

**MODELO ESCALAR-TENSORIAL Y SOLUCIONES SINGULARES DE
TIEMPO TARDÍO**

STEFANI LYZETH DORADO SALDARRIAGA

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
2014**

MODELO ESCALAR-TENSORIAL Y SOLUCIONES SINGULARES DE TIEMPO TARDÍO

STEFANI LYZETH DORADO SALDARRIAGA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Físico

Director
LUIS NORBERTO GRANDA
Ph. D.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
16 de septiembre de 2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA

STEFANI LYZETH DORADO SALDARRIAGA

MODELO ESCALAR-TENSORIAL Y SOLUCIONES SINGULARES DE
TIEMPO TARDÍO

Palabras clave: Cosmología , energía oscura, singularidades futuras, Big Rip.

*“Some say the world will end in fire, Some say in ice...”*¹

¹Fragmento del poema “Fire and Ice” de Robert Frost’s

Resumen

Se estudió un modelo de campo escalar con acoplamiento cinético y de Gauss-Bonnet (GB) teniendo en cuenta singularidades futuras en el escenario del quintom, en el cual la ecuación de estado ha cruzado la frontera de la constante cosmológica y se propone la energía oscura como responsable de la expansión acelerada del Universo.

Considerando una acción con estos acoplamientos, haciendo uso de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y suponiendo además un universo homogéneo, se hallaron las ecuaciones de movimiento del Universo. Las soluciones que se propusieron para estas ecuaciones y a partir de las cuales se reconstruyó el modelo tienen la forma:

$$H(t) = \frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^\alpha \quad (0.1)$$

donde

- $H(t)$: Parámetro de Hubble dependiente del tiempo
- γ, λ : Constantes con dimensión de inverso del tiempo
- α, β, η : Constantes adimensionales

Se analizaron los casos para $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 3/2$ y se estudiaron los tipos de singularidades presentes. Se encontró la ecuación de estado efectiva (w_{eff}) en cada caso y mediante ella se interpretó el fenómeno de la energía oscura, permitiendo visualizar un panorama futuro.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	1
2. APUNTES DE RELATIVIDAD GENERAL	4
2.1. Principio de Equivalencia	4
2.2. Tensor Métrico	4
2.3. Curvatura	5
2.4. Ecuación de campo de Einstein	5
3. MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR	9
3.1. Principio Cosmológico	9
3.2. Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walter (FLRW)	10
3.3. Evidencia Observacional de la Energía Oscura	14
Distancia de Luminosidad, $d_L(z)$	14
Corrimiento al Rojo, z	14
Supernovas Tipo Ia	16
4. MODELO DE CAMPO ESCALAR CON ACOPLÉ CINÉTICO Y DE GAUSS BONNET	19
4.1. Ecuaciones de Campo	19
5. SINGULARIDADES EN UN UNIVERSO DE ENERGÍA OSCURA	22
5.1. Futuro de un Universo de Energía Oscura	22
5.2. Tipo de Singularidades	22
5.3. Tipo Big Rip y Tipo III	23
6. DINÁMICA DE LA ENERGÍA OSCURA CON SINGULARIDADES FUTURAS	26
6.1. Soluciones con Singularidades Tipo I (Big Rip) y Tipo III	26
6.1.1. Caso con $\alpha = 1/2$	28
6.1.2. Caso con $\alpha = 3/2$	31
7. CONCLUSIONES	33
A. Detalles Matemáticos	35
A.1. Deducción del tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$	35
A.2. Tiempo de transición ecuación (6.23)	36
B. Cálculo del tensor $T^{\mu\nu}$	37
Bibliografía	44

CAPÍTULO 1

1. INTRODUCCIÓN

Observaciones astronómicas de las distancias de luminosidad de supernovas tipo Ia[8] y del espectro de radiación de fondo de microondas (CMB), proporcionan evidencia de la velocidad cósmica del Universo. Observacionalmente se registra una expansión acelerada causada por una repulsión gravitacional o presión negativa, lo cual nos lleva directamente a pensar en una ecuación de estado de energía negativa, a lo cual se le ha dado el nombre de *Energía Oscura*[13, 3, 7, 8, 14]. Los resultados obtenidos en las investigaciones recientes realizadas con los datos recolectados en el proyecto *Planck*, sugieren un universo espacialmente plano y formado por un 68,3 % de energía oscura, un 26,8 % de materia oscura y un 4,9 % de materia bariónica²[6]. La presencia de esta energía produce una presión que acelera la expansión del Universo, dando lugar a una fuerza gravitatoria repulsiva.[13]

Existen diversos modelos en el estudio de la energía oscura que asumen de modos diferentes el campo escalar y el potencial asociado al fenómeno, encontramos así por ejemplo los modelos de *La Constante Cosmológica*, *Quintessence*, *Campo de Tachyon*, *K-essence*, *Gas de Chaplying*, Λ CDM (*Lambda - Cold Dark Matter*) y soluciones tipo *Phantom*³ [13, 16].

La *Constante Cosmológica* y el modelo de *Quintessence* difieren básicamente en que el segundo es un modelo dinámico que asocia a la energía oscura un determinado campo escalar; la constante cosmológica plantea una densidad de energía constante que permea el universo homogéneamente; dentro del modelo estandar cosmológico es más aceptado el modelo de la constante cosmológica por plantear una solución más simple, pero es considerada como una de las “peores predicciones de la historia de la

²La materia bariónica hace referencia a la forma de materia detectable por radiación

³campos escalares con término cinético negativo

física”[3] por la discrepancia que se presenta entre su valor experimental y el valor esperado, ya que se tiene que el valor de Λ experimental, obtenido de las últimas observaciones hechas por el WMAP, es del orden del cuadrado del parámetro de Hubble $\Lambda \approx H_o^2 = (2,13h \times 10^{-42} GeV)^2$ que corresponde a una energía de vacío $\rho_\Lambda \approx 10^{-47} GeV^4$ ($\rho_\Lambda = \frac{\Lambda m_p^2 l}{8\pi}$), mientras que por medio de la teoría cuántica de campos se predice un valor de $\rho_\Lambda = 10^{74} GeV^4$, dando lugar a una diferencia de 10^{121} órdenes de magnitud[14].

En general se puede decir que los modelos de Quintessence, Campo de Tachyon, K-essence, Gas de Chaplying, ΛCDM y soluciones tipo Phantom no consideran la presencia de la constante cosmológica, en vez de ello se plantea un campo escalar responsable de la expansión acelerada del Universo y de paso de la energía oscura. Estos modelos han logrado satisfacer las condiciones para la presencia de energía oscura ya que como campos dinámicos su densidad de energía puede variar en el tiempo y el espacio, sin embargo estos modelos cosmológicos evolutivos presentan dificultades entre las que principalmente se encuentra la presencia de singularidades en tiempo finito como lo son Big Rip, Little Rip y singularidades tipo sudden[13].

La singularidad tipo Big Rip quiere decir que una o más cantidades físicas tienden a infinito en un tiempo t finito en el futuro lo cual implica integrales divergentes provenientes de las ecuaciones de Friedmann; las singularidades Little Rip se caracterizan por una densidad de energía que incrementa con el tiempo asintóticamente, por lo que se requiere un tiempo infinito para encontrar la singularidad; las singularidades tipo “Sudden” se refieren a un cambio instantáneo de la presión o de la expansión del Universo.[26]

En este trabajo se considera un modelo de campo escalar con dos tipos de acoplamiento, uno cinético para la curvatura y otro de Gauss-Bonnet (GB) para el campo escalar. El término introducido de GB es una invariante topológica en cuatro dimensiones y no hace contribuciones de más de segundo orden en las ecuaciones de movimiento [1]. Sin embargo ésta afecta la dinámica cosmológica cuando es acoplada a la evolución dinámica del campo escalar a través de una función de campo arbitraria, dando lugar a ecuaciones de movimiento diferenciales de segundo orden. Así, el término acoplado GB aparece como una generalización natural del campo escalar no-mínimamente acoplado a la curvatura[1]. Mediante la consideración de los acoplamientos más generales, se plantea el parámetro de Hubble con el fin de reconstruir escenarios cosmológicos apropiados que satisfagan las actuales observaciones astrofísicas considerando singularidades futuras.

Las singularidades Big Rip (o Tipo I) provienen de la superaceleración de un universo en fase fantasma o “Phantom”, cuyo estado cabe dentro del rango de las observaciones actuales[1]; este tipo de singularidades plantean una disociación en la estructura del Universo debido al incremento en la densidad de la energía oscura, por esta razón también se le conoce como *Teoría de la expansión eterna* [4]; en el futuro el Universo se convertiría en partículas subatómicas flotantes que permanecerían para siempre

separadas, sin cohesión gravitatoria ni energía alguna. Las singularidades relacionadas con comportamiento tipo Phantom son muy estudiadas en la actualidad en la teoría de evolución del Universo [12, 18, 27].

El acierto de este modelo depende de la cantidad de energía oscura presente en el Universo, el valor clave es la razón entre la presión de la energía oscura y su densidad energética, lo que se representa con la variable w . Si su valor es tal que $w < -1$, entonces se viola la condición de energía nula ($\rho + p \leq 0$) y uno de los posibles escenarios es un Universo donde toda la materia del Universo acabaría por disociarse.

CAPÍTULO 2

2. APUNTES DE RELATIVIDAD GENERAL

Relatividad significa que físicamente es imposible detectar el movimiento absoluto, por lo cual las ecuaciones en física son invariantes bajo transformaciones de coordenadas. La relatividad plantea una nueva forma de entender el espacio y el tiempo, concretamente la relatividad general interpreta la gravedad como una estructura en el espacio-tiempo, es por ésto que la solución de las ecuaciones de campo que plantea la relatividad general describe el universo entero.

2.1. Principio de Equivalencia

Einstein fue conducido a su experimento mental del ascensor en caída libre gracias a la igualdad entre masa gravitacional e inercial. Se sigue de este razonamiento que la aceleración de cualquier partícula respecto al ascensor es cero: la partícula y el ascensor tienen la misma aceleración relativa a la tierra como resultado de la equivalencia entre masa gravitacional e inercial.

