

:



La medicación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento
probabilístico en estudiantes de noveno grado

Alonso Santana Martínez

José Braulio Mera Alfonso

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Matemáticas y Física

Santiago de Cali

2018



La medicación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de noveno grado

Alonso Santana Martínez

José Braulio Mera Alfonso

Trabajo de grado presentado en el programa académico Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director:

Ph D. David Benítez

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Matemáticas y Física

Santiago de Cali

2018

Tabla de contenido

Resumen.....	8
Introducción	8
Capítulo 1: Definición del problema.....	10
1.1. Contextualización.....	10
1.2. Justificación.....	10
1.2.1. Bajos resultados en pruebas estandarizadas	11
1.2.1.1. Pruebas SABER	11
1.2.1.2 Pruebas PISA	14
1.2.2. Algunos resultados de investigación en el área de la probabilidad	15
1.2.3. Necesidad de implementar el uso de las tecnologías digitales.	16
1.3. Antecedentes	17
1.3.1. Investigación.....	17
1.3.2. Curriculares	20
1.3.2.1. Lineamientos curriculares	20
1.3.2.2. Estándares básicos de competencias y derechos básicos de aprendizaje (DBA)..	23
1.4. Objetivos	24
1.4.2. Objetivos específicos:.....	24
1.4.1. Objetivo general:	24
1.5. Preguntas de investigación	24
1.5.1. Central	24
1.5.2. Auxiliares.....	24
Capítulo 2: Marco teórico	25
2.1. Discusión teórica	25
2.1.1. El concepto de probabilidad en la educación secundaria	25
2.1.2. Niveles de razonamiento probabilístico	28
2.1.3. Las competencias disciplinares de matemáticas en el ámbito escolar.....	29
2.1.3.1. Las competencias en matemáticas	31
2.1.3.1. La resolución de problemas	33
2.1.3.1.1 Aportes de Polya	33

2.1.3.1.2 Aportes de Mason et al. (1989)	34
2.1.3.1.3 La investigación de Schoenfeld.....	34
2.1.3.1.4 Comparación de las tres investigaciones.....	37
2.1.3.2 El uso de múltiples representaciones	38
2.1.4. El uso de tecnologías digitales en educación matemática	39
2.1.4.1 GeoGebra	45
2.1.5. Diferentes tipos de contexto en situaciones problemáticas del aprendizaje de las matemáticas	46
2.1.5.1. Contextos del mundo real	47
2.1.5.2. Contextos hipotéticos.....	47
2.1.5.3. Contextos puramente matemáticos.	47
Capítulo 3: Metodología	48
3.1. Tipo de estudio	48
3.2. Descripción de la institución (PEI)	49
3.2.1 Principios y fundamentos institucionales	49
3.2.2 Perfil de los estudiantes	49
3.2.3 Enseñanza de las matemáticas en la institución	49
3.3. Fases	50
3.3.1. Diseño	50
3.3.1.1. Selección de actividades o problemas.....	50
3.3.1.2. Diagnóstico	51
3.3.1.3. Hojas de trabajo	52
3.3.2. Validación.....	53
3.3.2.1. Revisión por parte de expertos.....	53
3.3.3. Uso de la tecnología	54
3.3.3.1. Descripción general de GeoGebra.	54
3.3.3.2. Solución de problemas con las herramientas de GeoGebra.....	54
3.3.4. Recolección	54
3.3.5. Análisis	54
Capítulo 4: análisis de resultados.....	56
4.1. Presentación de la prueba diagnóstico	56
4.2. Análisis cuantitativo.....	56
4.3. Análisis cualitativo.....	64

4.4. Análisis de las hojas de trabajo	76
4.4.1. Hoja de trabajo #1.....	76
4.4.1.1. Presentación de la actividad.....	76
4.3.1.2. Propósitos de la actividad	78
4.3.1.3. Condiciones de aplicación	78
4.3.1.4. Análisis de resultados	79
4.3.1.4.1. Análisis cuantitativo.....	79
4.3.1.4.2. Análisis cualitativo.....	81
4.3.2. Hoja de trabajo #2.....	86
4.3.2.1. Presentación de la actividad.....	86
4.3.2.2. Propósitos de la actividad	88
4.3.2.3. Condiciones de aplicación	88
4.3.2.4. Análisis de resultados	89
4.3.2.4.1. Análisis cuantitativo.....	89
4.3.1.4.2. Análisis cualitativo.....	91
4.3.3. Hoja de trabajo #3.....	96
4.3.3.1. Presentación de la actividad.....	96
4.3.3.2. Propósitos de la actividad	98
4.3.3.3. Condiciones de aplicación	98
4.3.3.4. Análisis de resultados	99
4.3.3.4.1. Análisis cuantitativo.....	99
4.3.3.4.2. Análisis cualitativo.....	100
Capítulo 5: Conclusiones y sugerencias	107
5.1. Respuestas a las preguntas del trabajo	107
5.1.1. Respuesta a la pregunta central	107
5.1.2. Respuestas a las preguntas auxiliares	109
5.1.2.1. Respuesta a la primera Pregunta auxiliar.....	109
5.1.2.2. Respuesta a la segunda pregunta auxiliar	110
5.1.2.3. Respuesta de la tercera pregunta auxiliar.....	112
5.2. Sugerencias para investigaciones posteriores	113
5.3. Reflexiones.....	114
Referencias.....	116

Anexo 1: Prueba diagnóstico	119
Anexo 2: Hoja de trabajo #1	127
Anexo 3: Hoja de trabajo #2	131
Anexo 4: Hoja de trabajo #3	135

Contenido de ilustraciones

Ilustración 1: Pruebas saber en el valle del cauca para grado noveno. Fuente Icfes.....	12
Ilustración 2: Resultados pruebas saber I.E Maricé Sinisterra. Fuente Icfes	13
Ilustración 3: Porcentaje de estudiantes de cuarto grado según niveles de desempeño en matemáticas de un conjunto de países. Fuente: Base de datos Icfes 2013	15
Ilustración 5: Diagramas del ejemplo: el reparto de la apuesta	35
Ilustración 6: Representación tabular del lanzamiento de dos dados.....	41
Ilustración 7: Función CONTAR.SI().....	42
Ilustración 8: Representación gráfica.....	43
Ilustración 9:Proceso para el análisis cuantitativo, Sampieri (2006)	55
Ilustración 10: Encuesta diagnóstico.....	58
Ilustración 11: preguntas con menor porcentaje de respuesta correcta.....	60
Ilustración 12: Datos.	60
Ilustración 13: Preguntas con mayor porcentaje de respuesta correcta.....	62
Ilustración 14: Porcentajes de respuestas correctas.	64
Ilustración 15: Encuesta diagnóstica.....	64
Ilustración 16: Diseño #1. Nota: elaboración propia.	77
Ilustración 17: Porcentaje de respuestas correctas hoja de trabajo #1.	80
Ilustración 18: Rendimiento de los estudiantes frente a la hoja de trabajo #1.	81
Ilustración 19: Diseño #1. Nota: elaboración propia.	87
Ilustración 20: Porcentaje de respuestas correctas hoja de trabajo #2.	90
Ilustración 21: Rendimiento de los estudiantes hoja de trabajo #2.	91
Ilustración 22:Diseño #3. Nota: elaboración propia.	97
Ilustración 23: Porcentaje de respuestas correctas hoja de trabajo #3.	100
Ilustración 24: Rendimiento de los estudiantes hoja de trabajo #3.	101

Contenido de tablas

Tabla 1: Niveles de dificultad. Fuente: Icfes 2014	11
Tabla 2: Resultado pruebas SABER en el valle del cauca, dados los años y el nivel. Fuente Icfes	12
Tabla 3: Resultados pruebas saber I.E Maricé Sinisterra.....	13
Tabla 4: Resultados pruebas PISA 2012.....	14
Tabla 5: Significados de la probabilidad.....	27
Tabla 6: Fases de la investigación.....	50
Tabla 7: Análisis cuantitativo	57
Tabla 8: Análisis cuantitativo hoja de trabajo #1.....	79
Tabla 9: Análisis cualitativo hoja de trabajo #1.....	82
Tabla 10: Análisis cuantitativo hoja de trabajo #2.....	89
Tabla 11: Análisis cualitativo hoja de trabajo #2.....	92
Tabla 12: Análisis cuantitativo hoja de trabajo #3.....	99
tabla 13: Análisis cualitativo hoja de trabajo #3.	101
Tabla 14: Comparación de la Producción entre diagnóstico y hoja de trabajo.	106

Resumen

En el presente trabajo se explora la manera en que estudiantes de noveno grado resuelven situaciones problema que involucran el concepto de probabilidad y de esta manera poder determinar el nivel de razonamiento probabilístico en el que se encuentran. El objetivo principal es identificar el impacto del uso de mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico. Se utilizan los niveles de razonamiento para organizar las respuestas dadas por los estudiantes. En general los estudiantes a partir de la mediación computacional de GeoGebra, hojas de trabajo y la ayuda de los docentes muestran un avance notorio en lo que concierne a la solución de situaciones problema que involucran el concepto de probabilidad logrando ubicar a los estudiantes en un nivel de razonamiento superior al inicial.

Introducción

Los avances tecnológicos y científicos de los últimos tiempos han propiciado una transformación en la sociedad en diferentes ámbitos: la cultura, la educación entre otros, por lo que se hace necesario que los ciudadanos se encuentren en capacidad de enfrentar desafíos modernos. En este contexto, el desarrollar competencias en diferentes razonamientos adquiere importancia, en particular el desarrollo de competencias matemáticas que contribuyen a la solución de problemas personales y de carácter profesional.

