

Tratamiento de una clase de sistemas Elípticos de primer orden mediante el método de elementos finitos lineales

Manuel Villegas.

Resumen

En este trabajo consideramos un método de discretización de sistemas elípticos lineales de primer orden provenientes de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden. Enunciamos aquí resultados sobre la convergencia del método de discretización propuesto, el cual usa elementos finitos mixtos lineales. La técnica de discretización presentada aquí puede ser extendida al tratamiento de problemas no lineales. Sin embargo, no abordamos dicha extensión en esta presentación. Sistemas del tipo estudiado aquí modelan el comportamiento de fluidos a través de medios porosos.

Palabras y frases claves: Sistemas elípticos, elementos finitos, elementos finitos mixtos.

1. Introducción

En este artículo estudiamos una discretización vía elementos finitos del problema de primer orden siguiente, bajo condiciones de elipticidad que se formularán luego:

Encontrar (u, p) tal que:

$$\begin{cases} u^\beta - b_i^\beta \partial_i p &= f^\beta & \text{en } \Omega & i = 1, 2, \dots, n \\ \partial_i (c_i^\alpha u^\alpha) &= g & \text{en } \Omega & \beta, \alpha = 1, 2, \dots, n \\ p &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

donde Ω es un subconjunto abierto acotado simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas, y los coeficientes $b_i^\beta, c_i^\alpha \in L^\infty(\Omega)$ ($i = 1, \dots, n$) son funciones conocidas. En el sistema (1) así como en el resto de este trabajo se ha usado la convención de suma de Einstein sobre índices repetidos, la cual sugerirá una suma desde 0 hasta n para índices latinos repetidos y desde 1 hasta n para índices griegos repetidos. Por simplicidad omitiremos aquí la dependencia explícita de x .

Si denotamos mediante $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ los operadores diferenciales asociados a los coeficientes b_i^β , c_i^α , es decir

$$\begin{aligned}\mathbf{B}p &= (-b_i^1 \partial_i p, \dots, -b_i^n \partial_i p)^T \\ \mathbf{C}u &= \partial_i (c_i^\alpha u^\alpha)\end{aligned}\tag{2}$$

podemos reescribir (1) en la forma

$$\begin{cases} u + \mathbf{B}p &= f^\beta & \text{en } \Omega \\ \mathbf{C} &= g & \text{en } \Omega, p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}\tag{3}$$

Sistemas de esta forma han sido tratados en la literatura (ver Raviart y Thomas [6], Manteuffel et al. [5]) en el caso en que los operadores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son adjuntos entre si ($\mathbf{B}^* = \mathbf{C}$), es decir cuando $\langle \mathbf{B}\psi, \phi \rangle = \langle \mathbf{C}\phi, \psi \rangle$ para funciones adecuadas ϕ y ψ . En este trabajo sin embargo consideraremos condiciones más débiles (condición (9)).

Si suponemos un cierto grado de diferenciabilidad con respecto a x de las funciones p , f y de los coeficiente b_i^β , c_i^α , el sistema (1) es equivalente a una ecuación escalar de segundo orden en la variable p . En efecto, despejando u^β de cada una de las primeras n ecuaciones y reemplazando en la última, obtenemos la ecuación

$$-\partial_i (c_i^\alpha b_j^\alpha \partial_j p(x)) = \partial_i (c_i^\alpha f^\alpha) - g,\tag{4}$$

que supondremos estrictamente elíptica, es decir,

$$(c_i^\alpha b_j^\alpha) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \xi \in \mathbb{R}^n\tag{5}$$

para una constante positiva λ .

Ecuaciones de este tipo son de mucho interés práctico por ejemplo en la prospección de hidrocarburos (ver [5]) en cuyo caso p representa la presión del fluido. Dado que en esta aplicación no sólo se está interesado en el comportamiento de la presión p , sino en el de algunas de sus derivadas, la ecuación (4) es transformada en un sistema de primer orden. Por ejemplo, mediante la sustitución $u^\beta = b_i^\beta \partial_i p + f^\beta$, $\beta = 1, \dots, n$ ($u = -\mathbf{B}p + f$) obtenemos (1).

En su trabajo de doctorado [7], el autor ha estudiado una clase amplia de problemas no lineales a la cual es extensible el método considerado aquí. Tal grupo de problemas se puede describir, para funciones escalares a_i , mediante la ecuación

$$-\sum_{i=0}^2 \partial_i a_i(x, p, \nabla p) = 0.$$

Diversas sustituciones permiten transformar ecuaciones de este tipo en sistemas no lineales de primer orden. Dos de tales sustituciones son: 1) $u = \nabla p$, y 2) $u = \underline{a}(x, p, \nabla p)$, $\underline{a} := (a_1, a_2)$, las cuales generan respectivamente los sistemas no lineales de primer orden

Encontrar (u, p) tal que:

$$\begin{cases} u - \nabla p &= 0 \\ -\partial_i a_i(x, p, u) &= 0 \end{cases}$$

Encontrar (u, p) tal que:

$$\begin{cases} u - \underline{a}(x, p, \nabla p) &= 0 \\ \operatorname{div} u + a_0(x, p, \nabla p) &= 0. \end{cases}$$

Dado que el tratamiento del caso no lineal es bastante complejo y requiere de la introducción de conceptos como el de normas pesadas de Sobolev y una técnica de deformación (ver [3]), no abordamos en este trabajo dicha extensión. Sin embargo, en la sección 4 presentamos un ejemplo de un sistema que surge en la modelación del flujo de un fluido a través de un medio poroso. El sistema original es no lineal, pero un procedimiento de localización conduce al problema (22), el cual satisface las condiciones que serán la base de este trabajo (condiciones (9) y (10)).