Lo anterior se ha plasmado en un principio empírico postulado por Einstein, denominado principio de equivalencia de la gravitación y la inercia:

Un sistema de referencia que cae libremente en un campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia inercial sin gravedad.[7]

2.2. Tensor Métrico

La idea central de la geometría diferencial era que una descripción intrínseca del espacio pudiera ser realizada por la medida de la distancia hecha dentro del espacio físico. Para un sistema de coordenadas dado esa medida está codificada en la función métrica.

La métrica g_{ij} relaciona la medida de longitud infinitesimal ds en unas coordenadas escogidas dx^i , así

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (2.1)$$

Esta métrica es simétrica $g_{ij} = g_{ji}$. La ecuación (2.1) también puede ser escrita como matriz; para un espacio en 2 coordenadas:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

2.3. Curvatura

El valor obtenido de la métrica no puede representar la esencia de un espacio curvado porque este valor es dependiente de las coordenadas y puede ser transformado, localmente, como una métrica en espacio plano.

Según el Teorema Egregium de Gauss, la curvatura K es la segunda derivada del tensor métrico $(\partial^2 g)$, si consideramos una métrica $g_{ij} = \text{diag}(g_{11}, g_{11})$, la curvatura se expresa como:

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2g_{22}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \right\}$$

Independientemente de la coordenada que se elija, $K = 0$ para un plano y $K \neq 0$ para superficies curvadas. Existen tres tipos de superficies que tienen curvatura constante:

$$K = \frac{k}{R^2} \quad k = +1, 0, -1 \quad (2.3)$$

donde los valores de k corresponden a una 3-esfera, un plano y una 3-pseudoesfera (curvatura negativa), respectivamente; R equivale al radio [3].

2.4. Ecuación de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo permiten, dada una fuente de distribución, encontrar el campo en cualquier lugar. De la teoría Newtoniana se tiene que la segunda derivada del potencial gravitacional Φ , es directamente proporcional a la densidad de masa ρ , así:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G_N \rho \quad (2.4)$$

donde G_N es la constante de gravitación universal de Newton. Desde el punto de vista de la relatividad, la masa no es más que una forma de energía y siendo la energía y el momentum equivalentes, se puede generalizar la densidad de masa ρ a un objeto

llamado el *tensor de energía momentum* $T_{\mu\nu}$ que describe la distribución y flujo de energía y momentum debido a la presencia y movimiento de la materia y radiación en una región del espacio-tiempo. El momentum relativista se define como $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, donde γ es el factor de Lorentz que se expresa como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2.5)$$

Las tres componenetes del momentum relativista, junto con la energía relativista $E = \gamma mc^2$ forman un 4-vector p^μ , donde se puede ver la equivalencia entre el momentum y la energía:

$$p^\mu = (-\gamma mc, \gamma mc_x, \gamma mc_y, \gamma mc_z)$$

$$(p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$$

En un sistema simple de partículas que no interactúan entre sí, con un conjunto arbitrario de coordenadas x^μ en el cual el cuadvivector velocidad es u^μ , el tensor de energía-momentum se expresa como:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (2.6)$$

En el caso de un fluido ideal en el cual los elementos del fluido interactúan a través de una fuerza perpendicular, es decir que no hay fuerzas de cizallamiento ($T^{ij} = 0, i \neq j$), lo cual implica que en el sistema hay presión pero no viscosidad, el tensor de energía-momentum se expresa así [7]:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & -p & & \\ & & -p & \\ & & & -p \end{pmatrix} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (2.7a)$$

$$T_\nu^\mu = \text{Diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (2.7b)$$

donde ρ y p corresponden respectivamente a la densidad de energía y a la presión del fluido.

Como se puede observar, el tensor $T_{\mu\nu}$ tiene 16 elementos de los cuales el primero corresponde a la densidad de energía $T_{00} = \rho c^2$, los tres elementos T_{0i} corresponden a las densidades de momentum y los 12 elementos restantes representan el flujo asociado con la densidades de energía y momentum.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Densidad de energía} & & \text{Densidad de momentum} \\
\uparrow & & \nearrow \\
[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \boxed{T^{00}} & \boxed{T^{01}} & \boxed{T^{02}} & \boxed{T^{03}} \\ \boxed{T^{10}} & \boxed{T^{11}} & \boxed{T^{12}} & \boxed{T^{13}} \\ \boxed{T^{20}} & \boxed{T^{21}} & \boxed{T^{22}} & \boxed{T^{23}} \\ \boxed{T^{30}} & \boxed{T^{31}} & \boxed{T^{32}} & \boxed{T^{33}} \end{pmatrix} \\
\downarrow & & \searrow \\
\text{Flujo de energía} & & \text{Flujo de momentum}
\end{array}$$

$T_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, de modo que $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Para espacios de dimensiones superiores, la curvatura Gaussiana K se generaliza al tensor de curvatura de Riemann $\mathbf{R}_{\lambda\alpha\beta}^{\mu}$:

$$R_{\lambda\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}\Gamma_{\lambda\beta}^{\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\nu} \quad (2.8)$$

donde los Γ corresponden a los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[\partial_{\nu}g_{\mu\rho} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}] \quad (2.9)$$

El tensor de curvatura de Riemann contraído en su primer y tercer índice corresponde al *tensor de Ricci* $\mathbf{R}_{\mu\nu}$,

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\beta\nu}^{\beta} \quad (2.10)$$

el cual es un tensor simétrico $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Al contraer dos veces el tensor de Riemann se obtiene el *escalar de Ricci*:

$$R \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = R_{\beta}^{\beta} \quad (2.11)$$

Hay una serie de restricciones relacionadas con el tensor de curvatura, estas restricciones reciben el nombre de **identidades de Bianchi**, y son satisfechas por la derivada covariante del tensor de curvatura

$$D_{\lambda}R_{\mu\nu\alpha\beta} + D_{\nu}R_{\lambda\mu\alpha\beta} + D_{\mu}R_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0 \quad (2.12)$$

El tensor métrico es covariantemente constante ($D_{\lambda}g^{\alpha\beta} = 0$), si se contrae la identidad de Bianchi (2.12) con el tensor $g^{\mu\alpha}$, aplicando la contracción de Ricci y luego con $g^{\nu\beta}$ (ver apéndice A.1), se obtiene:

$$D_{\lambda}(Rg^{\mu\lambda} - 2R^{\mu\lambda}) = 0 \quad (2.13)$$

De aquí se define:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

De modo que:

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.15)$$

$G^{\mu\nu}$ es el denominado **tensor de Einstein**, tensor de rango 2, covariantemente constante y simétrico.

Todo lo anterior sugiere que la generalización relativista de la ecuación de campo gravitacional dada por la ecuación (2.4) , tiene por un lado involucrado al tensor de energía-momentum y por otro al tensor de Einstein

Newton	$\nabla^2\Phi \propto \rho$
RG	$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$

Así se llega finalmente a la **Ecuación de campo de Einstein**, de la forma:

$$G_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

donde k^2 es una constante de proporcionalidad (c es la velocidad de la luz)

$$k^2 = -\frac{8\pi G_N}{c^4} \quad (2.17)$$

Conociendo la expresión de $G_{\mu\nu}$, la ecuación (2.16) se puede escribir:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

El límite no relativista de la ecuación (2.18) es justamente la ecuación de campo de Newton(2.4).

CAPÍTULO 3

3. MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR

El objeto de trabajo de la cosmología es el estudio de la estructura y la evolución del universo, que es en sí una vasta colección de materia y energía. En la cosmología moderna el marco de referencia de la teoría Newtoniana no es adecuado, ya que está ideada en un campo gravitacional estático y débil, haciéndose entonces necesaria la teoría de relatividad; así la dinámica del universo se puede describir mediante las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de Friedmann, sin dejar de vista la interpretación Newtoniana y tomando como base el principio cosmológico.

3.1. Principio Cosmológico

Por medio de observaciones directas, como las hechas por “the Anglo-Australian Two Degree Field Galaxy Redshift Survey (2dF)”, han sido medidas algunas áreas del cielo de proporciones significativas, de un millón de galaxias, confirmando la suposición de que el universo en grandes escalas de ≥ 100 Mpc es homogéneo e isotrópico[7, 13]. De hecho, estos estudios son una importante herramienta de la cosmología moderna. Otra evidencia de esta homogeneidad e isotropía viene de la forma extremadamente uniforme de los mapas de radiación cósmica de fondo **CMB**. Pero mucho antes de obtener esta evidencia observacional, Einstein había adoptado la estrategia de empezar sus estudios en cosmología con una hipótesis básica llamada el principio cosmológico:

En cada época el universo es homogéneo e isotrópico.

Este postulado implica que no hay una posición privilegiada en el universo, lo cual resulta práctico porque reduce la cantidad de parámetros a tener en cuenta. El principio cosmológico da lugar a una imagen del universo como un sistema físico de “fluido cósmico”, donde las partículas fundamentales son las galaxias y aunque un elemento de volumen tenga muchas galaxias, esta cantidad sigue siendo pequeña comparada con la totalidad del sistema, el universo.

3.2. Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walter (FLRW)

Para describir el universo como un sistema físico que satisface el principio cosmológico, el espacio-tiempo debe tener una métrica que junto con las ecuaciones de Einstein y una fuente de fluido ideal conformen un conjunto básico de ecuaciones para la cosmología, estas ecuaciones son llamadas las ecuaciones de Friedmann, en honor al matemático Ruso Alexander A. Friedmann.

La métrica usada en el modelo cosmológico estándar es la la FLRW - (*Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*)[7]:

$$d\tau^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (3.1)$$

aquí $a(t)$ es el factor de escala en el tiempo t y en él está contenida la dinámica del universo; r , θ y ϕ son coordenadas comóviles; la constante K es la encargada de describir la geometría de la parte espacial del espacio tiempo y puede tomar los valores de -1, 0 o 1, que corresponden respectivamente a un universo abierto, plano o cerrado.