El aprendizaje de las matemáticas representa gran dificultad para los estudiantes. En lo concerniente al área de probabilidad el problema es aún mayor, debido a múltiples factores entre los que encontramos: la cultura, las creencias, mal uso de conceptos matemáticos y otros; debido a estos el razonamiento probabilístico no se desarrolla de manera apropiada y resulta difícil dar respuesta a problemas o situaciones azarosas.

Pruebas estandarizadas (ICFES y PISA), han puesto en evidencia que los estudiantes de secundaria incurren en una gran cantidad de errores al momento de resolver problemas o situaciones que involucran el concepto de probabilidad, esto debido a concepciones erróneas que tienen su origen en los factores ya mencionados. Considerando esta situación, se plantea como objetivo general del presente trabajo, Identificar el impacto del uso de mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes del grado noveno.

Para ofrecer al lector una visión general del presente trabajo, se hará una descripción de los cinco capítulos que lo componen.

En el primer capítulo se contextualiza y se definen objetivos, preguntas que guían el trabajo. De igual forma, este trabajo presenta diversas justificaciones entre las que se tienen, los bajos resultados en pruebas estandarizadas (ICFES y PISA), algunos resultados de investigaciones en el área de probabilidad, la necesidad de implementar el uso de tecnología. También se mencionan algunos antecedentes tanto de investigación como curriculares MEN (2006).

En el segundo se hace alusión a algunos referentes teóricos que sirven de apoyo al presente trabajo, tales como el concepto de probabilidad en educación secundaria, los niveles de razonamiento probabilístico, las competencias disciplinares en matemáticas, la resolución de problemas, el uso de múltiples representaciones y la utilización de la tecnología digitales en educación matemática. Vale la pena mencionar que, en el diseño de las hojas de trabajo y la aplicación de estas, el marco teórico es el elemento central, al igual que lo será en el análisis e interpretación de los resultados arrojados durante la implementación de las actividades propuestas.

En el tercer capítulo se presenta la metodología, la cual explica las fases llevadas a cabo durante el proceso de investigación que de manera general comprende: diseño (diagnostico, hojas de trabajo), validación, uso de la tecnología (diseños en GeoGebra), recolección y análisis. Igualmente, se describe la institución educativa y los participantes de la investigación.

En el cuarto capítulo se analiza la información recolectada, tanto en el diagnostico como en las hojas de trabajo. Este análisis se hace desde dos perspectivas, cuantitativa y cualitativa, por lo que se elaboran tablas y gráficas para presentar los datos e información recolectada, también se presenta evidencia de la información obtenida a partir de fragmentos de preguntas escaneadas. Al final del análisis de cada hoja de trabajo se realiza una comparación de los resultados del diagnóstico con la pregunta que se repite en cada hoja de trabajo con el objetivo de evaluar como las actividades influyeron en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico.

Por último, en el quinto capítulo se da respuesta a las preguntas que guiaron el trabajo planteadas en el primer capítulo. De estas respuestas resultan algunas sugerencias para investigaciones posteriores.

Capítulo 1: Definición del problema

1.1.Contextualización

La probabilidad juega un papel vital en la vida cotidiana del hombre, esta se encuentra presente desde pronósticos del clima, en asuntos económicos, en las tendencias de preferencia electoral, en el lanzamiento al mercado de un producto, en aspectos de la genética, entre otros. Desde esta perspectiva, se hace necesario que los estudiantes tengan conocimiento de: ¿qué es la probabilidad?, ¿cómo puede usarse la probabilidad en la vida cotidiana?

Sin embargo, muchos de ellos tienen ideas preconcebidas sobre probabilidad, ligadas a fenómenos sobrenaturales, la suerte, Dios, fenómenos físicos y tácticas embaucadoras en juegos de azar. Dichas ideas no permiten un argumento veraz cuando se trabaja en contextos donde predomina el pensamiento aleatorio.

Lo anterior desemboca en un bajo nivel académico en Colombia por los estudiantes de grado noveno en las pruebas estandarizadas ya sea a nivel nacional o internacional. Por su parte, los estándares básicos de educación matemática presentan la temática referente al concepto de probabilidad, pero no da indicios de algún tipo de metodología a seguir por parte del docente, además desconocen el contexto donde se desempeñan los estudiantes.

1.2. Justificación

La probabilidad tiene gran relevancia en el desarrollo de actividades del hombre en su vida diaria. Esta se ve presente en la economía, en los juegos de azar, la política, las apuestas e igualmente en el campo de la meteorología para predecir fenómenos como huracanes, terremotos, lluvias, viento, tormenta eléctrica, sequías, inundación, tornado, etc.

También en la medicina, pues dentro de la incertidumbre que se maneja en todos los procesos clínicos, se encuentran las actividades diagnósticas. Estas actividades, buscan maximizar el hecho de identificar tanto a los enfermos como a los sanos, para ello, se realizan diferentes pruebas, con el propósito de medir la validez de un test o prueba diagnóstica (Universidad de Antioquia, 2016). Además, es necesaria para el control de mortandad y natalidad de una población, *modus operandi* frente a un virus mundial y hasta en eventos muy específicos, como el tipo de sexo de un bebé en el vientre de la madre.

1.2.1. Bajos resultados en pruebas estandarizadas

1.2.1.1. Pruebas SABER

La prueba Saber 3°, 5° y 9° es una evaluación que se realiza basada en los estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN). (ICFES, 2016).

El propósito principal de SABER 3.°, 5.° y 9.° es contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana. Los resultados se miden bajo los siguientes parámetros (Ver tabla No 1)

Tabla 1: Niveles de dificultad. Fuente: Icfes 2014

NIVEL	RANGO DE PUNTAJE	DESCRIPCIÓN
Insuficiente	100 – 233	El estudiante promedio ubicado en este nivel no supera las preguntas de menor complejidad de la prueba.
Mínimo	234 – 345	El estudiante promedio de este nivel reconoce distintas maneras de representar una función, soluciona problemas en contextos aditivos y multiplicativos, identifica algunas propiedades de figuras planas y sólidos, establece relaciones entre dimensionalidad y magnitud, identifica algunos movimientos rígidos en el plano, utiliza formas de representación convencionales para describir fenómenos de las ciencias sociales o naturales.
Satisfactorio	346 – 455	El estudiante promedio de este nivel utiliza las propiedades de la potenciación, radicación y/o logaritmación para solucionar un problema, utiliza expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones sencillas de variación, establece relaciones entre los sólidos y sus desarrollos planos, reconoce y aplica movimientos rígidos a figuras planas en un sistema de coordenadas, compara atributos medibles de uno o varios objetos o eventos, hace conjeturas acerca de fenómenos aleatorios sencillos.
Avanzado	456 – 500	El estudiante promedio de este nivel pasa de la representación algebraica a las propiedades de una función o sucesión y viceversa, establece equivalencias entre expresiones algebraicas y numéricas, enuncia propiedades relativas a determinados subconjuntos numéricos, caracteriza una figura en el plano que ha sido objeto de varias transformaciones, halla áreas y volúmenes a través de descomposiciones y recubrimientos, usa criterios de semejanza y congruencia, evalúa la correspondencia entre una forma de representación y los datos, y halla probabilidades utilizando técnicas de conteo.

Según las pruebas SABER de los últimos años (2009, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2016) para estudiantes de noveno grado del Valle del Cauca se encuentra que: dados 4 niveles; insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado (Ver Ilustración 1), en promedio el 77% de los estudiantes se encuentra entre los niveles insuficiente y mínimo, mientras que, para estudiantes del grado noveno, pero a nivel municipal el promedio es de aproximadamente 68% para estos mismos niveles. Para hacer más claros estos datos hay que remitirse a los parámetros de evaluación de las pruebas saber.

Y según ello, los estudiantes de noveno grado en un nivel satisfactorio- avanzado tienen las habilidades como: identificar la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de un evento según las condiciones del contexto establecido, contextualizar una ecuación, formular y comprobar conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Dado esto, se podría concluir que dichas habilidades no se manifiestan en un 77% y 68% de la población mencionada.

