de estrategias para promover la actividad física, impulsando el incremento y calidad de las clases de educación física, con personal adecuadamente formado en los niveles de educación inicial, básica y media vocacional. Y el artículo 11° relacionado con la regulación del consumo de alimentos y bebidas en centros educativos.

Al observar esta problemática que además de tener consecuencias en la salud (según el DANE 2005 en Colombia las enfermedades crónicas como los padecimientos cardiovasculares y el cáncer son la primera causa de muerte), también trae consigo un sinnúmero de implicaciones sociales y económicas (como por ejemplo en países como Colombia la pérdida de empleo por muerte o secuela de enfermedades crónicas genera un incremento en los niveles de pobreza y un deterioro en las perspectivas económicas), deberían interesar e involucrar como agente movilizador a los estudiantes de las distintas instituciones educativas.

1. Una vez leído el texto anterior, piense un poco en esta problemática y conteste las siguientes preguntas.

- ¿Cree usted que se ve afectado?
- ¿Considera que en su escuela se adoptan las medidas establecidas por el congreso?
- ¿Piensa que es necesaria la ley 1355/2009?
- ¿La tienda escolar o el comedor escolar están comprometidos con los buenos hábitos alimenticios de los estudiantes?
- ¿Cuántas horas aproximadamente dedica a ver televisión (o hábitos sedentarios como jugar con video juegos, estar sentado frente a un computador, jugar en el celular, etc.) a diario?⁷
- ¿Cuánto tiempo dedica a realizar actividades físicas?

⁷ Se le puede pedir a los estudiantes que sumen el tiempo que tardan sus programas

- ¿Consume fruta a diario?
- ¿En el colegio que alimentos ha notado que consumen en mayor medida los estudiantes?
- ¿Considera que es necesario mejorar la oferta alimenticia de la tienda o el comedor escolar, o está satisfecho?

Una vez los estudiantes den respuesta a las preguntas, el docente pedirá que las socialicen en clase, siempre respetando el punto de vista de sus compañeros, aportando con argumentos en contra o a favor⁸.

2. Ahora que ya se conoce la problemática que llevó a definir la obesidad como enfermedad crónica, la propuesta que hace el docente es investigar en el colegio el grado de obesidad que tiene la población estudiantil, los docentes, administrativos, directivos y núcleo familiar de cada estudiante. Para este fin, se hará uso del cálculo de Índice de Masa Corporal (IMC), empleado principalmente para determinar el nivel de obesidad de un individuo, así como su estado de salud en general⁹.

Para calcular el IMC se tiene la siguiente expresión

$$IMC = \frac{MC}{T^2}$$

Tal que:
MC: Masa corporal en kilogramos (kg).
T: Talle en metros (m)

Luego, con el IMC de cada individuo se puede hacer una clasificación a partir de la siguiente tabla.

⁸ Se espera que el docente se documente respecto a la problemática y pueda orientar la discusión de los estudiantes con el fin de mostrar la necesidad de abordar el problema, la manera como los afecta y la responsabilidad que tienen ellos de involucrarse en su estudio.

⁹ Durante el planteamiento de los ejercicios el docente deberá estar informado e informarles a los estudiantes que el IMC alto está asociado a un alto grado de mortalidad debido a cardiopatías coronarias y un IMC bajo está asociada al debilitamiento del sistema inmunológico.

Tabla 7: *Tabla de clasificación del individuo según el IMC o Índice de Quetelet.*

Clasificación	IMC (kg/m ²)
Bajo Peso	<18.50
Delgadez severa	< 16.00
Delgadez moderada	16.00 – 16.99
Delgadez aceptable	17.00 – 18.49
Normal	18.50 – 24.99
Sobrepeso	≥ 25.00
Peso – obeso (riesgo)	25.00 – 29.99
Obeso	≥ 30.00
Obeso tipo I (riesgo moderado)	30.00 – 34.99
Obeso tipo II (riesgo severo)	35.00 – 39.99
Obeso tipo III (riesgo muy severo)	≥ 40.00

Muestra las clasificaciones de bajo peso, peso normal, sobrepeso y obesidad según el IMC (índice de masa corporal) de in individuo. Información según Índice de Quetelet.

A continuación, se presentan los ejercicios propuestos a los estudiantes para el desarrollo de este punto.

- Como primer ejercicio, recopile la información correspondiente a la masa corporal, talla (estatura) y edad de cada uno de los integrantes del salón de clase y calcule su IMC. Luego, consigne los resultados en una tabla con los siguientes parámetros.

Tabla 8: *Tabla de Clasificación de Estudiantes según IMC.*

Número del estudiante	MC (kg)	T ² (m ²)	IMC (kg/m ²)	Clasificación
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Modelo de tabla en la cual los estudiantes registran la clasificación (bajo peso, peso normal, sobrepeso, obeso) de los estudiantes según el IMC. Autoría propia.

- Con la información obtenida en el ítem anterior, complete la siguiente tabla. Luego, discuta con el grupo de manera respetuosa la existencia de indicadores de sobrepeso u obesidad en su salón¹⁰. De igual forma es conveniente discutir sobre algún caso de Bajo Peso.

Tabla 9: Cantidad de estudiantes con IMC normal y fuera del rango normal.

Bajo Peso	Normal	Sobrepeso	Obeso

Se registra el número total de estudiantes (por grupo asignado) que se encuentran en un margen de peso normal o fuera de este. Autoría propia.

- El docente plantea como compromiso a los estudiantes el realizar en casa los dos ítems anteriores con los datos de sus familiares más cercanos¹¹. De igual forma, si el docente les pide traer a los estudiantes la edad, MC y T de sus familiares, se podría realizar en clase (convirtiéndose este en el primer ejercicio de este punto).
- Con un grupo de trabajo, recoja información como la edad, MC y T de cada uno de los estudiantes de secundaria en tu institución (cada uno de los grupos de trabajo elige un grado a investigar)¹². Luego, con la información recolectada construya las tablas 8 y 9.

^{10 8} en este punto se busca que el grupo vincule el problema con su realidad, involucrándolos en una problemática que los lleve a tomar postura frente a una crisis nacional. Es crucial la intervención del docente como orientador de la discusión y el involucrar al grupo en un aspecto relacionado con su salud o la de sus compañeros.

¹² Para tener más posibilidad de hacer visible la crisis, se puede hacer la investigación en estudiantes de primaria y preescolar, además del personal de la institución que se encuentre en un rango de edad de 18 a 64 años.

- En clase compile junto a los otros grupos la información consignada en las tablas y discuta sobre la existencia de una enfermedad declarada crónica como el sobrepeso y la obesidad en su institución¹³.

3. Con el fin de mostrar los resultados obtenidos a la comunidad educativa y que se tome conciencia de la problemática (si la crisis no existe, entonces mostrar los buenos resultados de las prácticas institucionales respecto a la salud y actividad física de los estudiantes), el docente plantea el uso de carteleras y un nuevo modelo (diferente a las tablas del punto 2) de representación de los datos. Este nuevo modelo tiene por nombre diagramas sagitales (una forma de relacionar la información presentada en dos conjuntos). Además, es pertinente tener presente que la información no tiene como objetivo señalar a ninguna persona en particular, por lo que se recomienda no usar nombres al momento de presentar el IMC de los estudiantes. El maestro entonces debe aclarar que los conjuntos como Dominio, Codominio y Rango se determinan con el fin de comprender aspectos que se necesitan más adelante. Así pues, el profesor inicia pidiendo a los estudiantes discutir las cuestiones que se plantean en el siguiente ítem.

- A continuación, se muestra un ejemplo de diagrama sagital (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), obsérvelo y discuta con su grupo la información contenida los conjuntos, luego conteste según lo discutido ¿Qué es dominio? ¿Qué es codominio? ¿Qué es rango o recorrido? ¿Qué diferencia existe entre codominio y rango? Si se elimina 1.45, 1.55, 1.65, 1.75 del conjunto Talla, ¿Cómo quedaría el dominio, codominio y rango?

¹³ Según los estudios que presenta ENSIN 2005, los casos de bajo peso se presentan en estudiantes que se encuentran en etapa de desarrollo, lo que podría implicar el extender el trabajo a estudiantes de primaria.

- Finalmente, y una vez contestadas las preguntas, el docente pedirá a los estudiantes socializar y discutir en clase sus respuestas hasta poder construir cada una de las definiciones¹⁴.

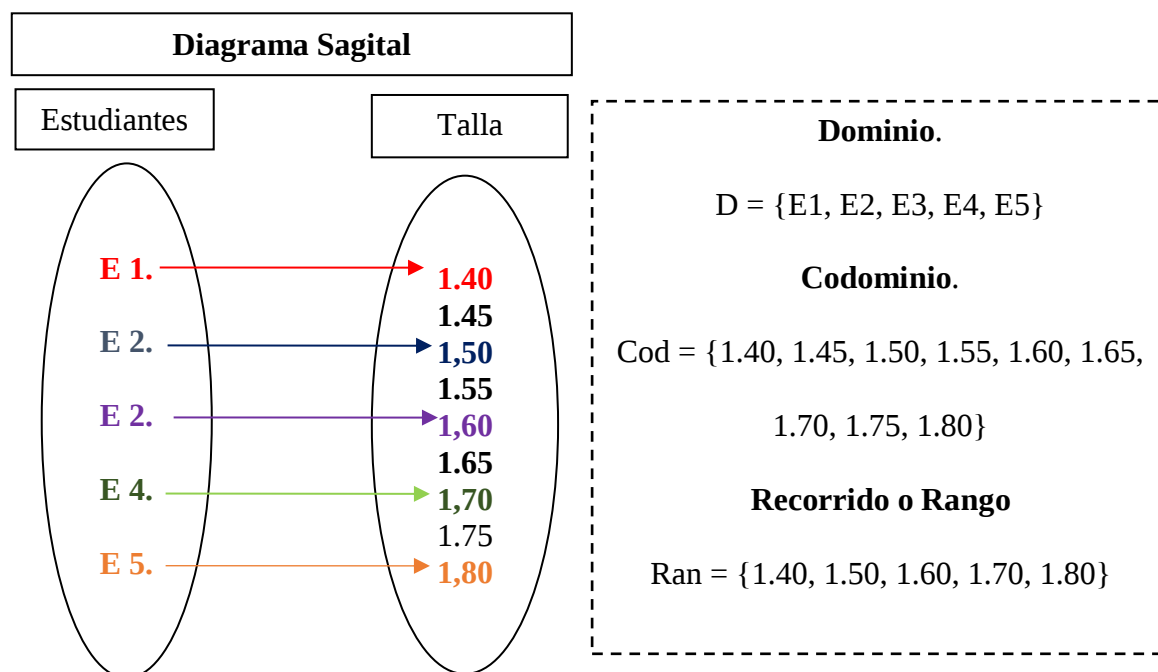


Figura 10: Ejemplo de diagrama sagital, presenta la relación entre un grupo de estudiantes y su estatura. Autoría propia.