Haciendo uso de esta métrica y de las ecuaciones de Einstein (2.16) y (2.18), así como de la consideración del tensor de energía-momento para un fluido homogéneo, se obtiene:

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.2a)$$

$$R_{ij} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} \right] \delta_{ij}, \quad (3.2b)$$

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right]. \quad (3.2c)$$

Lo anterior en términos del parámetro de Hubble, sería:

$$R_{00} = -3[\dot{H} + H^2], \quad (3.3a)$$

$$R_{ij} = [\dot{H} + 3H^2 + \frac{2K}{a^2}] \delta_{ij}, \quad (3.3b)$$

$$R = 6[\dot{H} + 2H^2 + \frac{K}{a^2}]. \quad (3.3c)$$

El término H es el denominado parámetro de Hubble que relaciona la velocidad de alejamiento entre las galaxias, por unidad de separación y corresponde a

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.4)$$

así mediante este parámetro se puede estimar la rata de expansión del universo. Considerado en la época actual, este parámetro recibe el nombre de *constante de Hubble* (H_0) y describe la velocidad de expansión del Universo en la actualidad. De la reciente compilación de parámetros cosmológicos [7], se indica que:

$$H_0 = (72 \pm 7 \text{ km/s}) \text{ Mpc}^{-1} \quad (3.5)$$

Mpc : MegaPársec = 10^6 pársec, 1 pársec = 3.1616 años luz.

En virtud de la identidad de Bianchi la conservación de T^μ_ν conduce a la ecuación de continuidad (ρ densidad, p presión):

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.6)$$

Las ecuaciones de Friedmann surgen de las componentes de la ecuación de Einstein (2.18) y de la métrica FLRW (3.1), teniendo en cuenta también las ecuaciones 3.2:

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{K}{a^2} = H^2 \quad (3.7a)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p) + \frac{K}{a^2} = \dot{H} + H^2 \quad (3.7b)$$

$$\kappa^2 p = -2\dot{H} - 3H^2 \quad (3.7c)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$.

Considerando la ecuación (3.7b) se nota la presencia de aceleración si se cumple la condición $\rho + 3p < 0$. Como se puede ver entonces, debido a la presencia del factor de escala, estas ecuaciones proporcionan la dinámica y evolución del universo en términos de la presión y la densidad del fluido cósmico.

Se puede reescribir la ecuación (3.7a) como:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{(aH)^2} \quad (3.8)$$

donde se ha definido el parámetro de densidad

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \quad (3.9)$$

con

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

que es denominado densidad crítica ya que es la necesaria para la existencia de una geometría plana ($K = 0$), así $\Omega(t)$ es la relación entre la densidad del universo en la época actual y la densidad crítica. De acuerdo a las ecuaciones de Einstein, la distribución de materia determina la geometría espacial de nuestro universo, respecto al parámetro de densidad, así:

$$\Omega > 1 \leftrightarrow \rho > \rho_c \rightarrow K = +1, \text{ Universo cerrado}$$

$$\Omega = 1 \leftrightarrow \rho = \rho_c \rightarrow K = 0, \text{ Universo plano}$$

$$\Omega < 1 \leftrightarrow \rho < \rho_c \rightarrow K = -1, \text{ Universo abierto}$$

Como ya se ha dicho, las observaciones han demostrado que el universo actual se puede considerar dominado por una geometría plana ($\Omega \simeq 1$) [13], por lo cual en el resto de este trabajo se considerará $K = 0$.

También es necesario definir la ecuación de estado del fluido barotrópico que permea el universo:

$$\omega_{eff} = p/\rho \quad (3.10)$$

donde w es una constante[13]. De acuerdo con esto y las ecuaciones (3.7a) y (3.7c), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -\frac{3}{2}H^2(1 + \omega_{eff}) \quad (3.11) \\ \int \frac{dH}{H^2} &= -\frac{3}{2} \int (1 + \omega_{eff}) dt \\ -\frac{1}{H} &= -\frac{2}{3}(t - t_0)(1 + \omega_{eff}) \\ H &= \frac{2}{3(1 + \omega_{eff})(t - t_o)} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Aquí t_0 es contante y corresponde al tiempo presente. Según la definición de H en la ecuación (3.4), se puede continuar diciendo que:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1 + \omega_{eff})(t - t_o)}$$

Integrando respecto al tiempo se obtiene la expresión

$$a \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3(1+\omega_{eff})}} \quad (3.13)$$

De igual manera se puede proceder con la ecuación (3.6), teniendo en cuenta que $\omega_{eff} = p/\rho$, así:

$$\dot{\rho} + 3H(1 + \omega_{eff})\rho = 0$$

Integrando, entonces:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega_{eff})} \quad (3.14)$$

El universo dominado por radiación corresponde a $\omega_{eff} = 1/3$, mientras que para la época dominada por polvo (o materia no relativista) $\omega_{eff} = 0$; en estos casos:

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho \propto a^{-4} \quad \rightarrow \text{para radiación}$$

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3}}, \quad \rho \propto a^{-3} \quad \rightarrow \text{para materia no relativista}$$

Los dos casos descritos anteriormente corresponden a expansiones desaceleradas del universo.[13]

Volviendo a la ecuación (3.7b), se había dicho que la aceleración se presentaba para cuando $\rho + 3p < 0$, lo que corresponde a

$$\omega_{eff} < -1/3, \quad (3.15)$$

pero esta desigualdad se puede explicar sólo con la presencia de una energía exótica dominante que es la denominada *energía oscura*, llamada así debido a que la condición (3.15) requiere una gran presión negativa con el objeto de cumplir la expansión acelerada, algo bastante singular.

Einstein introdujo el concepto de constante cosmológica Λ para tratar de explicar el fenómeno y obtener soluciones estáticas del universo. Luego de que Hubble mostrara que es real la expansión del universo, se ha interpretado la constante cosmológica como fuente del tensor energía-momentum, llegando así a que w_{eff} tome el valor de -1 dando lugar a la expansión acelerada.

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

De este modo la densidad y la presión tendrían la misma magnitud, pero con signo contrario:

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (3.17)$$

3.3. Evidencia Observacional de la Energía Oscura

Con el objetivo de obtener evidencia observacional de cualquier razón de cambio en la expansión del universo, se tendrían que medir grandes distancias cósmicas y fuentes de luz muy brillantes; ésto también implica medir objetos en el pasado, en un intervalo de tiempo significativo para la edad del universo, el método debe ser aplicable a objetos presentes en tiempos tempranos.

Distancia de Luminosidad, $d_L(z)$

La primera aproximación al cálculo de distancia a cualquier objeto estelar es estimar su verdadera luminosidad y compararla con el flujo observado (que se reduce con el cuadrado de la distancia), por ésto es importante tener estrellas con una luminosidad intrínseca (L) conocida que pueda ser usada como referencia para medir distancias astronómicas, así como las llamadas variables Cefeidas que tienen una correlación definida entre su luminosidad intrínseca y su frecuencia de pulsación [7]. Partiendo del hecho de que podemos obtener confiablemente la luminosidad de ciertos objetos, es posible entonces medir el flujo (f) de watts por unidad de área lo cual está relacionado con L así:

$$f = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (3.18)$$

donde d_L es la distancia de luminosidad.

→ En un universo estático con geometría plana, la distancia de luminosidad es igual a la distancia propia de la fuente: $d_{p(st)} = d_L$.

Ya que lo que se obtiene de la observación es la luz emitida en un pasado distante de un universo en evolución, nos encontramos obligados a estar atentos en la consideración del concepto del tiempo.

Corrimiento al Rojo, z

En la descripción de la evolución en el tiempo del Universo, se puede ver que el factor de escala $a(t)$ es un valor clave. La función $a(t)$ es generalmente monótona, por lo cual puede servir como un tipo de reloj cósmico. Pero, ¿Cómo se puede medir el factor de escala? La cantidad observable que tiene una relación simple con $a(t)$ es el corrimiento de la longitud de onda de una señal de luz.

El corrimiento espectral viene dado por:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} - 1 \quad (3.19)$$

* λ_{obs} : Longitud de onda observada

λ_{em} : Longitud de onda emitida

Debido a que la longitud de onda λ_o que nos llega de un objeto en un instante actual t_o , en el cual el factor de escala es a_o , habrá sido emitida con una longitud de onda λ en un instante de tiempo t en el que el factor de escala era a , la relación entre ambas longitudes de onda será igual a la relación entre los factores de escala correspondientes a dichos instantes:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{a_o}{a} \quad (3.20)$$

Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación 3.19,

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{a_o}{a} \quad (3.21)$$

El subíndice cero indica las cantidades correspondientes a la época actual.

Asumiendo que en el tiempo actual t_o , $a(t_o) = 1$, se obtiene la relación básica:

$$1 + z = \frac{1}{a(t_{em})} \quad (3.22)$$

La energía de la luz emitida por un objeto en un intervalo de tiempo Δt_1 es denotada como ΔE_1 , por lo que podemos expresar la luminosidades en L_s y L_0 así:

$$L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \quad (3.23)$$

Ya que la energía es proporcional a la frecuencia de la luz (ν), entonces:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z \quad (3.24)$$

De acuerdo a ésto se llega a que:

$$L_s = L_0(1 + z)^2 \quad (3.25)$$

En un Universo en expansión, el flujo observado se reduce por un factor de $(1 + z)^2$. De la ecuación 3.24 tenemos que $\nu_0 = \nu(1 + z)^{-1}$ y $\delta t_0 = \delta t(1 + z)$, por lo cual:

$$\frac{\nu_0}{t_0} = \frac{\nu_1}{t_1}(1 + z)^2 \quad (3.26)$$

Así, el flujo observado en un universo en expansión, en contraste con un universo estático (Eq. 3.18), está dado por:

$$f = \frac{L}{4\pi d_p^2(1 + z)^2} \quad (3.27)$$

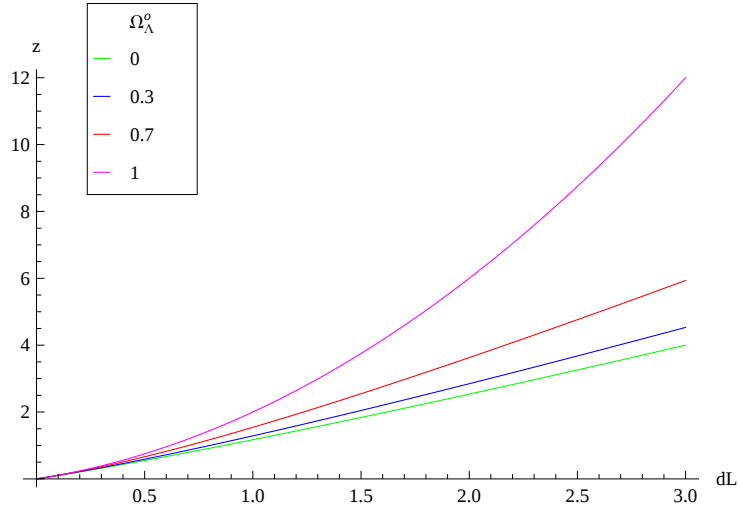


Figura 1: Distancia de Luminosidad (d_L) en función del corrimiento al rojo (z), considerando diferentes valores de $\Omega_\Lambda^{(0)}$, en un universo plano con $\omega_m = 0$ (fluido no relativista) y $\omega_\Lambda = -1$ (Constante cosmológica). El color rojo representa el $\Omega_\Lambda^{(0)}$ que se considera corresponde al estado actual del Universo.

