



La regla y el compás euclidianos en el contexto educativo y artístico de Alberto Durero

Julieta Martínez Muñoz

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Maestría en Educación. Énfasis en Educación Matemática
2022



La regla y el compás euclidianos en el contexto educativo y artístico de Alberto Durero

Julieta Martínez Muñoz

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación
con énfasis en Educación Matemática

Dirigido por:

Edgar Fernando Gálvez

Gabriela Inés Arbeláez

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Maestría en Educación. Énfasis en Educación Matemática

2022

Agradecimientos

A Dios por permitirme culminar esta etapa de formación, guiarme por caminos desconocidos para crecer en las distintas etapas de mi vida y darme la oportunidad de conocer personas maravillosas.

A mis padres, Pedro Martínez y Mary Muñoz, a mi hermano, David Santiago Martínez, y demás familiares y amigos por su amor y paciencia, quienes siempre me han apoyado incondicionalmente.

A la profesora Gabriela Arbeláez por compartir sus ideas e inspirarme a realizar este trabajo, por escucharme en tiempos difíciles y animarme a ser mejor cada día.

Al profesor Fernando Gálvez por su tiempo y paciencia, esta dedicación, sin duda, contribuyó a mi formación profesional e intelectual.

Al presbítero Hernando Silva por su amistad, apoyo constante y por acompañarme en todos los espacios de mi vida.

Resumen

Este trabajo de grado enmarcado en la línea de historia y epistemología de las matemáticas presenta los tres problemas clásicos de la geometría insolubles con la regla y el compás desde la concepción artística, intelectual y geométrica de Alberto Durero en su tratado de geometría. Durero no desconoce la importancia de los clásicos y el desarrollo que estos problemas tienen a lo largo de la historia, que él como un aprendiz se ve en la obligación de estudiar para poder formar a otros desde la perspectiva de su profesión.

El maestro de Núremberg se empeñó en fundamentar su hacer artístico por medio de la geometría, por tal motivo se esforzó en realizar su propio programa renacentista, dirigido a todo aquel que se interese en las artes y, en especial, para sus compatriotas y futuros colegas. Así, se presenta parte de la vida y obra del artista Alberto Durero, quien construye una relación entre el arte y las matemáticas a partir de sus experiencias y conocimientos adquiridos en el periodo del Renacimiento italiano. Durero estudió e investigó en el campo de las matemáticas elementos que él, en su formación, creía necesarios e importantes para su legado artístico y teórico, pero, sobre todo, para que la geometría fuera útil y práctica en los talleres de los artistas y en la educación de jóvenes pintores.

Palabras claves: Alberto Durero, tres problemas clásicos de la geometría, Renacimiento, arte y geometría.

Tabla de Contenido

Introducción	1
Capítulo 1. Una contextualización histórica, epistemológica y social de la pintura en el Renacimiento	5
1.1. El Renacimiento y una nueva mirada del arte	6
1.2. La fundamentación de la pintura a través de la geometría	11
1.2.1. El cristianismo y la geometría	13
1.2.2. La geometría de taller	15
1.2.3. Los dibujos y algunas técnicas de la pintura	17
1.3. Los inicios de la perspectiva	19
1.4. En busca de la belleza o de lo bello	21
1.4.1. Lo bello en Platón.....	22
1.4.2. El concepto de lo bello en Aristóteles	23
1.4.3. Los principios de la belleza en santo Tomás de Aquino	25
Capítulo 2. Alberto Durero un nuevo Apelles	29
2.1. La formación y la vida de Durero	30
2.2. La perfección y el ideal de belleza en Durero	34
2.2.1. Los temas bíblicos	37
2.2.2. Los autorretratos	40
2.2.3. Tres grabados a buril	47
2.2.4. El libro De la medida.....	53
Capítulo 3. Los tres problemas clásicos de la geometría en el libro <i>De la medida</i>	59
3.1. La trisección del ángulo	62
3.1.1. Trisectriz de Hipias.....	62
3.1.2. La neusis de Arquímedes.....	65
3.1.3. La trisección del ángulo en el libro De la medida	67
3.1.4. La trisección del ángulo con el folium de Durero	69
3.1.5. La flor de doce pétalos	74

3.2. La cuadratura del círculo.....	76
3.2.1. La cuadratura del círculo en el libro De la medida	79
3.3. La duplicación del cubo	82
3.3.1. Primera solución atribuida a Esporo.....	84
3.3.2. Segunda solución atribuida a Platón.....	87
3.3.3. Tercera solución atribuida a Herón	88
3.3.4. La triplicación y cuadruplicación de un cubo.....	91
3.4. La perspectiva el «Camino más corto»	98
Capítulo 4. La regla y el compás, instrumentos en la concepción artística e intelectual de Durero	104
4.1. La regla y el compás en el desarrollo de la geometría	107
4.1.1. Euclides y Arquímedes en la cuadratura del círculo	110
4.1.2. La solución de la duplicación del cubo y trisección del ángulo en Descartes.....	114
4.2. «Geometría hecha Melancolía».....	119
4.3. «No se puede educar sin inducir a la belleza»	125
4.4. El desastre religioso que oscurece la vida de Durero.....	129
Referencias.....	133

Indicé de figuras

Figura 1. Autorretrato de Durero a los 13 años de edad.	41
Figura 2. Autorretrato de Durero a sus 19 años de edad.	42
Figura 3. Autorretrato de Durero a sus 22 años de edad.	43
Figura 4. Autorretrato de Durero como un artista del Renacimiento.	44
Figura 5. Autorretrato de Múnich.	46
Figura 6. El Caballero, la Muerte y el Demonio.	48
Figura 7. San Jerónimo en su celda.	50
Figura 8. Melancolía I.	52
Figura 9. Construcción de la trisectriz de Hipias.	63
Figura 10. Trisección de un ángulo utilizando la cuadratriz de Hipias.	64
Figura 11. Trisección del ángulo por la neusis de Arquímedes.	66
Figura 12. Trisección de un segmento.	69
Figura 13. Trisección del ángulo en el Libro de la medida.	69
Figura 14. Construcción de la espiral de Durero.	71
Figura 15. Construcción continua del folium o espiral de Durero.	72
Figura 16. Trisección del ángulo con la espiral de Durero.	73
Figura 17. División de una circunferencia en doce puntos.	75
Figura 18. Flor de doce pétalos a partir de círculos secantes.	76
Figura 19. Lúnula de Hipócrates.	78
Figura 20. Hipias y la cuadratura del círculo.	79
Figura 21. La cuadratura del círculo por Durero.	80
Figura 22. La circulatoria del cuadrado en los Sulvasutras.	82
Figura 23. Primera solución de la duplicación del cubo en el libro De la medida.	86

Figura 24. Segunda solución de la duplicación del cubo en el libro De la medida.	88
Figura 25. Tercera solución de la duplicación del cubo en el libro De la medida.	91
Figura 26. Triplicación del cubo en el libro De la medida.	92
Figura 27. Cuadruplicación del cubo en el libro De la medida.	93
Figura 28. Amplificación de un cubo.	95
Figura 29. Amplificar o simplificar un cubo.	96
Figura 30. Ejemplo de las balas de cañón.	98
Figura 31. Representación de un cubo en perspectiva sobre una base con la sombra y la luz. ..	101
Figura 32. Dibujante haciendo un retrato.	101
Figura 33. Dibujante dibujando un laúd.	101
Figura 34. Proposición 14 de los Elementos de Euclides.	110
Figura 35. Un cuadrado con la misma superficie que un triángulo dado.	112
Figura 36. Un hexágono de la misma superficie que un cuadrado.	114
Figura 37. Instrumento XYZ de Descartes.	115
Figura 38. Trisección del ángulo por Descartes en el libro de Geometría.	118
Figura 39. Autorretrato como Varón de Dolor.	118

Introducción

La relación entre arte y matemática ha tenido, a lo largo de la historia, ciertos cambios y desarrollos. En el siglo IV a. C. el escultor griego Policleto escribió un tratado, *El Canon*, centra su atención en el estudio de las proporciones para el desnudo masculino ideal, basado en un modelo que articula las diferentes partes del cuerpo y la armonía. En el siglo XIV, el italiano Ambrogio Lorenzetti estableció el espacio de una obra según un orden geométrico, por razones desconocidas no se tienen resultados o estudios que perseveren durante la Edad Media. En los primeros años del *Quattrocento* es el periodo donde los artistas construyen el espacio pictórico a partir de una perspectiva matemática.

El Renacimiento italiano es el periodo donde matemáticos, en contacto con artistas, escriben influyentes tratados en el que dialogan las dos disciplinas. El matemático Luca Pacioli en *De Divina Proportione*, obra ilustrada con xilografías de Leonardo da Vinci se refiere a la proporción áurea (lo *divino*) y sus aplicaciones a la geometría, así como las conexiones entre el arte visual, la perspectiva y la arquitectura. El tratado de Piero della Francesca titulado *De Prospectiva Pingendi* desarrolla las ideas de Euclides sobre la perspectiva. El alemán Alberto Durero, entre otros artistas, también le dieron importancia a la teoría italiana en la investigación geométrica de la composición del espacio, además de la técnica y el estilo en la pintura.

La mayoría de los artistas renacentistas realizaron a través de diferentes métodos y con distintos resultados, investigaciones y estudios sobre el nuevo sistema de representación. El acuerdo entre la forma, la luz y el color, la armonía entre el hombre y la naturaleza, la representación de la belleza, entre otras características, son una búsqueda recurrente de los artistas de la época.

Los artistas renacentistas comenzaron a alejarse de la representación simbólica de la Edad Media y se esforzaron por el realismo, es decir, apropiarse del espacio exterior donde la concepción del espacio y las figuras ya no son de origen teocéntrico, por el contrario, se representa al hombre con un volumen, movimiento y expresión.

Así, el «nuevo despertar» como lo denominan varios historiadores al periodo del Renacimiento, y el desarrollo de la perspectiva central como uno de los acontecimientos más importantes para artistas y matemáticos de la época, no es el único acontecimiento ni tampoco se puede limitar las relaciones entre la geometría y el arte de la era solamente al avance de la perspectiva. Los artistas, considerados artesanos en aquel entonces, pusieron el conocimiento

práctico por encima de las demandas programáticas, para ir consolidando el arte en un nuevo programa y al artista en un estatus social más digno; pero también los artistas fueron versátiles y se desempeñaron como ingenieros, arquitectos, mecánicos y científicos naturales. Además, se interesaron en adquirir conocimientos de las obras antiguas, no solo es la imitación de estas, en realidad para los artistas del siglo XV representó la recuperación de una riqueza técnica y compositiva, y principalmente la concepción de la belleza por medio de leyes matemáticas y naturales.

Schreiber y Scriba (2015) manifiestan que, además de la perspectiva, también jugaron un papel importante en el desarrollo del arte y, en particular, en la pintura, escultura y arquitectura: La aplicación del método de vista superior y frontal para resolver problemas espaciales y constructivos; el descubrimiento de nuevas formas geométricas como curvas, áreas y sólidos; el estudio de la teselación plana y los adornos; el origen de una terminología geométrica no en latín sino en lenguas vernáculas según la procedencia de cada artista; las construcciones geométricas en las que los métodos prácticos de aproximación, a menudo, reemplazan soluciones exactas, pero también en aquellos casos en donde es posible una solución exacta con regla y compás; la invención de mecanismos e instrumentos para resolver problemas geométricos; intentar captar la armonía y la belleza mediante relaciones numéricas o leyes matemáticas, estos y otros aportes tan valiosos como el desarrollo de la perspectiva formaron al artista intelectualmente y ubicaron al arte, en particular, a la pintura, dentro de las ciencias.

En este sentido, el presente documento enmarcado en la línea de historia y epistemología de las matemáticas busca exponer una relación entre arte y matemáticas desde el conocimiento, formación y vida del artista Alberto Durero. La unión entre un arte y un pensamiento que, con desarrollos desiguales e inevitables tensiones, presenta una apreciable cohesión y una lógica interna dentro de la pintura y las matemáticas.

El análisis e interpretación que realizan algunos historiadores en la obra artística e intelectual de Alberto Durero muestran los principios y el estatus intelectual de su arte. Inicialmente la reflexión teórica de Durero se encuentra enmarcada en el uso práctico, pero luego el artista tomará conciencia de que, más allá de la aplicación, lo que busca es reinventar las obras y dar un fundamento teórico apoyado en la matemática. Durero llevó a futuras generaciones a realizar una obra maestra concebida no solo mediante la aplicación de las reglas, sino de la necesidad de un sistema de conceptos que fundamente y ayude a enfrentar problemas que no ha

previsto el artista y, sobre todo, evidenciar y situar el conocimiento científico en la elaboración de obras artísticas que persiguen la perfección y la representación de la belleza.

Las ideas y actividades del artista Alberto Durero son heredadas por los teóricos italianos, pues de ellos es deudor el artista alemán en su concepción y formación intelectual. Durero se acerca a un saber matemático que ha sido reconstruido y organizado por eruditos de la Edad Media y del Renacimiento, pero también los conocimientos matemáticos que Durero va adquiriendo hacen parte de los talleres de los artistas.

Durero recopiló y publicó un manual de geometría con el fin de enseñar a jóvenes pintores alemanes la construcción con la regla y el compás de diferentes figuras geométricas y curvas. Las construcciones que describe Durero en su texto se encuentran inmersas en un contenido matemático y las presenta a partir de las necesidades y los «ojos» de un pintor. El texto de Durero se basa en otros textos de autores diversos con variantes realizadas por el propio Durero y escritos originales por él mismo. En este sentido, los objetos y problemas matemáticos conocidos desde la Antigüedad no son lejanos para el artista; distingue entre construcciones aproximadas y exactas, pues sabe cuáles son las limitaciones que él como un aprendiz tiene en el campo de las matemáticas, pero ello no lo detiene para realizar ingeniosas construcciones que se encuentran despojadas de una matemática rigurosa para ser aplicables y útiles en su hacer artístico.

En este orden de ideas, el presente trabajo centra como objeto de estudio la vida y obra de Alberto Durero, y la trascendencia de su formación artística e intelectual que le permite, de una forma original, aproximarse a objetos matemáticos conocidos desde la Antigüedad, pues reconoce la dificultad e importancia de ciertos problemas y procedimientos que se aplican en la disciplina.

Durero enfrenta y aborda en su tratado de geometría problemas destacados históricamente como son los tres problemas clásicos de la geometría insolubles con la regla y el compás, —la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo— y presenta una solución aproximada que es útil y aplicable en su hacer artístico. Las soluciones aproximadas de estos tres problemas en el tratado de geometría, no solo están vinculadas a la forma de pensar de Alberto Durero, sino que están concretamente enlazadas a su vida intelectual de escritor, humanista y artista.

Con el propósito de estudiar los tres problemas clásicos de la geometría desde la perspectiva y práctica del artista se muestran los elementos geométricos expuestos por Durero y

cómo a lo largo de su vida la geometría es considerada el único camino para alcanzar la tan anhelada belleza que se representa en su desarrollo profesional, intelectual y emocional.

Los aspectos mencionados antes se desarrollan en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, se muestra el contexto en el que Durero se familiariza con el movimiento artístico y cultural, las ideas, el conocimiento, los humanistas y personajes influyentes e importantes del Renacimiento, cuyo centro de radiación es Italia.

En el segundo capítulo, se presentan los hechos más importantes en la vida de Alberto Durero. Su proceso de formación del «nuevo arte» está enmarcado en la concepción italiana, que involucra diferentes espacios culturales, sociales, religiosos e intelectuales en la vida del artista.

En el tercer capítulo, se ilustran los diferentes mecanismos que han planteado algunos autores a la solución de los tres problemas clásicos de la geometría a lo largo de la historia; también las construcciones y aplicaciones realizadas por Durero a estos problemas en su tratado de geometría.

Finalmente, el último capítulo entrelaza la geometría, el arte y la educación, en un punto en común como lo son las construcciones geométricas por medio de la utilización la regla y el compás, instrumentos técnicos que obedecen a un desarrollo conceptual y material, indispensables y fundamentales en el arte de Durero, en la enseñanza y en el desarrollo de la geometría.

Capítulo 1.

Una contextualización histórica, epistemológica y social de la pintura en el Renacimiento

El nuevo arte debe basarse en la ciencia, en particular,
en las matemáticas, como la más exacta, lógica y
gráficamente constructiva de las ciencias.

Alberto Durero

La Edad Media fue un periodo donde el universo era concebido en unión íntima con Dios; universidades y centros de estudio difunden la creencia escolástica del acuerdo entre la fe y la razón. Este periodo se caracteriza por un simbolismo e idealismo con implicaciones políticas, sociales y morales, ya que las ideas y conceptos eran remitidos al clero y a las Sagradas Escrituras. La ciencia, como los diferentes campos del saber y de la vida, debía seguir caminos rígidos y prescritos; la burguesía se abría paso en la industria y el comercio, los bancos contribuían a transformar la base social y las estructuras políticas. El pueblo con una nueva conciencia en el pensamiento, el arte y la sociedad se vio en la necesidad de revisar el aprendizaje y las creencias, para poder avanzar a nuevos caminos, desafiando perspectivas establecidas y confiando en la observación de la naturaleza, como lo habían hecho los griegos, pero, sobre todo, se requirió que el hombre se mirará a sí mismo.

Se inicia un nuevo periodo, el Renacimiento, entendido como un proceso que tomaba la Antigüedad clásica como modelo de la literatura, las artes, la lengua y la ciencia. El nuevo modelo de pensamiento en las ciencias, las artes y en la cultura impulsaron al individuo a fomentar y participar en el gobierno de las repúblicas y de Estados señoriales; dominados por grandes comerciantes y banqueros; la sociedad se encaminó al conocimiento científico, y los artistas hallaron en los restos artísticos y arquitectónicos de la Antigüedad el realismo, que proporcionó vida a su arte. Una consecuencia de estas transformaciones fue el perfeccionamiento de la técnica del óleo y el descubrimiento de la perspectiva.

Durante el Renacimiento los artistas no eran considerados más que meros artesanos, al igual que en la Edad Media, pero por primera vez fueron vistos como personalidades independientes, comparables a poetas y a escritores; el arte deja de ser un medio de aproximación

a Dios y se convierte en un campo de experimentación formal para indagar y aproximarse a la realidad de las cosas por medio de leyes matemáticas y naturales.

El arte y, en particular, la pintura, es una nueva forma de acercarse tangiblemente a aquello que solo el pensamiento era capaz de representar. Un método de representación basado en la imitación fiel de la realidad, donde el espacio y los elementos se distribuyen según los cánones de la belleza. Las proporciones perfectas o ideales del cuerpo humano y la relación armónica entre las distintas partes de una figura, fueron temas que abordaron pintores, escultores y matemáticos, ya que la belleza basada en la geometría podía dar a las figuras una armonía, equilibrio y perfección.

Con el objetivo de abordar la posición social, religiosa e intelectual de los artesanos en el periodo del Renacimiento, se estudiarán las diferentes posturas y propuestas de estos hombres al nuevo pensamiento renacentista, para restaurar y dar un valor digno dentro de la sociedad al oficio de la pintura. Además, se expondrá la relación del arte con otros campos del saber y la correspondencia con los diferentes aspectos de la vida: emocionales, sociales y religioso. El arte posibilita nuevas funciones para los mecenas, pues las obras asumen un nuevo papel de poder, prestigio, ostentación y, la exaltación y recuperación de la Antigüedad. Las imágenes, serán algunas de las nuevas preocupaciones de los artistas de la época, aunque en el arte renacentista perduró la iconografía religiosa, se recuperarán otras imágenes que reflejan la Antigüedad, la mitología pagana, y el gusto por el desnudo. La labor de tratadistas e investigadores del arte también se destaca en el periodo del Renacimiento, pues la pintura no es simplemente una imagen que se realizan con el pincel, por el contrario, es la manifestación de inconformidad del pensamiento que requiere técnica, experiencia y una teoría que da cuenta de la científicidad de su hacer.

Con el fin de mostrar las condiciones sociales, culturales e institucionales que impulsaron al artista Alberto Durero en su desarrollo profesional e intelectual se realiza un acercamiento en el contexto y desarrollo de la pintura en el periodo del Renacimiento, y cómo el artista fue capaz de adaptar las ideas y conocimientos a la pintura del siglo XV en Alemania.

1.1. El Renacimiento y una nueva mirada del arte

El año 1500 había pasado y no se acabó el mundo como lo esperaban los cristianos, quienes horrorizados leían en el Apocalipsis de San Juan el fin de todos los tiempos; pero en realidad era

el fin del mundo medieval, que daría paso al cambio y permitiría transformar y reformar al hombre; y, este último, al mundo mediante su saber y capacidad de adquirir y generar nuevos conocimientos, que preserven la calidad humana y el desarrollo de nuevas generaciones en los diferentes campos de la vida, como la religión, la ciencia y el arte. El conjunto de estas transformaciones se conocerá más tarde como Renacimiento.

Este nuevo tiempo llamado Renacimiento¹ es un periodo comprendido aproximadamente entre 1400 y 1600, donde Europa fue cambiando intelectual y culturalmente. Una época de resurgimiento que buscaba recrear parte de la grandeza literaria, filosófica y artística de la antigua Grecia y Roma. Uno de los centros y lugares más importantes de este cambio fue Italia, la madre del Renacimiento; gracias a su ubicación geográfica, los puertos marítimos favorecen la importación de artículos desde Asia y África, y su distribución al resto de Europa. Italia acumuló una gran riqueza en los últimos años del periodo de la Edad Media; las grandes casas de banca la convirtieron en uno de los principales centros financieros; aunque la destrucción provocada por las guerras y el establecimiento de algunos gobiernos democráticos favorecieron el desarrollo del individuo (Kline, 1992). La inconformidad con la Iglesia, que era una importante potencia política, militar y social en esa época, incentivó al pueblo a un nuevo pensamiento, que iría formando a la civilización occidental.

La relación entre Roma y el Imperio bizantino² se fue consolidando y tomando más fuerza durante la primera parte del siglo XV, debido a las guerras que se presentaban con los turcos; los bizantinos buscaron apoyo en los italianos, y con la conquista de Constantinopla³ en 1453 la mayor cantidad de estudios y documentos griegos que poseían los bizantinos emigraron a Italia. Por tanto, se tenían más manuscritos griegos en Europa y las traducciones al latín eran más confiables que las provenientes del árabe.

Hacia 1450 con la invención de la imprenta de «tipos móviles»⁴ por parte del alemán Johannes Gutenberg, aparecen en forma impresa los trabajos matemáticos, astronómicos,

¹ El Renacimiento no fue un único periodo, sino que aparece como el reflejo de un proceso de cambio continuo en distintas épocas de la historia. Impulsado por ciertos personajes de gran talento y genialidad.

² El Imperio bizantino estaba constituido por todos los territorios orientales que pertenecían al Imperio romano. Fue creado en el año 395, cuando se separaron definitivamente los territorios occidentales y orientales. Se mantuvo durante toda la Edad Media y comienzos del Renacimiento.

³ Fue la capital de distintos imperios a lo largo de su historia: del Imperio romano, el Imperio bizantino, del Imperio latino y finalmente del Imperio otomano. Debido a su enorme riqueza y ubicación geográfica, fue considerada como la «Reina de las Ciudades».

⁴ El alemán Johannes Gutenberg confeccionó moldes en madera de cada una de las letras del alfabeto, y las rellenó con hierro, creando los primeros «tipos móviles». Realizó varios modelos de las mismas letras para formar las

astrológicos, entre otros, acelerando así la difusión y popularización del conocimiento. En 1482 en Venecia se presenta la primera edición impresa de la traducción en latín por Johannes Campanus de los *Elementos* de Euclides, como también a lo largo del siglo aparecerán los cuatro libros de las *Secciones cónicas* de Apolonio, los trabajos de Pappus, entre otros tratados; sin embargo, estas, y muchas obras más, se encontraban en las cortes de príncipes y eclesiásticos; no eran accesibles al pueblo en general, estaban reservadas para unos pocos y el idioma en el que se encontraban escritas, el latín⁵, representaba también un problema en la difusión del conocimiento, pues solo los eruditos, teólogos y profesores se familiarizan con esta lengua, pero los artesanos, ingenieros, artistas, conocían solamente las lenguas vernáculas.

El Renacimiento entendido como un nuevo periodo de esfuerzo creativo por parte de algunos hombres ilustrados, quienes provistos de un espíritu crítico buscaban recuperar un pasado ideal y miraba severamente todas las cosas del presente, fue uno de los rasgos más notables del *humanismo* (Johnson, 2001), un movimiento intelectual, filosófico y cultural, que nace en Italia, alrededor del siglo XIV, que pretendía descubrir al hombre y dar un sentido racional a la vida, es decir, dar una nueva visión de la realidad física exaltando las cualidades de la naturaleza y del hombre. Los humanistas tomaron a los clásicos griegos y latinos, cuyas obras redescubrieron y estudiaron. El énfasis que promovieron como valor supremo fue la razón humana. Sin embargo, la Iglesia, la institución más importante desde el punto de vista de los intelectuales, no perdía su papel predominante dentro y fuera de las ciencias, sino que se situaba en un plano diferente. Ya que la teología no era la única capaz de dar respuesta a todos los interrogantes que tenían los hombres. Ahora la observación y la experimentación eran las encargadas de formar al nuevo hombre, convertirlo en un espíritu libre y crítico en todos los campos del saber.

Los textos clásicos de la Antigüedad no solo se convirtieron en fuente de información e inspiración para los eruditos y nobles, sino también para los artistas que buscaban temas para sus obras, pues venían con un repertorio totalmente cristiano. Representaban episodios de la vida, pasión y resurrección de Cristo, la vida de los santos y de la Virgen María. Pero ahora tenían otra alternativa: la mitología clásica, que era más atractiva a la impuesta por el cristianismo en la piedad

palabras y posteriormente sujetarlas en un ingenioso soporte. Amoldó una vieja prensa de uvas, como plancha de imprenta a la que sujetaba el soporte con los «tipos móviles», dejando espacios para letras mayúsculas y dibujos, que serían añadidos mediante xilografías y decoraciones manuales.

⁵ El latín como lengua eclesiástica de Occidente se consideraba, sin excepción, la lengua universal. Posteriormente fue desplazada por las lenguas nacionales, y, finalmente, logrará mantenerse como una lengua culta (Hofmann, 2003).

y el sufrimiento de los mártires. Además, les permitía a los artistas muchas más posibilidades de mostrar la belleza, la inconformidad y el control ejercido por la Iglesia, sobre la conciencia y la razón de hombres y mujeres (Johnson, 2001).

La pintura, desde la historia del arte se estudia en dos periodos: el primero es el *Quattrocento*⁶, abarca aproximadamente todo el siglo XV, se caracteriza por ser una época donde el arte indaga y se aproxima a la realidad de las cosas. La representación de expresiones humanas se va aproximando cada vez más a una realidad física, social y emocional. La pintura abandona lentamente la rigidez de la cultura gótica⁷. Este periodo desarrollado fuertemente en el pensamiento italiano, tenía un espíritu y sentido diferente en las sociedades española, francesa o germana de la época. El *Cinquecento*⁸ fue el segundo periodo de la pintura renacentista y sus principales rasgos estilísticos se inspiran en la Antigüedad clásica, sobre todo en la imitación de la naturaleza. El arte de este siglo tiene como centro a Roma, y el papado es el principal protector del artista. Cabe destacar que los teólogos en la Edad Media no hablaban de las artes y mucho menos de los artistas, artesanos e ingenieros, sino del arte como abstracción y manifestación de la belleza divina:

El arte era fundamentalmente un código de actuación, una *Biblia* o una *Leyenda Dorada* en piedra, o pintadas sobre un muro o una tabla, en el que importaba más el sentido trascendente de la figuración y su expresión de belleza ideal como espejo de la bondad divina que las cualidades plásticas de la propia figuración. (Sureda, 1985-1987, p. 22)

El pintor del Renacimiento buscaba convertir sus nuevas obras en ideales del nuevo arte, es decir, propiciar un «nacimiento» del arte ajeno a la Edad Media, e incluso en contra de ella, pero retomando elementos de la Antigüedad. El arte abandonó el idealismo y el trascendentalismo medieval a favor de la imitación de la naturaleza, y el ideal de belleza ya no se encontraba en la divinidad sino en el conocimiento científico y en los antiguos clásicos, con sus variantes y matices; fue un fenómeno casi exclusivamente italiano (Sureda, 1985-1987). Así el pintor, escultor o

⁶ El desarrollo de este periodo se dio principalmente en Florencia (Italia), buscaba la recuperación de la Antigüedad y la desaparición de lo medieval, donde el humanismo tuvo una influencia decisiva, ya que el hombre es el centro y medida de todas las cosas. Aunque los pintores continuaban representando temas religiosos, introdujeron también en sus obras la mitología, la alegoría, los desnudos y el retrato.

⁷ La denominación «gótico» fue introducida por los artistas italianos del Renacimiento, con un sentido despectivo, pues lo veían como algo bárbaro y atrasado, como las realizaciones de los «godos» que acabaron con el Imperio romano (Chilvers, 2007, p. 419).

⁸ Este periodo se desarrolló a lo largo del siglo XVI, con un estilo inspirado en la naturaleza, el uso de la perspectiva y un nuevo ideal de belleza, basado en la armonía y la proporción. Los artistas más destacados e influyentes fueron Leonardo Da Vinci, Rafael Sanzio, Miguel Ángel, entre otros.

arquitecto que continúa ligado al pensamiento y la práctica de la religión, comienza a relacionar los principios propios de la ciencia⁹ con su arte, para que sus obras, por ellas mismas, tengan su propia validez y fundamentación, y ya no estén al servicio de la religión. Las obras de arte entran en una nueva visión de la realidad y de la percepción del tiempo y del espacio.

Esta nueva visión del mundo, como lo describe Santucci (1997), “es una renovada capacidad de observación de la naturaleza; ya no encarnada o jerárquicamente subordinada a una realidad trascendente, [...] sino estudiada por el artífice científico, considerado su reproductor” (pp. 962-963). El artista, como el científico, se aproxima e intenta comprender al mundo que los rodea, con la intención de desprenderse del estamento eclesiástico, de los relatos bíblicos, especialmente los concernientes a la salvación del hombre; pero cualquier realidad contraria a la impuesta por la Iglesia o unida a un espíritu de libertad era el camino al infierno. Uno de los primeros pintores que recuperaba en sus obras la mitología pagana fue Botticelli¹⁰ y León Battista Alberti¹¹, quien planteó teóricamente la posibilidad de pintar otros asuntos diferentes a los religiosos, como, por ejemplo, la mitología griega; aunque las tablas y los frescos con temas religiosos seguían satisfaciendo las necesidades de iglesias, monasterios y conventos. Los muros de los palacios y las villas reflejaban, al contrario, las acciones históricas o la inconformidad de un pueblo oprimido por la religión y que puso al hombre como el protagonista y centro de la creación, de composiciones simbólicas y de la vida cotidiana. Son los problemas concernientes al pensamiento, la conciencia y la realidad aquellos que van formando al nuevo artista en el ámbito social, cultural, intelectual y religioso en medio de un periodo de transición como fue el Renacimiento.

⁹ Para los artistas del siglo XV la ciencia se entiende como la matemática, la geometría, la óptica, la perspectiva, la mecánica, la anatomía y la fisiología. Así como la teoría de la luz y de los colores, son pues un medio para conocer y explicar plásticamente la realidad, es decir, entender la realidad.

¹⁰ Alessandro di Mariano di Vanni Filipepi, apodado Sandro Botticelli, nació en Florencia el 1 de marzo de 1445, fue un pintor del *Quattrocento* italiano, con un estilo delicado y sentimentalista. Se inclinaba más por los retratos femeninos, sobre todo sus *madonnas* y diosas mitológicas, que afianzaban sus ideales neoplatónicos y lo alejaban de las temáticas religiosas.

¹¹ León Battista Alberti nació en Génova en 1404, fue un arquitecto, teórico del arte, tratadista, matemático y poeta italiano. Fue una de las figuras más representativas y polifacéticas del ideal del hombre del Renacimiento, ya que reunió en su persona todos los conocimientos y habilidades de la época: erudito, humanista, escritor, arquitecto, escultor, pintor, cortesano y hombre de mundo.

1.2. La fundamentación de la pintura a través de la geometría

A finales del siglo XV se comenzó a sentir cierto orgullo y admiración por aquellos artistas que convertían las paredes o las maderas de los retablos en magníficas obras, retratos o autorretratos, que se confunden con la propia realidad. El artista, como se consideraba profesionalmente al artesano¹², de procedencia humilde, fue mejorando su posición social en la medida que se interesaba en el estudio y perfección del dibujo. Esto último le permitió acceder en el proceso de selección para las grandes obras de las élites e incluso de la Iglesia; no solo se contrataba a los mejores artistas sino aquellos que, por el rigor del dibujo, buscaban completar su formación artística para llevar a cabo el ejercicio intelectual en su práctica.

Leonardo da Vinci¹³ fue uno de los principales promotores y precursores que recomendaba incluir dentro de las artes liberales el estudio del dibujo. Pero, en aquel entonces las artes se dividían en manuales y liberales (que se conocían desde hace muchos siglos y hacían parte del plan de estudio de escuelas y universidades). Las artes liberales eran las del *trívium* (gramática, retórica y dialéctica) y las del *quadrivium* (aritmética, geometría, astronomía y música), que le daban cierto prestigio y una formación filosófica al hombre. La pintura, la arquitectura y la escultura hacían parte de las artes manuales, ya que sus creadores se servían de las manos fundamentalmente para sus construcciones, y no de la mente para ejecutar sus obras; sin embargo, los artistas renacentistas, quienes a pesar de su bajo estatus social se relacionaban con filósofos, literatos, matemáticos, músicos, creían que la práctica de su arte era tan liberal como el de la música o la poesía (Sureda, 1985-1987).

¹² La distinción entre artista y artesano ha sufrido transformaciones al pasar de los años; para los griegos y romanos, artistas y artesanos representaban a la misma figura, no eran hombres libres para desarrollar su arte, debían seguir determinadas reglas, por ejemplo, existía el arte del arquitecto, del escultor, del geómetra y del retórico, donde cada arte estaba basado en sus propias reglas. Los griegos realizaron una distinción entre artes liberales y manuales que se mantuvo hasta el Renacimiento.

El interés de los artistas renacentistas en distinguirse de los artesanos buscaba mejorar su estatus social mediante su inclusión en las artes liberales y el reconocimiento individual de su arte. Pero, es a finales del siglo XVII que se comienza a establecer una clara dicotomía entre un artista y un artesano. Se llamaba artesano a quien dominaba un oficio de manera mecánica y repetitiva; el artista cuenta con una imaginación, originalidad y autonomía, está abierto a cambios imprevistos durante el proceso creativo; a diferencia del artesano que conoce el resultado final de su trabajo y por ello necesita un buen conocimiento y manejo de la técnica. Sin embargo, el artista necesita de la técnica para adquirir la destreza propia de su arte. Tradicionalmente esa destreza se va adquiriendo en sus primeros años de formación en el taller, es el medio y el lugar para aspirar y llegar a ser un gran artista (Clarke, 2016).

¹³ Leonardo di ser Piero da Vinci nació el 15 de abril de 1452 en Vinci (Italia), fue un pintor, inventor, escultor, arquitecto, ingeniero, astrónomo, entre otros. Su figura representa perfectamente el ideal del hombre del Renacimiento, y considerado un polímata florentino.

En el esfuerzo del artista por representar el realismo en sus obras, por conocer y dominar las leyes de la naturaleza, y por buscar un estatus dentro de la sociedad, extraían e intercambiaban nuevas ideas por los lugares donde viajaban. Sin embargo, el artista no se desligaba del fervor por lo antiguo, por el contrario, comenzó a estudiar e indagar los textos clásicos e incluso trasladarse a centros importantes en otras ciudades para comprender y apoderarse de todos los secretos del arte. En virtud de lo anterior, se podría preguntar: ¿dónde se encuentran esos secretos que anhelaban conocer los artistas del Renacimiento y que buscaban incesablemente en los textos clásicos? Las relaciones que entablaron los artistas con pensadores, eruditos y conocedores de las ciencias como son los *humanistas*, ayudarían, en gran medida, a los creadores de las actividades artística, como refiere Layuno (1997), no solo a investigar postulados, reglas o teorías, sino a fundamentar la concepción de su arte y las nuevas técnicas que desarrollan y, en consecuencia, a redactar textos o tratados que se constituyeron en la base teórica de su arte. Estos documentos redactados por los mismos artistas recogen la experiencia y la enseñanza heredada de la Antigüedad y de sus contemporáneos, y a su vez describen la dignidad del ser humano y sus actividades, que se había perdido gracias a la teología (Santucci, 1997).

Para encontrar los «secretos del arte» y más aún la perfección en la construcción de las figuras en las obras de arte, se acudía indudablemente a la geometría, como lo afirma Alberti en su tratado *Della pittura*:

Me agradaría que el pintor fuera tan hábil como fuera posible en todas las artes liberales, pero ante todo yo deseo que sepa de geometría. Me agradan las máximas de Pamphilos, el antiguo y virtuoso pintor de quien los jóvenes de la nobleza comenzaron a aprender a pintar. Él enseñaba que ningún pintor podría pintar bien si no sabía mucho de geometría. Nuestra instrucción en la que todo el arte de la pintura absolutamente perfecto se explica, será fácilmente comprendida por un geómetra, pero quien es un ignorante de la geometría no entenderá éstas o cualesquiera otras reglas de la pintura. Por lo tanto, aseguró que es necesario que el pintor aprenda geometría. (Alberti, trad. en 1998, p. 116)

Leonardo da Vinci (trad. en 2007) en el *Parangón* decía que “la pintura que es primero en la mente de su fabulador, no puede alcanzar su perfección sin la operación manual” (p. 36); este es uno de sus fundamentos para considerar la pintura como una ciencia. Pero para ir más allá de la experiencia afirmaba que “Ninguna humana investigación puede ser denominada ciencia si antes no pasa por demostraciones matemáticas” (Da Vinci, trad. en 2007, p. 32), ya que todo saber que

no se derive de la naturaleza a través de la experiencia sensible es nulo y falaz; es decir, a partir de la experiencia la naturaleza se acerca y actúa mediante leyes matemáticas. Los pintores, arquitectos y escultores de la experiencia de su arte debían dar soluciones prácticas y reales a su oficio; por lo que, científicos, humanistas y eruditos comienzan a reconocer intereses comunes con los artistas y a evaluar que los diferentes gremios necesitaban unos de otros. Así, “los científicos se percataron de que los artesanos estaban descubriendo hechos de la naturaleza que una teoría correcta debía explicar, y que podían encontrar en el trabajo de los artesanos prometedoras sugerencias para su investigación” (Kline, 1992, p. 308). En otras palabras, los artesanos consolidaban la práctica de su teoría fundamentando su quehacer artístico en el conocimiento matemático de los griegos.

1.2.1. El cristianismo y la geometría

La Iglesia, cuyo postulado principal era que «el mundo había sido creado directamente por Dios», predicó que los fundamentos y fines propios del cristianismo debían seguir los valores y modos de vida ligados a la espiritualidad y a la verdad defendida y establecida por las Escrituras. La preocupación más importante de la Iglesia era preparar el alma para una «vida futura», es decir, la salvación. Para ello, se debía disponer al alma mediante el aprendizaje de doctrinas morales y espirituales. Con el fin de dominar el pensamiento y generar un constante miedo al infierno. Pues toda práctica distinta e impuesta por la Iglesia se consideraba pecado o una herejía que ofendía la Divinidad y Omnipotencia de Dios y se alejaba de la vida eterna.

Las Escrituras albergaban todo el conocimiento en los diferentes campos de estudio, nada fuera de ella se podía concebir en el hombre. La Iglesia, justificándose en las palabras de Jesucristo: “Yo soy el Camino, la Verdad y la Vida” Juan (14: 6), no concebía otra verdad que la contenida en la doctrina cristiana. Todo conocimiento científico resurge y es verdadero en la medida que la Iglesia pueda controlar y analizar los contenidos y establecer qué tan cerca está a los fundamentos teológicos. Y si el nuevo conocimiento no es conforme al orden que Dios estableció en la naturaleza, a sus leyes naturales, no se toma en cuenta y es refutado por los representantes del clero.

Para San Agustín, en palabras de Miranda “la ciencia y todo el conocimiento está impregnado de una atmósfera religiosa. Por eso, su pensamiento está indisolublemente ligado a lo teológico y filosófico, la ciencia se encuentra subordinada a la religión” (2015, p. 10). La ciencia, es aceptada por la Iglesia con escepticismo; en una continua observación de los conocimientos o

investigaciones que no puedan alterar o dañar el espíritu del hombre y el orden de la sociedad, por ejemplo, las matemáticas estaban al servicio del clero, con el fin de utilizarlas en la vida práctica¹⁴; por ello apoyaban estudios e investigaciones sobre los trabajos de los griegos, realizadas por eruditos, príncipes y frailes; en la Edad Media el progreso de las matemáticas fue lento y sometido a la rigidez del pensamiento cristiano.

