



**LA POTENCIACIÓN: ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS SOBRE SU ENSEÑANZA,
TENIENDO EN CUENTA LA IDENTIFICACIÓN DE DIFICULTADES Y ERRORES EN SU
APRENDIZAJE**

DAYANA LIZETH ANGULO TENORIO

Código 201222020

ROSA LIZETH QUINTERO ANGULO

Código 201228838

Universidad del valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali

2017



La potenciación: algunas reflexiones didácticas sobre su enseñanza, teniendo en cuenta la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje

DAYANA LIZETH ANGULO TENORIO

Código: 201222020

ROSA LIZETH QUINTERO ANGULO

Código: 201228838

Requisito parcial para optar el título de licenciadas en Educación Básica con Énfasis en
Educación Matemática

Asesora

MG LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

Profesora del Área de Educación Matemática

Instituto de Educación y Pedagogía

Universidad del valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali

2017

Agradecimientos

Primeramente le dares gracias a DIOS, por darme la oportunidad de contar con buena salud para cumplir con mis obligaciones académicas y poder terminar exitosamente esta etapa de mi vida.

A mis padres Amanda y Guilber por su amor y apoyo incondicional que me brindan en cada momento de mi vida.

A mi hermana Zoila por los buenos consejos y apoyo que me brinda para que pueda lograr cumplir mis metas.

A mi novio Jesús David por su compañía y confianza durante todo este proceso.

A toda mi familia, por su amor incondicional, su apoyo y motivación constantemente.

A mi compañera Dayana, por su amistad sincera, paciencia y comprensión a lo largo de toda esta experiencia académica.

A nuestra tutora Ligia Amparo Torres, por creer en nosotras y ser parte de este trabajo aportándonos sus conocimientos, pero sobre todo por su paciencia y dedicación.

Rosa Lizeth Quintero Angulo

Agradecimientos

Para lograr esta hermosa meta en mi vida, fue indispensable la ayuda, apoyo y comprensión de muchas personas que me alentaron a seguir en este camino, y a las cuales quiero expresar un profundo agradecimiento.

En primer lugar a Dios, porque su compañía en todo momento me ayudo a superar diversos obstáculos, por brindarme la paciencia y perseverancia suficiente para continuar con este proceso de formación.

A mi madre, Elsy Angulo, por ser un ejemplo de trabajo y superación, enseñándome a luchar por mis ideales.

A nuestra tutora Ligia Amparo Torres, por su paciencia, dedicación y orientación para sacar este trabajo adelante y por sus consejos para nuestra vida.

A mi madrina Rosa Peña, su hermana Damaris Peña y mi amiga Judith Angulo, por su lealtad y confiar en mí en todo momento, por sus consejos, orientaciones, motivarme y apoyarme de manera incondicional.

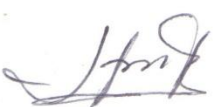
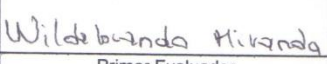
A mi novio, Luis Velasco por la paciencia, comprensión y apoyo en todo momento.

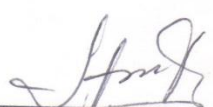
A mi amiga y compañera de trabajo de grado Rosa Quintero por su comprensión, lealtad, paciencia en todo momento.

Algunos familiares por su amor, apoyo y motivación constante e incondicional.

Y por último, a todas las personas entre ellos profesores, compañeros y evaluadores, que de una manera u otra estuvieron a nuestro lado en diferentes momentos de esta etapa, dándonos apoyo, amor y muchas enseñanzas.

Dayana Lizeth Angulo Tenorio

	INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Subdirección Académica		ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO		
	Programa Académico <u>Licenciatura en Educación básica con énfasis en matemáticas</u>		Fecha		
Código del programa: <u>3469</u>		Resolución del programa: <u>046 de 2002</u>		Día <u>31</u>	Mes <u>04</u>
				Año <u>2017</u>	
Título del Trabajo o Proyecto de Grado <u>La Potenciación: Algunas Reflexiones didácticas sobre su enseñanza a partir de las dificultades y errores en su aprendizaje.</u>					
Se trata de:					
Proyecto ☐		Informe Final ☒			
Director <u>Ligia Amparo Torres Rengifo</u>					
Nombre del Primer Evaluador <u>Wilderbrando Miranda</u>					
Nombre del Segundo Evaluador <u>Fabian Porras</u>					
Estudiantes					
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto	
<u>Dayana Angulo</u>	<u>1222020</u>	<u>3469</u>	<u>dayana.angulo@correounivalle.edu.co</u>	<u>317 796 04 16</u>	
<u>Rosa Cuintero</u>	<u>1228938</u>	<u>3469</u>	<u>rosa.cuintero@correounivalle.edu.co</u>	<u>317 527 36 46</u>	
Evaluación					
Aprobado ☒		Meritorio ☒		Laureado ☐	
Aprobado con recomendaciones ☐		No Aprobado ☐		Incompleto ☐	
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐		Primer Evaluador ☐		Segundo Evaluador ☐	
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ de _____ de _____.					
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					
Firmas					
					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador	

Recomendaciones ☐	Observaciones ☒	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐
Si se considera necesario, usar hojas adicionales.		
1. El documento presenta una clara demarcación teórica y conceptual del problema de investigación, al lector le queda suficientemente claro el problema, la manera en que se aborda y lo que se espera, el sustento teórico y la prueba diagnóstica tienen un muy buen nivel de elaboración.		
2. El trabajo de grado da cuenta de una bibliografía pertinente. se percibe a través de la lectura del marco teórico la solvencia en los autores en el análisis de investigaciones y documentos actualizados sobre la temática trabajada, en general el documento está muy bien escrito.		
3. Se sugiere adicionar una reflexión sobre una de las causas de alguna de las dificultades que reporta el trabajo. Esto no influye la evaluación positiva del trabajo.		
4. Se recomienda que el trabajo tenga una calificación meritoria porque:		
- Presenta una coherencia explícita entre la problemática, objetivos, metodología, resultados, conclusiones y reflexiones.		
- No cabe duda respecto del aporte positivo que representa para la enseñanza y aprendizaje de la potenciación, es agradable la manera en que está escrito.		
- Es evidente la capacidad de interpretación y análisis en la producción y la teoría.		
Firmas		
	Wildebrando Miranda	
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador



VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en .red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la *Licencia Creative Commons* con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autía incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbalala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Potenciación: Algunas reflexiones didácticas sobre su enseñanza, teniendo en cuenta la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje.

Autores:

Nombre: Rosa Lizeth Quintero Angulo

Firma: Rosa L. Quintero
C.C. 1143841486

Nombre: Dayana Lizeth Angulo Tenorio

Firma: Dayana Angulo
C.C. 1143939121

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Fecha: _____

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

TABLA DE CONTENIDO

Resumen.....	13
Introducción	14
Capítulo I: generalidades del trabajo	16
1.1. Contextualización de la problemática	16
1.2. Objetivos.....	21
1.2.1. Objetivo general.....	21
1.2.2. Objetivos específicos	21
1.3. Justificación	22
1.4. Antecedentes	24
1.5 Marco contextual	28
Capítulo II: marco teórico de referencia	30
2.1. Perspectiva curricular.....	30
2.2 Perspectiva didáctica.....	38
2.2.1 Sobre las dificultades, errores y obstáculos.	38
2.2.2. Errores y dificultades en la potenciación	40
2.2.3 La prueba diagnostica	50
2.3. Perspectiva matemática.....	51
2.3.1. La potenciación en la historia	52
2.3.2. La potenciación y sus Propiedades	53
Capitulo III: la potenciación en grado noveno.....	60
3.1. Sobre el diseño de la prueba diagnóstica	60
3.1.1. La prueba	65
3.1.2 análisis preliminar	71
3.1.3. Metodología de la implementación.....	73
3.1.4. Población.....	73
3.2. Resultados y análisis de resultados	74
3.3. Algunas conclusiones iniciales sobre los resultados de la prueba.	126
Capitulo IV: conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas	127
4.1. Conclusiones generales	127
4.2. Algunas reflexiones didácticas.....	131
Referencias bibliográficas.....	135

Índice de tablas

Tabla 1. Relación de las dificultades con los contenidos matemáticos y desempeños en la prueba diagnostica	62
Tabla 2. Análisis preliminar, Prueba.....	71
Tabla 3. Tipos de respuesta Pregunta 1, Prueba parte A.....	75
Tabla 4. Tipos de respuesta Pregunta 2, Prueba parte A.....	77
Tabla 5. Tipos de respuesta Pregunta 3, Prueba parte A.....	81
Tabla 6. Tipos de respuesta Pregunta 4, Prueba parte A.....	85
Tabla 7. Tipos de respuesta Pregunta 5, Prueba parte A.....	90
<i>Tabla 8. Tipos de respuesta Pregunta 6, Prueba parte A.....</i>	<i>93</i>
Tabla 9. Tipos de respuesta Pregunta 7, Prueba parte A.....	96
Tabla 10. Tipos de respuesta Pregunta 8, Prueba parte A.....	98
Tabla 11. Tipos de respuesta Pregunta 9, Prueba parte B.....	101
Tabla 12. Tipos de respuesta Pregunta 10, Prueba parte B.....	104
Tabla 13. Tipos de respuesta Pregunta 11, Prueba parte B.....	107
Tabla 14. Tipos de respuesta Pregunta 12, Prueba parte B.....	111
Tabla 15. Tipos de respuesta Pregunta 13, Prueba parte B.....	114
Tabla 16. Tipos de respuesta Pregunta 14, Prueba parte B.....	117
Tabla 17. Tipos de respuesta Pregunta 15, Prueba parte B.....	122
Tabla 18. Tipos de respuesta Pregunta 16, Prueba parte B.....	124

Índice de figuras

Figura 1 Error al graficar la función $y = x$	27
Figura 2. Coherencia vertical y horizontal del concepto de potenciación	36
Figura 3 representación geométrica del crecimiento exponencial	47
Figura 4. Símbolos egipcios para las potencias en base 10	52
Figura 5. Ejemplo de respuesta, pregunta 1	76
Figura 6 Ejemplo de respuesta, pregunta 1	76
Figura 7 Ejemplo de respuesta, pregunta 2	78
Figura 8. Ejemplo de respuesta, pregunta 2	79
Figura 9 . Ejemplo de respuesta, pregunta 2	79
Figura 10. Ejemplo de respuesta, pregunta 3	82
Figura 11. Ejemplo de respuesta, pregunta 3	83
Figura 12. Ejemplo de respuesta, pregunta 3	84
Figura 13. Ejemplo de respuesta, pregunta 4	86
Figura 14. Ejemplo de respuesta, pregunta 4	87
Figura 15. Ejemplo de respuesta, pregunta 4	87
Figura 16. Ejemplo de respuesta, pregunta 4	88
Figura 17. Ejemplo de respuesta, pregunta 5	91
Figura 18. Ejemplo de respuesta, pregunta 6	95
Figura 19. Ejemplo de respuesta, pregunta 6	95
Figura 20. Ejemplo de respuesta, pregunta 8	99
Figura 21. Ejemplo de respuesta, pregunta 9	102
Figura 22. Ejemplo de respuesta, pregunta 10	105
Figura 23. Ejemplo de respuesta, pregunta 10	105
Figura 24. . Ejemplo de respuesta, pregunta 10	106
Figura 25 Ejemplo de respuesta, pregunta 11	108
Figura 26 Ejemplo de respuesta, pregunta 11	108
Figura 27. Ejemplo de respuesta, pregunta 11	109
Figura 28. Ejemplo de respuesta, pregunta 11	113
Figura 29. Ejemplo de respuesta, pregunta 13	115

Figura 30. Ejemplo de respuesta, pregunta 13.....	116
Figura 31. Ejemplo de respuesta, pregunta 14.....	120
Figura 32. Ejemplo de respuesta, pregunta 14.....	120
Figura 33. Ejemplo de respuesta, pregunta 14.....	121
Figura 34. Ejemplo de respuesta, pregunta 15.....	125

Resumen

En este trabajo se diseñó e implementó una prueba diagnóstica, que articula aspectos Curriculares, Didácticos y Matemáticos en relación a las dificultades que surgen, en la enseñanza y aprendizaje del concepto de potenciación, para esto se tuvo en cuenta algunos referentes teóricos de autores como Socas (2000), Martínez (2010) y Martínez y Penalva (2006) entre otros. La prueba diagnóstica fue diseñada e implementada para estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica Industrial Rafael Navia Varón de Santiago de Cali, posteriormente se analizaron los resultados obtenidos, donde se reflejó que los estudiantes presentan algunas dificultades que se manifiestan en la inadecuada apropiación del concepto, puesto que en su gran mayoría resuelven esta operación como una multiplicación entre la base y el exponente, también se identificó que gran parte de los estudiantes, pocas veces utilizan las propiedades de la potenciación para resolver ejercicios de forma simplificada o cometen errores en el proceso de solución de las potencias, igualmente se evidenció que presentan dificultades al resolver potencias cuando el exponente es cero, negativo o racional, pues en este tipo de ejercicios los estudiantes optaron por utilizar algoritmos incorrectos basados en conocimientos anteriores. Por ende, en este trabajo se exponen algunas reflexiones didácticas orientadas a los docentes en formación y en ejercicio para la enseñanza y aprendizaje de la potenciación.

Palabras claves: Prueba diagnóstica, Potenciación de números reales, dificultades, errores, Reflexiones didácticas, Educación Secundaria.

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la línea de Didáctica de la Matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y surge con el interés de proporcionar algunas reflexiones didácticas, relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la potenciación. Para lograr este fin, se documenta la problemática a partir de la perspectiva Curricular, Didáctica y Matemática. En dicha documentación se encontraron dificultades que comúnmente se presentan en los estudiantes en relación al concepto de potenciación, tales como: la limitación de la definición de potenciación como una multiplicación reiterada, el inadecuado desarrollo de las potencias cuando el exponente es cero, negativo o fraccionario, no reconocer las condiciones en las cuales la potenciación y la radicación son operaciones inversas, la inadecuada aplicación de algunas propiedades, entre otros. Para identificar dichas dificultades se diseñó una prueba diagnóstica, a partir de la articulación de las perspectivas descritas en el marco teórico, para ser aplicada a estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica Industrial Rafael Navia Varón.

Este trabajo se presenta a través de cuatro capítulos, en el capítulo I, se aborda la presentación de la problemática, que surge del análisis de los resultados de las investigaciones alrededor del concepto de potenciación expuestas por Pochulu (2005), Martínez y Penalva (2006), Martínez (2013) y desde la experiencia personal y académica de las autoras de este trabajo. Además se exponen los objetivos, la justificación y los antecedentes.

En el capítulo II, se explica el marco teórico de referencia, el cual se establece a través de tres perspectivas, la Curricular en la que se presentan la forma como los documentos oficiales fundamentan la educación Matemática y el concepto de potenciación en la escuela, la Didáctica, donde se caracterizan las dificultades que se han encontrado en las investigaciones alrededor del

concepto de potenciación, finalmente la Matemática donde se exponen algunos aspectos históricos y teóricos de dicho concepto.

En el capítulo III, se presenta cómo fue el diseño de la prueba diagnóstica, esta contiene dieciséis preguntas, donde se evalúa el concepto de potenciación en diferentes situaciones, la aplicación de sus propiedades, la relación entre la potenciación y la radicación, entre otros; en este capítulo se describe la metodología de aplicación, igualmente se realiza una descripción de la población que participó en la prueba. Por último se organizan los resultados obtenidos para analizar las respuestas dadas por los estudiantes.

En el capítulo IV, se señalan algunas conclusiones generales en relación a los objetivos planteados en el presente trabajo y algunas reflexiones didácticas que surgen a partir de la problemática, las investigaciones, la implementación y el análisis de los resultados de la prueba, que puedan servir a los docentes en ejercicio y en formación para la enseñanza del concepto de potenciación.

Para finalizar se presenta las referencias bibliográficas que han servido para fundamentar teóricamente este trabajo.

Capítulo I: generalidades del trabajo

En este capítulo se aborda una problemática acerca de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la potenciación en la Educación Básica, para ello fue necesario recurrir a diversos reportes en relación a dicha problemática. También se encuentran los objetivos de la investigación, que dan una visión general del trabajo, además se presenta la justificación de la problemática que pretende dar cuenta de la importancia de este trabajo en la Educación Matemática y finalmente, se presentan los antecedentes para determinar los aspectos generales para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Contextualización de la problemática

Durante la Educación Básica y Media es importante favorecer el desarrollo de los conocimientos matemáticos en los estudiantes, para que, a partir de estos, logren interpretar información necesaria para la toma de decisiones, es decir, que puedan desempeñarse social, cultural y políticamente en forma activa y crítica, análogamente el conocimiento matemático permite potenciar pensamiento matemático, facilitando actividades como la resolución de problemas en distintas situaciones, puesto que los conceptos que se trabajan en este campo van a estar presentes en los contextos cotidianos. En esta dirección es vital rescatar que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (1998) se manifiesta la importancia de desarrollar pensamiento numérico como una expresión del pensamiento matemático y cómo éste constituye la forma en la que el estudiante logra comprender las distintas representaciones del número y las operaciones, así como su utilidad en distintos contextos; por esta razón los Lineamientos afirman que:

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de

usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.26).

Aunque los Lineamientos reconocen la utilidad que tiene el desarrollo del pensamiento numérico en la escuela para la comprensión de los números y las operaciones, en el aprendizaje de las Matemáticas surgen diversas dificultades vinculadas con la adquisición y comprensión de los objetos matemáticos, el uso de propiedades, el desarrollo de actividades entre otros aspectos.

Lo anterior conlleva a pensar en aquellas dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas que en la práctica se convierten en errores y obstáculos, delimitando la comprensión de los objetos matemáticos; uno de los conceptos que genera este tipo de situaciones en los estudiantes desde la Educación Básica primaria es la construcción del concepto de la potenciación, respecto del cual, autores como Martínez (2010), Martínez y Penalva (2006), Pochulu (2005), reportan en sus investigaciones una amplia gama de dichas dificultades.

Una de estas pesquisas la expone Pochulu (2005), quien analiza y categoriza los errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la universidad, en los que sobresalen la inadecuada aplicación de la “regla” de los signos en la multiplicación con los números enteros, el desconcierto en la jerarquía de las operaciones, la inadecuada interpretación y aplicación de las propiedades en la potenciación, entre otros; el autor reconoce que estos errores no se deben específicamente al tema que se está desarrollando, sino a carencias de conocimientos previos trasladados a los nuevos contenidos que se abordarán.

Pochulu (2005) asegura que cuando se presenta una inadecuada aplicación de las propiedades como en este caso $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ es necesario analizar este tipo de errores y plantearse

algunos interrogantes tales como: ¿Qué regla alternativa están aplicando los estudiantes? o ¿Qué condiciones se deben tener en cuenta? , con el fin de llegar a unas reflexiones considerando la importancia del proceso de construcción de los conceptos matemáticos, la comprensión de su naturaleza y los métodos propios de la Matemática.

Otra de las investigaciones centran su interés en la construcción del concepto de potenciación desde las múltiples dificultades que genera su definición y estudio, por ejemplo: cuando el exponente es cero, negativo o racional, además de las numerosas aplicaciones que posee en relación con otros conceptos matemáticos como en los polinomios, las funciones, notación científica, etc. Por lo tanto Martínez y Penalva (2006), en su investigación tiene como objetivo el estudio del desarrollo simbólico del concepto de potencia en los textos de educación secundaria, esto para identificar cómo condiciona la propuesta conceptual y procedimental que plantean los libros de textos a dicho concepto, debido a la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos que están vinculados con procesos cognitivos necesarios para la abstracción, simbolización, búsqueda de relaciones entre conceptos y generalizaciones, que además son ejemplos de actividades cognitivas que deben realizar los estudiantes en la educación secundaria, donde intervienen los procesos de simbolización.

Martínez y Penalva (2006) categorizan y analizan veinte libros de texto, de acuerdo a la relación entre los dominios de la actividad Matemática y los distintos estadios de desarrollo de los sistemas de representación (estructural, semiótico y autónomo, expuestos por Socas), donde se evidenció que la gran mayoría de los libros de textos reducen el concepto de potenciación como una representación abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales. Además se abstienen de presentar la estrecha relación de la potenciación con la radicación como operaciones inversas bajo algunas condiciones. Una de las razones que alude a este tipo de

dificultades se debe a que los textos escolares adoptan en su mayoría estrategias de razonamiento intuitivo, dado que este tipo de argumentos da confianza a los estudiantes en el uso de determinados algoritmos, sin embargo esto puede convertirse en un obstáculo, puesto que rompe la dualidad entre significados y procesos asociados al concepto e inducen a cometer errores, generando en los estudiantes confusiones que son difíciles de erradicar o falsas creencias relacionadas con este objeto matemático.

No obstante se espera que en la Educación Media no estén presentes la mayoría de las dificultades mencionadas anteriormente, dado que por ejemplo, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemática de Colombia (MEN, 2006) proponen que los alumnos en ese momento deben identificar la potenciación y sus propiedades. Sin embargo, Martínez (2010) afirma que estas dificultades siguen vigentes cuando los estudiantes ingresan a la universidad, debido a que en el largo proceso de construcción de nuevos conocimientos, los errores aparecen de manera constante. Por ello Martínez sugiere que es importante detectarlos y corregirlos, para que los conceptos y las ideas alrededor del tema puedan ser claros y significativos. Al respecto afirma que:

Muchos estudiantes comienzan el aprendizaje del concepto de la potenciación con deficiencias en conceptos anteriores, en la comprensión del lenguaje matemático y de sus símbolos de representación. Lo anterior provoca obstáculos en la construcción de nuevos conceptos, que a corto plazo harán que el estudiante cometa errores. (Martínez, 2010, p.64).

Teniendo en cuenta lo anterior se hace necesario que los estudiantes construyan unas bases sólidas para que puedan identificar la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.

De otra parte, teniendo en cuenta la experiencia de las autoras como estudiantes y docentes en formación, se han identificado algunos errores en el momento de trabajar con la potenciación, tales como la generalización de propiedades de la suma aplicada a la potenciación, como es el caso de la conmutatividad entre la base y el exponente, debido a que en muchas ocasiones cuando se aplican las propiedades, no se cuestionan sobre lo que se están trabajando, o no cuentan con una actitud crítica frente a cualquier objeto matemático, por lo cual es ventajoso utilizar algunas estrategias donde el estudiante tenga la habilidad de razonar Matemáticamente desde situaciones cotidianas que le permitan vislumbrar el uso de dicho concepto en la resolución de problemas y no se limiten a seguir solo una condiciones.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, en este trabajo se propone dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de dificultades y errores presentan los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica Industrial Rafael Navia Varón, sobre la potenciación de números reales a través de la aplicación de una prueba diagnóstica y qué reflexiones didácticas surgen a partir del análisis de los resultados?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Identificar algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica Industrial Rafael Navia Varón de la Educación Básica sobre el concepto de potenciación a partir de la aplicación de una prueba diagnóstica, que permita aportar algunas reflexiones didácticas sobre su enseñanza y aprendizaje

1.2.2. Objetivos específicos

1. Documentar la problemática relativa sobre la potenciación en los en los números reales, desde las perspectivas Didáctica, Matemática y Curricular como marco de referencia para el diseño de una prueba diagnóstica.
2. Identificar y caracterizar algunas dificultades y errores que presentan estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica Industrial Rafael Navia Varón con relación al concepto de potenciación a través del análisis de los resultados de la una prueba diagnóstica.
3. Aportar algunas reflexiones didácticas para la enseñanza y aprendizaje del concepto de potenciación a maestros en formación y en ejercicio a partir del análisis de los resultados de la prueba.

1.3. Justificación

La potenciación es un concepto transversal y esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, puesto que está inmerso en los distintos niveles de la escolaridad y campos de las Matemáticas por ejemplo en Aritmética (notación científica, radicación y logaritmicación), en el Álgebra (polinomios, racionalización, factorización), en el Cálculo (funciones exponenciales) y en disciplinas distintas a la Matemáticas como en Física, Química y Biología. Por tal motivo este concepto se convierte en el centro de indagación de esta propuesta de trabajo de grado, que gira en torno a las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de potenciación, mediante el análisis de algunas investigaciones sobre esta problemática.

En este sentido este trabajo aborda un concepto fundamental en la formación de los sujetos puesto que su adecuada enseñanza y aprendizaje permite desarrollar pensamiento numérico, el cual brinda mecanismos que ayudan a elaborar procesos relevantes que se proponen en los Lineamientos Curriculares (MEN 1998) tales como: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Así mismo es de rescatar que uno de los aspectos fundamentales del pensamiento matemático está asociado a las operaciones y a las representaciones de estas, por tanto necesario que los estudiantes se apropien del concepto de potenciación durante su escolaridad, ya que este, es importante al momento de trabajar con otros conceptos en diferentes grados e incluso en la universidad.

De forma particular, investigaciones como las de Orobio (1997) afirman que el tratamiento del error en la escuela es de gran importancia porque están ligados a los procesos de aprendizaje, por tanto hay que brindarles gran atención pedagógica y utilizarlos como herramientas que permitan la construcción de soluciones didácticas y lograr que los estudiantes superen obstáculos

y en lo posible evitar que estos se presenten. Por consiguiente en este trabajo se refleja como el analizar los errores que cometen los estudiantes, permite construir orientaciones pedagógicas para que las dificultades y errores disminuyan.

Este trabajo es importante porque a partir de la implementación de una prueba diagnóstica que moviliza y analiza de manera funcional y significativa el concepto de potenciación, se identificaron y caracterizaron algunas dificultades y errores relacionados con el aprendizaje de la potenciación, en estudiantes de grado noveno de la Educación Básica, posteriormente a través del análisis de los resultados, se aportan algunas reflexiones didácticas que se conviertan en estrategias en los procesos didácticos para que docentes en formación y en ejercicio les den uso con el fin de superar dichas dificultades.

Por lo anterior, se espera que este trabajo aporte a las conclusiones y reflexiones que investigaciones como las de Martínez (2010), Martínez y Penalva (2006) y Pochulu (2005) y otros, han realizado sobre esta problemática, puesto que se puede resaltar algunos aspectos importantes que ellos han expuesto en relación a las dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje de la construcción del concepto de potenciación.

Por último, este tipo de trabajo se convierte en un ejercicio de práctica de investigación en la formación como docentes, para llevarlo a cabo fue necesario dar solución a un interrogante centrado en la Educación Básica en relación a la enseñanza y aprendizaje del concepto de potenciación, a través de la integración de los conocimientos y practicas adquiridas durante la experiencia académica. Puntualmente este trabajo parte del diseño de un mecanismo de evaluación en relación al concepto de potenciación, para generar orientaciones que puedan ser útiles en otras personas.

1.4. Antecedentes

En esta sección se presentan algunos trabajos realizados en el campo de la Educación Matemática que permiten contextualizar la problemática en la enseñanza y aprendizaje de la potenciación desde tres entornos socioculturales: el local, nacional e internacional.