En la sección 2 formularemos la versión débil (6) de (1), cuyas soluciones, conocidas como *soluciones débiles* (ver [4]), están garantizadas por el Teorema 2.1. En la sección 3 formulamos nuestra versión discreta (13) para la formulación débil (6). Para ello haremos uso del *método de los elementos finitos* ([1]). En dicha sección enunciamos resultados de existencia y unicidad para la formulación discreta (Teorema 3.1) y resultados de convergencia (Teorema 3.2).

Finalmente, en la sección 5 presentamos algunos resultados numéricos obtenidos al aplicar nuestra discretización a algunos problemas de prueba. Usamos el programa MGB [2], desarrollado por el Profesor Manfred Dobrowolski del Instituto de Matemáticas Aplicadas y Estadística de la Universidad Würzburg. Este programa, escrito en FORTRAN 77, permite realizar aproximaciones numéricas de sistemas elípticos sobre regiones planas.

2. Formulación débil

Debido a que es posible que no existan soluciones clásicas suaves de (1), orientamos nuestros esfuerzos hacia la búsqueda de las llamadas *soluciones débiles*. Introducimos primero las siguientes notaciones. Como es

usual denotamos mediante $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $H^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ los espacios de Lebesgue y de Sobolev respectivamente, (para $p < \infty$) con las normas

$$\|u\|^p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p,$$

y con la modificación usual en el caso $p = \infty$. Mediante el símbolo Y' denotamos al espacio dual de Y . En especial escribiremos $H^{-1,2}\Omega := (H_0^{1,2}(\Omega))'$, con la norma

$$\|u\|_{-1,2} = \sup_{\varphi \in H_0^{1,2}} \frac{\langle u, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{1,2}},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en sobre $L^2(\Omega)$, es decir

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx, \quad u, \phi \in L^2(\Omega).$$

Consideramos además los espacios $X := L^2(\Omega)^n$, $Y := H_0^{1,2}(\Omega)$ y el espacio producto $V := X \times Y$ con la norma

$$\|(u, p)\|_V := \|u\|_2 + \|p\|_{1,2}.$$

Por una *solución débil* de (1) entendemos una pareja de funciones $(u, p) \in V$ tal que

$$\begin{cases} \nabla p \langle u, \phi \rangle + b(p, \phi) &= \langle f, \phi \rangle \quad \text{para toda } \phi \in X \\ \nabla p - c(u, \psi) &= -\langle g, \psi \rangle \quad \text{para toda } \psi \in Y, \end{cases}$$

donde $b(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ son formas bilineales definidas en $Y \times X$ y $X \times Y$ mediante

$$b(p, \phi) := - \int_{\Omega} b_i^\beta \partial_i p \phi^\beta dx; \quad c(u, \psi) := - \int_{\Omega} c_i^\alpha u^\alpha \partial_i \psi dx. \quad (6)$$

El signo menos $(-)$ en la segunda ecuación de (6) se ha introducido por conveniencia. Sumando las ecuaciones en (6) obtenemos una formulación equivalente

$$a((u, p), (\phi, \psi)) = \langle f, \phi \rangle - \langle g, \psi \rangle, \quad \text{para todo par } (\phi, \psi) \in V, \quad (7)$$

donde $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal

$$a((u, p), (\phi, \psi)) := \langle u, \phi \rangle + b(p, \phi) - c(u, \psi). \quad (8)$$

Como mencionamos antes, en este trabajo no supondremos que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^*$. En su lugar, supondremos que los operadores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ en (3) satisfacen la condición:

(9)

Existe una matriz invertible $M \in C^1(\bar{\Omega})^{n \times n}$ con inversa $M^{-1} \in C^1(\bar{\Omega})^{n \times n}$ tal que

- (i) $m_1 \|\phi\|_2^2 \leq (\phi, M\phi)$ para $\phi \in L^2(\Omega)^n$ y una constante $m_1 > 0$.
- (ii) $|b(\psi, M\phi) - c(\phi, \psi)| \leq c_1 \|\phi\|_2 \|\psi\|_2$ para $\phi \in L^2(\Omega)^n$, $\psi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ y una constante positiva c_1 .

Supondremos además que existe una constante $m_2 > 0$ tal que

$$m_2 \|\nabla \psi\|_2^2 \leq \|\mathbf{B}\psi\|_2^2 + c_1 \|\psi\|_2^2 \quad (10)$$

para $\psi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ y una constante $c_1 > 0$.

Se observa que si $\mathbf{C} = \mathbf{B}^*$, la condición (9) se verifica de manera trivial con $M = I$ (la matriz identidad). De otro lado, se puede mostrar que estas condiciones tienen interpretaciones sencillas (ver [7, Lemas 2.3, 2.4]). En términos generales se tiene que la condición (9) equivale a que la matriz $M(x)$ sea uniformemente positiva definida para todo $x \in \bar{\Omega}$, es decir

$$m_1 |\xi|^2 \leq \xi^T M(x) \xi \quad \text{para todo } x \in \bar{\Omega} \text{ y } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Esta condición junto con (10) equivalen a la no singularidad de las matrices de coeficientes $B_1 = (b_i^\alpha)_{n \times n}$ y $C_1 = (c_j^\alpha)_{n \times n}$, $i, j, \alpha = 1, \dots, n$ (la parte principal de los operadores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}^*$ respectivamente, vistos en forma matricial). Se verifica además la relación

$$C_1(x) = M(x)^T B_1(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

De esto se sigue que la matriz $C_1^l B_1 = (c_i^\alpha b_j^\alpha)_{n \times n}$ es uniformemente positiva definida. Por tanto, podemos afirmar que las condiciones (9) y (10) son equivalentes a la elipticidad uniforme de (4) (condición (5)).