La contemplación de la naturaleza, la libertad de expresión e investigación, el deseo de fama, gloria y prestigio, son algunos de los rasgos que caracterizan al «nuevo hombre». Un hombre que no mira solamente en Dios el principio y el fin de todas las cosas; por el contrario, encontraría en la observación de la naturaleza y en la razón humana nuevos paradigmas. Los humanistas se encargaron de ir formando al hombre en distintos campos de las ciencias, a través de manuscritos antiguos y medievales. En las matemáticas, por ejemplo, se estudian especialmente las obras platónicas y pitagóricas, que consideraban el número como la esencia de la realidad. Estas obras suscitan al estudio del universo y de la naturaleza a través de leyes matemáticas, y donde todas las cosas en el mundo tendrían medida, número y peso. Las matemáticas ofrecían a los intelectuales del Renacimiento bases firmes y nuevas para edificar el conocimiento, pues era el único cuerpo de verdades aceptado en medio de creencias teológicas y filosóficas cambiantes. La Iglesia ante la influencia de nuevos movimientos revolucionarios y con la clara intención de continuar ejerciendo su poder y doctrina, dotó de un sentido religioso al científico. La naturaleza era el tema principal de estudio y se consideraba dotada de una armonía que Dios imprimió sobre ella (Kline, 1992).

La inspiración que recibían hombres y mujeres según la Iglesia, era proveniente de Dios y de su plan perfecto. La continua influencia y control era ejercido por la Iglesia en todos los aspectos humanos, como lo expresa Antal (1960):

... en las enciclopedias y en las *Summae*, pintura y escultura no aparecen entre las siete artes liberales, que la Iglesia consideraba las más altas disciplinas espirituales, se basaban en el conocimiento y disponían de bases teóricas. Normalmente no se citan ni siquiera entre las siete artes mecánicas, basadas en la práctica y en la habilidad; desde el punto de vista

¹⁴ Para la iglesia los nuevos descubrimientos e investigaciones eran aceptadas en la medida que cumplían un fin práctico y útil en la vida cotidiana, por ejemplo, el uso y la creación de los calendarios, en cuya realización se unen sacerdotes y astrónomos para establecer las celebraciones litúrgicas como la Pascua. No obstante, los profesores universitarios también encontraron aspectos prácticos de la geometría en la geodesia, cartografía, óptica y perspectiva, astronomía y astrología, balística, arquitectura y construcción de fortalezas (Scriba y Schreiber, 2015).

de la Iglesia, no eran más que una labor artesana desarrollada por gente servil, inferior. (p. 387)

El dominio y poder que tenía la Iglesia no se refleja únicamente en las ciencias sino en todos los espacios culturales, políticos y sociales del pueblo. El Renacimiento como etapa importante de cambio en el pensamiento del hombre, involucró a los gremios conformados por artesanos que a través de su arte dotó de estética y nuevos significados a sus obras. Los artesanos buscaban el reconocimiento y la dignificación de su hacer para llegar a ser ilustres ciudadanos. Pero la Iglesia no permitiría que los nuevos cambios que movían a la sociedad afectarían su doctrina. Para tal efecto, los teólogos se ocuparían de alimentar la conciencia del artista con un espíritu de piedad, caridad y, sobre todo, al servicio del prójimo; una fe que los lleve a considerar la Iglesia como la casa del pueblo que decoran con hermosas vidrieras, pinturas y esculturas (Galino, 1962b). Las creaciones artísticas también encontrarían su razón de ser dentro y para la Iglesia, como se manifiesta en la segunda carta a Timoteo (3: 16): “Toda Escritura es inspirada por Dios y útil para enseñar, para argüir, para corregir y para educar en la justicia” y a través del arte se podía reflejar la realidad y perfección Divina de las cosas, manifestadas por el Espíritu Santo al pensamiento, corazón y manos del hombre.

1.2.2. La geometría de taller¹⁵

El artesano, como se consideraba al pintor, arquitecto o escultor de origen humilde, es el encargado de ennoblecer las artes a partir de la investigación y la experiencia de su arte. Su educación es recibida en casa o en escuelas monásticas y conventuales, donde aprenden los elementos básicos en escritura, lectura y aritmética. Quienes tenían o presentaban cierta habilidad en las artes con el deseo de dedicarse a ellas ingresaban desde muy niños a un taller.

Los talleres en la Edad Media conformados por dos estamentos fundamentales: los *aprendices* y los *maestros*; adquieren un grado intermedio, el de los *oficiales*. Así en los diferentes gremios se encuentran los que se instruyen, los que sirven y los que enseñan y mandan. El aprendiz era un joven varón con una edad entre 12 y 14 años, recibían una formación del maestro y a la vez

¹⁵ El taller es el espacio en el que se realiza un trabajo manual o de tipo artesanal. Históricamente clasificados en el contexto de los oficios mecánicos, y en menor grado a las artes liberales, han evolucionado en su tipología hacia muy diferentes y diversas formas, desde el primitivo taller gremial hasta los modernos talleres intelectuales paralelos a las escuelas o seminarios de ciencias y arte. En los talleres renacentistas en Europa confluían en un mismo lugar arquitectos, ingenieros, pintores, canteros, carpinteros, entre otros; es el espacio de trabajo y producción, en el que se conserva una estructura del maestro, aprendices o discípulos, y colaboradores.

se convertían en mano de obra barata de las obras principales de estos. Los padres o tutores de los futuros aprendices solían dejar la patria potestad¹⁶ al maestro para que lo educara y revelará progresivamente los secretos profesionales en el oficio. La formación del aprendiz no era puramente laboral, también se fomentaban cualidades humanas que han de presidir y orientar su crecimiento en el taller durante el trabajo y en espacios cotidianos (Galino, 1962a).

El maestro considerado como un artesano independiente que tiene y dirige un taller se encarga: de la formación y enseñanza de los aprendices en el oficio; emplear a los oficiales quienes colaboraban con el maestro en los fondos de las representaciones pictóricas en las partes menos importantes de las obras, ya que habían superado con éxito su periodo de aprendizaje y podían establecer un contrato de trabajo con el maestro. El maestro también podía comercializar las obras elaboradas en su taller (Escobar, 2019).

El mundo del artesano fiel a su vocación medieval estaba regulado por las reglamentaciones internas de los gremios y al trabajo en los talleres; de igual manera tenían contratos con fuertes exigencias y sanciones, por lo que el artista no contaba con ninguna libertad; sin embargo, algunos artistas que mantenían un contacto directo con clientes como la iglesia y la nobleza lograban tener cierta autonomía, en virtud de la popularización y demanda de sus obras. El artista se debía plantear nuevas exigencias, como renovar su formación y desarrollar nuevas destrezas que le permitieran progresivamente ir mejorando su estatus social. Y el taller, como el lugar donde el saber nace de la experiencia y convivencia con otros estilos formativos, va consolidando al nuevo maestro en su hacer artístico e intelectual (Aguirre, 2009).

En el taller del Renacimiento el maestro “ya no es el artesano medieval, al servicio de la Iglesia y del Señor, sino un intelectual que alcanza gloria y prestigio, convirtiéndose en un ciudadano ilustre” (Cennini, 1988, p. 6), sus obras no buscaban solamente la utilidad o la necesidad de un encargo, sino la creación de un nuevo arte dotado de significado. Su trabajo no consistía en realizar de manera repetitiva una técnica; por el contrario, requería de la mente para ejecutar su obra y como lo afirman Da Vinci y Alberti; el primero expresa que: “todo lo que en el universo es, por esencia, presencia o ficción, será primero en la mente del pintor y después en sus manos” (trad. en 2007, p. 48). El segundo afirma que: “Incluso ahora se hace patente en la pintura la superioridad

¹⁶ El ingreso al taller también se daba en virtud de un contrato escrito o verbal, en el que se estipulaba bajo qué condiciones ingresa el aprendiz en su nuevo núcleo familiar, tales como el tiempo de aprendizaje, los compromisos y responsabilidades en su nuevo hogar y en el taller de formación.

de la mente sobre la mano” (1998, pp. 33-34). Varios humanistas compartían el hecho de mejorar el estatus del artista, ubicando su hacer artístico dentro de las artes. Pues necesitaban del pensamiento y fundamentalmente de las matemáticas para calcular las proporciones y la perspectiva que dotaran de emociones, realidad y, sobre todo, de belleza sus creaciones artísticas.

1.2.3. Los dibujos y algunas técnicas de la pintura

El dibujo cumplía una función muy importante en los talleres de pintura. Era empleado para enseñar a los aprendices a copiar una figura o formar parte de un archivo que facilitara el intercambio de ideas entre un taller y otro. El aprendiz se dedicaba a copiar las mejores cosas realizadas por los grandes maestros, permitiéndoles asimilar su estilo y su arte, y sacar algún provecho de ello; sin embargo, se debía copiar a un solo maestro, pues si se tendía a copiar de uno y de otro, el aprendiz no asimilaba el estilo de ninguno de ellos. Si persevera en uno de los estilos, dependía de él y con un poco de fantasía, concedida por la naturaleza, llegaba o no a desarrollar un estilo propio (Cennini, 1988).

La formación del artista cada vez era más exigente para la contratación de las grandes obras. El artista no solo intentaba superar a sus antecesores, sino a sí mismo. Y el dibujo hacía parte de su nueva formación y prestigio, que debía realizar muy detalladamente de todas las partes del proyecto. El dibujo consiste en señalar los contornos, en palabras de Alberti “en el dibujo solo se buscase la exactitud del contorno, en lo cual es preciso ejercitarse con infinita diligencia y cuidado, pues nunca se podrá alabar una composición ni una buena inteligencia de las luces si falta el dibujo” (trad. en 1827, p. 227). En el *Libro del arte* Cennino Cennini advierte también que “El fundamento del arte y el principio de todos estos trabajos manuales es el dibujo y el colorido” (trad. en 1988, p. 35). Para poder satisfacer las necesidades del mecenas e incluso de aquellos que contemplaban las obras artísticas en lugares públicos, los artistas debían cuidar minuciosamente los detalles de sus obras. El dibujo se convertía en una herramienta cada vez más útil en la preparación y posteriormente en la realización de la obra del artista.

Los dibujos se hacían con más frecuencia del natural, es decir, tomando modelos del mundo real como personas, animales, plantas, paisajes u objetos; reproducir aquellos modelos con una fidelidad asombrosa fue un trabajo especialmente de los artistas florentinos a lo largo del siglo XV. El dibujo en escala natural llevó al estudio minucioso de la forma de las plantas, la anatomía de los animales y del cuerpo humano, en este último caso los estudios sobre la piel, los huesos y

músculos servirían posteriormente de base en el campo de la medicina; así, los desnudos adquirieron progresivamente gran influencia dentro de los talleres. Para los artistas medievales el desnudo representa las almas de los condenados que se encontraban en el infierno. La Iglesia buscaba en las obras de arte temas simbólicos, etéreos y religiosos, no admitía un sentido contrario. Para los artistas del Renacimiento el desnudo representa la libertad de pensamiento en sus creaciones artísticas, donde a través de él podían integrar la mitología griega y los temas religiosos, obras paganas que daban paso a una creatividad inagotable, llena de simbolismos y alegorías que se convertían en un deleite y curiosidad para el espectador.

El artista renacentista en su perfección del dibujo buscaba el realismo de sus obras, con un excesivo detalle de las figuras humanas y el espacio en el que se encontraban. Por ejemplo, incorporar ventanas abiertas permitía imaginar un mundo exterior o que pasa más allá de la escena; la representación de los ángeles, hombres y mujeres con una personalidad propia capaces de expresar emociones por medio de los gestos y movimiento de su cuerpo. El estudio de la luz, la profundidad y la perspectiva aérea, son algunos de los detalles que desarrollaron los artistas con el fin de dar un realismo a sus obras. Gracias al dominio de la técnica del óleo fue posible ir perfeccionando el estilo, la técnica y la necesidad de nuevos estudios en el arte.

La técnica del óleo originaria de los Países Bajos, requería el uso de aceite de avellana o de linaza; distinta a la técnica del temple que mezcla los pigmentos con un aglutinante a base de grasas y huevo. Uno de los primeros en utilizar el óleo y dominarlo con maestría fue Jan van Eyck. El óleo ampliaba la gama de colores que podían utilizar los artistas, aumentaba su riqueza y su brillo, y les permitía realizar contrastes de luz y sombra. Si “los florentinos alcanzaron fama por sus dotes de dibujantes, los venecianos se hicieron célebres por sus colores y su dramatismo” (Johnson, 2001, p. 124).

El paso de la tabla al lienzo y la sustitución de la técnica tradicional del temple por el óleo, fue un proceso acelerado de las técnicas y los materiales y uno de los progresos de la pintura que obtuvieron los pintores renacentistas. Sin embargo, muchos maestros continuaban trabajando el fresco en grandes murales. La composición de las obras daba cuenta de una simetría y equilibrio que respondía a formas geométricas; los artistas usaron un nuevo sistema de representación visual, la perspectiva¹⁷, “Basada en información racional y sensorial controlada por las matemáticas, la

¹⁷ Muchos de los pintores del siglo XV tomaron y siguieron los estudios sobre la construcción de la perspectiva de León Babbista Alberti. En su tratado *Della pittura* refiere que las matemáticas se emplean para

construcción [de la perspectiva] le da al artista los medios para crear el espacio aparente en su pintura” (Alberti, trad. en 1998, p. 23). La perspectiva proporciona a las obras la profundidad de un espacio a través de líneas que convergen en un punto de fuga situado en el plano. El uso de la luz es distinto, ilumina a través de sombras; aparecen la neblina y el crepúsculo, las figuras se muestran más reales y con un aparente volumen que las dota de belleza y movimiento, ofreciéndole al espectador la posibilidad de entrar en la escena y sentirse parte de la obra.

1.3. Los inicios de la perspectiva¹⁸

Filippo Brunelleschi¹⁹ fue un arquitecto florentino del Renacimiento, uno de los primeros artistas en llevar a la práctica y descubrir los principios geométricos que rigen la perspectiva²⁰. Brunelleschi utilizó las reglas científicas y sus conocimientos en matemáticas para representar una realidad tridimensional sobre un plano bidimensional, otorgado por la superficie del cuadro. Este nuevo sistema de representación, la perspectiva, se fue perfeccionando y extendiendo entre los artistas italianos del siglo XV e hizo posible la fiel representación de la naturaleza y el desarrollo de la idea del espacio, como un elemento infinito, continuo y homogéneo. Fue un instrumento para llevar a cabo refinados engaños y crear en el espectador una ilusión de la realidad, esto fue posible gracias al método de la perspectiva (Santucci, 1997).

El artista renacentista buscaba demostrar la condición científica de su hacer, fundamentada en la aritmética y la geometría del *quadrivium*; cultivaba unos saberes científicos que le permitieran ir consolidando un nuevo sistema figurativo. La perspectiva, planteada por

construir y controlar el espacio que el hombre habrá de habitar como actor u observador, dado que el hombre, las matemáticas y la naturaleza hacen parte de un mismo todo. Y es la perspectiva la que le permite construir tales espacios (Alberti, trad. en 1998).

¹⁸ *Perspectiva* es una palabra del latín *perspicere* que significa «para ver a través de», en la Antigüedad clásica recibió el nombre de *οπτική*, «óptica» y en la Edad Media se conocerá como «prospectiva» o «perspectiva».

¹⁹ Filippo di Ser Brunellesco Lapi, conocido como Filippo Brunelleschi nació en 1377, fue un arquitecto, escultor y orfebre renacentista italiano. Conocido por su trabajo en la cúpula de la *Catedral de Florencia II Duomo*; sus profundos conocimientos matemáticos y su entusiasmo lo llevaron a la invención de la perspectiva cónica. Fue contemporáneo de León Battista Alberti, Ghiberti, Donatello y Masaccio.

²⁰ Los comentarios que realizó Antonio di Tuccio Manetti en *Vita di Filippo Brunelleschi* sobre la vida y obra del artista, es quizás la única evidencia que da cuenta de sus estudios y reflexiones. Manetti (1480), citado por Garriga (1983), comenta que Brunelleschi:

...proyectó y realizó él personalmente lo que hoy los pintores llaman perspectiva, porque forma parte de aquella ciencia que consiste efectivamente en situar con corrección y con razón las reducciones y aumentos con que aparecen a la vista humana las cosas desde lejos y desde cerca [...]; y fue él quien dio origen a la regla, que es lo más importante de todo lo que a este propósito se ha hecho de entonces para acá. (p. 172).

Filippo Brunelleschi utilizó dos tablillas pintadas para el estudio experimental de la perspectiva. Una representaba el Baptisterio de San Juan y la otra el Palacio de la Señoría. La técnica consistía en que todas las líneas del dibujo convergen en un mismo punto de fuga, creando una sensación de profundidad.

Brunelleschi y sistematizada por Alberti, empleaba las matemáticas para construir y controlar el espacio que el hombre habita como actor u observador. El artista se preocupaba de dotar a sus figuras de una entidad y volumen. Los tratados le servían al artista para su formación e ir perfeccionando su obra que constaba de dos partes: la teórica y la práctica a base de dibujos.

Uno de los tratados más importantes y difundidos durante el Renacimiento fue *Della pittura*²¹ de Alberti. En esta obra es la primera vez que el artista expone, de manera sistemática, las reglas de la perspectiva del pintor; allí da a conocer la teoría de la pintura fundamentada en la experiencia visual y en su representación geométrica. Alberti consideraba que en la pintura debe haber variedad y riqueza; las figuras obedecen a un orden tal que sus emociones se proyectan hacia el espectador. La pintura no debe impresionar por sus cualidades grandiosas o excepcionales sino por su *istoria*. Alberti consideró que el pintor debe ser capaz de utilizar los medios de construcción en perspectiva, para poder generar la unidad visual, temporal y espacial en la obra; con la luz, la sombra y el color el pintor se ayuda para lograr el volumen de las figuras y la realidad del espacio. El artista debe ser un hombre instruido para poder dominar estos factores y así su arte le recompensará por su trabajo, en placer, buena voluntad y fama (Alberti, trad. en 1998).

Artistas y teóricos como Masaccio, Paolo Uccello, Piero della Francesca y el matemático Luca Pacioli, estudiaron y escribieron tratados sobre la perspectiva. Siguiendo los pasos de Alberti, Leonardo da Vinci, fue un conocedor e investigador de las leyes de la perspectiva e influyente entre los artistas florentinos. Da Vinci buscaba darle a la pintura el rango de arte liberal; en su tratado de la pintura muestra, por medio de razonamientos, que la pintura se debe considerar como una ciencia que no es un arte que se basa solamente en la práctica, en sus palabras:

Aquellos que se enamoran de solo la práctica, sin cuidar de la exactitud, o por mejor decir, de la ciencia, son como el piloto que se embarca sin timón ni aguja; y así nunca sabrá a dónde va a parar. La práctica debe cimentarse sobre una buena teórica, a la cual sirve de

²¹ Es un documento de y para el arte de la Florencia del siglo XV, escrito por Leon Babbista Alberti en 1436 en latín —*De pictura*— y traducido por el mismo toscano. El tratado buscaba que el «nuevo arte» humanista fuera comprendido y deseado por muchos más artistas y por sus patrocinadores. Toma autores griegos y romanos para establecer precedentes y proponer nuevos planteamientos. Este tratado está estructurado sobre los medios objetivos y resultados del arte de Brunelleschi, Donatello y Masaccio. Los tres temas principales que se abordan son: su acercamiento a la realidad visible, *la più grassa Minerva*; el empleo de las matemáticas como un medio de control de la realidad, *la mathematica* y *la istoria*, que es el medio y el punto de vista de la pintura humanista. La *istoria* a la que se refiere Alberti en su tratado es la expresión de un «nuevo arte» humanista, que será capaz de incorporar los descubrimientos de los humanistas, de la literatura y de la teología. El contenido de la *istoria* se estructura alrededor de temas antiguos con gestos o actitudes humanas para retratar o proyectar las emociones de los actores (Alberti, trad. en 1998).

guía la Perspectiva; y el no entrando por esta puerta, nunca se podrá hacer cosa perfecta ni en la Pintura, ni en alguna otra profesión. (Da Vinci, 1827, p. 12)

La ciencia de la pintura, como es llamada por Da Vinci (trad. en 2007), comprende “todos los colores de la superficie y las figuras de los cuerpos que con ellos se revisten, y su proximidad y lejanía según proporción entre las diversas disminuciones y las diversas distancias. Esta ciencia es madre de la perspectiva” (p. 34). Para Da Vinci la perspectiva es hija de la pintura y el pintor es quien, por necesidad de su arte, ha dado esta ciencia. Esta ciencia tiene tres partes principales: la primera comprende la construcción lineal de los cuerpos —el dibujo²²—; la segunda, la difuminación de los colores y, la tercera, la confusión de contornos de los cuerpos vistos a varias distancias.

Los artistas —que adquirieron un papel relevante dentro de la ciencia con sus técnicas y estudios— crean un nuevo lenguaje artístico, producen textos teóricos basados en el análisis técnico y en la exposición de postulados de las diferentes concepciones artísticas. Los artistas buscaban nuevas vías que resaltaran las superficies pictóricas por medio de la luz y el color, con el fin de encontrar armonía de las partes con el todo, es decir, una correspondencia entre las figuras, los planos, el color, la luz y la profundidad, para realzar la belleza de las figuras dotándolas de expresiones y movimiento.

1.4. En busca de la belleza o de lo bello

La búsqueda de la belleza²³ ha sido un punto importante en el proceso de formación de los artistas. A lo largo de la historia se han aplicado a la belleza diferentes parámetros o cualidades que producen un placer proveniente de manifestaciones ideales o sensoriales. Para los griegos dos formas de percepción de la belleza eran el sonido y la visión; puesto que los demás sentidos no pueden expresar una medida y orden numérico. Pitágoras sostiene que el número es el principio de todas las cosas, por ello los pitagóricos buscan en el número reglas que acoten la realidad,

²² Leonardo da Vinci manifiesta que la primera intención del pintor es hacer que una simple superficie plana sea un cuerpo relevado, fuera de ella; esta se consigue con las sombras y las luces, es decir, con lo claro y lo oscuro. Por lo tanto, quien huya de la sombra huye igualmente de la gloria del arte. Del dibujo nace otra ciencia que comprende la sombra y la luz (Da Vinci, 1827).

²³ Las palabras *belleza* y *bello* tienen el mismo origen, pero una se utiliza para significar la cualidad abstracta y la otra para referirse a un adjetivo. Los griegos utilizaron el adjetivo *το καλόν* para referirse a lo bello y *καλλος* con fines abstractos. De igual manera, los romanos utilizaron el adjetivo *pulchrum* (*pulchritudo* como belleza), palabra que se mantuvo durante toda la época antigua y la Edad Media. En el Renacimiento se sustituyó por la palabra *bellum*, que en un principio solo se refería a mujeres y niños, pero luego se designó para todo tipo de belleza (Tatarkiewicz, 1997).

proporcionándole un orden y armonía²⁴. En este sentido, el arte griego y romano se basaba en la simetría y la proporción, que se hallan en primer lugar en los números. Así, la proporción y el orden en las cosas son elementos que posteriormente filósofos y artistas continuarán indagando en la elaboración y estudio de sus obras; también incluirán la virtud junto al bien y la verdad como principios para encontrar y definir lo que es la belleza. La idea de belleza como unidad, número, proporción y orden, encajaba justamente en la expresión del arte de finales de la Edad Media y posteriormente en el Renacimiento se continuará insistiendo en el concepto de bien, añadiendo una estética de la luz y el color.

En este sentido, algunas posiciones como las de Platón y Aristóteles fueron, sin lugar a dudas, referentes importantes en la concepción de la belleza durante la época del Renacimiento. Por ello se justifica aquí una descripción de la postura y definición de la noción de belleza en estos filósofos.

1.4.1. Lo bello en Platón

En la filosofía de Platón²⁵ se concibe dos mundos: el mundo sensible y el mundo de las ideas; el mundo sensible está conformado por el conjunto de cosas perceptibles por los sentidos, cuyas propiedades son cambiantes, imperfectas y perecederas. El mundo de las ideas es aprehensible por la razón o el intelecto y representa la realidad como independiente de las cosas sensibles; las ideas son perfectas, eternas e inmutables. Platón considera el Bien como la idea que se encuentra en el nivel más alto, aquella que ilumina a las demás, es el principio de todas las demás ideas. Representa lo bueno, lo perfecto, lo real y la verdad de las cosas.

Platón intenta dar un concepto de belleza y explicar su esencia de diferentes maneras. En el diálogo *Hipias Mayor* se plantea el problema de lo bello; el sofista Hipias pregunta a Sócrates “¿De dónde sabes tú, Sócrates, qué cosas son bellas y qué otras son feas? Vamos, ¿podrías tú decir qué es lo bello?” (Platón, trad. en 1985, p. 411). A pesar del gran esfuerzo y discusión entre los

²⁴ Para los pitagóricos la base objetiva que constituye la belleza es la armonía, proporción y número; pues la armonía se deriva del orden, el orden de la proporción, la proporción de la medida y la medida del número; afirmaban, además, que «el orden y la proporción son bellos y útiles, mientras que el desorden y la falta de proporción son feos e inútiles». Consideraban que la belleza no es una invención del hombre, sino que se descubre en el universo (Tatarkiewicz, 1997).

²⁵ Platón nació hacia el año 427 a. C. en Atenas, fue un filósofo griego seguidor de Sócrates y maestro de Aristóteles. Fundó la Academia de Atenas en el año 387 a. C. Escribió sus obras, mayoritariamente en forma de diálogo, sobre temas, tales como: filosofía política, ética, psicología, antropología filosófica, epistemología, gnoseología, metafísica, cosmogonía, cosmología, filosofía del lenguaje y filosofía de la educación y desarrolló sus doctrinas filosóficas mediante mitos y alegorías.

interlocutores no se llega a ninguna conclusión; el sofista no logra satisfacer las exigencias de Sócrates y por ello no se sabe qué es lo bello, qué es realmente la belleza en sí. A lo largo del discurso se presentan algunas concepciones particulares de lo bello, por ejemplo, la belleza se parece a una doncella, al oro, al ser afortunado, lo adecuado, lo útil, lo provechoso; es aquello que proporciona placer por medio del oído y de la vista; finalmente se concluye que «lo bello es difícil». A Sócrates no le interesa qué es bello, ni tampoco realizar una lista de cosas bellas ni comparar cuáles son más bellas o feas; sino qué es lo bello, definir lo bello como un atributo universal que explique la belleza, aquello que es común a todo lo que llamamos bello. En dirección contraria, Hippias quiere encontrar algo que es más bello sobre todas las cosas y no la esencia de la belleza; relaciona lo bello con lo físico, la juventud, el placer producido en las cualidades sensibles, entre otras.

Platón muestra en otros diálogos que lo bello se rige por cualidades inteligibles; la belleza está en el pensamiento y este se rige por lo que es justo, es decir, la belleza también se encuentra en la justicia y la prudencia, en las buenas costumbres, en la ciencia, en la virtud y en el alma. Para Platón, en el *Banquete*, la belleza y el bien son sinónimos pues el bien es la perfección misma, así, lo bello es uno de sus atributos. Se niega la validez de los sentidos a la hora de conocer el verdadero conocimiento; la belleza no es la perfección del cuerpo sino la perfección de la idea. Por ello es más valiosa la belleza del alma que la del cuerpo, “de suerte que, si alguien es virtuoso de alma, aunque tenga un escaso esplendor, séale suficiente para amarle, cuidarle, engendrar y buscar razonamientos tales que hagan mejores a los jóvenes” (Platón, trad. en 1988, p. 262). La belleza se contempla en las normas y leyes de conducta, haciendo de la belleza del cuerpo algo insignificante. Platón considera que la virtud, el bien y la verdad son elementos que conforman la belleza y se realizan en la actividad del alma y no del cuerpo. Así, en el diálogo del *Banquete* tampoco se tiene una definición de lo bello en sí mismo, la reflexión gira en torno a la idea de belleza (Pañuela, 2007).

1.4.2. El concepto de lo bello en Aristóteles

El concepto de belleza en Aristóteles²⁶ se encuentra en el libro la *Retórica* y expresa: “Es bello lo que, siendo preferible por sí mismo, resulta digno de elogio; o lo que, siendo bueno, resulta

²⁶ Aristóteles (384 a. C. - 322 a. C.) fue un filósofo, polímata y científico nacido en la ciudad de Estagira. Escribió cerca de 200 obras, de las cuales solo se conservan 31 en el *Corpus Aristotelicum* sobre temas tales como:

placentero en cuanto que es bueno” (Aristoteles, 1999, p. 241). Lo bello es aquello que es agradable por el hecho de ser bueno y valioso en sí, debe ser preferible por sí mismo y digno de alabanza. Así, la belleza para Aristóteles tiene que ser apreciada por sí misma y no por la utilidad que tenga o el resultado que pueda ofrecer. Aristóteles no habla de la experiencia o de la forma de la belleza, sino del valor y del placer.

Aristóteles considera la belleza como algo que está dentro de la esencia²⁷ de las cosas, pero se manifiesta en la realidad sensible, es decir, toma en cuenta al mundo sensible y lo considera como expresión de la esencia. A partir de ello, la belleza será una forma de manifestación corpórea, considerada como un elemento trascendental de todo ente, que es captada por la sensibilidad y llevada al intelecto: «nada hay en el intelecto que no haya entrado por los sentidos». Las formas principales de la belleza son: la simetría, el orden y la delimitación (Monar, 2009).

En la *Poética* (trad. en 2011) Aristóteles señala que «la belleza depende del tamaño y del orden», en la *Metafísica* añade un tercer valor, la delimitación: “las principales especies de lo Bello son el orden, la simetría y la delimitación, que se enseñan sobre todo en las ciencias matemáticas” (trad. en 2015, p. 130); para Aristóteles la belleza reside en el orden, el tamaño y la delimitación (o proporción). El concepto de belleza, basado en el orden y la proporción, son términos semejantes a la concepción pitagórica; sin embargo, Aristóteles añade la conveniencia a la doctrina de la proporción, pues creía que la proporción hace las cosas bellas porque se ajusta a la naturaleza y al fin de las cosas. La idea de tamaño o dimensión para Aristóteles se concibe como la medida apropiada para cada objeto; la belleza depende de la dimensión relativa, pero también de su dimensión absoluta, por ejemplo, los hombres de poca estatura pueden ser agraciados mas no bellos; destaca que: “un ser vivo no puede ser bello si es muy pequeño (pues la visión se vuelve confusa cuando su duración se aproxima a la de un instante imperceptible)” o si es excesivamente grande “pues a la visión no se da al mismo tiempo, sino que los que observan pierden de vista la unidad y la totalidad” (Aristoteles, trad. en 2011, p. 48). Pues los objetos grandes o pequeños no

lógica, metafísica, filosofía de la ciencia, ética, filosofía política, estética, retórica, física, astronomía y biología. Aristóteles formuló la teoría de la generación espontánea, el principio de no contradicción y las nociones de categoría, sustancia, acto, potencia y primer motor inmóvil, entre otras. Influyó en el pensamiento islámico como también en la escolástica cristiana.

²⁷ Aristóteles distingue cuatro causas, considerando la primera de ellas la esencia, como la forma propia de cada cosa, en el primer libro de la *Metafísica*, Aristóteles (2015) describe:

La primera es la esencia, la forma propia de cada cosa, porque lo que hace que una cosa sea, está toda entera en la noción de aquello que ella es; y la razón de ser primera es, por tanto, una causa y un principio. La segunda es la materia, el sujeto; la tercera el principio del movimiento; la cuarta, que corresponde a la precedente, es la causa final de las otras, el bien, porque el bien es el fin de toda producción. (p. 4)

están condicionados por las cualidades del objeto mismo, sino por la visión y percepción, ya que cada cosa u obra, para que guste, debe ser apropiada a la capacidad de la imaginación y de la memoria (Tatarkiewicz, 1991).

Esta concepción de Aristóteles tuvo una gran incidencia y adaptación de sus tesis en la filosofía de santo Tomás de Aquino; su comentario sobre las obras de Aristóteles señalaba que eran compatibles con la fe católica. También recibió influencia del platonismo de Agustín de Hipona. Las obras de santo Tomás fueron una de las fuentes más citadas en el estudio de la filosofía y teología a lo largo del siglo XIII y, posteriormente, su pensamiento se retomaría en diferentes espacios religiosos, académicos y culturales.

1.4.3. Los principios de la belleza en santo Tomás de Aquino

La concepción del arte dentro de la Iglesia no tenía un lugar para los primeros cristianos; sin embargo, para el siglo XIII, con el racionalismo de santo Tomás²⁸, el arte²⁹ fue tomando ciertos aspectos dentro de la mística y la fe que buscaba aniquilar dentro del hombre la vida sensible y sensual, es decir, debe morir el placer producido por lo bello y por la seducción que hay en la naturaleza. El propósito de la fe consistía en aniquilar en el hombre las cualidades físicas y en exigir la muerte de su cuerpo. Santo Tomás consideraba que todo placer sensible se reduce a un placer intelectual, “Es propio de lo humano que llegue a lo inteligible por lo sensible, puesto que nuestro conocer empieza por los sentidos” (Aquino, 2001, p. 98). Todo conocimiento se dirige a las formas de las cosas y no a su contenido. La forma proporciona un conocimiento adecuado del

²⁸ Tomás de Aquino nació en 1224 en el castillo de Roccasecca, cerca de Aquino, fue un fraile perteneciente a la Orden de Predicadores, teólogo y filósofo católico, es considerado el principal representante de la enseñanza escolástica y de la teología sistemática. Aceptó y comparó las obras de Aristóteles con la fe católica. También, recibió influencias del platonismo de Agustín de Hipona, y del aristotelismo de Averroes y de Maimónides. Su obra más conocida es la *Summa theologiae*, un compendio de la doctrina católica que comprende 495 cuestiones divididas en artículos. Fue canonizado en 1323 y declarado Doctor de la Iglesia en 1567 y santo patrón de las universidades y centros de estudio católicos en 1880.

²⁹ Para Santo Tomás (2001) el arte:

no es otra cosa que la recta razón de algunas obras que se han de hacer, cuya bondad, sin embargo, no consiste en que el apetito humano se haya de un modo determinado, sino en que la misma obra que se hace sea buena en sí misma; pues a un artífice, en cuanto artífice, no se le alaba por la voluntad con que realiza la obra, sino por la cualidad de la obra que realiza. (p. 438)

El arte es guiado por la prudencia y tiene como fin la perfección de la obra, que corresponde a la felicidad del individuo, ya que no es importante que el artista opere bien al trabajar, sino que cree una obra que opere bien. Lo realmente importante de las obras de arte es la utilidad y su participación en las necesidades del hombre. Pues las obras nacen del conocimiento y no del esfuerzo del artista (Galicia, 2001).

objeto ya que procede de Dios. Así, lo que constituye la belleza no es la apariencia sensible de las cosas sino la forma inherente a ellas (Galicia, 2001).

Santo Tomás de Aquino en su libro *Suma teológica* afirma que lo bello es lo que agrada a la vista, pues va referido al entendimiento; de ahí que “lo bello consista en una adecuada proporción porque el sentido se deleita en las cosas bien proporcionadas como semejantes a sí, ya que el sentido, como facultad cognoscitiva, es un cierto entendimiento” (Aquino, 2001, p. 131). La belleza está en las cosas cuya contemplación se percibe y complace por medio de la vista, siendo el sentido más perfecto que sustituye al lenguaje del resto de los sentidos. Para santo Tomas, la belleza requiere tres principios: el primero la *integritas* o perfección, porque no puede ser bello aquello que es inadecuado. El segundo es la *consonantia* o proporción adecuada; es la debida armonía y relación entre las partes del objeto, como también la conexión entre la obra y quien la percibe. Por último, la nitidez, la luz o *claritas* significa que las cualidades del objeto deben ser dispuestas por la razón, pues la luz es el esplendor del conocimiento. Las tres características son intelectuales y debe existir una conexión entre ellas. Todas estas ideas se manifestaban en el arte a finales de la Edad Media, insistiendo en el concepto de bien y la luz como reflejo divino. La preocupación de lo bello es ver la belleza de Dios.

Las ideas y concepciones platónicas y aristotélicas se ven reflejadas en épocas diversas y según la conveniencia del hombre y la sociedad; por ejemplo, la Iglesia consideraba que los planteamientos de Aristóteles eran una fuente de herejía, pero algunos filósofos del siglo XIII, como Alberto Magno y Tomás de Aquino, elaboraron su *Summa* basándose en los principios aristotélicos, para que el cristianismo se asentara sobre unas bases sólidas tanto de la razón como de la fe.

Los artistas del Renacimiento también intentaron por medio de sus tratados, experiencias y formación, reconocer y explicar la belleza. Inspirados en los clásicos «la belleza es el acuerdo y armonía de las partes» y como lo señala Alberti “hay que tener cuidado de que todos los miembros son los adecuados. Lo son cuando sus dimensiones, su función, su clase, su color y otras cosas similares corresponden a un patrón de belleza” (trad. en 1998, p. 93). La belleza de una obra de arte depende de las proporciones adecuadas, de la armonía de las partes y de la correcta medida; pero sobre todo debe instruirse, “siempre esforzarse por ser dedicados y estudiosos para comprender y expresar la mayor belleza” (Alberti, trad. en 1998, p. 121).

Igualmente, Da Vinci en su tratado de la pintura no se desliga de las concepciones clásicas; si los sofistas de Atenas consideraban que la belleza es lo que resulta agradable a la vista o al oído, es en *El Paragón* donde Da Vinci enaltece el sentido de la vista, ya que el ojo es el único capaz de abarcar la belleza del mundo³⁰. Los pensadores del Renacimiento limitaban el concepto de belleza para adecuarlo únicamente a las necesidades de las artes visuales. Pero también dotaron a la belleza de reglas, propiedades, emociones, ciencia, entre otras, con el único propósito de alcanzar y ver la perfección de sus obras.

La persistencia de ciertos hombres en comprender el origen y las normas de una tradición, les permitió enfrentar una nueva visión y forma del mundo, que da lugar al cambio de estilos, al despliegue de otras posibilidades en los diferentes ámbitos de la vida y la sociedad. Todos los pueblos de Europa participaban de una evolución y un curso histórico a su propio ritmo. Francia, Inglaterra, España, Alemania, estos y otros países se preocupaban por restaurar y mantener las organizaciones políticas y la continuidad de dinastías, lo que impulsaba a fortalecer las relaciones entre los países europeos. La población en los diferentes países se encontraba en un continuo cambio cultural, social, político y económico que conlleva a grandes creaciones como pérdidas.

En Alemania, por ejemplo, se había dado una mayor difusión de la cultura y el desarrollo en el siglo XV con la imprenta, la enseñanza laica en universidades, la incapacidad de la Iglesia para ofrecer paz y consuelo a sus fieles, a merced de príncipes y doctrinas que solo buscaban el dominio y la riqueza. Estos y otros aspectos de índole político social, religioso y económico al que se enfrentan los pueblos, conllevan a un descontento generalizado que se manifiesta en guerras, protestas, pero también en la expresión de las artes.

El movimiento artístico y cultural cuya influencia y centro específico es Italia, marca una personalidad propia en los distintos Estados europeos, es decir, un arte y un pensamiento con desarrollos desiguales e inevitables tensiones presentan una coherencia y lógica interna, pero con la certeza de que la belleza es el camino al triunfo individual que da la grandeza o la tragedia al hombre renacentista.

³⁰ Da Vinci (trad. en 2007) afirma:

El ojo es el señor de la astrología; él crea la cosmografía; él todas las humanas artes guía y endereza; él es príncipe de las matemáticas y sus ciencias son acertadísimas; ha medido las distancias y magnitudes de las estrellas; ha descubierto los elementos y sus posiciones; él ha engendrado la arquitectura, la perspectiva y la divina pintura. ¡Oh, excelentísimo entre todas las restantes cosas creadas por Dios! ¿Qué alabanzas podrían dar la medida de tu nobleza? ¿Qué pueblos, qué lenguas podrían describir con tino tu verdadera operación? Él es ventana del cuerpo humano, que a su través refleja la belleza del mundo y en ella se goza; por él el alma se contenta de su humana prisión, que sin él sería tormento. (p. 65)

La evolución artística y, en general, en los diferentes campos de la vida de Durero, puede verse y entenderse en conexión con la evolución artística europea, en donde las creencias de la época, las emociones manifestadas y formación técnica le dieron al artista un nuevo contenido y con él una nueva forma a su obra. El periodo del Renacimiento es un elemento referencial para el desarrollo profesional, social, cultural e intelectual de Alberto Durero, presentado en el siguiente capítulo.

Capítulo 2.

Alberto Durero un nuevo Apelles³¹

¿La belleza? No sé qué es ... Todo depende de muchas cosas...

Alberto Durero

En la historia del arte se reconocen ciertos estilos que están marcados por el lugar y el periodo donde destacan sus principales características y desarrollo, por ejemplo, el estilo gótico fue creación de Francia, el renacentista y el barroco tuvieron origen en Italia y se perfeccionó con los aportes de los Países Bajos, el romanticismo es fundamentalmente inglés, etc. Pero Alemania no ha dado a conocer ningún estilo que se reconozca dentro de la historia del arte. Aunque los alemanes se han destacado en la vida política, económica y militar, se han inclinado por un individualismo en la religión, en el pensamiento metafísico y, sobre todo, en el arte; en este último, Alemania produce tipos iconográficos específicos y obras de arte no como un estilo universal sino como creaciones personales. En el siglo XV Alemania alcanzó la categoría de gran potencia en la esfera artística, gracias a la imprenta, el grabado y la xilografía, donde algunos hombres se dieron la oportunidad de propagar y confrontar sus ideas por todo el mundo (Panofsky, 1982).

Alberto Durero³² fue uno de estos hombres, famoso como pintor, aunque reconocido internacionalmente en calidad de grabador, instauró un nuevo canon de perfección artística en la pintura, escultura y arquitectura, también se dedicó al estudio de las matemáticas. Durero estaba convencido que en este campo su hacer artístico encontraría un fundamento, la perfección y belleza de sus obras.