En comparación con la ecuación (3.18), se ve que la distancia de luminosidad difiere de la distancia propia en:

$$d_L = d_p(1 + z) \quad (3.28)$$

De acuerdo a la métrica FRLW, la distancia de luminosidad también se puede expresar como:

$$d_L = \frac{1 + z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \quad (3.29)$$

Con $h(z') = H(z')/H_0$.

Supernovas Tipo Ia

Las Variables Ceféidas son la medida estandar de luminosidad más usada en cosmología, pero hay un tipo de supernova que en sus picos produce cerca de un millón de veces más luz que una variable ceféida. Este tipo de supernova se conoce como Ia y fue descubierta en 1988, por un grupo danés, con un redshift $z = 0,3$ [7].

Una Ia empieza como una enana blanca con una masa comparable a la del sol. Si la enana blanca tiene una gran estrella compañera, lo cual no es raro, la poderosa atracción gravitacional de la enana puede atraer masa de su compañera. Su masa incrementa bajo el *límite de Chandrasekhar* $\approx 1,4M_{sol}$; como ésto ya no puede ser contrarrestado por la presión de los electrones, la contracción gravitacional continúa y el calentamiento resultante del núcleo interior da lugar a una ráfaga termonuclear, terminando en una explosión.

Medir la luz emitida por estreallas o supernovas más lejanas es sondear el cosmos atrás en el tiempo, debido a que la luz de galaxias distantes fue emitida hace mucho más tiempo que en el momento en el que se registra. En 1998 dos equipos colaboradores estudiaron más de 50 supernovas de tipo Ia con z entre 0.4 y 0.7, lo que corresponde a supernovas que surgieron entre 5 y 8 billones de años atrás. Éstos descubrieron que la expansión del universo estaba acelerandose, como lo indicaba el hecho de que la medida de luminosidad fuera en promedio un 25 % menos de lo previsto, y la curva de Hubble se curvara hacia arriba [7, 13].

Desde la gráfica de la curva de Hubble, uno puede extraer la masa y el contenido de energía oscura en el universo en la época actual. La distancia propia de una supernova con redshift z en la época actual $a(t_0) = 1$ es:

$$d_p(z) = \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (3.30)$$

De acuerdo a la ecuación 3.29,

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (3.31)$$

Usando las ecuaciones de Friedmann, se puede expresar el parámetro de Hubble en términos del factor de escala y los parámetros de densidad (considerando contribuciones de radiación $\omega_r = 1/3$, polvo $\omega_m = 0$ y constante cosmológica $\omega_\Lambda = -1$):

$$H(t) = H_0 \left(\frac{\Omega_r^{(0)}}{a^4} + \frac{\Omega_m^{(0)}}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{1 - \Omega_0^{(0)}}{a^2} \right)^{1/2} \quad (3.32)$$

En función del redshift sería:

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_0^{(0)})(1+z)^2 \right]^{1/2} \quad (3.33)$$

Los resultados de las curvas de dL con $H(z)$ de la forma de (3.33) arrojan los valores de Ω_m y Ω_Λ ; los valores que han sido encontrados son [6, 9]:

$$\Omega_{M,0} \approx 0,26 \qquad \Omega_\Lambda \approx 0,68 \qquad (3.34)$$

Lo que sugiere que la mayor cantidad de energía en nuestro universo reside en esta misteriosa “ *energía oscura* ”.

CAPÍTULO 4

4. MODELO DE CAMPO ESCALAR CON ACO- PLE CINÉTICO Y DE GAUSS BONNET

4.1. Ecuaciones de Campo

La acción que se plantea para un campo escalar homogéneo ϕ , con acople cinético no-mínimo a la curvatura y acople de *Gauss-Bonnet*(GB), es [1]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu - V(\phi) + F_2(\phi) \mathcal{G} \right] \quad (4.1)$$

En esta ecuación se encuentra $G_{\mu\nu}$ que es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci; $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y R es el escalar de Ricci (Ver sección 2). $\mathcal{G}$ es el invariante GB cuatro-dimensional

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.2)$$

y $V(\phi)$ es el campo potencial escalar. El acople $F_1(\phi)$ tiene dimensiones de $(longitud)^2$ y $F_2(\phi)$ es adimensional.

El acople de GB es una derivada total, por lo tanto no se elimina en el proceso variacional, contribuyendo a las ecuaciones de campo, de ahí que su presencia en la acción sea no lineal o acoplada a otro campo. Las contribuciones del acople GB no son más altas que de segundo orden en las ecuaciones de movimiento, por lo que no introduce términos “fantasma” en la teoría, evitando problemas con derivadas de orden superior[1].

El tensor de energía-momentum representa la variación de los términos que dependen del campo escalar ϕ y se escribe

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\phi} + T_{\mu\nu}^K + T_{\mu\nu}^{GB} \quad (4.3)$$

donde $T_{\mu\nu}^{\phi}$ corresponde a la variación de los términos mínimamente acoplados, $T_{\mu\nu}^K$ corresponde al acoplamiento cinético y $T_{\mu\nu}^{GB}$ hace referencia a la variación del acoplamiento con GB, así (ver cálculo en apéndice B)

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\phi\nabla^{\lambda}\phi - g_{\mu\nu}V(\phi) \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^K = & \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) F_1(\phi)\nabla_{\lambda}\phi\nabla^{\lambda}\phi + g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}(F_1(\phi)\nabla_{\gamma}\phi\nabla^{\gamma}\phi) \\ & - \frac{1}{2}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} + \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})(F_1(\phi)\nabla_{\lambda}\phi\nabla^{\lambda}\phi) + RF_1(\phi)\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi \\ & - 2F_1(\phi)(R_{\mu\lambda}\nabla^{\lambda}\phi\nabla_{\nu}\phi + R_{\nu\lambda}\nabla^{\lambda}\phi\nabla_{\mu}\phi) + g_{\mu\nu}R_{\lambda\gamma}F_1(\phi)\nabla^{\lambda}\phi\nabla^{\gamma}\phi \\ & + \nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}(F_1(\phi)\nabla^{\lambda}\phi\nabla_{\nu}\phi) + \nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}(F_1(\phi)\nabla^{\lambda}\phi\nabla_{\mu}\phi) \\ & - \nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}(F_1(\phi)\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi) - g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\nabla_{\gamma}(F_1(\phi)\nabla^{\lambda}\phi\nabla^{\gamma}\phi) \end{aligned} \quad (4.4b)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{GB} = & 4([\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(F_2(\phi))]R - g_{\mu\nu}[\nabla_{\rho}\nabla^{\rho}F_2(\phi)]R \\ & - 2[\nabla^{\rho}\nabla_{\mu}F_2(\phi)]R_{\nu\rho} - 2[\nabla^{\rho}\nabla_{\nu}F_2(\phi)]R_{\mu\rho} + 2[\nabla_{\rho}\nabla^{\rho}F_2(\phi)]R_{\mu\nu} \\ & + 2g_{\mu\nu}[\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}F_2(\phi)]R_{\rho\sigma} - 2[\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}F_2(\phi)]R_{\mu\rho\nu\sigma} \end{aligned} \quad (4.4c)$$

Haciendo la variación del tensor respecto al campo escalar, se obtiene la ecuación de movimiento siguiente [1]:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}[\sqrt{-g}(RF_1(\phi)\partial^{\mu}\phi - 2R^{\mu\nu}F_1(\phi)\partial_{\nu}\phi + \partial^{\mu}\phi)] + \frac{dV}{d\phi} \\ & + \frac{dF_1}{d\phi}(R\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - 2R_{\mu\nu}\partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi) - \frac{dF_2}{d\phi}\mathcal{G} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Considerando la métrica FRLW y que el campo escalar ϕ es homogéneo y dependiente del tiempo, a partir del tensor de energía momentum (4.3) se tiene que [1]:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_{eff} \quad (4.6)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + 9H^2 F_1(\phi) \dot{\phi}^2 - 24H^3 \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} \right) \quad (4.7)$$

y

$$\begin{aligned} -2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 p_{eff} = \kappa^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - (3H^2 + 2\dot{H}) F_1(\phi) \dot{\phi}^2 \right. \\ \left. - 2H \left(2F_1(\phi) \dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi} \dot{\phi}^3 \right) + 8H^2 \frac{dF_2}{d\phi} \ddot{\phi}^2 + 16H\dot{H} \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} + 16H^3 \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

ρ_{eff} y p_{eff} son la densidad y presión efectiva respectivamente.

Asumiendo la dominancia del campo escalar (el término de materia está ausente en la acción), la ecuación de movimiento (4.5) toma la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + 3H^2(2F_1(\phi)\ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi}\dot{\phi}^2) + 18H^3F_1(\phi)\dot{\phi} \\ + 12H\dot{H}F_1(\phi)\dot{\phi} - 24(\dot{H}H^2 + H^4)\frac{dF_2}{d\phi} = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde los tres primeros términos corresponden al acople mínimo al campo. Este modelo presenta soluciones tipo de Sitter⁴, independientemente de $F_1(\phi)$ si se considera $F_2(\phi) = cte[1]$.