El docente presenta un nuevo ejemplo (**Figura 11**); para este se tomará la expresión que permite calcular IMC, teniendo claro las variables dependientes e independientes que se presentan en esta. Al igual que en el ejemplo anterior, se plantea a continuación una serie de preguntas que se discutirán en grupo para luego presentarlas en el salón y llegar a una respuesta conjunta:

- Completa el ejemplo, construyendo los conjuntos dominio, codominio y rango.
- En la expresión que se usa para calcular IMC, ¿cuál o cuáles son las variables dependientes y las independientes?

¹⁴ Es crucial la intervención del docente como orientador de la discusión en la construcción del concepto.

- Defina nuevamente dominio, codominio y rango; pero ahora debe tener en cuenta que tipo de variable maneja cada conjunto (dependiente o independiente)¹⁵.

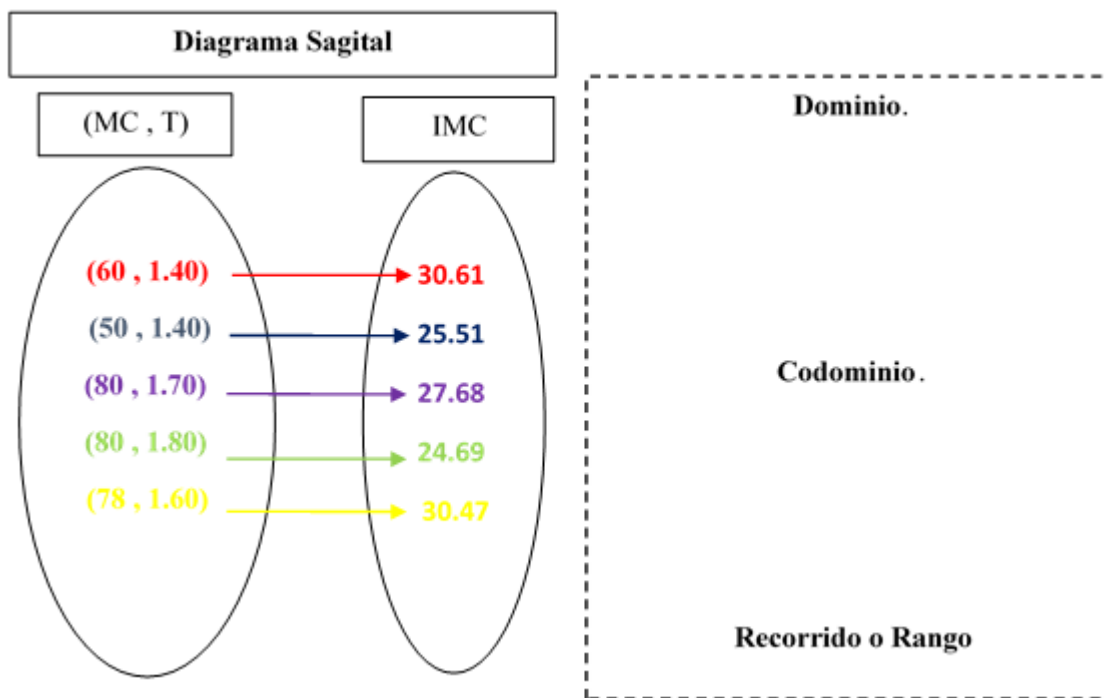


Figura 11: Ejemplo de diagrama sagital, presenta la relación MC, T e IMC. Autoría propia.

Ya que se han discutido los ejemplos; el docente propone a los estudiantes la construcción de los diagramas sagitales que irán en las carteleras. Para esto plantea las siguientes indicaciones:

- El primer diagrama se construye con la información de la **Tabla 8:** Tabla de Clasificación de Estudiantes según IMC. **Tabla 8** (punto 2), relacionando la MC y la T (dominio)¹⁶ del grado que se asignó al grupo con la clasificación de la **Tabla 7** (codominio), identificando y presentando su rango.

¹⁵ Nuevamente la intervención del docente toma un papel relevante en el refinamiento de términos al momento de construir una definición formal de estos tres conjuntos.

¹⁶ No se utiliza el nombre de los estudiantes para evitar burlas o faltas de respeto por la clasificación correspondiente a su IMC.

- El segundo diagrama tiene en su dominio $\text{Dom} = \{\text{bajo peso, normal, sobrepeso, obeso}\}$ y en el codominio el nombre de los estudiantes (o su MC y T según lo indique el docente)¹⁷.

4. Para hacer una presentación completa de la información, el Docente propone complementar los diagramas del punto 3 con una gráfica que muestre la clasificación según IMC. Para esto, el estudiante realiza el siguiente ejercicio.

Punto A.

- Primero calcule la estatura promedio ($\bar{T}$) del grado.
- Determine el IMC con diferentes valores de MC y consigne la información en la **Tabla 10** (en esta tabla ya hay asignados valores del IMC necesarios para la explicación, lo que implicaría buscar la MC correspondiente a estos valores).

Tabla 10: Representación numérica correspondiente al IMC.

MC	0		
IMC	18.5	25	30

Se registran los valores correspondientes al IMC del grado para una estatura promedio de los sujetos de estudio. Autoría propia.

Punto B.

- En una ecuación exprese la talla T en términos de MC con $\text{IMC} = 22 \text{ kg/m}^2$.
- Determine T con diferentes valores de MC y consigne la información en la **Tabla 11** (Permite identificar la MC que debe tener cada estudiante para su la estatura).

¹⁷ La intención es que el docente utilice los diagramas para indicar a los estudiantes cuándo una relación es una función.

Tabla 11: Representación numérica correspondiente a T.

MC	0
T	

Registra la Talla del grado para las diferentes MC de los sujetos de estudio. Autoría propia.

Punto C.

- Construya las gráficas correspondientes a las tablas 10 y 11 en el plano cartesiano, teniendo presente que el eje horizontal (abscisas) es el de la variable independiente y el vertical (ordenadas) es de la variable dependiente¹⁸.

En la construcción de la gráfica correspondiente a la tabla 10 se deben presentar los intervalos de cada una de las clasificaciones según el IMC. En la **Figura 12** se muestra una posible manera de hacerlo (solo están los intervalos, mas no la gráfica).

En ocasiones los resultados matemáticos muestran información que, sin dejar de ser útil, suele ser innecesaria para lo que se busca, justamente por esta razón el docente debe asegurar que los estudiantes tengan en cuenta cuestiones como: ¿será que existe o existirá algún individuo con $MC = 0$, $IMC = 0$ o $T < 0$? ¿algún estudiante tendrá $MC < 10\text{kg}$? Incluso se puede tomar $MC = -50\text{kg}$ y la gráfica o la tabla o el diagrama sagital estarían correcta. Esto ayudaría a mostrar la importancia de identificar cuál es el dominio y el rango del estudio, con el fin de llegar a una interpretación y presentación más precisa de la información¹⁹

¹⁸ Este punto le permite al docente mostrar cuando una gráfica corresponde a una función a la representación gráfica (La grafica correspondiente al punto B no corresponde a una función cuando se asumen sus resultados negativos como validos)

¹⁹ Este punto está dirigido al docente, en caso de que los grupos no noten los aspectos que se mencionan, es importante que el profesor los lleve a pensarlos.