Tabla 2: Resultado pruebas SABER en el valle del cauca, dados los años y el nivel. Fuente Icfes

	Insuficiente	Mínimo	Satisfactorio	Avanzado
2009	20%	54%	21%	5%
2012	23%	55%	19%	2%
2013	22%	56%	19%	3%
2014	27%	51%	19%	3%
2015	25%	55%	18%	3%
2016	21%	51%	22%	3%

Nota. Adaptado de base de datos ICFES

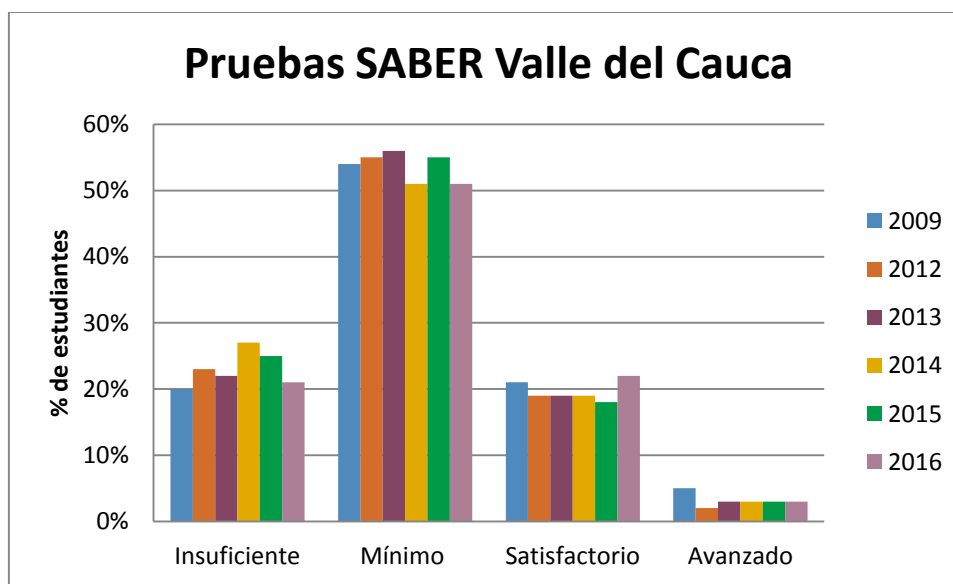


Ilustración 1: Pruebas saber en el valle del cauca para grado noveno. Fuente Icfes

De forma particular y con base en las pruebas saber del grado noveno de la Institución Educativa Industrial Maricé Sinisterra (Ver tabla No 3), se nota que el porcentaje de estudiantes en los niveles insuficiente y mínimo es aproximadamente 93% en el área de matemáticas (Ver Ilustración No 2), dicha prueba contiene elementos de probabilidad. El estudiante promedio del nivel insuficiente no soluciona preguntas de menos complejidad mientras que en el nivel mínimo reconoce distintas

maneras de representar una función, soluciona problemas en contextos aditivos y multiplicativos, identifica algunas propiedades de figuras planas y sólidos, establece relaciones entre dimensionalidad y magnitud, identifica algunos movimientos rígidos en el plano, utiliza formas de representación convencionales para describir fenómenos de las ciencias sociales o naturales (MEN, 2015). Como puede notarse el estudiante resuelve situaciones problema básicas de menor rigor, pero no elabora una interpretación de conceptos y se podría decir que es mecánico el procedimiento que esté realiza al solucionar las actividades propuestas, también se menciona que en este grado las pruebas evalúan como los estudiantes deberían estar en capacidad de calcular probabilidades con técnicas de conteo y además lo relacionado a resolución de problemas, lo cual no se cumple en esta prueba y se queda en los niveles insuficiente y mínimo, esto entre los años 2009-2013.

Tabla 3: Resultados pruebas saber I.E Maricé Sinisterra

	Insuficiente	Mínimo	Satisfactorio	Avanzado
2009	23%	67%	10%	0%
2013	45%	51%	4%	0%

Nota. Recuperado de base de datos ICFES

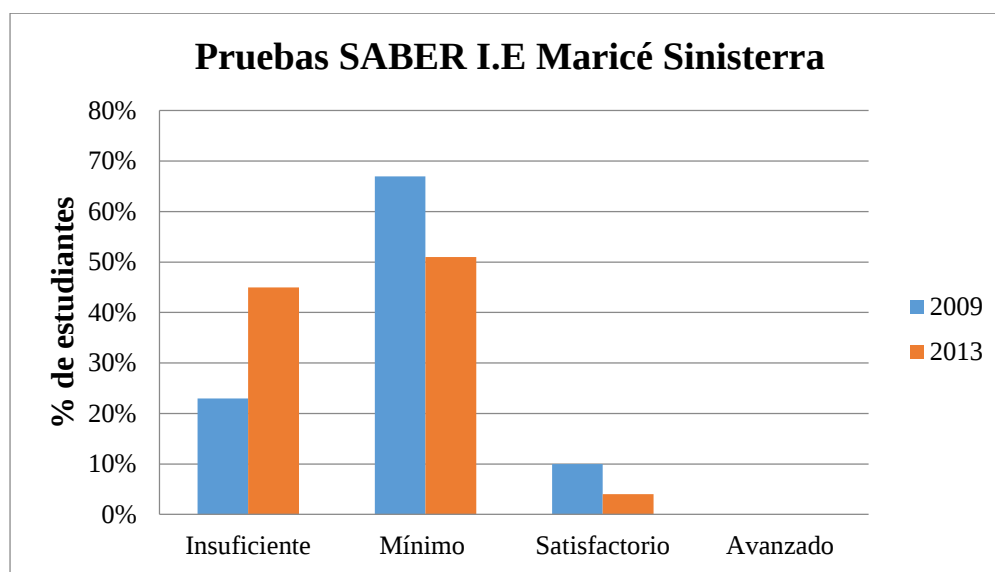


Ilustración 2: Resultados pruebas saber I.E Maricé Sinisterra. Fuente Icfes

Las pruebas saber se basan en los estándares de educación propuestos por el MEN y estos a su vez proponen cinco tipos de pensamiento y precisamente uno de ellos está basado en el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, MEN (2006) menciona que el pensamiento aleatorio ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre como juegos donde no hay una solución

clara, abordándolos mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y el uso de estrategias como contero, simulación y otros. Se apoya en la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial.

En las pruebas se evidencia que los estudiantes de grado noveno tienen puntajes mínimos e insuficientes en matemáticas y por ende hay dificultades en los cinco tipos de pensamientos de los estándares, particularmente para este trabajo en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

1.2.1.2 Pruebas PISA

Las PISA es el programa internacional de evaluación de estudiantes, este es dirigido por la organización OCDE. PISA tiene como objetivos: Mostrar a los países que es posible mejorar, ayudar a los gobiernos a definir políticas en función de metas medibles que pueden ser logradas, calibrar el ritmo del progreso educativo, facilitar los aprendizajes entre pares. (ICFES, 2013, pp.5-6).

En las pruebas PISA Colombia obtuvo un porcentaje del 74% de estudiantes entre el nivel 1 y por debajo del nivel 1, el cual según las pruebas PISA son insuficientes para acceder a estudios superiores y para las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento; las pruebas de matemáticas particularmente son las que tienen peor promedio de las tres áreas que se evalúan. En el área de matemáticas las pruebas PISA evalúan: Cuatro ideas generales relacionadas con los números, el álgebra y la geometría: (i)cantidad; (ii) espacio y forma; (iii) cambio y relaciones; y (iv) incertidumbre y datos, esta última tiene elementos probabilísticos y como se puede notar en los datos registrados en el informe de PISA Colombia está muy por debajo del promedio. Los puntajes de Colombia según la tabla 4 e ilustración 3 fueron:

Tabla 4: Resultados pruebas PISA 2012

Pruebas	Puntaje promedio
Matemáticas	376
lectura	403
ciencias	399

Nota. Recuperado de base de datos Icfes 2013

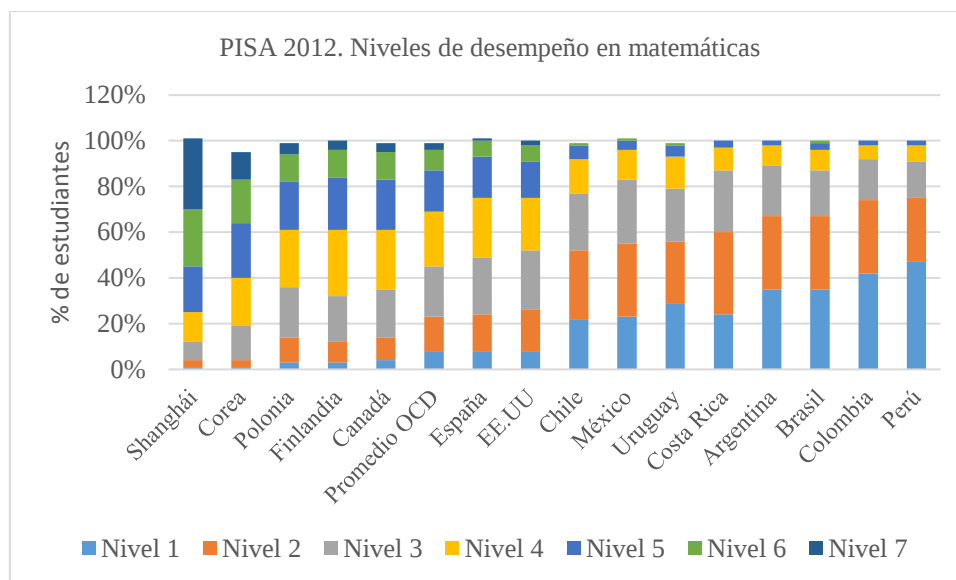


Ilustración 3: Porcentaje de estudiantes de cuarto grado según niveles de desempeño en matemáticas de un conjunto de países. Fuente: Base de datos Icfes 2013

1.2.2. Algunos resultados de investigación en el área de la probabilidad

En esta parte se trae a colación algunos trabajos en pensamiento probabilístico que sirven como parte de la justificación.

Hay una clasificación de las argumentaciones que dan los alumnos cuando se encuentran a problemas que involucran el concepto de probabilidad: nivel de impredeción, nivel de determinismo, nivel mecánico, nivel del pre-rigor y nivel de rigor (Sánchez y Benitez 1997). La mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel de impredeción y se identifican creencias erróneas, dificultades, conflictos y obstáculos que impiden construir el concepto de probabilidad.

Debido a esto algunos estudiantes explican fenómenos probabilísticos basados en una fuerza poderosa que los rige. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda afirman que el lado por el que cae está determinado por el peso o el alto relieve de la moneda. Otros aseguran que hay un ente mágico llamado suerte que permite el mejor resultado en el lanzamiento de dados, por ejemplo. Y por último los que toman decisiones apoyados en experiencias personales en juegos de azar (Sánchez y Benítez, 1997).