Dentro de las investigaciones locales se encuentra la de Orobio (1997) quien en su trabajo final de práctica docente realiza una propuesta pedagógica para la enseñanza de la teoría de números, potenciación y relación de orden en los naturales, tomando como elemento básico el error. En este trabajo se clasifican y analizan los errores más comunes que tienen los estudiantes cuando realizan ejercicios concernientes con la construcción del concepto de potenciación, las propiedades que se cumplen y su aplicación; esto lo hace a través de un cuestionario donde se resaltan los objetivos que debe cumplir el estudiante, así como una serie de preguntas que están relacionadas secuencialmente.

Con los resultados obtenidos, el autor concluye que es importante que los estudiantes logren un manejo adecuado de las propiedades de la potenciación a través de elementos simbólicos que permitan una mejor abstracción, además sugiere a los docentes verificar en las actividades que plantean a los estudiantes que las preguntas no tiendan a confundirlos, ya que esto por general hace que se presenten errores por las diversas interpretaciones.

Orobio (1997), afirma que el error está ligado a los procesos de aprendizaje por tanto hay que brindar atención pedagógica especial y utilizarlos como una herramienta que permita evitar obstáculos presentes en la formación Matemática.

Por otra parte, dentro de las propuestas nacionales se resalta, la investigación de Cadenas (2007), quien durante el segundo semestre de 1999 hasta el primer semestres de 2002 (cinco semestres), aplicó una prueba diagnóstica con el fin de identificar la carencia, dificultades y

errores en los conocimientos matemáticos, en alumnos de la escuela de educación en los programas de Matemáticas y ciencias de la universidad de los Andes.

En el análisis cuantitativo que realiza Cadenas (2007), se reconoce que los estudiantes presentan dificultades vinculadas a la potenciación, la radicación y los productos notables, al desconocer el significado correcto de estas operaciones, un ejemplo de ello es la forma en la que los estudiantes al hallar el valor de la expresión $x \cdot \sqrt[2]{x + x^2}$ no tienen en cuenta propiedades de las potencias, la relación de la potenciación con la radicación y escasez en los conocimientos previos y en producción de estrategias, produciendo errores como $\sqrt[2]{x^2 + x^3}$ que impide el desarrollo eficiente en la resolución de problemas matemáticos en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, por esa razón recomienda a los docentes usar el error como elemento digno de análisis y recurso manipulable en las aulas de clase para dar claridad a diversos conceptos aritméticos y algebraicos que impiden el éxito en el desarrollo de actividades relacionadas con el concepto de radicación y potenciación.

A nivel nacional también se rescata la investigación de Martínez (2010) quien a través del diseño y aplicación de un test diagnóstico y entrevistas a estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Las Américas de la ciudad de Bucaramanga, logra identificar y caracterizar algunos errores que cometen los estudiantes en la aplicación de las propiedades de la potenciación, para analizar los resultados toma en consideración la clasificación de errores propuesta por Radatz donde se categoriza los errores de tipo aritmético, por ignorancia de algoritmos, por el dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (Pre-saberes) y finalmente errores debido a asociaciones incorrectas.

Martínez en su investigación concluye, que algunos estudiantes relacionan la Matemática, con el aprendizaje memorístico de reglas y formulas, lo que hace que abandonen aquellos

procedimientos que permiten justificar cada una de las propiedades, y por ende no comprendan los algoritmos en el desarrollo de diversos ejercicios. Particularmente para desarrollar la expresión -3^2 la mayoría de los estudiantes cometieron diversos errores, por ejemplo afirmar que la expresión no existe, este tipo de respuesta Martínez la clasifica en aquellos que se producen por la ignorancia de los algoritmos. Otros estudiantes realizan el siguiente procedimiento $-3^2 = 3 \times 3 = 9$ esto se debe al manejo insuficiente de los símbolos y finalmente aquellos estudiantes que comenten este tipo de errores $-3^2 = (-3) \times (-3) = (-6)$ lo clasifica como un error de tipo aritmético.

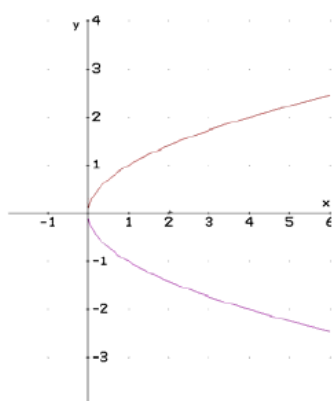
Adicionalmente a este trabajo le anteceden investigaciones de nivel internacional, entre ellas se encuentra la de Colín (2005), Cuyo problema de investigación surge del interés en conocer las concepciones que tienen los estudiantes en relación a la operación raíz cuadrada, Colín (2005) para un estudio detallado, aborda este concepto desde un estudio transversal de la Aritmética, posteriormente del Álgebra y por último del Cálculo, realizando un análisis de tres perspectivas las cuales él considera elementos fundamentales en la construcción del conocimiento, estas son, la Epistemológica, la Didáctica y la Cognitiva, en la primera de ellas busca determinar la naturaleza, los significados y la funcionalidad de dicho concepto desde lo histórico epistemológico, en cuanto al análisis didáctico logró identificar cómo se suele definir comúnmente este concepto en los libros de textos y finalmente desde el análisis cognitivo se evidenció cuáles son las concepciones que los estudiantes tienen sobre la raíz cuadrada, esto en relación a un cuestionario aplicado a un grupo de estudiantes de secundaria y de nivel universitario en México.

Con base a estos análisis se encontró que los estudiantes generalizan en la potenciación y la radicación la propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la división, multiplicación, suma

y resta, produciendo errores como el siguiente: si $(-a)^2 = a^2 \rightarrow \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} \rightarrow a = -a$ llegando a una contradicción.

Además grafican de manera incorrecta la función $y = \sqrt{x}$ debido a la concepción de que la potenciación y la radicación son operaciones inversas para cualquier conjunto de números y por consiguiente tiene en cuenta dos valores.

Figura 1 Error al graficar la función $y = \sqrt{x}$



Fuente: adaptación de los autores con base en Colín (2005)

La grafica anterior alude a diversos errores que cometieron los estudiantes al pedirles que expresaran una variable en función de la otra a partir de la ecuación $x - y^2 = 0$, donde se logró evidenciar que debido a conocimientos previos en aritmética llegaron a este resultado $x = y^2$ donde $y = \sqrt{x}$, aunque es correcto, es necesario cuestionarse sobre en qué situaciones en el Álgebra y el Cálculo estas operaciones son inversas, es decir, qué condiciones debe cumplir x y y con el fin de no presentar dificultades como las que se reflejan en el registro grafico expuesto, principalmente porque no representa ninguna función y no comprender que y es quien toma dos valores y no x .

Es por esto pertinente abordar esta problemática, a partir del uso de una prueba que permita la identificación y caracterización de las dificultades y errores presentes en el aprendizaje de la potenciación y en este sentido aportar elementos que favorezcan en el estudiante la construcción de este concepto.

Todos los trabajos expuestos anteriormente están centrados en la problemática relacionada a la enseñanza y aprendizaje de la potenciación, los autores para dar respuestas a sus cuestiones utilizan mecanismos de evaluación para identificar las causas de las dificultades que tienen los estudiantes cuando se enfrentan con este objeto matemático. Por tal razón estas investigaciones son pertinentes para el desarrollo de esta propuesta de trabajo, en la medida que fue necesario realizar una prueba diagnóstica donde se identificaron y caracterizaron algunas dificultades y errores que presentan estudiantes de grado noveno de la Educación Básica, en relación al concepto que es objeto de estudio en este trabajo, para finalmente aportar algunas orientaciones didácticas que sirvan de apoyo para su aprendizaje.

1.5 Marco contextual

La implementación de la prueba diagnóstica se llevó a cabo en el año 2016, en la Institución Educativa Técnica Industrial Rafael Navia Varón, se desarrolló en dos secciones con una duración aproximada de dos horas cada una. Se evaluó a treinta cinco estudiantes de grado noveno de la Educación Básica Secundaria.

Esta Institución es de carácter oficial y mixta, cuenta con la sede Francisco Montes Idrobo, la sede Panamericana y la sede Rafael Navia Varón, que fue donde se implementó la prueba, se encuentra ubicada en la calle 11 No. 46-45 del Barrio Departamental en la Comuna 10 en la ciudad de Santiago de Cali, en este lugar se ofrece el bachillerato técnico industrial sexto a undécimo grado, en dos jornadas. Hay que mencionar que la misión de la institución está

orientada a satisfacer las necesidades y expectativas de los estudiantes, garantizando una formación integral, basada en el desarrollo de competencias en el saber a través de sus modalidades especiales (Diseño y Medios Visuales, Electricidad y Electrónica, Mecánica Automotriz y Sistema), por otra parte la institución se proyecta para ofrecer un servicio educativo incluyente y de calidad, aportando a la comunidad personas competentes personal, social y laboralmente.

El modelo pedagógico en esta institución está fundamentado en el desarrollo integral que se caracteriza por ser humanista, democrático, científico, dialógico de actitud productiva y de búsqueda de la identidad individual, local y universal del hombre.

Los estudiantes que participaron en el desarrollo de la prueba, fueron escogidos al azar de los tres grupos de grado noveno con los que cuenta la institución, ellos quedaron distribuidos de la siguiente manera: ocho pertenecen al grado 9-1, catorce al grado 9-2 y trece a 9-3.

Capítulo II: marco teórico de referencia

En este apartado se exponen los elementos teóricos que se toman como referentes conceptuales, organizados desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática. En la perspectiva curricular, teniendo como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), se determina cuál es su postura con relación al pensamiento numérico y a la operaciones, específicamente en la potenciación. En la perspectiva didáctica desde la investigación realizadas por Socas (2000) se conceptualiza la idea de dificultad, error y obstáculo, además se caracterizan las dificultades en relación a la enseñanza y aprendizaje del concepto de potenciación, encontradas en los reportes de Colín (2005), Martínez (2010), Martínez y Penalva (2006), entre otros; en el tercer referente, se caracteriza la perspectiva de orden Matemático, en la cual se exponen los conceptos y procedimientos importantes a la hora de introducir el concepto de potenciación en la escuela; esto se hace a través de un pequeño recorrido histórico, también se describen las propiedades de la potenciación y la relación de dicho concepto con otras operaciones como la radicación, la logaritmación y la función exponencial.

Tales perspectivas aportan elementos para la construcción de una prueba diagnóstica que sustenta el desarrollo de éste trabajo sobre las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje y enseñanza de la potenciación en grado noveno.

2.1. Perspectiva curricular

En los documentos oficiales tales como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, publicados por el Ministerio de Educación Nacional (1998) y (2006) respectivamente, se orienta los aspectos curriculares de las Instituciones Educativas en Colombia, donde se tiene en consideración las cuestiones

relacionadas con el qué enseñar y qué aprender en la escuela, además de propuestas curriculares de organización de estos saberes, que son de gran relevancia. Es decir, enfatizan en algunas orientaciones y criterios para la creación de currículo a nivel nacional, por lo que cada Institución Educativa tiene como deber desplegar su creatividad, así como ejercer autonomía en la formación de sus currículos para que de esta forma se pueda establecer un compromiso con lo que se hace y se vive en las aulas de clase, por tal razón se hace énfasis en tres ejes fundamentales que son necesarios para la formación matemática en el aula.

Un primer eje de esta organización curricular tiene que ver con *los conocimientos básicos* que hacen referencia a los procesos que desarrolla el conocimiento matemático en conjunto con los sistemas propios de las matemáticas, a su vez estos procesos están relacionados con el Pensamiento numérico y sistemas numéricos, Pensamiento espacial y sistemas geométricos, Pensamientos métrico y sistema de medida, Pensamiento aleatorio y sistema de datos, Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

En esta dirección el presente trabajo está relacionado con el desarrollo del pensamiento numérico y sistemas numéricos en ambientes escolares, ya que aborda el concepto de potenciación como operación y los diferentes conceptos que surgen alrededor de este. Para ello se considera que el pensamiento numérico, hace relación al sentido numérico y operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, entre otros, de esta forma es necesario considerar que dicho pensamiento se va adquiriendo gradualmente y se va desarrollando a medida que los estudiantes piensen en los números y los usen en diferentes contextos significativos, comprenden el concepto de las operaciones, puedan realizar cálculos con los números y aplicaciones de números y operaciones.

Además los Lineamientos y Estándares direccionan que el desarrollo de los pensamientos es tan necesario como los cinco *procesos generales* de la actividad matemática que están relacionados con el aprendizaje y los cuales pertenecen al segundo eje, de acuerdo a los Estándares estos tienen que ver con:

- *La formulación, tratamiento y resolución de problemas*, que podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y por ende, sean más significativas para los alumnos.
- En vista de que las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan, el proceso de *comunicación*, permite contar con distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no solo como algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas.
- *El razonamiento* permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.
- *La formulación, comparación y ejercitación de procedimiento*; implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados “algoritmos”, procurando que la práctica necesaria para aumentar la

velocidad y precisión de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

- Finalmente el proceso de *modelación*, donde se requiere de un buen modelo mental o gráfico que permita al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos, sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido.

Teniendo en cuenta lo anterior, la prueba diagnóstica que se diseñó y aplicó para fines de este trabajo, se enfatizó en la resolución, el planteamiento y la formulación de problemas a partir del uso del concepto de potenciación, igualmente se observó la manera en que los estudiantes entienden y manipulan este concepto en las situaciones o problemas en los cuales es posible involucrar el dominio de algoritmos y propiedades que permiten también agilidad al desarrollar las diversas expresiones, es así que se tiene en consideración el proceso de comparación y ejercitación de procedimientos y más aún parte del proceso de razonamiento donde los estudiantes obtuvieran la solución de problemas al utilizar diversas estrategias que les permitieran aplicar la definición de potenciación, así como la aplicación de sus propiedades, incluso realizar tratamientos del contenido matemático en cuestión, relacionar este objeto matemático con otros conceptos como la radicación y poder expresar diversas interpretaciones y comparaciones a través de la comunicación. Cabe mencionar que en la prueba no se enfatizó en el desarrollo de la modelación

Por último el tercer eje está relacionado con los *contextos*, se plantea que en estos deben definirse situaciones problemáticas y ambientes en los que pueda estar rodeado el estudiante, los

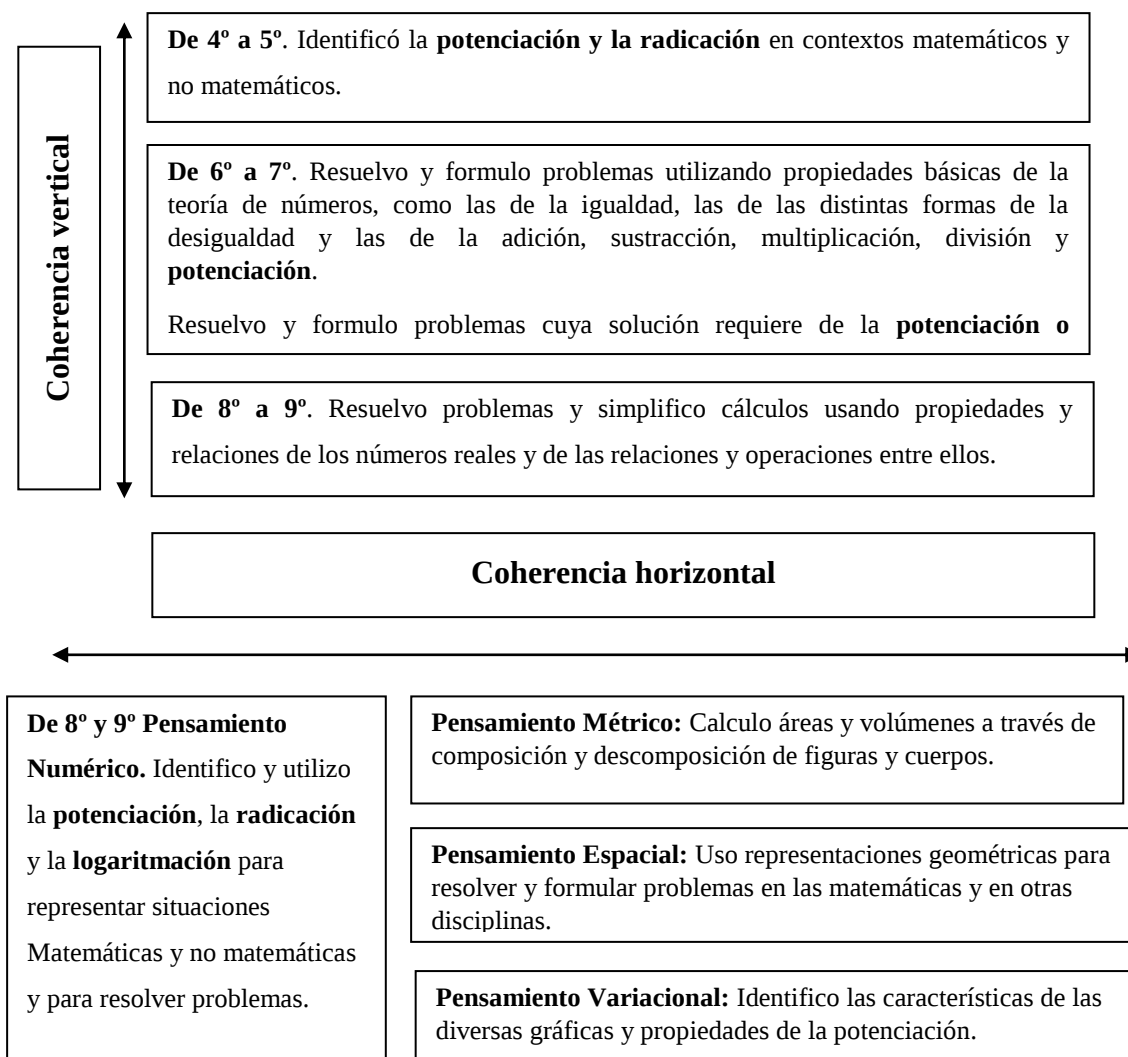
contextos que deben tenerse en cuenta para el diseño y ejecución de experiencias didácticas son: desde las mismas matemáticas, contextos cotidianos y desde otras ciencias.

En este sentido, los contextos que se tienen en cuenta para desarrollar la prueba diagnóstica a estudiantes de grado noveno para identificar las dificultades y errores en relación al concepto de potenciación, se relacionan con situaciones desde las mismas matemáticas y contextos cotidianos, dado que esto permite que los estudiantes encuentren significados no sólo con teorías si no desde su propia experiencia.

Es importante resaltar que los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas orientan la creación de ambientes de aprendizajes enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos que requieren la noción general de competencia matemática para favorecer el desarrollo de niveles de competencias altos y complejos del sistema educativo. En estos Estándares se despliega la importancia de incorporar dos facetas la práctica y formal, los dos tipos básicos de conocimientos, el conceptual y el procedimental, los cinco procesos de pensamientos de actividad matemática que se mencionaron anteriormente y finalmente los contextos inmediato, escolar y extraescolar, por lo dicho anteriormente se observa que el ser matemáticamente competente está íntimamente relacionado con fines educativos, en esta medida los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas sugieren a los docentes diversas reflexiones, exploraciones y apropiaciones de supuestos sobre las Matemáticas y profundizar sobre los contextos los cuales son considerados como los lugares del aprendizaje de las matemáticas en donde se construye y se le da sentido a algún contenido matemático, además a través de los contextos se relacionan los objetos matemáticos con actividades de la vida diaria, la institución educativa y otras ciencia.

Los elementos de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas que se relacionan con este trabajo, aluden a los estándares de pensamiento numérico de grado octavo y noveno, que tienen relación con la problemática, esto se estructura teniendo en cuenta la coherencia tanto vertical (relación de los estándares de diferentes grados en un mismo pensamiento) como horizontal (relación de los estándares de diferentes pensamientos en el mismo grado) que exige la complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas. En consecuencia, considerando el objeto de estudio de este trabajo, se han seleccionado los estándares que hacen referencia al concepto de potenciación para diseñar la coherencia vertical y horizontal de grado 8° - 9°. Para efectos de este trabajo se tienen en cuenta la estructura que se muestra a continuación:

Figura 2. Coherencia vertical y horizontal del concepto de potenciación



Fuente: adaptación de los autores con base en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2006)

La *figura 2*, evidencia cómo la coherencia vertical aporta significativamente desde los primeros años de escolaridad el trabajo con potenciación es decir, que desde un inicio se espera que los estudiantes logren reconocer, identificar y construir el concepto de potenciación y radicación en diversos contextos, del mismo modo se espera que a medida que avance en los grados de escolaridad tengan la capacidad de resolver y formular problemas, simplificar cálculos

usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos, pues los objetos matemáticos mencionados son fundamentales en lo que se refiere al trabajo con la potenciación en álgebra de octavo y noveno, debido a esto, las potencias se convierten en un insumo potente y adquieren un grado de importancia en años posteriores, específicamente, al momento en que se establece una relación entre las expresiones algebraicas y la función determinando fenómenos en distintas áreas del conocimiento como Biología, Economía, Geología, entre otros, que se modela por medio de la identificación y utilización de la potenciación, la radicación, la logaritmación y la función exponencial para representar situaciones Matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas de la vida cotidiana.

En este mismo sentido, la coherencia horizontal se encarga de fortalecer la construcción del concepto de potenciación y su relación con elementos presentes en distintos pensamientos entre ellos el Métrico donde se destaca la utilidad en el uso de cálculo de áreas y volúmenes, el pensamiento Espacial, destaca el uso de representaciones geométricas y en el pensamiento variacional permite identificar diversas gráficas y propiedades del concepto de potenciación.

Por tanto la implementación de Los lineamientos Curriculares y Los estándares en esta estructura de coherencia vertical y horizontal permite fundamentar aún más el trabajo de la potenciación y rescatar un objetivo específico desde el pensamiento numérico la necesidad de que los estudiantes en el grado octavo y noveno logren identificar y utilizar la potenciación, la radicación para representar situaciones Matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

En lo anterior se logra evidenciar que la propuesta curricular para la enseñanza de Matemáticas que plantea el Ministerio de Educación Nacional, permiten orientar este trabajo de grado sobre aquellos aspectos importantes al momento de enfrentarse a la potenciación como una operación, su representación, los diferentes significados y su relación con otros conceptos.

Además se enfatiza la importancia de tomar en consideración los pensamientos matemáticos que debe desarrollar el estudiante, así como los procesos y los contextos en los que se debe trabajar.

2.2 Perspectiva didáctica

La Didáctica se ocupa de la construcción y reflexión de modelos teóricos y prácticos centrados en explicar los distintos aspectos que surgen en la Educación, con el propósito de aportar alternativas válidas que motiven a la comunidad educativa hacia nuevas formas de ser, por tanto es fundamental incluir investigación didáctica en este trabajo para lograr identificar aspectos relacionados con la enseñanza de contenidos matemáticos, especialmente las dificultades y errores que presentan los estudiantes con relación al concepto de potenciación ; por lo anterior se tomarán como referencia las investigaciones realizadas por Socas (2000), para definir los conceptos de dificultad, error y obstáculo, para posteriormente caracterizar aquellos aspectos relacionados con la problemática de este trabajo, reportadas por Colín (2005), Martínez (2010), Martínez y Penalva (2006), entre otros.

2.2.1 Sobre las dificultades, errores y obstáculos.

Como se ha mencionado, en lo relacionado con el aprendizaje de las Matemáticas, se presentan algunas dificultades y errores; por ello es pertinente precisar estos conceptos, para entender parte del origen de diversas problemáticas. Por las consideraciones presentadas en este trabajo se alude al documento dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria de Socas (2000), quien muestra desde varias perspectivas, lo importante de las dificultades en la construcción del conocimiento matemático, a partir del análisis y clasificación de cinco categorías destacables que se ampliarán más adelante y que incluyen el estudiante, saber, profesor y la institución escolar, los cuales son elementos fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje. Estas dificultades se conectan y refuerzan en

redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en forma de errores.

Respecto a los errores, Socas (2000) considera que van más allá de la ausencia de conocimiento, a causa de ello el estudiante puede revelar un esquema cognitivo incorrecto, dichos errores son clasificados en tres ejes, el primero de ellos es denominado obstáculo, que se caracteriza por aquellos conocimientos adquiridos que demuestran su afectividad en ciertos contextos, pero no son válidos en otros, es decir aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas, estos obstáculos también se subdividen en diversas categorías, sin embargo se ampliarán en esta perspectiva como errores. En el segundo eje se encuentran los errores producto de ausencia de sentido que se distinguen por la relación con las distintas etapas de aprendizaje de un sistema de representación, semiótica, estructural y autónoma, por último se encuentra los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales y tienen distinta naturaleza, estas pueden ser por ausencia de concentración, excesiva confianza, bloqueos, olvidos, entre otras.

En esta perspectiva se retoman todas las investigaciones de los autores involucrados en este trabajo, los cuales reportan una serie de dificultades y errores que tienen los estudiantes al momento de enfrentarse al uso de operaciones matemáticas y particularmente aquellos conceptos relacionados con la potenciación; en consecuencia la presente propuesta tiene como objetivo la búsqueda de reflexiones didácticas que contribuyan a la solución de dichas dificultades en pro de una mejor formación matemática.

2.2.2. Errores y dificultades en la potenciación

Socas (2000) en el documento de dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, clasifica las dificultades en cinco categorías de la siguiente manera:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumno.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

Considerando la anterior clasificación, en esta sección se hará una caracterización de las dificultades encontradas en torno de la enseñanza y aprendizaje de la potenciación; la primera de ellas se presenta debido a que los objetos matemáticos se comunican a través de los signos matemáticos y se comprenden por el lenguaje habitual, pero esto hace que en los estudiantes se generen confusiones de los conceptos que tienen diferentes significados en el contexto habitual y el contexto matemático.

Por ejemplo al expresar en el lenguaje algebraico el producto entre factores se usa el símbolo del punto para ello, cuando en la aritmética se hace con una ($\times$) y en el lenguaje habitual tiene un significado diferente como un signo de puntuación, una referencia, una marca entre otros.

Por otra parte en las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos Socas (2000), concreta el proceso de abstracción de los objetos matemáticos en tres estadios que se dan en la evolución de los sistemas de representación: semiótico, estructural y autónomo. Esto como consecuencia del análisis y desarrollo de los distintos sistemas de signos matemáticos al trabajar dichos objetos.

Estos estadios se presentan en aquellos errores que son producto de distintas dificultades en el desarrollo del proceso de aprendizaje, una de estas etapas se caracteriza por el paso de un sistema de signos nuevo, desarrollado por un sistema antiguo ya conocido, es decir que ya teniendo conocimientos previos como las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación y división es posible definir y aprender un nuevo sistema, particularmente cuando se introduce el concepto de potenciación se requiere de las nociones asociados a la multiplicación, como por ejemplo $2 \times 2 \times 2$ o $a \times a \times a$ se pueden escribir como 2^3 o a^3 .