Antes de enunciar nuestro resultado sobre la existencia de soluciones débiles de (3) (Teorema 2.1), recordamos que un resultado del álgebra lineal elemental garantiza que para un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ (con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector), bien el sistema no homogéneo $Ax = b$ tiene solución única para todo b ó bien el sistema homogéneo asociado $Ax = 0$ tiene una solución no trivial.

Una generalización de este resultado a operadores compactos lineales definidos sobre espacios de Banach se conoce como la *alternativa de*

Fredholm. Sean V un espacio de Banach, $T : V \rightarrow V$ un operador lineal compacto (es decir, si U es un subconjunto acotado de V , entonces el conjunto $\overline{T(U)}$ es compacto) y $T_\lambda := T - \lambda I$, con I el operador identidad sobre V y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La alternativa de Fredholm afirma que *el sistema*

$$T_\lambda x = b$$

tiene solución única para todo $b \in V$ si sólo si el sistema homogéneo asociado

$$T_\lambda x = 0$$

tiene únicamente la solución trivial $x = 0$ (ver [4, Teorema 5.3]).

Con esto nuestro teorema de existencia se formula como sigue:

Teorema 2.1. Supóngase que las condiciones (9) y (10) son válidas. Entonces el problema (6) satisface la alternativa de Fredholm. Es decir, bien el sistema (6) tiene solución única para toda $f \in X'$ y $g \in Y'$ ó bien el sistema homogéneo asociado $f \equiv 0$ y $g \equiv 0$ posee una solución no trivial. Si además $\lambda = 0$ no es un valor propio del operador lineal A asociado a la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ en (8), entonces el problema (6) posee una única solución $(u, p) \in X \times Y$.

La idea de la demostración se basa en la técnica estandar de perturbación compacta, mediante la cual modificamos el sistema (7) adicionando al lado izquierdo un término adecuado. Posteriormente se construye un operador diferencial de la forma $T_\lambda = T - \lambda I$, con T un operador compacto e I el operador identidad, para el cual vale la alternativa de Fredholm. En efecto, consideramos el problema perturbado

$$(a + k)((u, p), (\phi, \psi)) = \langle f, \phi \rangle - \langle g, \psi \rangle \quad (\phi, \psi) \in X \times Y,$$

para la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ como en (8) y la forma bilineal $k : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada (para $\lambda > 0$) por

$$k((u, p), (\phi, \psi)) = \lambda \langle p, \psi \rangle \quad (u, p), (\phi, \psi) \in V.$$

Usando las condiciones (9) y (10) y λ suficientemente grande, se demuestra (de forma no trivial) que el operador diferencial

$$A + K : L^2(\Omega)^n \times H_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^n \times H^{-1,2}(\Omega)$$

asociado a la forma bilineal $a + k$ es un isomorfismo. Nuestra afirmación vale entonces para el operador inverso $T = (A + K)^{-1}$.

Sobre la suavidad (*regularidad*) de las soluciones débiles de (3) podemos decir que, bajo ciertas condiciones (la frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 , $f \in$

$H^{1,2}(\Omega)^n$, $g \in L^2(\Omega)$ y los coeficientes b_i^α, c_j^α uniformemente Lipschitz continuos), la solución $(u, p) \in L^2(\Omega)^n \times H_0^{1,2}$ de (6) está en $H^{1,2}(\Omega)^n \times H^{2,2}(\Omega)$ y se satisface (Ver [4])

$$\|u\|_{1,2} + \|p\|_{2,2} \leq c_1 \{\|f\|_{1,2} + \|g\|_2\}. \quad (11)$$

Nos referiremos a este hecho como la $(2, 2)$ -regularidad de (6).

3. Formulación discreta y análisis de convergencia

El cálculo explícito de una solución débil puede ser muy difícil y en la mayoría de los casos imposible de realizar. Se hace entonces necesario calcular una buena aproximación en algún sentido de las soluciones débiles. Aquí nos proponemos buscar dichas aproximaciones usando el método de los elementos finitos.

Por simplicidad consideramos una región poligonal convexa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$). Sea $\Pi_h = \{\Lambda\}$ una partición de Ω en poliedros cerrados, tales que $\bar{\Omega} := \cup \Lambda$ que satisface:

$$(12)$$

Dos poliedros en Π_h tienen a lo más un punto, un lado o una cara en común. Además, cada Λ contiene una bola de radio $c_R h$ y está contenido en una de radio $c_R^{-1} h$.