También, es necesario mencionar las creencias infundadas de experimentos probabilísticos. En su investigación Batanero y Cañizares (1997) afirman que: “(...) Los sujetos que utilizan la primera estrategia tienden a suponer que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza, es

decir, generalizan indebidamente la regla de Laplace. En el segundo caso, se interpreta que lo que pide la pregunta es adivinar el suceso que ocurrirá y se argumenta que es imposible predecir el resultado, debido al carácter aleatorio del experimento” (p.7). Con esto se da por entendido que los estudiantes tienen una noción muy sesgada de los sucesos probabilísticos y que en su mayoría justifican sus hipótesis, basados en un conjunto de creencias apoyadas en sus vivencias diarias.

1.2.3. Necesidad de implementar el uso de las tecnologías digitales.

Luego de determinar el nivel inicial de los estudiantes se hace importante plantear problemas y su debida resolución, a partir de diferentes representaciones mediadas por la tecnología, en este caso, más concretamente GeoGebra. Esto, con el objetivo de identificar el impacto de la mediación computación en el paso de un nivel de razonamiento probabilístico a otro nivel, de los estudiantes.

El uso de la tecnología se hace importante para dar un enfoque constructivista a la enseñanza de la probabilidad, Pea (como se citó en Inzunsa, 2014) afirma que la computadora es una herramienta cognitiva que ayuda a quebrantar los límites mentales y proporciona gran apoyo en la resolución de problemas, pero se deben plantear diseños que cumplan dos tipos de funciones:

Funciones propósito: esta función permite que el estudiante no sea mecánico, se preocupa más porque el estudiante sea participe de su aprendizaje, todo esto con ayuda del software que permite explorar conceptos y generar partes de la resolución del problema.

Funciones proceso: permiten la exploración de conceptos lo cual conlleva a que el estudiante genere conclusiones, para ello se debe tener en cuenta:

1. Herramientas para desarrollar la fluidez conceptual.
2. Herramientas de exploración matemática
3. Herramientas de representación.

Con base en lo anterior, Inzunsa (2014) afirma que GeoGebra cumple con las características de herramienta cognitiva. En un apartado del texto dice “un análisis de las componentes del software nos permite visualizar en ellas, diversas funciones trascendentes de una herramienta cognitiva definidas por Pea (1987). Es posible enlazar dinámicamente gráficas, formas algebraicas y hoja de cálculo en forma simultánea y ser visibles sobre misma pantalla. En el caso particular de la

probabilidad, cobran relevancia la hoja de cálculo, la ventana de traficación, la calculadora de probabilidades y los deslizadores” (Inzunsa, 2014, pag.4).

Además, las cualidades de Geogebra permiten mejorar el enfoque frecuencial, ahorrando tiempo en la enseñanza de fórmulas y conceptos probabilísticos, y más bien dedicando ese tiempo a la reflexión sobre los resultados de un problema que involucre el concepto de probabilidad. Esto en vía de una enseñanza bajo el modelo constructivista.

Por último, GeoGebra tiene a favor su licencia abierta, este es uno de los primeros factores que se debería tener en cuenta al momento de usar un software en la enseñanza escolar, en un contexto tan desfavorable como el nuestro. Además, su uso es muy intuitivo y dinámico de tal forma que un usuario nuevo acostumbrado a plataformas digitales, en este caso jóvenes de básica secundaria, no tardara en adaptarse a la caja de herramientas que posee Geogebra. Una de sus mayores cualidades es el manejo de diferentes representaciones, y cuenta con una comunidad llamada GeogebraTube donde se pueden compartir los trabajos de cada usuario.

1.3. Antecedentes

1.3.1. Investigación

De la teoría de niveles de razonamiento probabilístico y el uso de GeoGebra en el aula para la enseñanza del concepto de probabilidad, se rescatan cuatro investigaciones que sirven de referencia para el trabajo de investigación.

El primer trabajo es un artículo de Inzunsa (2014) que describe la importancia de Geogebra como herramienta didáctica en la enseñanza de la probabilidad y analiza el estado actual de dicha enseñanza.

En un primer momento, traen a colación tres tipos de enseñanza de la probabilidad, desde un enfoque clásico, un enfoque subjetivo, un enfoque frecuencial y se afirma que la enseñanza en niveles medio y medio superior está centrada en el enfoque clásico o axiomático el cual abusa de definiciones formales y uso de fórmulas y procedimientos para el cálculo de probabilidades. Luego se apoyan en Godino y Cañizares (1996) para justificar que lo anterior crea un problema didáctico ya que la mayoría de los estudiantes de los niveles antes mencionados, no están en la capacidad de trabajar con definiciones formales si antes no cuentan con preparación intuitiva.

Después se argumentará la idea de Geogebra es una herramienta cognitiva. Para ello se define Funciones propósito y Funciones proceso y se dice que Geogebra cumple tales funciones dadas sus cualidades como por ejemplo el uso de hojas de cálculo, gráficas y caja de herramientas para probabilidad.

En las conclusiones, según la discusión y ejemplos del documento, muestran que Geogebra dispone de diversas funciones de herramientas cognitivas y que puede ser una herramienta pedagógica de mucha utilidad para el diseño de materiales de enseñanza que puedan ser utilizados a gran escala en las aulas.

La investigación realizada por García, Medina y Sánchez (2014) se estudia como estudiantes entre los 14-16 años sin conocimientos de probabilidad resuelven situaciones- problema que contienen nociones básicas de probabilidad, el objetivo principal de este proyecto es identificar características del razonamiento probabilístico de los estudiantes cuando transitan entre secundaria y bachillerato.

La presente investigación se basará en una prueba diagnóstico que contiene 13 preguntas, esta actividad tiene situaciones problema de probabilidad que hace énfasis en el concepto de distribución binomial en dos poblaciones como son: estudiantes de secundaria y bachillerato, mostrando como resultado importante que los estudiantes de secundaria tienen un nivel superior al de los de bachillerato, además se muestra que en la transición de los estudiantes entre secundaria y bachillerato se da una apropiación de conceptos básicos que se muestran en evidencia en los resultados de la prueba realizada.

En el artículo de Mercado (2013) se presentan hojas de trabajo realizadas en GeoGebra, presentando el software dinámico como un incursor en el aula, con el cual, los estudiantes pueden construir conceptos de manera dinámica usando diferentes medios de representación, para de esta manera analizar y construir conceptos básicos de probabilidad.

Las hojas de trabajo presentadas se basan en conceptos como son: Diagramas de ven, probabilidad condicional y teorema de Bayes, El tablero de Galton, La aproximación de la distribución normal a la binomial.

Se dan conclusiones importantes a partir del análisis realizado con ayuda de GeoGebra, como lo es para Duval (como se citó en Mercado, 2013): “Se puede destacar que de acuerdo con Duval

(1999), un estudiante comprende un concepto matemático, cuando es capaz representarlo en al menos dos registros de representación”. (p.316).

Mercado (2013) establece que una de las características del Geogebra es permitir diferentes formas de representación como son: hojas de cálculo, gráficos y el algebraico. Otra característica importante de GeoGebra es la capacidad para la simulación que se hace importante a la hora de experimentos equiprobables permitiendo comparar dos experimentos.

Puede verse entonces como en este artículo se presenta el software GeoGebra y además como impacta su uso en el momento de la enseñanza del concepto de probabilidad.

Por último, León (1998) realiza un diagnóstico a estudiantes de un curso de Estadística y Probabilidad, con la finalidad de indagar sobre las nociones básica de probabilidad que ellos poseen. La muestra es de 8 estudiantes, 2 de ellos son repitentes del curso, por lo que se espera que tengan algunas ideas más acertadas del concepto de probabilidad, además todos los 8 estudiantes se encuentran en VI semestre de Matemáticas y han visto el curso de Cálculo Avanzado y Algebra lineal.

En el artículo se realiza una introducción que sustenta la importancia de la probabilidad en el diario vivir del ser humano y la idea que se va formando acerca de la incertidumbre y el azar. Dichas ideas son erróneas en muchas ocasiones y articulan otros términos como: posible, casualidad, suerte. Se concluye que las concepciones de probabilidad no son muy formales y por tanto es necesario fomentar un acercamiento a los fenómenos aleatorios, pero de una manera formal para evitar una comprensión errónea que se acrecienta en la edad adulta.

También se pregunta en qué edad es conveniente introducir la enseñanza de la probabilidad, pues hay dos posturas. La primera, defiende la idea de una enseñanza en niveles avanzados de secundaria, pues los estudiantes ya tienen un bagaje matemático que permitirá en el eventual caso, un mejor ambiente de aprendizaje. La otra, manifiesta que, desde grados primarios se puede introducir el estudio de la probabilidad pues los conceptos matemáticos asociados a ésta son muy rigurosos (combinatoria, proporciones, etc.).

Luego se presentan algunos obstáculos en la enseñanza desde lo curricular hasta el conocimiento de los Educadores acerca de la probabilidad. León (1998) afirma: “Con la reforma curricular de Educación Básica, que se comenzó a implantar este año (1998), se reivindica el

estudio de la Probabilidad y Estadística al incluirse como uno de los cinco bloques de contenido de la primera y segunda etapa” (p.3).