Es oportuno ahora recurrir a la organización de un sistema antiguo que contiene unas propiedades, las cuales pueden ampliarse para estructurar un nuevo sistema de representación, a lo que Socas (2000) llama estadio estructural, en el cual se presentan situaciones donde se hace necesario definir restricciones que al no ser explicadas genera dificultades cognitivas.

Mediante procesos como: $2^4 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^7$ llegamos al esquema general $a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7$ donde a pertenece a los números reales, que puede ser expresado simbólicamente como $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Es decir el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, se acude a este ejemplo para mostrar que en este tipo de situaciones los estudiantes se pueden cuestionar sobre los casos donde m sea el opuesto aditivo de n , donde se llega a la expresión a^0 , de esta forma se puede llegar a pensar que toda potencia de exponente nulo da por resultado cero, o es igual a la base de la misma, más aún si m es igual a cero, y n es un entero negativo, así, pueden obtener simbólicamente expresiones como a^{-n} de este tipo de situaciones se hace necesario aclarar todas las posibles propiedades y sus restricciones puesto que es posible que se presenten dificultades cognitivas en los estudiantes al no encontrar una explicación para ese tipo de casos a partir del sistema antiguo.

El tercer estadio se denomina autónomo y en este se sitúan los objetos de las Matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) que se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes, es decir un estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso; y un estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen los dos aspectos integrantes del objeto de la Matemática y por tanto generan dificultades al aplicarlo como operacional cuando es conceptual y viceversa.

Para ampliar esta noción Martínez y Penalva (2006), presentan en su investigación una situación que se relaciona con este estadio autónomo, puesto que presenta la generalización del concepto de potencia para el caso de exponente racional y de esta forma introducir los exponentes fraccionarios, primero se analizan un objeto matemático en particular, por ejemplo, $5^{\frac{1}{2}}$, posteriormente a partir del uso de la suma de números racionales y propiedades de la potencia fuera del conjunto numérico de referencia se logra definir en este caso potencias de exponente fraccionario con los conocimientos que el sistema antiguo le permite, se aplica la suma de los exponentes cuando las bases son iguales, $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$, entonces debe ser $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$. Se evidencia que la simbolización, la manipulación de los signos, el análisis de los objetos matemáticos y la abstracción de las propiedades locales, cumplen con el desarrollo del estadio autónomo con el cual un estudiante puede evolucionar al reflexionar sobre todas aquellas condiciones de la noción de potencia (x^y) en los diferentes conjuntos numéricos.

Para finalizar con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas en relación al concepto de la potenciación y la radicación diversos autores identificaron los siguientes errores:

- En la transición de la aritmética al álgebra, sobre expresiones como $\sqrt[n]{x} = c$ generan dificultades en el estudiante debido al cambio del conjunto solución en los diversos campos, es decir mientras que en aritmética donde n es un numero par y x es un entero positivo, el resultado siempre es positivo, en el álgebra es necesario incluir el opuesto aditivo de c que al elevarlo al exponente n , cumple con la solución de dicha operación.
- En potencias con base entera y exponente fraccionario negativo, los estudiantes asumen que la solución se encuentra al cambiar el exponente por su inverso multiplicativo por ejemplo $2^{-\frac{1}{3}} = 2^{-3}$.

A continuación se presentan aquellas dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, las cuales están relacionadas con el aprendizaje de las Matemáticas y se originan generalmente por la incapacidad de seguir un argumento lógico, para este tipo de dificultades es necesario potencializar pensamiento lógico en beneficio de un buen nivel de competencia Matemática, que a su vez no se debe contraponer a los métodos intuitivos, conjeturas, ejemplos y contraejemplos, que no solo permiten obtener resultados y métodos correctos, sino que también, se logran desarrollar destrezas con la práctica de estos métodos informales.

Para este tipo de dificultades la autora Gerompini (1978) muestra a partir de un ejemplo los distintos desarrollos que puede provocar el tratamiento de un tema cuando éste no se plantea a los estudiantes como exposición de un saber estructurado sino, con carácter problemático y funcional. Uno de los problemas que propone la autora para introducir el concepto de potenciación y con el cual inicialmente desarrolla su investigación es el siguiente:

Voy a tirar un papel al cesto, pero antes decido romperlo. Lo parto en dos y superponer las partes; vuelvo a partir en dos y a superponer las partes, Y así sucesivamente. ¿Cuántos trozos de papel habré tirado al cesto después de

efectuar 5 veces esa operación?, ¿Y si hubiera partido el papel cada vez en tres partes?, ¿Y si lo hubiese partido cada vez en cuatro partes?, ¿Y en cinco partes?, ¿Y en diez partes?, ¿Y en a partes?, ¿Y si hubiese repetido n veces esta última operación? (Gerompini 1978, p.2).

El estudio del problema anterior permitió que se introdujera en el aula la operación potenciación en el conjunto de números naturales ($\mathbb{N}$) como multiplicación reiterada y como código para anotar productos de factores iguales $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n factores). Para todo a y n , naturales.

Este tipo de situaciones trae consigo otro tipo de dificultades que se han mencionado anteriormente como lo es la generalización de procesos derivados de conceptos previos, del cual se hace alusión en el problema ya que se recupera el esquema de multiplicación reiterada, debido a que los estudiantes asocian un sistema antiguo ya conocido para responder diversas situaciones que se les presentan, sin reflexionar si los problemas planteados tienen solución o no, para el caso del problema anterior los alumnos determinan soluciones como $2n$ donde n es el número de cortes que se realiza al papel, por tanto se hace necesario que los docentes acompañen a los alumnos en la reflexión sobre estos obstáculos, con el fin de disminuir este tipo de dificultades, para que puedan llegar a la solución correcta que es 2^n .

A esto se añade otros errores asociados a los procesos de pensamiento matemático vinculados al concepto de potenciación, dicha situación se ve ilustrada cuando los estudiantes al adquirir conocimientos en las raíces con índice par lo generalizan y determinan que el valor de la raíces con índice impar tiene un doble resultado, o si el radicando es negativo no posee solución en el campo de los reales, se clasifica esta situación en este tipo de dificultades porque los estudiantes no encuentran la relación entre la potenciación y la radicación de manera lógica o intuitiva, si no

que aplican algoritmos o reglas desconociendo la naturaleza de la operación, sus propiedades y las condiciones necesarias, por tanto es importante que en algunos casos se recurra a la demostración lógica para la comprensión de algunos comportamientos entre la potenciación y la radicación.

Aun así existen otro tipo de dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, estas hacen referencia a la forma de organización del currículo, y con la forma de enseñar de la institución educativa, la cual se espera que propicie una organización escolar que contribuya a la escasez de dificultades del aprendizaje de las Matemáticas dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza.

Los libros de texto también deben de ser un elemento de estudio por que influyen en los estudiantes, no solo por ser un medio para la enseñanza sino también una manera de entender el desarrollo de los contenidos curriculares, por tanto Martínez y Penalva (2006), realizan un análisis en los libros de texto de secundaria sobre el proceso de simbolización del concepto de potencia en el cual concluyen que los libros de texto adoptan, mayoritariamente, estrategias de razonamiento intuitivo que se aceptan de forma evidente ante el análisis de objetos matemáticos concretos, lo que genera dificultades cuando los estudiantes sienten confianza con lo que interpretan del texto, pero a medida que descubre el significado y procesos asociados al concepto se van creando obstáculos en su aprendizaje.

En el proceso de enseñanza de las matemáticas los docentes tienen concepciones y creencias particulares sobre las matemáticas, de las cuales varias investigaciones reportan su influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas, autores como Pantano y González (2013), presentan una propuesta innovadora en los métodos de enseñanza para estudiantes de grado quinto, (puesto que en aritmética estas operaciones se trabajan con los números naturales), con el

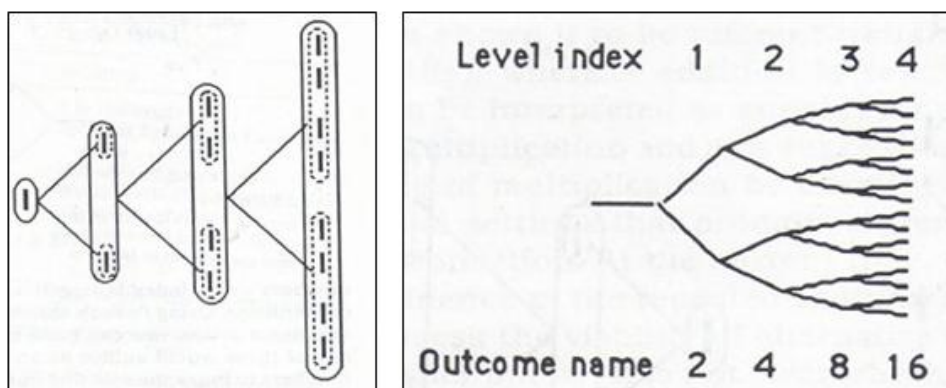
fin de favorecer el acercamiento de las nociones de potenciación, radicación y logaritmación y comprendan por qué son operaciones inversas. Para ello hacen uso de material manipulativo como los bloques de Dienes y multibases, el método de Splitting y las regletas de Cuisenaire. Posteriormente en su investigación, brindan algunas reflexiones a partir de los logros obtenidos por los estudiantes y concluyen que la experiencia con estos materiales brindó resultados positivos al identificar en los estudiantes la interiorización de los conceptos al aplicar en la enseñanza recursos innovadores. Por ello se hace necesario utilizar en la enseñanza recursos que permitan incentivar a los estudiantes, para que logren enfrentarse con situaciones que se presentan en contextos no matemáticos y favorecer a la comprensión de estos conceptos.

De la misma manera Confrey (1994), en sus investigaciones evidencia algunos objetos de conocimiento que siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes, como es el caso de la multiplicación y la exponenciación, lo que establece un acertado indicador de la necesidad de hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones de dicha problemática y de este modo, lograr impactos sobresalientes en el sistema educativo. Para ello Confrey retoma una alternativa de enseñanza y aprendizaje que el mismo propone, basada en una estructura multiplicativa y el trabajo de la partición de la unidad desde el contexto geométrico, denominada conjetura "splitting", con la cual busca contrarrestar determinadas dificultades y contribuir a las prácticas escolares en el contexto numérico.

La noción de "splitting" está asociada con otras acciones primitivas como es repartir, compartir, doblar simétricamente, ampliar o disminuir de manera sucesiva y crear simultáneamente múltiples versiones de un objeto original, además se complementa aunque independiente con otros conceptos como la división, la razón, el conteo, la multiplicación repetida desde un punto de vista diferente al aditivo y finalmente vinculada con la geometría por

el papel importante que juega como forma de pensamiento diferente del numérico, un ejemplo de esto se muestra a continuación:

Figura 3 representación geométrica del crecimiento exponencial



Fuente: tomado de Confrey (1994)

El diagrama del árbol es una de las representaciones que permite dar ejemplo de la integración de las Matemáticas con otras ciencias como la estadística y la biología, ya que este permite identificar las formas de crecimiento específica de una población, y es útil para que los estudiantes perciban la utilidad del aprender Matemáticas en la actividad humana.

Así mismo el "splitting" se destaca por la riqueza de la unidad al ser un objeto matemático que puede constituir formas geométricas y que describen un crecimiento regulado a través de una razón, de esta manera, la unidad pueda ser considerada como una práctica escolar alterna en la construcción de los reales positivos.

En cuanto a la potenciación el splitting permite trabajar con expresiones donde el exponente sea un operador que no cambia el conjunto numérico de la base, dado que este gráfico permite validar solo el exponente natural, debido a la complejidad del contexto de los exponentes racionales o enteros negativos, al igual que las limitaciones en el dominio del exponente debido a lo complejo de imaginar gráficas de crecimientos infinitos en esta propuesta.

La cuarta categorización expuesta por Socas (2000) define las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo, donde es necesario que el docente conozca los estadios de desarrollo intelectual de los estudiantes para determinar por medio de la identificación de errores qué dificultades se originan a causa de un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Vinculando lo anterior a la potenciación se identifican los siguientes tipos de errores:

- Aplican distributivas de la radicación con respecto a la suma y/o resta.
- Asocian que el exponente de la potencia de un producto, afecta sólo a uno de los factores.
- Asocian que si el exponente de una potencia es un entero negativo, y la base es una suma algebraica, se debe tomar en primera instancia los inversos multiplicativos de los sumandos
- Consideran que tienen un número negativo elevado a cierto exponente cuando el signo menos se antepone a la potencia.
- Distribuyen la potencia con respecto a la suma algebraica.
- Multiplican las raíces de igual índice y radicando cuando se tratan de adiciones.
- Suman los exponentes de las potencias cuando estas tienen base diferente.

Finalmente, Socas (2000) categoriza aquellos errores y obstáculos producto de actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, las cuales se relacionan con la ansiedad y el miedo que se ha transmitido desde diversos factores, con el fin superar las diferentes dificultades relacionadas con el poco interés por parte de los estudiantes en el aprendizaje y la desmotivación que se surge por la forma mecánica en que se proponen los conceptos matemáticos en algunas actividades en el aula, investigaciones como la de Gómez y Gómez (2016), proponen a través de

una serie de juegos de mesa un aprendizaje significativo de la potenciación y la radicación en el grado noveno.

Por su parte Romero, Utrilla y Utrilla (2014) en la investigación sobre las actitudes positivas y negativas de los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas, su impacto en la reprobación y la eficiencia terminal afirman que la ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., genera bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad Matemática de los alumnos.

Para añadir a la anterior clasificación de los errores reportados en la construcción del concepto de potenciación de acuerdo a las categorías propuestas por Socas (2000), es importante resaltar la investigación de Colín (2005), quien analiza libros de texto desde el nivel básico hasta el superior, con el fin de identificar potenciación desde la aritmética hasta el cálculo, así posteriormente aplica a estudiantes de estos niveles un cuestionario que le permite finalmente mostrar qué concepciones permanecen en los estudiantes y son las siguientes:

- Consideran a la $\sqrt{100} = 50$
- La raíz cuadrada de un número negativo elevado al cuadrado es él mismo $\sqrt{(-2)^2} = -2$
- Presentan dificultad en el concepto de función al consideran que la grafica $y = \sqrt{x}$ es igual a la gráfica de la función $y^2 = x$
- Las propiedades de la igualdad se extienden hasta la radicación.

De acuerdo a lo planteado se puede evidenciar que las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se presentan de distinta naturaleza, con ello se observa cómo la finalidad de este trabajo está orientado a brindar posibles soluciones a dichas dificultades. Es importante tomar como referente principal a Socas, puesto que afirma que identificar y superar los errores que cometen los estudiantes es el comienzo de un buen aprendizaje. Por tanto con la

prueba diagnóstica que se realizó en este trabajo, se logró identificar la naturaleza de las dificultades que generan errores que cometen los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Navia Varón, en relación al concepto de potenciación.

2.2.3 La prueba diagnostica

Socas (2000) afirma que algunos matemáticos han encontrado en los errores una gama de problemas dignos de estudio, ya sea porque plantean acertijos o pasatiempos o sugieren teoremas interesantes; esto hace posible centrar la atención en una evaluación eficaz, para poder ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades cognitivas y carencias de sentido de los objetos matemáticos.

A causa de ello surgen algunos interrogantes como ¿Por qué y para que evaluar? o ¿a quién y cómo evaluar?, para responder estas preguntas se toman en consideración algunos reportes de autores como: Caraballo (2010), el Departamento de Educación gobierno de Navarra (2008), y Jorba y Sanmartí (1993), con el fin de contextualizar algunos aspectos de la prueba diagnóstica.

El Departamento de Educación del gobierno de Navarra (2008), caracteriza la evaluación diagnóstica como un procedimiento que permite recoger analizar, distinguir y tratar información sobre el grado de desarrollo de las competencias básicas del alumnado con el fin de conocer, pronosticar, discernir entre lo que es capaz de hacer el alumno y lo que no, donde se puede tomar decisiones que favorezcan el pleno desarrollo educativo de los alumnos, además de ello tiene un carácter preventivo dado que es posible conocer los errores que cometen los estudiantes.

Por otra parte Caraballo (2010), afirma que el propósito fundamental de una evaluación diagnostica es ofrecer información importante sobre la situación del alumnado, así mismo sirve como un instrumento potencial para evaluar el desarrollo de competencias básicas de los escolares, por otra parte indica que un buen dispositivo de evaluación debe estar al servicio de

una pedagogía diferenciada capaz de dar respuesta a los intereses y dificultades de cada alumno. El adecuado seguimiento de este proceso evaluativo provee datos para mejorar las actividades educativas subsiguientes para los estudiantes. Con esto se espera que se adopten planes de mejoramiento de calidad del sistema educativo.

A su vez Jorba y Sanmartí (1993) afirman que la prueba diagnóstica tiene por objetivo fundamental determinar la situación de cada alumno antes de iniciar un determinado proceso de enseñanza-aprendizaje, para adecuar la planificación de las clases teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes. La prueba diagnóstica se hace a través de actividades como cuestionarios abiertos y cerrados, entrevistas, observaciones, etc.

Bajo las contextualizaciones presentadas anteriormente, en este trabajo se organizó una prueba diagnóstica como una herramienta pedagógica con el fin de evaluar los contenidos matemáticos que están relacionados con la potenciación, la prueba diagnóstica está conformada por dieciséis preguntas, en el análisis de los resultados se logró identificar las dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado noveno cuando se enfrentan al concepto mencionado anteriormente, para luego proporcionar algunas orientaciones para que los docentes tengan en cuenta cuando van a trabajar con la potenciación.

2.3. Perspectiva matemática

En esta sección se hace un acercamiento histórico teórico del concepto de potenciación, para tal fin es necesario conocer cómo ha sido su evolución a lo largo de la historia, de esta forma es posible reconocer cuáles fueron las necesidades para trabajar con dicho concepto, además es conveniente fundamentar e interpretar el objeto matemático en cuestión, presentando su definición y propiedades, de la misma manera es útil apreciar los conceptos relacionados con

la potenciación, tomando las propuestas desarrollados por Bartnett (1988), Mejía (1991), Zill y Dewar (2000), entre otros.

2.3.1. La potenciación en la historia

La necesidad de escribir números muy grandes fue una de las principales razones por la cual se empezó a utilizar indirectamente las potencias, ejemplo de esto fue Arquímedes quien en su obra *El contador de Arena* en el siglo III describe un sistema de representación numérico que le permitiría calcular la cantidad de granos de arena que existían en el universo, él estimó que esa cantidad era 10^{63} . Por otra parte la civilización babilónica ya utilizaba la elevación a potencia como auxiliar de la multiplicación, además aproximadamente en 1800- 1900 A.C desarrollaron un sistema de numeración posicional denominado sexagesimal que toma como base aritmética el número 60. La civilización egipcia también utilizó implícitamente las potencias representando con algunos símbolos los números 1, 10, 100, 1000, etc. tal como se muestra en la *figura 3*, estos pueden escribirse como potencias de base 10. Por otra parte cabe señalar la gran fascinación que sentían los griegos para utilizar las elevaciones al cuadro y al cubo, por ejemplo Euclides en sus demostraciones y los pitagóricos los tomaron en consideración para definir el teorema de Pitágoras.

Figura 4. Símbolos egipcios para las potencias en base 10

1	10	100	1.000	10.000	100.000	1 millón, o infinito
I	∩	ε	⌋	⌋	⌋ c	⌋
			⌋	⌋	⌋	⌋
trazo vertical (bastoncito)	asa c herradura invertida	cuerda enrollada (espiral)	Flor de loto con tallo.	Dedo	Renacuajo o rana.	Hombre arrodillado con las manos levantadas

Fuente: recuperado de: <http://locuraviajes.com/numeros-egipcios/>

En cuanto a la representación simbólica de la potenciación Gómez y Gómez (2016) afirman que Diofanto de Alejandria (III d.C.) en su obra *Arithmetica* escrita alrededor del año 250, fue pionero en emplear símbolos para representar una potencia, el exponente siempre era el mismo y para ello utilizaba la letra griega ípsilon con una barra encima así $\bar{\upsilon}$, la base indicaba el valor de la potencia, por ejemplo $\delta^{\bar{\upsilon}}$ simbolizaba la segunda potencia de una incógnita ya que δ dynamis que quiere decir cuadrado (Pérez, 2009), también empleó las letras así; x, xx, xxx , etc. para expresar las primeras potencias de base x . No obstante Chuquet en su obra *La triparty en la Science des Nombres*, escrito en el siglo XV utilizó los exponentes en posición elevada respecto a la base pero solía colocar el exponente en el coeficiente, por ejemplo la expresión $5x^2$ se escribía como 5^2 , además incluye el cero como exponente, por otra parte en 1636 James Hume en una edición del álgebra de Viète utilizó una notación prácticamente igual a la actual, con la diferencia de utilizar los números romanos como exponentes por ejemplo $5x^2$ se escribía como $5x^{ii}$. No obstante quien expresa las potencias como se conocen en la actualidad es Rene Descartes quien sustituyó los exponentes romanos por los indorábigos, es decir x, x^2, x^3, x^4 , etc.

2.3.2. La potenciación y sus Propiedades

En Matemáticas se suele escribir una suma repetida como un producto, por ejemplo $x + x + x + x = 4x$, esto se hace con el fin de facilitar sumas con repetidos números, de igual manera existe la forma de escribir una multiplicación repetida de modo más sencillo, para esto se utilizan los exponentes que indican el número de veces que se debe multiplicar un factor reiteradamente, por ejemplo si se tiene $x \cdot x \cdot x$ entonces se puede escribir así x^3 . En general para cualquier número real x y n el símbolo x^n se lee como: “x a la enésima potencia”, el número que se

multiplica se llama base y el resultado se conoce como potencia, la operación que involucra estos elementos se denomina potenciación.

La potenciación o también llamada involución es definida como una operación Matemática que tiene por objeto calcular un producto de potencias de igual base, así: $p = b^n \leftrightarrow p = b \cdot b \cdot b \dots b$ (n factores) donde p : potencia; b : base y n : exponentes, cabe señalar que la anterior definición se cumple para cualquier entero positivo n , por ejemplo $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Esta operación se empieza a trabajar en los conjuntos naturales (N), enteros (Z), y racionales (Q) cuando el exponente es un número natural, posteriormente y de forma general se trabaja en el conjunto de los reales (R) para desarrollar potencias de exponentes negativos y fraccionarios.

La potenciación al igual que muchas otras operaciones en Matemáticas cumple una serie de propiedades o principios que son útiles para combinar operaciones entre potencias, de esta forma tenemos que:

1. El producto de potencias de igual base, es otra potencia que tiene igual base, donde el exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas, es decir

$$x^m x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ factores}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{m+n \text{ factores}} = x^{m+n}$$

Donde x pertenece a los números reales y m y n son enteros positivos.

2. El cociente de potencias de igual base, es otra potencia que tiene igual base, donde el exponente es la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor es decir:

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}^{m \text{ factores}}}{\underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{n \text{ factores}}} = x^{m-n}$$

Donde x pertenece a los números reales y m y n son enteros positivos

3. La potencia de una potencia, es otra potencia, donde el exponente es el producto de los exponentes, es decir:

$$\begin{aligned} (x^m)^n &= \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{m \text{ factores}}^n = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{m \text{ factores}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ factores}} \\ &= \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdots x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{m \cdot n \text{ factores}} \end{aligned}$$

Donde x pertenece a los números reales y m y n son enteros positivos

4. La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores, es decir

$$(xy)^n = \underbrace{(xy) \cdot (xy) \cdot (xy) \cdots (xy)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot y \cdots y}_{n \text{ factores}} = x^n y^n$$

Donde x pertenece a los números reales y n es un número positivo.

5. Toda potencia de un cociente es igual al cociente entre la potencia del dividendo y la potencia del divisor, es decir

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \underbrace{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdots \frac{x}{y}}_{n \text{ factores}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot y \cdots y}_{n \text{ factores}}} = \frac{x^n}{y^n}$$

Donde x y y pertenecen a los reales y n es un entero positivo.

Aunque las propiedades anteriores están demostradas a partir del concepto de multiplicación reiterada, es necesario resaltar que estas se pueden aplicar cuando el exponente es un número negativo, cero o racional, sin embargo hay que tener en cuenta que cuando se desarrollan potencias con este tipo de exponentes la operatoria es diferente.

En primer lugar cuando se requiere trabajar con exponentes enteros negativos la operación se desarrollará en forma de fracción, donde el numerador siempre es la unidad y el denominador es la potencia con el exponente positivo, es decir:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ donde } x \neq 0$$

Por ejemplo $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Por otra parte cuando el exponente es cero se tiene que: para cualquier base a diferente de cero definimos $a^0 = 1$ puesto que:

$a^0 = a^{n-n}$ Para todo $n \in \mathbb{N} \rightarrow a^0 = \frac{a^n}{a^n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \rightarrow a^0 = \frac{a \cdot a \cdot a \dots a}{a \cdot a \cdot a \dots a} \rightarrow a^0 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte para definir la potenciación cuando el exponente es número racional es conveniente en primer lugar detallar la operación inversa a esta.

La radicación o evolución es la operación inversa de la potenciación (bajo ciertas restricciones), que tiene por objetivo calcular una raíz así, $R = \sqrt[n]{a}$ donde R es la raíz; n es el índice; a es el radicando y $\sqrt{}$ es el signo del radical, es decir hallar una cantidad R que al multiplicarse n veces pueda representar a . Por otra parte también es necesario aclarar las condiciones o dominios de a , de acuerdo a n , debido a que por ejemplo; si a pertenece a los enteros negativos y n es de la forma $2n$, entonces R no existe.

Bajo las ideas expuestas anteriormente se puede definir que toda potencia con exponente fraccionario equivale a una raíz, cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base de la potencia elevada al numerador, es decir $x^{\frac{a}{c}} = \sqrt[c]{x^a}$. Donde $c \neq 0$

Por lo tanto a continuación se muestran a algunas propiedades que relaciona estas dos operaciones donde se limita los dominios de las variables debido a que en la radicación también existen diversos tipos de restricciones como se mencionó anteriormente.

1. El producto de potencias de igual base, es otra potencia que tiene igual base, donde el exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas, es decir:

$$\begin{aligned} x^{\frac{a}{b}} * x^{\frac{c}{d}} &\rightarrow \sqrt[b]{x^a} * \sqrt[d]{x^c} \\ &\rightarrow \sqrt[b]{x^{a(\frac{ad}{b})}} * \sqrt[d]{x^{c(\frac{bd}{d})}} \rightarrow \sqrt[b]{x^{ad}} * \sqrt[d]{x^{cb}} \rightarrow \sqrt[b]{x^{ad+cb}} \rightarrow x^{\frac{ad+bc}{bd}} = x^{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} \end{aligned}$$

Donde x, a, b, c, d son enteros mayores a cero.