Durero conserva una profunda religiosidad, arraigada aún en el medioevo, pero con la conciencia de que la creación divina se ha transformado en la naturaleza. Sin embargo, para Durero no es fácil enfrentar sus concepciones artísticas, al nuevo espíritu del arte y como él lo denomina «la nueva belleza», cuyo fundamento, estilo y técnica se encuentran en los artistas italianos. Los pintores italianos pueden desarrollar y expresar su arte libremente con medida y una seguridad

³¹ Konrad Celtis antes de 1500 “denominó” a Alberto Durero como un «alter Apelles» (otro o un segundo Apelles). Erasmo de Rotterdam, el “erudito”, alabó en 1526 a Durero como «Apelles de las líneas negras». Apelles fue uno de los más afamados pintores de la Edad Antigua. Nació en Colofón, en el año 352 a. C.; y falleció en el 308 a. C. Sus obras, estilo y técnica se conocen a través de descripciones literarias que sirvieron como estudio e inspiración a los artistas del Renacimiento.

³² Albrecht Dürer, en alemán.

estilística, que Durero está descubriendo y convencido de que más allá de los Alpes se conocen ciertas reglas de la belleza que son calculables con la regla y el compás.

Humanistas y artistas italianos, durante el Renacimiento, tratan de ir consolidando y ubicando dentro de las artes liberales a la pintura, por medio de la nueva concepción del arte. La nueva concepción del arte llevó a Durero a sentirse como un artista y con la misma dignidad y derechos que los eruditos. Durero procura introducir en sus obras los conocimientos adquiridos en Italia e ir documentando en una prosa alemana. Así, artista se ha vuelto pensador e investigador y, en Alemania, el primer teórico del arte.

En el presente capítulo se toman los libros de Erwin Panofsky³³ y Norbert Wolf³⁴, historiadores del arte que estudiaron minuciosamente la vida y arte de Alberto Durero. El presente texto es un resumen de los hechos más importantes y significativos en la vida y obra del artista, grabador, pintor, teórico y escritor. Su producción artística comprende retablos, retratos, autorretratos, acuarelas y libros. Estas obras son composiciones densas y muy detalladas, que dejan ver una evolución conceptual, emocional y espiritual en sus obras; que son inspiradas en ideas de maestros y artistas contemporáneos con un estilo propio, natural e influyente, para la Alemania del Renacimiento.

2.1. La formación y la vida de Durero

Albrecht Dürer nació el 21 de mayo de 1471 en Núremberg, Alemania, asistió a una escuela sencilla donde aprendió a leer, escribir, y las reglas de la aritmética. A los 13 años ingresó al taller de orfebrería de su padre, quien le enseñó la técnica de grabar³⁵ con el buril sobre el metal. Durero

³³ Erwin Panofsky nació en Hannover, Alemania, en 1892 y murió en 1968 en Princeton, Nueva Jersey, fue un historiador, crítico y ensayista del arte. Dirigió sus investigaciones en un nuevo método sobre iconología (*Studies in Iconology: Humanistic Themes in the Art of the Renaissance*, 1939), donde concibe la Historia del Arte como ciencia de la interpretación. También realizó monografías sobre Durero, Tiziano, los artistas flamencos, entre otros.

³⁴ Norbert Wolf nació en 1949 en Ratisbona, Alemania, se graduó en historia del arte, lingüística y estudios medievales en las Universidades de Ratisbona y Múnich.

³⁵ El grabado es una técnica de reproducción de la imagen artística, en la que se dibuja una imagen sobre una superficie rígida de madera o metal denominada matriz; con un instrumento punzante o mediante procesos químicos se deja una marca donde se deposita la tinta; luego se transfiere por presión a otra superficie como papel o tela, lo que permite obtener múltiples reproducciones de las estampas. Hay diferentes técnicas de grabado y cada una de ellas tiene sus propias características como por ejemplo, el material para trabajar las planchas, los instrumentos para realizar los dibujos, la forma de entintar y por último la impresión.

La técnica de grabado más antigua es la xilografía en la que los grabados se realizaban en madera y se talla la matriz con una gubia; se entinta la superficie con un rodillo y se imprime aplicando presión a la matriz sobre el papel mediante una prensa o manualmente. Luego se dio paso a matrices de cobre o aluminio, la calcografía, donde el dibujo se puede realizar de dos maneras: la primera son las técnicas directas que utilizan herramientas como, por ejemplo, la punta seca, el buril, el bruñidor, entre otros. Y la segunda son técnicas indirectas como el aguafuerte,

alcanzó una destreza sin igual en la precisión y exactitud de los detalles que grababa sobre el metal; sin embargo, no sería la orfebrería lo que convertiría a Durero en uno de los artistas más importantes e influyentes del siglo XV en Alemania sino la pintura, como lo expresa él mismo: «Mi pasión me llevó a la pintura». En 1486 Durero ingresó al taller más prestigioso de Núremberg, el de Michael Wolgemut³⁶. En el taller aprendió las técnicas: xilografía para libros, bocetos para artesanía y vidrieras; además aprendió a copiar y dibujar del natural, a realizar paisajes a la acuarela, a manejar la pluma y el pincel, y a pintar al óleo.

Durero salió de Núremberg alrededor de 1490 (como era costumbre enviar a los aprendices terminada su formación) a Colmar, Alsacia, para trabajar bajo las órdenes de Martin Schongauer. Pero cuando llegó Durero en 1492 el maestro había fallecido, por ello el artista debió continuar su viaje a Basilea donde se puso en contacto con grandes editores e introdujo un nuevo estilo en la ilustración de libros. Durero continuó viajando y regresó a Núremberg en 1494, en este año contrajo matrimonio con una joven, Agnes Frey, perteneciente a una de las familias que podrían formar parte del consejo de Núremberg. Sin embargo, la relación de Durero con su esposa no fue la más afectuosa. Uno de los hechos que motivó el distanciamiento en la joven pareja fue la partida de Durero a Venecia unas semanas después de su matrimonio. La estadía por Venecia y quizás por otras ciudades como Padua y Mantua, produjo en Durero una sensibilidad por los colores y las formas. Descubrió el sentido de la composición, el tratamiento de las figuras humanas y la aplicación de la perspectiva; consiguió una cierta espontaneidad en la acuarela³⁷. El viaje a Italia era una obligación para los artistas y amantes del arte, aunque el círculo humanista era muy cerrado para los artistas jóvenes; Durero partió de regreso a Alemania con algunos mensajes y conocimientos de los italianos. De este primer viaje a Italia Durero se propuso conquistar el «nuevo

aguatinta, barniz blando, barniz al azúcar; son técnicas que utilizan ácidos. Las dos maneras en las que se realiza el dibujo utilizan el mismo sistema de entintar, se vierte la tinta en los surcos para finalmente imprimir en el papel. A lo largo de la historia se fueron desarrollando y perfeccionando otras técnicas de grabado como la litografía, el linogrado, la serigrafía, entre otras.

³⁶ El taller de Michael Wolgemut (1434-1519) era una gran empresa comercial en Núremberg, con un gran número de aprendices se realizaban xilografías para ilustrar libros. Estos libros eran impresos y publicados por el principal impresor de Alemania, Anton Koberger, que era el padrino de Durero. También se elaboraban retablos de madera pintada, decoración de altares y retratos.

³⁷ Durero realizó aproximadamente 36 acuarelas y dibujos a pluma durante su primer viaje a Italia; representó paisajes y castillos, cuya apariencia realista y natural mostraban un estilo más libre en el pintor y daría cuenta de esa libertad interior en sus obras posteriores. También realizó algunos estudios sobre animales. Una de las aficiones de Durero fue su pasión por los animales, sin ningún interés en particular por alguna especie, contemplaba a todos los seres grandes, pequeños, majestuosos, repugnantes o hermosos; los dibujaba con tal precisión y dedicación como ningún otro artista en Alemania (Panofsky, 1982).

reino», el de los Alpes. Este viaje representó el comienzo del Renacimiento en los países germanos. Pero lo más importante que descubrió Durero fue que el sentido de la práctica en su formación, resultaba insuficiente para dominar las nuevas técnicas y concepciones estéticas si no contaba con una manera renovada de pensar y reflexionar sobre lo que era el arte y las leyes que lo rigen, lo que significó un importante paso en su evolución artística (Wolf, 2006).

Durero regresó a su país natal en la primavera de 1495³⁸ y comenzó un periodo de gran productividad entre pinturas, xilografías y grabados a buril. Una de las más representativas e importantes obras fue el *Apocalipsis*³⁹, compuesta de 15 xilografías con textos en latín y alemán, representaba el desasosiego, temor y necesidad de cambio de una época. Cambios espirituales y sociales, en la que el hombre salía del seno de la Iglesia para asumir su propia responsabilidad y libertad existencial. Esta obra respondía al sentir religioso de la Alemania de finales del siglo XV, llena de tensión e inestabilidad que conduciría a la Reforma protestante. Con la serie de grabados del *Apocalipsis*, Durero obtuvo cierto prestigio y fama internacional. También trató diferentes temas en sus obras, retratos, desnudos, alegorías, temas bíblicos, entre otros, pero con un sentido humanista.

En 1505 Durero emprendió su segundo viaje a Italia con una nueva mirada y con el firme propósito de mejorar y profundizar en las cuestiones teóricas del arte; los nobles y comerciantes de Venecia lo recibieron como el gran artista, pues Durero no era un desconocido, sus dibujos y grabados se habían difundido por toda Europa. Sin embargo, los pintores venecianos eran hostiles y envidiosos con Durero, pues criticaban su trabajo y manifestaban que el artista copiaba y no tenía sentido en el manejo del color; pero, ante las críticas de los pintores, Durero realizó una maestra y auténtica obra, la *Fiesta del Rosario*⁴⁰, por encargo de los comerciantes alemanes para la iglesia

³⁸ Alrededor de 1495 aparece por primera vez el monograma  en el grabado de *La Sagrada Familia de la libélula*. Este símbolo con las letras iniciales de su nombre, representa la calidad artística y será reconocido por toda Europa.

³⁹ Muchos hombres creían que el fin del mundo se acercaba, incluso Martín Lutero. Desde el *Apocalipsis de Bamberg*, hacia el siglo XI, los alemanes sentían cierta atracción por las visiones antiguas que reflejaban la destrucción del mundo. Durero en su obra *Apocalipsis* se sirvió de un lenguaje impetuoso y vehemente para representar el fragor de las almas y los gritos de dolor de las víctimas. El estruendo de los truenos y otras fuerzas de la naturaleza silencian el grito de las almas. Toda la obra se encuentra en movimiento, pero luego se extiende una estremecedora calma, como si el tiempo se hubiese detenido (Winzinger, 1985).

⁴⁰ Esta obra pintada en 1506 es rigurosamente simétrica. La virgen aparece sentada en un trono, vestida con un atuendo veneciano, ante un baldaquín, a su alrededor brilla un soleado paisaje primaveral y que tiene como fondo las cumbres de los Alpes. El emperador Maximiliano I se arrodilla ante ella para adorarla y María pone sobre su cabeza una corona de rosas; el Niño Jesús se vuelve hacia el papa Julio II con la misma intención; también los ángeles ponen a las demás personas coronas de rosas. La composición destaca el culto del rosario, que los dominicos, en particular,

de San Bartolomeo. En una de sus cartas a su amigo Pickheimer⁴¹, cuando ya había terminado su obra, Durero escribió: “yo tengo el gusto de anunciaros que no hay mejor imagen de la Virgen en este país” (Panofsky, 1982, p. 129); también, lleno de orgullo, expresa: “he hecho callar a todos los pintores que admitían mi destreza para el grabado, pero que no creían en mi capacidad para manejar los colores; todos afirman ahora que nunca habían visto un colorido más hermoso” (Winzinger, 1985, p. 86).

El interés de Durero, principalmente durante su segunda visita a Venecia, fue mejorar su formación teórica en el «arte secreto de la perspectiva», la proporción y sus reglas matemáticas y los mecanismos para lograr una belleza ideal. Durero adquirió una edición de los *Elementos* y la *Óptica* de Euclides. Conoció los estudios e ideas de Da Vinci y Alberti sobre las proporciones humanas, la fisiognómica y la anatomía. Estos estudios llevaron a Durero a comprender que la indagación científica permitía entender la teoría del arte. Por tanto, Durero va afianzando así sus conocimientos y la conciencia de su misión como teórico.

La nueva experiencia adquirida de Durero en Italia abarca figuras sueltas de gran tamaño, rostros y gestos que son preparatorias para su pintura y que nunca se habían visto antes en el arte alemán, como era el desnudo a un tamaño natural. Durero pone de relieve el alto nivel alcanzado en sus estudios sobre la proporción humana, en su esfuerzo por encontrar la medida correcta del cuerpo humano. En 1507 representó en dos grandes tablas a Adán y Eva en *La caída del hombre*⁴². Las dos jóvenes figuras llenas de vida y belleza, muestran una desnudez espontánea y libre de prejuicios. En los años siguientes Durero pintó tres obras más: una por encargo de Federico el

habían promovido desde el siglo XV. Durero se representa con una hoja en las manos en la que indica su nombre y la fecha de la obra (Winzinger, 1985).

⁴¹ Willibald Pickheimer perteneciente a una de las familias más acaudaladas y antiguas de Núremberg, fue un hombre erudito, formado en todas las artes y deportes de la caballería; estudió leyes y humanidades en la Universidad de Padua y Pavía. Pickheimer fue un gran y cercano amigo de Durero; se encargó de iniciarlo en el conocimiento de los clásicos griegos y romanos. Le asistió y aconsejó diversos temas para sus estampas y trabajos literarios. La relación que tenía Pickheimer con artistas, teóricos del arte, poetas, científicos, príncipes y filósofos le permitió a Durero relacionarse con influyentes e importantes personajes, quienes le compartían sus ideas y escritos, y lo acercaban a los círculos platónicos florentinos más importantes de la época.

⁴² Durero realizó una primera calcografía de Adán y Eva en 1504, inspirado por los estudios anatómicos de Leonardo da Vinci, las figuras se presentan rodeadas de animales y vegetales, y con la intención de plasmar la mayor perfección posible del cuerpo humano. La figura de Adán se relaciona con la de Apolo el dios de la belleza y serenidad del clasicismo griego; la postura grácil y danzante de Eva a Venus. Es una de las obras con mayor clasicismo artístico y rasgos italianos que Durero representó, gracias a lo aprendido y visto en Venecia. Particularmente fue Jacopo de Barbari quien le enseñó a realizar figuras según el canon clásico de las proporciones humanas. Sin embargo, en 1507 presenta un Adán y Eva en dos grandes tablas, ante un fondo oscuro las figuras se muestran más esbeltas, de contornos suaves y fluidos y un menor marcado en la anatomía. Este cambio no solo de postura y técnica de la obra deja ver en Durero una nueva concepción de la belleza (Checa, 2003).

Sabio, la del *Martirio de los diez mil*; el segundo cuadro, *El Altar Heller*, fue un trabajo para Jakob Heller, y el último cuadro es la *Adoración de la Trinidad* que se conserva en Viena y que realizó para la capilla de Todos los Santos.

Durero partió en 1520 a los Países Bajos con la intención de asegurar su pensión⁴³ del nuevo emperador Carlos V. También visitó Amberes, Brujas, Gante y Malinas. En este último viaje Durero tuvo la oportunidad de conocer el trabajo de algunos maestros flamencos antiguos y contemporáneos, por ejemplo, Jan van Eyck, Rogier van der Weyden, Hugo van der Goes, Lucas de Liden, Conrad Meit, entre otros; entabló amistades con ricos mercaderes, personalidades de la época, músicos, astrónomos y humanistas. De regreso a Núremberg la salud de Durero se va debilitando debido a una infección de malaria que terminaría con su vida. Sin dejar de producir nuevas obras, Durero inició un periodo como tratadista; preparó bocetos, anotaciones y sus primeros resúmenes para darlos a la imprenta y publicación.

El 6 de abril de 1528, a la edad de 57 años, muere Durero en Núremberg, dejó tras de sí más de setenta y dos cuadros, más de cien grabados en cobre, doscientas cincuenta xilografías, treinta y cuatro acuarelas, ciento ocho calcografías y aguafuertes, ciento ochenta y ocho óleos, más de un millar de dibujos y tres libros impresos: el libro *De la medida*, «*Underweysung der Messung*», publicado en 1525 (Instrucciones de medición con regla y compás); el *Tratado de las fortificaciones* (o Tratado de arquitectura y urbanismo militar) en 1527 y los *Cuatro libros de las proporciones humanas*, «*Vier Bücher von menschlicher Proportion*», publicado póstumamente en 1528.

2.2. La perfección y el ideal de belleza en Durero

Durero fue el más “italiano” de los artistas alemanes capaz de comprender los principios del Renacimiento italiano. En sus dos viajes estudió y trabajó profundamente los aspectos teóricos y científicos que habían caracterizado a la pintura italiana, no solo los asimiló también reflexionó sobre ellos y elaboró su propio discurso teórico; sin embargo, nunca renunció a su entorno ni a la tradición que lo había formado, no dejó de utilizar los ideales medievales, y el interés específico

⁴³ Núremberg era una ciudad que dependía directamente del Emperador; en 1219 obtuvo el título de Ciudad Imperial Libre bajo el mandato de Federico II, por tanto, sus ciudadanos debían pagar contribuciones al emperador. En la época de Durero el Emperador Maximiliano I le concedió al artista un sueldo anual de cien florines por sus servicios; este pago lo realizaban las arcas recaudatorias de la ciudad y a la repentina muerte del Emperador no se realizó el pago acordado. Por ello Durero se vio en la obligación de buscar y acreditarse ante el nuevo emperador.

por la realidad que había caracterizado la pintura en los Países Bajos y en Alemania. Durero como lo expresa, Westheim (1985) quería ser un hombre moderno, anhelaba conocer y comprender las verdades ocultas en la naturaleza, pero sobre todo representar lo bello, una misión «artística» en el pensamiento renacentista que, para los humanistas, e igualmente para Durero representar lo bello era sinónimo de armonía, equilibrio y perfección.

Al igual que sus contemporáneos y predecesores italianos, Durero pensaba que la finalidad más alta del arte era apresar la belleza del cuerpo humano, en sus palabras: “por encima de todas las cosas nos complace ver una figura humana hermosa” (Panofsky, 1982, p. 282), el artista se preocupa y estudia, en primer lugar, sobre los trabajos y las proporciones humanas. Comprendía que la belleza no se podía formular en un único canon ni que existía una sola belleza, por el contrario, había tantas bellezas como rostros bellos en diferentes personas. Pero Durero, igual que los humanistas, creía que la geometría tenía el poder de disipar los errores y demostrar el recto fundamento que le permitiría hacer una obra buena y correcta⁴⁴. En este sentido, el pintor es consciente de su arte, pero Durero expresa que es gracias al poder divino y no a la mera consecuencia de sus esfuerzos que puede producir una obra, como refiere en el siguiente párrafo:

El arte [esto es, el conocimiento] está incrustado en la naturaleza; el que sabe extraerlo ése lo posee. Si tú lo adquieres, te evitará muchos errores en tu trabajo. Y gracias a la geometría, tú puedes demostrar la justeza de muchas cosas en su obra [...] Así pues, ni se te ocurra pensar que podrías o querrías hacer nada mejor de cuanto Dios ha facultado a su naturaleza creada para que produzca. Porque tu poder no es nada frente a la creación de Dios. De aquí se sigue que nadie puede hacer una imagen bella sacándola de su imaginación privada. (Panofsky, 1982, p. 287)

Durero era consciente que la belleza perfecta o absoluta trasciende la mente humana y solo es conocida por Dios «Señor de toda belleza»; se empeñó en determinar los criterios o «partes» que rigen a la belleza y son: la utilidad «*Nutz*», la aprobación acrítica «*Wohlgefallen*» y la norma del justo medio «*recht Mittel*». El primer criterio, la utilidad, se refiere a que no haya deficiencia o sobreabundancia de las partes; por ejemplo, la falta de una pierna o un brazo deforme, o la

⁴⁴ Al igual que Leonardo da Vinci y Leon Battista Alberti, Durero se había dado cuenta que la práctica sin un conocimiento teórico era un engaño, un lugar cerrado y carente de luz; en sentido contrario, la teoría sin la práctica no podía crecer, en palabras de Durero “Mas si te falta el recto fundamento, te será imposible hacer algo correcto y bueno, aun cuando tuvieres la más grande práctica y la mano más diestra del mundo” (Panofsky, 1982, p. 282).

presencia de más de una de las partes como un tercer ojo. La aprobación acrítica⁴⁵ es una especie de «consentimiento de todos», pues lo que todos juzguen por hermoso se tomará por hermoso y se busca la manera de representarlo. Finalmente, entre el exceso y el defecto se encuentra el tercer criterio, el justo medio, pues los movimientos en una obra no pueden ser ni somnolientos ni bruscos, o una cabeza no puede ser aplastada o picuda. Este último criterio es una consecuencia del principio de armonía, denominado por algunos artistas como congruencia o simetría; es la relación de todas las partes con el todo, cuyo resultado es una sola belleza. Este principio es denominado en griego «συμμετρία» o «αρμονία», en latín «*symmetria*» o «*concinnitas*», en italiano «*convenienza*» o «*concordanza*» y en el alemán de Durero «*Vergleichlichkeit*». Durero entiende por «*Vergleichlichkeit*» todo lo que abarca la simetría de las proporciones y el acuerdo de las cualidades, al respecto escribe: “yo creo que las cosas armoniosas son las más bellas; las otras, las extravagantes, aunque causan asombro, no siempre son hermosas” (Panofsky, 1982, p. 285). Sin embargo, Durero pensaba que lo feo, lo rudo y lo monstruoso tenían un lugar dentro del arte, pues existía una diferencia entre el valor estético de un objeto representado en una obra de arte y el valor estético de la obra de arte en sí, pues todo artista es libre de realizar cosas feas o hermosas, pero sobre todo debe saber hacer una figura noble o rústica. Durero destaca que un gran artista es capaz de representar su verdadero poder y arte en una obra tosca y rústica. No se cansó de buscar las leyes que rigen la belleza; convencido de que estas son calculables con regla y compás, atraviesa dos veces los Alpes. Pero, al final de sus días con cierta resignación dirá: “Ignoro qué es la belleza, aunque se halle en muchas cosas. Si queremos introducirla en nuestra obra, ello plantea grandes dificultades, puesto que hemos de extraerla y reunirse de un campo muy amplio; y resulta particularmente difícil” (Durero, trad. en 1987, p. 20).

Durero señala que el talento para pintar, está infundido por Dios, pero también escribe en 1512 que un buen pintor está “interiormente lleno de figuras, y si le fuera posible vivir sin fin siempre podría seguir sacando cosas nuevas de las ideas interiores de la que habla Platón” (Panofsky, 1982, p. 288), es decir, Durero une las ideas de Platón con el concepto de imagen mental y fantasía como fuentes inagotables para la creación del pintor. Además de una concepción filosófica, Durero toma también los conocimientos clásicos basados en la proporción y la simetría; para que algo sea bello todas sus partes han de ser armónicas entre sí y conservar las medidas

⁴⁵ Este segundo criterio fue totalmente rechazado en lo concerniente a la belleza, pues no se podría confiar en el juicio de muchos hombres como tampoco en el de uno solo.

reales, por ello la belleza pasa entonces a ser una cuestión de conocimiento. Es la pintura que da cuenta de ese conocimiento basado en la óptica y la geometría de un conjunto de tratados y textos de la época.

La figura del artista y el cambio en las obras de Durero, son el resultado de la nueva concepción de la pintura. Es un proceso de transición que involucra sus creencias, emociones y su formación académica, haciendo de Durero un hombre original lleno de «ideas», que inspira no solo a sus colegas y aprendices, sino que va formando un legado capaz de conectar un arte, el de la pintura con la religión, la ciencia y la expresión de sus más profundos pensamientos.

2.2.1. Los temas bíblicos

Durero dedicó buena parte de sus obras a las temáticas bíblicas como un buen creyente y seguidor de las leyes cristianas; igual que muchos pintores del Renacimiento representó las historias sagradas que debían iluminar el camino de los fieles⁴⁶. Los episodios del Antiguo y Nuevo Testamento, son representaciones que narran a través de la pintura la vida de Jesús y María acompañados de santos y mártires; donde el pintor usa todos sus recursos emocionales y técnicos para transmitir a su público sentimientos de devoción y piedad.

Las pinturas y los grabados que Durero realizó de distintas figuras religiosas, son la representación de sucesos que, a finales de la Edad Media, apuntaban a signos y símbolos de la llegada del fin del mundo y el sufrimiento de un pueblo; por ejemplo, las xilografías que realizó del Apocalipsis como: *Los cuatro jinetes* que simbolizan la guerra, la peste, el hambre y la muerte, son hombres que se llevan por delante todo lo que se encuentre a su paso. *El combate de San Miguel con el dragón*, *Los cuatro ángeles que sujetan los vientos*, *Las siete trompetas*, entre otras; estas imágenes constituyen aquello que los cristianos esperaban ver, «los jinetes del apocalipsis en el horizonte»; el miedo a la muerte, al juicio final; destruían las certezas del catolicismo. Por ello, la iglesia buscaba aliviar la angustia de un pueblo, mediante cultos alternos o crear la necesidad de

⁴⁶ La mayor parte de los cuadros del siglo XV se pintaban para atender finalidades institucionales, especialmente la eclesiástica para ayudar a actividades intelectuales y espirituales específicas. El propósito de las imágenes, como refiere en el *Catholicon* de Juan de Génova de 1286 y que sirvió como un modelo en el Renacimiento, describe tres razones para introducir las imágenes de la virgen y de los santos en la iglesia: la primera de ellas para la instrucción de la gente simple, es decir, para quienes no pueden leer las Escrituras, puedan aprender mirando en las imágenes los sacramentos de la salvación y la fe; la segunda, para que los ejemplos de los santos y el misterio de la encarnación permanezcan en la memoria, pues muchas personas recuerdan o retienen con mayor facilidad lo que se presenta ante sus ojos. Finalmente, para excitar sentimientos de devoción, ya que los sentimientos son despertados por las cosas vistas más que por las cosas oídas (Baxand, 1978).

seguros que mantuvieran el orden social y la tranquilidad del alma, y cómo no acudir a la protección y amparo de la Virgen María y los santos como ejemplo de santidad y fidelidad a Dios.

La representación de la Virgen⁴⁷ para Durero fue un tema que enriqueció su formación; ya que presentaba a María en diferentes posturas y caracteres propios de una determinada región, prácticamente convirtiéndola en un retrato. Los intereses de Durero también se reflejan en el diseño del entorno en el que se ubica la imagen, es decir, el fondo y en la posibilidad de dar la sensación de profundidad; es uno de los problemas que experimenta con la representación en perspectiva. También las expresiones y posturas de la Madre del Salvador deben reflejar la delicadeza y pureza de un alma que ha sido creada y escogida por Dios.

La anunciación, natividad, pasión, muerte y resurrección de Jesucristo también hacen parte del repertorio de Durero. Las imágenes representadas con una simbología y espíritu medieval ilustran la Divinidad y perfección del Hijo de Dios, en una realidad espiritual y celestial; a diferencia del Renacimiento, un periodo que pretende desprenderse de un simbolismo religioso y que se va adentrando en un antropocentrismo; este es el momento en el que el hombre es el protagonista y se representa en escenas religiosas que involucran los dogmas y creencias del pueblo.

Un pueblo con un espíritu angustiado y abatido, en medio de la pobreza, la guerra y un clero que solo perseguía la riqueza. Los cristianos buscaban vías alternas de piedad y de salvación, por esta razón la Iglesia presenta la indulgencia plenaria que era concedida por el papa León X a quienes dieran dinero para construir la basílica de san Pedro en el Vaticano, con lo que se le perdonaba sus pecados. Eran los pagos que se realizaban a la Iglesia para garantizar que el alma permaneciera menos tiempo en el purgatorio; era una economía del más allá, es decir, se compraba un pecado a cambio de misas, diezmos, oraciones; el cristiano pagaba para estar tranquilo espiritualmente.

Los papas Julio II y León X en sus intentos por restaurar la grandeza y belleza de Roma con los mejores diseños arquitectónicos, esculturas y frescos, llevaron a una decadencia económica a la Iglesia; los gastos y pagos excesivos en artistas y materiales condujeron a que la gente común pagará impuestos más altos, pues la Iglesia era el mayor mecenas de las artes, como también las

⁴⁷ Durero representó a la Virgen en diferentes altares y devociones privadas, algunas de ellas son: la *Virgen con el Niño*; la *Fiesta del Rosario*; la *Virgen del Verderol*; la *Virgen del lirio*; la *Virgen de la pera*; *Virgen de la libélula*; *Virgen de los animales*, entre muchas más.

familias Medici y Gonzaga. Cada vez más voces denuncian los excesos y la corrupción de la curia papal, sus pretensiones políticas y militares, su ideología, los programas artísticos que se desarrollan en las estancias vaticanas, entre otros aspectos llevaron a que el pueblo se revelara contra la doctrina de la Iglesia. El monje Martin Lutero en 1517 denuncia públicamente en la Iglesia de Todos los Santos de Wittemberg la crisis de valores y los abusos de Roma. Publica 95 tesis criticando la manera como se manejaba la religiosidad por parte de la Iglesia católica. Así, nace la Reforma, un movimiento religioso que contiene tintes sociopolíticos y que además de negar la jurisdicción del papa sobre toda la cristiandad y su ideología anticlerical, amenaza la cultura del Renacimiento y, sobre todo, las bases del cristianismo (Layuno, 1997).

Durero es un partidario y admirador de Lutero ya que la influencia del vicario general de los agustinos, Johann Von Staupitz, quien visitó Núremberg en varias ocasiones lo formó frente a la nueva doctrina. Aun cuando la Reforma protestante se inició en Alemania y Lutero contaba con el apoyo de los humanistas, no había avanzado lo suficientemente para provocar en Durero una ruptura con la Iglesia católica. Desde 1525 Durero toma cierta distancia de los partidarios y escándalos de las nuevas reformas religiosas, pues había sido testigo de las guerras campesinas y el exilio de sus discípulos y amigos. Es entonces cuando Durero se percata que en numerosas ciudades se prohíben y se rechaza el culto a las imágenes de devoción; se encuentra rodeado de una anarquía y ateísmo que lo llevan a enormes pérdidas y a experimentar la miseria, el mal pago y la búsqueda de un nuevo mecenas.

Los diferentes enfrentamientos y disputas entre cristianos, protestantes y ateos, causó en Durero un gran impacto y se dedicó a realizar los *Cuatro apóstoles*⁴⁸, en dos grandes tablas representó a san Juan y san Pedro, los dos leyendo la primera página del propio Evangelio de Juan; en la otra tabla se encuentra san Marcos y san Pablo llevando una Biblia en la mano. Los cuatro hombres representan los pilares de la fe; las dos tablas están acompañadas de una larga leyenda que comienza con una advertencia a los poderes seculares a no admitir las seducciones humanas como palabra de Dios; luego Durero cita pasajes de los cuatro santos donde se habla de las falsas enseñanzas y los falsos profetas, a los hombres que aman más el placer que a Dios, pero se

⁴⁸ La obra se conoce con el nombre de los *Cuatro apóstoles*, sin embargo, san Marcos era un evangelista, pero no un apóstol como lo son san Pedro, san Pablo y san Juan. Durero donó la obra al consejo de su ciudad natal con una larga inscripción, pero al pasar a la ciudad de Múnich se cortaron los textos.

La interpretación de estas figuras también se ha asociado a los cuatro temperamentos humanos. Así, san Juan representaría el temperamento sanguíneo; san Pedro, anciano, al flemático; san Pablo al melancólico y san Marcos al colérico.

presentan como personas piadosas, y en contra de los doctores de la ley que portan largas túnicas y pasean por la plaza, pero fingen largas oraciones (Wolf, 2006). Con estas inscripciones se buscaba fulminar por igual a radicales y papistas. Esta obra de Durero es considerada como un testamento espiritual. Zumthor (1987), afirma que las figuras representan los pilares y garantías de una fe y la renovación de una sociedad y la moral del hombre.

Durero continuaba ligado a un cristianismo, pero veía en Lutero a un hombre enviado por Dios capaz de reformar la Iglesia y mostrar con claridad a los fieles el camino del Evangelio, pues la verdad solo se encuentra en la Sagrada Escritura. Para Durero la cercanía a Dios no representa un acto inalcanzable, pues en sus diferentes obras refleja la muerte y la redención como símbolos de sufrimiento, decepción, o derrota que ha pasado en el transcurso de su vida, pero con la esperanza de alcanzar la gloria, que indudablemente viene de lo alto, que requiere un tiempo de preparación, una búsqueda inagotable y, sobre todo, una fidelidad a los principios que rigen a un hombre del medioevo en las puertas de un renacimiento.

2.2.2. Los autorretratos

Durero dibujó y pintó toda una serie de autorretratos donde se deja ver en diferentes estados: orgulloso, elegante, sofisticado y seguro de su profesión artística; se muestra tal como es él por dentro.

Su primer autorretrato fue el de 1484⁴⁹ (figura 1), a sus trece años comienza la serie de retratos sobre él mismo y miembros de su familia. Durero se dibujó a sí mismo frente al espejo; se muestra tímido y con cierta inseguridad revela la inexperiencia de sus trazos; los contornos anchos y el lugar de sus cabellos no se distinguen casi del borde de la gorra. El gesto de su mano deja ver el carácter de la pintura religiosa, pues el dedo extendido representa a un profeta o un san Juan señalando a Jesucristo en la cruz. El artista se muestra naturalmente como un niño que no deja de sorprenderse y admirarse por las cosas y con una profunda devoción religiosa, que lo caracterizó a lo largo de su vida.

⁴⁹ En el arte alemán no hay un autorretrato realizado a tan temprana edad como el de Durero. El dibujo elaborado con mina de plomo, conserva rasgos góticos; su rostro expresa la infantil sencillez y la admiración por el mundo. En la caída de su cabello se aprecia el movimiento y el dinamismo de la línea que caracteriza los dibujos de Durero. Más adelante escribirá, en la esquina superior derecha: «Esto lo dibujé con la ayuda de un espejo en el año 1484, cuando todavía era un niño» (Winzinger, 1985).

Figura 1

Autorretrato de Durero a los 13 años de edad.



Fuente: Durero, Alberto. Dibujo. (1484).

A los 19 años Durero vuelve a autorretratarse en su viaje al Alto Rin (figura 2). Esta vez reproduce un rostro con trazos delicados que expresa su estado de ánimo. Teniendo en cuenta la descripción que realiza Barthel (1953), Durero vive un tormento, que significa la búsqueda del sentido de la existencia; es el anhelo de dar cuenta de sí mismo, es decir, es la hora de liberarse de cualquier clase de subordinación y enfrentarse a su conciencia. Durero aún con los ojos alzados hacia Dios, pero consciente de su valor propio humano y artístico.

Figura 2

Autorretrato de Durero a sus 19 años de edad.



Fuente: Durero, Alberto. Dibujo. (1491).

Panofsky (1982) afirma que en el autorretrato de Erlangen Durero miraba al universo silenciosamente, pero con la pasión de un joven deslumbrado y lleno de profundos abismos, a diferencia del Durero de 1493⁵⁰ (figura 3) que posa con una mirada tranquila, escrutadora y con la seguridad de sí mismo, como un joven maestro. Técnicamente se distingue por una libertad de pincelada y un refinamiento sensual, característico del arte alsaciano —probablemente realizado mientras hacía su viaje de formación a Estrasburgo—. La inscripción que preside la obra, «Mis asuntos avanzan como está previsto desde arriba», refleja la autoconfianza de Durero y el carácter religioso que aún anida en su ser, pues su confianza también está puesta en lo Alto, en Dios.

⁵⁰ Durero con 22 años deja ver un porte de caballero de elegante vestimenta, gallardo e intrépido; un hombre que comienza a abandonar el arte gótico. Sostiene en su mano un cardo (en alemán «*Mannertreu*», «*fidelidad de hombre*»), una flor que simboliza la fidelidad conyugal —este cuadro era un regalo quizás de Durero a Agnes Frey y sus padres, como un retrato de compromiso, ya que un año después se convertiría en su esposa—. Su rostro delata un aspecto meditativo, aunque la energía se concentra en su mirada, también se resalta la expresión de su boca entre adusta y sensual (Winzinger, 1985).

Figura 3

Autorretrato de Durero a sus 22 años de edad.



Fuente: Durero, Alberto. Técnica mixta sobre pergamino. (1493).

El autorretrato de 1498⁵¹ (figura 4) es la primera gran obra de Durero en pintura sobre tabla, vestido de fiesta, a la última moda veneciana; sus gestos son delicados y con una gran seguridad interior se presenta como un artista vanidoso y orgulloso.

La obra (figura 4) se compone del rostro pequeño y elegante de Durero, junto al paisaje alpino de fondo y la fuerza de sus manos entrelazadas. Estas características dan testimonio de la ingenuidad del artista frente a los fenómenos naturales y la seguridad de los medios de expresión, es decir, indica el deseo de Durero de mostrar su posición social, ya no es la de un artesano sino la de un artista. La satisfacción de su propia capacidad artística se manifiesta en la inscripción

⁵¹ Es una de sus pinturas más expresivas, destaca la riqueza de sus detalles y su precisión en la combinación de colores en tonos dorados. La posición asimétrica de sus ojos, la nariz pronunciada, sus labios gruesos, los rizos del cabello cuidadosamente peinados, vestido de camisa blanca con bordes dorados, con un jubón muy abierto; un cordel azul y blanco sostiene la capa marrón y los guantes de cabritilla (atributo de los señores), la vestimenta y posición de Durero le dan el prestigio de un artista del Renacimiento (Barthel, 1953).

alemana en el alféizar de la ventana, que dice: «1498, lo pinté según mi figura. Tenía veintiséis años, Alberto Durero».

Figura 4

Autorretrato de Durero como un artista del Renacimiento.



Fuente: Durero, Alberto. Óleo sobre tabla. (1498).

El autorretrato más famoso de Durero es el del año 1500⁵² (figura 5). El artista se presenta a sí mismo a semejanza de Cristo⁵³, es decir, toma el mismo esquema compositivo de la imagen y

⁵² Durero con una postura de frente absoluto, posición que solo estaba reservada a Cristo; los retratos solían ser de perfil o de tres cuartos. Al representarse como una figura sagrada no lo hace blasfemo, pues intenta demostrar en la expresión que está tocando el pelaje de la manta con su mano derecha, que su posición es gracias a su habilidad con su pincel y su creatividad es dada por Dios, de ahí que Durero se considera un deudor de la sabiduría y belleza de Dios. También demuestra su humanismo al colocar a un hombre como el centro de las cosas. Durero con un aspecto delicado, sus cabellos peinados y ensortijados sobre sus hombros, revela a un gran hombre elegante y seguro de sí mismo; de esto hace alarde escribiendo en su obra en latín, «Alberto Durero de Núremberg, me pinto a mí mismo con colores indelebles a los 28 años de edad».

⁵³ Durante la Edad Media para representar la imagen de Cristo, se tomaban las medidas básicas derivadas de las formas geométricas primitivas, donde la altura total de la cabeza está dividida en seis partes iguales; el largo de la cara y el cabello ocupa una superficie que abarca dos partes. La medida parcial se determina por la distancia al punto medio de las pupilas; la cabeza se inserta en un círculo que a la vez está inscrito en un cuadrado, estas figuras se trazan siguiendo una misma medida básica (Winzinger, 1985).

la posición frontal de Jesucristo⁵⁴. Durero idealizó su fisonomía, pues suaviza los contornos de su nariz y pómulos, y alteró el tamaño de sus ojos; esto conforme a las características que tradicionalmente se habían atribuido a la imagen del Salvador. Las intenciones de Durero, como lo manifiesta Winzinger (1985) es crear la imagen ideal de un hombre nuevo y universal, con los esquemas formales del medievo, es decir, Durero se muestra como un hombre sabio ante el umbral de la modernidad y separado de Dios. Representa el poder y grandeza de la dignidad del rostro humano, en el que se refleja el resplandor de la perfección divina. Y ya que la imagen de Cristo reúne la figura humana en su más alta perfección y belleza, debía pues concluir en una fiel y digna representación pictórica de sí mismo, símbolo de su estado espiritual y la libertad de su ser.

El nuevo pintor es un intelectual, pleno de sabiduría y con el firme propósito de presentar una belleza, definida en la armonía y las proporciones divinas. Durero, a partir de 1500 y hasta su muerte, se dedicó a buscar esa belleza en la que todos los signos se reúnen en sus obras.

⁵⁴ Varios artistas durante el siglo XV tomaron la referencia de la figura de Cristo de un informe falsificado o una carta de Léntulus, un gobernador de Judea ante el senado de Roma. La descripción que se realiza de Cristo coincide en varios elementos expuestos en la pintura de Durero, como los muestra el siguiente texto:

Un hombre de altura común o moderada, y muy distinguido. Tiene una presencia impresionante, y quienes le miran lo aman o le temen. Su cabello es del color de la avellana madura. Cae recto, casi hasta el nivel de sus orejas; y desde allí hacia abajo se curva espesamente y es más abundante, y cuelga sobre sus hombros. Al frente el cabello está partido en dos, con la raya al medio, en el estilo nazareno. Su frente es ancha, suave y serena, y su rostro no tiene arrugas o marca alguna. Está tocado por un ligero tinte rojizo, de un color suave. Su nariz y su boca son impecables. Su barba es espesa y similar a la primera barba de un joven, del mismo color de su cabello; no es particularmente larga y está partida al medio. Su aspecto simple y maduro. Sus ojos son brillantes, móviles, claros, espléndidos. Es terrible cuando amonesta, tranquilo y amable cuando aconseja. Es rápido en sus movimientos, pero conserva siempre su dignidad. Nadie le ha visto reírse, pero se le ha visto llorar. Es ancho de pecho y erecto; sus manos y brazos son hermosos. Al hablar es serio, reservado y modesto. Es el más hermoso de los hijos del hombre. (Baxand, 1978, p. 78)

Figura 5*Autorretrato de Múnich.*

Fuente: Durero, Albero. Óleo sobre tabla. (1500).