⁴Solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein que describen un universo en expansión

CAPÍTULO 5

5. SINGULARIDADES EN UN UNIVERSO DE ENERGÍA OSCURA

5.1. Futuro de un Universo de Energía Oscura

La evolución del universo que conocemos hoy depende de la naturaleza exacta de la energía oscura. Existen diversos modelos que plantean diferentes expresiones dinámicas para la densidad de energía oscura y por lo tanto diferentes panoramas con asombrosas singularidades futuras. En algunos modelos la densidad de energía oscura aumenta de tal forma que puede provocar un estado asintótico de expansión exponencial conocido como universo de de-Sitter o una expansión que supere la barrera de de-Sitter (o la constante cosmológica), que daría lugar en un futuro muy lejano a la disociación de la materia, que según algunos modelos se calcula en unos 20.000 millones de años [27].

Otras teorías postulan una energía oscura que disminuye en el tiempo, lo que conduciría a un universo que se contrae a sí mismo. Algunos escenarios plantean incluso un universo cíclico que se expande y contrae.

Finalmente la base de estas teorías está en la observación, ya que las medidas de aceleración son fundamentales para determinar el destino final del universo en la Teoría del Big Bang.

5.2. Tipo de Singularidades

Dentro de un tiempo finito, diferentes tipos de singularidades pueden aparecer en un universo de energía oscura. Estas singularidades se resumen en las siguientes cinco clases [27]:

- Tipo I : cuando $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$ y $|p| \rightarrow \infty$
- Tipo II : cuando $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow a_s$, $\rho \rightarrow \rho_s$ y $|p| \rightarrow \infty$
- Tipo III : cuando $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow a_s$, $\rho \rightarrow \infty$ y $|p| \rightarrow \infty$
- Tipo IV : cuando $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow a_s$, $\rho \rightarrow 0$ y $|p| \rightarrow 0$ y las derivadas de orden superior de H divergen.
- Tipo V : cuando $t \rightarrow t_s$, $a \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \rho_s$ y $|p| \rightarrow p_s$ y las derivadas de orden superior de H divergen.

En lo anterior, se tiene que t_s, a_s, ρ_s y p_s son constantes con $a_s \neq 0$.

Brevemente se puede decir que el tipo I surge de la ecuación de estado con $w < -1$; el tipo II, llamado también “*sudden*”, corresponde a singularidades repentinas en las que a y ρ son finitas, pero ρ diverge. El tipo III aparece en un modelo con $p = -\rho - A\rho^\alpha$, diferenciándose del tipo II con la divergencia de ρ . El tipo IV plantea en un tiempo finito un a finito pero $d^n H/dt^n$ diverge para n grande. El tipo V es llamado “*quiescent*” y aparece en el mundo de las branas.

5.3. Tipo Big Rip y Tipo III

Las singularidades tipo I reciben el nombre especial de *Big Rip* (Gran Desgarro), ya que plantean un universo en el cual, como se ha dicho previamente, la aceleración causada por la energía oscura es de tales dimensiones que genera una fuerza efectiva que supera con diferencia las demás fuerzas de la naturaleza (gravitacional, eléctrica, nuclear fuerte y débil), creando así un escenario futuro en el que no sólo las grandes estructuras gravitacionalmente acotadas como sistemas de galaxias y planetarios se destrozarán sino que también la disociación sería a nivel atómico y más aún, nuclear. Por lo tanto, el universo visto como ahora se vería diluído en el espacio-tiempo [12].

El Big Rip se presentaría cuando la ecuación de estado del universo fuera menos que -1 ($w < -1$), caso en el cual se violaría la condición de

$$\rho + p \geq 0 \tag{5.1}$$

La singularidad tipo III es similar al Big Rip, pero con factor de escala finito.

La primera consideración general que puede hacerse en el estudio de las singularidades es plantear una nueva ecuación de estado [13] dada por

$$p = -\rho - f(\rho) \tag{5.2}$$

donde como se ve, hay una función f que depende de la densidad de energía.

Teniendo en cuenta la ecuación de estado (5.2) en el caso en que $f(\rho) \neq 0$, la ecuación de continuidad (3.6) se puede escribir:

$$\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}[f(\rho)] = 0 \quad (5.3)$$

en forma integral como:

$$a = a_0 \exp\left(\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{f(\rho)}\right) \quad (5.4)$$

donde a_0 es constante.

De acuerdo a la ecuación (3.7a) con $K = 0$, en ausencia de cualquier fluido barotrópico diferente de la energía oscura, se cumple que:

$$\left[\frac{\dot{\rho}}{3f(\rho)}\right]^2 = k^2 \frac{\rho}{3}$$

de lo que se deduce:

$$t = \int \frac{d\rho}{k\sqrt{3\rho}f(\rho)} \quad (5.5)$$

Ahora, puntualmente, los tipos de singularidades I y III aparecen cuando

$$f(\rho) = A\rho^\alpha \quad (5.6)$$

donde A y α son constantes. En el caso que, $\rho \rightarrow \infty$ y $\alpha > 0$, según la ecuación (5.4), el parámetro de escala se expresaría como:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \exp\left(\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{A\rho^\alpha}\right) \\ a &= a_0 \exp\left(\frac{1}{3} \frac{\rho^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para el tiempo tendríamos, a partir de (5.5):

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{d\rho}{k\sqrt{3\rho}A\rho^\alpha} \\ t &= \frac{1}{Ak\sqrt{3}} \int \rho^{-\alpha-1/2} d\rho \end{aligned}$$

Para $\alpha \neq 1/2$:

$$\begin{aligned}
t &= t_s + \frac{1}{Ak\sqrt{3}} \frac{\rho^{-\alpha+1/2}}{(1/2 - \alpha)} \\
t &= t_s + \frac{1}{Ak\sqrt{3}} \frac{\rho^{-\alpha+1/2}}{(1 - 2\alpha)}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Para $\alpha = 1/2$:

$$\begin{aligned}
t &= t_s + \frac{1}{Ak\sqrt{3}} \int \rho^{-1/2-1/2} d\rho \\
&= t_s + \frac{1}{Ak\sqrt{3}} \int \rho^{-1} d\rho \\
t &= t_s + \frac{\ln \rho}{Ak\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde t_s es constante.

Ya que $w = p/\rho$, y $p \approx -\rho - A\rho^\alpha$, entonces,

$$w = -1 - A\rho^{\alpha-1} \tag{5.10}$$

Según lo planteado en los desarrollos anteriores, se presenta una singularidad tipo Big Rip en el caso en el que $\alpha < 1$, pues el factor de escala se hace infinito cuando $\rho \rightarrow \infty$, para $A > 0$. Por lo tanto, de acuerdo con (5.10), $w \rightarrow -1$, para $A > 0$.

La singularidad tipo III se obtiene para $\alpha > 1$, ya que en este caso el factor de escala se hace finito incluso si $\rho \rightarrow \infty$; según (5.10) en este caso $w \rightarrow +\infty$ para $A < 0$ y $w \rightarrow -\infty$ para $A > 0$.

CAPÍTULO 6

6. DINÁMICA DE LA ENERGÍA OSCURA CON SINGULARIDADES FUTURAS

El objetivo es encontrar las soluciones de las ecuaciones (4.7) y (4.9) y con ellas hacer un estudio cosmológico de la expansión acelerada que presenta el universo, con singularidades futuras.

6.1. Soluciones con Singularidades Tipo I (Big Rip) y Tipo III

Se considera el importante caso en el cual el potencial escalar es nulo $V = 0$, de este modo los acoples $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$, presentes en (B-19), se pueden tomar como los grados de libertad que describen la dinámica cosmológica.

Siguiendo el método usado en [1], en la ecuación (4.7) se hace $\dot{\phi}^2 = \psi$, de este modo:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\psi + 9H^2 F_1(\phi)\psi - 24H^3 \frac{dF_2}{dt} \right)$$

ya que $k^2 = 1$

$$3H^2 = \frac{1}{2}\psi + 9H^2 F_1(\phi)\psi - 24H^3 \frac{dF_2}{dt}$$

se obtiene a $F_1(\phi)$ en términos de $F_2(\phi)$

$$\begin{aligned} 9H^2 F_1(\phi)\psi &= 3H^2 - \frac{1}{2}\psi + 24H^3 \frac{dF_2}{dt} \\ F_1(\phi)\psi &= \frac{1}{3} - \frac{1}{18H^2}\psi + \frac{8}{3}H \frac{dF_2}{dt} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Considerando

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d\dot{\phi}^2}{dt} = 2\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{dt} = 2\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ \Rightarrow \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{2\dot{\phi}} \frac{d\psi}{dt} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Al reemplazar la expresión de $\ddot{\phi}$ en (4.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} + 6H\psi + 6H^2F_1(\phi)\frac{d\psi}{dt} + 6H^2\dot{\phi}\frac{dF_1}{d\phi}\psi + 36\psi H^3F_1(\phi) + 24H\dot{H}F_1(\phi)\psi \\ - 48\dot{H}H^2\dot{\phi}\frac{dF_2}{d\phi} - 48H^4\frac{dF_2}{d\phi}\dot{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Se reemplaza ahora la expresión de $F_1\psi$, llegando a:

$$\begin{aligned} H\frac{d\psi}{dt} + 6H^2\psi - \psi\frac{dH}{dt} + 48H^3\frac{dF_2}{dt}\frac{dH}{dt} + 18H^4 + 75H^5\frac{dF_2}{dt} \\ + 24H^4\frac{d^2F_2}{dt^2} + 12H^2\frac{dH}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Considerando el acople GB propuesto en [2]

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{g}{H(t)} \quad (6.5)$$

la expresión en (6.4), se reduce a:

$$H\frac{d\psi}{dt} + 6H^2\psi - \psi\frac{dH}{dt} + 12[2g+1]H^2\frac{dH}{dt} + 18[4g+1]H^4 = 0 \quad (6.6)$$

En este trabajo se proponen soluciones para la ecuación (6.6) de la forma general:

$$H(t) = \frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^\alpha \quad (6.7)$$

donde α , β , η y p son constantes adimensionales; γ y λ tienen dimensión de inverso de tiempo.