Los anteriores documentos servirán de apoyo al presente trabajo proporcionando investigaciones que tienen como base el concepto de probabilidad y además el software Geogebra. También brinda información sobre cómo se debe escoger una muestra de estudiantes y se dan ejemplos de recolección de datos cuantitativos y cualitativos.

1.3.2. Curriculares

El conocimiento matemático y todo lo que rodea el aprendizaje de la ciencia matemática requiere una práctica social. Este ejercicio promueve la ascensión del conocimiento y el avance de la mente humana en pro de la lógica, por lo que la escuela debe promover la creación de diversos espacios donde exista un debate de ideas. Para tal fin, el currículo colombiano se hace presente.

Currículo es el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional. (MEN, 2010)

Para este trabajo de investigación es oportuno revisar los aportes de la malla educativa, que permitan respaldar nuestros objetivos iniciales. Pues, no es posible pensarse un trabajo de investigación sobre niveles de razonamiento probabilístico, sin antes tener en cuenta el enfoque y los contenidos del currículo. Pues, permite delimitar la investigación y que ésta misma entregue los mayores beneficios a la educación.

1.3.2.1. Lineamientos curriculares

Las concepciones matemáticas han venido sufriendo cambios en el tiempo debido a factores como: los nuevos planteamientos de la filosofía matemática, estudios de la sociología del conocimiento, el desarrollo de la educación matemática, entre otros. La importancia de estos cambios muestra claramente como las matemáticas hacen parte de una cultura, contexto, entorno y un periodo histórico matemático, más concretamente en el aula y el sistema escolar es donde la formación matemática tiene su máxima expresión, por lo cual la escuela debe estar en capacidad de promover las condiciones necesarias para la construcción de conceptos matemáticos. (Lineamientos Curriculares, 1998).

La estructura curricular se ha elaborado tomando varios factores como fundamentales en el momento de la enseñanza del conocimiento matemático, como son: el contexto y la vida cotidiana de los estudiantes, permitir al estudiante exponer sus opiniones y ser receptivo en el momento del trabajo grupal, lo cual desarrollaría la lógica y la capacidad de pensamiento para construir conceptos y significados.

Para que el currículo sea armonioso e íntegro cumpliendo así con los factores mencionados, se deben considerar tres grandes aspectos (Lineamientos Curriculares, 1998):

1. Procesos generales: Para el presente trabajo de grado, los cinco procesos generales de la actividad matemática (la formulación tratamiento y resolución de problemas, razonamiento, modelación, comunicación y ejercitación de procedimientos) son de gran importancia. Pues, son un referente teórico necesario para la construcción de actividades para mejorar los niveles de pensamiento probabilístico.

La resolución de problemas es pertinente, porque las actividades que se tienen pensadas, apelan por situaciones problemas donde haya un contexto acorde a los estudiantes; una heurística; una ejecución y una verificación.

El razonamiento es una actividad inherente a la mayoría de actividades del ser humano, argumentar, encontrar patrones, e interpretar resultados son una de tantas cualidades, a tener en cuenta, en los sujetos de estudio.

La modelación, para poder representar un problema en varios registros de representación que tenga sentido para el estudiante y que a través de ellos se adquiriera un concepto de probabilidad.

Las apreciaciones de los estudiantes, se deben comunicar de alguna forma: hablando, escribiendo, describiendo y demostrando de diferentes formas, para luego interpretar, comprender y evaluar las ideas, con dichos análisis construir, interpretar y mezclar con las diferentes maneras de representación.

Por último, ejercitar procedimientos para mejorar los resultados.

2. Conocimientos básicos

Tomando en cuenta las reflexiones y la evolución que ha sufrido con el correr de los años la educación matemática, los lineamientos curriculares se han elaborado organizando el pensamiento

matemático en cinco tipos de pensamiento. Cada uno contribuye al desarrollo del conocimiento matemático, según los Lineamientos Curriculares (1998) se tiene: El pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos y el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos. Esta investigación tomará en cuenta los cinco tipos de pensamiento, ya que, cada uno, de manera directa o indirecta está relacionado con el razonamiento probabilístico. Aunque se hará énfasis en:

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos: se basa en el reconocimiento de la variación y el cambio en diferentes contextos así mismo con su descripción, modelación y representación, con lo cual se quiere una aproximación a conceptos y procedimientos de funciones, que conlleven a la modelación de procesos de la vida cotidiana.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos: llamado también probabilístico o estocástico, este se apoya en la teoría de conceptos de probabilidad y estadística inferencial, ayuda a buscar soluciones razonables a situaciones problema que no tienen solución clara y segura, la respuesta es dada desde ámbitos de investigación y basada en diferentes tipos de representación.

Este último tipo de pensamiento es en el cual se centra este trabajo de grado, se puede notar la importancia de la probabilidad en la vida diaria del hombre, tratando de explicar situaciones cotidianas y más aun tratando de demostrar hechos que parecen tener su origen en lo mágico o en la suerte. La probabilidad ayuda a adiestrar eventos difíciles de entender desde una perspectiva determinista intentando dar un sentido que un pasado tenían explicación en lo fantástico.

El currículo también nos habla de la aparición de las nuevas tecnologías como una herramienta cognitiva que puede ser de gran ayuda al crear nuevos ambientes de aprendizaje que registran diferentes representaciones de una misma problemática, además de permitirle al estudiante usar tecnología (computador, celular, Tablet) contextualizando el conocimiento matemático.

3. Contexto

El plano actual donde se desarrolla la enseñanza de las matemáticas hace necesario que los procesos de enseñanza no limiten sus efectos a las estructuras y conceptos formales de las matemáticas. Además de esto, hay que tener en cuenta el contexto donde se desarrollan los estudiantes, como sujetos políticos, sociales y críticos. Es por esto, que las situaciones problemas

toman vital importancia en los procesos de enseñanza, pues, ellas involucran situaciones de la vida cotidiana que rodea al estudiante.

Los Lineamientos Curriculares (1998) a propósito, manifiestan que se debe considerar como lo más importante:

- Que el alumno manipule los objetos matemáticos.
- Que active su propia capacidad mental.
- Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.
- Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo constantemente.
- Que adquiera confianza en sí mismo.
- Que se divierta con su propia actividad mental.
- Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.

1.3.2.2. Estándares básicos de competencias y derechos básicos de aprendizaje (DBA).

Según los estándares básicos de competencias en matemáticas, el estudiante de noveno grado debe estar en capacidad de: “comparar resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico, calcular probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo), usar conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia , etc.), reconocer tendencias que se presentan en conjuntos de variable relacionadas” (MEN, 2006).

Además, en los derechos básicos de educación plantean los estudiantes de noveno grado son capaces de: “reconocer las nociones de espacio muestral y de evento, al igual que la notación $p(A)$ para la probabilidad de que ocurra un evento A ” (MEN, 2015).

Dado lo anterior, es importante que los estudiantes tengan claros los conceptos de probabilidad para que puedan desarrollar problemas de la vida cotidiana y de esta manera desarrollar las competencias planteadas, el problema se basa en que el ministerio de educación en sus lineamientos curriculares plantea competencias, pero no da una metodología ni estrategia que lleve al cumplimiento de estas.

1.4. Objetivos

Alcances del proyecto

A través de las diversas teorías en resolución de problemas, representaciones múltiples, y uso de GeoGebra como herramienta cognitiva, construir un marco conceptual que sirva de apoyo en el análisis de los niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de grado noveno de una institución. Y luego de esto, mejorar el razonamiento mediante actividades diseñadas en GeoGebra. De tal forma, que se pueda hacer una comparación del estado inicial (diagnóstico) y el estado final (después de la intervención didáctica).

1.4.2. Objetivos específicos:

- Reconocer las concepciones iniciales que tienen los estudiantes del grado noveno sobre la probabilidad.
- Fomentar mediante actividades de aprendizaje diseñadas en GeoGebra la resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad.
- Promover el uso de diversas representaciones para resolver problemas de probabilidad.

1.4.1. Objetivo general:

- Identificar el impacto del uso de mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes del grado noveno.

1.5. Preguntas de investigación

1.5.1. Central

- ¿Qué impacto tiene el uso de mediación computacional de GeoGebra, en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes del grado noveno?

1.5.2. Auxiliares

- ¿Cuáles son las concepciones iniciales que tienen los estudiantes del grado noveno sobre el concepto de probabilidad?
- ¿Qué características deben tener las actividades de aprendizaje para promover la resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad?
- ¿Cuál es la importancia de las múltiples representaciones del objeto matemático en la solución de problemas de probabilidad?

Capítulo 2: Marco teórico

En este capítulo se presentarán los referentes teóricos sobre los que se apoya este trabajo de grado, y se articularán con el contexto de éste mismo. Todo con el fin de dar respuesta a las preguntas de investigación, cumpliendo así, con los objetivos pactados en el capítulo anterior. En primera instancia se exponen algunos conceptos claves que se desarrollan en la investigación, tales como el concepto de probabilidad en secundaria, y los significados de probabilidad. Luego se reportan algunos elementos teóricos que sirven como soporte para los niveles de pensamiento probabilístico. Por último, se expone la importancia de las competencias disciplinares en matemáticas. En cada apartado se pone de manifiesto cómo van a ser entendidos algunos términos en el estudio que nos ocupa.

2.1. Discusión teórica

2.1.1. El concepto de probabilidad en la educación secundaria

Para Batanero (2005) el concepto de probabilidad ha ido variando desde su nacimiento como idea matemática desde el siglo XVII hasta la actualidad. A lo largo de su desarrollo se han dado diferentes significados asociados y que aun coexisten, debido quizá al desarrollo reciente de este campo con respecto a otras ramas de la matemática. Se tienen entonces los siguientes significados del concepto de probabilidad.