Para alcanzar la tan anhelada belleza, Durero se dedicó, en primer lugar, al estudio del cuerpo humano. Persiguió los estudios matemáticos y teóricos que realizó el veneciano Jacopo de Barbari⁵⁵, pues se creía en aquel entonces que él había descubierto un sistema ideal de medidas y proporciones para dibujar el cuerpo humano; sin embargo, Durero expresa que Barbari no quiso transmitir con claridad su sabiduría que le hubiese permitido abrir las puertas de un «nuevo reino». Por ende, Durero se dedica, con gran esfuerzo y aconsejado por su amigo Pirckheimer, a indagar

⁵⁵ Jacopo de Barbari fue un pintor y grabador en cobre y madera veneciano. Se trasladó de Venecia a Alemania alrededor de 1500, donde se encontró con Durero, y presentó figuras humanas basadas en la medición de las diferentes partes del cuerpo con lo que se conseguía la armonía que era sinónimo de belleza. Sin embargo, Barbari no quiso compartir sus conocimientos como lo manifiesta Durero: “Y por entonces hubiese preferido conocer su opinión que alcanzar un reino nuevo [...] y observé perfectamente que el mencionado Jacopo [Barbari] no me quería explicar claramente su método” (Zalama, 2002, p. 195). Por tanto, Durero abordó los escritos de Vitrubio.

en los antiguos escritos y en su práctica con la esperanza de extraer un modelo perfecto a partir de unas medidas concretas.

La expresión y posición de Durero en sus autorretratos, como también en sus escritos y cartas, permite comprender la obra del artista, las circunstancias en que vivió y los continuos cambios espirituales que le dan un carácter a cada obra, en la que se destaca su estado de ánimo y la relación con su vida cotidiana.

2.2.3. Tres grabados a buril

Durero realizó tres grabados magistrales aproximadamente del mismo tamaño, pero sin ninguna conexión o relación entre ellos. Los buriles, *El caballero*, *la Muerte y el Demonio*, el *San Jerónimo en su celda* y la *Melancolía I*, son tres obras sin ningún sentido técnico aparentemente; componen una unidad espiritual como lo denomina Lippmann (1883, como se citó en Panofsky, 1982, p. 166), ya que simbolizan tres modos de vida que corresponden a la clasificación escolástica de las virtudes morales, teológicas e intelectuales⁵⁶. *El caballero*, *la Muerte y el Demonio* (figura 6) representa la fe cristiana, donde el creyente, ante la realidad, debe actuar y tomar decisiones a pesar de las adversidades. El caballero, una de las figuras centrales y dominantes, representa a un caballero cristiano que no teme a la muerte ni al diablo que se encuentran muy cerca de él; montado en un corcel elaborado con una completa perfección anatómica, que Durero saca de los estudios de Da Vinci. La muerte como un jinete en un caballo viejo y sosteniendo un reloj de arena como símbolo del tiempo que va terminando para todo mortal. En la parte posterior del cuadro se encuentra el demonio, una figura particularmente imaginativa, una mezcla de diferentes animales. El caballero está acompañado por un perro que se asocia a la fidelidad y en la parte inferior derecha un lagarto huye en dirección opuesta.

El caballero, cabalgando por un paisaje montañoso, oscuro y tenebroso, es un guerrero tranquilo con una elegante postura que se dirige a la lucha y que va en busca de su destino, a pesar de las terribles visiones que están apareciendo en su camino, y que indudablemente debe atravesar para llegar a la cima. En el fondo se reconoce un castillo ubicado en lo alto; representa el triunfo,

⁵⁶La expresión estética de las tres vías interpretadas por Durero, según Constantinescu (2017) son: la vía caballeresca, la vía monástica y el arte real, ya que los tres grabados se adaptan a los triunfos de la vida en un determinado tiempo: el deseo y la castidad, la muerte y la gloria, el tiempo y la eternidad; donde confiere al pasado una dimensión de muerte y al futuro una abertura sin descanso.

la meta salvífica, que con las armas de la fe se ha defendido de la muerte y ha luchado contra el mal, —el demonio.

Figura 6

El Caballero, la Muerte y el Demonio.



Fuente: Durero, Alberto. Grabado a buril. (1513).

Aun cuando Durero decidió apoyar y seguir a Lutero, no se desliga del cristianismo, pues el grabado, *El caballero, la Muerte y el Demonio*, se puede interpretar como un autorretrato en el que presenta la imagen de un hombre cristiano del medioevo, que sostenido por la fe avanza por un turbio camino lleno de obstáculos, pero con la mira puesta en Dios. Durero representado en el caballero deja ver a un hombre orgulloso de su posición, con una gran confianza y dominio sobre sí mismo y lo que lo rodea. Al final se encuentra una ciudad como un lugar claro y lejano al que debe llegar, pues es la tan anhelada salvación.

Si el Caballero Cristiano se aventura en un mundo frío, oscuro y peligroso, el *San Jerónimo en su celda* (figura 7) expresa la vida contemplativa, la búsqueda de una luz interior, contraria a la luz que ofrece el mundo. La descripción realizada por Panofsky (1982) refiere:

... el *San Jerónimo* de Durero vive en el retiro cálido, luminoso y apacible de un estudio bien ordenado. La estancia es una verdadera celda, [...]. Es una habitación muy sencilla, pero en todo agradable, provista no sólo de lo necesario sino también de las pequeñas comodidades de una vida devota y estudiosa. (p. 169)

Una celda acogedora que simboliza a un hombre que ha alcanzado la sabiduría mediante el estudio y la meditación. San Jerónimo sentado detrás de un escritorio que sostiene un tintero y un crucifijo. Este último símbolo de la resurrección, y la calavera⁵⁷ cerca de la ventana como representación de la muerte. En el suelo está tumbado un león que tiene un ojo semiabierto, en constante vigilancia al mundo exterior y a su lado duerme profundamente un perro que roza la garra del león dando un gesto de paz. El santo trabaja al fondo sumergido en sus escritos y pensamientos, se encuentra rodeado de todo aquello que le agrada, como los animales, los libros y la presencia de Dios.

Durero creó una habitación geométricamente perfecta, utilizando magistralmente la técnica de la perspectiva, obteniendo como resultado una profundidad para la celda. Las proporciones y disposición de los objetos en paralelo a las paredes, resaltan la armonía de todos los elementos dispuestos en la celda, el manejo impecable de la luz y la sombra.

En el grabado de *San Jerónimo en su celda*⁵⁸, Durero se representa como un caballero cristiano que tiene miedo, pero que confía en un Dios que le hará ver la Salvación, un hombre culto y sabio, un intelectual que ha alcanzado una madurez y conocimiento en el arte y en las ciencias. El estudio, la práctica e investigación ha ido formando al hombre que se encuentra en un «estudio», es un nuevo espacio en donde se realizan actividades intelectuales y artísticas; este lugar ya no corresponde al taller de un artesano en el que por mucho tiempo trabajó y se formó.

⁵⁷ La calavera nos recuerda que para llegar a la santidad se debe ser consciente de que la vida se termina y la presencia de la muerte es una realidad que da sentido a la existencia y el único Creador y Juez de la Vida es Dios.

⁵⁸ Durero realizó una primera xilografía de san Jerónimo en 1492, con cierto desorden en la celda y una acumulación de cosas que se interponen disimulando los tropiezos de la perspectiva. El santo sin barba y el león se presentan en un acto de humanismo y mansedumbre donde la garra y la mano se unen por una pinza. En 1511 en un grabado en madera retrata al santo calvo en una habitación como si fuera el final de un túnel (Parra, 2009).

Figura 7*San Jerónimo en su celda.*

Fuente: Durero, Alberto. Grabado a buril. (1514).

Finalmente, en *Melancolía I* (figura 8) Durero expresa un desasosiego o la insatisfacción que siente ante la insaciable sed del saber. Es el último de los grabados magistrales del artista realizado en 1514. La figura principal es una mujer con alas, la melancolía⁵⁹, con la cabeza

⁵⁹ El título de *Melancolía I* sostenido por un murciélago refiere a un estado y al desarrollo de la teoría de los «cuatro humores». Esta teoría sostiene que el cuerpo y la mente humana están compuestos de cuatro fluidos básicos, «humores», cuyo equilibrio indica el estado de salud de la persona. El exceso o el déficit de uno de ellos produce la enfermedad o discapacidad en el hombre. Estos fluidos fueron identificados como bilis negra, bilis amarilla, flema o pituita y sangre. Durante la Edad Media se establecieron varias relaciones unívocas entre los humores y los cuatro vientos, los cuatro puntos cardinales, las cuatro estaciones, las cuatro edades de la vida, entre otros. Una de las relaciones que perduró por varios siglos fue la de los cuatro temperamentos, que clasifica a las personas según los rasgos de personalidad, carácter, actitud dominante, virtudes y defectos. La cólera o bilis amarilla se asocia con el fuego, el calor, corresponde al verano, al mediodía y a la edad de la vida madura. A diferencia del sanguíneo o sangre, este temperamento representa el aire, el calor y la brisa fresca de la primavera, de la mañana y la juventud. El flemático o flema como frío y húmedo, características del agua y del invierno, se relaciona con la noche y la vejez. Por último, se tiene el melancólico o bilis negra, refiere a la tierra, al frío y la sequedad, al otoño y al atardecer; es el peor de los temperamentos, son hombres propensos a la demencia y secos de alma. Las características de estos temperamentos han sufrido numerosas variaciones a lo largo de la historia (Klibansky et al., 1991).

inclinada y con la mirada en un punto fijo que representa una lejanía vacía; a su lado de igual forma se presenta un niño con alas; entre ambas figuras se sitúa un perro dormido y al fondo un edificio simbólicamente inacabado, del que cuelga una balanza, un reloj de arena, una campana y un tablero numérico⁶⁰. La rueda de molino, la esfera y el poliedro son objetos que aluden a la geometría⁶¹. Este grabado, igual que los dos mencionados anteriormente, es un autorretrato de Durero, que representan la tragedia del espíritu humano. La tensión que siente el artista entre la teoría y la práctica, entre el conocimiento y la acción. La melancolía dotada de alas, sosteniendo un compás⁶² y rodeada de instrumentos se convierte en un ser superior que declara la pérdida del sentido de su trabajo; toda su energía está paralizada por el pensamiento. El niño que la acompaña es la pericia práctica que actúa, pero no piensa. En otras palabras, la teoría y la práctica se encuentran separadas y como resultado de ello se halla la impotencia y la tristeza (Biosca et al., 1997).

Como uno de los peligros del arte, la melancolía tipifica al artística que respeta la pericia práctica pero que anhela la teoría matemática, que sufre por la fragilidad humana y su finitud intelectual. Durero creó a un ángel que dotó de inteligencia y la práctica de un arte, pero a la vez ese ser se encuentra desesperado bajo la nube de un «humor negro» (Panofsky, 1982). Los elementos expuestos en *Melancolía I* reflejan el estado de ánimo del genio, pero también la indagación científica de su arte, la geometría⁶³.

⁶⁰ El tablero numérico también denominado cuadrado mágico de orden cuatro en el que siempre se obtiene un valor de 34 al sumar las filas, columnas y diagonales principales; las dos cifras centrales de la última fila 1514 corresponden al año de ejecución de la obra.

⁶¹ La geometría como una de las artes liberales y las técnicas de la perspectiva como el nuevo fenómeno entre los artistas, hacen que Durero transforme la perspectiva del grabado en el espacio de un geómetra y de un artista que buscan las justas proporciones estéticas. Durero se apasionó por el estudio de las formas, las líneas y las curvas geométricas. Los elementos expuestos en el buril simbolizan la pasión y el estudio que dedicó a la geometría, como también son símbolos de una ocupación que practica «el arte de la medida» en palabras de Constantinescu (2017):

El libro, el tintero y el compás se refieren a la geometría pura; el poliedro de piedra, a la geometría descriptiva y a la perspectiva, en particular a la estereografía; el cuadrado mágico, el reloj de arena, la campana y la balanza se refieren a la medida del espacio y del tiempo; las diversas herramientas y los instrumentos técnicos, “la garlopa, la escuadra y el martillo, significan la geometría aplicada a la artesanía y a la construcción”. (p. 5)

⁶² El compás que la melancolía tiene en la mano, simboliza “el propósito intelectual unificador que gobierna la gran diversidad de herramientas y objetos que la rodean” (Klibansky et al., 1991, p. 316), significa la geometría pura.

⁶³ Para evocar la geometría Durero se inspiró, probablemente, en la portada del capítulo *Typus Geometriae*, de la *Margarita philosophica* de Gregor Reisch. Un monje alemán que en 1504 reunió por primera vez en un volumen los temas considerados obligatorios para un hombre culto del siglo XVI. La mayoría de los capítulos tienen ilustraciones grabadas que aluden a las temáticas de estudio. Los elementos que aparecen en la portada de la *Geometría* como: los astros del cielo, el edificio inacabado, el bloque de piedra, una esfera, un compás, dos plantillas, una escuadra, un martillo, un tintero y en el centro una figura femenina que sostiene los instrumentos, son los más característicos de su actividad. Todos estos elementos se encuentran en la *Melancolía I* de Durero distribuidos en un espacio tridimensional, a diferencia de la composición de la imagen en la *Margarita philosophica* que se presenta en

Figura 8*Melancolía I.*

Fuente: Durero, Alberto. Grabado a buril. (1514).

Durero le confirió a la geometría una melancolía, pues al saber que existe una finitud que está más allá de su alcance le hace sufrir y lo llena de un sentimiento de tristeza, en palabras de Klibansky et al. (1991), quienes consideran que Durero fue capaz de:

Abajar el conocimiento y método intemporales de un arte liberal a la esfera de los esfuerzos y los fracasos humanos, y tuvo la osadía también de elevar la pesadez animal de un temperamento «triste, terroso» a la altura de una lucha con problemas intelectuales. (p. 307)

Durero unió la imagen de un melancólico con la de un arte geométrico; unió dos mundos diferentes de pensamiento y sentimiento, le confirió a uno la mente y al otro le dio un alma.

una superficie plana, es decir, que las figuras carecen de movimiento y emisiones, y los objetos se distribuyen sin ningún orden ni coherencia del espacio.

La personificación de la melancolía como uno de los cuatro humores y la geometría como una de las siete artes liberales es el encuentro de dos grandes tradiciones, pero sobre todo representa el gran esfuerzo de Durero por encontrar los enigmas de la belleza con instrumentos de medición y, por supuesto, con leyes matemáticas, es lo que atormenta al artista que se encuentra abatido, desconsolado y con ninguna solución aparentemente que pudiera satisfacer sus pensamientos (Panofsky, 1982).

2.2.4. El libro *De la medida*

Al regreso de su segundo viaje a Italia Durero se dedicó al estudio de las lenguas y de la matemática, a la que se entregó casi por completo en los últimos años de su vida. Durero recopiló y plasmó toda la información que él creía necesaria y provechosa en un tratado que publicó en 1525, en alemán, con el título de *Underweysung der messung*⁶⁴, y que dedicó a su gran amigo y consejero Pirckheimer, como también a los jóvenes pintores, aprendices, que no habían sido instruidos en el fundamento de su arte sino en la sola práctica diaria. Según Durero los jóvenes no han aprendido el arte de la medida que es la recta razón de toda pintura y los jóvenes deben alcanzarla por medio de la instrucción de la regla y el compás, y así colocar frente a sus ojos la recta verdad y un juicio correcto de los errores y desaciertos en la pintura. Este libro también va dirigido a todos aquellos que tengan inquietudes artísticas, no solamente pintores sino a los plateros, escultores, canteros, carpinteros y todos los que se sirven de la medida. Durero (trad. en 2000) expresa en su introducción que nadie está obligado a seguir su doctrina, pero quien sí lo hace tendrá una base sólida y con la práctica diaria alcanzará un mayor conocimiento y continuará buscando y descubriendo muchas más cosas de las que expone en su libro.

El libro *De la medida* no es un tratado de geometría pura, es una geometría aplicada a problemas que el artesano (cantero, orfebre, carpintero o pintor) enfrenta en su hacer cotidiano. Durero buscó ser comprendido por artistas y artesanos, por ello se abstiene de exponer divagaciones eruditas; se valió de expresiones cotidianas y gráficas para referirse a conceptos matemáticos, ya que al artesano le resultaba más sencillo asemejar la forma de los objetos con

⁶⁴ El título completo en alemán es: *Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt / in Linien ebenen unnd gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zu samen getzogen / und zu nutz aller kunstliebhabenden mit zu gehörigen figuren / in truck gebracht / im jar M.D.XXV* “Introducción para la medida con el compás y la regla de líneas, planos y todo tipo de cuerpos, reunida por Alberto Durero en provecho de todos los aficionados al arte, con las correspondientes figuras, impreso en el año de MDXXV” y conocido en lengua española como *De la medida* (Durero, trad. en 2000, p. 127).

términos conocidos y relacionados con su práctica diaria. Algunos términos eran populares desde la Edad Media, por ejemplo, «Fischblase» que significa vejiga de pez⁶⁵, el «der neue Mondschein» para representar una media luna, para las figuras resultantes de la intersección de dos circunferencias, «Eberzahne», dientes de jabalí y para los ángulos formados por arcos de circunferencias, «Ortstrich», trazo de esquina. Durero presentó nuevos términos, aunque no fueron perdurables en el léxico alemán como: «Gabellinie», línea de horca que es la hipérbola, «Brennlinie», línea de incandescencia que es la parábola, «Schneckenlinie», línea de caracol para la espiral, «Muschellinie», línea de concha o concoides, «Spinnenlinie», línea de araña que son las epícliques, entre otras. Durero describió complicadas construcciones geométricas en un lenguaje claro y breve, además expresó en una prosa sencilla hechos históricos e ideas filosóficas. Conoció los escritos de Euclides, Arquímedes, Herón, Esporo, Ptolomeo y Apolonio.

Durero tomó los textos clásicos y romanos, y a su manera redactó y seleccionó algunos contenidos según sus intereses; colocó su poder imaginativo en sugestivas expresiones que le permitiera recordar la forma del objeto al pintor, y poner a su disposición los conocimientos matemáticos necesarios para el ejercicio de su arte. Peiffer (2000) afirma que los objetos que Durero toma en consideración son los formados por las manos de los artistas y los artesanos y las propiedades abstractas que puedan tener las figuras no le interesan sino en la medida en que puedan incorporarse en los objetos realizados por el artesano.

Durero va de lo abstracto a lo concreto, pues toma las definiciones abstractas de los objetos matemáticos y en un número determinado de pasos presenta la construcción gráfica, es decir, con operaciones concretas les confiere a los objetos matemáticos un contenido material y sensible⁶⁶. Durero en el *Underweysung der messung* indica los pasos que se deben ejecutar en la construcción del problema planteado con la regla y el compás. Cada uno de los textos va acompañado de una

⁶⁵ Vejiga de pez también denominada *vesica piscis*, es un símbolo realizado con dos circunferencias del mismo radio que se interceptan de manera que el centro de cada circunferencia está en la circunferencia del otro; sobre la figura se pueden dibujar triángulos equiláteros, rombos y hexágonos regulares y es posible encontrar segmentos que miden la raíz de 2, de 3 y de 5.

⁶⁶ Durero distingue entre figuras geométricas abstractas y su materialización en el pincel. En este sentido, él ofrece la siguiente descripción:

... un punto es algo que no tiene ni tamaño ni longitud, ni anchura, ni grosor, y, sin embargo, es principio y final de todas las cosas materiales que se pueden hacer o que podemos idear con nuestro pensamiento, como bien saben las personas que conocen mucho de este arte. Ningún punto ocupa lugar, pues es indivisible, y, no obstante, puede ser puesto por nuestro pensamiento o nuestras ideas en toda extremidad y lugar. [...]. Pero para que los jóvenes entiendan de trabajo práctico, quiero mostrarles un punto como un dibujo hecho con la punta de una pluma, y escribir a su lado la palabra «punto»; así queda representado el punto: «punto» — • —. (Durero, trad. en 2000, p. 133)

figura o varias que están numeradas y representan la explicación del escrito. El propósito del autor es incentivar a sus lectores a explorar, reinventar y prolongar las instrucciones recibidas para que descubran por ellos mismos la eminente utilidad práctica de las construcciones dadas, e invita a los artistas y artesanos a llevar más lejos sus investigaciones (Durero, trad. en 2000).

El *Underweysung der Messung* se publicó por primera vez en Núremberg en 1525, en alemán y no en latín, con el propósito de comunicar las teorías matemáticas y prácticas adquiridas por Durero en el taller (tratados italianos, libros antiguos) y por sus amigos humanistas y contemporáneos. *De la medida* como lo describe Panofsky es una “puerta giratoria entre el templo de la matemática y la plaza del mercado. Mientras familiarizaba a los toneleros y ebanistas con Euclides y Ptolomeo, familiarizaba también a los matemáticos profesionales con lo que podríamos llamar la «geometría de taller»” (1982, p. 267). En otras palabras, es un camino donde se encuentran la erudición y la práctica al servicio de artistas y artesanos.

El tratado está dividido en cuatro libros, el primer libro inicia con un homenaje a Euclides, donde Durero expresa: “El muy sagaz Euclides recopiló los fundamentos de la geometría⁶⁷. Quien los conozca bien, no tienen ninguna necesidad de lo escrito a continuación, pues solo se ha escrito para los jóvenes y para aquellos a quienes nadie ha instruido con excelencia” (trad. en 2000, p. 133). Se define el punto, la línea —recta, circular y serpentina—, líneas paralelas, convergentes o secantes e infinitas; el plano, cuerpos sólidos como, el cubo o cuerpo cuadrado, y la esfera o globo redondo; presenta la construcción de espirales —espiral de Arquímedes—, la división de un segmento y un arco; trata las secciones cónicas construidas y definidas por Apolonio, pero las realiza con un método conocido por carpinteros y arquitectos; describe la construcción de instrumentos en madera para dibujar ciertas curvas. Este primer libro termina con una inscripción que dice: “he dibujado algunas líneas, pero aún se pueden trazar muchas más para todo tipo de diseños. Con ellas se pueden hacer obras singulares, y quien discurre sobre lo anterior y se ponga manos a la obra, sacará provecho y continuará adelante” (Durero, trad. en 2000, p. 184). Durero reafirma su postura de continuar una formación matemática que es provechosa para la obra y el pintor.

⁶⁷ En el libro *De la medida* la palabra geometría aparece una sola vez al inicio del primer libro para designar a la geometría de Euclides. Durero distingue entre una geometría demostrativa, que es la de Euclides y la escribe en griego «γεωμετρία», y una geometría constructiva, que llama *Messung*, que es medida, de la que enseña las reglas y métodos en todo su tratado (Durero, trad. en 2000).

El segundo libro denominado *De las superficies planas* define las superficies planas, los ángulos (recto, agudo, obtuso) y ángulos con líneas curvas o convexas; presenta las figuras bidimensionales y la construcción aproximada de algunos polígonos: inicia inscribiendo un triángulo en un círculo y posteriormente va aumentando el número de vértices (4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14 y 15). Este libro también expone el problema de la geometría clásica, la trisección del ángulo; luego presenta algunas aplicaciones como rosetones y pavimentos con base en la unión de diferentes polígonos. Realiza la construcción de rectángulos semejantes y la transformación de algunas figuras. Finalmente, Durero expone el segundo problema de la geometría clásica, la cuadratura del círculo, así como también, el teorema de Pitágoras y la división de una superficie limitada por dos arcos de círculo.

El tercer libro, *De los cuerpos*, consagrado a la arquitectura, rinde un homenaje al Vitruvio, muestra la aplicación de la geometría a las tareas concretas de la arquitectura, la ingeniería, la decoración y la tipografía. Presenta la construcción de columnas con sus capiteles, basas y zócalos, tres monumentos, torres y relojes de sol. Al final del libro realiza la construcción geométrica de las letras romanas y góticas basándose en precedentes italianos, pero el alfabeto gótico lo presenta con sus propios diseños.

El último libro trata de la geometría de los cuerpos tridimensionales, estudia los cinco cuerpos regulares o platónicos, los cuerpos arquimedianos y la perspectiva. Durero muestra en este libro el último de los tres problemas griegos, la duplicación del cubo, por medio de tres construcciones diferentes y la única demostración en todo su libro; sin embargo, las construcciones y la demostración no son de la autoría de Durero.

El método que utilizó Durero para expresar sus ideas en esta obra es la geometría constructiva y exacta, es decir son construcciones regladas que repiten paso a paso una misma operación con la ayuda de la regla y el compás. Durero no desconoce su falta de formación en los problemas puramente matemáticos, por ello se vio en la obligación de acudir a consejeros más especializados, por ejemplo, en el libro primero para realizar una nueva variante de la espiral, escribe una nota que expresa las dudas que le surgen en la construcción de esta: “Preguntar a Hansen si puedo dividir un círculo en tantas partes como desee” (Durero, trad. en 2000, p. 140). El apoyo incondicional de sus más cercanos colaboradores como el matemático y astrónomo Johannes Werner, su amigo y humanista Pirckheimer quien traducía oralmente textos en latín al alemán para que Durero se sirviera de esos conocimientos y los plasmara en su libro. En el libro

De la medida aparecen las traducciones realizadas por sus amigos humanistas, pero también Durero conocía construcciones populares de la Edad Media estudiadas y publicadas en su tratado, algunas de ellas son los estudios de Matthaus Roritzer en la *Geometria deutsch*, los de Gregor Reisch en la *Margarita philosophica* y algunos tratados que circulaban durante la época.

Durero estaba convencido de que la obra de un pintor era mejor y más artística en la medida en que se acercara más a la exactitud de la naturaleza, pero también era necesario adquirir otros conocimientos a través del estudio y no solamente de la práctica y la imitación, ya que el estudio de textos antiguos como contemporáneos, y su relación con eruditos de la época, van formando al artista intelectual y profesionalmente. La realidad que el artista debía plasmar sobre una superficie bidimensional, por un lado, suministraba información científica sobre los propios fenómenos naturales como la expresión de las emociones, la estructura y funcionamiento del cuerpo humano, los animales y las plantas, la acción de la luz y el color, entre otros. Por otro lado, tenía que desarrollar un proceso científico, donde la suma de todos esos fenómenos sea la fiel representación de la realidad. No es solo la ubicación de los objetos o las figuras en un espacio lo que determina el realismo de la obra sino los sentimientos que reflejan el estado emocional y el carácter que dominan al artista.

La geometría permite que el artista participe de una verdad ya que el pintor es capaz de captar la justa medida de la naturaleza y plasmarla en una superficie bidimensional, pero esto es posible, en palabras de Peiffer (2000), con la familiarización de las construcciones geométricas que forman al ojo y le dan una cierta seguridad que hace a la mano obediente. En este sentido, Durero citado en Panofsky (1982):

...no es mi opinión que un artista haya de estar constantemente midiendo sus figuras. Si has aprendido el arte de la medición [geometría] y adquirido de ese modo a la vez teoría y práctica [...] entonces no siempre será necesario que lo midas todo constantemente, porque tu “arte” adquirido te dotará de vista correcta. (p. 287)

Las construcciones descritas en el libro *De la medida* le dan al pintor una formación matemática, aunque esa formación no sea desde el ámbito deductivo de esta disciplina, lo proveen de herramientas con las que puede desplegar nuevas y mejores construcciones para la creación de su obra. La combinación de la experiencia, la práctica y la teoría es lo que lleva a que un artista represente una buena obra.

Durero buscó combinar la experiencia del arte italiano, los conocimientos de humanistas y su formación en sus obras artísticas, y, sobre todo, fue capaz de sistematizar y publicar un tratado de geometría, donde deja entrever la convicción que tiene en tomar a la geometría como la base y fundamento de la pintura.

Capítulo 3.

Los tres problemas clásicos de la geometría en el libro *De la medida*

En cuánto honor y estima fue considerado por los griegos y romanos este arte bien lo demuestran los textos antiguos. Sin embargo, a continuación se extinguió por completo y permaneció oculto durante más de un milenio; y no ha sido sino en los últimos doscientos años que los italianos lo resucitaron.

Albero Durero

La actitud de Durero hacia el arte clásico⁶⁸, que los italianos habían retomado y adaptado durante el Renacimiento, no fue la de un heredero, tampoco el de un imitador sino, como lo llama Panofsky, la de un «conquistador». Durero reconquistó el arte bajo un programa organizado, ya que el arte del Norte solo podía asimilar los valores artísticos de la Antigüedad por medio de una reforma de los principios de la teoría y la práctica. Es en Italia donde renace o como dice Durero (2000), resurge el arte; de ahí también procedían las fuentes de las que obtuvo el conocimiento, la experiencia y la información oportuna para estudiar las obras de los teóricos italianos e ir consolidando su propio programa renacentista en Alemania. Durero supo entrever en el *Quattrocento* italiano, lo antiguo, pues le inculcó un sentimiento de belleza al arte nórdico, dotándolo de una fuerza y claridad clásica, es decir, enfrentó la realidad y pintó sin prejuicios (Panofsky, 1979).

Durero vinculó los elementos de la Antigüedad con la tradición de la Alemania del siglo XV por medio de las concepciones y formación de los italianos del *Quattrocento*. Fueron los italianos quienes sensibilizan al artista sobre la importancia de la geometría para el fundamento de la pintura, también le transmitieron nuevos estilos, técnicas y la nueva concepción del arte; sin embargo, Durero supo mantener una independencia como teórico y artista, lo que lo llevó a realizar un programa único y original, dirigido a sus discípulos y compatriotas en un lenguaje que el Norte podía comprender y adaptar a los diferentes oficios, ya que el arte de la pintura no se encontraba dentro de las artes liberales y mucho menos dentro de las ciencias.

⁶⁸ La fuerza expresiva y la belleza del cuerpo humano son dos ideales del arte clásico. En el Renacimiento se buscó retomar en la práctica los ideales del arte clásico, para sentar las bases teóricas por medio de las matemáticas.

Las relaciones con humanistas, teóricos, artistas, personajes influyentes de la época de Durero, son en gran parte los encargados de ir formando al artista en la experiencia estética de su arte y en las matemáticas. Para Durero las matemáticas son la base y el fundamento de la pintura, lo que lo llevará a alcanzar la tan anhelada belleza, medible con la regla y el compás. Pero, para encontrar los principios o leyes que rigen la belleza, se debe reconquistar la Antigüedad, aunque la única manera de llevar a cabo tal labor sea a través de los estudios realizados por los italianos.

Durero fue uno de los artistas que tomó elementos de la matemática, sin ser un erudito en este campo, la estudió, investigó y plasmó a su manera en el libro *De la medida*. Este libro involucra elementos que son útiles y le permitió el despliegue de la creatividad a todo aquel que tenga inquietudes artísticas y busque en el arte de la medida el recto fundamento de su oficio artístico (Durero, trad. en 2000).

Aunque Durero enfrenta ciertas dificultades de escritura, idioma y formación, es consciente de que la teoría y la práctica van de la mano y de que la una sin la otra no formará a verdaderos artífices de buenas y sensatas obras. También concibe, dentro de sus limitaciones en el campo de la geometría, una clara diferencia entre soluciones exactas o «demostrativas» y soluciones aproximadas o «mecánicas»; las primeras son aquellas que por medio de la construcción realizada con la regla y el compás no tienen una exactitud en el espacio visual, por lo que se debe buscar un fundamento puramente matemático; la segunda son soluciones que se han realizado paso a paso y su construcción gráfica satisface punto a punto la exactitud en el espacio visual.

En el tratado *De la medida*, Durero describe los pasos necesarios para realizar las construcciones⁶⁹ de objetos matemáticos que son útiles y prácticos para el pintor. La búsqueda de Durero en el plano artístico y teórico, mezcla todo tipo de elementos: culturales, emocionales, sociales, históricos, humanistas, entre otros. Estos elementos son los que llevan a Durero a apropiarse de un pensamiento renacentista, pero respetando la tradición y como lo dice Panofsky (1979): “No solo la respeta, sino que la contempla como algo real y objetivo que hay que estudiar, y, en caso necesario, restablecer” (p. 20). En este sentido Durero, deudor de los teóricos italianos, no es ajeno a esa realidad, pues estudia la geometría de Euclides no solamente la de su época, sino aquella que viene de los sabios, una geometría clásica; en particular Durero presenta los tres

⁶⁹ Peiffer, (2000) expresa, que los manuales prácticos en Alemania, en el siglo XV, se centraban en problemas de medidas y mediciones, a diferencia de Durero que busca soluciones gráficas a problemas de construcción geométrica, provenientes de las artes y los oficios, es decir, los problemas que enfrentan los artistas pueden encontrar dentro de la geometría posibles soluciones que les permita desarrollar y perfeccionar su hacer artístico.

problemas clásicos de la geometría, que, como él mismo lo manifiesta, aún no han sido demostrados por los sabios y solo se presentan por vía mecánica, es decir aproximada (Durero, trad. en 2000).

Los tres problemas griegos o clásicos de la geometría fueron planteados en la Grecia clásica, alrededor del siglo V a. C. Los matemáticos de diferentes épocas se ocuparon por resolverlos, y aún hoy siguen siendo de gran admiración y estudio: la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo. Estos problemas no se enmarcan dentro de las construcciones geométricas basadas en los *Elementos* de Euclides, puesto que solo se permitían construcciones hechas exclusivamente con los instrumentos platónicos, la regla y el compás.

En la geometría clásica, a la regla se le supone longitud infinita carente de marcas y no puede ser utilizada para medir o trasladar distancias, pues solo permitía el trazado de rectas y segmentos por dos puntos dados. El compás es un compás colapsable, es decir, se cierra súbitamente cuando se separa del papel, de manera que no puede utilizarse directamente para trasladar distancias, porque «olvida» la separación de sus puntas en cuanto termina de trazar la circunferencia. Estos dos instrumentos denominados ideales son la realización física de dos objetos geométricos, la recta y la circunferencia.

La restricción para el uso del compás y la regla sin escala, exclusivamente, en el estudio de la geometría clásica fue motivada por los griegos y con el deseo de mantener a la geometría como una ciencia simple, ordenada y estéticamente bella; por ello, la implementación de instrumentos adicionales habría destruido el valor de la geometría como un ejercicio creativo, intelectual y analítico, el introducir otros elementos era considerado indigno de un pensador. Los griegos estaban interesados en encontrar el mayor número de construcciones posibles utilizando únicamente estos instrumentos.

A continuación, se presenta una descripción de cada uno de los tres problemas clásicos de la geometría y cómo los griegos para dar solución a los tres problemas se vieron obligados a usar otras curvas o usar la regla de una manera no permitida en la geometría de la época, acompañado de los diferentes esfuerzos que algunos matemáticos se dedicaron a estudiar y presentaron una posible solución. También se muestran las soluciones de estos tres problemas desde la perspectiva del artista Alberto Durero, situando a cada uno de ellos en un plano histórico, artístico y práctico.

3.1. La trisección del ángulo

El origen del problema de la trisección del ángulo posiblemente se debe a la construcción de polígonos regulares, ya que bisecar un ángulo permitía construir polígonos con el doble de lados de un número dado; sin embargo, trisecar un ángulo para construir polígonos con el triple de lados de un número dado no era posible con la regla y el compás; pero en algunos casos particulares la trisección del ángulo es soluble con estos instrumentos, por ejemplo, para un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ se construye un triángulo equilátero y se obtienen el ángulo de $\frac{\pi}{6}$ que triseca el ángulo recto. Es posible trisecar el ángulo de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$, entre muchos más. Aunque los griegos no encontraron una herramienta que permitiera resolver en un determinado número de pasos la trisección de cualquier ángulo con regla y compás, varios matemáticos se dedicaron desde entonces a estudiar y plantear soluciones, utilizando otros recursos e instrumentos mecánicos y curvas mecánicas⁷⁰ para resolver el problema.

El estudio y descubrimiento de novedosas curvas para dar solución a la trisección del ángulo mantuvo ocupados a varios matemáticos durante muchos siglos. Una de las curvas que se puede utilizar como herramienta adicional para trisecar cualquier ángulo es la *trisectriz*, que es una curva que se crea mediante un movimiento uniforme alrededor de un eje; estas curvas no se pueden construir utilizando solamente la regla y el compás, sino por diferentes métodos mecánicos. Entre los ejemplos más conocidos están: la trisectriz caracol (o *limaçon*), la trisectriz de Maclaurin, la trisectriz de Longchamps, cúbica de Tschirnhausen (o trisectriz de Catalan y cúbica de L'Hopital), el folium de Durero, la espiral de Arquímedes, trisectriz de Hipias (o cuadratriz de Hipias), la cicloide de Ceva, la trisectriz de Deslanges y muchas más. A continuación, se presentan algunos métodos de la trisección del ángulo por medio de curvas e instrumentos mecánicos.

3.1.1. Trisectriz de Hipias

Alrededor del año 420 a. C. el sofista Hipias de Élida⁷¹ introduce la primera curva diferente de la circunferencia denominada la *trisectriz de Hipias*, que posteriormente será utilizada por Dinóstrato para cuadrar el círculo la que se conocerá también con el nombre de *cuadratriz*.

⁷⁰ Las curvas mecánicas son aquellas que se generan por el movimiento de un punto bajo ciertas condiciones. Para los griegos estas curvas no fueron muy aceptadas, pues carecían de la pureza matemática de las curvas geométricas.

⁷¹ Hipias de Élida nació en la ciudad de Elis, capital de la Élida, en el año 460 a. C., fue un matemático y maestro en geometría, astronomía, música y filosofía.

La construcción de la trisectriz de Hippias (figura 9) se realiza de la siguiente manera:

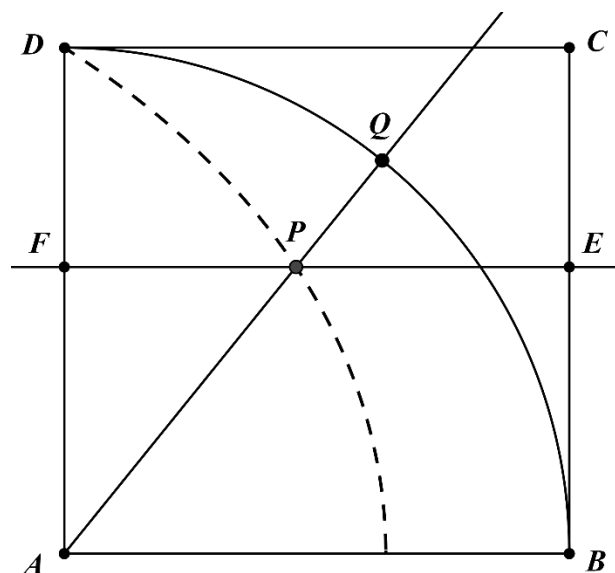
Dado un cuadrado $ABCD$, con el centro A constrúyase el arco de circunferencia $\widehat{BD}$.

Sea Q un punto que se desplaza con una velocidad constante en el arco $\widehat{BD}$ y sea F un punto que se desplaza con una velocidad constante en el segmento $\overline{AD}$, de tal manera que el punto F comienza en el punto A al mismo tiempo que el punto Q comienza en el punto B . Además, tanto el punto Q como el punto F llegan al punto D al mismo tiempo.

Sea P el punto de intersección de la recta $\overrightarrow{FE}$, que es paralela al segmento $\overline{AB}$, y la semirrecta $\overrightarrow{AQ}$. Entonces, la cuadratriz⁷² de Hippias se define como el lugar geométrico del punto P cuando el punto Q se desplaza en el arco $\widehat{BD}$.

Figura 9

Construcción de la trisectriz de Hippias.



Fuente: elaboración propia.

La curva de Hippias permite trisecar un ángulo cualquiera, como también dividir el ángulo en segmentos congruentes. Utilizando la curva se tiene la trisección del ángulo BAQ (figura 10), como se presenta a continuación.

Se divide el segmento $\overline{AF}$ en tres partes iguales, obteniendo los puntos G y H ; se trazan dos rectas paralelas. Al segmento $\overline{FE}$ que pasan por los puntos G y H . Sean M y R los puntos de

⁷² La ecuación cartesiana de la cuadratriz de Hippias es:

$$f(x) = x \cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

3.1.2. La neusis de Arquímedes

El método de *neusis* o inclinación es un método de construcción geométrica que fue utilizado en la antigüedad por algunos matemáticos griegos. Consiste en insertar un segmento de longitud dada entre dos líneas dadas, de modo que la recta que contiene el segmento pase por un punto fijo dado, al que suele llamarse «polo». La construcción *neusis* se debe realizar con un compás y una «regla marcable», es una regla en la que se puede dibujar rayas para guardar memoria exacta de la distancia; esta regla es distinta de la regla euclidiana.

Este método permitió resolver problemas que no se pueden solucionar por medio de construcciones con regla y compás como, por ejemplo, la construcción de un heptágono regular o la trisección de cualquier ángulo. Arquímedes⁷³ hizo uso de la construcción *neusis* (figura 11) para trisecar un ángulo como se describe a continuación:

Dado un ángulo BAC y una regla con dos marcas E y F , se traza la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB} = \overline{EF}$.

Luego, se coloca a E en la semirrecta $\overrightarrow{BA}$ y a F en la circunferencia, de tal modo que la recta (regla marcada con E y F) pase por el punto C , es decir, desde el punto C trazamos una línea que corte a la semirrecta $\overrightarrow{BA}$ en el punto E y también corte a la circunferencia en el punto F con la propiedad de que $\overline{EF} = \overline{AB}$. El segmento $\overline{EF}$ es la *neusis*.