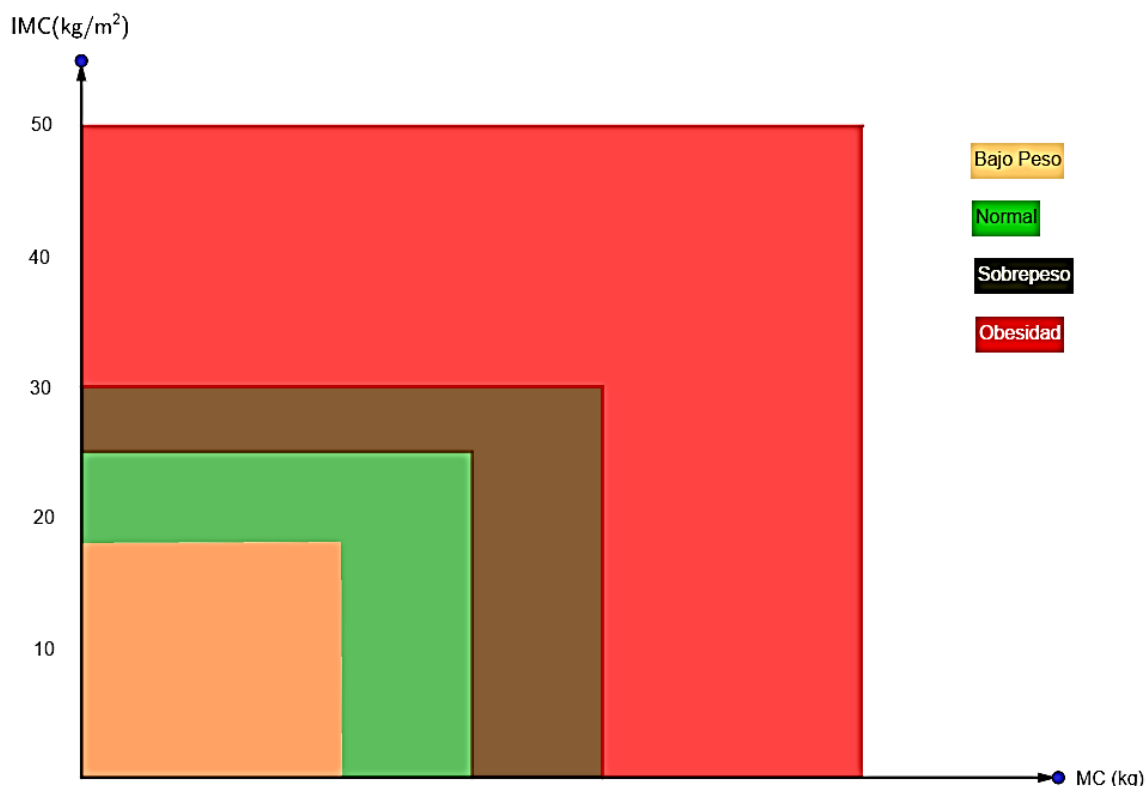


Figura 12: Representación gráfica correspondiente al IMC del grado para una estatura promedio de los sujetos de estudio. Autoría propia.

- Como último ejercicio, el grupo presenta la información al grado sobre el cual hizo el estudio, explicando la crisis que ha generado a nivel nacional los malos hábitos alimenticios y la falta de actividad física (es importante tener presente que las clasificaciones de IMC no aplican para deportistas de alto rendimiento).

- El docente deja propuesto a los estudiantes que, para la siguiente etapa del taller, se debe llevar a la clase paquetes de los productos que consume comúnmente durante el día.

4.1.2.2 Fase 2: Explicación formal de la causa del problema

Ya vimos que el IMC nos ayuda a estimar el peso adecuado de una persona, el cual epidemiológicamente se relaciona con una mayor esperanza de vida; ¿cómo es posible lograrlo? Para esto debemos lograr el balance entre necesidades de energía y su ingesta.

La ingesta de energía de una persona debe satisfacer sus necesidades diarias, por ejemplo: el desarrollo de sus actividades físicas, el funcionamiento del corazón, el sistema nervioso, trabajo muscular, producción y reparación de tejidos, mantener la temperatura corporal y en niños que se encuentran en su etapa de desarrollo o mujeres gestantes, las necesidades energéticas deben incluir también las cantidades asociadas a la formación de tejido y la producción de leche. Como ya sabemos, esta energía la suministra los alimentos y se obtiene de la metabolización de macronutrientes (hidratos de carbono, grasas y proteínas); así pues, el valor energético (o calórico) de un alimento es proporcional a la cantidad de energía que produce al ser metabolizado (u oxidado), cuya unidad es Kilocalorías (Kcal = 1000 cal).

Cuando la ingesta de energía tiene un balance positivo y la dieta aporta más energía de la necesaria, el exceso se almacena en forma de grasa dando lugar a sobrepeso y obesidad. En caso contrario, cuando la ingesta de energía es menor (negativa) a la necesaria, el cuerpo hace uso de la reserva corporal de grasa y proteína, produciendo una disminución del peso que puede terminar en malnutrición.

5. Teniendo presente la información anterior respecto a la ingesta de energía a través de los alimentos, realice el cálculo de las kilocalorías suministradas por los productos que presenta la **Figura 13**. Para ello debe tener presente que las kcal que se presentan corresponden a cada porción, no a la cantidad total contenida en el paquete y el porcentaje al valor diario recomendado para adultos por la WHO (World Health Organization).

- Ahora, dedique un espacio a discutir con sus compañeros y profesor (también se puede consultar con el profesor de educación física) el porcentaje referido al valor diario recomendado.



Figura 13: Resumen de información nutricional de las Galletas Ducales y Festival, extraído de la pagina <https://www.noel.com.co/nuestrasmarcas/>.

- Con los empaques que se han traído a clase, correspondiente a los productos que consumen a diario, registre en tablas (puede tomar como ejemplo la **Tabla 12**) la información de las porciones consumidas y el valor energético que aportan en kcal. Luego, construya las gráficas que corresponden a cada una de estas tablas.

Tabla 12: Relación entre porciones consumidas y aporte energético en Kcal.

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	150	300	450	600	750	900

Presenta un ejemplo para el desarrollo del según ítem de esta fase de la actividad, mostrando la relación entre la porción de galleta festival y el valor energético que aporta en Kcal. Autoría propia.

- Una vez construidas las gráficas, conteste las siguientes preguntas: ¿Las gráficas corresponden a funciones? Si es así ¿qué las hace una función? ¿cuál es el dominio y el rango de cada una de esta? Si fuera posible extender la gráfica para porciones consumidas que tomaran

cualquier valor en los reales ¿cuál sería su dominio y rango?²⁰ Comparta sus respuestas con el resto de la clase

- Con su grupo de trabajo, discuta y construya las expresiones algebraicas correspondientes al valor energético de los productos seleccionados. Luego conteste: ¿cuál es la estructura general que tienen todas estas expresiones? ¿cuál es la variable independiente? ¿cuál la variable dependiente? ¿cuál es la constante? ¿cuál es el coeficiente de la variable dependiente?
- ²¹. Si una función tiene la misma forma general que se encontró para estos ejercicios ¿su grafica siempre será una recta? ¿por qué?

Finalmente, el docente da inicio a la discusión de cada pregunta, dando mayor prioridad a la conclusión que llevan las dos últimas preguntas²².

6. Ahora bien, ya se han identificado aspectos gráficos y algebraicos que permitieron representar la información correspondiente a la energía suministrada por algunos alimentos. Pero aún faltan aspectos relacionados con el azúcar, sodio y grasas trans y la cantidad diaria recomendable a consumir. Aspectos que van a dar un mayor criterio para identificar lo bien que se pueden estar alimentando los estudiantes de la institución. Para ello es docente inicia planteando el siguiente ejercicio

- Repita el segundo ítem del punto 5, pero ahora para el azúcar y el sodio. En las gráficas que resulten del ítem anterior, resalte o señale de alguna manera a partir de cuantas porciones se excede el límite diario recomendado para una persona. Luego presente al grupo la

²⁰ Se busca que el estudiante reconozca la recta como una función e identifique que su dominio y rango son todos los reales.

²¹ Las preguntas buscan la identificación de la pendiente, además evidencie los cambios (ángulo de inclinación) que presenta la gráfica al momento de variar la pendiente.

²² En esta parte es pertinente la intervención del docente, dado que busca que el estudiante identifique la función lineal.

gráfica e indague cuantos de los estudiantes están excediendo estos límites. Por último, consulte las repercusiones que tienen las grasas trans en su organismo y cuáles de los alimentos qué usted consume a diario contienen estos elementos. Ahora en base a esto conteste: ¿considera usted que su dieta diaria es la correcta? ¿considera que el grupo tiene una dieta diaria correcta? ¿la tienda escolar brinda un abanico saludable de alimentos a los estudiantes?

7. En este punto de la actividad interesa calcular las necesidades energéticas de una persona, de tal forma que mantenga un índice de masa corporal adecuado. Para ello se hace uso de tres formas distintas de determinar la necesidad energética: (1) A partir de la tasa metabólica basal o en reposo (TMR)²³ y de factores medios de actividad física. (2) A partir de la TMR y de un factor individual de actividad física. (3) Con el gasto por actividad física expresado en kcal/kg de peso y tiempo empleado en realizar la actividad.

Para la primera forma de determinar la necesidad energética, el docente presenta dos ecuaciones muy utilizada para calcular la tasa metabólica en reposo (kcal/día).

Tabla 13: Ecuaciones de Harris – Benedict

Hombres	$TMR = 66 + [13.7 \times MC] + [5 \times T] - [6.8 \times EDAD]$
Mujeres	$TMR = 655 + [9.6 \times MC] + [1.8 \times T] - [4.7 \times EDAD]$

Ecuaciones de Harris – Benedict para calcular TMR en hombres y mujeres a partir de la edad (años) masa corporal (MC) (kg) y la talla (cm).

- Con las dos ecuaciones presentadas por el docente, calculen la TMR (kcal/día) de cada uno de los miembros del grupo de trabajo. Luego discuta en clase: ¿qué información brinda

²³ Corresponde al gasto energético necesario para mantener las funciones vitales durante el reposo. El TMR representa el 60% a 75% del gasto energético diario.

el valor de TMR que cálculo para usted? ¿qué menú alimenticio le brindaría a usted la energía necesaria para mantenerse en reposo?²⁴

Cada grupo de trabajo cuenta con los datos de MC, T y edad del grado al que se le asigno investigar. Con esta información calcule la edad promedio y $\bar{T}$ (talla promedio). Con estos valores plantea la expresión (para hombres y mujeres por separado) que permite calcular la TMR en términos de MC²⁵, construya la tabla de valores y la gráfica correspondiente (la tabla y la gráfica en una cartelera o si existe la posibilidad de usar las NTIC, proyectarlas en Excel).