Como se puede ver en [1], si se escoge el valor de $g = -3/4$ del acople en (6.5), y se soluciona la ecuación (6.6) usando el $H(t)$ propuesto en (6.7) se obtiene que:

$$\psi = 6 \left[\frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^\alpha \right]^2 \quad (6.8)$$

Independientemente del valor de α . Se analizan los casos específicos de $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 3/2$

$$H_1(t) = \frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{1/2} \quad (6.9a)$$

$$H_2(t) = \frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{3/2} \quad (6.9b)$$

para los dos casos en tiempos tempranos domina el primer término, dando lugar a un comportamiento power-law $H \approx p/t$. En tiempos tardíos:

$$H_1(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \quad \text{y} \quad H_2(t) \rightarrow \left(\frac{\lambda}{\gamma} \right)^{3/2}$$

Ambos modelos cubren el periodo inflacionario ya que $a = 0$ cuando $t = 0$.

Se puede ver que el tiempo en el que se presenta la singularidad es $t_s = -\eta/\gamma$ para los $H(t)$ propuestos con $\gamma < 0$.

Ahora se analizará cada caso para identificar el tipo de singularidad que se presenta.

6.1.1. Caso con $\alpha = 1/2$

$$H_1(t) = \frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{1/2} \quad (6.10)$$

Entonces:

$$\dot{H}(t) = -\frac{p}{t^2} + \frac{(\eta\lambda - \gamma\beta)}{2(\gamma t + \eta)^2} \sqrt{\frac{\gamma t + \eta}{\beta + \lambda t}} \quad (6.11)$$

$$= -\frac{p}{t^2} + \frac{\eta\lambda - \gamma\beta}{2\sqrt{(\gamma t + \eta)^3(\beta + \lambda t)}}$$

$$\Rightarrow \dot{H}(t) \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow t_s$$

De acuerdo con (3.7a) y (3.7c), también la densidad de energía y la presión divergen, $\rho \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow \infty$.

Para encontrar el factor de escala, se integra (6.10) con respecto al tiempo, obteniendo:

$$a_1 = t^p \text{Exp} \left[\frac{A}{\gamma^{3/2} \sqrt{\lambda}} + \left(\frac{\beta\gamma - \eta\lambda}{2\gamma^{3/2} \sqrt{\lambda}} \right) \ln[\beta\gamma + 2\gamma\lambda t + \lambda\eta + 2A] \right] \quad (6.12)$$

donde $A = \sqrt{\gamma\lambda(\gamma t + \eta)(\beta + \lambda t)}$

Aquí cuando $t \rightarrow t_s$ el factor de escala converge, $a \rightarrow a_s$, de este modo tenemos que:

$$\rho \rightarrow \infty$$

$$p \rightarrow \infty$$

$$a_1(t_s) \rightarrow a_s$$

Según la clasificación dada en (5.2), la singularidad que se presenta en este caso es de tipo III.

Ahora, para encontrar el campo escalar se calcula la integral respecto al tiempo de $\sqrt{\psi}$.

$$\phi_1(t) = \int \sqrt{\psi} dt = \int \sqrt{6H^2} dt \quad (6.13)$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{6} \left[p(\ln t) + \frac{1}{2\gamma^{3/2}} (A + (\beta\gamma - \eta\lambda) \ln(\beta\gamma + 2\lambda\gamma t + \eta\lambda + 2A)) \right] \quad (6.14)$$

Se calculan los acoplos $F_1(t)$ y $F_2(t)$. De acuerdo a la ecuación (6.5):

$$F_2(t) = \int \frac{g}{H(t)} dt \quad (6.15)$$

como ya se ha dicho, se considera $g = -3/4$, entonces:

$$F_2(t) = -\frac{3}{4} \int \left(\frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{1/2} \right)^{-1} dt \quad (6.16)$$

El acople cinético, según (6.1), se calcula como:

$$F_1(t) = -\frac{1}{3H^2} \quad (6.17)$$

$$F_1(t) = -\frac{1}{3} \left[\frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{1/2} \right]^{-2} \quad (6.18)$$

La ecuación de estado efectiva se expresa como:

$$w_{eff} = -1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{H}}{H^2} \right) \quad (6.19)$$

En este caso:

$$w_{eff} = -1 - \frac{2}{3} \left[\frac{\left(-\frac{p}{t^2} \right) + \frac{(\eta\lambda - \gamma\beta)}{2(\gamma t + \eta)^2} \sqrt{\frac{\gamma t + \eta}{\beta + \lambda t}}}{\left(\frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{1/2} \right)^2} \right] \quad (6.20)$$

Se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} w_{eff} = -1 + \frac{2}{3p} \quad (6.21)$$

Se encuentra un universo con expansión tipo power-law, para el cual el caso de $p < 1$ corresponde a un universo desacelerado dominado por materia y acelerado para $p > 1$.

La transición de una fase desacelerada a una acelerada toma lugar cuando $w_{eff}(t_{tr}) = -1/3$, donde t_{tr} es el tiempo en que se da la transición; así, con los resultados anteriores se puede calcular t_{tr} como sigue:

$$-\frac{1}{3} = -1 - \frac{2}{3} \left[\frac{\left(-\frac{p}{t_{tr}^2} \right) + \frac{(\eta\lambda - \gamma\beta)}{2(\gamma t_{tr} + \eta)^2} \sqrt{\frac{\gamma t_{tr} + \eta}{\beta + \lambda t_{tr}}}}{\left(\frac{p}{t_{tr}} + \left(\frac{\beta + \lambda t_{tr}}{\eta + \gamma t_{tr}} \right)^{1/2} \right)^2} \right] \quad (6.22)$$

De este modo, despejando se llega a que:

$$\beta(t_{tr})^2 + \lambda(t_{tr})^3 = (1 - p)^2(\eta + \gamma t_{tr}) \quad (6.23)$$

Es notorio entonces que el tiempo de transición va a depender de los valores de las constantes β, γ, η y λ .

De acuerdo con la clasificación de las singularidades, la solución (6.10) es de tipo III, ya que cumple con las condiciones de $H \rightarrow \infty$, $\dot{H} \rightarrow \infty$, $a \rightarrow a_s$, $\rho_{eff} \rightarrow \infty$ y $p_{eff} \rightarrow \infty$, cuando el tiempo tiende al tiempo de la singularidad (t_s)

$$t_s = -\frac{\eta}{\gamma}$$

De este modo si, $\eta = -2\gamma$, $t_s = 2$, ya que se ha dicho que $t = 1$ corresponde a la época actual, entonces la singularidad se presentaría en 13Gys, aproximadamente. Los valores de η y γ se obtienen observacionalmente.

6.1.2. Caso con $\alpha = 3/2$

Aquí

$$H_2(t) = \frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{3/2} \quad (6.24)$$

y

$$\dot{H} = -\frac{p}{t^2} + \frac{3(\eta\lambda - \gamma\beta)\sqrt{\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t}}}{2(\gamma t + \eta)^2} \quad (6.25)$$

$$= -\frac{p}{t^2} + \frac{3(\eta\lambda - \gamma\beta)\sqrt{\frac{\beta + \lambda t}{(\eta + \gamma t)^5}}}{2}$$

De nuevo cuando $t \rightarrow t_s \Rightarrow \dot{H}(t) \rightarrow \infty$

El factor de escala correspondiente para este caso es:

$$a_2 = t^p \text{Exp} \left[\left(\frac{\beta + \lambda t}{\gamma t + \eta} \right) \frac{(-2\beta\gamma + \gamma t\lambda + 3\lambda\eta)}{\gamma^{5/2}} + (3/2) \sqrt{\lambda \left(\frac{\gamma t + \eta}{\beta + \lambda t} \right)} \left(\frac{\beta\gamma - \eta\lambda}{\gamma^{5/2}} \right) \ln(B) \right] \quad (6.26)$$

donde $B = \beta\gamma + 2\gamma t\lambda + \eta\lambda + 2\sqrt{\gamma\lambda(\gamma t + \eta)(\beta + \lambda t)}$

Aquí, cuando $t \rightarrow t_s$, el parámetro de escala diverge, por lo cual nos enfrentamos a una singularidad tipo Big Rip para $\gamma < 0$, cumpliéndose:

$$\rho \rightarrow \infty$$

$$p \rightarrow \infty$$

$$a_1(t_s) \rightarrow \infty$$

Procediendo como en el caso anterior se tiene que:

$$\phi_2(t) = \sqrt{6} \left[p(\ln t) + \frac{(\gamma t + \eta)^{-1/2}}{2\gamma^{5/2}} \left(C + 3\sqrt{\lambda(\gamma t + \eta)}(\beta\gamma - \eta\lambda)\ln(B) \right) \right] \quad (6.27)$$

donde $C = 2\sqrt{\gamma(\beta + \lambda t)}(-2\beta\gamma + \gamma\lambda + 3\eta\lambda)$ y B es como en (6.26)

De acuerdo a (6.5), el acople GB, toma la forma:

$$F_2(t) = -\frac{3}{4} \int \left(\frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{3/2} \right)^{-1} dt \quad (6.28)$$

Para el acople cinético se tiene:

$$F_1(t) = -\frac{1}{3} \left[\frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{3/2} \right]^{-2} \quad (6.29)$$

La ecuación de estado efectiva para este caso es:

$$w_{eff} = -1 - \frac{2}{3} \left[\frac{\left(-\frac{p}{t^2} \right) + \frac{3(\eta\lambda - \gamma\beta)\sqrt{\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t}}}{2(\gamma t + \eta)^2}}{\left(\frac{p}{t} + \left(\frac{\beta + \lambda t}{\eta + \gamma t} \right)^{3/2} \right)^2} \right] \quad (6.30)$$

En este caso también $w_{eff} \rightarrow -2/3p$ cuando $t \rightarrow 0$.

El tiempo de transición de fase desacelerada a acelerada se calcula igualando la ecuación anterior a $w_{eff} = -1/3$, obteniendo la expresión:

$$\beta(t_{tr})^{2/3} + \lambda(t_{tr})^{5/3} = (1 - p)^{2/3}(\eta + \gamma t_{tr}) \quad (6.31)$$

CAPÍTULO 7

7. CONCLUSIONES

Se hizo un estudio de la energía oscura con un modelo tensorial-escalar que tiene acoplamiento de Gauss-Bonnet y acople cinético. Las soluciones de energía oscura con ecuación de estado efectiva $w < -1$ caben dentro del rango de las observaciones actuales y por ésto se estudian intensamente soluciones tipo Phantom y con evolución hacia los diferentes tipos de singularidades.