Significado intuitivo

El significado intuitivo de probabilidad según Batanero (2005) va ligado a los juegos de azar, apuestas, la esperanza, la ganancia en un juego y las ideas primitivas que aparecen en civilizaciones cuando de sucesos inciertos se quiere dar alguna explicación, este significado de probabilidad se da tanto en niños como personas que no han estudiado el concepto de probabilidad. Un ejemplo claro es cualquier juego de azar, ya sean las cartas o el juego de dados.

Significado Laplaciano de probabilidad

Este significado es considerado el inicio de la teoría de probabilidad, este se basa en el cociente entre casos favorables y posibles, y la equiprobabilidad. Este concepto se consideró inadecuado, debido a que los juegos de azar no son un suceso sencillo, es decir, no son equiprobables. Por otra parte, este concepto no es aplicable a sucesos con infinitos números de posibilidades. (Batanero, 2005)

Significado frecuencial

Para Batanero (2005) este concepto nos da una visión de probabilidad como aquel número hipotético hacia donde tiende una frecuencia relativa y el carácter objetivo que se basa en la evidencia empírica.

Significado subjetivo

Este significado describe la probabilidad como algo basado en las creencias personales y la experiencia de cada persona, de ahí sale como resultado esa probabilidad condicionada por un sistema de conocimientos y puede ser distinto en cada persona. Este tipo de pensamiento probabilístico es llamado bayesiano (probabilidad subjetiva) y va ligado a distribuciones a priori y a posteriori. Un ejemplo claro de este concepto probabilístico es el estudio de decisiones en la economía, y los diagnósticos médicos. (Batanero, 2005)

Significado matemático

Hasta formalizarse y convertirse en un modelo matemático el cual es usado para darle una interpretación a la realidad de eventos o fenómenos aleatorios que tienen gran trascendencia en la vida cotidiana del hombre.

Síntesis de los significados

En los párrafos anteriores se hizo una breve descripción, tratando de nombrar los aspectos más importantes. En la tabla se trata esquematizar los significados de tal forma que se pueda ver sus diferencias.

Tabla 5: Significados de la probabilidad

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	• Sorteos • Adivinación	• Manipulación de generadores de azar: dados, cartas...	• Lenguaje ordinario	• Opinión impredecible, creencia	• Suerte • Destino
Clásica	• Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	• Combinatoria • Proporciones • Análisis a priori de la estructura del experimento	• Triángulo aritmético • Listado de sucesos • Fórmulas combinatorias	• Cociente de casos favorables y posibles • Equiprobabilidad de sucesos simples	• Esperanza • Equitatividad • Independencia
Frecuencial	• Estimación de parámetros en poblaciones	• Registros de datos estadísticos a posteriori • Ajuste de curvas matemáticas • Análisis matemático • Simulación	• Tablas y gráficos • Curvas de densidad • Tablas de números • Tablas de distribuciones	• Límites de las frecuencias relativas • Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	• Frecuencia relativa • Universo • Variable aleatoria • Distribución de probabilidad
Subjetiva	• Mejor del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	• Teorema de Bayes • Asignación subjetiva de probabilidades	• Expresión de la probabilidad condicional	• Carácter subjetivo • Revisable con la experiencia	• Probabilidad condicional • Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	• Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorio-abstractos	• Teoría de conjuntos • Álgebra de conjuntos • Teoría de la Medida	• Símbolos conjuntistas	• Función medible	• Espacio muestral • Espacio de probabilidad • Conjuntos de Borel

Nota: Fuente Batanero (2005)

2.1.2. Niveles de razonamiento probabilístico

Según Sánchez & Benítez (1997), el concepto de probabilidad resulta ser aparentemente manejado por cualquier persona, así está no tenga un nivel alto de escolaridad, aunque llegado el momento de resolver algún tipo de situación problema, se presentan varios errores, muchos de ellos, inconscientes para el sujeto.

Este concepto es en parte manejado de manera involuntaria al encontrarse inmerso en el quehacer cotidiano, y al ser usado en situaciones predicción del clima, apuestas entre otros; de ahí que las personas en ocasiones cometan errores que pueden estar basados en obstáculos epistemológicos. Bachelard (citado por Sánchez & Benítez, 1997) que caracteriza el obstáculo epistemológico como: “En el acto mismo de conocer, íntimamente donde aparecen, por una especie de necesidad funciona, los entorpecimientos y confusiones”, estos obstáculos se encuentran intrínsecos en el conocimiento y generan entorpecimientos y retrasos en la construcción de este.

Sánchez y Benítez (1997) plantean cinco niveles de razonamiento probabilístico, que van desde creencias, impredeción, hasta la parte netamente matemática y de rigor, los cuales son:

1. **Nivel de impredeción:** la imposibilidad de predecir un resultado ante una situación de azar. Por ejemplo: se lanzan un par de dados y se suman sus puntos, luego se pregunta ¿qué resultado es más probable que salga, 7 o 5?
2. **Nivel determinístico:** en este nivel se explican los comportamientos de un fenómeno probabilístico mediante una causa poderosa que los rige, este nivel se divide en tres tipos de causas:
 - **Físicas:** esta se basa en las propiedades físicas, como la fuerza con que se lance una moneda, peso de la moneda, material de la moneda, etc.
 - **Mítico/mágicas:** son los poderes o fuerzas sobrenaturales como la suerte, el poder de dios o la voluntad divina.
 - **Empíricas:** son las experiencias básicas y propias de cada estudiante, estas lo alejan de la parte crítica y afectan su pensamiento.
3. **Nivel mecánico:** en este nivel están los estudiantes que tienen fundamentos matemáticos para explicar una situación de azar, pero se resuelve el problema fuera de contexto y además de manera memorística.

4. **Nivel de pre-rigor:** se encuentran los estudiantes que plantean argumentos matemáticos, les falta madurar un poco pero ya tienen conceptos más claros y alejados de lo determinístico, impredecible y lo mecánico, estos estudiantes tienen la capacidad de combinar resultados, además elabora explicaciones donde utiliza el conteo y la combinatoria.
5. **Nivel de rigor:** en este nivel se encuentran los estudiantes que argumentan de manera matemática, éstos explican los sucesos probabilísticos a través de gráficas, tablas y diferentes medios de representación. Lo anterior, hace que sus argumentos sean certeros, bajo la mira del plano formal probabilístico.

2.1.3. Las competencias disciplinares de matemáticas en el ámbito escolar

Los Estándares Básicos de Competencias (2006) propenden por una enseñanza de las matemáticas más cercana a la realidad donde se ofrezca una educación para todo tipo de alumnos. Además, incorpora fines sociales asociados a un mayor conocimiento y competitividad en un mundo laboral que depende en su mayoría de las nuevas tecnologías. También pretende que los estudiantes se conviertan en sujetos activos frente a las coyunturas político-sociales del país rescatando la formación en los valores democráticos, de tal forma que su conocimiento matemático le permita tomar decisiones amparadas en conceptos formales.

Benítez, Mederos, Londoño & Ruiz (2010) proponen que:

El concepto de competencia se refiere a un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos como la motivación y los valores. Es decir, la competencia apunta a la capacidad que desarrolla el individuo para poner en práctica de manera articulada conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar y resolver problemas. (p.7)

El desarrollo de competencias matemáticas se divide en tres aspectos importantes como son: los conocimientos, las habilidades matemáticas y las actitudes y valores.

a) Los conocimientos

Según los Estándares Básicos de Competencias (EBC, 2006) el conocimiento matemático se puede entender de dos formas: conocimiento procedimental y conocimiento formal. Este último hace referencia a una reflexión de tipo teórica que involucra en gran medida la actividad cognitiva y desemboca en cuestiones como *saber qué* y el *saber por qué*. Por su parte el conocimiento procedimental se asocia con técnicas procedimentales para representar conceptos y transformarlos

en diferentes representaciones, también ayuda a afianzar el conocimiento conceptual y pone en contexto teorías y modelos matemáticos; así que se asocia con el *saber cómo*.

Trabajos como el de Schoenfeld (1985) afirma que el estudiante debe tener una base amplia de conocimientos de matemáticas para proponer y resolver un problema, y a su vez propone recursos que contribuyen a la solución de problemas en un concepto particular matemático:

- El conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio del problema.
- La familiaridad con procedimientos rutinarios.
- El conocimiento de hechos y definiciones.
- La habilidad para ejecutar procedimientos algorítmicos.
- La posesión de un espectro de competencias relevantes.

Todos estos recursos van desde definiciones, teoremas, axiomas, definiciones, algoritmos y procedimientos.

b) Las habilidades matemáticas

Según Schoenfeld (1985) las habilidades serán tomadas como las capacidades de los estudiantes para buscar estrategias heurísticas y de control al momento de solucionar problemas. Algunas de estas habilidades para comprender el enunciado del problema, particularizar el problema o generalizarlo para poder conjeturar o hacer contraejemplos, al igual que saber en qué momento aplicar un determinado teorema.

c) Las actitudes

Las actitudes se basan en la disposición de los estudiantes frente al estudio de las matemáticas, un ejemplo de actitud puede ser la persistencia que tiene un estudiante para enfrentarse y resolver un problema. La parte de valores no es ajena a las competencias matemáticas, la escuela debe ayudar a desarrollar valores para la vida en sociedad, valores tales como la tolerancia y respeto entre otros que deben ser trabajados de manera integral y en cada disciplina por la institución educativa.