2. El cociente de potencias de igual base, es otra potencia que tiene igual base, donde el exponente es la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor es decir:

$$\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{c}{d}}} = \frac{\sqrt[b]{x^a}}{\sqrt[d]{x^c}} = \frac{\sqrt[b]{x^{a(\frac{bd}{b})}}}{\sqrt[d]{x^{c(\frac{bd}{d})}}} = \frac{\sqrt[b]{x^{ad}}}{\sqrt[d]{x^{cb}}} = \sqrt[b]{x^{ad-cb}} = x^{\frac{ad-cb}{bd}}$$

Donde x, a, b, c, d son enteros mayores a cero.

3. La potencia de una potencia, es otra potencia, donde el exponente es el producto de los exponentes, es decir:

$$\left(x^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{c}{d}} = \left(\sqrt[b]{x^a}\right)^{\frac{c}{d}} = \sqrt[d]{\left(\sqrt[b]{x^a}\right)^c} = \sqrt[d]{\left(\sqrt[b]{x^a}\right)^c} = \sqrt[d]{\sqrt[b]{x^{ac}}} = \sqrt[d]{\sqrt[b]{x^{ac}}} = x^{\frac{ac}{db}} = x^{\frac{a}{b} * \frac{c}{d}}$$

Donde x, a, b, c, d son enteros mayores a cero.

4. La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores, es decir

$$(xy)^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{(xy)^a} = \sqrt[b]{x^a y^a} = \sqrt[b]{x^a} * \sqrt[b]{y^a} = x^{\frac{a}{b}} * y^{\frac{a}{b}}$$

Donde x, a, b, c, d son enteros mayores a cero.

5. Toda potencia de un cociente es igual al cociente entre la potencia del dividendo y la potencia del divisor, es decir:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{\left(\frac{x}{y}\right)^a} = \sqrt[b]{\frac{x^a}{y^a}} = \frac{\sqrt[b]{x^a}}{\sqrt[b]{y^a}} = \frac{x^{\frac{a}{b}}}{y^{\frac{a}{b}}}$$

Donde x, a, b, c, d son enteros mayores a cero.

En otro orden de ideas existen algunas operaciones relacionadas con la potenciación, tales como la logaritmicación que se define como aquella operación que busca el logaritmo de un número, es decir, encontrar el exponente al que hay que elevar una base para obtener dicho número, así:

$x = \log_b n$ Donde b : base, x : exponente y n : numero.

Otro de los conceptos asociados a la potenciación es la función exponencial que a diferencia de la potenciación se caracteriza por tener la base como constante y el exponente como variable, donde se obtiene una expresión como a^x . La función exponencial se define como aquella que tiene la siguiente forma $f(x) = a^x$ donde x es cualquier número real y $a > 0$ y $a \neq 1$.

En esta perspectiva se describió de manera formal el objeto matemático que es centro de estudio en este trabajo, esto permite que en el diseño de la prueba diagnóstica estén fundamentados todos los aspectos relacionados con el concepto y las propiedades de la potenciación, para lograr identificar los errores que cometen los estudiantes en la solución de las actividades y así poder conocer las dificultades que causan dichos errores.

Capítulo III: la potenciación en grado noveno

En este capítulo se exponen elementos fundamentales de la prueba diagnóstica, en primer lugar se recurre a los resultados de los reportes documentados sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto de potenciación expuestos en la perspectiva curricular, didáctica y matemática, con el fin de describir que aspectos son relevantes para el diseño de la prueba diagnóstica; posteriormente se describe la población y el proceso de implementación de la prueba diagnóstica y finalmente se presentan los resultados obtenidos y los respectivos análisis.

3.1. Sobre el diseño de la prueba diagnóstica

La prueba es una herramienta que permite valorar algunos aspectos en los procesos de aprendizaje del estudiante, en ella se presentan distintas situaciones con el fin de identificar los diferentes desempeños que presentan los estudiantes frente a una problemática en particular en algún grado de la escolaridad, además se pueden vislumbrar dificultades y errores en la comprensión de los saberes según lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (2009).

Las perspectivas documentadas y analizadas en el Capítulo II de este trabajo fueron articuladas para el diseño de la prueba diagnóstica, en esta se involucran aspectos matemáticos como la definición del concepto de potenciación, la resolución de operaciones aplicando las propiedades y las relaciones de equivalencia en expresiones algebraicas donde estén involucradas las potencias. Los elementos que hacen parte de las expectativas de desempeño y contenidos matemáticos específicos, fueron tomados con base a lo descrito en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas publicados por el Ministerio de Educación Nacional (1998) y (2006). En cuanto a la perspectiva didáctica para la elaboración de esta prueba se tomó como referencia algunas dificultades y

errores reportados por investigaciones como las de Colín (2005), Martínez (2010), Martínez y Penalva (2006) y Socas (2000) entre otros, con el propósito de evidenciar y validar los resultados obtenidos en estas indagaciones.

La prueba diagnóstica (página 59) consta de dieciséis preguntas, la pregunta 1 fue tomada y reformulada de Los Derechos Básicos de Aprendizaje, la pregunta 2 fue seleccionada de una de las investigaciones que se presentó en la problemática (Gerompini 1978), al igual que la pregunta 10, pero esta fue reformulada del domino de potencias descrita por Gomez (2016), las preguntas 3,7,9, 11, 12,13 y14 fueron producciones propias las preguntas 4 y 15 fueron tomadas de la web, las preguntas 5 y 6 se tomaron de las Pruebas Saber Pro 2012-I, las preguntas 8 y 16 fueron conseguidas en libros de textos escolares.

Además de lo anterior la prueba diagnóstica está conformada por dos apartados con ocho preguntas cada una, la parte A contienen siete preguntas cerradas y la ultima es abierta, la parte B consta de cuatro preguntas abiertas y cuatro cerradas.

En la parte A la pregunta 1, 2 y 8 evalúan el concepto de potenciación como multiplicación reiterada en un contextos cotidiano a través de la resolución de problema, la 3 y 4 están relacionadas con el uso de la potenciación en la notación científica, la pregunta 5 y 7 tratan sobre otras representaciones de dicha operación, adicionalmente en esta parte de la prueba la pregunta 6 evalúa la aplicación de la potenciación en el binomio al cuadrado.

En la parte B, la pregunta 9, evalúa la adición de potencias, las preguntas 10, 11,14 y 15 tratan sobre la aplicación de distintas propiedades, sumado a esto la pregunta 12 evalúa la equivalencia de expresiones a partir del uso de propiedades de la potenciación, la 13 indaga sobre la relación de la potenciación con la radicación y la 16 la implementación de este concepto en la resolución de problemas.

En la siguiente tabla se mencionan las principales dificultades que presentan los estudiantes, según las investigaciones realizadas en el inicio de este trabajo, además se hace la relación de estas dificultades con los contenidos matemáticos y desempeños que se evalúan en la prueba diagnóstica.

Tabla 1. Relación de las dificultades con los contenidos matemáticos y desempeños en la prueba diagnóstica

Tipo de dificultad	Contenidos Matemáticos		Tipo de desempeño	pregunta
El contexto de la potenciación como una multiplicación reiterada, (definición aritmética para cuando el exponente pertenece a los naturales) hace pensar que esta se asocia solo al producto, sin tener en cuenta que dicho concepto transita en la aritmética (notación científica), en el Álgebra (polinomios, racionalización, factorización, logaritmación y radicación) en el cálculo (funciones exponenciales) y en disciplinas distintas a las Matemáticas como en Química, Biología, Física, entre otras. El no superar los cambios o condiciones en la transición de la potenciación en los diversos campos como el aritmético, algebraico o funcional es muy probable que se destaquen errores, u obstáculos epistemológicos producto de dificultades de la naturaleza del objeto Matemático.	Concepto de Potenciación	Multiplicación Reiterada	Reconocer la potenciación como multiplicación retirada, para resolver algunas expresiones dadas o traducir situaciones planteada desde un lenguaje natural en expresiones Matemática que requiera de esta operación para presentar una determinación.	1, 2, 8 y 16
		Aplicación de la potenciación en la notación científica	Identificar el uso de la potenciación en la representación de varios sistemas de numeración como por ejemplo: la escritura de un número en una Composición y descomposición aditiva y multiplicativa de otros números menores con diferente base, o su utilidad en la notación científica, para comprender otro tipo de registros de representación o sistemas de notación simbólica y con ellas operar y sustentar varios puntos de vistas.	3 y 4

		Operación Inversa	Reconocer las restricciones del concepto de potenciación como multiplicación reiterada, a través de la relación entre la potenciación y la radicación y las condiciones para que se den estas equivalencias por medio de la aplicación de una transformación o tratamiento entre los objetos matemático que permita comprender cuales conjuntos numéricos se involucran entre la potenciación y otras operaciones.	13
		Diferentes Representaciones	Interpretar la información presentada en gráficas, tablas y esquemas y partir del uso de diversas estrategias que permitan deducir el crecimiento exponencial en estas representaciones y como el uso de una expresión Matemática en este caso la potenciación permite generalizar determinado incremento.	5 y 7
Aplican inadecuadamente las propiedades debido al cambio de sistemas antiguos, en este caso de las operaciones básicas que se amplían para estructurar un nuevo sistema de representación como la potenciación , un ejemplo de ello es la generalización de propiedades de la suma aplicada a la potenciación, como es el caso de la conmutatividad que es aplicada en la suma, pero no es válida en la potenciación, entre la base y el exponente o distribuir radicales y exponentes como por ejemplo: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$	Operaciones	Estructura Aditiva	Comprender y resolver adecuadamente expresiones de adición y restas elevadas al cuadrado y al cubo, diferenciando los algoritmos que contiene la estructura aditiva de la multiplicativa.	6 y 9
		Estructura Multiplicativa	Identificar las diferentes las propiedades de la potenciación para utilizarla como estrategias en la solución de problemas de estructura multiplicativa de la potenciación.	10, 14, 11 y 15

Los errores de cálculo y uso incorrecto de fórmulas o procedimientos, que los alumnos presentan en álgebra no son propiamente dificultades en el álgebra sino problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. En las identidades notables los errores son bastante frecuentes, girando siempre en torno a los siguientes tipos: $1^{-2} = -2$	Relaciones de Equivalencia	Igualdad	Reconocer expresiones equivalentes a una expresión dada, a partir del uso de propiedades de la potenciación, así como el uso de productos notables y factorización.	12
---	--	------------------------	--	-----------

3.1.1. La prueba

Parte A

1. Al Facebook de Ana le enviaron la imagen de un tesoro, para tener suerte debe compartirla en una hora con 3 personas, a la siguiente hora cada una de ellas comparte la misma imagen con otras 3 personas, quienes continúan en la siguiente hora compartiendo la imagen con 3 personas diferentes.

Si se sigue compartiendo la imagen de la misma forma, a la cuarta hora a cuantas personas se les compartirá la imagen.

- a. 120
 - b. 12
 - c. 81
 - d. 27
2. Andrés jugando con un papel, pensó en tirarlo al cesto, pero antes decidió partirlo en dos y superponer las partes; de nuevo lo partió en dos y superpuso las partes, y así sucesivamente. Entonces pensó. ¿Cuántos trozos de papel habré tirado al cesto después de efectuar 5 veces esa operación?

La respuesta correcta a la pregunta de Andrés es:

- a. 10
 - b. 32
 - c. 62
 - d. 25
3. Considere el número: $Z = 2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6$

Es correcto afirmar que:

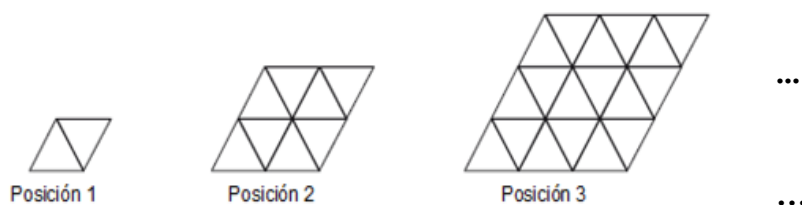
- a. La representación decimal de Z es 24.376 y está entre 24.375,09 y 24.376,1
- b. La representación decimal de Z es 243.760
- c. La representación decimal de Z es 240.376 está entre 240.375,09 y 240.376,1
- d. La representación decimal de Z es 2437,6

4. Rocío y Consuelo van a un restaurante de lujo que pone todos sus precios en formato de potencia para atraer a más clientes, como se muestra en la siguiente tabla.

Menú	Precio \$
Ensalada	3×10^3
Plato ejecutivo	$3^4 \times 10^2$
Plato Especialidad de la casa	$3 \times 2^2 \times 10^3$
Plato Premium	$5^2 \times 1^3 \times 10^3$
Bebida	$4^2 \times 10^2$

Si Rocío consumió un plato Premium y una bebida y Consuelo una ensalada, un Plato ejecutivo y una bebida. El valor total que debe pagar es:

- a. \$ 112.200
 - b. \$ 89.300
 - c. \$ 39.300
 - d. \$ 44.300
5. Con triángulos equiláteros () iguales se construyó la siguiente secuencia de paralelogramos () Por ejemplo, el paralelogramo en la posición 1 tiene 2 triángulos equiláteros iguales.



La expresión que representa el número de triángulos equiláteros que tiene el paralelogramo correspondiente a la posición 5 es:

- a. 5^2
- b. $2 \cdot (5^2)$
- c. 2^5
- d. $2 \cdot (5)$

6. Teniendo en cuenta las siguientes expresiones algebraicas donde x y y son números reales, responda.

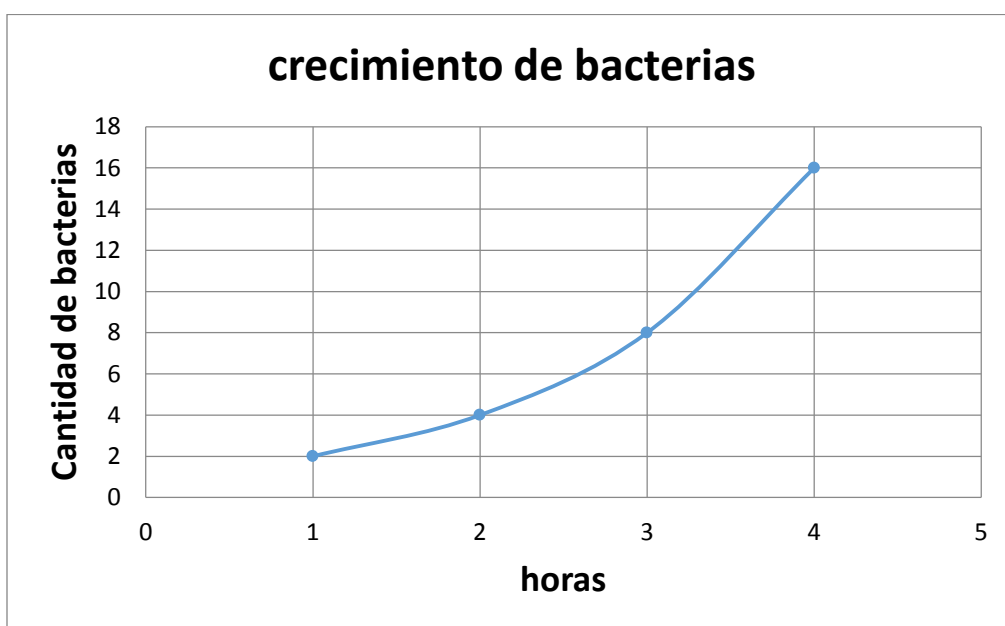
(1) $(x + y)^2$

(2) $x^2 + 2xy + y^2$

(3) $x^2 + y^2$

La afirmación verdadera, sobre las expresiones (1), (2), (3) es:

- a. Las expresiones (1) y (3) son equivalentes.
 - b. Las expresiones (2) y (3) son equivalentes.
 - c. Las expresiones (1) y (2) son equivalentes.
 - d. Todas las expresiones son equivalentes
7. Una población de bacterias crece cada hora como se muestra en el siguiente gráfico.



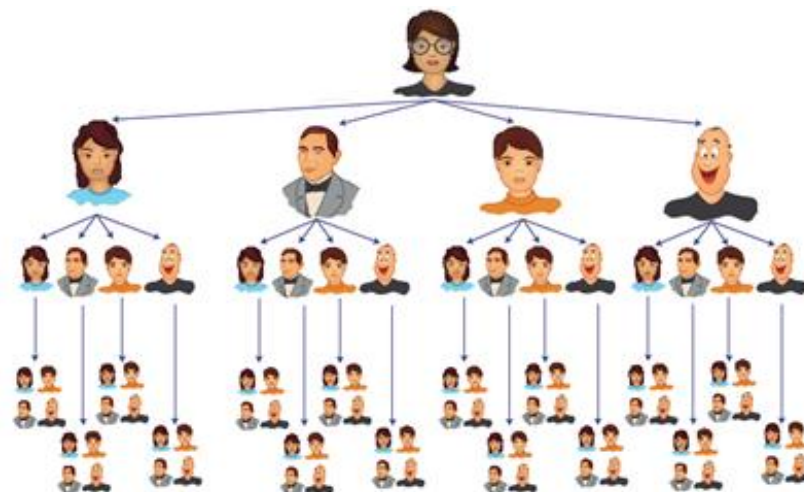
De lo anterior se puede afirmar que:

- a. El número de bacterias es el doble de la hora
- b. En la quinta hora la cantidad de bacterias es 25
- c. El crecimiento de las bacterias cada hora es el doble de la anterior
- d. Ninguna de las anteriores

8. Entre recibir diariamente diez millones de pesos durante un mes, o recibir hoy un peso, mañana dos pesos, pasado mañana cuatro pesos y así sucesivamente para ir duplicando la cantidad del día anterior durante un mes, ¿Qué alternativa es mejor?

Parte B

9. La figura que se muestra a continuación representa la cantidad de abuelos que hay en una familia en el transcurso de las generaciones.



Si se quiere saber la cantidad de abuelos que hay en una familia hasta la cuarta generación, el procedimiento correcto que le permite hallar esta cantidad es:

- $4^4 = 256$
 - $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 341$
 - $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 4^{10}$
 - $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$
10. Samuel y Martina encuentran las siguientes fichas de un juego, solo dos fichas están marcadas con el paso 1 y 7. En las instrucciones del juego se encuentran con la frase “simplifica la expresión paso a paso para lograr iniciar el juego”.

Escribe abajo de cada ficha cual paso consideras es el más adecuado para que Samuel y Martina simplifiquen la expresión desde el paso 1 hasta llegar a el paso 7 y logren iniciar el juego.

$\frac{2^5 \cdot 3^4}{2^5}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}}$	81	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 2^2}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$	3^4
			Paso 7		Paso 1	

11. Salome quiere saber si $(-8)^n$ Será siempre un resultado negativo. Le podrías decir respecto a esto que:

- a. El resultado $(-8)^n$ es siempre negativo sin importar el valor de n .
- b. $(-8)^n$ es positivo sólo si el exponente n es impar.
- c. El resultado de $(-8)^n$ es siempre positivo sin importar el valor de n .
- d. $(-8)^n$ es negativo sólo si el exponente n es impar

12. De las siguientes igualdades:

$$\text{I. } \left(9^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{2}{2}}$$

$$\text{II. } \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (9^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{III. } (9^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{2}{2}}$$

Las correctas son:

- a. I y III
- b. II solamente
- c. III solamente
- d. II y III

13. Observe el siguiente procedimiento e indica el paso donde está el error. Justifica tu respuesta

$$16^3\sqrt{16} + 16^{\frac{3}{2}} \quad \text{paso 1}$$

$$16 \times 16^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{3}{2}} \quad \text{paso 2}$$

$$16^{\frac{4}{3}} + 16^{\frac{3}{2}} \quad \text{paso 3}$$

$$16^{\frac{17}{6}} \quad \text{paso 4}$$

$$\sqrt[6]{16^{17}} \quad \text{paso 5}$$

14. Resolver las siguientes operaciones aplicando las propiedades de la potenciación.

a) $2^3 \cdot 2^4 =$

b) $(3 \cdot 2)^3 =$

c) $\left(\frac{3^3}{3^2}\right) =$

d) $\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^2 =$

15. Sandra y Jorge revisan el parcial que realizaron en pareja y discuten sobre estos tres ejercicios propuestos en la prueba.

a. ¿De los resultados de estos ejercicios cual consideras correctos?

b. ¿Indique porque los otros son incorrectos?

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3
$2^0 = 1$	$2^{-1} = -2$	$1^2 = 2$

16. Un bodeguero guarda kilos de café en una caja cuadrada, de tal forma que a lo largo hay 15 kilos, e igual que en el ancho y la profundidad de la caja. ¿cuántos kilos de café hay en la caja?

3.1.2 análisis preliminar

Para el diseño de la prueba, fue importante la documentación de las distintas investigaciones planteadas en el capítulo I, que permitieran indagar y evidenciar las dificultades y errores que presentaran los estudiantes alrededor de este concepto, los resultados obtenidos en esta documentación permitieron caracterizar las preguntas seleccionadas, algunas de ellas fueron tomadas y reformuladas de distintas fuentes, como las Pruebas Saber Pro, Los Derechos Básicos de Aprendizaje y de Libros de textos escolares Educación Matemática. Por lo tanto se clasifican los diversos contenidos matemáticos específicos y expectativas de desempeños en torno a la potenciación,

En la siguiente tabla se describen específicamente los contenidos matemáticos que se pretende evaluar en cada pregunta, las expectativas de desempeño y la fuente de cada una de ellas, con esta tabla se resume las descripciones realizadas en la página 55.

Tabla 2. Análisis preliminar, Prueba

Preguntas	Expectativa de desempeño	Contenido matemático específico
PRUEBA PARTE A		
Pregunta 1	Se espera que los estudiantes a partir de una situación presentada en lenguaje natural determinen que datos son necesarios para solucionar el problema por medio de una potenciación definida como una multiplicación retirada.	Concepto de potenciación
Pregunta 2		
Pregunta 3	Se espera que los estudiantes en esta pregunta logren establecer la equivalencia que representa un número escrito en base diez (notación científica) para crear, expresar y representar cantidades en la numeración decimal.	Notación científica
Pregunta 4	Con esta pregunta se espera que los estudiantes logren resolver expresiones escritas en notación científica, utilizando para este fin las operaciones con potencias, para dar respuesta a una situación problemática.	
Pregunta 5	Esta pregunta está diseñada para que los estudiantes	Otras

	reconozcan la potenciación en otro tipo de representaciones, en este caso desde la geometría, para ello debe buscar el patrón de crecimiento que dé cuenta de la relación entre la potencia y figuras geométricas.	representaciones en la potenciación
Pregunta 6	Con esta pregunta se espera que los estudiantes realicen adecuadamente las operaciones respetando la estructura aditiva de la potenciación.	Estructura de aditiva de la potenciación
Pregunta 7	Se espera que los estudiantes logren interpretar información en graficas estadísticas donde a partir de ellas logren hacer inferencias utilizando cálculos cuantitativos, reconociendo el significado de la potenciación.	Otras representaciones en la potenciación
Pregunta 8	En esta pregunta se espera que los estudiantes a través de la resolución de problemas puedan vislumbrar el uso de la potenciación en la solución de una situación problemática.	Concepto de potenciación
PRUEBA PARTE B		
Pregunta 9	Con esta pregunta se espera que los estudiantes, puedan establecer las principales características sobre la estructura aditiva de la potenciación; es decir que puedan resolver problemas que involucren el uso de la adición en la potenciación, pero teniendo en cuenta el concepto de dicha operación.	Estructura aditiva de la potenciación
Pregunta 10	Se espera con esta pregunta que los estudiantes logren definir una secuencia correcta, que permita mostrar una simplificación de la expresión, para ello es necesario que ellos reconozcan que propiedades de la potenciación se han aplicado.	Estructura multiplicativa de la potenciación (propiedades)
Pregunta 11	Con esta pregunta se espera que los estudiantes sean capaces de comprender conceptualmente algunas generalidades de las propiedades de la potenciación, en este caso que pasa cuando la base es un número negativo y exponente es impar.	
Pregunta 12	Con esta pregunta se pretende evaluar en los estudiantes la forma como aplican algunas propiedades de las potencias y que puedan establecer qué condiciones son necesarias para que dos o más expresiones sean equivalentes.	Expresiones equivalentes
Pregunta 13	Se espera que los estudiantes relacionen la potenciación y la radicación como operaciones inversas entre sí, a través de la ejercitación formulación y comparación de	Relación entre la potenciación y la radicación

	procedimientos.	
Pregunta 14	Con esta pregunta se espera que los estudiantes logren resolver los ejercicios correctamente, utilizando para esto las propiedades de la potenciación.	Estructura multiplicativa de la potenciación (propiedades)
Pregunta 15	Se espera que los estudiantes logren identificar algunas de las restricciones que hay en la potenciación cuando se usa el concepto como una multiplicación, es decir: que pasa cuando el exponente es cero o negativo y que pasa cuando la base 1.	
Pregunta 16	Se espera que el estudiante pueda traducir un problema geométrico escrito en lenguaje natural geométrica por medio de una expresión Matemática. Donde tenga que hacer uso del concepto de potenciación a través de la resolución de problemas.	Concepto de potenciación

3.1.3. Metodología de la implementación.

La prueba diagnóstica se desarrolló en dos sesiones las cuales tenían una duración aproximada de dos horas cada una, se llevó a cabo el día 30 de Noviembre de 2016 a 35 estudiantes de grado noveno de la institución Rafael Navia Varón.

Las actividades fueron propuestas para ser resueltas individualmente al ser diseñada como una evaluación, quienes estuvieron a cargo de dirigir la prueba durante las dos secciones fueron las autoras de este trabajo, sin tener la intervención de las profesoras de la Institución, es importante rescatar que no se pudieron realizar registros fotográficos o audiovisuales ya que no se contaba con los permisos de los padres de familia de los estudiantes que participaron en la prueba.

3.1.4. Población

La prueba diagnóstica la realizaron 35 estudiantes de grado noveno de La Institución Educativa Rafael Navia Varón (Ocho estudiantes pertenecen al grado 9-1, catorce corresponden al grado 9-2 y trece a 9-3). Esta institución es de carácter oficial y ofrece en los en los grado 6° a

11° la modalidad técnica industrial en sus especialidades de Diseño y Medios Visuales, Electricidad y Electrónica, Mecánica Automotriz y Sistemas; es de carácter mixto, la Institución se encuentra ubicada en la calle 11 No. 46-45 del Barrio Departamental en la Comuna 10 de Santiago de Cali.

3.2. Resultados y análisis de resultados

En la siguiente sección se organizan los resultados que obtuvieron los estudiantes en el desarrollo de la prueba diagnóstica a través de una tipificación presentada en tablas, en ella se detallan los tipos de respuestas con sus respectivas frecuencias tanto absolutas como relativas, también se describen las justificaciones dadas por los estudiantes para sustentar sus respuestas. Para realizar los análisis se identificaron los errores y las posibles dificultades que los causan, esto con el fin de validar los reportes encontrados en las investigaciones que se tomaron en consideración a lo largo de este trabajo. Por último se mencionan algunas conclusiones de los resultados de la prueba diagnóstica.