Ya que nuestro interés es presentar un método de discretización usando funciones lineales a trozos, consideramos los espacios

$$\begin{aligned} S_h &= \{\psi_h \in C(\bar{\Omega}) : \text{La restricción } \psi_h|_{\Lambda \in \Pi_h} \text{ es lineal}\} \\ S_0 &= S_h \cap H_0^{1,2}(\Omega) = \{\psi_h \in S_h : \psi_h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Se puede mostrar que si $\{P_i\}$ representa el conjunto de nodos de la partición Π_h , las funciones $\psi_{i,h} \in S_h$, definidas mediante

$$\psi_{i,h}(P_j) = \delta_{ij}, \quad \text{con } \delta_{ij} \text{ el } \delta \text{ de Kronecker,}$$

forman una base (*base nodal*), para S_h . Asociados a los espacios X, Y y V , definidos antes, consideramos los subespacios de dimensión finita $X_h = (S_h)^n$, $Y_h = S_0$ y $V_h = X_h \times Y_h$ respectivamente. Nuestra *discretización* de (6) toma entonces la forma:

Encontrar $(u_h, p_h) \in V_h$ tal que

$$\begin{cases} \langle u_h, \phi_h \rangle + b(p_h, \phi_h) = \langle f, \phi_h \rangle & \text{para toda } \phi_h \in X_h \\ -c(u_h, \psi_h) + \omega \{ \langle u_h, \mathbf{B}\psi_h \rangle + b(p_h, \mathbf{B}\psi_h) - \langle f, \mathbf{B}\psi_h \rangle \} \\ \quad \quad \quad = -\langle g, \psi_h \rangle & \text{para toda } \psi_h \in Y_h, \end{cases} \quad (13)$$

donde $h > 0$ es el parámetro de discretización y ω es un parámetro positivo independiente de h . Para el caso $\omega = 0$ el problema (13) es inestable (ver [7]) y la convergencia de las soluciones discretas hacia la solución débil no se puede garantizar.

Observación 3.1. El término

$$\langle u_h, \mathbf{B}\psi_h \rangle + b(p, \mathbf{B}\psi_h) - \langle f, \mathbf{B}\psi_h \rangle \quad (14)$$

en (13) es llamado *término estabilizador* y se obtiene de la primera ecuación en la formulación (6) en la medida en que tomemos $\phi = \mathbf{B}\psi_h$.

Mediante sustracción de (6) y (13) obtenemos la *relación de ortogonalidad* entre (u_h, p_h) y (u, p) dada por

$$\begin{cases} \langle u - u_h, \phi_h \rangle + b(p - p_h, \phi_h) = 0 & \text{para todo } \phi_h \in X_h \\ -c(u - u_h, \psi_h) + \omega \{ \langle u - u_h, \mathbf{B}\psi_h \rangle + b(p - p_h, \mathbf{B}\psi_h) \} = 0 & \text{para todo } \psi_h \in Y_h. \end{cases} \quad (15)$$

Dado que la existencia y unicidad de la solución (u, p) de (6) está garantizada por el Teorema 2.1, podemos reducir el estudio de (13) al de (15). La existencia y unicidad de la solución de (13) está dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Supóngase que las condiciones del teorema 2.1 son válidas. Suponga además que el problema (6) es $(2, 2)$ -regular y que la partición Π_h de Ω_h satisface las condiciones de regularidad (12). Entonces existe un $h_0 > 0$ tal que para $(f, g) \in H^{1,2}(\Omega)^n \times L^2(\Omega)$ dado, existe una única solución (u_h, p_h) de (13) para $0 < h \leq h_0$ con

$$\|u - u_h\|^2 + \|\nabla(p - p_h)\|_2^2 \leq c_1 h^2 \{ \|f\|_{1,2}^2 + \|g\|_2^2 \}. \quad (16)$$

Esquema de la demostración: Sea (u, p) la única solución de (6) y sea $(u_h, p_h) \in V_h$ una solución de (15). Después de algunos cálculos (no triviales) se tiene la desigualdad

$$\|u - u_h\|^2 + \|p - p_h\|_{1,2}^2 \leq c_1 h^2 \{ \|u\|_{1,2}^2 + \|p\|_{2,2}^2 \} + c_1 \|p - p_h\|_2^2.$$

Igualmente se demuestra que

$$\|p - p_h\| \leq c_1 h \{ \|u - u_h\|_2 + \|p - p_h\|_{1,2} \}.$$

Para un $h > 0$ suficientemente pequeño se sigue entonces

$$\|u - u_h\|^2 + \|p - p_h\|_{1,2}^2 \leq c_1 h^2 \{ \|u\|_{1,2}^2 + \|p\|_{2,2}^2 \}. \quad (17)$$

De la (2,2)-regularidad de (6) (desigualdad (11)) se sigue

$$\|u\|_{1,2}^2 + \|p\|_{2,2}^2 \leq c_1 \{\|f\|^2 + \|g\|_2^2\}. \quad (18)$$

La cota (16) para cada solución (u_h, p_h) de (15) se sigue entonces de las dos últimas desigualdades.

De otro lado, se sigue de (18) que $(u, p) = 0$ es la única solución para (6) cuando $f \equiv 0$ y $g \equiv 0$. De esto y de (16) se tiene entonces que $(u_h, p_h) = 0$ es la única solución de (15) y por tanto la única solución al sistema homogéneo asociado a (13) también. Dado que la alternativa de Fredholm se satisface para sistemas de ecuaciones lineales, se tiene entonces que el sistema (13) tiene solución única. Cuando variamos el parámetro de discretización h obtenemos serie de problemas discretos de la forma (13), cada uno de los cuales posee una única solución (u_h, p_h) . El siguiente teorema nos garantiza, que cuando el parámetro h se acerca a cero, las soluciones discretas (u_h, p_h) de (13) aproximan la solución débil (u, h) de (6): las soluciones (u_h, p_h) convergen, en $L^\infty(\Omega)^n \times H^{1,\infty}(\Omega)$, hacia (u, p) cuando h tiende hacia 0 [7, Teorema 3.8].