Los modelos considerados permitieron estudiar las ecuaciones de movimiento sobre una métrica FRW y las soluciones de tiempo tardío con transiciones de Quintessense a Phantom.

Se obtuvieron dos tipos de singularidades, en los dos casos $t_s = -\eta/\gamma$, de modo que si $\eta = -N\gamma$ se tiene que $t_s = N$, considerando $t = 1$ como la época actual.

Las singularidades obtenidas fueron:

Para $\alpha = 1/2$, singularidad tipo III, donde:

- $a(t_s) \rightarrow a_s$
- $\rho \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow \infty$

Para $\alpha = 3/2$, singularidad tipo Big Rip, donde:

- $a(t_s) \rightarrow \infty$
- $\rho \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow \infty$

En esta última se entiende que el universo contará con una energía tan grande que originaría a grandes escalas la disociación de sistemas enteros de galaxias y planetarios; algunos autores se atreven a decir que la desintegración tendría también efectos a nivel atómico [4].

APÉNDICES

A. Detalles Matemáticos

A.1. Deducción del tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$

De las identidades de Bianchi tenemos

$$D_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + D_\nu R_{\lambda\mu\alpha\beta} + D_\mu R_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A-1})$$

Contraemos con $g^{\mu\alpha}$

$$D_\lambda g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} + D_\nu g^{\mu\alpha} R_{\lambda\mu\alpha\beta} + D_\mu g^{\mu\alpha} R_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0$$

$$D_\lambda R_{\nu\beta} - D_\nu R_{\lambda\beta} + D_\mu g^{\mu\alpha} R_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A-2})$$

Contrayendo ahora con $g^{\nu\beta}$,

$$D_\lambda g^{\nu\beta} R_{\nu\beta} - D_\nu g^{\nu\beta} R_{\lambda\beta} + D_\mu g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\nu\lambda\alpha\beta} = 0$$

$$D_\lambda R - D_\nu g^{\nu\beta} R_{\lambda\beta} - D_\mu g^{\mu\alpha} R_{\lambda\alpha} = 0$$

$$D_\lambda R - D_\nu R_\lambda^\nu - D_\mu R_\lambda^\mu = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$D_\lambda R - 2D_\nu R_\lambda^\nu \quad (\text{A-4})$$

Con la finalidad de subir el índice λ , se contrae de nuevo con $g^{\mu\lambda}$

$$D_\lambda R g^{\mu\lambda} - 2D_\nu g^{\mu\lambda} R_\lambda^\beta$$

Agrupando

$$D_\lambda(Rg^{\mu\lambda} - 2R^{\mu\lambda}) = 0 \quad (\text{A-5})$$

De aquí definimos:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \quad (\text{A-6})$$

De modo que:

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A-7})$$

$G^{\mu\nu}$ es el denominado **tensor de Einstein**

A.2. Tiempo de transición ecuación (6.23)

El tiempo de transición de fase desacelerada a acelerada se considera en el cual $w_{eff} = -1/3$, entonces según la ecuación (6.22) sería:

$$-\frac{1}{3} = -1 - \frac{2}{3} \left[\frac{\left(-\frac{p}{t_{tr}^2}\right) + \frac{(\eta\lambda - \gamma\beta)}{2(\gamma t_{tr} + \eta)^2} \sqrt{\frac{\gamma t_{tr} + \eta}{\beta + \lambda t_{tr}}}}{\left(\frac{p}{t_{tr}} + \left(\frac{\beta + \lambda t_{tr}}{\eta + \gamma t_{tr}}\right)^{1/2}\right)^2} \right] \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \left[\frac{\left(-\frac{p}{t_{tr}^2}\right) + \frac{(\eta\lambda - \gamma\beta)}{2(\gamma t_{tr} + \eta)^2} \sqrt{\frac{\gamma t_{tr} + \eta}{\beta + \lambda t_{tr}}}}{\left(\frac{p}{t_{tr}} + \left(\frac{\beta + \lambda t_{tr}}{\eta + \gamma t_{tr}}\right)^{1/2}\right)^2} \right] \quad (\text{A-9})$$

$$-1 = \frac{\dot{H}(t)}{H^2(t)} \quad (\text{A-10})$$

$$-t_{tr} = \int_0^{t_{tr}} H^{-2}(t) dH \quad (\text{A-11})$$

$$t_{tr} = \left[\frac{p}{t_{tr}} + \left(\frac{\beta + \lambda t_{tr}}{\eta + \gamma t_{tr}} \right)^{1/2} \right]^{-1} \quad (\text{A-12})$$

$$\frac{\beta + \lambda t_{tr}}{\eta + \gamma t_{tr}} = \frac{(1-p)^2}{t_{tr}^2} \quad (\text{A-13})$$

$$\beta(t_{tr}^2) + \lambda(t_{tr}^3) = (1-p)^2(\eta + \gamma t_{tr}) \quad (\text{A-14})$$

B. Cálculo del tensor $T^{\mu\nu}$

Se considera la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu - V(\phi) + F_2(\phi) \mathcal{G} \right] \quad (\text{B-1})$$

y el tensor es de la forma

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^K + T_{\mu\nu}^{GB} \quad (\text{B-2})$$

Teniendo en cuenta que

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_K}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{GB}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \quad (\text{B-3})$$

y que

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (\text{B-4})$$

Se obtienen las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ como sigue en B.1, B.2 y B.3.

B.1. $T_{\mu\nu}^\phi$

La acción correspondiente al acople mínimo es:

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (\text{B-5})$$

Variando respecto a la métrica se tiene:

$$\delta S_\phi = \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (\text{B-6})$$

Haciendo uso de la relación:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{B-7})$$

Se llega a

$$\delta S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^4x (\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (\text{B-8})$$

De acuerdo a (B-3), se obtiene:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\frac{1}{4} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} V(\phi) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \quad (\text{B-9})$$

Por lo tanto:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (\text{B-10})$$

B.2. $T_{\mu\nu}^K$

Para este caso, teniendo en cuenta el acople cinético, corresponde la acción

$$S_K = \int d^4x \sqrt{-g} [F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi] \quad (\text{B-11})$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein (2.18); de este modo,

$$S_K = \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \quad (\text{B-12})$$

Ahora se varía respecto a la métrica obteniendo:

$$\begin{aligned} \delta S_K &= \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) F_1(\phi) R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) \delta (R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) F_1(\phi) R g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) \delta (R g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

Teniendo en cuenta (B-7) y desarrollando los paréntesis del segundo y cuarto término:

$$\begin{aligned}
\delta S_K = & -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_1(\phi) R_{\alpha\beta} \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi + \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) \delta(R_{\mu\nu}) \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \\
& + 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial^\alpha \phi + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_1(\phi) R \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) \delta R (g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R \delta g_{\mu\nu} (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R g_{\mu\nu} \delta (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi)
\end{aligned} \tag{B-14}$$

Ya que

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \tag{B-15}$$

y que

$$\delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -\nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu}) \tag{B-16}$$

reemplazando las dos expresiones anteriores en (B-14) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\delta S = & -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_1(\phi) R_{\alpha\beta} \partial^\alpha(\phi) \partial^\beta(\phi) + \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\nu} \partial_\nu(\phi) \partial^\alpha(\phi) \\
& + \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu(\phi) \partial^\alpha(\phi) + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_1(\phi) R \partial_\alpha(\phi) \partial^\alpha(\phi) \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \partial_\alpha(\phi) \partial^\alpha(\phi) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu(\phi) \partial_\nu(\phi) \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu (F_1(\phi) \partial_\nu(\phi) \partial^\alpha(\phi)) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\nu (F_1(\phi) \partial_\mu(\phi) \partial^\alpha(\phi)) \\
& + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\rho (F_1(\phi) \partial_\mu(\phi) \partial^\nu(\phi)) + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla_\beta \nabla_\alpha (F_1(\phi) \partial^\alpha(\phi) \partial^\beta(\phi)) \\
& + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu (F_1(\phi) \partial_\alpha(\phi) \partial^\alpha(\phi)) + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu (F_1(\phi) \partial_\alpha(\phi) \partial^\alpha(\phi)) \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_1(\phi) \partial_\alpha(\phi) \partial^\alpha(\phi))
\end{aligned} \tag{B-17}$$

De acuerdo con (B-3) se obtiene $T_{\mu\nu}^K$:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^K = & \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) F_1(\phi) \nabla_\lambda(\phi) \nabla^\lambda(\phi) + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda(\phi) \nabla^\lambda(\phi) (F_1(\phi) \nabla_\gamma(\phi) \nabla^\gamma(\phi)) \\
& - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) (F_1(\phi) \nabla_\lambda(\phi) \nabla^\lambda(\phi)) + R F_1(\phi) \nabla_\mu(\phi) \nabla_\nu(\phi) \\
& - 2 F_1(\phi) (R_{\mu\lambda} \nabla^\lambda(\phi) \nabla_\nu(\phi) + R_{\nu\lambda} \nabla^\lambda(\phi) \nabla_\mu(\phi)) + g_{\mu\nu} R_{\alpha\gamma} F_1(\phi) \nabla^\alpha(\phi) \nabla^\gamma(\phi) \\
& \nabla_\lambda \nabla_\mu (F_1(\phi) \nabla^\lambda(\phi) \nabla_\nu(\phi)) + \nabla_\lambda \nabla_\nu (F_1(\phi) \nabla^\lambda(\phi) \nabla_\mu(\phi)) \\
& - \nabla_\lambda \nabla_\lambda (F_1(\phi) \nabla_\mu(\phi) \nabla_\nu(\phi)) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\gamma (F_1(\phi) \nabla^\lambda(\phi) \nabla^\gamma(\phi))
\end{aligned} \tag{B-18}$$

B.3. $T_{\mu\nu}^{GB}$

Teniendo en cuenta sólo el acople con Gauss-Bonnet, la acción es:

$$S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \mathcal{G} \tag{B-19}$$

De acuerdo a 6.5 la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned}
S_{GB} = & \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) (R^2 - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}) \\
= & \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R^2 - 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{B-20}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB} = & \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F_2(\phi) R^2) - 4 \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) \\
& + \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})
\end{aligned} \tag{B-21}$$