A continuación se presentan las convenciones que se utilizaron para organizar los resultados en las tablas:

FA: frecuencia absoluta

FR: frecuencia relativa

T (n): tipo de respuesta, donde $n=1, 2, 3, \dots$ por ejemplo T1: tipo de respuesta 1.

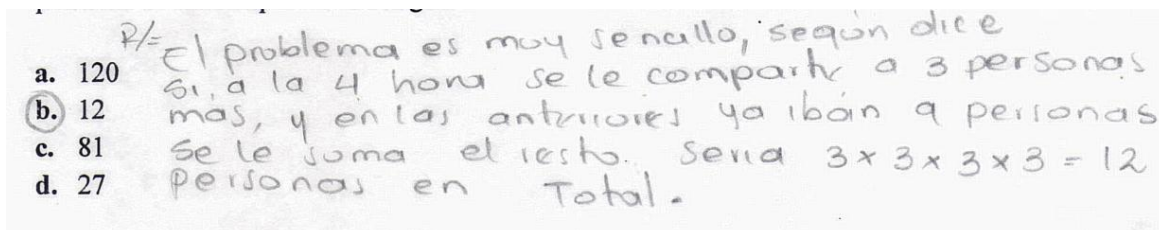
Tabla 3. Tipos de respuesta Pregunta 1, Prueba parte A

1. Al Facebook de Ana le enviaron la imagen de un tesoro, para tener suerte debe compartirla en una hora con 3 personas, a la siguiente hora cada una de ellas comparte la misma imagen con otras 3 personas, quienes continúan en la siguiente hora compartiendo la imagen con 3 personas diferentes. Si se sigue compartiendo la imagen de la misma forma, a la cuarta hora a cuantas personas se les compartirá la imagen.						
a. 120						
b. 12						
c. 81						
d. 27						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F.A	F. R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>a</i> .	1	2,9%	No justifica la elección mediante un proceso numérico. El estudiante manifiesta no saber calcular para obtener la respuesta correcta.	1	2,9%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>b</i> .	16	45,7%	Estudiantes que multiplican la base con el exponente de la expresión 3^4	14	40%
				Expresa la multiplicación reiterada de la expresión 3^4 pero lo resuelve en forma de suma.	1	2,9%
				No justifica	1	2,9%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción correcta <i>c</i> .	8	22,9%	Utilizan la expresión 3^4 y desarrollan la multiplicación reiterada.	7	20%
				Argumenta que 81 es múltiplo de 3; obvia que las demás opciones también lo son.	1	2,9%
T4	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>d</i> .	9	25,7%	Obvian una hora de compartir la imagen, por ejemplo: $3^3 = 27$, $3^2 \times 3 = 27$, $3^3 = 9 \times 3 = 27$.	8	22,9%
				Representa la situación mediante un diagrama de árbol, en el cual asume que en la primera hora, el mensaje lo tiene Ana y sólo hasta la segunda hora el mensaje es enviado a tres personas más.	1	2,9%
T5	Otras respuestas incorrectas	1	2,9%	El estudiante omite una hora, en la tercera hora asume que el mensaje sólo se envía una vez por persona y realiza una adición $3 + (3 + 3 + 3) + (3 + 3 + 3) = 21$	1	2,9%

Teniendo en cuenta la tabla anterior se puede observar que la mayoría de los estudiantes optan por las opciones incorrectas b y d (71,4%). En sus procedimientos muestran que, el 40% utilizan la expresión 3^4 para relacionarla con la situación que da cuenta del problema, pero al desarrollarla se evidencia que estos estudiantes asumen la potenciación como un producto entre la base y el exponente; uno de ellos, muestra a través del lenguaje natural una interpretación correcta de la situación y expresa la multiplicación reiterada que permite hallar la solución del

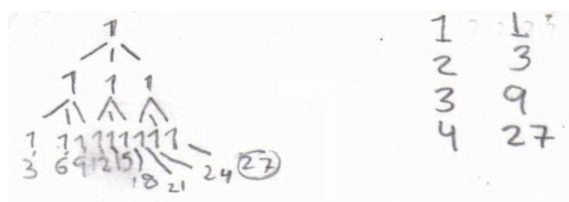
interrogante, sin embargo, opera los productos como adiciones, tal como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 5. Ejemplo de respuesta, pregunta 1.



Con relación a la opción *d*, cerca del 23% expresan la potencia para el caso donde se obvian la cuarta hora de compartir la imagen o le asignan a la primera hora el mensaje a Ana y a partir de la segunda hora el mensaje se empieza a enviar a tres personas más. Un estudiante interpreta el problema desde un diagrama de árbol, el cual se muestra a continuación.

Figura 6 Ejemplo de respuesta, pregunta 1



Lo anterior parece indicar que algunos estudiantes que participan de esta experiencia tienen alguna idea de situaciones donde es necesario usar un producto reiterado o una potenciación para dar solución, sin embargo, se aprecia que hay dificultades con el desarrollo y operatoria de la potencia para calcular un valor numérico y además se muestra de cierta dificultad al traducir la situación problema en una expresión numérica, pues se omiten datos o relaciones importantes.

Sobresale, aunque en un estudiante, el uso del diagrama del árbol, el cual es una herramienta que se utiliza regularmente en los problemas de conteo y probabilidad para determinar todos los

posibles resultados de un experimento aleatorio, también muestra el patrón de crecimiento reiterado de la potenciación, al representar en un esquema partes iguales o copias de un original.

De otra parte cerca del 23% de los estudiantes evaluados, contestan en forma correcta, lo que indica inicialmente que estos estudiantes interpretan y comprenden una situación de potenciación expuesta en un lenguaje natural, la traducen en una expresión numérica y desarrollan los cálculos de manera correcta.

Tabla 4. Tipos de respuesta Pregunta 2, Prueba parte A

2. Andrés jugando con un papel, pensó en tirarlo al cesto, pero antes decidió partirlo en dos y superponer las partes; de nuevo lo partió en dos y superpuso las partes, y así sucesivamente. Entonces pensó. ¿Cuántos trozos de papel habré tirado al cesto después de efectuar 5 veces esa operación?

La respuesta correcta a la pregunta de Andrés es:

a. 10

b. 32

c. 62

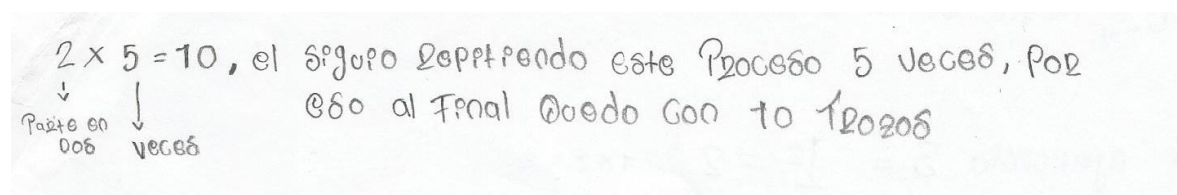
d. 25

Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F. A	F.R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>a</i>	20	57,1%	Multiplican $2 \times 5 = 10$ asumiendo que el papel se parte de dos en dos cinco veces.	17	48,6%
				No justifican.	3	8,6%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción correcta <i>b</i>	15	42,9%	Representa la situación mediante un diagrama del árbol	1	2,9%
				Obtienen el resultado correcto usando material concreto en este caso una hoja de block, siguiendo los pasos del enunciado.	4	11,4%
				Utilizan la expresión 2^5 y la desarrollan como multiplicación reiterada.	8	22,9%
				Descomponen en factores primos el 32 e indican que es igual a cinco veces dos.	2	5,7%

De acuerdo a los resultados que se presentan en la tabla anterior, se puede observar que los estudiantes seleccionaron dos de las cuatro opciones de respuestas planteadas, de las cuales más de la mitad (57,1%) seleccionaron la opción incorrecta *a*, asumiendo la situación como una

multiplicación, es decir la mayoría justifica indicando que la situación problema se resuelve mediante la expresión 2×5 , que representa la forma como se divide el papel y las veces que se requiere hacerlo, un ejemplo de esto se observa en la siguiente imagen:

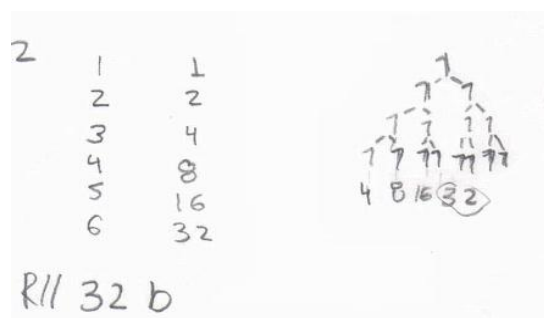
Figura 7 Ejemplo de respuesta, pregunta 2



Lo anterior parece indicar que a pesar que estos estudiantes comprenden que la hoja de papel se divide inicialmente en dos, no llegan a asimilar todo el proceso en el cual el resultado de esa partición se divide nuevamente en dos obteniéndose cuatro partes y así sucesivamente hasta cinco, sino que este hecho lo asumen cinco veces consecutivas sin tener en cuenta cada resultado anterior; en consecuencia su representación numérica está acorde con este razonamiento por ello no llegan a la expresión correcta 2^5 . Es decir que estos estudiantes revelan cierta dificultad al convertir un enunciado verbal en un numérico por problemas en la interpretación del enunciado en lenguaje natural.

Cerca del 43% de los estudiantes aciertan al responder la opción *b*, en las justificaciones que presentan, se observa distintas estrategias para llegar a la solución de manera exitosa; una de estas, es a través de un diagrama de árbol, que sirve como guía para visualizar gráficamente que ocurre a medida que se corta el papel. Este tipo de estrategia parece indicar que el estudiante requiere de un apoyo visual relacionado con la representación de una situación de crecimiento que le permite pasar al conteo, para totalizar y dar la respuesta correcta, como se muestra a continuación:

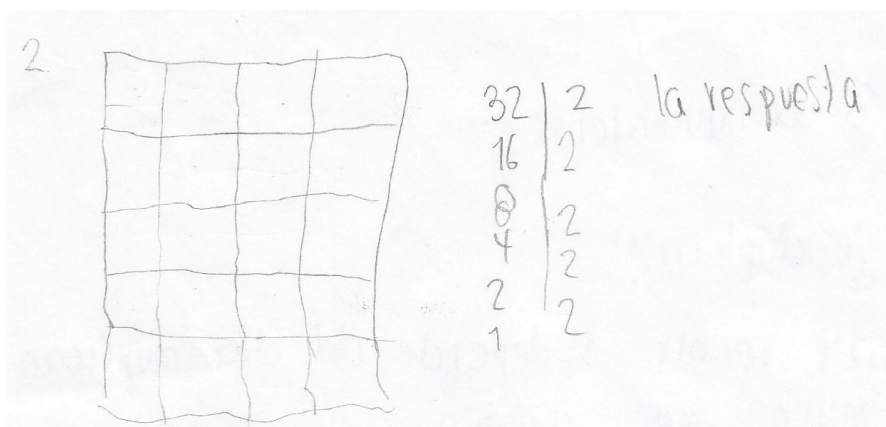
Figura 8. Ejemplo de respuesta, pregunta 2



De esto se puede decir que el estudiante usa un texto intermedio (diagrama de árbol) para comprender la situación, pero no utiliza la potenciación para dar cuenta de esto. El 11,4% de este grupo utilizan material físico, en este caso una hoja de papel, para poder seguir el proceso que se indica en el problema y resolverlo. Esto podría indicar que ellos son tienen la habilidad de traducir la situación utilizando una mediación concreta como referencia al momento de comprender el problema, llegando a conjeturas que pueden ser justificadas o refutadas.

Por otra parte a pesar de que dos estudiantes seleccionan esta respuesta, su justificación no está acorde con su elección, ellos utilizan el siguiente razonamiento:

Figura 9. Ejemplo de respuesta, pregunta 2



Es posible que no hayan logrado interpretar la situación planteada, ya que su razonamiento no es coherente entre sí, por un lado realizan un gráfico que no corresponde a la situación y por otra

parte seleccionan esta opción y realizan la descomposición del 32 en factores primos, puede ser que la respuesta la eligieran al azar aunque esta podría ser una buena justificación, pues se vislumbra la relación entre la potenciación y la descomposición de números.

Por otra parte el 22.9% de estudiantes que respondieron correctamente utilizan la expresión 2^5 y la resuelven como una multiplicación reiterada, es decir que hay una apropiación del concepto de potencia cuando el exponente pertenece a los números naturales, así como la relación de este en situaciones planteadas a través de un lenguaje natural.

Tabla 5. Tipos de respuesta Pregunta 3, Prueba parte A

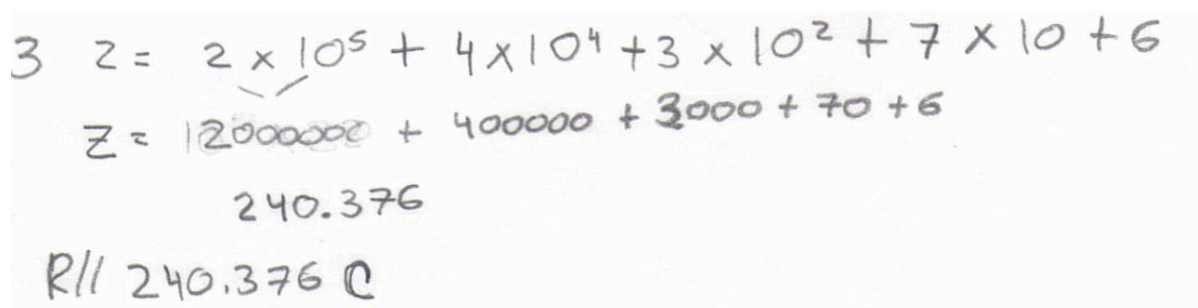
3. Considere el número: $Z = 2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6$ Es correcto afirmar que: a. La representación decimal de Z es 24.376 y está entre 24.375,09 y 24.376,1 b. La representación decimal de Z es 243.760 c. La representación decimal de Z es 240.376 está entre 240.375,09 y 240.376,1 d. La representación decimal de Z es 2437,6						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F.A	F. R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>a.</i>	2	5,7%	Asume la expresión como una multiplicación entre el coeficiente con la base y luego con el exponente.	1	2,9%
				No justifica	1	2,9%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>b.</i>	4	11,4%	Desarrolla los productos antes que las potencias.	1	2,9%
				No justifica	3	8,6%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción correcta <i>c.</i>	17	48,6%	Desarrolla las potencias en base diez y respeta la jerarquía de las operaciones.	11	31,4%
				Aumenta al 10 de la base la cantidad de ceros que se indican en el exponente así por ejemplo $10^2 = 100$.	1	2,9%
				Asume la potenciación como una multiplicación entre base y exponente.	3	8,6%
				No justifican	2	5,7%
T4	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>d.</i>	4	11,4%	Separan los coeficientes de la expresión dada, consideran que es necesaria una coma en una representación decimal.	3	8,6%
				No justifican	1	2,9%
T5	Otras respuestas incorrectas	2	5,7%	No tiene en cuenta la jerarquía de las operaciones, al operar $2 \times 10^5 + 4 \times 10^4$ como $(2 \times 10^5 + 4) \times 10^4$ o $7 \times 10 + 6$ como $7 \times (10 + 6)$	2	2,9%
T6	No responden	6	17,1%		6	17,1%

Según los resultados presentados en la tabla 3, aproximadamente la mitad de los estudiantes eligen la opción correcta *c*, en sus procedimientos se observa que el 31,4%, justifican adecuadamente esta elección al obtener la cantidad total de la expresión dada, realizando los

cálculos de las potencias con base diez y respetando la jerarquía de las operaciones, lo que por el momento permite indicar que estos estudiantes reconocen la escritura de un número en base diez en una composición multiplicativa.

Por otra parte, se presentan procedimientos no acordes con la respuesta correcta, al observar que algunos estudiantes continúan asumiendo la potenciación como un producto entre la base y el exponente, de este modo desarrollan 2×10^5 como $2 \times 10 \times 5 = 100$ o consideran que las potencias con base diez se operan aumentando al diez de la base la cantidad de ceros que determina el exponente, como se muestran en la siguiente imagen:

Figura 10. Ejemplo de respuesta, pregunta 3



3 $z = 2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6$
 $z = 12000000 + 400000 + 3000 + 70 + 6$
 240.376
 R// 240.376 C

En la intención de comprender lo que conlleva a realizar determinado proceso a las potencias con base diez, se aprecia inicialmente un acercamiento por parte del estudiante al concepto de la potenciación como multiplicación repetida, donde el exponente indica las veces que se multiplica la base por sí misma, Sin embargo, en este caso el estudiante estaría aumentando un factor más, o es probable que esté haciendo uso de conocimientos previos de algoritmos de la multiplicación por cifras seguidas de ceros como 10, 100, 1000, etc; donde se aumenta la cantidad de ceros que tiene estos números al factor que lo acompaña, por ejemplo $100 \times 2 = 200$, al apropiarse de este conocimiento, el estudiante infiere que se debe aumentar al diez de la base la cantidad de ceros

que indique el exponente. Posteriormente al sumar inadecuadamente, obtiene un total de 2.403.706, diferente de 240.376 indicada en la opción c.

En relación con los estudiantes que eligen las respuestas incorrectas, se muestra inicialmente que gran parte de las justificaciones no son acordes con las cifras presentadas en determinadas alternativas, inicialmente quienes seleccionan la opción b, en sus procedimientos desarrollan los productos antes que las potencias: por ejemplo: $2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 = (2 \times 10)^5 + (10 \times 4)^4 = 20^5 + 40^4$, posteriormente suma las bases y los exponentes; con este proceso, se puede evidenciar dificultades en la aplicación de la jerarquía de las operaciones y en el desarrollo de la potenciación.

Por otra parte se evidencia que los estudiantes que obtienen el valor de la cifra de la opción d, en sus procesos transcriben los coeficientes y no desarrollan las potencias de base diez, por lo que ignoran la ausencia de unidades de mil, la cual puede estar representada como 0×10^3 en la expresión dada; como se muestra a continuación:

Figura 11. Ejemplo de respuesta, pregunta 3

③ $2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6$ en el numero hay cuatro ceros como la coma cuatro lugares.

2 4 3 7 6

2437,6

En la gráfica anterior, se observa que los estudiantes consideran necesario, asignar una coma en la cuarta cifra de izquierda a derecha, argumentando que esto se debe a los cuatro ceros que se observan en la expresión, (los ceros de las bases diez), esto quizás se debe a que las opciones de respuestas requieren la representación decimal, pero tal vez la palabra “decimal” hace que los estudiantes consideren que la respuesta debe incluir una coma, ya que esta se asocia al concepto de números decimales, sin embargo en este caso, cuando el número es un real positivo, la

representación decimal, corresponde a la forma de escribir un número, descomponiéndolo por medio de potencias del número 10 (negativas y/o positivas).

Finalmente dos estudiantes a pesar de desarrollar adecuadamente las potencias en base diez utilizando multiplicaciones reiteradas no tienen en cuenta la jerarquía de las operaciones obteniendo otras respuestas incorrectas, parte de este proceso se muestra en la siguiente imagen:

Figura 12. *Ejemplo de respuesta, pregunta 3*

The image shows handwritten work on a piece of paper. At the top, there is a calculation: $2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 200'000$. Below this, the student has written: $Z = 2 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6$. Underneath that, there is another calculation: $2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$. At the bottom, the student has written: $200'000 + 4 = 200'004 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$. The work shows a misunderstanding of how to combine terms with different powers of 10.

Lo anterior parece indicar que la mayoría de los estudiantes, presentan dificultades en la aplicación de la jerarquía de las operaciones y apropiación del concepto de potencia como multiplicación reiterada, el cual es un conocimiento previo para lograr que los estudiantes reconozcan diferentes cantidades por medio de la notación en base diez, como descomposición de los números en representaciones más pequeñas de otros.

Tabla 6. Tipos de respuesta Pregunta 4, Prueba parte A

4. Rocío y Consuelo van a un restaurante de lujo que pone todos sus precios en formato de potencia para atraer a más clientes, como se muestra en la siguiente tabla.

Menú	Precio \$
Ensalada	3×10^3
Plato ejecutivo	$3^4 \times 10^2$
Plato Especialidad de la casa	$3 \times 2^2 \times 10^3$
Plato Premium	$5^2 \times 1^3 \times 10^3$
Bebida	$4^2 \times 10^2$

Si Rocío consumió un plato Premium y una bebida y Consuelo una ensalada, un Plato ejecutivo y una bebida. El valor total que debe pagar es:

- a. \$112.200
- b. \$ 89.300
- c. \$ 39.300
- d. \$ 44.300

Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F. A	F.R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>b</i>	2	5,7%	Desarrollan las potencia con base uno multiplicando base y exponente. ($1^3 \neq 1 \times 3$)	2	5,7%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción correcta <i>c</i>	15	42,9%	Realizan los cálculos respetando la jerarquía de las operaciones.	14	40%
				No justifica	1	2,9%
T3	Otras respuestas incorrectas	12	34,3%	No calculan el pedido completo por ejemplo: omiten el pedido de consuelo o de una bebida.	4	11,4%
				Suman las bases y los exponentes por ejemplo: $3 \times 2^2 \times 10^3 = 15^6$ o multiplica las bases y suman los exponentes por ejemplo $3 \times 2^2 \times 10^3 = 60^5$ obviando el exponente 1 del 3.	2	5,7%
				Multiplican base con exponente, posteriormente multiplican el coeficiente	6	17,1%
T4	No responden	6	17,1%		6	17,1%

Teniendo en cuenta los datos registrados en la tabla anterior se puede apreciar que gran parte de los estudiantes (42,9%) optan por seleccionar la opción correcta c, respetando la jerarquía de las operaciones al resolver el problema. De esto inicialmente se puede indicar que este porcentaje de estudiantes reconocen una cantidad expresada en base diez, como una composición multiplicativa, además establecen las equivalencias que representan este tipo de potencias en la numeración decimal.

En cuanto a los estudiantes que no acertaron en la respuesta el 5,7% seleccionaron la opción b, ellos resuelven adecuadamente las potencias diferentes de base 1, ya que multiplican la base con el exponente es decir $1^3 = 1 \times 3$. Así como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 13. Ejemplo de respuesta, pregunta 4

Handwritten student work for a math problem. The student has calculated two options, (b) and (c), for a menu. Option (b) is labeled 'Rocio' and includes 'Plato premium' and 'Bebida'. Option (c) is labeled 'Conchelo' and includes 'Ensalada' and 'Plato ejecutivo'. Both options show calculations for each item and a final total.

Option	Item	Calculation	Result
(b) Rocio	Plato premium	$5^2 \times 13 \times 10^3$	$25 \times 3 \times 1000 = 75.000$
	Bebida	$4^2 \times 10^2$	$16 \times 100 = 1600$
	Total		89.300
(c) Conchelo	Ensalada	3×10^3	$3 \times 100 = 300$
	Plato ejecutivo	$3^4 \times 10^2$	$81 \times 100 = 8.100$
	Bebida	$4^2 \times 10^2$	$16 \times 100 = 1600$

Se observa que a pesar de que hay apropiación del concepto de potenciación como un producto de factores iguales, no establecen una generalización en los proceso de solución, que les permita resolver la operación de manera adecuada. Este error podría ser una manifestación de dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático descritas por Socas (2000) puesto que hay una limitación en el estudiante en seguir un argumento lógico que ya maneja, pues en algunos casos aplica correctamente el concepto y en otros no.

De los estudiantes que no seleccionaron la repuesta correcta, el 34,3% lo hacen aseverando que la respuesta no está dentro de las opciones dadas, algunos no perciben que han cometido

errores por descuido o falta de atención en la lectura del problema, puesto que a pesar de que realizan bien los cálculos, omiten uno de los pedidos o unas de las bebidas, por lo tanto su respuesta efectivamente no esté dentro de las opciones, en este caso se puede vislumbrar que ellos reconocen el concepto de la notación científica y su relación con la potenciación, al resolver las potencias como un producto reiterado y posteriormente multiplicar dichos resultados para finalmente sumar y llegar a un monto.

Se debe agregar que otros estudiantes cometen errores al no resolver correctamente una expresión escrita en notación científica, en los que destacan los siguientes procedimientos:

Figura 14. Ejemplo de respuesta, pregunta 4

Handwritten student work for Figure 14:

Lodo: consumo un plato premium y una bebida.

Calculation for Lodo: $50^8 \times 40^4 = 2.050^{12}$

Calculation for Consuelo: $30^3 \times 30^3 \times 40^1 = 1240^{10}$

Additional calculations shown:

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 40 \\ \hline 200 \\ 2000 \\ \hline 20000 \end{array}$$

Figura 15. Ejemplo de respuesta, pregunta 4

Handwritten student work for Figure 15:

④ Plato Premium $5^2 \times 7^3 \times 70^3$

✓ Bebida $4^2 \times 70^2$

✓ Ensalada 3×70^3

✓ Plato ejecutivo $3^4 \times 70^2$

✓ Bebida $4^2 \times 70^2$

Ensalada = 90

Plato ejecutivo = 240

Plato Premium = 900

Bebida = $12 \times 70 = 840$

En estas respuestas se perciben algunas dificultades en la apropiación del concepto de potenciación y la comprensión de algunas propiedades, ya que por ejemplo en la ilustración 10 se observa que la forma de resolver este tipo de ejercicios es multiplicando las bases y sumando los exponentes, por ejemplo $5^2 \times 1^3 \times 10^3 = 50^8$, con lo que se observa que los estudiantes están aplicando inadecuadamente las propiedades de los exponentes, al asumir que es válido sumar exponentes cuando las bases son diferentes, posteriormente para calcular la totalidad del pedido multiplican los resultados obtenidos anteriormente (presentando errores al resolverlos) en lugar de sumarlos. Un procedimiento similar ocurre en la ilustración 11, donde los estudiantes multiplican base con exponente y luego con el coeficiente, por ejemplo $3 \times 10^3 = 3 \times 30 = 90$, particularmente este error (multiplicar la base con el exponente) se ve constantemente en la solución de la prueba.