Teorema 3.2. Supóngase que las condiciones (9) y (10) son válidas. Supóngase además que la solución débil (u, p) de (3) está en

$$H^{1,\infty}(\Omega)^n \times H_0^{2,\infty}(\Omega).$$

Para la solución discreta (u_h, p_h) de (15) se tiene entonces la desigualdad

$$\|p - p_h\|_\infty + h\{\|u - u_h\|_\infty + \|p - p_h\|_{1,\infty}\} \leq c_* h^{2-\epsilon}, \quad (19)$$

con $c_* = c_*(\|\nabla u\|_\infty, \|\nabla^2 p\|_\infty)$ y $c_1 = c_1(\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$.

4. Una aplicación a medios porosos

Mediante una aplicación queremos ahora ilustrar, sin entrar en detalles, el procedimiento a seguir en el caso no lineal. Uno de los principales puntos del tratamiento es la linealización del problema, mostrando que los operadores diferenciales de dicha linealización satisfacen las condiciones (9) y (10).

Sean $f, g, \vartheta \geq 0$ funciones dadas definidas en una región poligonal Ω de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{g}$ el vector gravedad. Representemos con $u = (u^1, u^2)$ el vector velocidad de un fluido, con p la presión y con c la concentración del mismo ($c|_{\partial\Omega} \geq 0$). El flujo de un fluido a través de un medio poroso en la región Ω se puede modelar mediante el problema:

Encontrar una terna (u, p, c) tal que

$$\begin{cases} u - \frac{k}{\mu(c)} \nabla p + \frac{k\rho(c)}{\mu(c)} \mathbf{g} & = f & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div}(\rho(c)u) & = g & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div}(c\rho(c)u - \rho(c)D_\epsilon(u)\nabla c) & = 0 & \text{en } \Omega \\ p = 0, \quad c = \vartheta & & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (20)$$

donde k representa la *constante de permeabilidad* de la región y las funciones ρ y μ representan respectivamente la *densidad* y la *viscosidad del fluido* y están dadas por $\rho(c) = 1 + 0,2c$ y $\mu(c) = c_1(1 + c^3)$. Finalmente D_ϵ es la matriz

$$D_\epsilon(u) := d_m I + \alpha_L I(\epsilon + |u|^2)^{1/2} + \frac{\alpha_T - \alpha_L}{(\epsilon + |u|^2)^{1/2}} uu^T. \quad (21)$$

donde I es la matriz identidad, d_m una constante positiva y α_T, α_L funciones positivas definidas a trozos en la variable espacial x .

Hemos introducido el parámetro ϵ con el fin de garantizar la diferenciabilidad (con respecto a p, u, c) de los operadores en (20).

Consideremos ahora los espacios $X = L^2(\Omega)^2$, $Y = H_0^{1,2}(\Omega)$, $Z = H^{1,2}\Omega$, $Z_\vartheta = \{z \in Z : z = \vartheta \text{ sobre } \partial\Omega\}$, $W := X \times Y \times Z$ y $W_\vartheta := X \times Y \times Z_\vartheta$ y supongamos que existe una solución suave $(u, p, c) \in C^1(\bar{\Omega})^2 \times C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$ de (20). Con el propósito de obtener la linealización de (20) consideremos los operadores $\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T}$ definidos sobre $X \times Y \times Z$ por:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(u, p, c) &:= u - \frac{k}{\mu(c)} \nabla p + \frac{k\rho(c)}{\mu(c)} \mathbf{g} \\ \tilde{S}(u, p, c) &:= \rho(c)u \\ \tilde{T}(u, p, c) &:= -c\rho(c)u + \rho(c)D_\epsilon(u)\nabla c. \end{aligned}$$

La primera derivada de los operadores $\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T}$ calculada en el punto (u, p, c) y aplicada a (v, q, z) toma la forma

$$\begin{aligned} \tilde{R}'(u, p, c)(v, q, z) &= v - \frac{k}{\mu(c)} \nabla q + z \left[\frac{d}{dc} \left(\frac{k\rho(c)}{\mu(c)} \right) \mathbf{g} - \frac{d}{dc} \left(\frac{k}{\mu(c)} \right) \nabla p \right] \\ \tilde{S}'(u, p, c)(v, q, z) &= \rho(c)v + \rho'(c)zu \\ \tilde{T}'(u, p, c)(v, q, z) &= z[\rho'(c)zD_\epsilon(u)\nabla c - \rho'(c)cu - \rho(c)u] + \rho(c)D_\epsilon(u)\nabla z \\ &\quad - \rho(c)cv + \sum_{i=1}^2 \left(\rho(c) \frac{\partial}{\partial u^i} D_\epsilon(u)\nabla c \right) v^i. \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir la linealización de (20) en (u, p, c) como:

Buscar una terna (v, q, z) tal que

$$\begin{cases} v + \mathbf{B}q + [1995/01/05v2, 2eAM Sfontdefinitions]\mathcal{L} & = f & \text{en } \Omega \\ \mathbf{C}v + \mathcal{R}z & = g & \text{en } \Omega \\ -Ev - \mathcal{S}z & = 0 & \text{en } \Omega \\ q = 0, \quad z = 0 & & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (22)$$

donde $\mathbf{B}, \mathcal{L}, \mathbf{C}, \mathcal{R}, E$ y $\mathcal{S}$ operadores lineales dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(c)q &= -\beta \nabla q; & \beta &= \frac{k}{\mu(c)}, \\ \mathcal{L}(p, c)z &= z\mathbf{l}; & \mathbf{l} &= -\frac{k}{\mu(c)} \nabla p + \frac{d}{dc} \left(\frac{k\rho(c)}{\mu(c)} \right) \mathbf{g}, \\ \mathbf{C}(c)v &= \gamma \operatorname{div} v; & \gamma &= \rho(c), \\ \mathcal{R}(u, c)z &= \operatorname{div}(z\mathbf{r}); & \mathbf{r} &= \rho'(c)u \\ E(c, u) &= \operatorname{div}(e_0 v) + \operatorname{div}(\sum_{i=1}^2 v^i E_1^{(i)}); \\ e_0 &= -\rho(c)c, & E_1^{(i)} &= \rho(c) \frac{\partial}{\partial u^i} D_\epsilon(u) \nabla c, \quad i = 1, 2 \\ \mathcal{S}(u, c)z &= \operatorname{div}(S_0 z) + \operatorname{div}(S_1 \nabla z); \\ S_0 &:= \rho'(c) D_\epsilon(u) \nabla c + \rho'(c)cu - \rho(c)u. \\ S_1 &= \rho(c) D_\epsilon(u). \end{aligned}$$

La formulación débil de (22) es entonces:

Buscar una terna $(v, q, z) \in W_0$ tal que

$$\begin{cases} \nabla p \langle v, \phi \rangle + b(q, \phi) + l(z, \phi) & = \nabla p \langle f, \phi \rangle & \text{para toda } \phi \in X \\ \nabla p c \langle v, \psi \rangle + r(z, \psi) & = \nabla p \langle g, \psi \rangle & \text{para toda } \psi \in Y \\ \nabla p e \langle v, \chi \rangle + s(z, \chi) & = \nabla p 0 & \text{para toda } \chi \in Z_0 \end{cases} \quad (23)$$

con las formas bilineales definidas como sigue

$$\begin{aligned} b(q, v) &= \langle \mathbf{B}q, \phi \rangle = -\langle \beta \nabla q, \phi \rangle, \\ c(v, q) &= \langle Cv, \psi \rangle = -\langle \gamma v, \nabla \psi \rangle, \\ l(z, \phi) &= \langle \mathcal{L}z, \phi \rangle = \langle z\mathbf{l}, \phi \rangle, \\ r(z, \psi) &= \langle \mathcal{R}z, \psi \rangle = -\langle \mathbf{r}z, \nabla \psi \rangle, \\ s(z, \chi) &= \nabla p - \langle \mathcal{S}z, \chi \rangle = \langle S_1 \nabla z, \nabla \chi \rangle + \langle S_0 z, \nabla \chi \rangle, \\ e(v, \chi) &= \nabla p - \langle Ev, \chi \rangle = \langle e_0 v, \nabla \chi \rangle + \langle \sum_{i=1}^2 v^i E_1^{(i)}, \nabla \chi \rangle. \end{aligned}$$

La condición (9(ii)) se satisface trivialmente con la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \gamma/\beta & 0 \\ 0 & \gamma/\beta \end{pmatrix}$$

puesto que

$$b(q, Mv) - c(v, q) = 0 \quad \text{para toda } v \in X, q \in Y.$$

Igualmente se tiene con $m_1 \leq \gamma/\beta$ y $m_2 \leq \beta^2$ las condiciones (9(i)) y (10), ya que

$$\langle v, Mv \rangle = \frac{\gamma}{\beta} \|v\|^2 \quad \text{para toda } v \in X$$

y

$$\|Bq\|_2^2 = \beta^2 \|\nabla q\|_2^2 \quad \text{para toda } q \in Y.$$

Observación 4.1. Es claro que las estructuras de los problemas (3) y (22) no son idénticas y podríamos afirmar incluso que el primero está incluido en el segundo. Este hecho sin embargo no dificulta de manera sustancial la extensión de los Teoremas 3.2 y 3.3 al problema (22) ni las demostraciones. En realidad los términos más difíciles de acotar en las demostraciones de los teoremas citados son los provenientes de la condición (9ii), estos términos sin embargo desaparecen en el caso del problema (22).

5. Experimentación numérica

Finalmente, queremos presentar algunos resultados numéricos obtenidos al aplicar nuestra discretización, con diferentes valores del parámetro ω ($10^{-3} \leq \omega \leq 10$) a cuatro problemas de prueba definidos en la región $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Para ello usamos el programa MGB [2]. Dicho programa fue escrito en FORTRAN 77 y permite realizar aproximaciones numéricas de sistemas elípticos sobre regiones planas.

En casi todos los casos se obtuvo convergencia y en la mayoría de ellos el valor $\omega = 1$ se caracterizó por presentar los mejores resultados, en el sentido de que la rata de convergencia computada fue bastante cercana a la garantizada por la teoría, es decir, *cuadrática* para p , c y *lineal* para u . Las constantes α_u , α_p y α_c representan los órdenes de convergencia respectivos, los cuales pueden ser obtenidos de la fórmula

$$v - v_h = c_1 h^\alpha, \quad \alpha \geq 0 \tag{24}$$

donde c_1 representa una constante, α el orden y v corresponde a las componentes p , u_1 , u_2 y c .