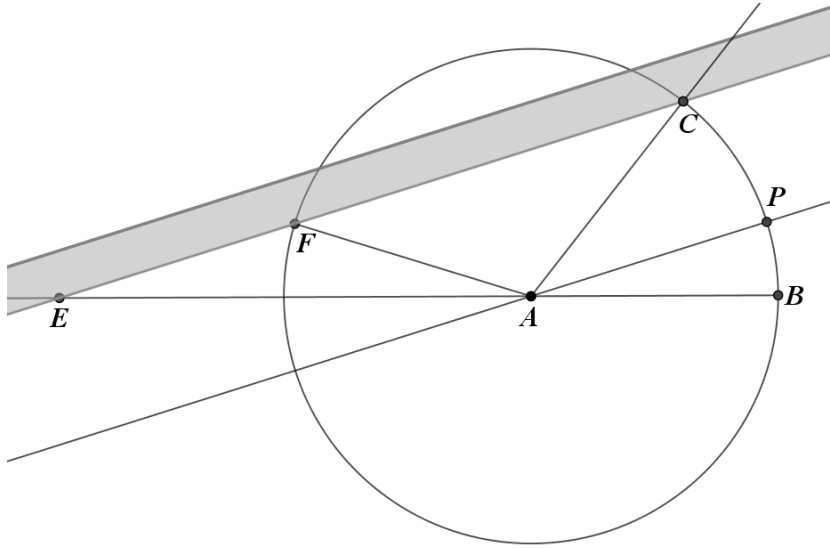
Finalmente, si trazamos desde el centro A el radio $\overline{AP}$ de la circunferencia tal que el segmento $\overline{AP}$ sea paralelo al segmento $\overline{EC}$, se tiene que el segmento $\overline{AP}$ triseca al ángulo BAC .

Por tanto, el ángulo BAP es un tercio del ángulo BAC .

⁷³ Arquímedes nació en Siracusa, Sicilia, en el año 287 a. C. Fue un físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático griego y fue considerado uno de los científicos más importantes de la Antigüedad. Entre sus aportes a la física se encuentran sus fundamentos en hidrostática, estática y la explicación del principio de la palanca. En la matemática usó el método exhaustivo para calcular el área bajo el arco de una parábola con el sumatorio de una serie infinita, y dio una aproximación del número pi; definió la espiral que lleva su nombre, fórmulas para los volúmenes de las superficies de revolución, entre otros. También diseñó innovadoras máquinas, armas de asedio y el tornillo de Arquímedes.

Figura 11

Trisección del ángulo por la neusis de Arquímedes.



Fuente: elaboración propia.

En efecto, el triángulo EAF y el triángulo FAC son isósceles por ser radios $\overline{EF} = \overline{FA}$ y $\overline{AC} = \overline{FA}$ respectivamente.

Luego,

$$m \angle AFE = \pi - 2(m \angle FAE)$$

Entonces, por ser los ángulos AFC y AFE suplementarios tenemos que:

$$m \angle AFC = 2(m \angle FAE)$$

Luego, como el triángulo FAC es isósceles:

$$m \angle ACF = 2(m \angle FAE)$$

Y

$$m \angle FAC = \pi - 4(m \angle FAE)$$

Así,

$$m \angle BAC + m \angle FAC + m \angle FAE = \pi$$

Remplazando la $m \angle FAC = \pi - 4(m \angle FAE)$ en la ecuación anterior tenemos que:

$$m \angle BAC + \pi - 4(m \angle FAE) + m \angle FAE = \pi$$

Por tanto,

$$\frac{1}{3} m \angle BAC = m \angle FAE$$

3.1.3. La trisección del ángulo en el libro *De la medida*

Las construcciones realizadas por Durero en el libro *De la medida* no obedecen a una estructura lógica o constructiva para el aprendizaje de su arte, más bien Durero expone una serie de problemas construibles con regla y compás, que ayudan e incentivan la creatividad de sus aprendices y descubren nuevas figuras, pero sobre todo alcanzan un mayor conocimiento en el arte de la pintura. Durero (trad. en 2000) manifiesta que gracias a los italianos quienes se encargaron de sacar nuevamente a la luz lo honorable y digno de la pintura, y a la recopilación y reconstrucción de los textos antiguos, le permitió estudiar y recuperar el sentido de su profesión para poder enseñar e instruir a futuros artistas.

Durero era consciente que para poder enseñar a otros jóvenes el arte de la pintura, él estaba en la obligación de formarse no solo en las técnicas y estilos que se requieren para la práctica de su profesión, sino en el estudio de la geometría; sin embargo, el artista se encuentra con ciertas limitaciones en este campo de las matemáticas, pero ello no impidió que enfrentara y expusiera en su tratado problemas que no tenían solución con la regla y el compás y que aún no habían sido demostrados por los sabios, como es: la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Durero presenta la construcción de la trisección del ángulo partiendo de un arco de circunferencia arbitrario; no hace ninguna referencia a las dificultades de este problema, sino que lo expone como una aplicación práctica que se puede realizar con la regla y el compás.

El problema de la trisección del ángulo se encuentra en el segundo libro, numeral 20, después de realizar la construcción e inscripción de polígonos regulares. La construcción descrita paso a paso va acompañada de una gráfica⁷⁴ (figura 13) como se expone en el siguiente pasaje:

Todo segmento circular⁷⁵ que pueda imaginar, lo divido en tres partes de la manera siguiente. Los extremos del arco del círculo *ab* están unidos con una línea recta. Como he enseñado antes, divido la recta *ab* con dos puntos *c* y *d* en tres partes iguales⁷⁶. A

⁷⁴ En el libro *De la medida* las gráficas o dibujos, como los llama Durero, van acompañadas de un número, indicando el orden secuencial de los problemas dentro del libro. Las representaciones no obedecen a la notación que actualmente se tiene en la geometría, Durero utiliza letras minúsculas o números para denotar los puntos de intersección entre dos curvas.

⁷⁵ Durero propone un método general para trisecar un arco de circunferencia arbitrario. En este caso se toma un arco de circunferencia delimitado por la cuerda *ab* (figura 13).

⁷⁶ La trisección de un segmento se encuentra en el primer libro, numeral 21 (figura 12), describe dos métodos diferentes, uno de ellos expresa lo siguiente:

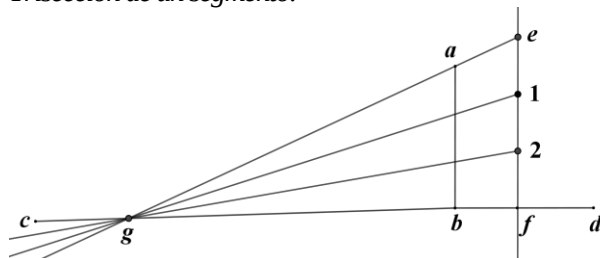
Sea la línea dada *ab*. Ponla sobre una horizontal *cd*. A continuación toma con un compás una medida menor a la mitad de la longitud de la vertical *ab*. Pon uno de los brazos del compás en la línea horizontal *cd* a un

continuación pongo un brazo de un compás en el punto a y con el otro trazo desde el punto c una línea que corte el arco, y donde lo haga pongo una e . A continuación pongo un brazo del compás en el punto b y con el otro trazo desde el punto d una línea que corte el arco, y, donde lo haga, pongo una f . A continuación trazo dos líneas verticales desde c y d al arco, poniendo g y h . Así las tres longitudes ae , gh y fb ⁷⁷serán iguales entre sí, quedando dos pequeños espacios eg y hf . A continuación cojo un compás, pongo un brazo en el punto a y el otro en el punto g , y desde aquí trazo un arco hasta la recta ab , y pongo una i . Luego pongo un brazo del compás en el punto b y desde el punto h trazo con el otro un arco hasta la línea ab y pongo k . A continuación divido ci y kd con dos puntos en tres partes, como he enseñado antes. Pongo un brazo del compás en el punto a y el otro en el punto más cercano a i , trazo una línea hasta el arco del círculo y pongo allí una l . A continuación pongo un brazo del compás en b y el otro en el punto más cercano a k , y trazo una línea desde aquí al arco de círculo y pongo una m . Así el arco de círculo ab queda dividido con los puntos l y m en tres partes, como he dibujado debajo. Quien desee una mayor precisión, que la busque por vía demostrativa. (Durero, trad. en 2000, p. 197)

lado de la línea ab . Repite tres veces esta medida en vertical y une los puntos con una línea recta que sea paralela a ab . El extremo superior de esta línea será e y el inferior f , y los dos puntos intermedios, que la dividen en tres partes iguales, los designamos con los números 1 y 2. A continuación, traza desde el extremo e una línea oblicua al extremo a y continúa hasta la horizontal cd , y, donde la corte, pon una g . A continuación traza desde el punto g dos líneas oblicuas a los puntos 1 y 2. Así la línea ab quedará dividida en tres partes iguales por la intersección de las líneas oblicuas que se han trazado. (Durero, trad. en 2000, pp. 153-154)

Figura 12

Trisección de un segmento.

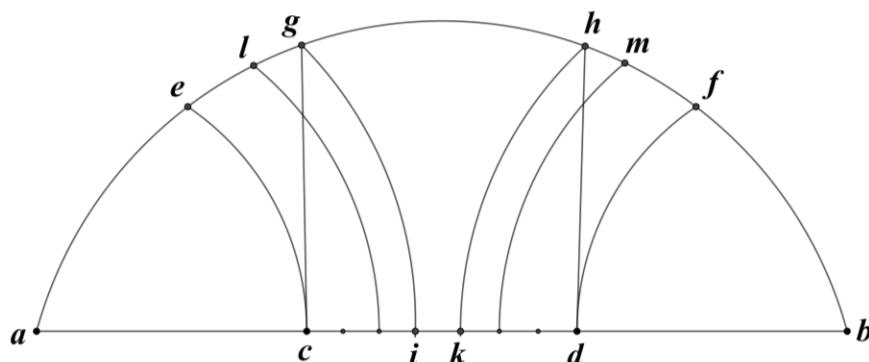


Fuente: elaboración propia.

⁷⁷ Si se toma ae , gh y fb como segmentos congruentes no se puede identificar las cuerdas que al ser ordenadas en el arco determinarían su trisección, es decir tendría resuelto el problema de la trisección del ángulo. Durero no hace ninguna referencia a la dificultad, pero refiere que hay dos espacios que se deben considerar que son los arcos eg y fh para completar la trisección.

Figura 13

Trisección del ángulo en el Libro de la medida.



Fuente: elaboración propia.

La descripción realizada por Durero sobre la trisección del ángulo es realmente trisecar un arco de circunferencia arbitrario delimitado por una cuerda ab , es una construcción aproximada pues el mismo autor refiere que si se quiere tener una «mayor precisión» se debe acudir a un fundamento puramente matemático, es decir, que la construcción no tiene una exactitud en el espacio visual.

Al encontrar los puntos l y m (figura 13) que dividen el arco en tres partes iguales, se tiene que el segmento lm es mayor al segmento $al = bm$, ya que al trisecar el segmento ci (tomando el sector izquierdo de la construcción) se escoge el punto más cercano al punto i , pues se quiere suprimir una tercera parte de la diferencia sobre los segmentos que se exceden, en este caso ci , para así obtener una compensación cuando dicha distancia se despliegue sobre el arco que se quiere trisecar.

3.1.4. La trisección del ángulo con el folium de Durero

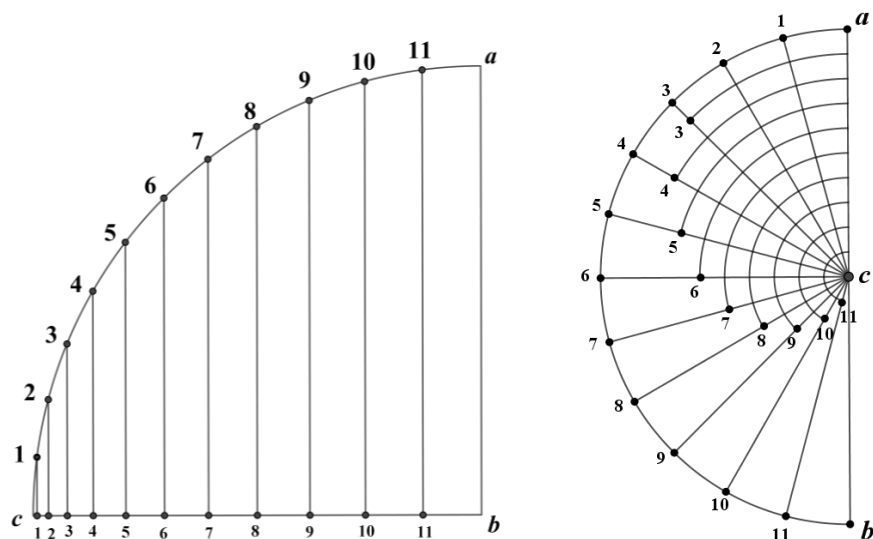
La curva descrita en el libro I, numeral 18, denominada *Folium de Durero* por Staigmuller, es una espiral presentada en dos figuras separadas (figura 14), en la primera se sugiere una regla de variación de las distancias de una espiral simple y la segunda imagen determina el desplazamiento angular de la espira (Cardona, 2006). La descripción realizada por Durero afirma lo siguiente:

Dispón un cuadrante abc , en el que b es el centro, a está arriba y c a un lado. A continuación divide este arco con once puntos en doce⁷⁸ partes iguales, y comienza la

⁷⁸ Durero realiza la división de un arco en 12 partes iguales, específicamente de una circunferencia, en el primer libro *De la medida*, donde describe la construcción de una espiral. Este procedimiento fue estudiado por

numeración por el punto *c*. Traza desde todos los puntos líneas paralelas hasta la horizontal *cb*, y desígnalas con los mismos números que el arco, comenzando asimismo la numeración por el punto más cercano a *c*. De este modo, esta línea recta *cb* estará dividida en función del círculo *ac*. Ya está preparado el primer fundamento. A continuación traza desde un punto *c* hacia abajo un semicírculo de igual forma que el cuadrante superior, de manera que la línea recta que limita el semicírculo sea una vertical con un extremo superior *a*, uno inferior *b* y el centro *c* en el medio. A continuación divide el semicírculo con once puntos en doce partes iguales, y comienza a numerarlas desde *a*. Traza luego líneas rectas desde todos los puntos numerados al punto *c*. A continuación traza líneas radiales desde el centro *c* a todos los puntos numerados. Coge luego un compás y ponlo en el cuadrante superior con uno de los brazos en el centro *b* y el otro en el punto 1 de la horizontal *cb*. Toma esta medida con el compás y llévala al semicírculo de abajo; pon uno de los brazos del compás en el punto *c* y el otro en la parte superior de la vertical *ab*, debajo de *a*, y traza desde allí un arco de círculo hasta la línea radial 1*c*; en este punto así obtenido pon también el número uno. A continuación vuelve a coger el compás y pon uno de sus brazos en el centro del cuadrante y el otro en el punto dos de la horizontal *cb*. Toma esta medida, llévala al semicírculo inferior y pon uno de los brazos del compás en el centro *c*, más el otro ponlo en la línea radial 1*c*, y traza un arco de círculo desde allí hasta la siguiente línea 2*c*; y en este punto pon también el número 2. Continúa haciendo lo mismo entre todos los radios del semicírculo inferior, si tomas todas las medidas previamente indicadas en la línea *cb* del cuadrante superior y las trasladas abajo, y marcas con sus números correspondientes los puntos que se han originado en los radios por la intersección de los trazos curvos, descubrirás como desarrollar punto por punto la espiral desde *a* al centro *c*. (Durero, trad. en 2000, pp. 151-152)

Rupprich (1971), quien encuentro el mismo principio de construcción de la espiral de Arquímedes, pero con cierta claridad y algunos ajustes inspirados por Durero. También le permite realizar algunas aplicaciones de la espiral como, por ejemplo, espiral con hojas, el báculo episcopal y la línea para labores de follaje, que se encuentran descritas en el mismo libro.

Figura 14*Construcción de la espiral de Durero.*

Fuente: elaboración propia.

La construcción realizada por Durero (figura 14) es una sola línea en espiral, ya que en la primera parte divide el cuadrante en 12 partes iguales y desciende a los puntos perpendiculares al radio del cuadrante; en la segunda figura divide un semicírculo del mismo radio también en 12 partes iguales y dibuja en los radios trazados a estos puntos, en secuencia desde el centro, las líneas del cuadrante, los puntos sobre los radios del semicírculo determinan su nueva línea de hélice. Si se unifican los dos esquemas y la proyección sobre la vertical se extiende la propuesta de Durero en un ángulo entre 0 y 4π , y se obtiene una curva⁷⁹ de cuatro ramas, donde cada una forma un «caracol» (figura 15).

⁷⁹ La ecuación de la espiral de Durero en coordenadas polares es la siguiente:

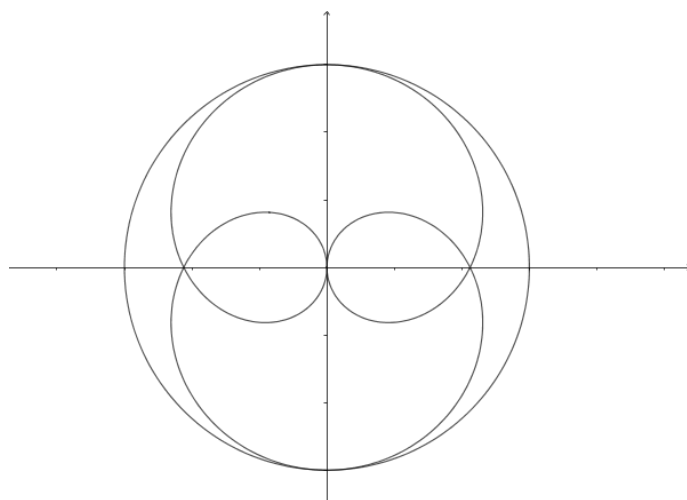
$$\rho = R \sin \frac{\omega}{2} \text{ donde } 0 \leq \omega \leq 4\pi$$

Y en coordenadas cartesianas se expresa así:

$$4(x^2 + y^2)^3 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 + R^4x^2 = 0$$

Figura 15

Construcción continua del folium o espiral de Durero.



Fuente: elaboración propia.

La espiral de Durero como una curva mecánica permite trisecar un ángulo de la siguiente manera (figura 16):

Sean r_1 y r_2 circunferencias con centro A y R respectivamente y tangentes en el punto C . Sea el punto P la intersección entre la circunferencia y el folium de Durero, se traza la semirrecta $\overrightarrow{AP}$ que intercepta a la circunferencia r_1 en el punto Q . De modo que la medida del ángulo PAC es un tercio de la medida del ángulo BAC ⁸⁰.

En efecto, sean D y B puntos de intersección entre la circunferencia r_1 y el *folium de Durero*; E el punto de intersección entre los segmentos $\overline{DQ}$ y $\overline{AC}$, y F el punto de intersección entre los segmentos $\overline{DQ}$ y $\overline{CP}$.

Los arcos $\widehat{CQ}$ y $\widehat{CP}$ son congruentes, por lo tanto, los ángulos CEQ y CRP son congruentes.

Sea F un punto del segmento $\overline{EQ}$ entonces, los siguientes ángulos son congruentes, $\angle CEF \cong \angle CRP$ y el $\angle FCE \cong \angle FCE$ por el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo, se tiene que el triángulo EFC es semejante al triángulo RPC .

Así, por el teorema de ángulos correspondientes entre dos rectas y como los ángulos son congruentes entonces, los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{RP}$ son paralelos. Luego los segmentos $\overline{DQ}$ y $\overline{RP}$ son paralelos, por lo tanto, los ángulos RPA y DQA son congruentes.

⁸⁰ La trisección del ángulo con el *folium de Durero* se cumple siempre y cuando el ángulo mida a lo sumo 135° .

Es decir,

$$m \angle BAC = 2 m \angle RAP + m \angle RAP$$

Luego,

$$m \angle BAC = 3 m \angle RAP$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3} m \angle BAC = m \angle RAP$$

3.1.5. La flor de doce pétalos

En el segundo libro, *De la medida*, se inicia con las construcciones de figuras planas limitadas por rectas y curvas, y la construcción de polígonos regulares. Además, en este libro Durero da inicio a las aplicaciones, es decir, describe la construcción de teselados⁸¹ y estrellas⁸² de cinco, seis, siete y ocho puntas.

La construcción del numeral 21, del libro II, relata cómo realizar la intersección de diversos círculos, en particular, presenta una flor de 12 pétalos; para esta construcción toma una circunferencia que divide en partes iguales en 12 puntos, es decir, que esta construcción es una buena oportunidad de aplicar la trisección del ángulo (figura 17) que acababa de enunciar en el numeral 20 del libro *De la medida*. Sin embargo, Durero en su descripción no menciona el proceso de la división de la circunferencia en los 12 puntos.

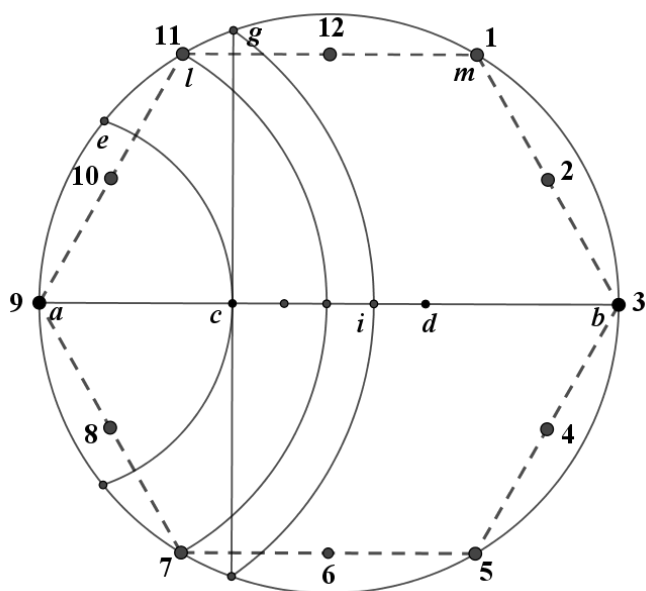
La construcción de los doce puntos sobre la circunferencia (figura 17) se realiza aplicando la división del arco de circunferencia delimitado por el segmento *ab*, como se ha anunciado anteriormente por Durero (la trisección del ángulo), del que resulta un hexágono y sobre cada uno de sus lados se encuentra el punto medio para obtener los doce puntos de la circunferencia.

⁸¹ El teselado se refiere a un patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana con dos o más polígonos (regulares, irregulares o diseños especiales), sin que se sobrepongan y sin dejar espacios vacíos entre ellos.

⁸² Las estrellas que denomina Durero son realmente construcciones de flores a partir de circunferencias, y los diferentes puntos de intersección entre ellas; el número de pétalos depende de la cantidad de circunferencias que se utilicen.

Figura 17

División de una circunferencia en doce puntos.



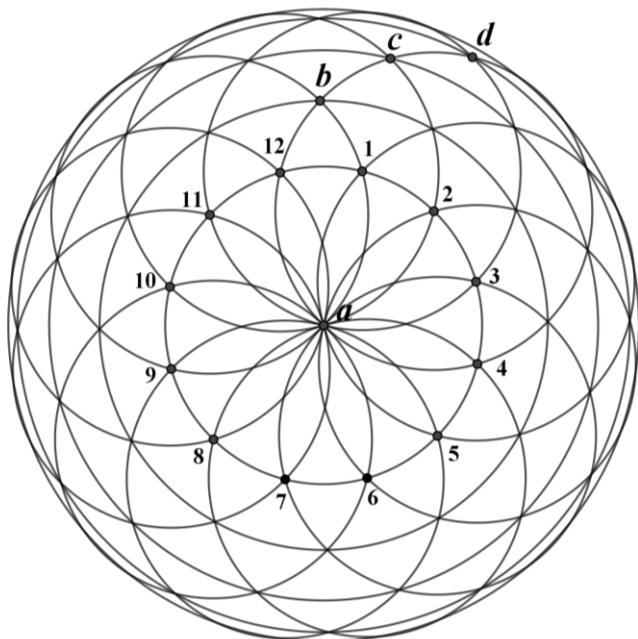
Fuente: elaboración propia.

Durero relata la construcción de la flor de doce pétalos (figura 18), como se presenta a continuación:

También se pueden trazar diversos tipos de círculos secantes y hacer con ellos muchas cosas. Voy a mostrar uno o tres de ellos, más casi de un mismo parecer, de los que se pueden deducir otros con sus anexos. Trazo un círculo de centro *a*, que dividido en partes iguales con 12 puntos. Desde cada uno de ellos trazo con compás fijo una línea que pase por el centro *a*. De este modo, 12 círculos dividen el centro *a* en trece. A continuación trazo desde el centro *a*, en el interior del círculo grande, otros cuatro círculos que pasen por los puntos de intersección de los demás círculos, designados como *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, etcétera. (Durero, trad. en 2000, pp. 198-199)

Figura 18

Flor de doce pétalos a partir de círculos secantes.



Fuente: elaboración propia.

3.2. La cuadratura del círculo

El primer filósofo que se interesó por el problema de la cuadratura⁸³ del círculo⁸⁴ fue Anaxágoras⁸⁵ mientras se encontraba en prisión por afirmar, entre otras cosas, que el sol no era un dios sino una masa de fuego incandescente y que era más grande que el Peloponeso. Los antiguos griegos buscaron dar solución al problema de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, utilizando solo la regla y el compás. Sin embargo, los griegos consiguieron cuadrar cualquier figura poligonal, es decir, era posible cuadrar superficies de lados rectilíneos como el rectángulo, el triángulo y los polígonos, mediante la descomposición en triángulos. Luego se buscó cuadrar figuras con bordes curvilíneos y la primera de ellas es la circunferencia. La solución de casos

⁸³ Una superficie es *cuadrable* o se puede cuadrar cuando, a partir de una figura dada, es posible obtener geoméricamente un cuadrado que tenga la misma área que la figura.

⁸⁴ La cuadratura del círculo significa que si el círculo tiene área igual a πr^2 entonces el lado del cuadrado debe ser igual a $\sqrt{\pi} \cdot r$. Por lo tanto, el problema se reduce a construir un cuadrado de lado igual a $\sqrt{\pi}$.

⁸⁵ Anaxágoras (500-428 a. C.) nació en Clazómenas y se trasladó a Atenas hacia el año de 483 a. C. fue un filósofo presocrático que introdujo la noción de *nous*, «mente o pensamiento», como elemento fundamental de su concepción filosófica.

particulares de la cuadratura de figuras curvilíneas, como las *lúnulas*⁸⁶ de Hipócrates de Quíos⁸⁷, llevó a los antiguos a pensar erróneamente que se podría llegar a cuadrar el círculo.

La lúnula fue la primera figura curvilínea que se logró cuadrar con regla y compás; en particular el caso tratado por Hipócrates es la lúnula formada por el semicírculo, construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles ABC y el semicírculo sobre uno de sus catetos AC (figura 19).

En efecto, sea A_1 el área de la lúnula, A_2 el área entre el triángulo ABC y la lúnula, y A_3 el área del triángulo ADC .

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 2 \overline{AC}^2$$

Luego, la razón entre las áreas de dos círculos es igual a la razón de las áreas de los cuadrados contruidos sobre sus diámetros.

Así,

$$\frac{Area(\widehat{AC})}{Area(\widehat{AB})} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{2 \overline{AC}^2} = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$Area(\widehat{AC}) = \frac{1}{2} Area(\widehat{AB})$$

Remplazando tenemos que:

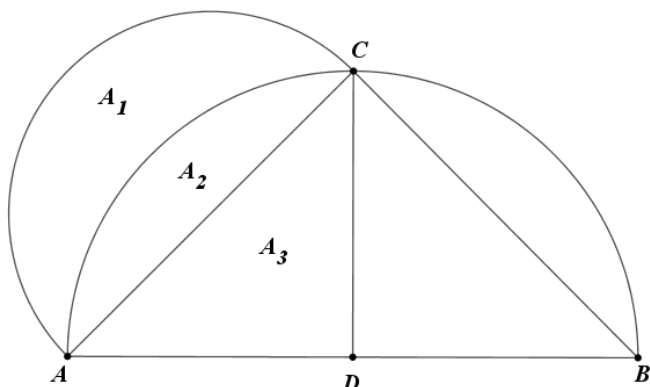
$$A_1 + A_2 = A_2 + A_3$$

Por tanto,

$$A_1 = A_3$$

⁸⁶ En geometría se denomina *lúnula* a cualquiera de las dos figuras con forma semejante a la de una luna creciente obtenidas mediante la intersección de dos círculos.

⁸⁷ Hipócrates de Quíos nació en la isla de Quíos, fue un matemático, geómetra y astrónomo griego, aproximadamente vivió entre el 470 y el 410 a. C.

Figura 19*Lúnula de Hipócrates.*

Fuente: elaboración propia.

La cuadratura de la lúnula sin duda llenó de optimismo a los matemáticos griegos para cuadrar el círculo, pero los trabajos y construcciones que realizaban algunos matemáticos mostrarían que no es posible cuadrar el círculo solamente con regla y compás; aunque ningún geómetra griego pudo probar la irresolubilidad de la cuadratura del círculo (como tampoco la trisección del ángulo y la duplicación del cubo), era necesario la construcción de curvas mecánicas para dar una posible solución o aproximación del problema.

La primera cuadratura del círculo utilizando una curva mecánica como, la trisectriz de Hippias fue realizada por Dinostrato⁸⁸, hermano de Menecmo, a partir de entonces la curva se denominará *cuadratriz*. Otro procedimiento destacado en la antigüedad fue la espiral creada por Arquímedes y un procedimiento moderno es la cuadratriz de Abdank-Abakanowicz⁸⁹.

Dinostrato utilizó la cuadratriz de Hippias (figura 20) como una herramienta de construcción adicional, además la cuadratura del círculo es posible gracias al teorema de Dinostrato que permite convertir un cuarto de círculo en un cuadrado de la misma área.

El teorema afirma que, un cuadrado con el doble de longitud de su lado tiene la misma área que el círculo completo, es decir, que el lado a del cuadrado generatriz es media proporcional entre el segmento $\overline{AN}$ y el arco de circunferencia $\widehat{DB}$; por tanto:

$$\frac{\widehat{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AN}}$$

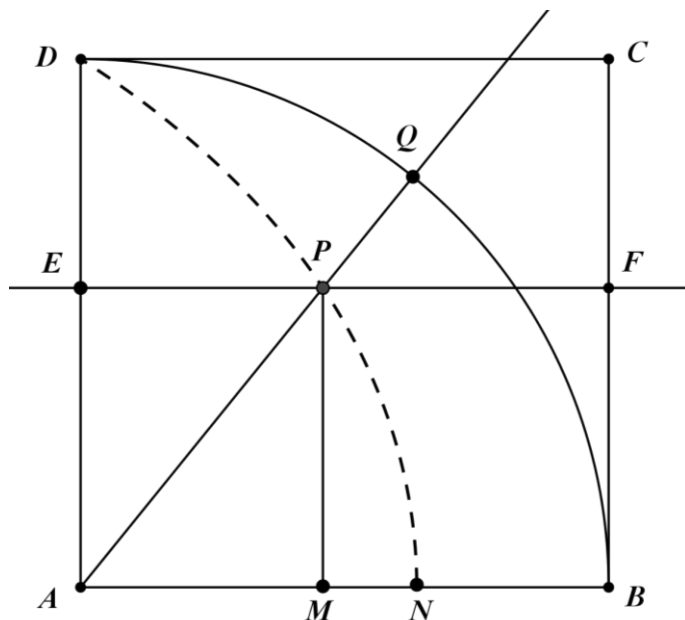
⁸⁸ Dinóstrato (390 a. C. - 320 a. C.) fue un matemático y geómetra griego. La mayor contribución que realizó a las matemáticas fue su solución al problema de la cuadratura del círculo empleando la trisectriz de Hippias.

⁸⁹ Bruno Abdank-Abakanowicz nació en 1852 en Vilkmergė, Imperio ruso, fue un matemático, inventor e ingeniero eléctrico polaco-lituano.

Así, conocido el segmento $\overline{AN}$ y $\overline{AB}$ mediante una construcción geométrica, se puede determinar el segmento del término que falta en la proporción geométrica, es decir, de longitud el arco de circunferencia $\widehat{DB}$.

Figura 20

Hipias y la cuadratura del círculo.



Fuente: elaboración propia.

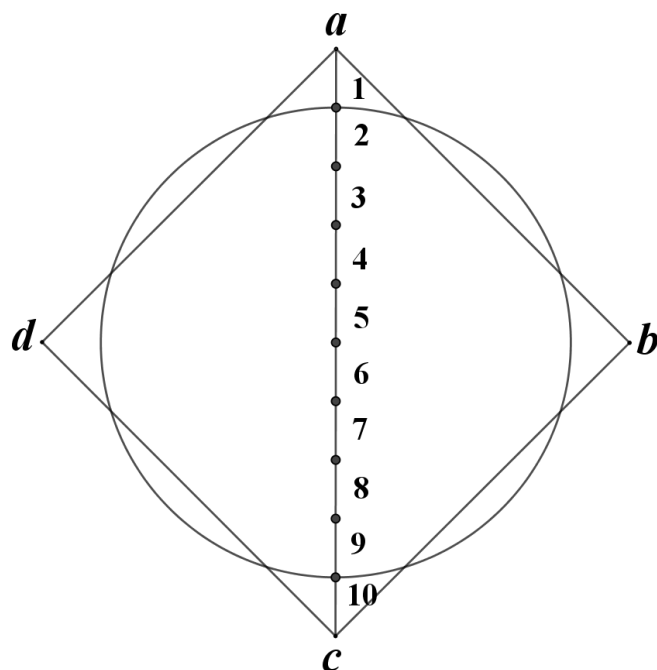
3.2.1. La cuadratura del círculo en el libro *De la medida*

En el libro *De la medida* la cuadratura del círculo se presenta en el segundo libro, numeral 34. Durero manifiesta que este problema no ha sido aún demostrado por los sabios, pero se puede realizar una comparación aproximada, tal que en la práctica no haya error o si lo hay sea mínimo. La construcción inicia (figura 21):

Sería necesario conocer la *quadratura circuli*, esto es la comparación de un círculo y un cuadrado, de manera que uno tenga la misma superficie que el otro. Traza un cuadrado y divide la diagonal en diez partes. A continuación, traza una circunferencia cuyo diámetro debe tener ocho partes, como tiene el diseño de la cuadratura. (Durero, trad. en 2000, p. 212)

Figura 21

La cuadratura del círculo por Durero.



Fuente: elaboración propia.

En un manuscrito publicado por Rupprich, 1971 citado en Peiffer, 2000, Durero presenta una justificación de la construcción del problema de la cuadratura realizada en el libro *De la medida*. Para ello (figura 21) superpone el círculo y el cuadrado y constata que las dos figuras se desborden mutuamente, es decir los ángulos del cuadrilátero $abcd$ sobresalen del círculo, y el círculo desborda a la vez los lados del cuadrilátero $abcd$. Durero afirma que los desbordamientos deben tener la misma área, pues lo que se añade también se recorta.

Porque lo que es añadido o recortado lo es con la ayuda de una misma circunferencia, y hay que comparar las líneas mediante las cuales se añade o se recorta, porque son rectas y curvas. Si encuentras, podrás decir desde este momento: si se te da un diámetro de una circunferencia, podrás decir: la diagonal de la cuadratura que tiene la misma área que el círculo es más largo en tanto. Ello será una cosa fácil que dependerá únicamente de que tu compares lo recortado con lo añadido. (Durero, trad. en 2000, p. 77)

La construcción realizada por Durero sobre la cuadratura del círculo describe, en palabras de Peiffer (2000), la construcción de un círculo cuya área es aproximadamente igual a la de un

cuadrado dado; esto implica que la construcción realizada por Durero es una aproximación de π igual a $\frac{25}{8}$.

En la cuadratura del círculo realizada por Durero (figura 21), se tiene por el teorema de Pitágoras que la diagonal $\overline{ac} = \sqrt{2 \overline{ab}}$.

Luego el diámetro de la circunferencia es igual a:

$$\frac{\overline{ac}}{10}(8) = \frac{4\sqrt{2 \overline{ab}}}{5}$$

Por tanto, el radio de la circunferencia es:

$$\frac{2\sqrt{2 \overline{ab}}}{5}$$

Así, se ha construido aproximadamente una circunferencia de radio $\frac{2\sqrt{2 \overline{ab}}}{5}$; dado un cuadrado de lado $\overline{ab}$, entonces sus áreas son “iguales”.

Así,

$$\pi \left(\frac{2\sqrt{2 \overline{ab}}}{5} \right)^2 = \overline{ab}^2$$

Luego,

$$\pi \frac{8}{25} \overline{ab}^2 = \overline{ab}^2$$

Por lo tanto,

$$\pi = \frac{25}{8}$$

La descripción realizada por Durero sobre la cuadratura del círculo refiere a la construcción de un círculo de área aproximadamente igual a la de un cuadrado dado, es decir parte de un cuadrado y construye un círculo cuyas áreas son aproximadamente iguales. Durero abordó el problema realizando la «circulatura del cuadrado», término que fue acuñado por el historiador de la matemática Moritz Cantor y que se conocía desde la Antigüedad.

El procedimiento que presenta Durero fue citado en algunos tratados como *De quadratura circuli* de Franco de Lieja y en *Una correspondance d'écolâtres du XI^e siècle* publicada por Paul Tannery, aunque la construcción realizada por Durero no se ha relacionado de manera exclusiva con otras publicaciones, algunos historiadores han considerado una aproximación con la construcción propuesta en el texto de los *Sulvasutras* (Peiffer, 2000). En este último texto la

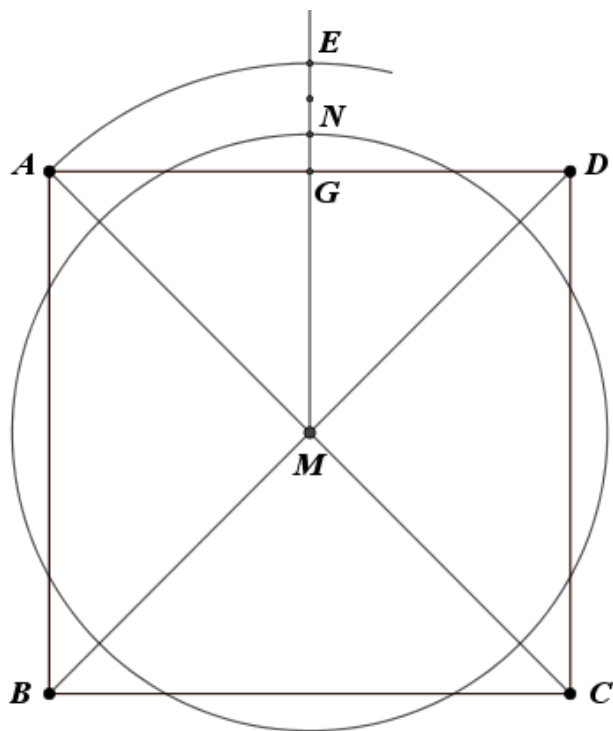
construcción de la circunferencia del cuadrado consistía en tomar un cuadrado (figura 22) $ABCD$ y determinar el punto de intersección entre sus diagonales en el punto M y se traza un arco de radio MA .

Luego se traza una recta paralela al lado AB en el punto M , así se tienen los puntos de intersección E y G . Finalmente, se triseca el segmento $\overline{EG}$ y se toma el punto N , para la construcción de la circunferencia de radio MN y centro en M .

El procedimiento antes descrito, la justificación y construcción que Durero realiza sobre la circunferencia del círculo consiste en tomar la diagonal del cuadrado como la base para la construcción de la circunferencia, que tendrá un área aproximadamente igual a la del cuadrado dado al inicio.

Figura 22

La circunferencia del cuadrado en los Sulvasutras.



Fuente: elaboración propia.

3.3. La duplicación del cubo

En relación con el problema de la duplicación del cubo, conocido también como el problema de Delos, cuenta la leyenda que hacia el año 430 a. C. una terrible peste azotó la ciudad de Atenas y ante la impotencia de los ciudadanos por combatirla, los atenienses consultaron el oráculo de Apolo, en la isla de Delos, y el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar

dedicado a Apolo, que tenía la forma de un cubo, para darle una mayor ofrenda. Sin embargo, los atenienses se encontraron con una dificultad, pues el altar que construyeron había aumentado ocho veces su tamaño cuando se dobló el tamaño de su arista. Por ello, ante la imposibilidad de encontrar la duplicación del volumen del altar de Apolo se enviaron algunos emisarios a los geómetras agrupados alrededor de Platón, en la Academia, para encontrar una posible solución.

El primero en abordar el problema de la duplicación del cubo fue Hipócrates de Quíos, quien mostró que el problema se podía reducir al encontrar dos medias proporcionales, es decir, si entre dos segmentos, siendo uno el doble del otro, se insertarán dos medias proporcionales, entonces se duplicará el cubo.

Así, dado un segmento de longitud a , encontrar un segmento de longitud x tal que $x^3 = 2a^3$, es decir, encontrar dos medias proporcionales x e y entre a y $2a$.

Esto es:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Luego, se tiene que:

$$y = \frac{x^2}{a}$$

Y

$$y^2 = 2ax$$

De modo que:

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax$$

Así,

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

Por lo tanto,

$$x^3 = 2a^3$$

Así, x es el lado de un cubo que tiene el doble del volumen del cubo de lado a .