Luego, el docente discute en clase las siguientes preguntas:

- Respecto a un valor cero en el eje de las ordenadas ¿qué diferencia encuentra entre esta gráfica y las del segundo ítem del punto 5? ¿Qué ocasiona este cambio en la gráfica?
- ¿qué diferencia en cuestión de forma identifica en las expresiones algebraicas correspondientes a las funciones?²⁶

Una vez discutidas estas preguntas, el docente pide a los estudiantes presentar la tabla de valores y grafica a la clase, comparándola con los demás grupos (pueden pegar las carteleras en el tablero o el docente proyectarla todas juntas). Para que luego, cada grupo conteste y socialice las siguientes preguntas:

- Al comparar las gráficas de la ecuación para hombres (o para mujeres) ¿estas forman rectas son paralelas? Si es así ¿por qué?

²⁴ Para esta última pregunta se espera que el docente presente a los estudiantes (o pida una consulta previa) una tabla nutricional que presente la cantidad de calorías suministrada por varios alimentos (entre estos alimentos incluya frutas y verduras).

²⁵ En la construcción de la expresión se espera la intervención del docente para orientar las discusiones de cada grupo de tal forma que apunten a una expresión de la forma $y = mx + b$.

²⁶ Busca identificar el punto de intersección con el eje de las ordenadas y evidenciar que al sumar un valor a una función afín se desplazamiento es en ascenso vertical, así mismo para el caso de la resta donde su desplazamiento es en descenso vertical.

- ¿Qué término de la expresión hace que al comparar dos rectas paralelas una esté por encima o debajo de otra en el plano? ¿qué ocurriría si este término fuese igual a cero y qué si es negativo?²⁶

- Al comparar las gráficas correspondientes a las ecuaciones de TMR para hombres con la de mujeres ¿forman rectas paralelas? ¿por qué si o por qué no?

- ¿Qué condición debe cumplir la ecuación de una recta para que esta sea paralela a otra?

- ¿Las gráficas correspondientes a las ecuaciones de TMR para hombres con la de mujeres se cortan en algún punto? (recuerde que las rectas se prolongan en el infinito)

- Si se toma el punto de intersección entre dos rectas como punto de partida, ¿qué cambiaría al comparar las dos rectas? ¿qué recta tiene un mayor ángulo de inclinación? ¿qué término de la ecuación influye en el ángulo de inclinación de la recta?

Para identificar la pendiente de una recta como razón de cambio, el docente pide a los estudiantes repetir el mismo procedimiento del segundo ítem de este punto, pero ahora se calcula la $\overline{MC}$ (promedio de masa corporal) y $\bar{T}$, y expresar el TMR en términos de la edad (en años).

Para luego contestar con el grupo de trabajo las siguientes preguntas:

- ¿Qué cambio se dio en la gráfica respecto a las trabajadas en el segundo ítem de este punto? ¿Qué término de la expresión ocasiona este cambio en la gráfica?²⁷

Finalmente, el docente pide a los estudiantes discutir en clase las respuestas a estas preguntas, orientando la discusión a identificar los parámetros correspondientes a una función lineal.

²⁷ En este punto es necesario que el docente oriente la discusión a identificar el cambio en la función cuando la pendiente es negativa. Por consiguiente, que identifique cuando la función es creciente y cuando decreciente.

8. Ya se vio que aun en estado de reposo el cuerpo necesita ingesta de energía para poder cumplir con sus funciones vitales, también se identificó que comer varias porciones de un mismo alimento (como las galletas) excede la TMR, aspecto que puede contribuir a una ingesta positiva de energía y ocasionar sobrepeso. Ahora, este punto tendrá presente la actividad física diaria en el cálculo de necesidad energética. Para ello el docente presente a los estudiantes la siguiente tabla.

Tabla 14: *Coeficiente de Actividad Física.*

	Coeficiente de Actividad Física (FA)		
	Ligera	Moderada	Alta
Hombre	1,55	1,78	2,10
Mujer	1,56	1,64	1,82

Muestra el coeficiente (con el TMR) correspondiente al tipo de actividad física (ligera, moderada, alta) que realiza una persona.

Siendo la actividad **ligera**, aquella que desarrollan las personas con un ritmo de vida sedentario, por ejemplo; pasarse el día sentado o de pie, viendo TV, leyendo, en video juegos, trabajo ligero del hogar, donde se desarrollan actividades de trabajo pesado una dos o tres veces por semana. La actividad **Moderada** se relaciona con personas que realizan trabajos pesados (carpintero, construcción, tareas agrícolas) o actividades en las que se desplacen objetos de forma moderada. Por último, la actividad **alta** se relaciona con personas que se desplazan largas distancias, usan bicicleta a menudo, practican algún deporte que requiere un alto nivel de esfuerzo, tareas agrícolas o industriales no mecanizadas, que realizan actividades vigorosas o moderadas a diario.

Así pues, el gasto energético total es el producto que resulta de multiplicar el TMR por los coeficientes de la actividad física (FA) presentado en la **Tabla 14**.

- Como primer ejercicio se propone calcular el gasto energético diario total de cada uno de los integrantes del grupo de trabajo, para ello cada estudiante debe clasificarse en el tipo de actividad física que realiza (ligera, moderada o alta). Luego haga un listado de todos los alimentos que ingirió el día de ayer (huevos, productos cárnicos, lácteos, verduras y frutas) e identifique si tiene una dieta equilibrada, de no ser así, organice un menú del día que le ayude a equilibrar su dieta.

En el segundo ítem del punto 8, se construyó la expresión para calcular un TMR promedio del grado que se le asignó a su grupo. Ahora el docente pide al grupo que presente una expresión que permita calcular el gasto energético diario para cada FA, para luego construir las gráficas correspondientes a cada expresión (en este punto se pide a los estudiantes que grafiquen identificando el punto de corte con el eje de las ordenadas y un punto correspondiente a la gráfica)²⁸:

- ¿Qué diferencia se observa entre las gráficas iniciales del TMR y las resultantes después de aplicar el FA? ¿qué términos de la nueva expresión ocasiona este cambio en la gráfica?

El docente ahora pide a los estudiantes que intercambien las gráficas con otro de los grupos de trabajo y traten de determinar la función que corresponde a la gráfica presentada por sus compañeros.

Finalmente, se da el espacio para discutir las respuestas dadas por los estudiantes y comparar las expresiones halladas por los grupos al momento de intercambiar las gráficas.

²⁸ El objetivo es que el docente oriente la construcción de las gráficas para identificar que una recta está definida por dos puntos.

9. Por último, el docente plantea el tercer método para calcular la necesidad energética diaria de una persona, para ello se emplea una tabla que recoge el gasto energético en minutos según el tipo de actividad física. Así pues, para determinar el gasto energético total se multiplica el peso (kg) por el factor correspondiente (gasto energético mostrado en la **Tabla 15**) y por el número de minutos que emplea en realizar la actividad física. En efecto el tiempo total de las actividades debe sumar 24 horas.

Tabla 15: Gasto energético según actividad física.

Tipo de Actividad	Gasto Energético kcal/kg
Dormir	0,017
Tumbado despierto	0,023
Afeitarse	0,042
Ducharse	0,046
Aseo (lavarse, vestirse, ducharse, peinarse, etc.)	0,050
Comer	0,030

*Elaborada a partir de datos de Grande Covián y Tomada de
<https://www.ucm.es/nutricioncarbajal/>*

Ahora, el docente plantea a los estudiantes los siguientes ejercicios:

Cada integrante del grupo determina su necesidad energética diaria, para ello hará uso de la **Tabla 16** (los valores de la **Tabla 15** están diseñados para hombres, en el caso de las mujeres se reduce el gasto total en un 10%).

Tabla 16: Registro de gasto energético según actividad física.

Tipo de Actividad	Gasto Energético: kcal/kg	Tiempo en Minutos	Gasto Energético total (kcal/ día)
Total			

El registro de datos en esta table permite a los estudiantes determinar su necesidad energética diaria. Autoría propia.

- A diferencia del segundo método, este particulariza cada una de las actividades físicas con su gasto energético, lo que permite hacer un cálculo más próximo al real, siempre y cuando logre encontrar en la tabla todas las actividades que realiza a diario. Basado en este tercer método, construya nuevamente una dieta diaria, sin olvidar las frutas y las verduras.

- Teniendo presente la ingesta de alimentos del día anterior, construya una rutina de actividad diaria en la que usted logre equilibras el gasto energético con la energía que suministra a su cuerpo.

10. Como último punto de la actividad el docente pide a los estudiantes mostrar los resultados encontrados al momento de calcular el gasto energético diario y compararlo con su dieta habitual. De tal forma que evidencien las posibles consecuencias que puede tener el seguir malos hábitos alimenticios y una vida sedentaria. Así mismo identificar los espacios que brinda la institución educativa para realizar actividades físicas y que tan saludable o que tan amplio es el menú que ofrece la tienda escolar a los estudiantes según lo establecido por la ley y la necesidad del equilibrio energético que se ha detectado en el grupo.

4.1.2.3 Fase 3: Publicación de la investigación y propuesta para solucionar la crisis.

En esta tercera fase, el docente propone a los estudiantes la publicación de los resultados de su investigación. Para ello pide que se distribuyan nuevamente los grupos de trabajo, pero ahora realicen los cálculos de IMC en los grados de preescolar y primaria, además, uno de los grupos se encarga de hacer los cálculos con el resto de la comunidad educativa que se encuentren en el margen de edad de 18 a 64 años (docentes, servicios generales, administrativos y directivos).