Debido a que en (24) solo conocemos v_h , hemos calculado la solución discreta (u_h, p_h) (respectivamente (u_h, p_h, c_h)) sobre mallas contiguas G_h , G_{2h} y G_{4h} (G_h representa la malla más fina). Después de algunos cálculos obtenemos de (24) la relación

$$\frac{\|v_h - v_{2h}\|}{\|v_{2h} - v_{4h}\|} = 2^\alpha, \text{ con } \|v_h\|_{\infty; G_h} = \max_P |v_h(P)|.$$

En las tablas que presentamos a continuación, el símbolo $(-)$ significa que no se pudo establecer el orden de convergencia, mientras que $(**)$ significa que no obtuvo convergencia.

Problema 5.1: Se busca la solución (u, p) de

$$\begin{cases} u - \nabla p = 0 & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} u = -10 & \text{en } \Omega, \quad p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

ω	α_u	α_p
10^{-3}	—	1.79
10^{-2}	0.84	1.78
10^{-1}	0.51	1.79
1	1.00	1.89
10	0.88	1.81

TABLA 5.1: Orden de convergencia.

Problema 5.2: Se busca la solución (u, p) de

$$\begin{cases} u - \nabla p = 0 & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) & \text{en } \Omega; \quad p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

cuya solución exacta es $p(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

ω	α_u	α_p
10^{-3}	—	1.80
10^{-2}	—	2.00
10^{-1}	0.14	2.00
1	1.90	1.99
10	1.96	1.96

TABLA 5.2: Orden de convergencia.

Problema 5.3: Se busca la solución (u, p) de

$$\begin{cases} u - \nabla p = 0 & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} u = 6xy^3 + 6x^3y - 12xy & \text{en } \Omega; \quad p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

cuya solución exacta es $p(x, y) = x^3y^3 - x^3y - xy^3 + xy$.

ω	α_u	α_p
10^{-3}	—	2.00
10^{-2}	—	1.99
10^{-1}	—	1.98
1	0.95	1.98
10	0.93	1.84

TABLA 5.3: Orden de convergencia.

Problem 5.4: Se busca la solución (u, p, c) de

$$\begin{cases} u - \frac{k}{\mu(c)} \nabla p + \frac{k\rho(c)}{\mu(c)} \mathbf{g} & = 0 \text{ en } \Omega \\ \operatorname{div}(\rho(c)u) & = 10 \text{ en } \Omega \\ \operatorname{div}(c\rho(c)u - \rho(c)D_\epsilon(u)\nabla c) & = 0 \text{ en } \Omega \\ p = 0 \quad c = \vartheta & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

con $\mathbf{g} = (1, 0)^T$, $\rho(c) = 1 + 0,2c$, $\mu(c) = 1 + c^3$ y la matriz

$$D_\epsilon(u) := I + I(0,01 + |u|^2)^{1/2} + \frac{1}{(0,01 + |u|^2)^{1/2}} uu^T,$$

ω	α_u	α_c	α_p
10^{-3}	**	**	**
10^{-2}	1.0	1.71	1.79
10^{-1}	1.0	1.72	1.79
1	1.0	1.71	1.79
10	—	—	—

TABLA 5.4: Orden de convergencia.

El hecho de que en algunos casos el orden de convergencia no fue el esperado puede radicar en que no fue posible, por limitaciones en memoria, trabajar con discretizaciones muy finas ($h < 2^{-7}$). Las situaciones para las cuales no se presentó convergencia podrían quizá corregirse con una adecuada elección del punto inicial.

De otro lado, dado que conocemos la solución explícita para los problemas 5.2 y 5.3 podemos estudiar el comportamiento con respecto a ω ($\log \omega$) de los errores $\|u - u_h\|_\infty$ y $\|p - p_h\|_\infty$. Tal comportamiento se resume en las figuras 5.1 y 5.2.

Una posible continuación de este trabajo podría estar dirigida a considerar la evolución en el tiempo de flujo a través de medios porosos. Otro estudio que se podría realizar sería el de desarrollar criterios para la selección adecuada del parámetro ω .

Referencias

- [1] P. Ciarlet (1987): The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Tokyo.
- [2] M. Dobrowolski: Finite Elemente Das Programm (MGB), **SUN-Anlage WMAX56 des Instituts für Angewandte Mathematik und Statistik** /dobro/mzd .
- [3] M. Dobrowolski, R. Rannacher (1980): Finite element methods for nonlinear elliptic systems of second order, Math. Nachricht., 94, pp 155-172.
- [4] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: (1977): Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Grundlehren der math. Wiss. 224, Springer-Verlag. Berlin.
- [5] T. A. Manteuffel, S. F. McCormick, G. Starke (1995): First-order systems least-Squares for second order elliptic problems with discontinuous coefficients, Proceedings of the Copper Mountain conference on multigrid methods, Copper Mountain, CO.
- [6] R. A. Raviart, J. M. Thomas (1977): A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, in Mathematical Aspects Finite Element Method, Lecture Notes in Math, 606, Springer Verlag. New York, pp. 292-315.
- [7] M. Villegas (1998): Gemischte Finite Elemente Verfahren bei elliptischen Systemen, Dissertation, Würzburger Universität, Alemania.