El problema de insertar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados, siendo uno el doble del otro, es una dificultad no menor que el problema original. Este nuevo problema fue

resuelto por Arquitas⁹⁰ mediante la intersección de tres superficies de revolución: un cono recto, un cilindro y un toro. Arquitas había encontrado las dos medias proporcionales. Su demostración es geométrica y se basa en las propiedades que resultan de la intersección de rectas y de circunferencias situadas en distintos planos.

Una importante contribución en las matemáticas fueron las dos soluciones al problema que dio Menecmo, introduciendo así las secciones cónicas⁹¹ y sus propiedades para la solución de la duplicación del cubo. Para la primera solución utiliza las propiedades de la parábola y de la hipérbola, y para la segunda solución utiliza las propiedades de la parábola.

En los numerosos intentos por presentar una solución del problema de la duplicación del cubo se obtuvieron nuevos métodos e ingeniosas curvas como, por ejemplo, la cisoide de Diocles, la conchoide de Nicomedes, entre otras. También se crearon instrumentos mecánicos que daban una aproximación de la raíz cúbica de dos. Uno de los instrumentos más conocidos es el mesolabio⁹², creado por Eratóstenes⁹³, que permite calcular las medias proporcionales de Hipócrates. El principio de este instrumento se basa en el uso reiterado del Teorema de Thales.

En el libro *De la medida* Durero presenta tres soluciones diferentes, y una demostración para una de ellas, del problema de la duplicación del cubo, como se presenta en el siguiente párrafo.

3.3.1. Primera solución atribuida a Esporo

Durero se inspiró en los escritos del matemático Johannes Werner y de la traducción realizada por el humanista Giorgio Valla de los comentarios de Eutocio.⁹⁴ Durero presenta la

⁹⁰ Arquitas de Tarento nació aproximadamente entre los años 435 y 410 a. C. fue un filósofo contemporáneo de Platón, además de matemático, astrónomo y estadista. Perteneció a la escuela de los pitagóricos y trabajó también en la música, el *Quadriivium* y la acústica.

⁹¹ Menecmo introduce las secciones cónicas como secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz. Por ello, la parábola es la sección de un cono cuyo ángulo de apertura es recto por un plano perpendicular a una generatriz, es una sección de cono rectángulo. La elipse era la sección de un cono acutángulo y la hipérbola la sección de un cono obtusángulo.

⁹² El instrumento está construido por un armazón de dos barras paralelas, a lo largo del que se deslizan tres paralelogramos o triángulos en los que se dividen los paralelogramos. Los paralelogramos o los triángulos se mueven siempre de forma que sus bases describen una trayectoria recta.

⁹³ Eratóstenes de Cirene fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego. Fue la primera persona en calcular la circunferencia de la Tierra y la inclinación del eje de la Tierra; creó el primer mapa del mundo, incorporando paralelos y meridianos según el conocimiento geográfico de su época. Cultivó no solo las ciencias sino también la poesía, la filología y la filosofía.

⁹⁴ Eutocio de Ascalón nació en el año 480. Fue un matemático griego, que realizó comentarios a los cuatro libros de las *Cónicas* de Apolonio de Perge y a las obras de Arquímedes, *Sobre el equilibrio de la figura plana*, *Sobre la esfera y el cilindro*, y *Sobre la medida del círculo*. Recogió una información única que constituye una fuente

primera solución de la duplicación del cubo transmitida por Eutocio y atribuida a Esporo⁹⁵, en el libro IV describe la siguiente construcción (figura 23):

Primero junta dos cubos iguales abc . Pon esta misma longitud ac en vertical sobre una horizontal de formando ángulo recto, y desde el centro c traza un semicírculo dae . A continuación traza una línea recta desde e hasta la circunferencia pasando por b ; pon una f . Toma luego una regla estrecha, marca en ella un punto central y gradúala a ambos lados con números, y pon los números tanto en un lado como en el otro, de modo que a cada lado del centro el primer número sea uno. Moviendo la regla tienes que encontrar la primera línea con la que se debe hallar la del cubo doble. A continuación pon uno de los extremos de la regla que acabamos de hacer en el punto d y déjalo siempre allí, ya se desplace hacia arriba o hacia abajo. Si mueves la otra parte de la regla, deja siempre la regla con su centro en la línea abc , y muévela hasta que encuentres un punto central entre la línea ef y la circunferencia; donde la regla móvil corte la línea ef , pon una g , y donde corte la línea abc , pon una h , y donde la susodicha regla toque la circunferencia, pon una i . Con gh y hi se obtienen, de este modo, dos longitudes iguales. hc es la primera línea encontrada, con la que se hallará el lado del cubo doble. A continuación haz una línea horizontal con hc y el lado ab del cubo simple, obteniendo ahc . Pon el brazo de un compás en el centro de ac y traza un semicírculo ac . Desde h dibuja una vertical hasta la circunferencia, y pon allí una k . Esta línea kh te proporciona un lado del cubo doble⁹⁶. (Durero, trad. en 2000, pp. 304-305)

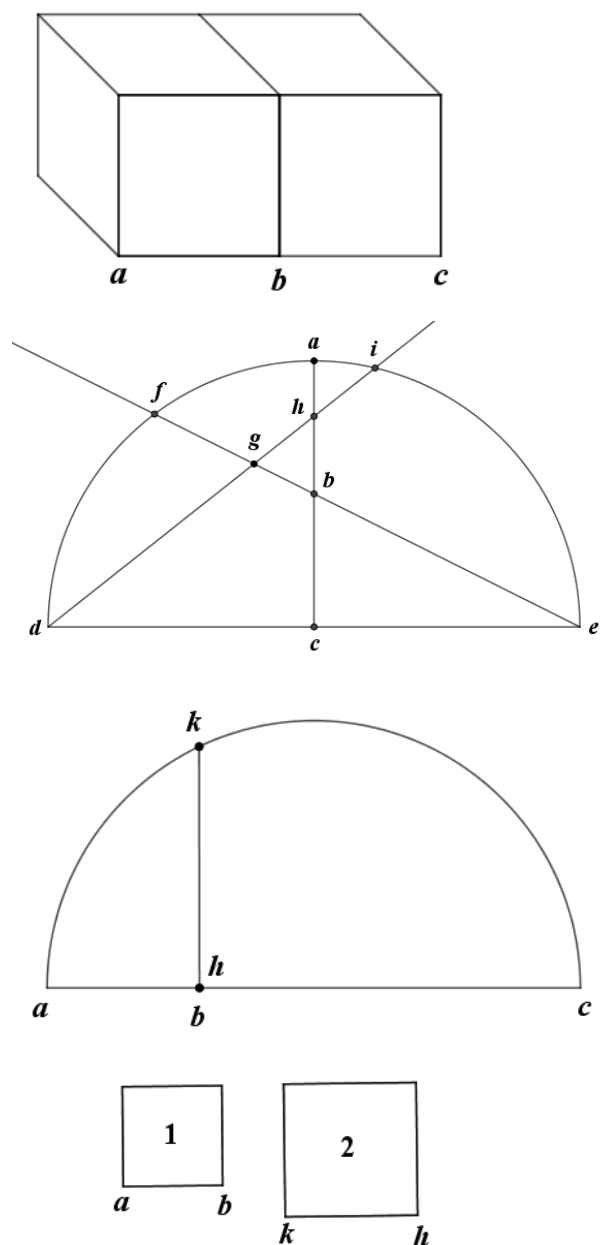
importante que aclara aspectos desconocidos de la historia de la matemática griega. En particular, el comentario a la obra de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* donde se recogen las diversas soluciones dadas en la Antigüedad al problema de hallar dos medias proporcionales entre dos rectas dadas. Eutocio inicia su comentario con la descripción de una carta atribuida a Eratóstenes, que narra la leyenda del origen de la duplicación del cubo. Eutocio presenta doce soluciones aportadas por once matemáticos; el orden de los autores en la solución del problema es: Platón, Herón, Filón de Bizancio, Apolonio, Diocles, Papo, Esporo, Manecmo, Arquitas, Eratóstenes y Nicomedes (Ortiz, 2005).

⁹⁵ Esporo de Nicea nació en el año 240 aproximadamente, fue un matemático y astrónomo griego discípulo de Filón de Gádara y maestro de Papo de Alejandría. Esporo escribió acerca de la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, el tamaño del sol y sobre los cometas.

⁹⁶ La solución atribuida a Esporo, usa una regla que pasando por un punto se puede determinar cierta pareja de segmentos iguales y posteriormente hallar dos medias proporcionales. La descripción realizada por Durero fue estudiada por Rupprich (1971), quien publica que las notas que se encuentran en el manuscrito original, se trata de notas de un consejero científico, no identificado, quien ayudó a Durero.

Figura 23

Primera solución de la duplicación del cubo en el libro *De la medida*.



Fuente: elaboración propia.

Durero presenta las cuatro figuras seguidas en el libro *De la medida*, que dan cuenta del paso a paso de la construcción; el resultado que se obtiene en este caso es el lado kh que corresponde al lado del cubo doble.

3.3.2. Segunda solución atribuida a Platón

La segunda solución que presenta Durero la atribuye Eutocio en su comentario a Platón⁹⁷. Esta solución y la tercera que es la de Herón, fueron copiadas por Durero y su consejero del manuscrito medieval *De arte mensurandi* de Juan de Murs. Durero resalta que para aumentar o multiplicar un cubo se pueden encontrar dos líneas proporcionales⁹⁸ entre dos líneas dadas desiguales, de tal manera que las cuatro líneas sean proporcionales entre sí. En el libro IV, numeral 50 Durero describe la construcción de cómo hallar dos medias proporcionales entre dos líneas desiguales dadas y el instrumento con el que se puede realizar el proceso, como se presenta a continuación (figura 24):

Sean eb y bg las líneas desiguales dadas. Únelas formando escuadra en el punto b . Prolonga las dos líneas por el vértice b hasta d y c tanto como necesites. Pon luego dos triángulos rectángulos, uno gcd , cuyo ángulo recto sea c , y otro cde , con d como ángulo recto.

Euclides, en su libro sexto, proposición octava, establece que cb es una línea media entre db y bg , y db es una línea media entre cb y be , por lo que gb guarda la misma relación con cb que cb con db y db con eb . Conforme a lo que se han hallado entre las dos líneas dadas bg y be las dos líneas medias be y bd .

Los dos triángulos susodichos gcd y cde hazlos de la siguiente manera. Coge una escuadra rpq , cuyo ángulo recto sea p , vacía uno de sus lados pq e introduce en él una regla recta ts que siempre forme ángulo recto con el lado pq de la escuadra. Al moverse arriba y abajo, ts permanecerá en todo momento paralela al lado pr de la escuadra rpq . Cuando todo esto esté hecho, pon el lado pr de la escuadra de manera que toque el punto g , el ángulo recto p descansa sobre la línea ec y el otro lado qp de la escuadra esté en la línea db . Mueve la regla ts hasta que el ángulo s esté en la línea bd y la regla ts toque el punto e . Cuando todo esto ocurra y esté dibujado, pr será como cg , y ps como cd , y st

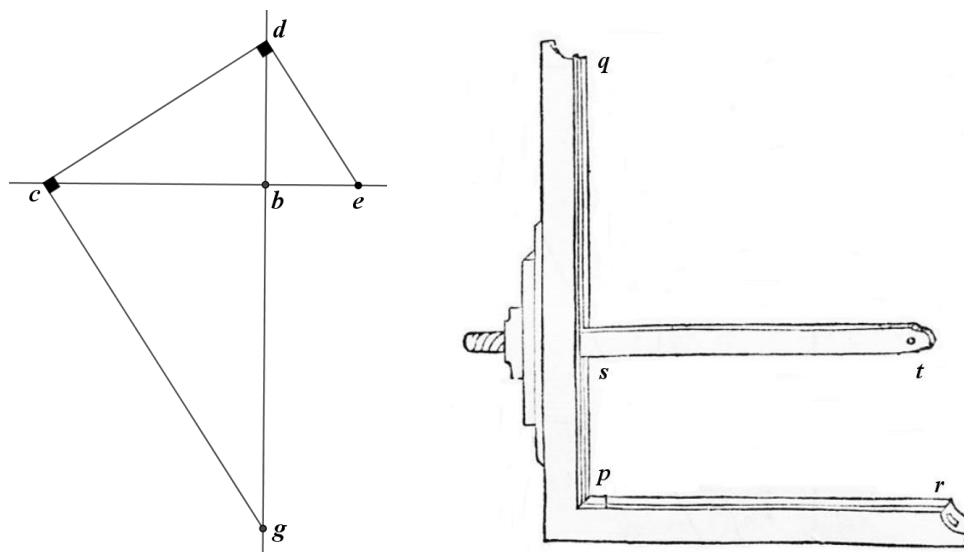
⁹⁷ La solución atribuida a Platón para obtener una solución mediante un instrumento, es un hecho que contradice abiertamente la concepción ideal que Platón tenía de la matemática, hace poco creíble que esa solución pertenezca al filósofo (Morales, 2002).

⁹⁸ Durero no utiliza la palabra proporcional, describe "... de suerte que las cuatro se comporten todas de manera comparable las unas respecto a las otras ..." (Durero, trad. en 2000, p. 310), es decir, encontrar dos medias proporcionales entre dos magnitudes dadas.

como de , y con ello se pondrá de manifiesto que los dos triángulos ged y cde están hechos y descritos como se proponían al principio. (Durero, trad. en 2000, pp. 310-311)

Figura 24

Segunda solución de la duplicación del cubo en el libro De la medida.



Fuente: elaboración propia.

Nota. El instrumento o escuadra descrito por Durero consta de tres barras, dos de la cuales están rígidamente unidas por un extremo formando un ángulo recto ($\angle qpr$) y la tercera ($\overline{st}$) se puede desplazar a lo largo de una de las anteriores ($\overline{pq}$) a la que está unida por uno de sus extremos, manteniéndose paralela ($\overline{st} \parallel \overline{pr}$) a la otra.

3.3.3. Tercera solución atribuida a Herón

La tercera y última solución que presenta Durero en su tratado, es atribuida a Herón. Además, aparece la única demostración en todo el libro *De la medida*, construida sobre los teoremas del Libro VI de los *Elementos* de Euclides. Durero aclara que la construcción para encontrar las dos medias proporcionales también se puede realizar sin la ayuda del instrumento descrito anteriormente (figura 24). Durero expone en el libro IV, numeral 51 de la siguiente manera el problema y su respectiva demostración (figura 25):

Las dos líneas dadas ab y bg deben volverse a juntar en un ángulo recto b . Completa a continuación un cuadrilátero bd , cuya diagonal sea ag . Dividela en dos partes iguales con un punto e , y prolonga los dos lados da y dg tanto como sea necesario. Luego pon en el punto b una regla que se mueva de un lado a otro hasta que corte dh y dz de tal modo que

las líneas eh y ez tengan la misma longitud y que la regla esté fija en el punto b ; esto lo confirmará la circunferencia. Acto seguido traza una línea vertical et a la línea dg , de modo que et divida la línea dg en dos partes iguales, conforme a la proposición segunda del libro sexto de Euclides. De ello se deduce que la figura rectangular constituida por dz y zg más el cuadrado de la línea gt es igual al cuadrado hecho con tz . A ambos lados se añade el cuadrado hecho con te . Según lo cual, el cuadrángulo o figura rectangular constituido por dz y zg más el cuadrado de eg es igual al cuadrado hecho con ez . De igual forma, el cuadrángulo o figura rectangular constituido por las líneas dh y ha más el cuadrado de ae es iguales al cuadrado hecho con la línea eh .

Mas si, como se han hecho, las dos líneas eh y ez son iguales, también son iguales las dos líneas ea y eg . De ello se deduce que la figura rectangular constituida por dz y zg es igual en superficie a la figura rectangular constituida por las líneas dh y ha .

Que lo anterior es así, queda demostrado por la proposición quince del sexto libro de Euclides, según la cual la línea dz guarda con la línea dh la misma relación que la línea ha con la línea gz . Y como la línea dz la guarda con la línea dh , la línea gz también lo hace con la línea gb , y lo mismo la línea ab con la línea ah . Por consiguiente, por la proposición cuarta del libro sexto de Euclides la línea ab guarda con la línea ah la misma relación que la línea ah con la línea gz y la línea gz con la línea gb . Y así se ha demostrado que entre las dos líneas ab y bg se encuentran dos medias proporcionales, que son las dos líneas ah y gz . (Durero, trad. en 2000, pp. 311-312)

La demostración que describe Durero en otra notación matemáticas expresa lo siguiente:

Se va a demostrar que los segmentos ah y gz son medias proporcionales a los segmentos dados ab y gb , es decir,

$$\frac{ab}{ah} = \frac{ah}{gz} = \frac{gz}{gb}$$

Se tiene que $eh = ez$ por la construcción.

Dado que $se \perp ad$ y $et \perp dg$ entonces, los lados respectivamente son iguales:

$$as = sd \text{ y } dt = tg$$

Ahora mostremos que:

$$dz \cdot zg = dh \cdot ha$$

Tenemos que:

$$dz \, zg = (dg + gz)zg = dg \, zg + (gz)^2$$

Luego,

$$tz = tg + gz$$

Elevando al cuadrado a la igualdad tenemos que:

$$(tz)^2 = (tg + gz)^2$$

Luego,

$$(tz)^2 = (tg)^2 + 2tg \, gz + (gz)^2$$

Como $2tg = gd$ remplazando se tiene que:

$$(tz)^2 = (tg)^2 + gd \, gz + (gz)^2$$

Así,

$$(tz)^2 = (tg)^2 + dz \, zg$$

Sumando $(et)^2$ a ambos lados se tiene que:

$$(tz)^2 + (et)^2 = (tg)^2 + dz \, zg + (et)^2$$

Por el Teorema de Pitágoras tenemos dos igualdades:

$$(et)^2 + (tg)^2 = (eg)^2$$

Y

$$(et)^2 + (tz)^2 = (ez)^2$$

Luego,

$$(ez)^2 = dz \, zg + (eg)^2$$

De igual manera obtenemos:

$$(eh)^2 = dh \, ha + (ae)^2$$

Y como $eh = ez$ y e biseca a la diagonal ag entonces $ea = eg$.

Por tanto,

$$dz \, zg = dh \, ha$$

Luego,

$$\frac{dz}{dh} = \frac{ha}{gz}$$

Por otro lado, el Δdzh es semejante a los triángulos Δabh y Δgzb .

Por la proposición 4 del libro VI de los *Elementos* de Euclides se tiene que:

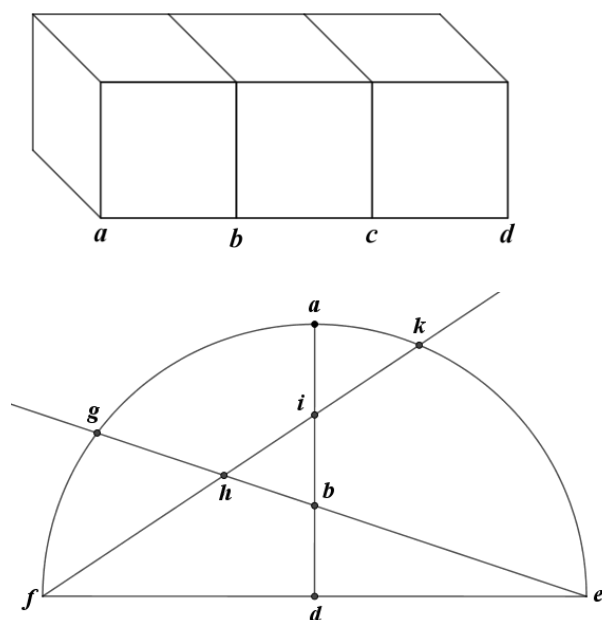
$$\frac{dz}{dh} = \frac{gz}{gb} = \frac{ab}{ah}$$

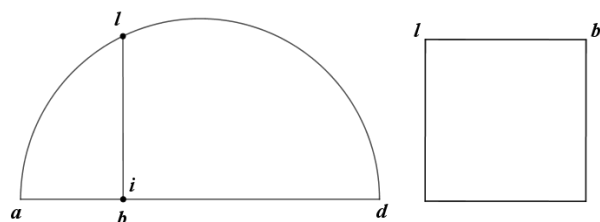
continuación dibuja desde e una línea recta oblicua que pase por la línea ad y la corte en su tercio inferior. Esta es la longitud del cubo simple. Pon allí una b . Donde la línea trazada desde e toque la circunferencia, pon una g . A continuación pon uno de los extremos de la regla graduada en el punto f y déjalo allí. Mueve la otra parte, y busca en la vertical ad el centro entre eg y el círculo eag . Y donde la línea que se traza con la regla, cuando está puesta correctamente, corte la línea eg , pon una h , y, donde corte la línea ad , pon una i , y, donde esta línea toque la circunferencia, pon una k . Con hi e ik se obtienen, de este modo, dos longitudes iguales. Así id se convierte en la primera longitud con la que encontrar la otra línea del lado del cubo triple.

Acto seguido pon la línea id en una horizontal y alárgala con el lado ab del cubo simple, coloca un compás en el centro de la unión de las líneas ab e id y traza un semicírculo ad . Pon luego una vertical bl formando ángulo recto. Esta línea bl es el lado del cubo triple respecto al cubo simple ab . (Durero, trad. en 2000, p. 306)

Figura 26

Triplicación del cubo en el libro De la medida.





Fuente: elaboración propia.

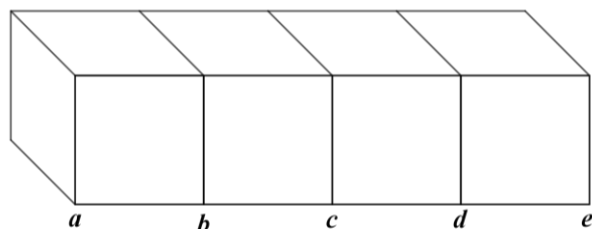
Las cuatro figuras (figura 26) se presentan en el libro *De la medida* una seguida de la otra, para dar cuenta de la construcción descrita y finalmente presentar el lado lb como la arista del cubo de volumen triple.

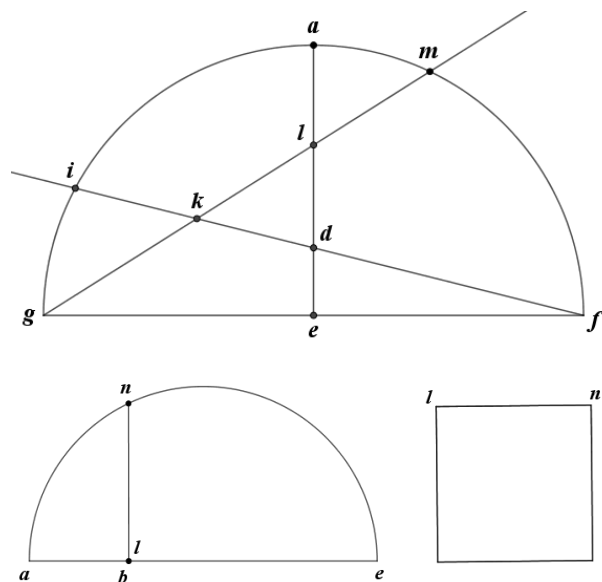
Durero presenta la cuadruplicación del cubo (figura 27) siguiendo la misma idea de la triplicación del cubo, en este caso, uniendo cuatro cubos simples describe la siguiente construcción:

Une a continuación cuatro largos del cubo simple ab , obteniendo $abcde$. Pon esta línea ae en vertical sobre una horizontal gf . Traza luego una línea desde f que corte a ae en su cuarto inferior, y donde esta línea toque la circunferencia por encima de g pon una i . A continuación toma la regla graduada, ponla con su centro en la línea ae y uno de sus extremos en el punto g . y busca en la vertical ae el centro entre fi y la circunferencia; donde corte fi , pon una k , y donde ae pon una l , y donde toque la circunferencia entre af , pon una m . kl y lm son de la misma longitud. De ello se deduce que le es la primera longitud con la que se obtendrá el lado del cubo cuádruple. Búscalo como se dijo antes. Une la longitud le y la longitud del lado ab del cubo simple, pon el brazo de un compás en el centro de ae y traza con el otro un círculo ae . Luego traza desde l , formando ángulo recto, una línea vertical hasta tocar la circunferencia; pon aquí una n . Por tanto, nl es, la longitud del lado del cubo cuádruple. (Durero, trad. en 2000, pp. 306-307)

Figura 27

Cuadruplicación del cubo en el libro De la medida.





Fuente: elaboración propia.

Las cuatro figuras (figura 27) se presentan en el libro *De la medida* una seguida de la otra para dar cuenta de la construcción descrita por Durero, en este caso el lado ln es la arista del cubo de volumen cuádruple.

Las construcciones descritas en el libro IV para duplicar, triplicar y cuadruplicar un cubo de arista arbitraria le sirven a Durero para realizar la construcción de un cubo de arista mayor al dado inicialmente y su respectiva duplicación, triplicación y cuadruplicación. Las aristas de los cubos dados inicialmente guardan una proporción con las aristas de los nuevos cubos. Este procedimiento tiene mucha utilidad, como lo afirma Durero, ya que con ello se pueden aumentar todas las cosas con orden y corrección, de manera que mantengan su proporción, en el numeral 47 del libro IV se describe la construcción (figura 28) de la siguiente manera:

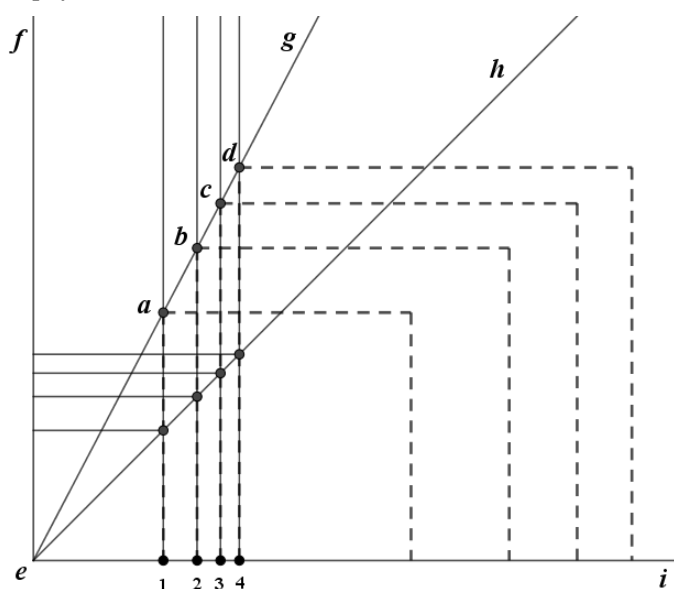
Haz una escuadra cuyo vértice sea e , la línea vertical f y la línea horizontal i , y superpón en un mismo lugar los cubos simple, doble, triple y cuádruple, de manera que cada uno tenga un vértice en el ángulo e y dos lados en las líneas f e i . Marca, según su volumen, un vértice de cada uno de los cuatro cubos en la línea i — $e1$, $e2$, $e3$, $e4$ — y dibuja una diagonal o línea oblicua eh , que pase por los cuatro vértices de los cuatro cubos. A continuación prolonga con paralelas por encima de la línea eh , tanto como necesites, los lados de los cuatro cubos que están designados con $e1$, $e2$, $e3$, y $e4$.

Si se te propone una longitud mayor como lado de un cubo que quieres multiplicar conforme al método anterior, pon la longitud dada en vertical sobre la línea 1 del cubo

simple, de manera que su extremo inferior toque la horizontal ei ; donde termine esta línea, pon una a . A continuación dibuja desde e una línea oblicua que pase por a y por todas las verticales 2, 3 y 4 sea g el extremo de esta línea oblicua. Donde corte las líneas verticales 2, 3 y 4, pon b , c y d . Así $a1$ es el lado del cubo simple, $b2$ el del doble, $c3$ el del triple y $d4$ el del cuádruple, y guardan entre sí la misma relación que los lados de los cubos pequeños. (Durero, trad. en 2000, pp. 307-308)

Figura 28

Amplificación de un cubo.



Fuente: elaboración propia.

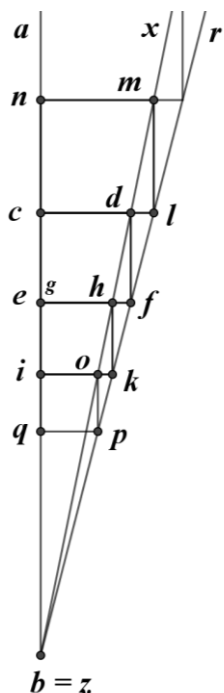
Durero describe cómo construir, a partir de un cubo y su duplicación, una serie de cubos que pueden ser 2, 4, 8, 16, 32, ... veces más grande que el cubo inicial; también describe cómo reducirlos a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, ... veces el cubo inicial. La descripción del numeral 48 en el libro IV dice (figura 29):

Pon una línea vertical ab . Apoya en ella los lados de los dos cubos susodichos, de manera que estén en contacto, el mayor encima y el más pequeño debajo. Los dos vértices de la izquierda del cubo superior, que están en la línea ab , serán c y e , y los dos de la derecha d y f . Los dos vértices de la izquierda del cubo inferior más pequeño, en la línea ab , désígnalos con g e i , y los dos exteriores con h y k . Une los dos vértices f y k con una línea recta; prolóngala hacia arriba tanto como quieras y pon una r y luego hacia abajo

hasta la línea ab y pon una z . Si desde el vértice d trazas una línea recta al punto z , cortarás las caras inferiores de los dos cubos. Si prolongas esta línea oblicua hasta el extremo x , tendrás la forma de agrandar el cubo, y, si lo haces hacia abajo, de disminuirlo. Hazlo de la siguiente manera. Primero prolonga la línea horizontal superior del cubo cd hasta la línea oblicua zr , y pon allí una l . Lleva luego una vertical desde l hasta la línea zx ; pon una m . A continuación forma un cubo $clmn$, cuyo volumen es dos veces mayor que el del cubo $cdef$. Cada vez que subas, se duplicará, y lo harás con certeza y corrección. Más hacia abajo, prácticamente hasta la punta z , el cubo siempre es la mitad más pequeño. Y esto se hace bajando de la misma manera que subiendo. Para ello haz lo siguiente. Donde la línea xz corte el lado inferior del cubo ik , pon una o traza desde aquí una vertical hacia abajo hasta la oblicua zr y pon una p . Desde aquí, formando ángulo recto, lleva una horizontal hasta la vertical ab ; pon una q . Este cubo $ioqp$ tiene la mitad de volumen que el cubo superior $ghik$. Puedes continuar haciéndolo hasta el punto b . (Durero, trad. en 2000, pp. 308-309)

Figura 29

Amplificar o simplificar un cubo.



Fuente: elaboración propia.

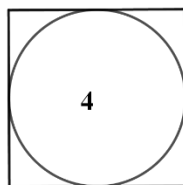
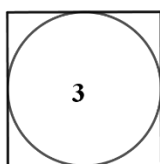
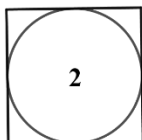
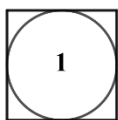
Finalmente, Durero cierra todo este desarrollo sobre las construcciones de la duplicación del cubo, sus amplificaciones y simplificaciones, con una construcción de orden práctico y es el ejemplo de las balas de cañón cuyo peso va aumentando en una libra (figura 30) y se puede duplicar, triplicar, cuadruplicar, hasta llegar a cien libras como lo recomienda el autor. Pero antes de ello resume cómo se debe realizar el proceso de duplicación del cubo y cómo a partir de la teoría se podrá encontrar las medias proporcionales entre los segmentos dados. En sus palabras:

Si con esta teoría descrita, indicada y demostrada anteriormente quieres doblar el cubo dado, debes doblar los lados del cubo dado, y entre el lado doble y el simple del cubo, dispuestos según la susodicha teoría, encontrarás dos líneas medias ajustadas que se llaman medias proporcionales. Y si construyes un cubo con la menor o más corta de estas líneas, será el doble del primer cubo.

También puedes hacer el cubo dado tres veces más grande, pues siempre que entre el lado del cubo dado y el lado tres veces mayor halles dos líneas medias y vuelvas a hacer un cubo con la menor, ese cubo será tres veces más grande que el primero dado. Así se puede multiplicar un cubo tantas veces como se alargue uno de sus lados.

Quiero poner el siguiente ejemplo referente al peso.

Si tienes una bala de una libra de peso, por el método antes indicado puedes aumentarlo de libra en libra, pues la proporción da en un mismo metal el mismo peso. Si dibujas la bala dentro de un cubo, y aumentas el cubo dos, tres o cuatro veces, y en todos ellos vuelves a dibujar las balas, el peso a fundir será dos, tres y cuatro veces mayor. Puedes llegar hasta cien libras. (Durero, trad. en 2000, pp. 312-313)

Figura 30*Ejemplo de las balas de cañón.*

Fuente: elaboración propia.

3.4. La perspectiva el «Camino más corto»

El problema de la duplicación del cubo, como lo describe Panofsky (1982), le sirve a Durero como una transición muy conveniente para la última sección de su libro, o sea, abordar la perspectiva⁹⁹. La clave y el coronamiento de ese edificio majestuoso es la geometría. El primer artista del norte que se acercó al tema de la perspectiva fue Alberto Durero, pues no solo aceptó las ideas de los italianos, sino que estudió aspectos prácticos e intelectuales y los plasmó en su *Underweysung der Messung*. Alrededor de 1506 Durero manifiesta en una carta a su amigo Pirkheimer, en su segundo viaje a Italia, que parte para Bolonia donde alguien quiere enseñarle los secretos del arte de la perspectiva. Desde luego Durero no necesitaba tales instrucciones en su práctica, pues había realizado, en años anteriores, varias xilografías que daban cuenta del manejo

⁹⁹ En el libro *De la medida* no se utiliza en ninguna parte la palabra *perspectiva*. Para aludir a la construcción por el método de perspectiva Durero realiza su planteamiento sobre la definición y los elementos propuestos por Alberti, como es el ojo, el objeto, los rayos visuales y la vista o visión (Peiffer, 2000).

del espacio, como también la sensación de profundidad y realidad que caracterizaban a sus xilografías, pinturas y autorretratos. Lo que realmente buscaba Durero era un fundamento teórico de un proceso que solo conocía empíricamente y era «secreto¹⁰⁰» pues no había sido hasta el momento publicado en ningún libro y solo los expertos tenían acceso al método que el gran arquitecto Brunelleschi había descubierto. Durero era consiente que la mera práctica era distinta del conocimiento teórico, y así lo refiere en su introducción al libro *De la medida*:

... hasta la fecha se han dedicado al arte de la pintura en nuestras tierras alemanas muchos jóvenes diestros a los que se ha enseñado, sin más fundamento, la sola práctica diaria. Han crecido en el desconocimiento igual que un árbol silvestre al que no se poda, por más que algunos de ellos, con el ejercicio constante, adquieren cierta soltura de mano, haciendo sus obras con ímpetu, pero sin reflexión, a su libre albedrío. (trad. en 2000, p. 130)

Más adelante Durero insiste en que el arte de la medida, es decir, la geometría es el camino para que los jóvenes pintores se instruyan en las medidas del compás y la regla y podrán ser verdaderos artistas capaces de realizar una buena obra de arte.

No se conoce el nombre del maestro con quien se encontró Durero en Bolonia, pero era un hombre con una formación matemática y que conocía los estudios de Piero della Francesca, Da Vinci y la óptica de Euclides. Formó a Durero en la geometría visual, en las técnicas de transformación de las perspectivas, y le presentó la definición y los elementos de la perspectiva de Piero della Francesca, consolidados en su obra *De prospectiva pingendi*¹⁰¹ donde define la perspectiva como:

... una rama de la pintura que comprende cinco partes: la primera es el órgano de la visión, esto es, el ojo; la segunda es la forma del objeto visto; la tercera es la distancia que hay entre el ojo y el objeto; la cuarta son las líneas que parten de la superficie del objeto y van al ojo; la quinta es el plano que hay entre el ojo y el objeto, allí donde se desea colocar los objetos. (Della Francesca, trad. en 1942, p. 64)

¹⁰⁰ Alberti en *Della pittura* (1436), Antonio Averlino Filarete en el *Trattato della architectura* (alrededor de 1460) y Piero della Francesca en *De prospectiva pingendi* (1475), compusieron los primeros textos en perspectiva, los trucos conocidos entre los artistas fueron tratados por primera vez como un secreto profesional.

¹⁰¹ *De Prospectiva pingendi* —Sobre la perspectiva de la pintura— es el primer y único tratado renacentista dedicado a la perspectiva; escrito en italiano por Piero della Francesca, el libro está inspirado en el tratado *De pictura*, de Alberti y con referencias a los *Elementos* y a la *Óptica* de Euclides. El libro consta de tres partes: la primera presenta el trazado de su perspectiva y la construcción de la imagen en escorzo de un plano horizontal según una transformación proyectiva. El segundo libro trata de la realización en perspectiva de formas espaciales como cubos, prismas, columnas, estructuras arquitectónicas, y el tercero trata de la construcción de capiteles, cúpulas hasta la representación del rostro humano.

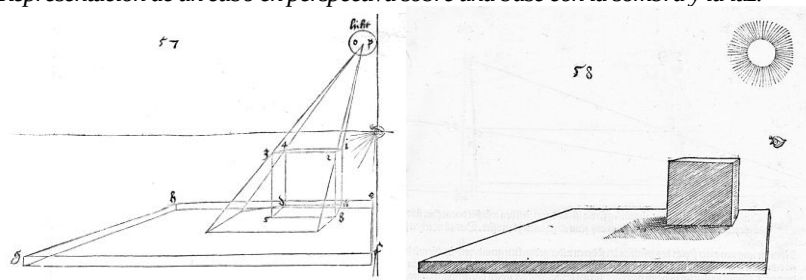
Las obras de Durero que tratan problemas de la perspectiva son aquellas comprendidas entre 1510 y 1515 —los tres grabados magistrales—. Sin embargo, el tema de la perspectiva se encuentra consolidado al final del cuarto capítulo de su tratado de geometría, *De la medida*. En los numerales del 56 al 58, del libro IV, Durero enseña el primer método denominado *costruzione legittima*, atribuido a Brunelleschi y descrito por Piero della Francesca, basado en la técnica de la doble proyección, ilustrada por un cubo situado sobre un cuadrado e iluminado de tal forma que, al mismo tiempo, sirva como ejemplo para la construcción de las sombras inclinadas¹⁰². El segundo método que describe Durero se encuentra en los numerales del 59 al 62, denominado el «camino más corto»¹⁰³, que efectúa la misma construcción de un cubo en perspectiva (Panofsky, 1982).

Finalmente, en el libro se describen dos dispositivos mecánicos de perspectiva ilustrados por dos grabados, que sirven para garantizar una corrección aproximada por medios mecánicos en lugar de matemáticos. En el primer instrumento (figura 32) el ojo del observador se fija mediante un visor, y entre este y el objeto se inserta una placa de vidrio. La imagen se obtiene copiando los contornos del modelo tal como estos aparecen sobre el cristal, y se trasladan después a la tabla o se dibuja mediante el calco. El segundo instrumento que describe Durero (figura 33) para dibujar un láud, consiste en una aguja sujeta en la pared, y un cordel que tienen un alfiler en un extremo y un peso en el otro; entre el ojo de la aguja y el objeto, el láud, se sitúa un marco de madera dentro del que se puede determinar cada punto por dos hilos móviles que se cruzan en un ángulo recto. Cuando el alfiler se sitúa sobre un punto determinado del láud, el lugar por donde atraviesa el

¹⁰² En el libro *De la medida*, Durero describe cómo se puede pasar a una pintura un objeto cuando ya está hecho y se vale del cuerpo más sencillo que es el cubo, pero que también se puede hacer con cualquier cuerpo. Además, da algunas indicaciones sobre la luz y la sombra y cómo utilizar la una con la otra. Finalmente, indica cómo dibujar (figura 31) tomando el cubo descrito inicialmente que se encuentra sobre un plano cuadrado junto con la luz y la sombra que proyecta en planta y en alzado, y cómo se ve delante de nuestros ojos (Durero, trad. en 2000).

Figura 31

Representación de un cubo en perspectiva sobre una base con la sombra y la luz.



Fuente: Durero, *Underweysung der Messung*. (1525).

¹⁰³ Algunos elementos descritos en este método están mal definidos en la construcción que realiza Durero y aparentemente mezcla dos tipos de construcciones que refieren al método de Alberti y al de Pomponio Guárlico, quien expone un método para la puesta en perspectiva de un enlosado (Durero, trad. en 2000).

marco determina la ubicación de ese punto dentro del cuadro futuro. Dicho punto queda fijo ajustando los dos hilos móviles; posteriormente se pasa a un papel sujeto con bisagras a un lado del marco; la repetición de este proceso permite trasladar todo el objeto a la hoja de dibujo (Kemp, 2000; Panofsky, 1982).

Figura 32

Dibujante haciendo un retrato.

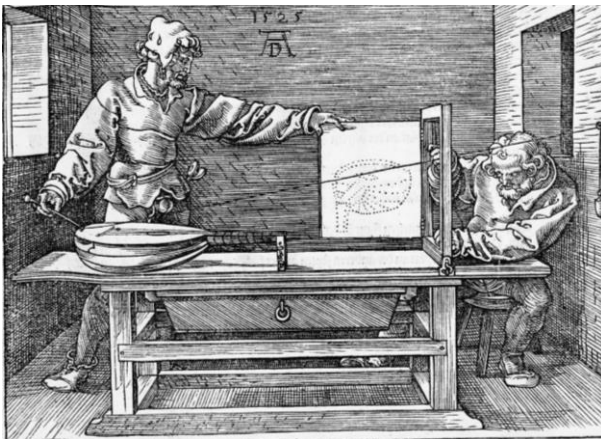


Fuente: Durero, Alberto. Xilografía. (1525).