Por otra parte el 17.1% de estos estudiantes, no toman en cuenta el signo de la multiplicación que esta explícito en las expresiones, al sumar bases con bases y exponentes con exponentes, como se muestra en la siguiente imagen:

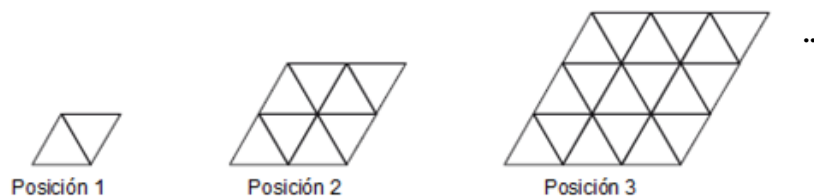
Figura 16. Ejemplo de respuesta, pregunta 4

Ensalada $3 \times 10^3 = 13^4$
 Plato ejecutivo: $3^4 \times 10^5 = 13^6$
 Plato especialidad de la casa: $3 \times 2^2 \times 10^3 = 15^6$
 Plato premium $5^2 \times 1^3 \times 10^3 = 16^8$
 Bebida $4^2 \times 10^2 = 14^4$

Con esto es posible deducir que en estos estudiantes hay poca apropiación del concepto de potenciación y por ende van a tener dificultades al trabajar con la notación científica. En la situaciones presentadas anteriormente se puede vislumbrar deficiencias en la aplicación de algoritmos y en consecuencia una inadecuada práctica de procedimientos, estos errores se pueden incluir en lo que Socas (2000) considera que son producto del proceso de aprendizaje, ya que en estos casos a pesar que los estudiantes tienen conocimientos previos sobre la multiplicación, no lo emplean para introducir la potenciación como multiplicación reiterada en los números naturales.

Tabla 7. Tipos de respuesta Pregunta 5, Prueba parte A

5. Con triángulos equiláteros ($\triangle$) iguales se construyó la siguiente secuencia de paralelogramos ($\square$). Por ejemplo, el paralelogramo en la posición 1 tiene 2 triángulos equiláteros iguales.



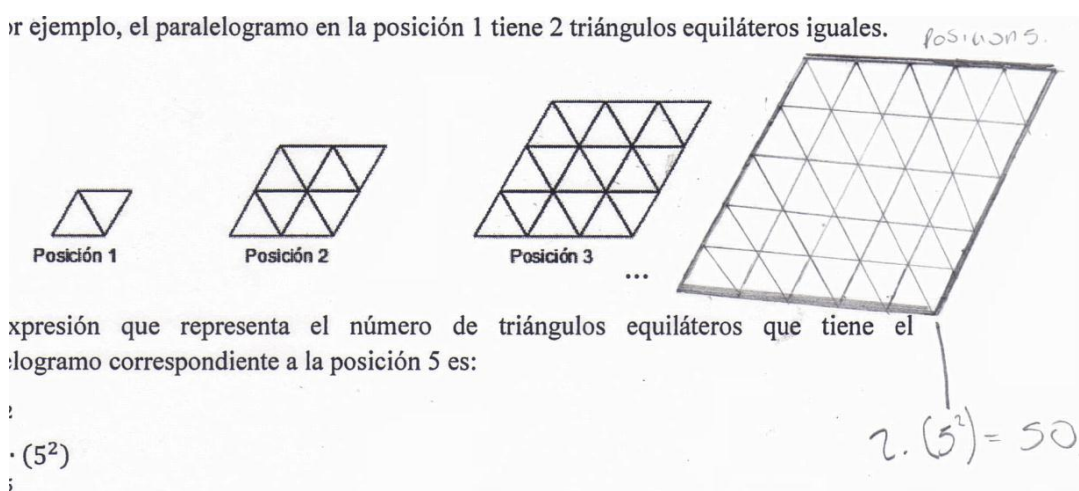
La expresión que representa el número de triángulos equiláteros que tiene el paralelogramo correspondiente a la posición 5 es:

- a. 5^2
- b. $2 \cdot (5^2)$
- c. 2^5
- d. $2 \cdot (5)$

Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F.A	F. R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta a.	5	14,3%	Eligen la expresión 5^2 asociando la base de esta expresión con la cantidad de paralelogramos que indica cada posición y el exponente lo relaciona con los dos triángulos que contiene cada paralelogramo.	2	5,7%
				Asume que la posición cinco, tiene cinco paralelogramos de altura y cinco de base, al multiplicar ambas longitudes la representa con la expresión 5^2	1	2,9%
				No justifican	2	5,7%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción correcta b.	20	57,1%	Representan gráficamente la posición cinco.	5	14,3%
				Tabulan la expresión $2 \cdot (5^2)$ para cada una de las posiciones de la secuencia.	3	8,6%
				Operan correctamente la expresión $2 \cdot (5^2)$ sin embargo no muestra porque la elige.	6	17,1%
				No justifican	6	17,1%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta c.	3	8,6%	Enuncia que multiplicando cinco veces dos se obtiene la expresión 2^5 , al relacionar la base como la cantidad de triángulos que contiene cada paralelogramo y el exponente con la posición de cada gráfico	1	2,9%
				No justifican	2	5,7%
T4	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta d.	6	17,1%	Eligen la expresión $2 \cdot (5)$ afirmando que son dos triángulos por cada paralelogramo y cinco las líneas.	1	2,9%
				No justifica	5	14,3%
T5	No responden	1	2,9%		1	2,9%

Se observa en las justificaciones presentadas en la tabla anterior, distintas interpretaciones de la secuencia de paralelogramos por parte de los estudiantes, más de la mitad, eligen la opción correcta *c*, donde el 22,9% presentan procesos acordes a la elección, logrando con éxito solucionar el interrogante de la actividad, algunos estudiantes encuentran un patrón de crecimiento de la secuencia y representan gráficamente la posición cinco como se muestra en la siguiente gráfica:

Figura 17. Ejemplo de respuesta, pregunta 5



Además de graficar correctamente, operan $2 \cdot (5^2) = 50$, para verificar que esta cantidad corresponda a la totalidad de triángulos equiláteros de la posición cinco. Hay que mencionar además que otros estudiantes tabulan la expresión $2 \cdot (n^2)$ en cada una de las posiciones, al identificar que n representa la posición de cada paralelogramo, verificando así, que esta expresión da cuenta del patrón de crecimiento de la cantidad de triángulos equiláteros de cada posición, donde concluyen que la $2 \cdot (5^2)$ corresponde a la cantidad de triángulos equiláteros de la posición cinco.

Con las justificaciones anteriores, es posible admitir por el momento, que estos estudiantes tienen habilidad para conocer y reconocer algunas representaciones de la potenciación, o

situaciones donde sea necesario usar estos procesos, para dar solución a problemas que requieran de la generalización de patrones numéricos y geométricos como los presentados en esta actividad, lo que permitirá que dominen con facilidad este concepto matemático, y algunos más que requieran de dicha destreza.

En relación al 14,3% de los estudiantes que seleccionan la opción incorrecta *a*, consideran que la expresión 5^2 corresponde a los cinco paralelogramos de base y cinco paralelogramos de altura, lo que posibilita señalar que algunos estudiantes consideren que esta respuesta está ligada a la noción del área, sin embargo, obvian los triángulos equiláteros de cada paralelogramo.

Con respecto al 8,6% de estudiantes que elige la opción *c*, solo un estudiante argumenta su respuesta indicando que multiplica de dos en dos, hasta cinco veces, al considerar que en la expresión 2^5 la base da cuenta de la cantidad de triángulos equiláteros que contiene cada paralelogramo pequeño como se muestra en la posición uno y el exponente representa la posición pedida, sin embargo ignora la forma en que crece cada una de las longitudes del paralelogramo en cada posición, de lo que se infiere que el estudiante tiene dificultades al interpretar el gráfico, traducir una adecuada expresión numérica del problema propuesto, o falta de apropiación del concepto de potenciación para obtener la respuesta correcta.

Lo anterior permite concluir que es fundamental poder movilizar diferentes registros de representación semiótica en la actividad Matemática, para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que sean reconocidos en cada una de ellas.

Hay que mencionar además que el 45% de los estudiantes no justifican sus elecciones.

Tabla 8. Tipos de respuesta Pregunta 6, Prueba parte A

6. Teniendo en cuenta las siguientes expresiones algebraicas donde x y y son números reales, responda.

(1) $(x + y)^2$
 (2) $x^2 + 2xy + y^2$
 (3) $x^2 + y^2$

La afirmación verdadera, sobre las expresiones (1), (2), (3) es:

a. Las expresiones (1) y (3) son equivalentes.
b. Las expresiones (2) y (3) son equivalentes.
c. Las expresiones (1) y (2) son equivalentes.
d. Todas las expresiones son equivalentes

Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F. A	F.R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>a</i>	22	62,9%	Distribuyen el exponente en la expresión $(x + y)^2$ o afirman que es un caso de factorización.	8	22,9%
				Toma un caso particular reemplazando las variables por dos, pero comete un error al resolverlo.	1	2,9%
				Deducen que las expresiones son equivalentes si tiene la misma cantidad de variables y los mismos exponentes	2	5,7%
				Desarrolla el binomio al cuadrado y la adición de cuadrados como multiplicación entre base y exponente.	2	5,7%
				No justifican	9	25,7%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>b</i>	1	2,9%	No justifica	1	2,9%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción correcta <i>c</i>	7	20%	Argumenta que es el binomio desarrollando la expresión $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	2	5,7%
				No justifican	5	14,3%
T4	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>d</i>	5	14,3%	La justificación no se relaciona con su elección	3	8,6%
				No justifica	2	5,7%

La anterior tabla muestra los resultados obtenidos de la pregunta 6, que pretende evaluar como los estudiantes consideran la estructura aditiva en la potenciación, en esta pregunta la mayoría de los estudiantes (62,9%) optan por seleccionar la opción incorrecta *a*. Es de resaltar

que este grupo de estudiantes utilizan varias formas para justificar que esta respuesta es verdadera, algunos consideran que es una regla general afirmando que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ o simplemente que esa es la manera como se desarrolla un caso particular de factorización, al asumir que es posible aplicar la propiedad distributiva en un binomio cuadrado, es probable que incurran en este tipo de errores al especular que este caso se resuelve igual que la potencia de un producto, este error refleja una dificultad que Socas (2000) asocia a los procesos de desarrollo cognitivo pues seguramente se presenta un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, que hace que no se tenga presente las propiedades que cumple la potenciación, en este caso la potencia con respecto a la suma algebraica. Algo semejante ocurre con un estudiante, al realizar el siguiente procedimiento $(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + y^2$, en este caso se puede notar que se reconoce el concepto potenciación como una multiplicación reiterada, pero cuando desarrolla la multiplicación de sumas algebraicas, no distribuyen de forma adecuada.

Particularmente un estudiante llega a esta respuesta al reemplazar todas las variables por dos y en la expresión $x^2 + y^2$ multiplicando las potencias en lugar de sumarlas, así, obtiene resultados equivalentes en ambas expresiones, según Kilpatrick y Rico (1995) citado en Martínez (2010) estos errores reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales y tienen relativamente poca importancia, en este caso el estudiante aplica una estrategia válida, al reemplazar las variables por números particulares, donde se puede notar una apropiación de la potenciación como operación.

Figura 18. Ejemplo de respuesta, pregunta 6

$$(1) (x + y)^2 = 16$$

$$(3) x^2 + y^2 = 16$$

En relación a la opción incorrecta *d*, el 14.3% de los estudiantes la seleccionan, al asumir la potencia como una multiplicación entre base y exponente, cambiando las adiciones por multiplicaciones así:

Figura 19. Ejemplo de respuesta, pregunta 6

$$(1) (x + y)^2 = 2xy$$

$$(2) x^2 + 2xy + y^2 = 2x \cdot 2xy \cdot 2y$$

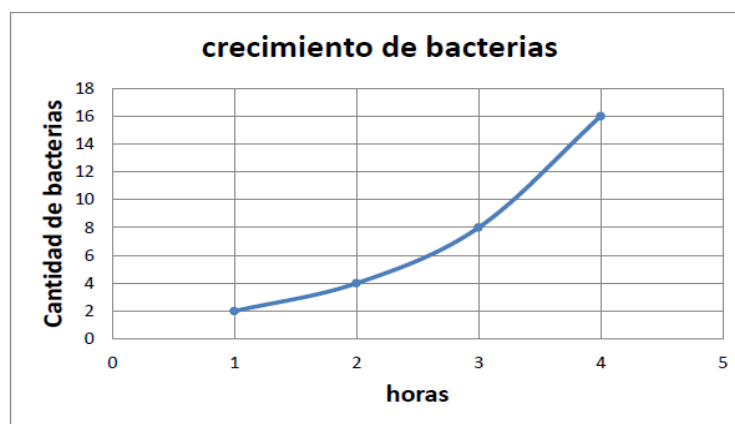
$$(3) x^2 + y^2 = 2x \cdot 2y$$

En esta imagen se puede apreciar que el estudiante considera que las tres expresiones son equivalentes porque al “resolverlas” tienen las mismas variables y los mismos coeficientes, de lo que se especula, en primer lugar que no hay comprensión en la aplicación de potenciación en la estructura aditiva en y por otra parte no reconoce la noción de equivalencia.

En esta pregunta solo el 20% de los estudiantes seleccionan la opción correcta, el 5,7% asegura que las opciones escogidas son equivalentes porque $x^2 + 2xy + y^2$ es la solución del binomio al cuadrado o desarrolla la expresión $(x + y)^2$ correctamente, es probable que logren diferenciar en actividades como estas en los algoritmos que contiene la estructura aditiva de la multiplicativa en la potenciación.

Tabla 9. Tipos de respuesta Pregunta 7, Prueba parte A

7. Una población de bacterias crece cada hora como se muestra en el siguiente gráfico.



De lo anterior se puede afirmar que:

- El número de bacterias es el doble de la hora
- En la quinta hora la cantidad de bacterias es 25
- El crecimiento de las bacterias cada hora es el doble de la anterior
- Ninguna de las anteriores

Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F. A	F.R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>a</i>	4	11,4%	Declaran que en la gráfica las bacterias suben de dos en dos.	2	5,7%
				No justifican	2	5,7%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>b</i>	1	2,9%	Multiplican cada hora por sí misma.	1	2,9%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción correcta <i>c</i>	25	71,4%	Multiplican reiteradamente cinco veces dos.	4	11,4%
				Toma la cantidad de bacterias de la primera hora y suma sucesivamente por el doble del resultado anterior así: $2 + 2 = 4$; $4 + 4 = 8$; $8 + 8 = 16$	1	2,9%
				La justificación no es acorde a la elección por ejemplo: Utiliza la expresión n^2 donde n es el número de horas	2	5,7%
				No justifican o parafrasean el enunciado.	18	51,4%
T4	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>d</i>	5	14,3%	Justifican de forma retórica añadiendo algunos elementos exteriores.	2	5,7%
				No justifican	3	8,6%

Según los resultados que se observan en la tabla 7, la gran mayoría seleccionan la opción correcta *c*, en sus procedimientos, el 51,4% parafrasean la pregunta, lo que permite apreciar que existe cierta dificultad en estos estudiantes para interpretar la información presentada a través de algunas graficas estadísticas, un estudiante utiliza la expresión n^2 , al manifestar que esta es otra forma de indicar que el crecimiento de las bacterias cada hora es el doble del anterior, sin embargo la expresión correcta es 2^n . Añadido a esto se destaca aunque en un solo estudiante el uso implícito del concepto de potenciación ya que toma la cantidad de bacterias de la primera hora y suma sucesivamente por el doble del resultado anterior así: $2 + 2 = 4$; $4 + 4 = 8$; $8 + 8 = 16$; $16 + 16 = 32$.

El 14,3% de estudiantes eligen la opción *d*, donde dos de ellos afirman que las bacterias aumentan de cualquier manera sin importan el tiempo que transcurra, lo anterior hace pensar que no tienen en consideración el grafico puesto que aluden a factores exteriores que no se contemplan en la gráfica.

El resto de estudiantes eligen la opción *a*, de esto se asume que solo están teniendo en cuenta la escala del eje vertical referente a la cantidad de bacterias asumiendo que el crecimiento es de dos en dos.

Tabla 10. Tipos de respuesta Pregunta 8, Prueba parte A

8. Entre recibir diariamente diez millones de pesos durante un mes, o recibir hoy un peso, mañana dos pesos, pasado mañana cuatro pesos y así sucesivamente para ir duplicando la cantidad del día anterior durante un mes, ¿Qué alternativa es mejor?						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Descripción de los procedimientos	F.A	F. R
T1	Estudiantes que eligen la alternativa incorrecta de recibir diariamente diez millones	16	45,7%	Realizan un proceso numérico para contrastar ambas alternativas	2	5,7%
				Indica de manera retorica que con los \$10.000.000 diarios se beneficiarían más, porque es más dinero, no es favorable el recibir un peso cada día.	13	37,1%
				No justifica	1	2,9%
T2	Estudiantes que eligen la alternativa correcta de ir duplicando la cantidad del día anterior	13	37,1%	Realizan un proceso numérico para contrastar ambas alternativas	2	5,7%
				Manifiestan de manera retórica y reflexiva que la segunda alternativa es mejor.	5	14,2%
				No justifican	6	17,1%
T3	No eligen ninguna de las dos alternativas	6	17,1%	Indican que es mejor mensualmente, cuando ambas alternativas eran en un mes.	2	5,7%
				Indican que ninguna de las dos o no responde	4	11,4%

En lo que respecta a la pregunta 8, se logra evidenciar que el 45,7 % de los estudiantes eligen la alternativa incorrecta de recibir diariamente diez millones, solo el 5,7% logra justificar su elección a través de un procedimiento numérico para contrastar ambas alternativas, por una parte calculan adecuadamente el monto total de la primera opción, multiplicando \$10.000.000 con los 30 días; pero al interpretar lo que pasa en la segunda alternativa, no logran llegar a la respuesta correcta, al parecer porque no comprenden la situación del problema, por ejemplo un estudiante considera que cada día se aumenta un peso, $(1 + 2 + 3 + 4 \dots 30)$ mientras que otro utiliza la expresión $30^2 = 900$ pesos, donde quizás relacione el exponente con la forma como se duplica la cantidad durante el mes.

El 37,1 % indican de manera retorica que con lo \$10.000.00 diarios, se beneficiarían más porque la otra opción no representa una cantidad grande al recibir tan pocos pesos diarios.

En relación con el 37% de estudiantes que concluyen que es mejor recibir el doble del día anterior, solamente el 5,7% realiza un proceso numérico para contrastar cual alternativa es mejor, haciendo uso de la potenciación expresando $2^{30} = \$1.073.741.824$, lo cual deja ver que el estudiante tiene la habilidad de traducir en una expresión numérica un problema planteado en lenguaje natural, además se refleja un dominio del concepto de potenciación con números naturales. Cabe resaltar que un estudiante, tabula el valor de los treinta días desarrollando multiplicaciones reiteradas, aunque en el tercer día lo cuadruplico, lo que aumenta un día más en el cálculo del monto total, como se muestra a continuación:

Figura 20. Ejemplo de respuesta, pregunta 8

Handwritten student work for question 8, showing a table of daily doubling calculations. The student starts with 10,000,000 and calculates the amount for each day from 1 to 30. The calculations are organized into four columns. The final result is 1,073,741,824.

Día	1	2	3	4
1	10.000.000			
2	20.000.000			
3	40.000.000			
4	80.000.000			
5	160.000.000			
6	320.000.000			
7	640.000.000			
8	1.280.000.000			
9	2.560.000.000			
10	5.120.000.000			
11	10.240.000.000			
12	20.480.000.000			
13	40.960.000.000			
14	81.920.000.000			
15	163.840.000.000			
16	327.680.000.000			
17	655.360.000.000			
18	1.310.720.000.000			
19	2.621.440.000.000			
20	5.242.880.000.000			
21	10.485.760.000.000			
22	20.971.520.000.000			
23	41.943.040.000.000			
24	83.886.080.000.000			
25	167.772.160.000.000			
26	335.544.320.000.000			
27	671.088.640.000.000			
28	1.342.177.280.000.000			
29	2.684.354.560.000.000			
30	5.368.709.120.000.000			
31	10.737.418.240.000.000			

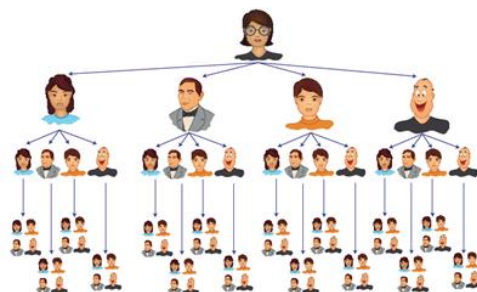
En cuanto a la anterior ilustración se evidencia que hubo una correcta interpretación del problema sin embargo aunque realiza las respectivas multiplicaciones reiteradas del dos no llega a la expresión 2^{29} que da cuenta del monto total de la segunda alternativa.

El 14,2% manifiestan de manera retórica y reflexiva que la segunda alternativa es mejor, porque así ahorran más, gastan menos dinero, entre otros aspectos; se destaca la respuesta de un estudiante al reconocer que algún día llegará a los \$10.000.000 y desde ese momento es posible recibir más.

Cabe anotar que las justificaciones dadas por el estudiantes en su gran mayoría se presentaron de forma retórica, es posible que estas explicaciones se deba a la adquisición y utilización de conocimientos, creencias, contextos sociales y culturales para tomar algunas decisiones, de lo cual Lester y Kehle (ibid. p. 509) citado por Sepúlveda, Medina y Sepúlveda (2009) argumenta que la resolución de problemas es una actividad del comportamiento humano extremadamente compleja, que involucra un esfuerzo que va más allá de recordar hechos o de la aplicación de procedimientos bien aprendidos; las habilidades involucradas se desarrollan lentamente en un largo periodo y parece ser función de varias categorías de factores interdependientes como los mencionados anteriormente.

Tabla 11. Tipos de respuesta Pregunta 9, Prueba parte B

9. La figura que se muestra a continuación representa la cantidad de abuelos que hay en una familia en el transcurso de las generaciones.



Si se quiere saber la cantidad de abuelos que hay en una familia hasta la cuarta generación, el procedimiento correcto que le permite hallar esta cantidad es:

- a. $4^4 = 256$
- b. $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 341$
- c. $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 4^{10}$
- d. $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$

Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F.A	F. R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta a.	10	28,6%	Desarrollan la expresión 4^4 como una multiplicación reiterada.	6	17,1%
				No justifican	4	11,4%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta b.	5	14,3%	Desarrollan la expresión de esta opción, sin indicar por que la seleccionan.	2	5,7%
				Opera adecuadamente las potencias con exponente diferente de cero y uno.	1	2,9%
				No justifican	2	5,7%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta c.	7	20%	Consideran que $4^{10} = 40$. No indica por que la selección	3	8,6%
				No justifican	4	11,4%
T4	Estudiantes que seleccionan la opción correcta d.	12	34,3%	Desarrollan la expresión sin indicar por que la selecciona.	4	11,4%
				No es acorde a la respuesta correcta, manifiesta que no supera los 85 individuos que muestra la gráfica.	2	5,7%
				No justifican	6	17,1%
T5	Otras respuestas incorrectas	1	2,9%	Manifiesta que $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 384 \neq 310$	1	2,9%

Teniendo en cuenta los resultados de la tabla anterior se puede observar que la mayoría de los estudiantes (74,3%) seleccionaron las diversas opciones incorrectas. Inicialmente el 28,6% que eligen la opción *a*, presenta una interpretación correcta del grafico al afirmar que a la cuarta generación de abuelos le preceden cuatro abuelos más por cada uno de ellos, y desarrollan la expresión 4^4 que da cuenta de esta cantidad, sin embargo es importante incluir las otras generaciones para responder al interrogante de esta actividad.

Con relación al 14,3% que elige la opción *b*, desarrollan adecuadamente los cálculos de la expresión dada, aunque no se muestra en sus procedimientos por que eligen esta expresión; uno de los estudiantes opera debidamente las potencias con exponente diferente de cero y uno, es decir, suma base con exponente cuando el exponente es cero y los multiplican cuando este es uno, como se muestra a continuación:

Figura 21. Ejemplo de respuesta, pregunta 9

a. $4^4 = 256$
 b. $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 341$
 c. $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 4^{10}$
 d. $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$

$4 + 4 \times 1 + 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 341$

Con respecto a los estudiantes que elige la opción *c* (20%), desarrollan la expresión asumiendo que en la adición de bases iguales, el resultado es otra potencia de igual base elevada a la suma de los exponentes, probablemente estos estudiantes estén aplicando la propiedad de la multiplicación de bases iguales cuando se están sumando; algunos al multiplicar base con exponente, calculan $4^{10} = 40$.

La practicas anteriores se relacionan con los obstáculos basados sobre casos simples que plantea Soccas (2000), el cual caracteriza como obstáculos aquellos sucesos que no se presentan por falta de conocimiento, sino de algo que ya se conoce y está constituido positivamente al ser utilizado para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese

conocimiento es eficaz y adecuado, pero cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto donde es necesario tener otros elementos en cuenta, genera respuestas inadecuadas, de hecho, la mayoría de los alumnos, operan de manera apropiada las expresiones, lo cual puede ser útil en actividades que requieran verificar si las igualdades son correctas o no, sin embargo la comprensión o interpretación del gráfico y el interrogante de esta actividad, al parecer, genera un contexto diferente para los estudiantes, y de acuerdo a lo que se aprecia, es lo que evita que el resolver las expresiones no sea suficiente para obtener la respuesta correcta.

Así mismo, los resultados muestran que del 34,3% que eligen la opción correcta *d*, de acuerdo a los procedimientos, solamente el 11,4% operan de manera correcta la expresión $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$ sin manifestar por qué descarta las demás.

Todo esto permite admitir por el momento que la mayoría de los alumnos participantes de estas justificaciones tienen la habilidad para desarrollar algunas expresiones relacionadas con la potenciación como las que se expusieron en las alternativas de esta actividad, lo cual es importante porque permite tener dominio, comparación y ejercitación de algoritmos, desarrollar habilidades y destrezas, lo cual es una de las características del conocimiento matemático, en cuanto al conocimiento procedimental, Sin embargo, se aprecia que hay dificultades en establecer una conexión entre el lenguaje gráfico y numérico, al observar que no acompañan los cálculos con procesos, argumentos o razones que permitan evidenciar si hubo interpretaciones con las cuales rechazaron las demás alternativas o con qué criterios deciden operar la expresión, o si tal vez optan al azar por alguna de estas, las operan correctamente y al ver que obtienen el mismo resultado la eligen como solución, sin reflexionar si determinada expresión da cuenta del interrogante y la relación con el gráfico, estos aportes teóricos reflexivos al razonamiento son

necesario en la resolución de problemas, y se sitúa en el conocimiento conceptual que tiene además una naturaleza declarativa y se asocia con el saber qué y el saber por qué. (MEN, 2006) .