Referente a los valores y actitudes Benítez et al. (2010) afirman:

- Las clases pueden generar un ambiente donde se desarrollen algunas competencias matemáticas como: la resolución de algunos tipos de problemas, la comunicación de las ideas matemáticas y la argumentación de las soluciones y procedimientos.
- Se hace necesario generar un ambiente de confianza, respeto entre los grupos de trabajo donde se compartan y comuniquen ideas matemáticas, para lo cual es importante que los estudiantes muestren actitudes positivas como la persistencia al momento de resolver problemas.
- Los estudiantes deben tomar una posición activa y crítica dentro de la clase.
- Compartir ideas de solución de un problema frente a todo el grupo.
- Argumentar sus puntos de vista y estar dispuesto a aceptar equivocaciones cuando sus argumentos demuestren que no es correcta o tiene poco peso una idea.
- Mostrarse de acuerdo cuando sus soluciones sean equivocadas y sus argumentos poco sensatos.
- Trabajo en equipo, mostrando tolerancia y respeto por las ideas ajenas.
- Revisión constante de procedimientos y resultados.

2.1.3.1. Las competencias en matemáticas

La idea de ser competente en matemáticas según EBC (2006) tiene que ver en primera instancia, con el uso de los conceptos y problemas matemáticos en contextos reales, que enfrenten al estudiante con situaciones propias de auto reflexión. Propiciando, la creación de un método para encontrar la solución, así se lleva a cabo un proceso algorítmico y por último una revisión de resultados. En segundo lugar, con la práctica social que puede dar significado a los conocimientos y compromete al estudiante a comunicar y argumentar continuamente sus ideas.

Lo anterior se conecta con la idea de competencias "como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores tareas donde se exprese lo aprendido" (EBC, 2006, p.49)

Para ser competente en matemáticas el MEN propone en los lineamientos curriculares cinco procesos generales de la actividad matemática, que tienen por premisa principal, la generación de

ambientes de aprendizaje significativos donde las situaciones problema permitan a los estudiantes alcanzar niveles de competencias más complejos.

Los cinco procesos generales según el EBC (2006) son:

1. La formulación, tratamiento y resolución de problemas: permiten al estudiante encontrar estrategias y métodos para la resolución de problemas, de igual manera encontrar resultados, verificarlos y razonar a partir de los resultados obtenidos.
2. La modelación: es el descubrimiento de esquemas que se repiten en las situaciones problema y permiten generar una representación, sistema o construcción que brinda apoyo a una conjetura o razonamiento para avanzar hacia las demostraciones.
3. La comunicación: la expresión y comunicación es componente de la comprensión de las matemáticas y de sus conceptos, como lo menciona Duval registros semióticos y de representación.
4. El razonamiento: es la capacidad de encontrar regularidades y relaciones en una situación problema logrando hacer pronósticos y conjeturas, luego justificar o refutar las mismas; posteriormente el razonamiento permite dar explicaciones coherentes; plantear interpretaciones y respuestas que generan argumentos y razones. No simplemente se trata de memorizar de reglas y algoritmos, sino proponer argumentos con sentido, lógicos que potencien la capacidad de pensar.
5. La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: Este proceso general implica la construcción y utilización de manera correcta de lo conocido como algoritmos, con lo que el estudiante puede argumentar y ejecutar correctamente un proceso matemático, además este proceso permite la comprensión de que herramientas deben ser usadas en una determinada situación problema y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

2.1.3.1. La resolución de problemas

En el marco de la investigación hay que recurrir a algunos autores que han aportado en la resolución de problemas, entre ellos se encuentra el más conocido y pionero de este estudio; Polya, luego Mason y por último Schoenfeld. Cada uno de sus estudios comparte algunas similitudes.

En los años setenta había una discusión sobre cómo orientar la enseñanza de las matemáticas. Por un lado, existía una vertiente que apostaba por la enseñanza a partir de las matemáticas modernas y, por otro lado, un movimiento que promulgaba por un modelo que volviera sobre los conceptos básicos. Pero estos modelos habían fracasado en su intento por mejorar las competencias matemáticas

El aprendizaje de las matemáticas no se puede basar solo en la aprehensión de contenidos, algoritmos y reglas; además de ellos debe existir en el quehacer matemático un desarrollo de habilidades que le permitan al estudiante resolver problemas de la vida cotidiana.

En conclusión, la resolución de problemas surge como alternativa a las dos ideas concebidas en los años setenta.

2.1.3.1.1 Aportes de Polya

El trabajo de Pólya (1965) constituido en su libro “cómo plantear y resolver problemas” trae consigo una metodología para resolver problemas en matemáticas. En general se deben desarrollar tres pasos, el primero, la comprensión del problema, el segundo es la construcción de un plan, el tercero es la ejecución de este y el último, una visión retrospectiva.

En la comprensión del problema se debe esclarecer los datos, las incógnitas y las condiciones del problema, además de resolver interrogantes como ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la solución? (Benítez, 2006).

En la construcción de un plan hay que buscar relaciones entre los distintos datos que presenta el problema, para ello es de vital importancia las estrategias heurísticas, que Polya (citado por Pochulu y Rodríguez, 2015, p.156) define como “el estudio de medios y métodos para la resolución de problemas”. Algunos ejemplos de dichas estrategias son, pensar en un problema similar, particularizar la situación, dividir el problema en sub- problemas y usar gráficas que permitan modelizar los datos del problema.

La ejecución del plan es poner en marchas el procedimiento que cada individuo ha creado basado en los ítems anteriores.

Por último, en la visión retrospectiva se busca que el estudiante verifique su respuesta, explore caminos más cortos y generalice sus resultados.

2.1.3.1.2 Aportes de Mason et al. (1989)

Mason et al. 1989 (citado por Benítez, 2006, p.30), en su trabajo sobre resolución de problemas propone tres fases: el abordaje, el ataque y la revisión.

En este trabajo se encuentra aportes teóricos relevantes en la resolución de problemas, además se habla de un monitor interior el cual revela su importancia en el proceso de auto- regulación del proceso de solución, esto asociado a la metacognición de cada individuo.

También, se encuentra una similitud entre este modelo y el de Polya. Por ejemplo, el abordaje sería la comprensión del problema y construcción de un plan en Polya, el ataque; la ejecución del plan y la revisión se podría entender como la revisión retrospectiva.

2.1.3.1.3 La investigación de Schoenfeld

En su trabajo “Mathematical Problem Solving” (Schoenfeld, 1985), Schoenfeld reconoce las cualidades del trabajo de Polya. Pero aumenta el componente práctico, es decir esta investigación se apoya en el estudio veraz de resolutores frente a diversos problemas matemáticos. Además de ello manifiesta que la escuela y el salón de clase deben ser una réplica de la cultura propia del estudiante.

Schoenfeld (1985) en su estudio, delimita la resolución de problemas en cuatro dimensiones: heurísticas, recursos, control y sistema de creencias.

A continuación, se describe cada una de las dimensiones:

Heurísticas: son las estrategias que posee cada resolutor, por ejemplo: particularizar, realizar un diagrama, entre otros. Schoenfeld (1985) (citado por Benítez, 2006) presenta algunas preguntas y sugerencias en torno al desarrollo de heurísticas al momento de resolver un problema, a continuación, se presentan algunas de ellas:

- ¿Puedes enunciar el problema en forma diferente?
- ¿Puedes pensar en un problema análogo, un poco más accesible?

- ¿De qué manera se pueden cambiar los datos o las condiciones en las que está redactado el problema?

Ejemplo: la situación problema planteada por García (2000) del reparto de la apuesta plantea diferentes métodos de resolución como se muestra a continuación:

Dos jugadores participan en un juego. Cada uno coloca sobre la mesa 32 monedas. Acuerdan que el primero que consiga 3 puntos gana el total de la apuesta. Pero por algún motivo el juego debe interrumpirse cuando un jugador lleva ganados dos puntos y el otro 1 punto. ¿Cómo debe repartirse la apuesta inicial? (p.12)

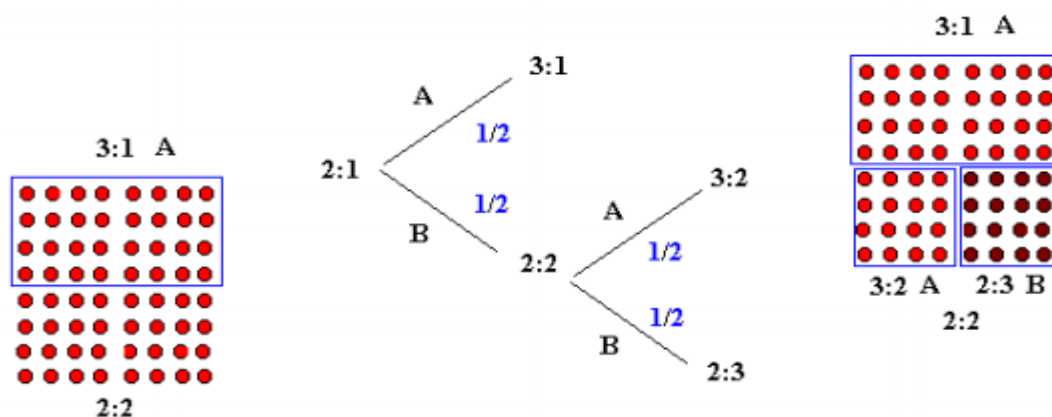


Ilustración 4: Diagramas del ejemplo: el reparto de la *apuesta*

El problema se puede resolver utilizando varias heurísticas, entre ellas el uso de diagramas de árbol o un razonamiento meramente formal.