El artista utiliza un cristal colocado en una mesa (figura 32) diseñada especialmente para ello, y poder realizar un retrato. En el segundo instrumento (figura 33) se encuentran dos dibujantes marcando puntos para el dibujo de un laúd en escorzo.

Figura 33

Dibujante dibujando un laúd.



Fuente: Durero, Alberto. Xilografía. (1525).

Las construcciones y desarrollo que realiza Durero en su tratado de geometría no aportan ninguna novedad a la ciencia de la perspectiva, a diferencia de los italianos. Sin embargo, es Durero quien expone la importancia de un problema representacional y eleva a la condición de ciencia el arte de la pintura en Alemania; los artistas buscan reivindicar su condición social haciendo énfasis en el valor científico de las artes, pues ya no eran artesanos sino científicos.

En la Antigüedad y parte de la Edad Media no se sabía representar la distancia ni la profundidad. Todo aparece en el mismo plano, no hay un fondo, los contornos son claros y marcados. Durante el gótico se tiene una perspectiva teológica, es decir, los personajes más grandes son aquellos que tienen un lugar importante dentro de la iglesia, como Jesucristo, la Virgen y algún santo. Pero, es en el Renacimiento cuando los pintores italianos comienzan a investigar la perspectiva como una ciencia, con leyes y principios puramente matemáticos; y donde la distribución del espacio se realiza en función del hombre, es decir, que los personajes y objetos se encuentran en una perspectiva según el tamaño que les corresponde y el lugar que ocupan.

Durante el siglo XV se logró dar la sensación de profundidad del espacio mediante el uso de la perspectiva cónica¹⁰⁴, una forma de perspectiva lineal basada en la intersección de un plano con un cono imaginario visual cuyo vértice sería el ojo del observador. El tamaño de las figuras se va reduciendo en función de la distancia, lo que provoca la ilusión óptica de profundidad. Varios teóricos plantearon de manera admirable la organización del espacio en perspectiva, descubierta por Brunelleschi, sistematizada por Alberti y matematizada por Piero della Francesca.

Es en el siglo XVI, cuando ya se ha asimilado la teoría y la praxis de la perspectiva, que surgen nuevos enfoques relativos a la organización del espacio. Aparece la perspectiva de color y la perspectiva menguante, superpuestas a la perspectiva lineal, que toman como base los tratados y estudios de la pintura de Leonardo da Vinci.

Los aportes y escritos de Durero se realizan gracias a los teóricos del Renacimiento, la tradición erudita de la Edad Media, y la capacidad del artista para organizar, comprender y articular la geometría, sus principios y su hacer artístico. El maestro de Núremberg se convirtió en una pieza fundamental para la transmisión y la supervivencia del conocimiento y los principios de la

¹⁰⁴ Filippo Brunelleschi en el *Quattrocento* fue el primero en formular las leyes geométricas de la perspectiva cónica, en la que los ejes vertical y horizontal —línea del horizonte—, coinciden en su intersección con el punto de fuga.

Antigüedad greco-romana, y con ello sentó bases para conocer lo que se denomina como el Renacimiento nórdico.

Capítulo 4.

La regla y el compás, instrumentos en la concepción artística e intelectual de Durero

Nos interesa el pasado porque, en último término, nada hay menos real que el presente. Para captar la realidad hay que apartarse del deformante presente y sin coaccionadoras urgencias. Las ciencias puras aprehenden y formulan las leyes que presiden un cambio natural observado por el hombre de ciencia; las humanidades no se ocupan de lo que pasa, sino que tratan de revivir lo que parece muerto: el pasado.

Erwin Panofsky

Los recientes movimientos revolucionarios que recorrían Europa en el periodo del Renacimiento buscaban nuevas bases para edificar el conocimiento, y las matemáticas fueron el único cuerpo de verdades aceptado que ofrecía esos cimientos. Como se ha manifestado, la influencia e información que circulaba en Europa del siglo XV en los diferentes campos del saber fue gracias a los humanistas, quienes se encargaron de recopilar, ordenar y estudiar el conocimiento griego y romano.

Italia fue el centro y el origen de los principales movimientos, pensadores y artistas del Renacimiento, por ello los hombres que tenían inquietudes artísticas e intelectuales debían desplazarse a los centros más importantes de Italia. Durero fue uno de estos hombres, quien viajó a Venecia en dos oportunidades, y a otras ciudades, con el propósito de perfeccionar y completar su aprendizaje en las técnicas y formas del arte. Como se ha mencionado en el segundo capítulo, la formación y vida de Durero está mediada por la escuela flamenca y la tradición gótica alemana, pues conoció los postulados artísticos del Renacimiento italiano y se interesó por la geometría, las proporciones matemáticas en el cuerpo humano y las reglas que rigen la perspectiva. Estos temas comenzaron a formar parte de su estudio de regreso a Núremberg, dado que ve en la geometría el fundamento de la pintura, tema que debe ser parte de la formación de los jóvenes pintores que se inician en esta profesión.

El interés de Durero por formar y enseñar a sus compatriotas y futuros colegas o todo aquel que se sirviera del arte de la medida¹⁰⁵, lo llevó a tal punto de redactar y publicar un tratado de

¹⁰⁵ Durero denomina a la geometría como el arte de la medida, ya que solo la práctica no hará verdaderos artífices, sino que debe ir acompañada de una teoría.

geometría en 1525¹⁰⁶. Aunque este tratado no corresponde en la actualidad y a lo largo de la historia como un manual para la elaboración de obras de arte ni tampoco se encuentra en la guía de estudio para aprendices en pintura, pero sí representa para la formación de los artistas de la época en un saber artístico e intelectual, es decir, esta formación no solo depende de la práctica cotidiana de su profesión, además involucra una teoría que le dan a la pintura un fundamento a través de las matemáticas. Este fundamento por medio de las matemáticas fue concebido por varios pintores de la época de Durero, pero que el cambio y el desarrollo de la geometría y de la pintura llevó a nuevos y novedosos planteamientos, escapando de tendencias dominantes y que pudo sentar las bases de nuevos desarrollos artísticos y científicos.

Se ha mostrado a lo largo de este trabajo de investigación, que el libro *De la medida* tiene un contenido matemático y artístico que deja ver particularmente una geometría al servicio de la pintura, pues las construcciones geométricas y los problemas que enfrentan los artistas y artesanos se tratan siguiendo un determinado número de pasos con la regla y el compás. Durero por medio del tratado de geometría les ofrece a los artistas una variedad de figuras y formas que le permiten el despliegue de su creatividad, en palabras de Peiffer (2000) “Despliega las figuras y sus procedimientos de transformación en el espacio visual e incita, como el buen pedagogo que es, a sus lectores a intervenir, a llevar más lejos sus investigaciones y a variar las formas descritas” (p. 117). La geometría utilizada por Durero en su tratado es lo suficientemente clara para ser comprendida por hombres que se encuentran laborando y formándose en los talleres artísticos lejos de pertenecer a círculos humanistas.

El artista renacentista buscaba fortalecer las leyes que rigen su trabajo y calcular sus obras con una precisión matemática que les permita representar fielmente la realidad (Tatarkiewicz, 1997). Así, artistas y humanistas se unen para estudiar y respaldar nuevos métodos y técnicas en la representación del arte que impulsan el estudio de propiedades geométricas y el desarrollo de nuevos campos dentro de las matemáticas. Esto se evidencia en los diferentes tratados que matemáticos junto con artistas publicaron a lo largo del siglo XV y dotan a la geometría de una dimensión estética.

Un ejemplo de lo mencionado anteriormente, es el desarrollo de la geometría proyectiva, pues con el descubrimiento de la perspectiva se crea la necesidad de sentar las bases formales en esta nueva geometría, cuyos principios fundamentales en la matemática aparecen en el siglo XVII

¹⁰⁶ El libro *De la medida*, en alemán *Underweysung der messung*.

con Gérard Desargues, pero es hasta 1795 que se tiene el desarrollo de esta geometría con la publicación de la obra de Gaspard Monge y la invención de la geometría descriptiva que permite representar el espacio tridimensional sobre una superficie bidimensional.

Cabe resaltar que el desarrollo de la geometría perspectiva iniciada por los artistas renacentistas y fundamentada matemáticamente por la publicación en 1629 por Desargues, pasó desapercibida debido al gran interés suscitado por la geometría de Descartes por esta razón los planteamientos propuestos no alcanzaron tanta difusión sino dos siglos después.

Esto permite señalar que los trabajos y estudios externos a la geometría de Euclides inician principalmente en el periodo del Renacimiento y se consolidan con los aportes y desarrollo de la geometría de Descartes.

Es pertinente en este trabajo de investigación no solo darle valor e importancia a la relación que la geometría clásica estableció con otras disciplinas, sino también a reconocer la geometría de Descartes como el inicio de una nueva mirada de la geometría, indispensable en la historia de las matemáticas.

Descartes en el siglo XVII utiliza el álgebra para describir a la geometría, y expresa la unificación de estas dos disciplinas en el primer libro de la *Geometría*, “Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones geométricas” (Descartes, trad. en 1981, p. 279), además, establece la creación de un nuevo método para abordar antiguos y nuevos problemas que rompen con la tradición heredada de la geometría clásica. El desarrollo de la geometría a lo largo de la historia se ha ido alejando del espíritu de la geometría de Euclides, incluso en el siglo XIX y XX se logró el desarrollo de las geometrías no euclidianas de Bolyai, Riemann y Lobachevsky.

A lo largo de este trabajo se ha presentado parte de la vida y obra de Alberto Durero, un hombre que posee una profunda huella artística, intelectual y espiritual. Su formación y conocimientos son heredados en gran parte del pensamiento italiano en el periodo del Renacimiento. Durero no ha pretendido ser un gran maestro ni un humanista ni mucho menos un matemático, él es, sobre todo, un artesano que buscó ennoblecer su arte y fundamentar su hacer artístico en una teoría sólida y firme por medio de las matemáticas.

Peiffer (2000) señala que la geometría de Durero es material, pues opera sobre objetos en piezas de madera, piedra, metal, etc. Ya que Durero transporta rectas o puntos como si fueran materiales y, en algunos casos, los coloca en movimiento; reitera al final de sus construcciones la utilidad y a no dejar en letras muertas las instrucciones recibidas. Los tres problemas clásicos no

son la excepción de esta concepción de la geometría, ya que los presenta con una construcción paso a paso que no impide el despliegue de la creatividad del artista, al contrario, lo alienta a buscar nuevas y mejores figuras que pueden ser útiles en su hacer artístico, aunque no se tenga una solución exacta de estos tres problemas.

Por ello, se presenta en este capítulo ciertos autores que hicieron de la geometría una nueva y renovada disciplina. Tomando los tres problemas clásicos como el eje principal para el desarrollo de la geometría y estableciendo ciertas similitudes con los referentes propuestos por Durero en su tratado como son, Euclides y Arquímedes; pero también se presenta una nueva época en la matemática, la ciencia y la filosofía instaurada por Descartes. Además, se trata de ver en las construcciones con regla y compás una relación de la geometría con la historia, el arte y una reflexión que puede constituirse en el campo de la educación.

4.1. La regla y el compás en el desarrollo de la geometría

Desde sus inicios la matemática ha cumplido dos funciones importantes: uno práctico y uno teórico, el primero refiere a la solución de problemas que se encuentran en el mundo exterior, relacionados con contar, medir, pesar, trazar, calcular, etc. Estos requieren, con frecuencia, algoritmos o métodos empíricos para solucionar los problemas. El teórico lo conforman un grupo selecto de hombres, quienes se dedican a pensar en los conceptos abstractos de las matemáticas. En la historia de la geometría se pueden evidenciar estos dos aspectos, ya que como una de las ciencias más antiguas e influyentes durante varios siglos ha jugado un papel muy importante en el desarrollo de las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Desde sus orígenes, la geometría estableció una estrecha relación con la cultura, la historia, el arte, la filosofía y la ciencia. Inicialmente respondió a necesidades prácticas y útiles en relación con la longitud, área y volumen. Los conocimientos prácticos que tenían los babilonios y egipcios y otras civilizaciones sobre la geometría estaban relacionados con la arquitectura, la geografía y la astronomía.

En la cultura griega la geometría estaba íntimamente relacionada a la astronomía, pues los griegos atraídos por las formas y los movimientos que observaban en el cielo conformaban una fuente importante en la resolución de problemas geométricos de la época. Además, con los griegos la geometría se fue consolidando como una disciplina científica. La obra principal fue los *Elementos* de Euclides, el primer modelo de sistema axiomático, que es una recopilación y

sistematización que Euclides realizó sobre la matemática de su época, en la que mediante definiciones, postulados y nociones comunes, se demuestran las proposiciones.

La geometría de Euclides se enseñó por muchos siglos y constituía una de las disciplinas más importantes en la formación escolar y en los estudios que impartían las universidades. En la Edad Media hasta el Renacimiento hacía parte del *Quadrivium*, en el que se evidenciaba la aplicación práctica de la geometría en la astronomía, y la aritmética en la música.

La enseñanza de la geometría desde los griegos se realizaba por medio de dibujos, para poder explicar las propiedades de las figuras geométricas. Los dibujos son aproximaciones respecto al ideal que se tiene sobre las figuras que representan, en la concepción de Platón, en el mundo sensible, las construcciones dejan ver cierto grado de precisión en las figuras; en el mundo de las ideas son construcciones ideales que representan la perfección y la belleza concebida en el pensamiento. Las construcciones concebidas por los griegos eran figuras perfectas e ideales, por ejemplo, la recta ideal no tiene espesor ni anchura y dos rectas ideales se cortan en un punto ideal que representa nada más que una posición.

Las construcciones de figuras son necesarias para la demostración y enseñanza de la geometría. Para los griegos, entre menos trazos e instrumentos se utilicen para dibujar y cuanto más simples sean estos, más cerca se estará del ideal. Los instrumentos que tenían estas características fueron la regla y el compás. La primera herramienta es un instrumento que desde la Prehistoria el hombre lo ha utilizado para medir, las primeras reglas toman como una unidad de medida las partes del cuerpo, cuartas, pies, codos, etc. Para los griegos la regla no tenía marcas y fue empleada para el trazo de líneas rectas. La segunda herramienta es el compás, tuvo su origen en la antigua Grecia y es empleado para trazar circunferencias.

En los *Elementos* las demostraciones son construcciones realizadas con la regla y el compás euclidianos (sin marcas y «colapsable»), en el texto de Euclides no se menciona nada acerca de lo que no se puede construir con estos instrumentos, como pasa con los tres problemas clásicos de la geometría. No son los únicos problemas que no se pueden construir solo con regla y compás, por ejemplo, algunos polígonos regulares y las cónicas.

Los antiguos realizaron la primera clasificación de los problemas en geometría en: planos, sólidos y lineales; los primeros pueden resolverse trazando solamente rectas y circunferencias, es decir, pueden solucionarse con la regla y el compás; los segundos, necesitan introducir algunas

secciones cónicas; finalmente, los terceros requieren curvas más complejas, denominadas curvas mecánicas, como las cuadratrices, las concoides, las cisoides y las espirales.

Una segunda clasificación se encuentra en *La Geometría*¹⁰⁷ de René Descartes, pues los problemas los clasificó según el grado de la ecuación algebraica que se tiene una vez se ha formulado el problema de la construcción. Además, Descartes determinó que incluso la recta y la circunferencia requieren de un instrumento para ser construidas, por ello deben ser consideradas como mecánicas. Así los instrumentos físicos no tienen ningún valor frente a la precisión matemática y que todas las curvas son igual de importantes a la hora de ser utilizadas (Descartes, trad. en 1981).

Descartes clasifica los problemas geométricos según el grado de la ecuación, si el grado que permite la solución es uno o dos la construcción puede realizarse con rectas y circunferencias; si el grado es tres o cuatro se deben emplear las cónicas y si el grado es mayor a cuatro se requieren curvas más complicadas que las cónicas. Descartes clasifica a la trisección del ángulo y la duplicación del cubo como problemas que involucran ecuaciones cúbicas y por ello no se pueden resolver solamente con la regla y el compás.

A continuación, se presentan las soluciones por Descartes a la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, además de los elementos propuestos por Euclides y Arquímedes a la cuadratura del círculo. En Euclides se comienza a ver la geometría como un sistema axiomático deductivo, de este desarrollo continúan Apolonio y Arquímedes. En Descartes se tiene una nueva lectura de la geometría griega, lo que le permitió proponer una lectura algebraica que le ayudará a enfrentar y resolver problemas geométricos antiguos y modernos.

Así, se exponen los tres problemas griegos de la geometría: en primer lugar, previamente a la época de Durero, con Euclides y Arquímedes que son referentes importantes en los escritos del artista y de quienes toma ciertas estructuras y las expone desde el punto de vista de su formación y concepción. Y, en segundo lugar, a Descartes como un referente posteriori al desarrollo de la geometría que se inició con el renacimiento de las ciencias, el arte, la cultura y la religión.

¹⁰⁷ Descartes publicó en 1637 la *Geometría* como tercer apéndice, junto con la *Dióptrica* y los *Meteoros*, a su obra fundamental, el *Discurso del Método*, para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias. La *Geometría* se divide en tres libros: el primero, sobre los problemas que pueden construirse usando solo círculos y líneas rectas; el segundo, sobre la naturaleza de las líneas curvas y el tercero, sobre la construcción de problemas sólidos y más que sólidos.

4.1.1. Euclides y Arquímedes en la cuadratura del círculo

La primera cuadratura de una figura curvilínea, como se presentó en el capítulo tres, fue planteada por Hipócrates, se trata de la cuadratura de una lúnula; Hippias construyó la cuadratriz para intentar cuadrar el círculo. En los *Elementos*, Euclides no logra mostrar la cuadratura del círculo, pero presenta la cuadratura de figuras rectilíneas. Finalmente, Arquímedes formaliza en el método exhaustivo las bases conceptuales planteadas por Euclides.

Euclides presenta la transformación de figuras poligonales, pero que conservan la misma área, es decir, muestra la solución al problema de la cuadratura de polígonos. En el libro II, de los *Elementos*, en la proposición 14 se presenta la construcción de un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. Esta proposición está sustentada en los resultados de las proposiciones de los libros I y II. Euclides (trad. en 1991) enuncia:

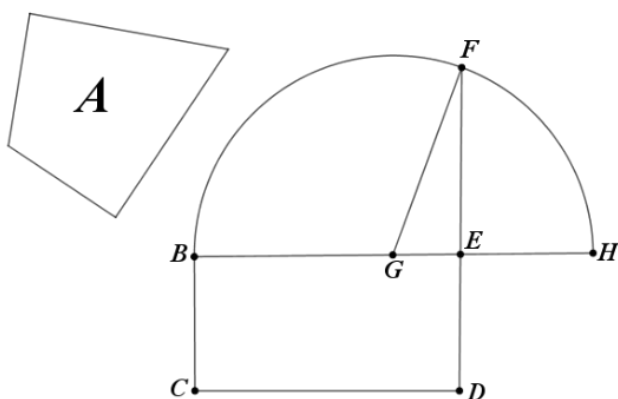
Proposición 14: Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. (figura 34)

Sea A la figura rectilínea dada.

Constrúyase, pues, el paralelogramo rectángulo $BCDE$ igual a la figura rectilínea A (por proposición I-45). Si $BE = ED$, se habrá hecho lo propuesto: porque se habrá construido $BCDE$ que sería un cuadrado igual a la figura rectilínea A ; pero si no, una de las rectas BE o ED es mayor. Sea BE mayor y prolonguese hasta H , y hágase $EH = ED$, y divídase en dos partes iguales BH en G , y con el centro en G y una de las rectas GB , GH como distancia descríbese el semicírculo BFH , y prolonguese DE hasta F , y trácese GF .

Figura 34

Proposición 14 de los Elementos de Euclides.



Fuente: elaboración propia.

Así pues, como la recta BH ha sido cortada en partes iguales en G y en desiguales en E , entonces el rectángulo comprendido por BE , EH junto con el cuadrado de EG es igual al cuadrado de GH (proposición II-5). Pero $GH = GF$; por tanto, el rectángulo comprendido por BE , EH junto con el cuadrado de EG es igual al cuadrado de GF . Pero los cuadrados de FE , EG son iguales al cuadrado de GF (proposición I-47); por tanto, el rectángulo comprendido por BE , EH junto con el cuadrado de GE es igual a los cuadrados de FE , EG .

Quítese de ambos el cuadrado de GE ; entonces el rectángulo restante comprendido por BE , EH es igual al cuadrado de EF . Pero $BCDE$ es igual a la figura rectilínea A . Luego A es igual al cuadrado que puede formarse a partir de EF .

Por consiguiente, se ha construido un cuadrado, el que puede formarse a partir de EF , igual a la figura rectilínea dada A .

En la proposición anterior se establecen las relaciones entre triángulos y figuras poligonales semejantes y su cuadrado, es decir, que el cuadrado es una unidad para medir superficies y es equivalente a cualquier figura poligonal.

En el libro *De la medida*, Durero, considera este mismo problema y lo plantea con un triángulo equilátero, en el libro II-28, (figura 35), este método, estudiado en la Edad Media y publicado en la edición de Zamberti, era conocido por el artista. En la construcción Durero parte de un triángulo del que obtiene un rectángulo, con la misma superficie que el triángulo, y, posteriormente, el rectángulo lo transforma en un cuadrado e inserta una media proporcional entre los dos lados del rectángulo, igual que Euclides. Durero también presenta el caso general, libro II-32, para un triángulo de lados desiguales, este método es comunicado en una carta del arquitecto Johannes Tschertte al artista. La descripción realizada por Durero a la cuadratura de un triángulo equilátero la enuncia como sigue:

Es necesario saber un poco del modo en que se pueden hacer figuras que tengan la misma superficie, obteniendo un cuadrilátero a partir de un triángulo y que la misma superficie del triángulo la tenga otros cuerpos regulares.

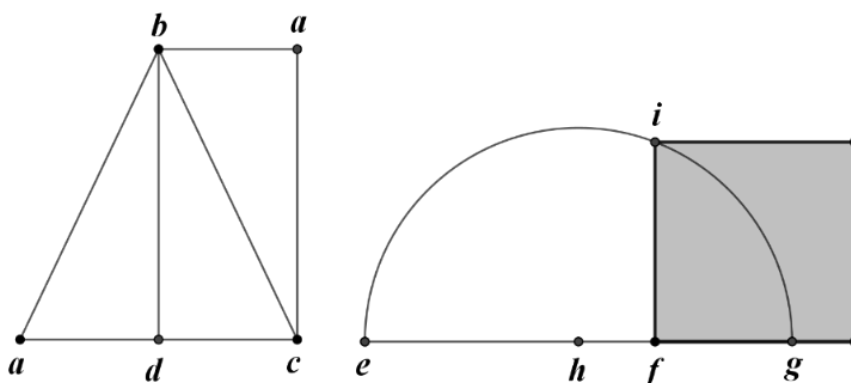
Haz esto de la siguiente manera. Dispón un triángulo abc ¹⁰⁸. Divide ac por la mitad con un punto d y traza una línea bd . De este modo el triángulo queda partido en dos partes

¹⁰⁸ Durero considera un triángulo equilátero.

iguales. Traslada luego la mitad abd , colocándola sobre la otra mitad bc , con el lado ab ¹⁰⁹ hacia arriba. Se obtiene un cuadrilátero oblongo [rectángulo] de ángulos iguales a, b, c, d , que tiene la misma superficie que el triángulo abd . Convierte a continuación el cuadrilátero oblongo en un cuadrilátero regular [cuadrado] que tenga la misma superficie que el triángulo. Mas para hacerlo correctamente, observa lo siguiente. Toma dos lados del rectángulo $abcd$ ¹¹⁰, uno largo y uno corto, y ponlos en horizontal uno a continuación del otro, designando sus tres¹¹¹ puntos como e, f y g . Pon luego un punto h en el centro de la línea. Coge un compás, pon uno de sus brazos en h y traza con el otro un arco desde e hasta g . A continuación traza desde el punto f una línea recta vertical hasta la circunferencia y, donde la corte, pon una i . Cuando se junten formando ángulos iguales cuatro líneas de la longitud de if , se obtendrá un cuadrado que tendrá la misma superficie que el rectángulo $abcd$ y que el triángulo abc . (Durero, trad. en 2000, pp. 207-208)

Figura 35

Un cuadrado con la misma superficie que un triángulo dado.



Fuente: elaboración propia.

Los griegos asumieron también que las figuras geométricas limitadas por líneas no poligonales, por ejemplo, el círculo, la elipse o la unión e intersección entre ellas, tenían una superficie del mismo tipo que las figuras poligonales, pero no era tan claro que estas figuras pudieran cuadrar, es decir, construir un cuadrado con la misma área.

¹⁰⁹ Al colocar ab en la parte superior, realmente traslada el segmento ad , el punto b , del triángulo original abc , coincide con el punto a , y el punto a (en el rectángulo $dcab$) es el punto d .

¹¹⁰ El rectángulo es $abdc$.

¹¹¹ El segmento $ef = ac$ y $fg = ba$.

Arquímedes fue uno de los matemáticos y físicos, dedicado a la ciencia y a sus descubrimientos, fue capaz de combinar las construcciones mecánicas con la exactitud del cálculo numérico; estudió los métodos de Euclides y resultados anteriores a él para presentar un trabajo con su propio estilo y dar solución a ciertos problemas geométricos, y, en especial, le da una nueva dirección al problema de la cuadratura del círculo.

En la proposición 1 del texto la *Medida del círculo*, Arquímedes, demuestra que todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos corresponden al radio y a la longitud de la circunferencia y expone en su demostración el método exhaustivo¹¹².

La demostración de la proposición 1 se realiza por reducción al absurdo, donde se supone que el área del triángulo rectángulo es igual al área del círculo; utilizando polígonos inscritos y circunscritos, y la proposición XII-2 de los *Elementos*.

Arquímedes no utiliza la regla y el compás, su construcción es una construcción mecánica y llegó a establecer que π es mayor que $3\frac{10}{71}$ y menor que $3\frac{1}{7}$.

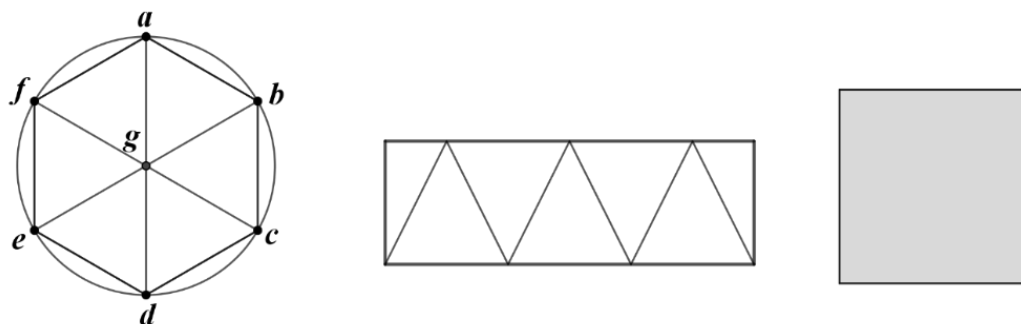
Durero, en el libro *De la medida*, para presentar la construcción de la cuadratura del círculo previamente realiza la construcción de cómo se debe hacer un cuadrado que tenga la misma superficie que un hexágono, (figura 36) utiliza la inscripción del hexágono en una circunferencia; además, refiere que se puede realizar con todas las figuras regulares, sin importar la cantidad de vértices. La descripción de la construcción realizada por Durero (trad. en 2000) en el libro II-33, indica:

Observa ahora cómo se debe hacer un cuadrado que tenga la misma superficie que un hexágono. Procede de la siguiente manera. Haz un hexágono regular *abcdef* en un círculo. Traza a continuación tres diagonales *ad*, *be* y *cf*. Estas tres líneas se cruzan en un centro *g*, configurando seis triángulos regulares. Luego traza una línea horizontal recta, pon encima tres de los triángulos del hexágono, yuxtaponiendo sus vértices [de las bases], y traza una línea recta que una sus vértices superiores. Así resultan cinco triángulos regulares ajustados entre sí. Añade medio triángulo a cada lado. Con estos seis triángulos se obtiene un cuadrilátero alargado [rectángulo] de ángulos iguales que tiene la misma superficie que el hexágono. Transforma a continuación este cuadrilátero en un cuadrado. (p. 212)

¹¹² Este método conocido desde la época de Eudoxo consiste en demostrar que el área del círculo se puede agotar al inscribir y circunscribir polígonos regulares, y se soporta en la proposición X-1 de los *Elementos*: Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Figura 36

Un hexágono de la misma superficie que un cuadrado.



Fuente: elaboración propia.

Las construcciones realizadas por Durero dan cuenta de que el artista conocía los diferentes métodos que circulaban en la época para dar solución a los tres problemas clásicos. En particular, las construcciones preliminares a la cuadratura del círculo reflejan el estudio que ha realizado el artista alrededor de este problema, ya que presenta la cuadratura de un triángulo equilátero y escaleno, además el proceso inverso, es decir, dado el cuadrado construir un triángulo de igual superficie. También refiere que se pueden cuadrar todas las figuras regulares, sin importar la cantidad de vértices. Estas construcciones obedecen a una lógica e importancia que han tenido estos problemas en el desarrollo de las matemáticas y las aproximaciones que se han planteado en su solución, que el artista no desconoce y las describe con tal sencillez que puedan ser concebidas por sus aprendices o cualquiera que se inquiete en el arte de la medida.

Es conveniente presentar para el desarrollo de este trabajo los aportes realizados por Descartes, ya que en la geometría propuesta por el matemático francés se alberga uno de los pilares fundamentales en la historia de las matemáticas y un nuevo modelo que no desliga la tradición, pero sí le da nuevos cimientos a la matemática, como se presenta a continuación.

4.1.2. La solución de la duplicación del cubo y trisección del ángulo en Descartes

El primer matemático griego en plantear una solución teórica al problema de la duplicación del cubo fue Hipócrates, el problema es equivalente a determinar dos medias proporcionales de dos cantidades dadas. A este nuevo problema fueron varios matemáticos los que se dedicaron a estudiarlo. Eratóstenes, fue uno de ellos, quien construyó un instrumento que permite resolver de manera mecánica el problema y dio un paso importante en el desarrollo de dispositivos no clásicos,

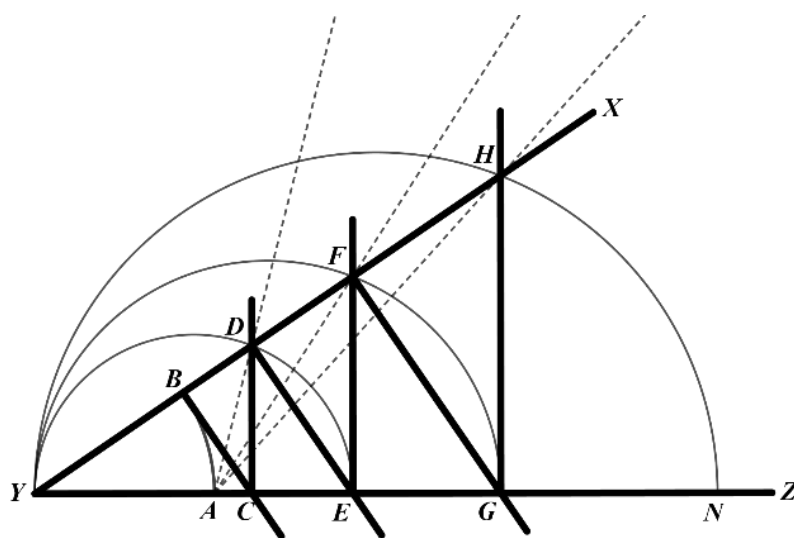
al inventar el mesolabio. A principios de 1619 Descartes comenzó a idear otro instrumento mecánico para resolver problemas geométricos complejos.

Descartes (trad. en 1981) presentó en su obra el *Discurso del método* en la sección *Geometría* un instrumento, nombrado como el «instrumento XYZ» y lo describe (figura 37):

Considérense las líneas AB , AD , AF y semejantes, que supongo han sido descritas con la ayuda del instrumento XYZ , compuesto de varias reglas. Estas están unidas de tal forma que cuando la conocida YZ está sobre la línea AN , puede abrirse y cerrarse el ángulo XYZ ; cuando está totalmente cerrada, los puntos B, C, D, F, G, H , se encuentran todos en A ; pero a medida que se abre BC , unida a XY de modo que forma ángulos rectos en el punto B , empuja hacia Z la regla CD ; CD resbala sobre YZ formando siempre ángulos rectos con ella y empuja a DE , que se desliza igualmente sobre YX , permaneciendo paralela a BC . DE empuja a EF ; EF a FG y FG a GH ; así mismo, podemos concebir una infinidad de otras, que se impulsan consecutivamente de igual modo: unas forman los mismos ángulos con YX , y los otros con YZ . Así cuando se abre el ángulo XYZ , el punto B describe la línea AB , que es un círculo; los otros puntos, D, F y H , en donde se encuentran las intersecciones de las otras reglas, describen otras curvas, como AD, AF y AH , siendo cada una de ellas progresivamente más compleja que el círculo. (p. 296)

Figura 37

Instrumento XYZ de Descartes.



Fuente: elaboración propia.

El método de Descartes para encontrar dos medias proporcionales entre dos segmentos lo realiza empleando la descripción de las líneas curvas que se forman utilizando el instrumento XYZ , además puede hallar cuantas medias proporcionales se quieran, es decir, puede encontrar n medias proporcionales entre dos segmentos y con las relaciones de proporciones podría construir la raíz n -ésima de un segmento. Descartes lo expresa de la siguiente forma:

Así, por ejemplo, no creo que exista modo más fácil para hallar cuántas medias proporcionales se deseen y cuya demostración sea más evidente que el empleo de las líneas curvas que se describen mediante la utilización del instrumento XYZ , anteriormente descrito. Pues si se desea hallar dos medias proporcionales entre YA e YE no es preciso sino describir un círculo cuyo diámetro sea YE ; puesto que este círculo corta la curva AD en el punto D , YD será una de las medias proporcionales buscadas. La demostración aparece como evidente tan pronto como este instrumento es aplicado sobre la línea YD , pues como $YA = YB$ es a YC , así YC es a YD , e YD es a YE . (trad. en 1981, p. 339)

Es decir, en el instrumento XYZ (figura 37), dado los triángulos YBC y YDC se cumple que: el ángulo $\angle Y \cong \angle Y$ y $\angle YBC \cong \angle YCD$ por ser rectos.

Luego los triángulos $\triangle YBC \sim \triangle YDC$ son semejantes por el criterio ángulo-ángulo.

Así, tenemos que:

$$\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{CD}{YD}$$

Generalizando se obtienen muchas más semejanzas entre los triángulos del instrumento XYZ . De dicha semejanza de triángulos se deriva la proporcionalidad de sus lados, lo que permite establecer muchísimas medias proporcionales y las siguientes son las más evidentes:

$$\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG} = \dots$$

El instrumento XYZ permite encontrar dos o más medias proporcionales, como se menciona anteriormente, y puede usarse para duplicar el cubo.

Supongamos,

$$YA = YB = 1$$

Se quiere determinar la arista del cubo de volumen 2 unidades.

Para resolver esta cuestión, basta con abrir el instrumento XYZ hasta que la longitud del segmento YE sea igual a 2 unidades, es decir regular la apertura del instrumento de modo que la regla DE se desplace hasta las 2 unidades y entonces $YC = \sqrt[3]{2}$.

Sea,

$$YA = YB = 1, YE = 2, YC = x \text{ y } YD = z$$

Los triángulos $\Delta YBC \sim \Delta YDC$ son semejantes.

Luego

$$\frac{YA}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE}$$

Es decir,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{z} = \frac{z}{2}$$

Operando algebraicamente tenemos que:

$$z = x^2 \text{ y } z^2 = 2x$$

Por tanto,

$$YC = x = \sqrt[3]{2}$$

Durero en el libro *De la medida* describe un instrumento (figura 24) elemento que le permite construir ángulos rectos para establecer la semejanza de sus triángulos y, finalmente, encontrar las medias proporcionales entre los segmentos dados inicialmente, aunque este método no es propio del artista; en su descripción refiere a Euclides para poder encontrar las medias proporcionales. Además, plantea la construcción del problema de la duplicación del cubo sin la necesidad de un instrumento, como es la solución atribuida a Herón.

Otro de los problemas que trata Descartes (trad. en 1981) en su texto de *Geometría* es el dividir un ángulo en tres partes iguales (figura 38) y escribe:

Si deseamos dividir el ángulo NOP o bien el arco o porción del círculo $NQTP$ en tres partes iguales, tomando $NO = 1$ como el radio del círculo, $NP = q$ como la cuerda del arco dado y $NQ = z$ para la cuerda que corresponde al tercio del arco dado, tenemos que la ecuación es:

$$z^3 = 3z - q$$

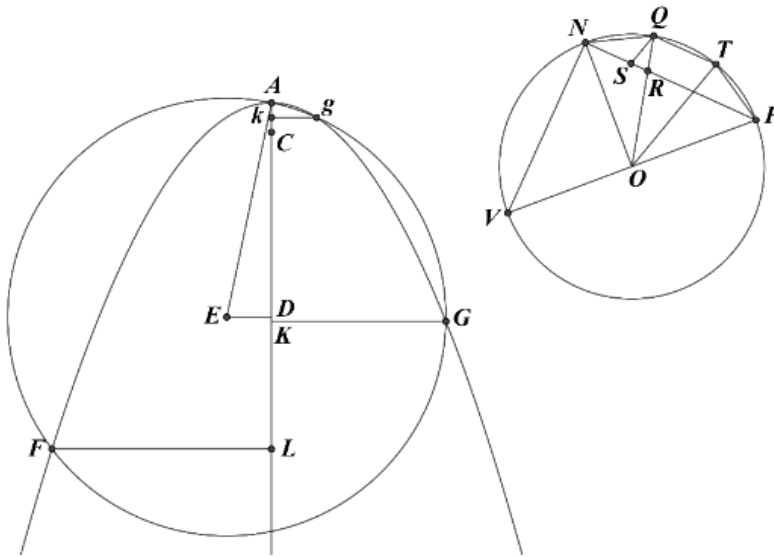
Es tal, pues trazando las líneas NQ, OQ y OT , y trazando a su vez QS paralela a TO , se ve que NO es a NQ como NQ es a QR y como QR es a RS . De modo que siendo $NO = 1$, y

$NQ = z$, entonces $QR = z^2$ y $RS = z^3$. Puesto que es preciso solamente RS o z^3 para que $NP = q$ sea triple de $NQ = z$, tenemos que $q = 3z - z^3$ o bien que $z^3 = 3z - q$.

Si posteriormente describimos la parábola FAG , y si CA es la mitad de su lado recto, y si $CD = \frac{3}{2}$ y la perpendicular $DE = \frac{1}{2}q$, y, finalmente, si desde el centro E describimos el círculo $FAGG$ por A , tendremos que cortará a esta parábola en los tres puntos F, g y G sin contar el punto A que es el vértice. Esto muestra que hay tres raíces en esta ecuación a saber: GK y gk que son verdaderas, y la tercera que es falsa, FL . De las dos raíces verdaderas, la menor de ellas gk es la que debemos tomar para la línea buscada NQ ; la otra, GK , es igual a NV la cuerda correspondiente a la tercera parte del arco NVP que junto con el otro arco NQP constituyen el círculo. La falsa, FL , es igual a la suma de las otras dos, QN y NV . (pp. 363-364)

Figura 38

Trisección del ángulo por Descartes en el libro de Geometría.



Fuente: elaboración propia.

Es decir, por semejanza se tiene que:

$$\frac{ON}{QN} = \frac{QN}{QR} = \frac{QR}{RS}$$

Como $NO = 1$, y $NQ = z$, se tiene

$$\frac{1}{z} = \frac{z}{QR}$$

Entonces, $z^2 = QR$

Y

$$\frac{z}{QR} = \frac{QR}{RS}$$

Luego, $z^3 = RS$

Por otra parte, $NP + RS = 3NQ$, implica que $q + z^3 = 3z$

Descartes sostiene que q se puede obtener a partir de la intersección de la parábola FAG y la circunferencia $FAGG$ de centro E , siendo una de las raíces del segmento buscado.

En los aportes realizados por Descartes nos permite reflexionar sobre el papel que tiene el dibujo, que soporta, de alguna manera, la construcción, pero no nos arroja la información de que una medida es exacta, contrario a la demostración que no se limita a la construcción, sino al conocimiento de propiedades y argumentos que validen un proceso de medición. Así las construcciones geométricas de la geometría clásica se van reemplazando por un sistema de operaciones algebraicas. En Descartes se tienen una nueva época de la matemática y la filosofía, en la que se construye una visión universal del conocimiento. Según Descartes (trad. en 1983), la certeza y la búsqueda del camino que nos conduce a la verdad se encuentran en la aritmética y la geometría, pues solo estas disciplinas son libres de todo defecto de falsedad o de incertidumbre.

Para Durero la matemática es uno de los argumentos más importantes en la fundamentación teórica del arte, pues pretendía llevar al intelectual el carácter artesanal de la pintura, y ello era posible a través de un ideal de belleza que evoca simbólicamente lo esencial, original y verdadero de la geometría y que contribuye a sus composiciones artísticas en la expresividad de sus emisiones y pensamientos más profundos en su vida personal y profesional.