- Para los grados de preescolar y primaria se espera identificar condiciones de bajo peso y desnutrición, que según los resultados de ENSIN 2010 se presenta en con mayor frecuencia en niños de 1 a 9 años y con mayor prevalencia en niños de 1 a 4 años, ocasionando en el segundo grupo de edad enfermedades como anemia.
- En el grupo de 18 a 64 años se espera encontrar condiciones de sobrepeso y obesidad.

El propósito de estos nuevos grupos de investigación radica en la necesidad de comparar los resultados obtenidos con los nacionales, siendo esta una manera de validar la investigación hecha por los estudiantes y de mostrar al grupo que ellos han tomado un lugar importante al momento de identificar una crisis de su institución, además de haber tomado una postura crítica al plantear soluciones e identificar las causas.

Como un segundo punto, el docente pide extender el trabajo hecho en la segunda fase de este proyecto a los distintos grados de escolaridad asignados a cada grupo investigador, de tal forma que se recoja la información correspondiente a la actividad física y el consumo de frutas, verduras, huevos, productos cárnicos y lácteos de los distintos de rangos de edad sobre los cuales el ENSIN (2010, p. 202) muestra los resultados nacionales (2 – 4 años, preescolar; 5 – 12,

escolar; 13 – 17 adolescente; 18 – 64 adulto). Con el fin de identificar la causa del problema, relacionada con el desequilibrio entre la ingesta y el gasto energético. Al igual que en el punto anterior, estos resultados se comparan con los nacionales, mostrando en la institución educativa que un bajo porcentaje de colombianos consume frutas, verduras, lácteos y carne, y que además la institución no compensa esa falta mejorando la oferta alimenticia en la tienda escolar.

El tercer punto de esta fase consiste en proponer a los estudiantes la publicación de los resultados obtenidos en una revista escolar, para ello los estudiantes disponen de las representaciones numéricas, algebraicas y graficas desarrolladas durante la actividad, además de los resultados nacionales para mostrar a la comunidad educativa la importancia del proyecto. En este punto el docente dará mayor importancia en la publicación a las representaciones gráficas, de tal forma que cada individuo de la comunidad educativa pueda identificar su estado de salud respecto al IMC y el equilibrio que existe entre sus hábitos alimenticios y su gasto energético diario. Para ello, cada grupo investigador debe aportar con la publicación de los resultados obtenidos durante su investigación y las representaciones graficas que permitieran interpretar la información.

Como cuarto punto el docente pide a los estudiantes agregar a la publicación las propuestas que se hayan discutido en clase para superar la crisis, teniendo en cuenta los elementos normativos nacionales que la institución no esté cumpliendo y que estén contribuyendo a la problemática. Además, se espera que la publicación del proyecto sea evaluada por los docentes de lenguaje, TIC y educación física.

- En el caso del docente de educación física se espera orientación en la relación de equilibrio entre gasto e ingesta energética y contribuciones que permitan superar la problemática,

mostrando disposición para usar la investigación hecha por los estudiantes en las intervenciones necesarias para dar solución a la crisis.

- El docente de lenguaje en sus espacios de clase con el grupo contribuiría a la orientación y revisión del documento que será publicado.
- El docente de TIC'S usaría los espacios de clase para la construcción del documento, orientando en el uso de software para el diseño de las gráficas, construcción de tablas, formulas y aspectos que hagan más llamativo el documento que se va a publicar.

Como último elemento agregado a la publicación del proyecto, los estudiantes presentaran los efectos económicos que tiene la poca actividad física en Colombia y en el mundo relacionado esto justamente con la obesidad. Para ello el docente puede apoyarse en los datos presentados por el ENSIN 2010, los cuales muestran cómo la obesidad le costó al país un aproximado de 15 mil millones de pesos en el año, teniendo presente las incapacidades laborales y el hecho de que la muerte de una persona de estrato uno o dos con un hogar formado representa la perdida de una fuente de ingreso para su familia, entre otros muchos fenómenos ocasionados por el deceso en la salud y la mortalidad por enfermedades ocasionadas por la obesidad y el sobrepeso.

4.2 Rejilla de Análisis Actividad 1

Tabla 17: Rejilla de análisis de la Actividad 1 “Prueba Diagnóstica”.

Pregunta	Contenido Matemático	Elemento Curricular	Elementos de EMC
1 y 2	Magnitudes variables y constantes. Las preguntas tienen la intención de llevar al estudiante a identificar magnitudes variables y constantes presentes en la información suministrada. Para ello es necesario que los estudiantes comprendan la información que da cada magnitud en la columna de la tabla, de manera que puedan concluir aspectos como: Cantidad M3: Corresponde al volumen de agua consumido en el hogar. ¿variable o constante? Valor Unitario: Corresponde al valor en pesos por cada M3 consumido en el hogar. ¿variable o constante?	El caracterizar aspectos de la variación tales como las magnitudes que cambian y aquellas que permanecen constantes, además de la posible relación existente entre estas variables, hacen parte del desarrollo del pensamiento variacional. Así pues, en estos primeros cuestionamientos, se intenta verificar la capacidad de los estudiantes para identificar las características mencionadas, además del cumplimiento del siguiente estándar: “Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)” MEN (2016, p. 85). Por otro lado, se verifican las evidencias del DBA 8 para grado octavo, a través de la identificación de cambio en la variable dependiente a partir de los cambios que presenta la variable independiente y las operaciones con formas simbólicas y su interpretación.	Al ser una actividad diagnóstica y solo tener como intención el verificar conocimientos previos de los estudiantes respecto al concepto de función, la prueba no presenta elementos trascendentales de la EMC. Se podría decir que una de las características que conserva de la EMC es la información a interpretar y sobre la cual se trabaja, está enmarcada en un enfoque realista del estudiante.
3, 4 y 5	Relación de dependencia e independencia entre variables. La intencionalidad de estas preguntas, es llevar al estudiante a identificar la dependencia existente entre las variables que se presentan en la figura 8. Justamente, una forma de validar la correspondencia de variables que ha identificado el estudiante, es calcular el valor a pagar para consumos diferentes a los que se muestra en la tabla. Pero antes de hacer estos cálculos, el estudiante debe verificar que los resultados presentes en la tabla correspondan a la interpretación variacional que este ha hecho.	En las situaciones de aprendizaje que desarrollan el pensamiento variacional se involucra la necesidad de formular, poner a prueba, sustentar, refutar, generalizar conjeturas. Esto se logra a partir de la movilización en los distintos modelos de representación, como tablas, gráficas y algebraicas. Entre los elementos curriculares tenidos en cuenta para estos puntos, además del estándar y el DBA mencionado en las preguntas anteriores, se tienen el DBA 10 para grado octavo, el cual se evidencia en la modelación algebraica, numérica (tabla) y gráfica de la situación variacional planteada a los estudiantes.	
5, 6 y problema 2.	Ecuaciones y Relaciones. Estas preguntas llevan al estudiante a generalizar el modelo variacional que logró identificar en los puntos anteriores. Cuyo objetivo es verificar la capacidad que tiene para formular una ecuación a partir de la identificación de las magnitudes variables, constantes y las relaciones de dependencia. Además, permite verificar si el estudiante tiene una idea próxima al concepto de función, al menos como una relación. Justamente para identificar en el estudiante este primer acercamiento al concepto de función, se promueve en las preguntas la movilidad en al menos tres modelos de representación (algebraico, numérico y gráfico).		

Presenta los elementos conceptuales, curriculares y de la EMC existente en la actividad planteada. Se muestra la intencionalidad de cada pregunta, de manera que el docente puede decidir si existe la necesidad de aplicar el diagnóstico.

4.3 Rejilla de Análisis Actividad 2

Tabla 18: Rejilla de análisis de la fase 1 de la Actividad 2 “Planteamiento del problema”.

Pregunta	Contenido Matemático	Elemento Curricular	Elementos de EMC
Fase 1			
1 y 2	Ecuaciones. Una vez planteado un problema socioeconómico del contexto colombiano, se presenta como primer punto unas cuestiones que buscan acercar la crisis al estudiante, de tal forma que reconozca la existencia de una situación de equilibrio que lo afecta y afecta su entorno. La segunda pregunta pretende mostrar a los estudiantes a partir de datos recogidos por ellos mismos, la existencia de una crisis real que está afectando en ese momento su contexto. Justamente en este punto se plantea la ecuación de IMC como herramienta matemática que permite identificar la crisis y además permite una primera aproximación al concepto de función, que como se vio en la construcción del concepto de función que se plantea en este trabajo, donde en un principio el concepto está relacionado con las operaciones básicas de la aritmética (operar y obtener un resultado) en un conjunto de datos operables finitos.	Los procesos de modelación hacen que el pensamiento variacional este estrechamente relacionado con los otros pensamientos. Esta estrecha relación ocurre dado que la variación, aunque se represente usualmente con sistemas algebraicos, requiere de los sistemas de numeración, medidas, cuerpos geométricos y de la toma de datos. Es así pues como el segundo punto, involucra la medición (talla y peso) y la toma de datos, lo que en efecto muestra la movilidad entre distintos pensamientos con el objetivo de potenciar uno de ellos.	La problemática planteada hace parte de una situación de la vida real. Dado que el planteamiento de la problemática funciona como un punto de partida para promover una indagación, se puede evidenciar que este es el planteamiento de un escenario de investigación, en el cual se promueve en los estudiantes una investigación que inicia con la recolección de datos y que conlleva a la explicación de una crisis.
3	Dominio, codominio y rango de una función. Este punto tiene como propósito identificar los conjuntos dominio, codominio y rango de una función. Además, teniendo presente que en el punto anterior la información se modela a partir de una ecuación algebraica y tablas, en este punto la modelación se realiza a partir del diagrama sagital, pero partiendo de las tablas ya construidas.	El potencial que tiene el pensamiento variacional para desarrollar en los estudiantes la capacidad para analizar, hacer conjeturas y solucionar problemas, se encuentra en la capacidad que adquirida para poder movilizarse en los distintos sistemas de modelación. Justamente, estos puntos pretenden presentar a los estudiantes las distintas formas de representar una función (numérica, diagrama sagital, algebraica y gráfica).	Se puede evidenciar el siguiente estándar: “Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas” MEN (2016, p. 87). Teniendo como evidencia las operaciones con formas simbólicas y la interpretación de sus resultados, la relación funcional establecida en el punto 4C, el reconocimiento y la representación de relaciones numéricas mediante graficas e identificar el conjunto de variación sobre el cual se está trabajando.
4.A	Representación gráfica de una función. El IMC se determina para una estatura promedio, permitiendo hacer una aproximación general del IMC para cualquier valor de MC. De tal forma que permita posteriormente ilustrar en una gráfica las condiciones de salud del grupo y cada estudiante puede establecer su IMC a partir de la correspondencia de su MC en la gráfica.		
4.B	Aunque el IMC se planteó en principio como una ecuación, en este punto ya se establece la necesidad de expresar un parámetro en términos de otro, estableciendo T en función de la MC. Además, la información que presenta la tabla permite identificar la talla que debe tener un individuo según su MC para tener un IMC adecuado.		
4.C	Plantea la elaboración de las gráficas correspondiente a los puntos 4A y 4B, con el propósito de mostrar a partir de la orientación del docente, apoyándose en las gráficas y los resultados de la tabla 11, cuando corresponde a una función (Tabla 10) y cuando no es una función (tabla 11, tomando los resultados negativos). Además, de la importancia de establecer sobre que margen de datos los resultados realmente dan información consistente a la investigación (establecer un dominio).		Durante el desarrollo de la actividad, el docente no es más que un orientador que lleva a los estudiantes a la construcción de un concepto. Aunque no se puede decir que este punto genere una postura crítica, si se puede establecer que el estudiante es participe en la solución de la crisis.