Tabla 12. Tipos de respuesta Pregunta 10, Prueba parte B

10. Samuel y Martina encuentran las siguientes fichas de un juego, solo dos fichas están marcadas con el paso 1 y 7. En las instrucciones del juego se encuentran con la frase “simplifica la expresión paso a paso para lograr iniciar el juego”. Escribe abajo de cada ficha cual paso consideras es el más adecuado para que Samuel y Martina simplifiquen la expresión desde el paso 1 hasta llegar a el paso 7 y logren iniciar el juego.						
$\frac{2^5 \cdot 3^4}{2^5}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}}$	81	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 2^2}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$	3^4
			Paso 7		Paso 1	
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F. A	F.R
T1	Estudiantes que indican correctamente los pasos de la secuencia	28	80%	Simplifican la expresión, haciendo uso correcto de las propiedades de la potenciación.	28	80%
T2	Estudiantes que no indican correctamente los pasos de la secuencia	3	8,6%	No hay una coherencia del paso a paso de la simplificación de la expresión.	3	8,6%
T3	Estudiantes que no responden	4	11,4%		4	11,4%

Según los registros de la tabla 10, se aprecia que gran parte de los estudiantes (80%) indican de forma apropiada como se debe simplificar la expresión del paso 1, de acuerdo al uso de las propiedades de la potenciación que se presentan en las casillas restantes, para llegar hasta el paso 7, lo que por el momento permite indicar que este grupo de estudiantes tienen la habilidad de identificar algunas propiedades de la estructura multiplicativa en la potenciación para simplificar

cálculos numéricos, La siguiente imagen muestra la forma como se esperaba que los estudiantes resolvieran el ejercicio.

Figura 22. Ejemplo de respuesta, pregunta 10

$\frac{2^5 \cdot 3^4}{2^5}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}}$	81	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 2^2}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$	3^4
5	3	2	Paso 7	4	Paso 1	6

De lo anterior es posible inferir que estos estudiantes logran percibir una secuencia coherente, al establecer equivalencias entre expresiones Matemáticas como en este caso donde la base de la expresión x^n pertenece al conjunto de los números naturales y el exponente a los enteros, así mismo, cabe mencionar que tres estudiantes indicaron una secuencia de pasos diferente a la anterior, que da cuenta de una simplificación coherente de un paso a otro como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 23. Ejemplo de respuesta, pregunta 10

$\frac{2^5 \cdot 3^4}{2^5}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}}$	81	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 2^2}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$	3^4
Paso 5	Paso 3	Paso 1	Paso 7	Paso 2	Paso 1	Paso 6

Por otra parte, se puede observar que cerca del 9% de los estudiantes simplifican del paso 3 al 4 adecuadamente, sin embargo amplifica de nuevo la expresión del paso 4 al 5, sin relacionarlo a las propiedades o algún otro tipo de argumento que permita observar de donde adicionan otros elementos en esta amplificación, análogamente simplifica del paso 5 al 6, ignorando nuevamente

las propiedades de la potenciación que se pide tengan en consideración para indicar cuál es el paso más apropiado, como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 24. . Ejemplo de respuesta, pregunta 10

$\frac{2^5 \cdot 3^4}{2^5}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}}$	81	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 2^2}$	$\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$	3^4
Paso 5	Paso 3	Paso 2	Paso 7	Paso 5	Paso 1	Paso 4

Es posible indicar que no hay coherencia, de acuerdo a lo que observa en la secuencia de pasos que plantean, lo que permite evidenciar que posiblemente carecen de claridad en algunos conceptos entre ellos el de la simplificación, ignoran algunos elementos de los cuales es posible encontrar una relación entre las expresiones presentadas como la semejanza de términos que comparten algunas de ellas y presentan dificultades en el uso de las propiedades en la potenciación.

Tabla 13. Tipos de respuesta Pregunta 11, Prueba parte B

11. Salome quiere saber si $(-8)^n$ Será siempre un resultado negativo. Le podrías decir respecto a esto que:						
a. El resultado $(-8)^n$ es siempre negativo sin importar el valor de n .						
b. $(-8)^n$ es positivo sólo si el exponente n es impar.						
c. El resultado de $(-8)^n$ es siempre positivo sin importar el valor de n .						
d. $(-8)^n$ es negativo sólo si el exponente n es impar						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F.A	F. R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta a.	11	31,4%	Toman valores positivos de n , tanto par como impar y desarrollan la potenciación como una multiplicación entre base y exponente.	6	17,1%
				No justifican	5	14,3%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta b.	5	14,2%	Toma el exponente igual a (-7) y deduce que el resultado es positivo	1	2,9%
				Argumentan $(-8)^n$ es positivo si n es negativo.	2	5,7%
				No justifican	2	5,7%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta c.	1	2,9%	No justifica	1	2,9%
T4	Estudiantes que seleccionan la opción correctas d.	15	42,9%	Operan con $n=2$ y $n=3$, y concluyen que si es n es par el resultado es positivo y si n es impar es negativo, uno de estos estudiantes argumenta que es una propiedad de la potenciación	5	14,3%
				Operan relacionando los números negativos como pares y positivo con impares, o viceversa, además asumen que la potencia como un producto entre la base y exponente.	3	8,6%
				No justifica	7	20%
T5	No responden	3	8,6%		3	8,6%

En correspondencia con los resultados presentados en la tabla anterior, el 45,6% de los estudiantes seleccionan las opciones incorrectas *a* y *b*. De acuerdo a los procedimientos que utilizan el 31,4% que eligen la opción *a*, se observa que toman valores positivos de n , tanto par, como impar, y afirman que $(-8)^n$ será siempre negativo sin importan el valor de n , o plantean directamente que por ser el signo de la base negativo y el del exponente positivo, al multiplicar, el resultado será negativo, como se muestra en el siguiente gráfico:

Figura 25 Ejemplo de respuesta, pregunta 11

11/ Siempre va a ser Negativo Pues ya ave es $(-8)^n$ Pues es Negativo
Y ademas $- \times - = +$

A su vez el 14,2% que optan por la opción *b*, afirman que $(-8)^n$ será positivo solamente si n es negativo, uno de los estudiantes toma como ejemplo particular el $n = -7$, donde concluye que es positivo sólo si el exponente n es impar.

De lo anterior se puede apreciar que hay dificultades en cuanto a la comprensión conceptual de la potenciación, al asumir que esta operación se desarrolla como un producto entre base y exponente, por lo que cual aplican la “ley de los exponentes”.

Por otra cerca del 43% de los estudiantes optan por la opción correcta *d*, sin embargo el 14,3% logran justificar su elección de forma coherente, al emplear el concepto de potenciación como multiplicación repetida, tomando valores positivos de n tanto par, como impar y aplicar ley de signos como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 26 Ejemplo de respuesta, pregunta 11

$$(-8)^3 = -8 \times -8 \times -8 = -512$$

$$(-8)^2 = -8 \times -8 = 64$$

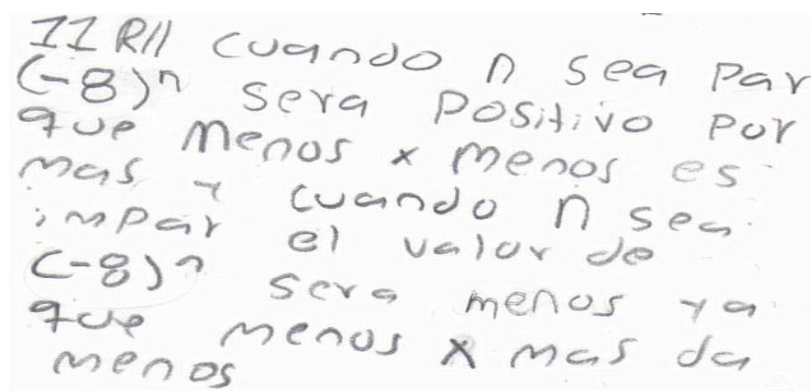
De
lo

anterior se puede afirmar que estos estudiantes, al asociar la potenciación como multiplicación reiterada, logran operar de manera adecuada potencias cuando el exponente pertenece a los números naturales, y la base pertenece a los enteros.

Cabe señalar que el 8,6% además de asumir la potenciación como producto entre base y exponente, presenta obstáculos entre algunos conceptos, como lo es asociar los números

negativos con los pares y positivo con impares, o viceversa, lo que hace que la justificación no sea acorde con la opción correcta, como se muestra en el siguiente gráfico.

Figura 27. Ejemplo de respuesta, pregunta 11



II R11 cuando n sea par
 $(-8)^n$ sera positivo por
 que menos x menos es
 mas y cuando n sea
 impar el valor de
 $(-8)^n$ sera menos ya
 que menos x mas da
 menos

Esto parece indicar que los estudiantes que contribuyeron con este tipo de justificaciones, tienen dominio en las propiedades de los signos en la multiplicación; estos conocimientos previos favorecen en la incorporación de significados del sistema de símbolos en la potencia, al menos cuando se tiene claridad que cuando el exponente pertenece a los números naturales y la base pertenece a los números enteros, a^n representa el producto de n factores iguales que a , sin embargo resulta bastante difícil, que estos estudiantes logren comprender de forma adecuada el sistema de símbolos de la potenciación a partir de la multiplicación cuando asumen que la potencia se opera como un producto entre base y exponente.

Como se indicó anteriormente, se aprecia cierta dificultad del concepto de potenciación, cuando se debe operar con enteros negativos, los anteriores errores son producto de aquellas dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas de lo que Soccas (2000), relaciona algunas veces con el desarrollo de los signos matemáticos; debido al vínculo de un sistema de signos de un concepto a otro, en este caso la potenciación como un sistema nuevo

a partir de la multiplicación como un sistema ya conocido; no obstante con la falta de apropiación del concepto de potenciación, es mucho más complejo lograr que en el proceso de estructuración del sistema de símbolos en la potenciación, se logre observar regularidades y patrones que permiten dotar al estudiante de significados, lo que producen dificultades y obstáculos, sobre todo en el caso del exponente entero negativo o el cero.

Tabla 14. Tipos de respuesta Pregunta 12, Prueba parte B

12. De las siguientes igualdades:

I. $\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{2}{2}}$

II. $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (9^2)^{\frac{1}{2}}$

III. $(9^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{2}{2}}$

Las correctas son:

a. I y III

b. II solamente

c. III solamente

d. II y III

Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F. A	F.R
T1	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>a</i>	9	25,7%	Consideran que son equivalentes porque ambas, al lado derecho de la igualdad tienen el mismo resultado.	4	11,4%
				No justifican	5	14,3%
T2	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>b</i>	12	34,3%	Afirman que las expresiones van a ser iguales, porque tienen los mismos exponentes sin importar donde están ubicados.	3	8,6%
				Aplica la propiedad de potencia de potencia en ambas expresiones y encuentra que los resultados son iguales.	1	2,9%
				No justifican	8	22,9%
T3	Estudiantes que seleccionan la opción incorrecta <i>c</i>	5	14,3%	No justifican	5	14,3%
T4	Estudiantes que seleccionan correcta la opción <i>d</i>	6	17,1%	Manifiesta que estas opciones están bien desarrolladas, son los únicos iguales entre sí o existe semejanzas, no se desarrolla un proceso numérico	3	8,6%
				No justifican	3	8,6%
T5	Otra respuestas incorrectas	1	2,9%	Realiza una diferencia de fracciones entre base y exponente cuando es negativo.	1	2,9%
T6	No responden	2	5,7%		2	5,7%

Como se puede mostrar en la tabla anterior el 34,3% de los estudiantes escogen la opción *b*; algunos argumentan que esas expresiones son equivalentes por que tienen los mismos exponentes sin importan la posición en la que se encuentren, tal vez solo están contemplando que de las igualdades es verdadera aquella que contenga la misma cantidad de exponentes sin importar la posición por ser iguales, o probablemente estén aludiendo a la conmutatividad en el producto, sin embargo para este caso no tienen en cuenta que al multiplicar ambos exponentes de la parte izquierda de la igualdad III, también se cumple la igualdad.

Se destaca aunque en un solo estudiante la aplicación de la propiedad potencia de potencia para afirmar que la equivalencia es verdadera; sin embargo a pesar de que tiene una hipótesis con la cual argumentan su elección coherentemente, ignoran que la igualdad III también cumple con la propiedad.

Aproximadamente el 26% de los estudiantes eligen la opción incorrecta *a*, al suponer inicialmente que la igualdad I es correcta y relacionarla con expresión III, al parecer por aludir a correspondencias similares una de las nociones comunes propuesta por Euclides: cosas iguales a las mismas cosas son iguales entre sí, para este caso ambas expresiones se plantean en la actividad con resultados iguales, $\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{2}{2}}$ y $(9^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{2}{2}}$, de lo que se observa que probablemente los estudiantes concluyen que $\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = (9^2)^{\frac{1}{2}}$ al relacionar la igualdad entre algunas expresiones recurriendo a este tipo de razonamientos.

Un estudiante afirma que la respuesta no está dentro de las opciones dadas, esta aseveración surge porque él presenta cierta dificultad al desarrollar la expresión $\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)^2$, puesto que asegura que para resolverla es necesario realizar operaciones entre fracciones (colocando un uno debajo del nueve como denominador) de esta forma:

Figura 28. Ejemplo de respuesta, pregunta 11

Handwritten student response for question 11. The response shows three options:

- I. $(9^{-\frac{1}{2}})^2 = 9^{\frac{2}{2}}$
- II. $(9^{\frac{1}{2}})^2 = (9^2)^{\frac{1}{2}}$
- III. $(9^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{2}{2}}$

Handwritten justification: "No se como hacer $9^{-1/2}$.
I $\rightarrow$ colocan en uno y los resto como fracción."

Es posible que esta expresión cause dificultad en el estudiante porque el exponente es un número racional negativo, y quizás no esté familiarizado con este tipo de expresiones, por lo tanto recurre a conocimientos previos como es el de las fracciones.

El 17,1% de los estudiantes optan por escoger la opción correcta *d*, ellos justifican su respuesta indicando que las expresiones son iguales entre sí, pero no realizan algún procedimiento numérico que muestre porque hacen dicha afirmación.

Tabla 15 .Tipos de respuesta Pregunta 13, Prueba parte B

13. Observe el siguiente procedimiento e indica el paso donde está el error. Justifica tu respuesta						
$16\sqrt[3]{16} + 16^{\frac{3}{2}}$paso 1 $16 \times 16^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{3}{2}}$paso 2 $16^{\frac{4}{3}} + 16^{\frac{3}{2}}$paso 3 $16^{\frac{17}{6}}$paso 4 $\sqrt[6]{16^{17}}$paso 5						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F. A	F.R
T1	Estudiantes que indican el error en el <i>paso 1</i> incorrecto	1	2,9%	Indica que la expresión que contiene una raíz, le falta el dos del denominador del exponente de la potencia.	1	2,9%
T2	Estudiantes que indican el error en el <i>paso 2</i> incorrecto	7	20%	Ostentan que el error está en aumentar el $16^{\frac{1}{3}}$	4	11,4%
				No justifican	3	8,6%
T3	Estudiantes que indican el error en el <i>paso 3</i> incorrecto	6	17,1%	Manifiestan que el error está cuando se realiza el producto de potencias.	6	17,1%
T4	Estudiantes que indican el error en el <i>paso 4</i> correcto	4	11,4%	Supone que en la suma de potencias de igual base se deben multiplicar los exponentes por tanto la el resultado es $16^{\frac{12}{6}}$ en lugar de $16^{\frac{17}{6}}$.	1	2,9%
				No justifican	3	8,6%
T5	Estudiantes que indican el error en el <i>paso 5</i> incorrecto	6	17,1%	Se interpreta que la “operación inversa” de una fracción, es una multiplicación.	3	8,6%
				No justifica	3	8,6%
T6	No respondieron	11	31,4%		11	31,4%

En esta pregunta los estudiantes tenían que identificar un error en el procedimiento de solución planteado en el ejercicio, los resultados registrados permiten evidenciar que del 11,4% que detectó que el error se encuentra en el *paso 4* (correcto) solo uno justifica al asegurar que en la suma de potencias de bases iguales, se deja la misma base y se suman los exponentes, es posible deducir que este porcentaje de estudiantes aunque responden correctamente, realizan un

proceso de generalización de una propiedad ya conocida en este caso, la multiplicación de potencias con bases iguales, sin reflexionar si para la suma también se cumple. Posiblemente esta dificultad está asociada a la complejidad de los objetos matemáticos expuestas por Socas, ya que en este caso se está recurriendo a propiedades ya conocidas sin tener en cuenta restricciones que pueden generar dificultades cognitivas.

Por otra parte los estudiantes que seleccionaron el *paso 2* como el error, consideran que no es posible realizar determinado tratamiento en la radicación, al considerar que no es posible afirmar que $\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$; algo similar ocurre con aquellos que indican que el error está en al *paso 5* al considerar $16^{\frac{17}{6}} \neq \sqrt[6]{16^{17}}$ puesto que al reconocer que el exponente es un número racional, toman como referente solo en este elemento para justificar que la “operación” inversa de una fracción es una multiplicación. Lo anterior parece indicar que los estudiantes presentan algunas dificultades para identificar la radicación como operación inversa a la potenciación, probablemente al no reconocer las restricciones del concepto cuando el exponente es un número racional.

En cuanto a los que consideran que el error está en el *paso 3* se vislumbra poca apropiación en la aplicación de las propiedades de la potenciación, puesto que cometen los siguientes errores:

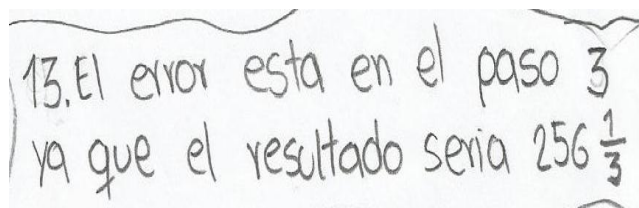
Figura 29. Ejemplo de respuesta, pregunta 13

Handwritten student work for question 13 showing five steps of a calculation:

- $16 \times 16^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{3}{2}}$ *paso 2*
- $16^{\frac{4}{3}} + 16^{\frac{3}{2}}$ *paso 3*
- $16^{\frac{17}{6}}$ *paso 4*
- $\sqrt[6]{16^{17}}$ *paso 5*

Handwritten note on the left: "Porque debería ser $16^{\frac{1}{3}}$ para poder llegar al resultado." with an arrow pointing to step 3.

Figura 30. Ejemplo de respuesta, pregunta 13



13. El error está en el paso 3
ya que el resultado sería $256\frac{1}{3}$

En la *figura 29* se puede observar que el estudiante considera que para multiplicar potencias con bases iguales, se conserva la base y los exponentes se multiplican, mientras que en la *figura 30* se multiplican las bases y los exponentes. Los anteriores errores dan cuenta de una práctica equivocada de algoritmos.

Cabe resaltar que en esta pregunta el 31,4% de los estudiantes no manifestaron ninguna evidencia de justificación.

Tabla 16. Tipos de respuesta Pregunta 14, Prueba parte B

14. Resolver las siguientes operaciones aplicando las propiedades de la potenciación.						
a. $2^3 \cdot 2^4 =$						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	descripción	F.A	F. R
T1	Respuestas correctas	19	54,3 %	Operan cada potencia por separado y luego multiplica	9	25,7%
				Deja la misma base y suma los exponentes.	8	22,9%
				No justifican	2	5,7%
T2	Respuestas incorrectas	16	45,7 %	Opera individualmente cada potencia como multiplicación reiterada, aumentando un factor en cada una de las potencias.	3	8,6%
				Desarrollan las potencias individualmente, asumiendo que la potenciación multiplicando la base y exponente.	3	8,6%
				Suman los exponentes y multiplican las bases.	5	14,3%
				Conserva la base dos multiplican los exponentes.	5	14,3%
b. $(3 \cdot 2)^3$						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F.A	F. R
T1	Respuestas correctas	24	68,6 %	Multiplica las bases y este producto lo eleva al exponente.	11	31,4%
				Distribuyen el exponente.	3	8,6%
				No justifican.	8	22,9%
T2	Respuestas incorrectas	6	17,1 %	Aplica un razonamiento similar al binomio al cuadrado.	1	2,9%
				Obtiene la expresión 6^3 pero al desarrollarla multiplican base con exponente.	3	8,6%
				Suma las bases y conservan el exponente.	1	2,9%
				Aumenta un factor a la expresión 6^3 .	1	2,9%
T3	No responde	5			5	14,3%
c. $\left(\frac{3^3}{3^2}\right) =$						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	descripción	F.A	F. R

T1	Respuestas correctas	17	48,6 %	Resuelven las potencias individualmente y posteriormente realizan la división	6	17,1%
				Conservan la base y restan los exponentes	5	14,3%
				No justifican	6	17,1%
T2	Respuestas incorrectas	11	31,4 %	Multiplican el numerador con el denominador	1	2,9%
				Resuelven las potencias como una multiplicación entre base y exponente.	4	11,4%
				Multiplica las bases y suma los exponentes	3	8,6%
				Conserva la base y multiplica los exponentes	1	2,9%
				Divide las bases y resta los exponentes	1	2,9%
				Suman las bases y los exponentes	1	2,9%
T3	No responde	7	20 %	Uno de ellos indica que no sabe hacer potencia en fracción	7	20%
d. $\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^2 =$						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Descripción	F.A	F. R
T1	Respuestas correctas	13	37,1%	Aplican adecuadamente las propiedades de la potenciación.	10	28,6%
				Reemplazan un valor en las variables y aplican propiedades.	3	8,6%
T2	Respuestas incorrectas	5	14,3%	Dejan expresada una multiplicación entre el numerador y el denominador $(b^3 \times a^2)^2$	2	5,7%
				Aplica las propiedades de la potenciación, pero al resolver la expresión $\frac{b^6}{a^4}$ multiplican las bases y restan los exponentes.	1	2,9%
				Asumen la potencia de potencia como una suma o restan entre los exponentes.	2	5,7%
T3	No responde	17	48,6%		17	48,6%

La intención de la pregunta catorce es que los estudiantes puedan solucionar algunos ejercicios a partir de la aplicación de las propiedades de los exponentes. En los resultados

registrados en la tabla anterior se puede observar que gran parte de los estudiantes responden correctamente el ejercicio del literal a , en sus procedimientos se evidencia que el 25,7% resuelve cada potencia por separado y luego multiplica los resultados, esto se puede reflejar en lo que plantea Socas (2000) es decir los estudiantes estructuran la potenciación como un nuevo sistema, según la organización de un sistema antiguo para este caso la multiplicación, y así, mediante procesos como: $3^4 \times 3^3 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^7$ es posible obtener un esquema general, $a^4 \times a^3 = a^{4+3}$ que puede ser expresado simbólicamente como $a^m \times a^n = a^{m+n}$. La forma como otros estudiantes (22,9%) resuelven el ejercicio es conservando la base y sumando los exponentes, haciendo uso de las propiedades de la potenciación adecuadamente, lo anterior posibilita indicar que estos estudiantes tienen la habilidad para aplicar algunas propiedades de la potenciación a partir del uso del concepto o tienen claridad de los algoritmos que se emplean para desarrollar este tipo de expresiones. Por su parte el 45,7% de estudiantes, desarrolla el ejercicio empleando distintas estrategias, pero no logran llegar al resultado correcto, concretamente algunos en este ejercicio ($2^3 \cdot 2^4$) suman los exponentes, pero también lo hacen con las bases o conservan las bases pero multiplican los exponentes, en estos casos es evidente las limitaciones en la aplicación propiedades.

En el literal b cerca del 69% solucionan el ejercicio correctamente pero solo el 8,6% utilizan las propiedades de la potenciación, otros optan por desarrollar la multiplicación que hay dentro del paréntesis y luego resuelven la potenciación. Se destaca aunque en un estudiante, que a partir del uso del concepto de potenciación logra obtener el resultado correcto verificándolo con dos procesos distintos como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 31. Ejemplo de respuesta, pregunta 14

Handwritten work for Figure 31:

$$b) (3 \cdot 2)^3 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 216$$

$$3^3 = 27 \quad 2^3 = 8$$

$$27 \times 8 = 216$$

El 17% de estudiantes obtienen resultados incorrectos, en sus procedimientos se encuentra que algunos multiplican las bases y elevan este producto al exponente, de esta manera obtienen la expresión correcta 6^3 , sin embargo al desarrollarla presentan algunas dificultades debido a la falta de apropiación del concepto de potenciación, por ejemplo multiplican base con exponente; otros por el contrario presentan dificultades en el uso de las propiedades al generalizar algunos procesos como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 32. Ejemplo de respuesta, pregunta 14

Handwritten work for Figure 32:

$$b) (3 \cdot 2)^3 = 3^3 + 3(3 \cdot 2) + 2^3 = 27 + 3(6) + 8 = 27 + 18 + 8 = 53$$

En este ejemplo de respuesta se observa que el estudiante trata de aplicar un algoritmo similar al del binomio al cuadrado, quizás la forma como está escrita la expresión le parece similar a la notación del binomio al cuadrado, sin embargo no tiene en cuenta que la base es un producto y además de ello que el exponente es diferente de dos.

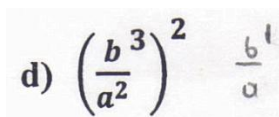
En lo que refiere al literal c, cerca del 49% de los estudiantes obtienen respuestas correctas, en sus procedimientos se observa que resuelven las potencias individualmente, y desarrollan la división, otros conservan la base y restan los exponentes al recurrir a la propiedad de la división de potencias de bases iguales.

El 31,4% de los estudiantes presentan resultados incorrectos, ellos comenten diversos errores, uno de ellos al asumir que el cociente de potencias de bases iguales se resuelven conservando la

base y multiplicando los exponentes, dividiendo las bases y restando los exponentes o sumando las bases y los exponentes, es decir que no hay una comprensión de la propiedad que permite resolver este tipo de ejercicios.

En cuanto al literal d , alrededor del 37% de los estudiantes resuelven la actividad de forma correcta utilizando para ello las propiedades de la potenciación o en su efecto le dan valores particulares a las variables desarrollando las potencias por separado, mientras que el 14,3% de los estudiantes no logran obtener el resultado correcto, por una parte consideran correcta la siguiente igualdad $\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^2 = (b^3 \times a^2)^2$, quizás al no reconocer la notación de división que hay dentro del paréntesis, otro estudiante llega a la expresión $\frac{b^6}{a^4}$, operando correctamente la potencia de potencia, sin embargo multiplica las bases y restan los exponentes así $\frac{b^6}{a^4} = ba^2$, quizás asuma que es posible aplicar el algoritmo de la división de potencias de bases iguales donde se conservan las bases y se restan los exponentes, finalmente otro estudiante realiza el siguiente procedimiento:

Figura 33. Ejemplo de respuesta, pregunta 14



$$d) \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^2 = \frac{b^1}{a^0}$$

Se puede apreciar que el estudiante presenta dificultades en diversos aspectos relacionados a la aplicación de la propiedad de potencias de una potenciación, pues inicialmente resta los exponentes, donde al parecer obtiene $\frac{b^1}{a^0}$ considerando que $a^0 = a$. Donde se puede observar que el estudiante considera que la ausencia de un exponente representa el cero, posiblemente esta creencia se deba a concepciones de grados anteriores, donde se afirmaba que el cero es un valor nulo.