Dirección del autor: Manuel Villegas. Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia. mvillegas@univalle.edu.co

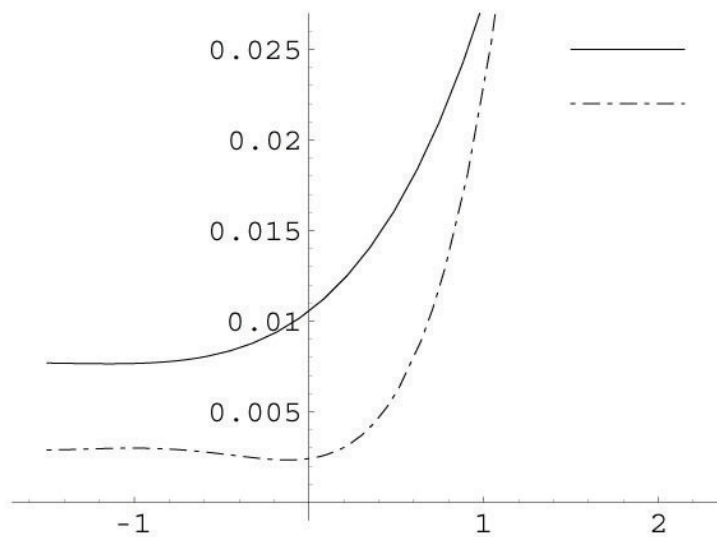


Figura 1: Error para problema 2 sobre Π_h con $h = 1/2^5$.

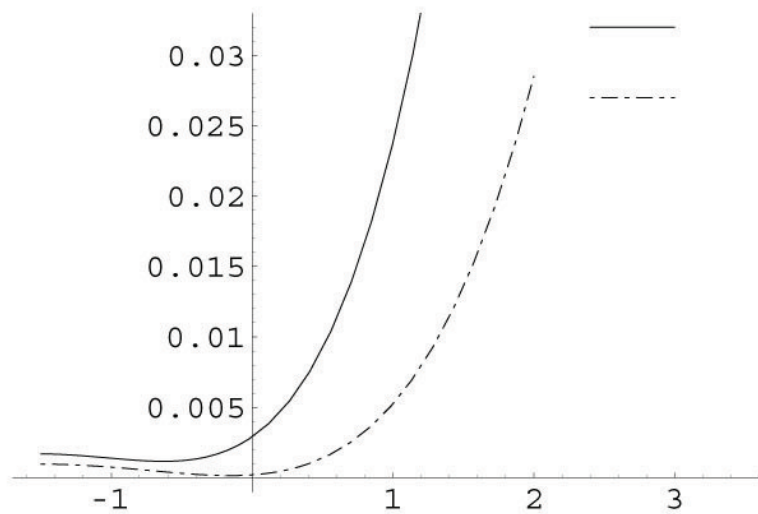


Figura 2: Error para problema 2 sobre Π_h con $h = 1/2^6$.

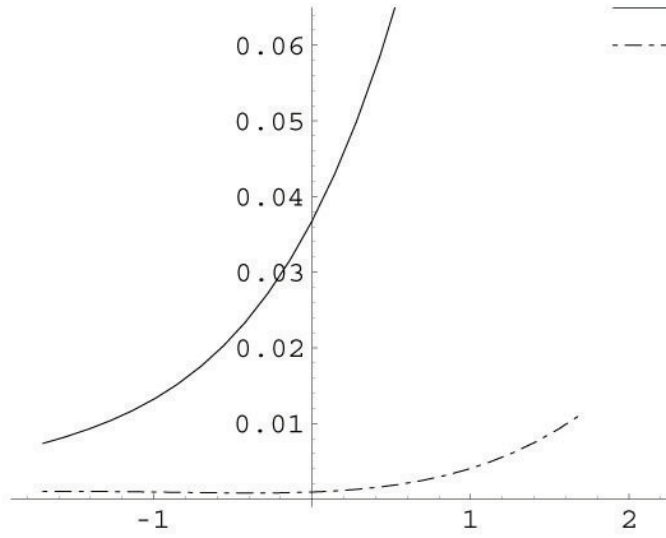


Figura 3: Error para problema 3 sobre Π_h con $h = 1/2^5$.

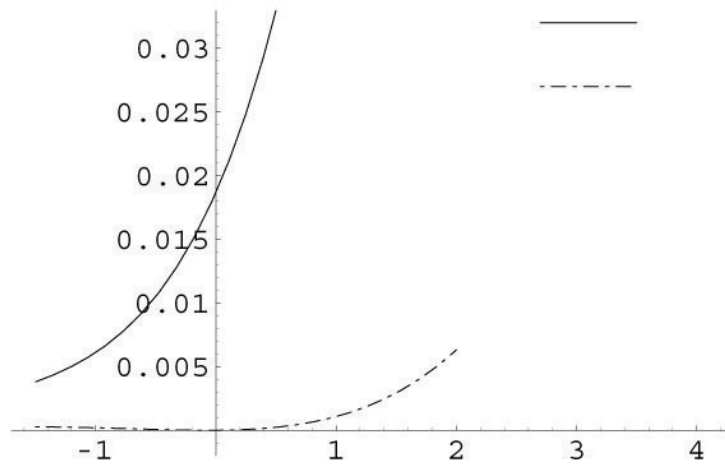


Figura 4: Error para problema 3 sobre Π_h con $h = 1/2^6$.