Presenta los elementos conceptuales, curriculares y de la EMC existente en la primera fase de la actividad 2.

Tabla 19: *Rejilla de análisis de las preguntas 5 a 7 de la fase 2 de la Actividad 2 “Explicación formal de la causa del problema”*

Pregunta	Contenido Matemático	Elemento Curricular	Elementos de EMC
Fase 2			
5 y 6	Función lineal, Dominio, Codominio y Rango Se pretende que, a partir de procesos aritméticos los estudiantes logran identificar el patrón de comportamiento variacional que le permita pasar del modelo de tablas al algebraico. Además, las representaciones graficas del aporte energético de cada producto terminan siendo rectas cuya pendiente corresponde al valor energético aportado en kcal, permitiendo así visualizar diferentes rectas que cortan en el origen con pendiente diferente, lo que en efecto permite relacionar la inclinación de la recta con el valor de la pendiente presente en la expresión algebraica planteada por el estudiante. Otro de los aspectos presentes en esta pregunta, es la identificación de la recta como función, además de pretender la identificación del dominio y rango de una función lineal en todos los reales.	Los elementos curriculares presentes en esta primera parte son los siguientes “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	Los estudiantes deben realizar un trabajo de investigación para poder interpretar la información nutricional de los alimentos. El proceso de investigación de los estudiantes se realizó a partir de resultados matemáticos enmarcados en aspectos reales, como la dieta diaria de sus compañeros.
7	Función Afín En un principio es planteada la ecuación de TMR, la cual depende de tres variables (T, edad y MC). Pero dado que el objetivo es lograr la construcción grafica de una función afín, dos de las variables se expresan como constante, para ello lo que se hace es tomar el valor medio de la talla y la edad, convirtiendo así la MC en la pendiente y la operación con el resto de los valores en el punto de intercepción con la ordenada, llegando a una expresión de la forma $TMR(MC) = 13.7MC + B$ o $TMR(MC) = 9.6MC + B$. Una vez logrado la construcción de la función, la actividad nuevamente moviliza a los estudiantes en los distintos sistemas de modelación (algebraica, numérica y gráfica). Además, se propone la comparación de las gráficas de esta nueva función con las construidas en el punto anterior, con el propósito de identificar el cambio que involucra el valor B en una función o la diferencia grafica entre una función lineal y una función afín. A medida que se avanza en la actividad, se pide la comparación de las gráficas de hombres (o mujeres) correspondientes a la función de los en cada grado de escolaridad, para identificar que las funciones lineales (y afín) son paralelas si tienen la misma pendiente. Luego se comparan las de hombres con las de mujeres identificar el ángulo de inclinación a partir del punto de intersección, relacionando el valor de la pendiente con la amplitud del ángulo. Como último procedimiento se calcula el promedio de la MC y T del grado asignado a cada grupo, y nuevamente se llega a la expresión de una función afín, pero ahora de la forma $TMR(edad) = B - 6.8 \times edad$ y $TMR(edad) = B - 4.7 \times edad$. Esto, con el objetivo de evidenciar cuando una función lineal (y afín) es decreciente, que características de la función resultan en una función creciente o decreciente.	Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan” (MEN, p. 87). Dada la relación existente entre los ejercicios propuestos a los estudiantes durante esta fase de la actividad, es posible establecer como elemento curricular el cumplimiento de los estándares en la coherencia vertical planteada en este trabajo en la Figura 5.	El docente funciona como un orientador en la construcción del concepto y en la participación democrática a partir de la investigación hecha. El estudiante identifica las razones de la crisis e inicia la construcción de elementos formales que le permitan sustentar sus argumentos. La actividad permanente hace uso de los antecedentes del estudiante con el fin de incentivar una postura respecto a la crisis. La actividad pretende que los estudiantes constantemente estén contrastando sus resultados con el grupo, estableciendo conjeturas matemáticas que le permitan identificar desequilibrios respecto a la salud de la comunidad educativa.

Presenta los elementos conceptuales, curriculares y de la EMC existente en las preguntas 5, 6 y 7 de la segunda fase de la actividad 2.

Tabla 20: *Rejilla de análisis de las preguntas 8 y 9 de la fase 2 de la Actividad 2 “Explicación formal de la causa del problema”*

Pregunta	Contenido Matemático	Elemento Curricular	Elementos de EMC
Fase 2			
8	Función Afín En este punto se plantea un coeficiente de actividad física, el cual es multiplicado con la TMR para obtener el gasto energético diario. En este proceso, la función afín que los estudiantes plantearon en el punto anterior es multiplicada por el coeficiente de actividad física, esto cambia el valor de la pendiente y el del punto de intersección con la ordenada. Luego al comparar las gráficas obtenidas en el punto 7 con las nuevas, los estudiantes visualizan los efectos en la gráfica al aumentar el valor de la pendiente y el valor del punto de intercepción. El nuevo aspecto que plantea este punto, se da, cuando se pide a los estudiantes intercambiar graficas con otro grupo, para luego determinar la función correspondiente a esta gráfica. De esta forma se pretende entonces que el estudiante se dé cuenta que una recta está definida por dos puntos, que logre identificar como determinar la pendiente y finalmente que logre hacer el cambio del modelo gráfico al algebraico.	Al igual que en el punto anterior, es posible afirmar que los elementos curriculares presentes en esta primera parte son los siguientes “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan” (MEN, p. 87).	Pretende lograr que los estudiantes constantemente estén contrastando sus resultados con el grupo, estableciendo conjeturas matemáticas que le permitan identificar desequilibrios respecto a la salud de la comunidad educativa. En este punto al igual que los anteriores se ven involucradas otras ciencias, en particular las ciencias sociales, dado que la problemática esta enmarcada en un contexto social, incluso se ven involucrados aspectos políticos como aquellos que rigen la alimentación escolar y la actividad física en la escuela.
9 y 10	En estos últimos dos puntos de esta fase, no se trabaja ningún contenido que tenga realmente trascendencia en el trabajo, pero tiene como propósito darle más elementos a la investigación de los estudiantes, que les permita contrastar y refutar los resultados obtenidos.	Los elementos matemáticos en estos dos puntos se ven enmarcados en aspectos básicos de la aritmética, de esta manera se podría decir entonces que toma conocimientos previos del estudiante para contrastar sus resultados. Así pues, se estaría tomando como antecedente la coherencia horizontal planteada en la Figura 6.	La actividad hace uso de elementos de la realidad del estudiante para mantener visible el propósito de esta y dar más elementos que permitan sustentar la existencia de crisis en el colegio. Estos últimos puntos pretenden generar en el estudiante una postura crítica (como se ha definido en este trabajo). Una vez evidenciada la crisis y analizada sus causas, el estudiante identifique oportunidades y tome una postura activa en la solución de la problemática.

Presenta los elementos conceptuales, curriculares y de la EMC existente en las preguntas 8 al 10 de la segunda fase de la actividad 2.