Para la primera integral se tiene que:

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB1} &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F_2(\phi) R^2) \\
&= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F_2(\phi) R^2 + \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \delta(R^2) \\
&= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F_2(\phi) R^2 + 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R \delta(R)
\end{aligned} \tag{B-22}$$

de acuerdo con (B-15) y (B-16)

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB1} &= - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_2 R^2 + 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_2 R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - 2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla_\nu (F_2 R) \delta g^{\mu\nu} + 2 \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_2 R) \delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B-23}$$

Respecto a la segunda integral de la expresi3n de (B-21) se tiene

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB2} &= -4 \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) \\
&= -4 \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \delta(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) \\
&= 2 \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta}) \\
&= 2 \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\alpha}) g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} \\
&\quad - 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} \delta(g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta}) \\
&= 2 \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - 8 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} \\
&\quad + 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla_\mu (F_2 R_{\phi\nu}) + 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla_\nu (F_2 R_{\phi\mu}) \\
&\quad - 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_2 R_{\mu\nu}) - 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (F_2 R_{\phi\gamma})
\end{aligned} \tag{B-24}$$

Por último la tercera integral de (B-21)

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB3} &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}) \\
&= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F_2(\phi) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \delta(R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}) \\
&= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F_2(\phi) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \delta(g^{\sigma\eta} g^{\rho\phi} g^{\eta\sigma} g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\rho\sigma} R_{\alpha\sigma\phi\eta}) \\
&= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) F_2(\phi) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) g^{\rho\phi} g^{\eta\sigma} g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\rho\sigma} R_{\alpha\sigma\phi\eta} \delta(g^{\sigma\eta}) \\
&\quad + 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) g^{\sigma\eta} g^{\rho\phi} g^{\eta\sigma} g^{\mu\alpha} R_{\alpha\sigma\phi\eta} \delta(R_{\mu\nu\rho\sigma})
\end{aligned} \tag{B-25}$$

Teniendo en cuenta que

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\nabla_\rho \nabla_\nu \delta g_\sigma \mu + \nabla_\sigma \nabla_\mu \delta g_\rho \nu - \nabla_\rho \nabla_\mu \delta g_\sigma \nu - \nabla_\sigma \nabla_\nu \delta g_\rho \mu + R_{\nu\rho\sigma}^\gamma \delta g_{\gamma\mu} - R_{\mu\rho\sigma}^\gamma \delta g_{\nu\gamma}) \tag{B-26}$$

Reemplazando la expresión anterior en (B-25)

$$\delta S_{GB3} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + 2 R_{\mu\nu\rho\sigma} R_{\alpha\sigma\phi\eta} g^{\rho\phi} g^{\nu\sigma} g^{\mu\alpha} + 4 \nabla^\sigma \nabla^\phi (R_{\nu\sigma\phi\mu}) \right] \tag{B-27}$$

Por lo tanto la expresión final de (B-21) se obtiene de la suma de (B-23), (B-24) y (B-27), así:

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB} = & - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_2 R^2 + 2 \int d^4x \sqrt{-g} F_2 R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
& - 2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla_\nu (F_2 R) \delta g^{\mu\nu} + 2 \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_2 R) \delta g^{\mu\nu} \\
& + 2 \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - 8 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} \\
& + 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla_\mu (F_2 R_{\phi\nu}) + 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla_\nu (F_2 R_{\phi\mu}) \\
& - 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_2 R_{\mu\nu}) - 4 \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (F_2 R_{\phi\gamma}) \\
& + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} F_2(\phi) \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + 2 R_{\mu\nu\rho\sigma} R_{\alpha\sigma\phi\eta} g^{\rho\phi} g^{\nu\sigma} g^{\mu\alpha} + 4 \nabla^\sigma \nabla^\phi (R_{\nu\sigma\phi\mu}) \right]
\end{aligned} \tag{B-28}$$

Recordando (6.5), la anterior ecuación toma la forma

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB} = & \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} F_2(\phi) \mathcal{G} g_{\mu\nu} - 2 F_2(\phi) R R_{\mu\nu} - 2 g_{\mu\nu} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma F_2(\phi) R) \right. \\
& + 2 (\nabla_\nu \nabla_\mu F_2(\phi)) R + 4 F_2 R_\mu^\rho R_{\nu\rho} - 4 (\nabla^\sigma \nabla_\nu F_2(\phi)) R_{\phi\mu} + 4 (\nabla^\lambda \nabla_\lambda F_2(\phi)) R_{\mu\nu} \\
& + 4 g_{\mu\nu} (\nabla^\phi \nabla^\gamma F_2(\phi)) R_{\phi\gamma} - 2 F_2 R_{\mu\nu\rho\sigma} R_{\alpha\sigma\phi\eta} g^{\rho\phi} g^{\nu\sigma} g^{\mu\alpha} + 4 (\nabla^\sigma \nabla_\phi F_2(\phi)) R_{\nu\sigma\phi\mu} \\
& \left. + 4 F_2(\phi) R_{\tau\mu\omega\nu} R^{\omega\tau} \right)
\end{aligned} \tag{B-29}$$

De aquí que, de acuerdo con (B-3)

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{GB} = & 4 ([\nabla_\mu \nabla_\nu (F_2(\phi))] R - g_{\mu\nu} [\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)] R \\
& - 2 [\nabla^\rho \nabla_\mu F_2(\phi)] R_{\nu\rho} - 2 [\nabla^\rho \nabla_\nu F_2(\phi)] R_{\mu\rho} + 2 [\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)] R_{\mu\nu} \\
& + 2 g_{\mu\nu} [\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)] R_{\rho\sigma} - 2 [\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)] R_{\mu\rho\nu\sigma})
\end{aligned} \tag{B-30}$$

Bibliografía

- [1] L.N. Granda, E. Loaiza, *Big Bip and Little Rip solutions in scalar model with kinetic and Gauss-Bonnet couplings*, International Journal of Modern Physics D Vol. 21, No. 1 2012
- [2] L.N. Granda, *Late time cosmological scenarios from scalar field with Gauss Bonnet and non-minimal kinetic couplings*, arXiv:1109.1371v1 [gr-qc], 2011
- [3] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, ISBN 978-0-521-82951-9, Cambridge University Press, 2006
- [4] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski and Nevin N. Weinberg, *Phantom Energy and Cosmic Doomsday*, arXiv:astro-ph/0302506, 2003
- [5] IftikharAhmad, Farah Naz and Zaffar Iqbal, *Effects of Multi-Field Phantom Inflation in Big Rip*, arXiv:1308.1240v1 [astro-ph.CO], 2013
- [6] *Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results*, Astronomy & Astrophysics manuscript no. PlanckMission2013, arXiv:1303.5062v2 [astro-ph], 2014
- [7] Ta-Pei Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology, A Basic Introduction*, Oxford Master Series in Particle Physics, Astrophysics, and Cosmology
- [8] Wood-Vasey, *et al.*, *Observational constraints on the nature of dark energy: first cosmological results from the essence supernova survey*, The Astrophysical Journal, 666, 2007.
- [9] R. A. Knop, *et al.*, *New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and ω from an Independent Set of Eleven High-Redshift Supernovae Observed with HST*, arxiv: 030968v1 [astro-ph], 2003.
- [10] E. Komatsu, *et al.*, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, arXiv:0803.0547v2 [astro-ph], 2009.
- [11] The Planck Collaboration, *The Scientific Programme of Planck*, arXiv:0604069 [astro-ph], 2006.
- [12] L Papantonopoulos (Ed.) *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy*, Lect. Notes Phys. 720 (Springer, Berlin Heidelberg 2007), 2007.
- [13] Edmund J. Copeland, M. Sami, Shinji Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, arxiv:063057v3 [hep-th], 2006.
- [14] P. J. E. Peebles, Bharat Ratra, *The Cosmological Constant and Dark Energy*, arxiv:0207347v2 [astro-ph], 2002

- [15] Ying Shao, Yuan-Xiong Gui, Wei Wang, *Parametrization of Tachyon Field*, arxiv:0703112v1 [gr-qc], 2007.
- [16] Nobuo Sato, *Campo del Tachyon como Fuente de Energía Oscura*, tesis de grado, universidad del valle, 2007.
- [17] Pedro F. Gonzales Díaz, *Unified Model for Dark Energy*, arxiv:0212414v2 [astro-ph], 2003.
- [18] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov *Can $f(R)$ -Gravity Be a Viable Model: The Universal Unification Scenario for Inflation, Dark Energy and Dark Matter*, arxiv: 0801.4843v1 [astro-ph], 2008.
- [19] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov *Dark Energy, Inflation and Dark Matter from Modified $f(R)$ gravity*, arxiv: 0807.0685v1 [hep-th], 2008.
- [20] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, *Unified Cosmic History in Modified Gravity: from $F(R)$ Theory to Lorentz Non-invariant Models*, arxiv:1011.0544v4 [gr-qc], 2011.
- [21] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [22] Thomas P. Sotiriou, *$f(R)$ Theories of Gravity*, arxiv:0805.1726v4 [gr-qc], 2012.
- [23] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, *Modified $f(R)$ gravity unifying R^m Inflation with Λ CDM Epoch*, arxiv:0710.1738v2 [hep-th], 2007.
- [24] Andrei V. Frolov, *A Singular Problem with $f(R)$ Dark Energy*, arxiv:0803.2500v2 [astro-ph], 2008.
- [25] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, *Modified gravity as Realistic Candidate for Dark Energy, Inflation and Dark Matter*, arxiv:0810.1557v1 [hep-th], 2008.
- [26] V. V. Obukhov, K. E. Osetrin and A. V. Timoshkin, *Little Rip cosmological models with time-dependent equation of state*, Russian Physics Journal, Vol. 55 N_o 11, April 2013.
- [27] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov and Shinji Tsujikawa, *Properties of singularities in (phantom) dark energy universe*, Phys.Rev.D71:063004, 2005
- [28] Shin'ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov, *The final state and thermodynamics of dark energy universe*, Phys.Rev.D70:103522, 2004