Para identificar ese vínculo entre lo que representa la geometría para Durero y la expresión de su arte, se toma una de sus obras magistrales, *Melancolía I*, esta obra es una de las máximas expresiones que envuelve emociones, misterio y una sublime belleza, que le dan un carácter emocional, artístico e intelectual a la geometría.

4.2. «Geometría hecha Melancolía»

Durero es considerado uno de los principales representantes del arte del Renacimiento en Alemania. Como se ha mencionado en el segundo capítulo, el artista redescubrió para sí mismo y para sus compatriotas un arte clásico. Panofsky (1979) señala que Durero, “comprendió que el arte del Norte solamente podría asimilar los valores artísticos de la Antigüedad a través de una reforma

de los principios, él mismo emprendió tal reforma, en la teoría y en la práctica” (p. 264). Durero tomó los principios del arte clásico en su práctica, gracias a las fuentes y el resurgimiento de las artes que habían iniciado los italianos. Por medio de sus experiencias y conocimientos el artista alemán llegó a realizar su propio programa renacentista que abarca elementos de formación profesional en la pintura como, por ejemplo, el desnudo, la mitología clásica y las alegorías.

Los teóricos italianos llevaron a Durero a estudiar e incitaron una formación matemática, con el fin de ver en sus obras armonía, proporción y perfección; estos elementos son indispensables para el artista renacentista alcanzar la tan anhelada belleza. Como muchos teóricos y artistas del renacimiento italiano veía en la geometría el fundamento de la pintura, pero también contaba con elementos que si el artista llegaba a dominar podría hacer una obra bella y perfecta.

Las obras artísticas de Durero son representaciones que revelan su temperamento y estado de ánimo, ya que en el Renacimiento las obras pictóricas tenían un nuevo carácter, con la expresión de sentimientos por medio de los rasgos y movimientos de las figuras; también, las alegorías se retoman en la nueva concepción del arte. Durero se formó y adaptó los nuevos parámetros de la pintura que descubrió en los italianos, pero al mismo tiempo conservó elementos tradicionales, ligados a la concepción medieval. Durero no solo va en la dirección de perfeccionar su arte, sino en conocer el sentido y el porqué de su profesión, y es por medio de la geometría que tratará de dar respuesta a estos cuestionamientos. La geometría como un vínculo artístico, emocional e intelectual en su vida profesional y personal.

Los temperamentos flemático, sanguíneo, colérico y melancólico, son los estados en los que se puede encontrar un artista en las diferentes etapas de su vida, y cuyo análisis histórico y filosófico circulaba aún en el siglo XV; pero no con la misma intensidad que se tenían en la Edad Media. Estos temperamentos característicos de cada persona fueron también parte de la vida de Durero, como la melancolía. Este estado se refleja y lo expone en la xilografía del mismo nombre, *Melancolía I*, cuya interpretación se realiza teniendo en cuenta la posición de la figura central, la mujer con alas —la melancolía—; por su postura, se percibe que está sumergida en sus pensamientos sin ninguna actividad, a su lado se encuentra un *putto*¹¹³, apoyado en una piedra de molino, que escribe o dibuja sobre una pizarra, tiene su mirada fija en esta, sus manos no se

¹¹³ La forma más común es *putti*, plural de la palabra italiana *putto*, que significa niño con alas normalmente desnudo. Son especialmente abundantes en el Renacimiento y el Barroco, y forman parte de la recuperación de motivos clásicos típicos de la época.

encuentran cerradas sino activamente ocupadas. La actitud del niño significa la «práctica» que no es atendida por la figura principal que es el ángel, la «teoría», razón por la que la práctica puede continuar en una actividad e incluso terminarla, pero no tiene objeto ni razona (Klibansky et al., 1991). Así, Durero manifiesta, en la introducción del libro *De la medida*, que la práctica y la teoría van de la mano y no se puede desligar una de la otra, ya que sin el correcto fundamento no se puede llegar a un mejor y buen juicio de una obra de arte.

Los elementos geométricos expuestos en el grabado hacen parte de esa teoría que es la geometría, esta disciplina es la que permite instruirse en la medida de la regla y el compás y a todo aquel que tenga inquietudes artísticas. Los objetos se encuentran en desorden, reflejan una indiferencia y un caos de cosas que no se usan. El compás sostenido por la melancolía simboliza el propósito intelectual y una de las herramientas que gobierna a las demás, ya que Durero en su búsqueda de la belleza absoluta, que encontraría atravesando los Alpes y sería revelada por los italianos, manifiesta que las reglas que rigen a la belleza son calculables con la escuadra y el compás; sin embargo, pese a todo esfuerzo Durero, (trad. en 1987) no llegó a conocer esas reglas, pues escribe: “¿la belleza? No sé qué es... todo depende de muchas cosas...”. Las palabras que declara Durero en esta cita alrededor de 1512 son la clave del estado melancólico que se apodera de él y que dos años más tarde realizará la famosa xilografía, *Melancolía I*.

Al no encontrar una plenitud en sus obras o trabajos los artistas entraban en un estado melancólico, Panofsky, (1982) señala que el estado melancólico de Durero es el de quien recibe «inspiraciones de lo alto» y conoce la sensación de «impotencia» y abatimiento, pero también un artista—geometra, que sufre las limitaciones de la disciplina que amaba. Durero sufre por las limitaciones es su formación matemática, razón por la que anhela ser más diestro en la disciplina y se pierde en los pensamientos, de allí la mirada melancólica.

La matemática fue uno de los argumentos más importantes en las reflexiones teóricas sobre el arte que realizó Durero pues pretendía darle a la actividad artística un carácter intelectual por medio de la geometría. Los estudios, viajes, reuniones y los libros publicados del artista dan cuenta que puso a la geometría al servicio de la expresividad de su arte. En su afán de alcanzar el ideal de belleza y enaltecer las artes, contribuye a un desarrollo de la teoría del arte en Alemania y a la divulgación de sus conocimientos en geometría a los aprendices y a todos aquellos interesados en el arte.

Otros objetos que se encuentran en *Melancolía I* y evocan a la geometría refiere, en palabras de Klibansky et al. (1991), que el compás, junto con la esfera y los materiales de escritura, representan la geometría pura; el edificio en construcción, el martillo, la plantilla y la regla representan a la geometría aplicada en la artesanía y a su edificación; los fenómenos astrales son la geometría aplicada a la astronomía y meteorología, y finalmente la geometría descriptiva está representada en el poliedro que en concreto es un problema y símbolo de la perspectiva. Las herramientas que se encuentran al pie de la melancolía, en la xilografía, son los instrumentos de una profesión que practica el arte de la medida, pero que no se pueden desligar de una teoría, enfatizada en el libro sobre el que se encuentra descansando el brazo de la melancolía que sostiene el compás, es decir, el libro simboliza la importancia que tiene la teoría más que la aplicación de la geometría.

Uno de los instrumentos más importantes en la obra de Durero, *Melancolía I*, es el compás, que no solo representa a la geometría, sino que se encuentra como una herramienta indispensable para la realización de sus obras y una de las fuentes inagotables para buscar y encontrar muchas más figuras de las que se pueden imaginar; así los artistas o todo aquel que se sirva de la medida, alcanzarán un mayor conocimiento y descubrirán muchas más cosas de las que expone en su trato, es lo que expresa Durero (trad. en 2000) en la introducción del libro *De la medida*.

Durero da ciertas pautas a los jóvenes pintores en su tratado, pero con la esperanza que lo expuesto ayude a los aprendices a reflexionar y descubran nuevas y maravillosas obras, es decir, que cada aprendiz tenga la capacidad de imaginar y, por lo tanto, recrear todas las figuras posibles. El artista plantea una construcción con regla y compás que va acompañada de un dibujo que facilite la explicación descrita y como lo manifiesta Durero (trad. en 2000), “quiero dibujar todas las cosas que describo en este libro, para que los jóvenes vean con sus propios ojos y comprendan mejor mis explicaciones” (p. 133).

Los instrumentos que le permiten a Durero realizar las construcciones en el tratado de geometría son la regla y el compás y en sus definiciones elementales¹¹⁴ expuestas inicialmente en el libro *De la medida* tienen un sentido euclidiano, pero también con un carácter artístico:

... un punto es algo que no tiene ni tamaño, ni longitud, ni ancho, ni grosor, y, sin embargo, es principio y fin de todas las cosas materiales que se pueden hacer o que podemos idear

¹¹⁴ Para enseñar a los jóvenes a medir, Durero, expresa que se deben conocer los fundamentos de la medida y cómo se mide, por ello inicia con la definición de punto, línea y las clases de líneas.

con nuestro pensamiento, ... Ningún punto ocupa lugar, pues es invisible y, no obstante, puede ser puesto por nuestro pensamiento o nuestras ideas ... Pero para que los jóvenes entiendan de trabajo práctico, quiero mostrar un punto como un dibujo hecho con la punta de una pluma y escribir a su lado la palabra «punto». (trad. en 2000, p. 133)

Durero continúa con la definición de línea:

Si un punto se continúa desde su inicio a otro extremo, a esto se llama línea, y esta línea es una longitud sin grueso ni ancho, y se puede hacer tan larga como se quiera” y la dibuja con un trazo recto de la pluma y escribe encima de ella «línea». (trad. en 2000, p. ¿)

Además, de estas definiciones, menciona que “con el trazo recto, la línea invisible se comprende mentalmente. Este es el modo en que el entendimiento interior debe mostrarse en la obra exterior” (trad. en 2000, p. ¿). Con la última afirmación, Durero, ratifica que todo lo que se encuentra interiormente se puede expresar y mostrar en las construcciones geométricas, obras pictóricas, xilografías, dibujos artísticos, entre otros.

Las construcciones con regla y compás, en el libro *De la medida*, se presentan en un lenguaje claro y con un contenido matemático comprensible para los aprendices y artistas, quienes no están formados en la rigurosidad de las matemáticas. Los tres problemas clásicos de la geometría no son la excepción a estas características de presentación, pues describe su construcción geométrica y su respectivo dibujo, además la utilidad y aplicación en el campo de las artes de cada uno de ellos; los rosetones y las balas de cañón son un ejemplo de ello, expuestos en el tercer capítulo, sus construcciones evocan a otras construcciones útiles en la práctica. Puede decirse que las construcciones contribuyen al misterio y la belleza, que brotan de las composiciones artísticas de Durero.

Melancolía I es donde se encuentra la fragilidad humana y el intelecto, donde la geometría es capaz de desbordar los pensamientos del artista, a tal punto de representarla en la tradición de una época como el estado de ánimo que envuelve sus anhelos más profundos; también le dan las pautas al artista para recorrer y construir su legado. Esta obra deja ver la tradición, la teoría y la práctica de la geometría. La tradición, se evidencia en la regla y el compás como instrumentos indispensables en las construcciones geométricas, pero con un sentido práctico, útil para el artista o todo aquel que se sirva del arte de la medida; contrario a los griegos estos instrumentos son teóricos, pero para Durero están soportados en una teoría, pues el ángel apoya su brazo sobre un libro y con su mano sostiene un compás que dibuja lo impalpable, ya que su mirada se encuentra

perdida en sus pensamientos y en la melancolía. El libro representa la teoría, pero Durero no contó con la fortuna de ser un matemático de profesión, por ello no se cansó de estudiar e indagar.

Por otra parte, en sus autorretratos Durero también deja ver que su formación inicialmente, sustentada solo en la práctica carece de sentido y expresividad de su rostro. Las pinturas más emblemáticas como son el autorretrato de 1498 (figura 4) y el de Múnich (figura 5) reflejan la nueva posición del artista, ya no como un artesano sino como un señor del Renacimiento, quien ha puesto en práctica la teoría y las nuevas técnicas artísticas. Los autorretratos no solo muestran la posición social de Durero, también son el reflejo de un hombre que se está replanteando su concepción cristiana, Durero se pinta semejante a Cristo y ya no ve el cristianismo como el único camino de salvación.

La búsqueda de Durero de una teoría que fundamente su hacer artístico no solamente se concibe en el campo formal de las matemáticas, sino que involucra y se adapta a su vida espiritual, profesional e intelectual, es decir, sus obras ya no son una experiencia pictórica sino el resultado de una experiencia social, personal e intelectual.

Este trabajo de investigación permite reconocer que la pintura es un medio de transformación social, cultural, intelectual y emocional, que puede establecer relaciones con otras disciplinas y unidas pueden impulsar nuevas teorías y edificar las existentes.

Uno de los primeros cuestionamientos realizados por Durero, que lo llevó a buscar los principios que rigen a la belleza con la utilización de la regla y el compás, permiten ver a la geometría como fundamento para un oficio que va más allá de la práctica y la utilidad; además, dota a la geometría de un sentimiento de melancolía, al no poder expresar la belleza en sus obras, ya que el artista desconoce algunos aspectos teóricos de la disciplina.

Así, la belleza como uno de los elementos principales buscado sin cesar por Durero se presenta como el vínculo que en la pintura conecta al maestro con el aprendiz para llegar a una perfecta y buena obra de arte, pero que además se necesita para educar a otros en cualquier rama del saber.

4.3. «No se puede educar sin inducir a la belleza»¹¹⁵

Los humanistas y eruditos en el intento por recopilar y estudiar los textos antiguos, desde autores y corrientes muy conocidas, hasta aquellas que habían estado olvidadas y censuradas son parte de la concepción del Renacimiento. Uno de los filósofos que influyó en el pensamiento renacentista fue Aristóteles; tomando sus palabras en la *Metafísica* (trad. en 2015), “...el arte, más que la experiencia, es ciencia; porque los hombres de arte pueden enseñar, y los hombres de experiencia no” además, el filósofo añade que: “los hombres de experiencia saben bien que tal cosa existe, pero no saben por qué existe; los hombres de arte, por lo contrario, conocen por qué y la causa” (párr. 4). Es una concepción ligada al pensamiento de Durero, ya que el artista no se conformó con la mera práctica de su profesión, sino que buscó incansablemente el fundamento de su hacer artístico, por qué y para qué se pinta. El fundamento y la formación que buscaba Durero no es solo para satisfacer sus intereses profesionales, él tiene el firme propósito de instruir a todos aquellos interesados en las artes.

El tratado *De la medida* y el tratado *De las fortificaciones* publicados antes de su muerte, son el reflejo de la dedicación y compromiso que tiene Durero en sistematizar una teoría que forme a jóvenes pintores alemanes y los instruya en la geometría. Además, cabe destacar que los *Cuatro libros sobre la proporción humana* publicado póstumamente por su fiel amigo Willibald Pirckheimer, quien en el colofón de la obra escribió: “Si Dios le hubiera concedido una vida más larga, hubiera escrito aún cosas más maravillosas y únicas acerca del arte”, es un texto que se encontraba terminado por Durero, pero la muerte temprana del artista le impidió llevarlo a la imprenta. Durero intentó difundir su saber en su lengua materna, por ello los tres textos del artista se encuentran en alemán, con la intención de que sus compatriotas se beneficiaran de los conocimientos en los que él se había formado.

Durero intenta educar a sus aprendices en su taller y por medio de sus publicaciones, ya que a través de la educación el ser humano alcanza su máximo potencial, convirtiéndolo en un ser libre, consciente y responsable (Francisco, 2020). Estas palabras cobran sentido en el propósito de Durero en formar a las futuras generaciones de artistas, quienes serán los encargados de ir consolidando la teoría del arte, además de ser parte de la academia como una profesión y la más noble de las humanidades.

¹¹⁵ Frase pronunciada por el papa Francisco (2020).

La anterior reflexión sobre la educación realizada por el papa Francisco (2020) en la que se menciona que se debe integrar el lenguaje de la cabeza con el lenguaje del corazón y el lenguaje de las manos para poder educar, sirve de paralelo para comparar los planteamientos esbozados por el arte del Renacimiento con la educación actual, en tanto se intenta fomentar una educación intelectual que se encuentra en las virtudes individuales, sociales y culturales del individuo.

Durero fue un artista que supo integrar estos lenguajes, el de la geometría, el arte y su propia experiencia emocional y espiritual. En los tres problemas clásicos de la geometría hay una tradición que Durero expone y es la solución aproximada de estos problemas. El artista presentó en su tratado, *De la medida*, los elementos geométricos que pueden construirse aproximadamente con la regla y el compás; hay un saber matemático que corresponde al lenguaje de la cabeza. Este lenguaje lo integró con su arte en la construcción de rosetones, en el caso de la trisección del ángulo y las balas de cañón en la duplicación del cubo; este es el lenguaje de las manos pues comunica por medio de las construcciones un saber que adaptó a su profesión artística. Finalmente, el lenguaje del corazón que es el encargado de expresar y comunicar todo lo que se encuentra interiormente en nuestro ser, y Durero expresa por medio de sus obras la inconformidad ante la Iglesia, el miedo a la muerte, la soledad, la satisfacción de sus logros intelectuales y artísticos, pero también el anhelo de contemplar la belleza y la perfección de sus creaciones artísticas, un ejemplo de ello es el grabado de *Melancolía I*.

Durero buscó la belleza y perfección de sus obras y por ello atravesó dos veces los Alpes, además se preocupó por enseñarles a jóvenes artistas alemanes e instruirlos en el arte de la medida, como lo manifiesta en la introducción del *Underweysung*. El camino de formación y superación del artista en los distintos espacios de su vida inician con conocer y estudiar los principios y reglas que rigen a la belleza, de ahí se despliega todo un recorrido emocional, intelectual, social, cultural y profesional. Así, refiriéndose a las palabras del papa Francisco (2020) “No se puede educar sin inducir a la belleza” (párr. 10). El programa renacentista de Durero presenta como principios el equilibrio, armonía y perfección de las obras artísticas, además del fundamento teórico, es decir, la belleza es el principio para conocer la verdad y tener un mejor y correcto juicio, y así poder enseñar a otros desde las vivencias personales, profesionales, culturales e intelectuales.

Durero conoció las concepciones del arte clásico y fue capaz de adaptarlas al arte del Norte en su práctica artística. Como se ha resaltado en este trabajo la práctica y la teoría hacen obras buenas, por ello Durero no solo tomó elementos pictóricos de los clásicos, además estudió y adaptó

en un lenguaje claro los problemas que acontecían en la Antigüedad y que en el siglo XV continuaban siendo temas de interés e investigación para los matemáticos. Estos problemas hacían parte de la geometría que Durero se había dedicado a estudiar y por ello no se puede desconocer su importancia y solución a lo largo de la historia. Los detalles hacen de Durero un apasionado por lo desconocido, en este sentido, el artista estudió los tres problemas clásicos de la geometría. Con ayuda de sus más cercanos amigos humanistas, Durero, ubicó estos problemas en su tratado *De la medida*, realizó las construcciones de fuentes conocidas y adaptó, desde su concepción, una solución aproximada de estos.

Los tres problemas clásicos son una fuente de motivación para el artista, pues en las reiteradas palabras de Durero, señala que a partir de sus construcciones se pueden crear muchas más figuras hermosas, aunque las construcciones se presenten como insolubles por razonamientos clásicos, sí es posible aproximarse a una solución para generalizar y plantear nuevas cuestiones y propiedades, es decir, que en los nuevos planteamientos se tienen nuevos desafíos y con ello nuevas y renovadas teorías que conllevan al desarrollo de una disciplina. Estos problemas, planteados desde los griegos han trascendido en la historia de las matemáticas, en su desarrollo y evolución.

La regla y el compás son los instrumentos que desde el inicio se tomaron como las herramientas que permiten construir la célebre geometría de Euclides, fundada sobre las construcciones geométricas y a partir de estas ha sido posible fundamentar muchas teorías de la geometría. Las construcciones tomaron un papel fundamental en la solución de problemas, más aún en la restricción para el uso de la regla y el compás en la solución de los tres problemas clásicos dio lugar a la construcción de nuevas curvas, como instrumento o método de la resolución de los problemas; otros mecanismos y concepciones para simplificar y reproducir resultados de la geometría clásica.

El desarrollo de la geometría no solo obedece a unos principios teóricos, sino también a unos objetos o instrumentos que hacen posible su construcción, como son la regla y el compás. Asimismo, estos instrumentos entran en un desarrollo conceptual y físico, por ejemplo, la regla utilizada por Durero es marcable, y el compás le permite trasladar distancias; en Descartes el compás (instrumento *XYZ*) genera nuevas curvas que no son circunferencias. Los autores Castiblanco et al. (2004) señalan que, las construcciones geométricas más allá de su representación

sobre el papel o en una pantalla de un computador desbordan el marco de lo concreto e invaden terrenos teóricos. En sus propias palabras:

las herramientas para producir los dibujos y sus reglas de uso corresponden a axiomas y teoremas de un mismo sistema teórico que no siempre está explícito. Dada una construcción, siempre es posible hallar un teorema que la valida y establece la “legalidad” de las relaciones entre los elementos de la figura. Adicionalmente, las construcciones añaden elementos conceptuales que ayudan a los estudiantes a reconocer y conectar las diferentes propiedades matemáticas necesarias para obtener, por ejemplo, una figura correcta, y posteriormente justificar por qué está correcta. (p. 17)

Las construcciones geométricas anteceden a otras propiedades que no se encuentran expuestas en la construcción, en este sentido, las construcciones geométricas juegan un papel importante en el desarrollo del conocimiento geométrico, pues ponen en evidencia ciertas propiedades y relaciones entre ellas que contribuyen a la argumentación. Las construcciones geométricas son una vía para el desarrollo del pensamiento y la comprensión de la geometría, pero cuando estas pasan a un nivel más avanzado, es decir, cuando se tiene la capacidad de establecer relaciones entre las propiedades explícitas e implícitas se llega a la teoría formal. En este sentido, las construcciones son un punto de encuentro entre la geometría vista como una teoría abstracta y la geometría vista como un recurso de construcción y modelación en matemáticas.

Las construcciones descritas por Durero en su libro, *De la medida*, sus aplicaciones y la intención de crear muchas más figuras hermosas son el ejemplo de construcción y modelación en geometría, que le sirven en la expresión de su arte, y el artista no desconoce su contenido matemático ni el grado de dificultad que tienen, pues llega a tal punto de representarlas y exponerlas en sus xilografías.

Los detalles hacen de Durero un apasionado por lo desconocido, el artista estudió los tres problemas clásicos de la geometría, con ayuda de sus más cercanos amigos humanistas, Durero, ubicó estos problemas en su tratado, realizó las construcciones de fuentes conocidas y adaptó desde su concepción la solución de estos. Los presentó en un campo artístico de una forma clara y sencilla, pero con la conciencia de que estos problemas han trascendido en la historia, hasta el momento, y que contienen toda una teoría matemática que para él es inalcanzable. Es en esa teoría donde la matemática pasa a ser vista como una teoría abstracta.

Los tres problemas clásicos de la geometría son parte fundamental en el desarrollo de las matemáticas y las nuevas teorías que surgieron al querer dar solución a estos problemas. No es hasta 1837 cuando el matemático francés, Pierre Wantzel publicó una prueba de la imposibilidad de trisecar cualquier ángulo y de la duplicación del cubo, su demostración utiliza la teoría de Galois. Luego, en 1882, el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann demostró que π es un número trascendente, y, por lo tanto, es imposible construir un cuadrado con la misma área que un círculo dado.

A lo largo de este trabajo se ha expuesto parte de la vida y obra de Alberto Durero, un artista del Renacimiento que, motivado por enaltecer su profesión, ve en la geometría uno de los fundamentos del arte que tiene un valor creativo, intelectual y analítico. Es por medio del estudio de tradiciones artísticas, intelectuales y culturales, viajes, experiencias y amistades que le permitirán conocer y descubrir las diferentes etapas de su vida profesional, intelectual y espiritual.

Durero conocido por sus xilografías, dibujos y pinturas deja un legado artístico, además por sus escritos teóricos llenos de construcciones geométricas con la regla y el compás, enseña una geometría útil para los artistas, pero sobre todo establece una conexión entre el arte y la geometría.

El desarrollo de la geometría y con ella los instrumentos físicos que le sirven para su representación como son la regla y el compás, han permitido, en gran parte, ir fundamentando otras teorías, según las necesidades conceptuales y materiales; incluso a nuevos y mejorados métodos que han contribuido al progreso de las matemáticas en su enseñanza, aprendizaje y divulgación.

4.4. El desastre religioso que oscurece la vida de Durero

Durero fue un hombre de profundas convicciones religiosas, piadoso, temeroso de Dios y un gran admirador de Lutero. La influencia de Lutero sobre el artista se ve reflejada en uno de sus cartas al capellán Sajon Spalatin¹¹⁶ en 1520, a quien rogaba que se defendiera y protegiera a Lutero. En 1521 realizó una plegaria, lamentando la muerte de Lutero, pues Durero equivocadamente creyó en la muerte de él.

En 1525, Durero se encontraba entre los partidarios de la reforma religiosa, pero cuando vio el furor y los horrores de las guerras campesinas, el artista tomó cierto distanciamiento, pues

¹¹⁶ Georg Spalatin nació en Spalt, cerca de Núremberg, fue un humanista, teólogo y reformador protestante alemán, secretario del príncipe elector Federico III de Sajonia, así como una figura importante en la historia de la Reforma protestante.

la Reforma había desencadenado ciertos fenómenos radicales que atentaban contra la vida y la integridad del ser humano. Monasterios y conventos fueron asaltados; se produjo episodios iconoclastas que llevaron progresivamente a la desaparición y culto de imágenes religiosas. Se produjo en aquel entonces un cambio en la función de la obra de arte, en sus aspectos estéticos y formales. En mayo del mismo año, Durero presencio cómo era apresado su mejor especialista en moldes, Hieronymus Andreae¹¹⁷, quien había hablado públicamente en favor de los reformistas. En numerosas ciudades se prohibieron las imágenes, para lo cual Durero quedó conmovido por las grandes pérdidas que le generaron, ya que los artistas fueron perdiendo muchos encargos.

El arte hasta principios del siglo XVI se enfoca en temas religiosos y se exhibe públicamente en iglesias. Todo el arte que mostraba la Iglesia Católica y en el cual enfatizaba su poder tenía que desaparecer, pues Lutero al prohibir el culto de las imágenes devocionales, favoreció el rechazo de la pintura de los altares, aunque Lutero las condena afirmando: “debéis arrancar las imágenes de vuestro corazón, no de los altares” (Zuffi, 1998, p. 114), no detuvo la decadencia del arte, específicamente en Alemania, pues después de 1530 no se pintan más retablos ni se esculpen altares en madera.

La Reforma Protestante se centró en el norte de Europa y los artistas comenzaron a realizar trabajos destinados al culto individual en el hogar, a escenas pequeñas y económicas para la adoración personal y la meditación del evangelio. También los artistas expandieron sus pinturas a temas seculares, paisajes, escenas de la vida cotidiana e incluso los retratos personales fueron cobrando gran importancia para el pueblo.

La Reforma suprime en gran parte el arte sagrado en Alemania, llevando a la partida de algunos artistas hacia otras naciones y en el peor de los casos a la ruina y desesperanza, que conllevan a una muerte artística e intelectual. Durero se percata que la Reforma, la anarquía y el ateísmo se extienden a su alrededor y que todos sus principios establecidos comienzan a desequilibrar su vida artística, intelectual y espiritual.

Durero en los últimos años de su vida produjo estampas con los retratos de varios nombres famosos, como los humanistas Erasmo de Róterdam¹¹⁸ (1469-1536), devoto seguidor de la

¹¹⁷ Hieronymus Andreae, fue un cortador de bloques de madera alemán, impresor, editor y tipógrafo. Uno de los logros más conocidos es el enorme grabado en madera del Arco del Triunfo de 192 bloques, diseñado por Durero para Maximiliano I. También fue importante como impresor de música.

¹¹⁸ Durero sentía una profunda admiración por Erasmo de Rotterdam, consideraba que era un hombre inteligente, culto y sereno. Al realizar su retrato le rinde un homenaje, Durero le sitúa en su escritorio, dedicado al trabajo, rodeado de libros que le recuerdan que son objetos de lujo en su momento. Frente a su atril, en un jarrito tiene

Reforma, animado por un espíritu de diálogo y moderación, solicita una reforma interna del catolicismo; Felipe Melanchthon¹¹⁹ (1497-1560) se convirtió en un fiel y partidario de Lutero, realizó estudios sobre San Pablo y sus escritos tienen una importancia fundamental en la teología protestante y Willibald Pirckheimer (1470-1530) un amigo incondicional durante toda la vida de Durero. Estos tres hombres retratados por Durero son la culminación de sus ideas en el campo del retrato y de sus preocupaciones religiosas, pues Durero estudió con gran interés las afirmaciones y las profundas críticas de Erasmo y Melanchthon, pero esta nueva posición lo alejó de su gran amigo Pirckheimer, ya que el humanista inicialmente se adhirió a la Reforma, pero las aberraciones, como las denomina, cometidas por los protestantes lo obligo a volver al catolicismo.

Durero también pintó muchos retratos de cuerpo entero y de medio cuerpo y de personajes destacados de Alemania. El retrato durante la Reforma se caracteriza en representar la espiritualidad de la persona retratada, es decir, mostrar su interior y ser fiel a la realidad, huye de toda idealización. Los estudios realizados sobre los rostros en este periodo reflejan tanto la belleza, la fealdad, la juventud, la vejez e incluso la enfermedad. Durero no es ajeno a esta nueva realidad de la pintura y da cuenta de ello en el *Autorretrato como Varón de Dolor* (figura 39). Panofsky (1982) señala que Durero en el dibujo de 1522 (figura 39) desafía la distinción entre retrato e imaginario religioso. Durero se encuentra desnudo, con el cabello escaso y desordenado, con los hombros caídos, su cuerpo devastado por la lenta enfermedad que lo va consumiendo. Pero el dolor y el deterioro físico se interpretan como símbolo supremo de la semejanza del hombre con Dios, el artista sostiene el flagelo de la pasión, el azote. Durero se asemejaba ahora con el *Varón de Dolor*¹²⁰, sentía que sus días estaban contados.

un ramo de violetas y muguete, en alusión al gusto de Erasmo por la belleza, y símbolo además de pureza y modestia. Y al fondo, Durero escribe dos inscripciones, en latín y griego, que eran los idiomas del humanismo y la renovación renacentista. En latín, Durero declara que estamos ante el retrato de Erasmo realizado por él. En griego, la inscripción reza: "la mejor imagen de Erasmo, sus textos la proporcionarán".

¹¹⁹ Felipe Melanchthon nació en Bretten en 1497, fue un reformador religioso y erudito alemán. En 1521 escribió *Loci communes rerum theologicarum*, una disertación en favor de la Reforma protestante, y reemplazó a Lutero como líder de esta causa en Wittenberg cuando su mentor fue confinado en el castillo de Wartburg.

¹²⁰ El Varón de Dolores es el Cristo, *Ecce Homo*, el hombre al que se le han arrancado las vestiduras, este atado a la columna para torturarlo y después, se le viste con el manto y la corona de espinas. Es la manera más aguda de reflejar la parte humana y sufriente del Hijo de Dios, que es también Hijo del Hombre.

Figura 39

Autorretrato como Varón de Dolor.



Fuente: Durero, Alberto. Dibujo, (1522).

Este autorretrato no solo deja ver a un Durero que el paso del tiempo y la enfermedad lo han deteriorado físicamente, sino a un hombre consciente de su éxito, pero con una realidad interior atormentada, que quizás no lo dejó continuar con el despliegue de su creatividad artística, pues su fe, el status social, el gremio de los artistas y su cultura estaban sufriendo grandes cambios lo sumergieron en una oscuridad artística, espiritual y profesional. Durero aparece como doliente, herido por las circunstancias de su época. Ya no se identifica con el orgulloso, elegante y semejante a Cristo, como es en el Autorretrato de 1500. Aquí se define como alguien maltratado por la crisis de la fe y sus instituciones.

Referencias

- Aguirre, M. (2009). Los senderos del arte, la formación y la educación artística. Notas para un deslinde. *Revista Educación y Pedagogía*, 21(55), 15-30.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3648289>
- Alberti, L., y Vinci, L. da. (1827). *El Tratado de La Pintura por Leonardo da Vinci y los tres libros que sobre el mimo arte escribió Leon Bautista Alberti*. (Trad. 1827. Rejón). Imprenta Real. (Obra original de 1784).
- Alberti, L. (1998). *De la pintura*. (Trad. Pérez) Universidad Autónoma Metropolitana. (Obra original de 1435). <https://n9.cl/xsdh>
- Antal, F. (1960). *La pittura fiorentina e il suo ambiente sociale nel Trecento e nel primo Quattrocento*. Einaudi.
- Aquino, S. T. (2001). *Suma teológica*. Regentes de Estudios de las Provincias Dominicanas.
- Aristóteles. (1999). *Retórica*. (Trad. Racionero). Gredos. (Obra original del siglo IV a. C.).
- Aristóteles. (2011). *Poética*. (Trad. Martinez y Rodríguez). Gredos. (Obra original del siglo IV a. C.)
- Aristóteles. (2015). *Metafísica*. (Trad. 1873. Azcárate). FV Éditions. <https://n9.cl/e8un5>
- Barthel, G. (1953). *Historia del arte alemán*. Fondo de Cultura Económica.
- Baxand, M. (1978). *Pintura y vida cotidiana en el Renacimiento*. Gustavo Gili.
- Biosca, A., Gay, J., Gipsert, C., Martinez, R., y Vidal, J. (1997). Renacimiento en Europa central y del norte. En O. G. Editorial, *Historia del arte 8: Renacimiento y Manierismo II* (pp. 962-1081). Océano Instituto Gallach.
- Cardona, C. (2006). *La geometría de Alberto Durero: estudio y modelación de sus constructores*. Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Ministerio de Educación Nacional.
- Cennini, C. (1988). *El Libro del Arte*. Ediciones Akal. (Obra original de 1390)
- Checa, F. (25 de noviembre de 2003). *Adán y Eva [Durero]*. Museo del Prado. <https://n9.cl/tbv60>
- Chilvers, I. (2007). *Diccionario de arte*. Alianza Editorial.
- Clarke, G. (2016). De artistas y artesanos. Historia de una ruptura. *Revista de Investigación en Arte y Diseño A&D*, (4). <http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/ayd/article/view/19620>
- Constantinescu, D. (2017). El infinito simbólico de la metáfora poética. Alberto Durero. Melancolía I. *Revista Disertaciones*, 2(1). <https://n9.cl/y0o0wt>

- Descartes, R. (1981). *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría*. (Trad. Quintás). Ediciones Alfaguara. (Obra original de 1637).
- Descartes, R. (1983). *Discurso del método. Reglas para la dirección de la mente*. (Trad. Rodríguez y Samaranch). Orbis, S. A. (Obra original de 1637).
- Durero, A. (1484). *Autorretrato* [Dibujo]. Viena, Graphische Sammlung Albertina. <https://n9.cl/qrcx5>
- Durero, A. (1491). *Autorretrato* [Dibujo]. Erlangen, Biblioteca de la Universidad.
- Durero, A. (1493). *Autorretrato* [Técnica mixta sobre pergamino]. Paris, Museo de Louvre. <https://n9.cl/628tc>
- Durero, A. (1498). *Autorretrato* [Óleo sobre tabla]. Madrid, Museo del Prado. <https://n9.cl/cgy24>
- Durero, A. (1500). *Autorretrato* [Óleo sobre tabla]. Múnich, Alte Pinakothek. <https://n9.cl/flz3a>
- Durero, A. (1513). *El Caballero, la Muerte y el Demonio* [Grabado a buril]. Róterdam, Museo Boijmans Van Beuningen. <https://n9.cl/rdxjq>
- Durero, A. (1514). *Melancolía I* [Grabado a buril]. Karlsruhe, Galería Nacional de Arte de Karlsruhe. <https://historia-arte.com/obras/melancolia-i>
- Durero, A. (1514). *San Jerónimo en su celda* [Grabado a buril]. Viena, Museo Albertina. <http://www.deutschefotothek.de/documents/obj/30105649>
- Durero, A. (1522). *Autorretrato como Varón de Dolor* [Dibujo a mina de plomo]. Bremen, Kunsthalle. <https://n9.cl/0nf4l>
- Durero, A. (1987). *Los cuatro libros de la simetría de las partes del cuerpo humano*. (Trad. J. Y. Cabrera). Universidad Autónoma de México. (Obra original de 1528).
- Durero, A. (2000). *De la medida [Underweysung der messung]*. (Trad. J. Espino) Akal. (Obra original de 1525).
- Escobar, V. A. (2019). *La formación del artista y el funcionamiento de la bottega en el Renacimiento florentino desde el Quattrocento hasta Vasari (1450-1550)*. (Trabajo de grado, Universidad de Cantabria). <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/16246>
- Euclides, (1991). *Elementos*. (Trad. Puertas Castaños. Libro I-IV). Gredos. (Obra original del 300 a. C.).
- Francesca, P. della. (1942). *De prospectiva pingendi*. (Edición crítica de G. Nicco Fasola). Casa Editrice Leetere. (Obra original del siglo XV).

- Francisco. (7 de febrero de 2020). *Discurso del santo padre Francisco a los participantes en el seminario sobre “Educación: el pacto mundial”, organizado por la Pontificia Academia de Ciencias Sociales*. Vaticano. <https://n9.cl/hfny2>
- Galicia, M. (mayo 2001). *La estética en Tomas de Aquino. Seminario de santo Tomas de Aquino*. Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla.
- Galino, M. (1962a). El aprendiz en los gremios medievales. *Revista Española de Pedagogía*, 20(78), 117-130. <https://www.jstor.org/stable/23762381>
- Galino, M. (1962b). El aprendiz en los gremios medievales. *Revista Española de Pedagogía*, 20(79/80), 223-234. <https://www.jstor.org/stable/23762807>
- Garriga, J. (1983). *Renacimiento en Europa. Colección Fuentes y Documentos para la Historia del arte*. Gustavo Gili.
- Hofmann, J. (2003). *Historia de la matemática desde el comienzo hasta la revolución francesa*. Limusa S. A.
- Johnson, P. (2001). *El Renacimiento*. [Traducido al español The Renaissance]. Mondadori.
- Kemp, M. (2000). *La ciencia del arte: la óptica en el arte occidental de Brunelleschi a Seurat*. Akal Ediciones.
- Klibansky, R., Panofsky, E. y Saxl, F. (1991). *Saturno y la melancolía: estudios de historia de la filosofía de la naturaleza, la religión y el arte*. Alianza Editorial.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días I*. Alianza Editorial.
- Layuno, M. (1997). Renacimiento y Manierismo en Italia y España. En Océano Grupo Editorial (Ed), *Historia del arte 7: Renacimiento y Manierismo I* (pp. 1154-1158). Océano Instituto Gallach.
- Miranda, H. (2015). La importancia de San Agustín y Santo Tomás de Aquino en la concepción cósmica y su influencia en los calendarios. *Revista Humanidades*, 5(2), 1-21. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/humanidades/article/view/21215>
- Monar, A. (2009). La belleza y la filosofía. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, (6), 181-188. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=441846107010>
- Morales, L. (2002). La cuadratura del círculo y otros problemas de geometría. *Ciencia*, (065).
- Ortiz, P. (2005). *Arquímedes: Tratados I. Eutocio: Comentarios*. Gredos.
- Panofsky, E. (1979). *El significado de las artes visuales*. Alianza.

- Panofsky, E. (1982). *Vida y arte de Alberto Durero*. Alianza.
- Pañuela, J. (2007). Pensar en Platón. La problemática de lo bello contemporáneo. *Calle14: Revista de Investigación en el Campo del Arte*, 1(1), 112-127.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=279021536009>
- Parra, J. (2009). *Arquitecturas Terminales. Teoría y práctica de la destrucción*. Instituto Universitario de Arquitectura y Ciencias de la Construcción.
- Peiffer, J. (2000). Introducción. En: A. Durero, *De la medida*, (pp. 13-125). Ediciones Akal.
- Platón. (1985). *Diálogos I*. (Trad. Calonge, Lledó y García). Gredos. (Obra original del siglo III a. C.).
- Platón. (1988). *Diálogos III*. (Trad. García, Martínez y Lledó). Gredos. (Obra original del siglo III a. C.).
- Rupprich, H. (1971). Dürer und Pirckheimer – Geschichte einer Freundschaft, in: Albrecht Dürers Umwelt. *Zeitschrift Nürnberger Forschungen*, (15), 78-109.
- Santucci, P. (1997). Introducción. En Océano Grupo Editorial, *Historia del arte 6: Quattrocento* (pp. 962-971). Oceano Instituto Gallach.
- Schreiber, P. y Scriba, C. (2015). *5000 years of geometry mathematics in history and culture*. Birkhäuser.
- Sureda, J. (1985-1987). *El Renacimiento I*. Planeta.
- Tatarkiewicz, W. (1991). *Historia de la estética I: La estética antigua*. Akal.
- Tatarkiewicz, W. (1997). *Historia de seis ideas: arte, belleza, forma, creatividad, mimesis, experiencia estética*. Tecnos.
- Vinci, L. da. (2007). *Tratado de pintura*. (Trad. González). Ediciones Akal. (Obra original de 1632).
- Westheim, P. (1985). *Mundo y vida de grandes artistas I*. Fondo de Cultura Económica.
- Winzinger, F. (1985). *Durero*. Salvat Editores.
- Wolf, N. (2006). *Alberto Durero 1471-1528: genio del renacimiento alemán*. Taschen.
- Zalama, M. (2002). Un ejemplar de “Cuatro libros sobre las proporciones humanas” de Durero en la Biblioteca de Santa Cruz de Valladolid. *Boletín del Seminario de Estudios de Arte y Arqueología*. Universidad de Valladolid.
- Zuffi, S. (1998). *Durero : genio, pasión y regla del renacimiento europeo*. Sociedad Editorial Electa.

Zumthor, B. (1987). *Diccionario Larousse de la Pintura*. Planeta-Agostini.