Un gran porcentaje de estudiantes (48,6%) no resuelven el ejercicio, algunos indican que no saben qué hacer.

Tabla 17. Tipos de respuesta Pregunta 15, Prueba parte B

15. Sandra y Jorge revisan el parcial que realizaron en pareja y discuten sobre estos tres ejercicios propuestos en la prueba.					
a. ¿Cuál de los resultados de estos ejercicios son correctos?					
b. ¿Indique porque los otros los consideras incorrectos?					
Ejercicio 1		Ejercicio 2		Ejercicio 3	
$2^0 = 1$		$2^{-1} = -2$		$1^2 = 2$	
a. ¿Cuál de los resultados de estos ejercicios son correctos?					
Tipo de respuesta				F. A	F.R
T1	Estudiantes que indican que el Ejercicio 2, es el correcto			13	37,1%
T2	Estudiantes que indican que el Ejercicio 3, es el correcto			3	8,6%
T3	Estudiantes que indican que el Ejercicio (1 y 2), es el correcto			5	14,3%
T4	Estudiantes que indican que el Ejercicio (2 y 3), es el correcto			6	17,1%
T6	Estudiantes que indican ninguno de los ejercicios son correcto			4	11,4%
T3	Estudiantes que indican que todos los ejercicios son correcto			1	2,9%
T7	Estudiantes que no responden			3	8,6%
b. ¿Indique porque los otros los consideras incorrectos?					
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Justificación	F.A F. R
T1	Estudiantes que indican que la expresión $2^0 = 1$, correspondiente al ejercicio 1 es incorrecto	26	74,3%	Asumen que todo número elevado a la cero es igual a cero.	6 17,1%
				Consideran que ningún número se puede elevar a la cero.	4 11,4%
				Interpretan que todo número elevado a la cero es igual a la base.	4 11,4%
				No justifican	12 34,3%
T2	Estudiantes que indican que la expresión $2^{-1} = -2$, correspondiente al ejercicio 2 es incorrecto	7	20%	Omite la operación de potenciación, al desarrollar esta expresión como una resta.	1 2,9%
				Desarrollan las potencias de esta actividad tomando el valor positivo de los exponentes.	1 2,9%
				No justifican	5 14,3%
T3	Estudiantes que indican que la expresión $1^2 = 2$, correspondiente al ejercicio 3 es incorrecto	22	62,9%	Desarrolla la potencia como multiplicación reiterada, e indica que el resultado es uno.	10 28,6%
				Desarrollan las potencias de esta actividad tomando el valor positivo de los exponentes.	1 2,9%
				No justifican	11 31,4%

En relación a la pregunta 15, se puede evidenciar que en el ítem *a*, ningún estudiante considero que solo es correcto el *ejercicio 1*, por tanto es posible indicar que los estudiantes no tienen en cuenta algunas restricciones de la potenciación.

De acuerdo a los resultados obtenidos en el ítem *b*, el 74,3% de los estudiantes consideran que el primer ejercicio ($2^0 = 1$) es incorrecto, donde presentan varias de interpretaciones; inicialmente, los estudiantes afirman que todo número elevado a la cero es igual a cero, de lo que se asume que estos estudiantes están multiplicando la base con el exponente, como se ha venido evidenciando en la mayoría los procesos de solución de las actividades de la prueba, también se observa que algunos consideran que se debe sumar la base con el exponente, es decir que cuando un numero se eleva a la cero el resultado es igual a la base, así mismo, el 11,4% manifiestan que no es posible obtener ningún resultado, al tener en cuenta el concepto de potenciación como multiplicación reiterada, donde el exponente indica cuantas veces se debe multiplicar reiteradamente la base, el 17,1% consideran que esta expresión es correcta, sin embargo solo dos estudiantes justifican que esto se debe a que toda potencia con exponente cero es igual a uno.

En relación al 20% de los estudiantes que consideran que el segundo ejercicio es incorrecto, en sus procesos muestran dificultades al operar la potenciación con exponentes enteros negativos, al considerar correcta la siguiente igualdad, $2^{-1} = (2 - 1) = 1$, tal vez al no reconocer que tipo de algoritmos se usa en este tipo de exponentes, recurre a la resta al hallar una relación en este caso por el signo de la sustracción, de otra parte el 71,4% considera que la expresión $2^{-1} = -2$, es correcta, quizás al considerar que la potenciación es una multiplicación entre la base y el exponente.

Lo anterior parece indicar, que los estudiantes desarrollan las potencias 2^0 y 2^{-1} , mediante el uso de operaciones elementales como la resta, suma y multiplicación. En este tipo de situaciones donde el exponente no pertenece a los naturales, es complejo recurrir a la potenciación como multiplicación reiterada y se hace necesario aclarar todas las posibles propiedades y sus restricciones puesto que es probable que se presenten dificultades cognitivas en los estudiantes al no encontrar una explicación para ese tipo de casos ^a partir de un sistema antiguo.

Respeto al último ejercicio, el 62,8% de los estudiantes consideran que $1^2 = 2$, es incorrecto al operar adecuadamente la potencia, e indicar que es igual a uno, mientras que el 28,6% consideran que es correcto, probablemente al considerar la potenciación como un producto entre la base y el exponente.

Tabla 18. Tipos de respuesta Pregunta 16, Prueba parte B

16. Un bodeguero guarda kilos de café en una caja cuadrada, de tal forma que a lo largo hay 15 kilos, e igual que en el ancho y la profundidad de la caja. ¿Cuántos kilos de café hay en la caja?						
Tipo de respuesta		F. A	F.R	Descripción de los procedimientos	F.A	F. R
T1	Estudiantes que obtienen el resultado correcto.	7	20%	Utilizan la expresión 15^3 y desarrollan como una multiplicación reiterada.	7	20%
T2	Estudiantes que obtienen el resultado incorrecto.	18	54,2%	Multiplican dos de las dimensiones de la caja al expresar que $15 \times 15 = 225$	11	31,4%
				Suman el largo, el ancho y la profundidad de la caja.	7	20%
				Grafica un cuadrado y manifiesta que cada lado vale 15 y los suma	1	2,9%
T3	No responden	9	25,7%		9	25,7%

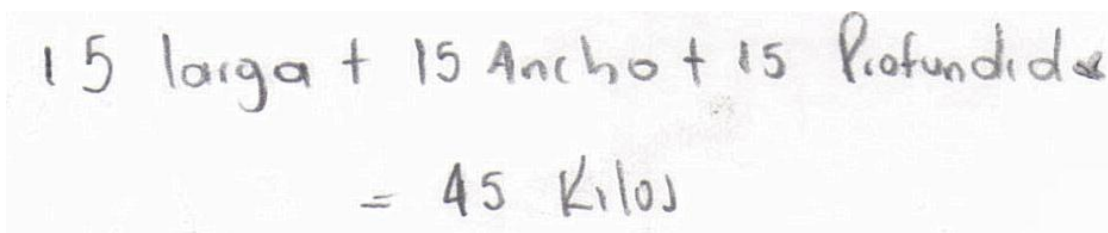
De los anteriores procedimientos presentados en la tabla 16, se puede apreciar que cerca del 20% de los estudiantes evaluados, contestan en forma correcta, al desarrollar 15^3 como un multiplicación reiterada, lo que indica que tienen habilidades para interpretar y comprender una situación expuesta en lenguaje natural, para convertirla en una expresión numérica que relaciona

el pensamiento numérico con el geométrico, puesto que se requiere de conceptos previos como la potenciación y el volumen para desarrollar los cálculos de manera correcta.

Se puede observar que la mayoría de los estudiantes (54,2%). obtienen cantidades incorrectas, se muestran en sus procedimientos que el 31,4% utilizan la expresión $15 \times 15 = 225$; con esto es posible deducir que los estudiantes estén considerando que la solución de la situación está relacionada con el área de un cuadrado, en este caso uno de los lados de la caja, así mismo un estudiante grafica un cuadrado y afirma que cada lado vale 15 y suma estas longitudes, al considerar quizás que el problema se relaciona con el perímetro de la caja, sin embargo no se percata de que está hallando es el perímetro de uno de sus lados.

Por otra parte el 20% de estudiantes consideran que para solucionar el problema es necesario sumar las tres dimensiones de la caja (largo, ancho y profundidad), probablemente al considerar que la capacidad de la caja se halla como se muestra en la siguiente gráfica:

Figura 34. Ejemplo de respuesta, pregunta 15



Handwritten text: 15 larga + 15 Ancho + 15 Profundidad = 45 Kilos

Las anteriores justificaciones, permiten indicar que algunos estudiantes tienen conocimientos previos en cuanto a la geometría como lo es el área o el perímetro, además desarrollan correctamente las operaciones básicas como la suma y la multiplicación sin en sus argumentos no se muestra que interpreten la situación con la potenciación y el volumen, con lo cual se aprecia que hay dificultades al traducir la situación problema en una expresión numérica, pues se omiten datos o relaciones importantes con lo que se evidencia poca apropiación del significado de la potenciación en la resolución de problemas.

3.3. Algunas conclusiones iniciales sobre los resultados de la prueba.

De acuerdo a los resultados de los análisis de la prueba es posible concluir que:

Los errores que presentan los estudiantes permiten evidenciar que en ocasiones estos se asocian a diversos tipos de dificultades, en este caso predominaron aquellas relacionadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, un ejemplo de ello es como la mayoría de los estudiantes cuando tenían expresiones con variables, se inclinaban por tomar un ejemplo específico, lo que refleja la necesidad de usar lo particular para llegar a lo general, aunque es una estrategia válida que desarrolla razonamiento inductivo, es necesario que superen estas dificultades, considerando la forma de comunicación de los signos matemáticos, así cuando trabajen por ejemplo con el lenguaje algebraico necesitarán superar determinados obstáculos; por otra parte un gran porcentaje de estudiantes comenzaron el concepto de potenciación con deficiencia de conceptos previos o asumiendo que la potenciación se desarrolla como un producto entre base y exponente.

Algo semejante ocurre con el exponente cero o entero negativo, lo más probable es que esto se deba a la complejidad de representar en estos casos la base como un producto reiterado de veces que indica el exponente, así mismo se observa la poca abstracción de las propiedades de la potenciación, esto se vislumbra en la pregunta diez donde la mayoría encontró una relación en la simplificación presentada y logro desarrollar con éxito determinada actividad, sin embargo en la pregunta catorce no se evidencia el uso adecuado de determinadas propiedades.

Al finalizar la prueba varios estudiantes manifestaban que la pregunta 13 estaba mal estructurada, dado que no era posible pasar de una potenciación a radicación, esto manifiesta que poco vinculan la potenciación con este concepto.

Capítulo IV: conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas

En este capítulo, se exponen algunas conclusiones y reflexiones didácticas, relacionadas con los objetivos planteados desde el inicio del presente trabajo, a partir de la identificación y caracterización de algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado noveno de Educación Básica Secundaria, sobre el concepto de potenciación, a través del análisis de los resultados de las dieciséis preguntas propuestas en una prueba diagnóstica, que permite producir algunas reflexiones para los maestros en formación y en ejercicio, como elementos que logren repercutir en el adecuado aprendizaje de la potenciación.

4.1. Conclusiones generales

Las siguientes conclusiones resumen todo aquello que se considera significativo en el análisis de los resultados de las pruebas, en relación con los objetivos específicos del presente trabajo.

Con respecto al primer objetivo específico que hace relación a la documentación de la problemática desde las perspectivas didáctica, matemática y curricular para articularlas en el diseño de una prueba diagnóstica, de acuerdo al desarrollo del trabajo se puede concluir que:

Desde la perspectiva curricular es importante tener en cuenta que los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas publicados por el Ministerio de Educación Nacional (1998) y (2006) respectivamente, enfatizan en el estudio de la potenciación desde los primeros grados de la escolaridad, por ser este un concepto transversal en la escuela. Además se considera que la potenciación como cualquier operación tiene diferentes significados, y representaciones, por lo tanto debe construirse en ámbitos significativos, que favorezcan al desarrollo del pensamiento numérico.

En la perspectiva didáctica se tomó en consideración la documentación encontrada en diferentes investigaciones, donde se resaltó las dificultades relacionadas al proceso de enseñanza

y aprendizaje de la potenciación, algunas de ellas se tuvieron en cuenta para la realización de la prueba diagnóstica con el objetivo de evaluar diversos aspectos, como por ejemplo: la definición de potenciación como una multiplicación reiterada, la relación de la potenciación con la radicación como operaciones inversas bajo ciertas condiciones, la inadecuada aplicación de algunas propiedades, el desarrollo de potencias cuando el exponente es cero, negativo o fraccionario y el uso de diversos tipos de representación.

Por otra parte desde la perspectiva Matemática se atiende a la definición de potenciación, las propiedades de manera formal y se especifica el tratamiento de esta operación en los diferentes conjuntos numéricos, la equivalencia de la potenciación con la radicación y la logaritmación, así como la relación con otros conceptos como la función exponencial, estos aspectos fueron claves para definir el componente matemático en el diseño de la prueba.

En síntesis las anteriores perspectivas aportaron al diseño de la prueba considerando la importancia del concepto de potenciación en los distintos niveles de escolaridad, algunas dificultades y errores que deben de tener un tratamiento por parte de los docentes; igualmente permitió consolidar una prueba alrededor de la potenciación que indaga sobre: el concepto, las operaciones, las relaciones de equivalencia y las relaciones con otras operaciones, para identificar en los procedimientos que tipo de habilidades, destrezas, dificultades, errores y concepciones presentan los estudiantes para dar su respuesta a cada una de las situaciones planteadas y cómo esto repercute en la enseñanza y aprendizaje de la potenciación.

Teniendo en cuenta el segundo objetivo, que hace referencia a la identificación y caracterización de las dificultades y errores encontrada en los estudiantes de grado noveno sobre el concepto de potenciación, a través de la aplicación de la prueba diagnóstica, se concluye que:

- Se logró evidenciar que un gran número de estudiantes presentan dificultades asociadas al concepto de la potenciación, en vista de que desarrollan la potenciación como un producto entre la base y el exponente.
- Cuando el exponente es cero, negativo o racional o la base es negativa, se logra identificar la falta de claridad de las restricciones del concepto de potenciación como multiplicación reiterada, que según las investigaciones de Soccas (2000) este tipo de dificultades se presentan debido a la complejidad de este tipo de objetos matemáticos; algo semejante ocurre en la relación que existe entre la potenciación con la radicación, a lo cual deben recurrir los estudiantes cuando el exponente es un racional.
- Se reflejó que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de situaciones presentadas en lenguaje natural y en traducir los enunciados en expresiones Matemáticas, al no utilizar la operación (la potenciación) que permite dar cuenta de la solución del problema.
- En la mayoría de los ejercicios resueltos por los estudiantes se reflejan limitaciones al aplicar las propiedades de la potenciación, especialmente al operar en la estructura aditiva, como por ejemplo al distribuir el exponente en la expresión $(a + b)^2$, este tipo de error como se indicó en los análisis quizás se debe a que los estudiantes omiten el concepto de potenciación como multiplicación reiterada para solucionar de forma adecuada la expresión o también al reconocer el símbolo de la adición, aplican distributiva.
- Se encontraron otras dificultades que no se relaciona precisamente con la potenciación pero que influyen notablemente en su desarrollo, dado que los estudiantes tienen alta inclinación en aplicar otros conocimientos como la suma, la resta división o la multiplicación y sus respectivas propiedades en la potenciación, al tener en consideración solo el signo de estas operaciones elementales ignorando cualquier tipo de restricción por ejemplo al multiplicar

los exponentes en el producto de potencias, el inadecuado uso de la jerarquía de las operaciones, entre otros.

- Los estudiantes no reconocen el crecimiento exponencial en algunas representaciones graficas como secuencias de figuras geométricas, gráficos estadísticos o diagramas de árbol, para dar cuenta de situaciones problemas.
- Al desarrollar las operaciones con potencias, gran parte de los estudiantes hacen uso de la definición de potenciación y posteriormente recurren a conceptos como la división, la multiplicación o la simplificación para llegar al resultado.
- Las principales dificultades que presentaron los estudiantes al aplicar las propiedades de la potenciación son las siguientes: En el producto de potencias de igual bases, aunque suman los exponentes, multiplican las bases o conservan las bases pero multiplican los exponentes, en relación al cociente de potencias de igual base multiplican la base y suman los exponentes, conservan la base y multiplican los exponentes o dividen las bases y restan los exponentes. Por otra parte cuando las bases son diferentes multiplican las bases y resta los exponentes.
- Dado que en algunos ítems de la prueba, un gran porcentaje de estudiantes no justifican su elección, es conveniente para futuras investigaciones como las de este trabajo, tener en consideración entrevistar una muestra significativa de estudiantes, considerando que es probable que este proceso permita definir las razones por las cuales no explican cómo obtienen la respuesta que eligen y además identificar algunas dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas o a los procesos cognitivos del alumno.

Por otra parte es importante que esta entrevista se realice en dos momentos, el primero de ellos durante la aplicación de la prueba, para verificar las razones por las cuales se presentan diversos

errores y de esta manera enriquecer los análisis de los resultados a partir de las inferencias que las entrevistas aporten, como por ejemplo dar a conocer que tipo de dificultad genera que los estudiantes multipliquen la base con el exponente de manera constante durante la prueba; un segundo momento es después de revisar los resultados, donde es útil que aquellos estudiantes que alcanzan la mayoría de los desempeños realicen algunos aportes que permitan dar cuenta de algunas reflexiones para que el aprendizaje de la potenciación sea significativo, o por el contrario aquellos estudiantes que no obtuvieron un buen desempeño, para conocer qué factores originan la presencia de diversos errores.

Estas conclusiones validan lo reportado en las investigaciones que inicialmente fueron indagadas para la contextualización de la problemática y en las perspectivas didáctica, curricular y matemática.

4.2. Algunas reflexiones didácticas

Teniendo como referencia los resultados de este trabajo, se concluye que las dificultades que presentan los estudiantes en torno al concepto de la potenciación, en su gran mayoría están asociadas al poco dominio de procedimientos generales y específicos para resolver problemas, el manejo de otras representaciones, la aplicación de propiedades, entre otras. Sin embargo es importante superar estas dificultades al ser la potenciación un concepto transversal en la enseñanza de las Matemáticas, por tanto es valioso que los maestros tengan en consideración algunos elementos para que la enseñanza y aprendizaje de este concepto sea significativo, por tanto se presentan algunas reflexiones didácticas que puedan aportar para este fin.

Teniendo en cuenta el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica, es importante que al momento de abordar el concepto de potenciación los docentes tengan presente, que la potenciación por ser una operación tiene distintas definiciones, una de ellas es como una

multiplicación reiterada, cuando el exponente es número natural, pero no es la única puesto que hay que tener en consideración como se define cuando el exponente es cero, negativo o racional. Además de lo anterior es importante que desde los primeros grados de la escolaridad se les exponga a los estudiantes la relación que tiene la potenciación con otras operaciones por ejemplo la radicación, la logaritmación y posteriormente la función exponencial.

En este orden de ideas es necesario que los docentes tengan en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y usen técnicas de demostración que permitan dotar de sentido algunos objetos matemáticos, sus propiedades, generalizaciones y la necesidad de tener en cuenta las restricciones existentes en la potenciación. Un ejemplo de ello, es como desde el concepto de la multiplicación reiterada es posible aclarar algunas propiedades cuando el exponente pertenece a los naturales, sin embargo cuando el exponente no pertenece a los naturales es necesario tener en consideración algunas restricciones, y abordarla desde los primeros años de escolaridad de manera significativa.

Otro aspecto destacable en este trabajo fue vislumbrar como el uso de una prueba diagnóstica en la escuela, permite analizar, retroalimentar y mejorar el proceso de enseñanza realizado por el docente y los resultados del aprendizaje de los educandos, puesto que con la implementación de este tipo de este tipo de evaluación, es posible identificar dificultades, errores, habilidades y avances en cuanto a determinados temas. Esto hace que la labor del docente no se limite al hecho de asignar una calificación numérica a los estudiantes, si no, de cuestionarse qué tipo de alternativas y razonamientos están teniendo en cuenta y con ello hacer aclaraciones en la clase que favorezcan a la superación de estas limitaciones. Por lo anterior es importante que para diseñar una prueba diagnóstica se tenga en cuenta diversos elementos como por ejemplo los

objetos matemáticos que se involucran, para saber que se va a evaluar y cuestionarse ¿para qué y cuándo se aplica?, ¿cuál es su importancia y utilidad?, entre otros.

El análisis de los resultados de la prueba permitió conocer que es necesario tener en cuenta la forma en que se introduce la potenciación en la escuela, puesto que algunas técnicas tradicionales utilizadas por algunos maestros dejan de lado elementos significativos que dotan de sentido este concepto y hacen que algunos objetos matemáticos se vean estáticos, esto se puede evitar usando prácticas significativas y contextualizadas al presentar situaciones que involucren contextos cotidianos donde evidencien la utilidad del concepto y motive a su aprendizaje, también se encuentra la importancia de trabajar con distintos tipos de representación que permite relacionar la parte operatoria de manera dinámica e involucra contenidos conceptuales y procedimentales.

Un ejemplo de lo anterior se evidencia en la actividad número dos de la prueba diagnóstica, donde los estudiantes hicieron uso de diversas estrategias exitosas con las cuales lograron dar solución a la situación, entre ellas se destacó el uso de material concreto como un pedazo de papel o el uso de una gráfica que da cuenta de la situación (diagrama del árbol) que contribuye significativamente en la construcción del concepto en el aula a través del uso de herramientas intermedias, así mismo el uso adecuado de diversos registros de representación y su articulación, permiten movilizar conocimientos y saberes de un objeto matemático, puesto que este tratamiento favorece procesos de generalización. Es por esto que el docente debería proponer situaciones que promueva en los estudiantes los procesos de conversión entre las diferentes representaciones.

Finalmente es importante que el docente en la escuela tome un rol de investigador ya que con esto se pueden lograr cambios significativos en sus planeaciones de clases, puesto que no solo

basta con conocer los componentes matemáticos de un concepto, sino articular las investigaciones didácticas con los referentes de tipo curricular dado que estos brindan orientaciones acerca del que enseñar y como enseñar los distintos contenidos matemáticos.

Referencias bibliográficas

- American Psychological Association. (2010). Publication manual of the American Psychological Association. (6ta ed.). United States of America: American Psychological Association.
- Barnett, R. A. (1988). Álgebra y trigonometría (2ed). México: McGraw-Hill Book Company
- Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la Universidad de los Andes. *Orbis: Revista Científica de Ciencias Humanas*, 2 (6). Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=70920605>
- Caraballo, R. (2010). Análisis de los ítems de las pruebas de evaluación de diagnóstico en competencia matemática para el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria en España, 2008-2009: un estudio exploratorio. *Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada, Granada*. Recuperado de: http://www.ugr.es/~lrico/MastDDM_files/Rosa_Caraballo.pdf
- Colín Uribe, M. P. (2005). *De la aritmética al cálculo. Un estudio transversal sobre la raíz cuadrada* (Tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional, México, D. F., México. Recuperado de: http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11385/colin_2006.pdf?sequence=1
- Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics, 291-330.
- Departamento de Educación gobierno de Navarra (2008), *marco teórico de la evaluación diagnostica* recuperado de: <https://www.educacion.navarra.es/documents/57308/57716/Marcoteorico.pdf/a642ae7d->

2be5-4398-9265-da9cc4832f49

Gerompini, A. C. (1978). *Experiencias en clase: potenciación de números naturales* (Sistematización de experiencia) . Colegio Nacional “Alte.G.Brown” Grupo de Estudios en Didáctica de la Matemática de Lomas de Zamora. Recuperado el 17 de Octubre de 1978, de www.soarem.org.ar: www.soarem.org.ar

Gómez Álvarez, E., y Gómez Toro, W. (2016). *Aprendizaje significativo de la potenciación y la radicación a través del juego en el grado noveno* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Recuperado de:
http://www2.udelarroba.co/pluginfile.php/308533/mod_resource/content/1/G%C3%93MEZ%20E-G%C3%93MEZ%20W-APRENDIZAJE%20SIGNIFICATIVO%20DE%20LA%20POTENCIAC%3%8DON%20Y%20LA%20RADICACI%C3%93N%20A%20TRAV%3%89S%20DEL%20JUEGO%20EN%20EL%20GRADO%20NOVEN.pdf

Jorba, J., & Sanmartí, N. (1993). La función pedagógica de la evaluación. *Aula de innovación educativa*, 20, pp. 20-30. Recuperado de:
http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/31188642/JORBA_Y_SANMARTI_1_a_funcion_pedag_de_la_eval_2.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1490123006&Signature=zFsWdLVVBHOvU7%2FOSewuu954Zlc%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DLa_funcion_pedagogica_de_la_evaluacion.pdf

Martínez García, C., y Penalva Martínez, M. C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 24 (2). Recuperado de:

<http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/75832/96336>

Martínez Lobo, D. S. (2010). *Identificación de los errores en la aplicación de las propiedades de la potenciación* (tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. Recuperado de:

<http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7186/2/136135.pdf>

Mejía Duque, F. (1991). *Matemáticas operativas básicas*. Colombia: Universidad de Medellín.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas*.

Recuperado de: http://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado de:

http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Orobio Moreno, C. A. (1997). *El error como elemento básico del diseño de una propuesta pedagógica para la enseñanza de: Teoría de números, potenciación, y relación de orden en los naturales* (tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.

Pantano Mogollón, L. V. y González Alfonso, D. F. (2013). Enseñando potenciación, radicación y logaritmación a partir de los bloques de dienes, bloques multibase y el método de splitting. *Revista Científica No. especial*. Recuperado de:

<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/7709/9519>

Pérez García, M. A., (2009). Diofanto, Congruente. Una Historia de las Matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes (pp. 215-214). Recuperado de

<http://books.google.co.cr/books?id=4YOfMzU5bCUC&pg=PA215&dq=Diofanto+congruente&hl=en&sa=X&ei=TRFUeziHii42QWbsYBw&ved=0CC0Q6AEwAA>

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la Matemática en

alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35 (4).

Recuperado de: http://rieoei.org/did_mat28.htm

Romero Bojórquez, L., Utrilla Quiroz, A., y Utrilla Quiroz, V. M. (2014). Las actitudes positivas y negativas de los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas, su impacto en la reprobación y la eficiencia terminal. *Ra Ximhai*, 10(5). Recuperado de: <http://uaimlosmochis.org/ECFD/index.php/2014/2/paper/viewFile/170/25>

Sepúlveda López, Armando, Medina García, Cynthia, & Sepúlveda Jáuregui, Diana Itzel. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática*, 21(2), 79-115. Recuperado, de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000200004&lng=es&tlng=es.

Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria. En: L. Rico. (Ed.). *La educación Matemática en la enseñanza secundaria* (2ed). España: I.C.E. Universitat Barcelona.

Zill D. G., y Dewar J. (2000). *Álgebra y trigonometría*. Colombia: McGraw-Hill Interamericana.