Tabla 21: *Rejilla de análisis fase 3 de la Actividad 2 “Publicación de investigación y propuesta para solucionar la crisis”*

Momentos	Contenido Matemático	Elemento Curricular	Elementos de EMC
		Fase 3	
Primer Momento	Funciones: Función lineal y Función Afin. Esta tercera etapa involucra todos los elementos que los estudiantes han trabajado en las dos fases anteriores de la actividad. Dado que su objetivo es la publicación de los resultados de la investigación, los estudiantes deben hacer uso de todos los conceptos matemáticos trabajados hasta el momento, además de movilizarse por los distintos modelos de representación que le permiten presentar a la comunidad educativa la problemática que se presenta, sus causas y las posibles soluciones que se pueden implementar. Dado que la población sobre la cual se hace la investigación se extiende a un rango más amplio, los estudiantes deberán hacer uso nuevamente de los elementos funcionales trabajados y al contrastar la información con los datos nacionales, se verán en la necesidad de interpretar y razonar respecto a los propios.	Dado que en esta fase se recoge todo el trabajo hecho por los estudiantes, es posible establecer que se movilizan nuevamente los estándares trabajados en las fases anteriores “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas” (MEN, p. 87). Además de los estándares relacionados a otras áreas como los presentados en la coherencia vertical planteada en este trabajo en la Figura 5. En esta fase es donde otras áreas de estudio tienen más trascendencia. Las ciencias sociales tanto en la investigación como en propósito de la publicación y lengua castellana en la necesidad de construir un documento bien redactado.	Se promueve un escenario de investigación en situaciones de la vida real, al ampliar la población investigada a los grados de preescolar, primaria y aquellos en un margen de edad mayor a 18 años. El trabajo de investigación se extiende más allá del aula de clase.
Segundo y Tercer Momento			Se promueve un escenario de investigación en situaciones de la vida real, al indagar sobre la alimentación de los distintos grados de escolaridad y la población mayor de 18 años, con el fin de modelar la información (fase 2 de la actividad 2) y contrastar con los datos nacionales (igualmente han sido investigados). Pretende que los estudiantes hagan uso de un concepto matemático adquirido, lo que les permite dar cuenta del uso de la matemática en situaciones de la vida real.
Cuarto Momento			Pretende incentivar al estudiante a publicar su postura crítica respecto a la problemática planteada, para ello ya se hizo una etapa de identificación de la crisis, de razonamiento e identificación de las causas, durante las cuales se pretendía establecer juicios y valoraciones y finalmente se espera que al haber sido un sujeto activo durante el proyecto, logre mostrar su postura al momento de plantear soluciones, donde hará evidente las fallas existentes su institución educativa y logre trascender más allá de la crítica. Se plantea la interdisciplinariedad al involucrar al docente de lenguaje, educación física y TIC.
Quinto Momento			Pretende evidenciar que el trabajo de investigación esta enmarcado en la realidad, al poder contrastar los resultados obtenidos con los nacionales y poder dar cuenta de la importancia del proyecto en el que se vieron involucrados los estudiantes.

Presenta los elementos conceptuales, curriculares y de la EMC existente tercera fase de la actividad 2.

Capítulo 4

5. CONSIDERACIONES FINALES

Para hacer el análisis y reflexión sobre el proyecto, se inicia aclarando las consideraciones que se tuvieron para su diseño y las características generales de este, siendo ambos basados en elementos teóricos de la EMC.

5.1 Consideraciones

A continuación, se presentan algunas consideraciones respecto a tres aspectos tenidos en cuenta al momento de plantear este proyecto, los cuales se mencionan como consideraciones que se deben tener al momento de querer aplicar esta propuesta y como un posible marco de referencia para la construcción de posibles propuestas que busquen el mismo objetivo.

Skovsmose (1999) menciona que la EMC no debe ser una imposición, sino una negociación entre el docente y el estudiante de las razones y las metas del proceso educativo. De hecho, Skosvmose (1999. XVI) señala que la triada disposición-intención-acción presentan el marco que permite hablar de la enseñanza-aprendizaje en EMC como una acción, siendo la **disposición**, los *antecedentes* históricos y sociales en los que se encuentra el estudiante (su contexto) y el *porvenir* o las oportunidades que el contexto le ofrece al individuo, de tal forma que la **disposición** termina siendo la fuente de **intenciones** y la **acción** permite satisfacer las intenciones del estudiante.

Así pues, el primer aspecto que se debe tener en cuenta al momento de plantear el proyecto es identificar en los estudiantes la disposición que pueda motivar a la acción, teniendo para ello, dos elementos; los *antecedentes* y el *porvenir*.

El segundo aspecto es el planteamiento del escenario de investigación, que tiene como referente la *disposición* de los estudiantes, el cual permite identificar sobre que ambientes de aprendizaje se va movilizar el escenario. En este punto, al tener claridad sobre los antecedentes y

el porvenir de los estudiantes, el docente ya puede identificar el objeto matemático a enseñar durante el desarrollo del proyecto.

El tercer aspecto es la negociación entre el docente y el estudiante de la disposición y la intención, de tal forma que el desarrollo del proyecto no sea una imposición. Este aspecto ocupa el tercer lugar, dado que según Scovsmose (1999) no es posible esta negociación sin que el docente haya planteado un escenario de investigación, donde se muestre la acción intencionada del docente por construir un proyecto que involucre a los estudiantes en el desarrollo de sus actividades y en el alcance de sus objetivos, de tal forma que los estudiantes acepten participar de forma activa en la producción de significados.

5.2 Características generales del proyecto

Ahora bien, faltaría mencionar las características que debe tener un proyecto que en el marco de la EMC busca enseñar un concepto matemático y generar una postura política en el estudiante respecto a situaciones de la realidad colombiana. Así pues, articulando elementos curriculares del objeto matemático de estudio, se presentan las siguientes características:

- El proyecto debe cumplir con los tres aspectos mencionados anteriormente en este capítulo.
- El escenario de investigación propuesto en el proyecto debe tener las siguientes características, señaladas por Martinez (2009, p. 20) e identificadas en los proyectos planteadas como ejemplo por Skovsmose (1999):
 - El docente adquiere el papel de orientador y gestor de preguntas retadoras que evoquen reflexión y búsqueda de significado.
 - El escenario debe promover la reflexión individual que finalmente termine convirtiendo el aula en un espacio democrático de reflexión colectiva.

- La investigación debe desarrollarse en espacios fuera del aula y con flexibilidad de tiempo. Además, debe ser interdisciplinar.
- La meta del proyecto no debe ser una calificación, sino la gratificación de satisfacer una necesidad o plantear solución a una crisis.
- La matemática que involucrada debe ser conocida o asequible a todos los estudiantes sin importar el nivel de sus habilidades. Dado que el propósito es que el estudiante puede identificar donde usar las matemáticas.
- Dado que entre los propósitos está el generar una postura política en el estudiante, el escenario de investigación, ya sea partiendo de los antecedentes o del porvenir, debe tener como referente situaciones de la realidad, pues como se ha mencionado anteriormente en este trabajo, es la crisis aquel desequilibrio que evoca a la crítica y en efecto al sujeto crítico.
- Otra característica relacionada con la necesidad de un referente realista, es la importancia de comparar los resultados obtenidos por los estudiantes con referentes nacionales o publicaciones que en cierta forma validen la investigación hecha y le muestren al estudiante en donde se aplica el nuevo concepto matemático aprendido. Además, la divulgación de la investigación en espacios fuera del aula es un elemento que no se debe pasar por alto, dado que promueve la reflexión y la democracia al momento dar la oportunidad a otros de ser sujetos críticos y le brinda la oportunidad al estudiante de defender su postura con argumentos soportados en un lenguaje formal desarrollado durante el aprendizaje del nuevo concepto matemático.
- Aunque parte del objetivo es introducir al estudiante en un nuevo concepto matemático, es crucial identificar que la matemática es asequible para el estudiante en el grado de escolaridad para el cual se pretende aplicar el proyecto, lo que hace necesario en un principio

recorrir a documentos curriculares nacionales e institucionales que permitan plantear un punto hipotético de partida y trazar una meta.

5.3 Análisis y reflexión

Hablando propiamente del proyecto *Tienda Escolar* plasmado en este trabajo de grado, se puede identificar que respecto a las consideraciones:

- El proyecto está basado en los antecedentes y no en el porvenir, dado que la crisis que soporta la investigación de los estudiantes está basada en una problemática nacional.
- El proyecto deja claro que su planteamiento es en un ambiente de aprendizaje basado en un escenario de investigación referenciado en una situación de la vida real. Justamente al identificar la situación realista, se pudo reconocer que uno de los objetos matemáticos que se pueden aplicar para su investigación es el concepto de función.
- El proyecto no cumple con el tercer aspecto de las consideraciones, dado que este no se aplicó y en efecto el trabajo se ve como una imposición. Aun así, la primera parte del recurso didáctico les pide a los estudiantes que recopilen información de los distintos grupos para luego calcular si IMC, esto con el propósito de validar y mostrarle a los estudiantes la existencia de la crisis, de manera que funciones como una invitación a participar en el proyecto.

Ahora bien, si se hace un análisis de las características que debería cumplir el proyecto, se tiene entonces que:

- En el diseño del proyecto, la investigación es desarrollada por los estudiantes, de tal forma que el docente solo cumple el papel de orientador, de moderador durante las discusiones y garante de la democracia y el respeto cuando se realizan las intervenciones de los estudiantes. Además de ser aquel que formula las preguntas planteadas en el proyecto, las cuales invitan a la reflexión y acercan al estudiante a la siguiente etapa del proyecto.

- La investigación, dada la problemática planteada en el proyecto, se realiza fuera del aula, pues los sujetos de investigación se encuentran en otros grados de escolaridad; haciendo del salón de clase el centro en el que se reúnen los estudiantes a presentar sus resultados, discutir sobre las preguntas que resultan durante la investigación y aclarar aspectos formales de la matemática necesaria para entender y tener una postura frente al problema.

- La interdisciplinariedad está presente en el proyecto y constantemente se sugiere la intervención de docentes de otras áreas, como Educación Física y Lengua Castellana. Además, al trabajar un concepto como el de energía se está involucrando el área de las Ciencias Naturales, aspecto que podría involucrar la intervención del docente de esta área en la explicación del gasto y la necesidad energética. También, en la tercera fase del proyecto se deja planteado un punto que involucra las repercusiones económicas que puede traer la el sobrepeso y la obesidad.

- Una de las características de los proyectos en EMC es que su propósito no es introducir a los estudiantes en nuevo concepto, sino mostrarle donde se puede usar la matemática que ya conoce. Justamente esta característica no se cumple para el proyecto propuesto en este trabajo, dado que uno de los propósitos es introducir al estudiante en el concepto de función lineal, mostrándole en que espacios de la vida real se aplica este objeto matemático.

- Ya se ha mencionado que el proyecto se enmarca en un escenario de investigación referenciado en la vida real. Esto hace que el estudiante pueda tener una postura crítica frente a la problemática que le afectan o afectan su entorno.

- En el proyecto plantea como tercera fase, la comparación de los resultados obtenidos durante la investigación con los nacionales, además de la publicación de estos a la comunidad educativa, mostrando la postura que tienen los estudiantes frente a la problemática en soluciones que se plantean.

- El planteamiento del proyecto tiene presente documentos curriculares como LCM, EBM y DBA, que permiten ubicarlo en el grado de escolaridad para el cual esta propuesto.
- Durante el proyecto se van introduciendo los términos y definiciones que en el recorrido histórico permitieron llegar al concepto de función.

Así pues, las consideraciones y características del proyecto ***Tienda Escolar***, valida la aplicabilidad que tiene en el grado de escolaridad para el cual esta propuesto, prueba de ello son los soportes curriculares sobre los cuales se construye, además, su diseño plantea la introducción del concepto de función desde los elementos básicos que históricamente la constituyen, iniciando con la identificación de variabilidad en valores que finalmente permiten formular una expresión algebraica que represente esta variación, para luego concebir esta expresión como una idea conjuntista, que relaciona diferentes formas de representación. Todo este recorrido conceptual que se hace en el proyecto está articulado con la coherencia vertical y horizontal propuesta en los EBM.

Otra de las potencialidades que tiene el proyecto para ser aplicado radica en las expresiones utilizadas para calcular el gasto energético, dado que al fijar algunos parámetros se logran construir funciones afín, lo que permite realizar la investigación respecto a la crisis y al mismo tiempo hacer uso de las funciones afín para la representación de los resultados obtenidos y para el planteamiento de soluciones respecto a una posible dieta equilibrada que deberían llevar los estudiantes, además de la actividad física que compense su consumo energético.

6. CONCLUSIONES

En cuanto al cumplimiento de los objetivos específicos:

- Los aspectos didácticos tomados para este trabajo de grado permitieron precisar la definición de matemática crítica, crisis y critica que enmarcan este proyecto, además de

identificar el ambiente de aprendizaje sobre el cual se trabaja. Estos aspectos didácticos permitieron ver la relación existente entre la EMC y el propósito de formar ciudadanos críticos que tiene la enseñanza de las matemáticas según el currículo colombiano. Entre las relaciones que se pueden identificar están:

- La EMC no relaciona a la *educación matemática* exclusivamente con las matemáticas, por el contrario, identifica como objetivo la formación de ciudadanos mas no de matemáticos, destacando así la *interdisciplinariedad* de la EM, aspecto que lleva a involucrar el contexto social en el que operan las matemáticas, enfocándose en los antecedentes o el porvenir de los estudiantes, que lo llevan confrontar realidades tanto dentro como fuera de la escuela, logrando una comprensión formal por parte del estudiante de su realidad que lo lleve a tomar una postura frente a esta.

- La EMC destaca la importancia de las relaciones sociales dentro del aula de clase, como elemento que permite desarrollar la actividad *democrática*, siendo estas discusiones de aula un elemento clave durante la investigación y la construcción del conocimiento matemático, involucrando al estudiante en deliberaciones contextualizadas realmente significativas que lo lleven a la crítica.

Así pues, estos elementos teóricos de la EMC permitieron identificar, que el plantear a los estudiantes una investigación sobre una crisis en un contexto, permite involucrarlos en su aprendizaje y llevarlos a tomar postura respecto a la problemática investigada.

- Un proyecto como el que se plantea en este trabajo de grado, cuyo propósito es la enseñanza de un concepto matemático y generar una postura crítica, debe aludir a un soporte didáctico que garantice estos dos objetivos. Justamente en la EMC se encontró para este proyecto el referente teórico que contribuye al proceso de enseñanza del concepto de función y formación

de un ciudadano crítico. Al ser la EMC un enfoque de la didáctica que tiene en cuenta la interdisciplinariedad de la EM involucrando situaciones del contexto local y global del estudiante, y siendo el concepto de función un objeto matemático cuyo desarrollo histórico involucró problemáticas de otras ciencias y del contexto, permite construir una serie de actividades que posibilitan la enseñanza del concepto de función lineal, sin dejar de lado la relación de este objeto matemático con la realidad social del grupo y conservando las características de un proyecto basado en la EMC con el fin de lograr una postura crítica en el estudiante.

- Durante el análisis y reflexión respecto a al proyecto, se evidencia que este trabajo muestra un aspecto innovador a lo planteado por la EMC, dado que tiene como objetivo la enseñanza de *un nuevo concepto* matemático a partir de un escenario de investigación realista que culmine en la generación de una postura crítica, es decir que no abandona las características de un proyecto basado en la EMC (busca mostrar donde el estudiante puede usar los conceptos matemáticos que ya domina) y por el contrario las utiliza para construir un nuevo concepto. De igual forma el análisis permite mostrar las características generales que debería tener un proyecto que en el marco de las EMC busque la enseñanza de un concepto nuevo sin olvidar el propósito de generar una postura crítica.

7. REFERENTES

- Amador, B. (2012). Percepciones sobre pensar críticamente en Colombia. Revista Encuentros, Volumen 10, págs 69 - 79. Universidad Autónoma del Caribe. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/4766/476655850005.pdf>
- Cárdenas, Y. Muñoz, D. (2014). *Educación matemática crítica y análisis didáctico: una propuesta de construcción de saberes matemáticos en contextos de conflicto social en la institución educativa nuevo horizonte de la ciudad de Medellín* (Tesis Magister en Educación Matemática). Universidad de Medellín, Medellín.
- Duran, G. (1996). Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo. Alianza Editorial.
- Frank, F. Budnick. (2007) *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. 3 ed. Universidad de Rhode Island. McGraw-Hill.
- Fraudenthal, H. (1973). *La Matemática como Tarea Educativa*. Dordrecht. D. Reidel.
- Fraudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht. Kluwer
- González, S. (2014). Colombia, el último lugar en los nuevos resultados en las pruebas PISA”, Santa Fe de Bogotá. Periódico El Tiempo 09 de abril.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2017). Informe Nacional de Resultados 2014-2 – 2016-2. Bogotá: ICFES. Recuperado de <http://www.icfes.gov.co/documents/20143/193522/Informe%20nacional%20de%20resultados%20saber%2011%202014%20-%202016.pdf>
- Martinez, E. (2014). *Estudio del Aprendizaje de las Matemáticas Basada en Proyectos. Tensiones Educativas de su Implementación en una Escuela de Estudiantes en Posición de Frontera*. (Tesis Magister en Educación Énfasis Educación Matemática), Universidad

- del Valle, Cali. Recuperado de
<http://funes.uniandes.edu.co/11581/1/Mart%C3%ADnez2014Estudio.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Serie Lineamientos Curriculares: Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). Estándares Básicos de Competencia: Estándares Básicos de Competencias En Matemática. (pp. 46- 95) Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje V. 2: Matemáticas. Bogotá: MEN
- Oliveira, M; Goncalves, R (2014). Aprender a Ser Crítico con las Matemáticas (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Madeira, Brasil. Recuperado de
- Orjuela, J. (2012). Determinantes individuales de desempeño en las Pruebas de Estado para la educación media en Colombia: In ICFES, Estudios sobre la calidad de la educación en Colombia. (pp. 164 - 176) Bogotá: MEN.
- Porras, F. (2011). *El concepto de función en la transición bachillerato universidad*. Universidad del Valle, Cali.
- Ruiz, L. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.
 Recuperado de
http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2013/09/La-noci%C3%B3n-de-funci%C3%B3n.-An%C3%A1lisis-epistemol%C3%B3gico-y-did%C3%A1ctico-TESIS-DOCTORAL-Luisa-Ruiz-Higueras_1aParte.pdf
- Sampieri, R., Fenández, C. y Baptista, M. (2010) Metodología de la Investigación 6 ed. McGraw-Hill.

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá:

Universidad de los Andes. Recuperado de

<http://funes.uniandes.edu.co/673/1/Skovsmose1999Hacia.pdf>

Skovsmose, O. & Valero, P. (2012) Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del

aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Universidad de los Andes. Recuperado de

https://www.researchgate.net/profile/Paola_Valero/publication/281438280_Educacion_matematica_critica_Una_vision_sociopolitica_del_aprendizaje_y_la_ensenanza_de_las_matematicas/links/58e3502992851c1b9d6a10e4/Educacion-matematica-critica-Una-vision-sociopolitica-del-aprendizaje-y-la-ensenanza-de-las-matematicas.pdf

Stewart, J. (2002) Introducción al cálculo 4 ed. Thomson

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la

democracia. Universidad de Aalborg, Dinamarca. Recuperado de

https://www.researchgate.net/profile/Paola_Valero/publication/281438072_Educacion_matematica_y_democracia/links/5513e3c70cf283ee083494ad.pdf

Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Cali. Universidad del

Valle. Recuperado de

http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Vasquez, S. Rey, G. Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista*

Iberoamericana de Educación Matemática, ISSN-e 1815-0640, págs. 141-155.

Vargas, N. (2011) *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con*

fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Zapata, F. Cano, N. (2010). La enseñanza de las matemáticas a través de la implementación del juego del rol y de aventura. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, ISSN-e 1815-0640, N°. 23, págs. 211-233. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/23/Union_023_021.pdf.