La solución del problema: él que gana la primera ronda ganaría el total de la apuesta la cual llamaremos A, luego si es el oponente el que gana entonces quedarían en igualdad de condiciones es decir $\frac{1}{2} A$. Ahora cada uno tendrá la posibilidad de ganar A o $\frac{1}{2} A$, luego tendremos que de ganar el tiro y quedar 3:1 se tendrá que repartir $\frac{1}{4}A$ para el perdedor y $\frac{3}{4} A$ para el ganador.

Recursos: según Penalva, Posadas, y Roig (2010) trata sobre la amalgama de conocimientos matemáticos que posee el estudiante, que pueden servir para la resolución de problemas, en un dominio matemático particular. Algunas herramientas pueden ser: teoremas y definiciones, perspicacias y conocimientos informales de acuerdo con el dominio del problema, algoritmos, entre otros.

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que al tirar un dado salga 3 si se sabe de antemano que ha salido un número impar.

En este caso el estudiante va a tener los siguientes recursos que le pueden ayudar a resolver el problema:

- La Probabilidad Condicional es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que también ocurre otro suceso B.
- La fórmula de probabilidad condicional es: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(B) > 0$
- Los Sucesos independientes son aquellos en los que $P(A/B) = P(A)$

Al resolver el problema se tendrá:

1. Se tendrá que calcular: $P(3 \mid \text{saliendo impar})$
2. $P(3 \mid \text{impar}) = \frac{P(3 \cap \text{impar})}{P(\text{impar})}$
3. $P(\text{impar}) = 3/6 = 1/2$
4. $P(3 \cap \text{impar}) = \text{probabilidad de que salga 3 y también impar} = 1/6$
5. $P(3 \mid \text{impar}) = (1/6) / (1/2) = 1/3$

Control: se refiere a la forma en que un estudiante inspecciona su trabajo. Esta dimensión enfatiza en el esquema y las estrategias heurísticas que pueden servir para la solución de un problema. Dichas estrategias pueden ser mejores en algunos problemas que en otros, así que el estudiante debe estar en la capacidad de elegir el mejor camino para encontrar la respuesta. También debe tener la capacidad de cambiar sobre la marcha, (es decir, concluir que el método utilizado no es el correcto y cambiarlo por otro), revisar las respuestas y otras aptitudes. Pero esto solo se da si hay un continuo monitoreo (Barrantes, 2006).

Se puede decir que un estudiante preocupado solamente en la búsqueda de algoritmos para solucionar el problema, en vez de identificar procedimientos que lo puedan llevar a una respuesta, no pertenece a la dimensión de control.

Ejemplo: Un estudiante encontró que la probabilidad de que un asteroide choque con la tierra en el año 2019 es de 1,10. En este caso el estudiante debe revisar su respuesta y de acuerdo con

sus recursos concluir que algo anda mal, pues la probabilidad debe ser menor o igual a uno, y por lo tanto debe usar un método diferente o revisar los algoritmos utilizados.

Sistemas de creencias: Las ideas que un estudiante posea de las matemáticas juega un papel importante a la hora de abordar un problema. Tales creencias se hacen fuertes en la etapa escolar y en parte se deben al contexto social en que se desarrolla el sujeto, algunas de ellas son, “las matemáticas son una ciencia para personas superdotadas”, “son alejadas de la realidad”, “si un problema no se resuelve en menos de 5 minutos entonces no tiene solución”. Estas y otras creencias determinan la escogencia de una u otra heurística para resolver un problema, o tal vez siembra en el estudiante una actitud negativa frente a cualquier situación que se le plantee.

Schoenfeld cita a Lampert sobre las creencias de los estudiantes; dice: “comúnmente la Matemática está asociada con la certeza, conocerla es ser hábil para dar respuestas correctas rápidamente. Esta asunción cultural está condicionada por la experiencia escolar, en la cual hacer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor; conocer matemáticas significa recordar y aplicar correctamente las reglas cuando el profesor lo requiera y la verdad matemática queda determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor. Las creencias acerca de cómo hacer matemáticas y qué significa conocerla en la escuela se adquieren a través de años observando, escuchando y practicando.” (Barrantes, 2006, p.5)

Ejemplo: Algunas personas juegan diariamente el chance o baloto esperando mejorar su situación económica, para ellos la probabilidad de ganar no se basa en definiciones o teoremas. Su argumento se basa en credos como la suerte o ayuda divina, dejando de lado el concepto de probabilidad, teoremas, definiciones, formulas y hasta heurísticas que les podrían enseñar que ganar el baloto o el chance tiene una probabilidad muy baja.

2.1.3.1.4 Comparación de las tres investigaciones

El estudio de Schoenfeld comparte algunas similitudes con los trabajos de Polya y Mason et al. (1989). La dimensión de control en Schoenfeld se puede ver como el monitor interno en Mason y la visión retrospectiva en Polya, otra similitud es la dimensión heurística la cual está presente en los tres. Estas y otras cuantas son similitudes en cuanto a la forma de abordar un problema, sin embargo, Schoenfeld agrega una dimensión muy interesante llamada sistemas de creencias y es a partir de ella que se vislumbra un acercamiento con la cultura del estudiante.

Además, Schoenfeld 1985 (citado por Benítez, 2006, p.31) a diferencia de Mason et al. (1989) cuenta con un estudio realizado a estudiantes y matemáticos profesionales que le permite formular

diferentes hipótesis frente a la resolución de problemas, como una metodología válida para abordar la enseñanza de algunos conceptos matemáticos.

También se encuentra que:

Las observaciones que se le hacen al trabajo de Polya están referidas al resolutor ideal (experto), que ha desarrollado estrategias y formas de pensar que le permiten obstáculos que aparecen en el proceso de resolución, desde la fase de entendimiento hasta la de revisión del mismo proceso (Benítez, 2006, p.36)

Y cabe anotar que cualquiera de los modelos debe ser moldeable, de tal forma que contribuya con el uso de tecnología en la resolución de problemas.

2.1.3.2 El uso de múltiples representaciones

En el momento de enfrentarse a un problema en matemáticas o cuando se quiere aprender un concepto como tal, es necesario hacer uso de múltiples representaciones, que permitan al individuo explorar diferentes caminos para llegar a la meta (en este caso la solución de un problema) y encontrar conexiones entre dichos sistemas.

La noción de representación, según Duval (1999) es la forma bajo la cual se puede describir una información y a su vez tener en cuenta un sistema de transformación.

La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. (Duval, 1999, p.39)

Duval (1999) clasifica los diferentes tipos de representación y en este proceso, centra su atención en las representaciones conscientes, que son aquellas que se presentan de forma intencional y cumplen una función de objetivación. Este tipo de representaciones permite darle significado a los objetos que observa el sujeto y a la postre la posibilidad de tomar consciencia de lo observado.

Los párrafos anteriores invitan a pensar en “el cambio de forma en que un objeto se representa”, específicamente se habla de transformaciones, las cuales están ligadas al uso de un sistema semiótico.

Otros autores como Barrera y Santos (2002) afirman que una actividad matemática debe propiciar tres sistemas de representación: sistemático o uso de tablas, gráfico o visual y algebraico. Cada uno de ellos ofrece distintas miradas para analizar los parámetros, por ejemplo, el uso de

gráficas ayuda a encontrar regularidades, el algebraico para aterrizar las apreciaciones gráficas y extrapolar los datos en las tablas.

En particular el manejo de software como GeoGebra, Excel, Derive, entre otros, permite que los estudiantes visualicen y encuentren regularidades en las estructuras de los conceptos matemáticos.

Los estudiantes manifiestan sus formas de pensar y resolver problemas a partir del empleo de modelos que involucran distintos sistemas de representación. En este estudio, un problema de rutina se emplea como plataforma para que los estudiantes expresen, construyan y refinan sus ideas acerca de conceptos que involucran cambio o variación. El uso de la tecnología desempeña un papel importante en la presentación, identificación y exploración de conjeturas y relaciones. En particular, se observa que la utilización de distintas representaciones se transforma en un puente para conectar temas que tradicionalmente aparecen en áreas como cálculo, geometría, aritmética y álgebra (Sánchez y Benítez, 2003, p.2)

2.1.4. El uso de tecnologías digitales en educación matemática

En la actualidad el uso de la tecnología en la educación se ha vuelto trascendente en lo relacionado a los diferentes sistemas de representación, para Benítez (2006) las herramientas tecnológicas ofrecen un potencial que ayuda a los estudiantes, en la discusión de ideas matemáticas y la construcción de conceptos.

Una componente importante del presente trabajo consiste en la mediación computacional que para Guilcapi (2015) se encuentra constituido por una serie sistemática de secuencias que poseen instrucción previa, estas secuencias son realizadas y formalizadas metodológicamente para que logren incidir en el desarrollo de conceptos y procesos cognitivos con el propósito de modificar la parte cognitiva e intelectual del estudiante.

La mediación computacional de GeoGebra según Aya y Echeverry (2008) permite al estudiante elaborar o generar varias representaciones de un objeto matemático, al igual que pasar de una representación a otra, sin dejar de lado el dinamismo y la posibilidad de contextualizar conceptos. También se hace importante traer a colación la resolución de problemas de probabilidad diseñados en diferentes contextos con la ayuda de Geogebra, la cual es una herramienta con propiedades muy favorables para desarrollar situaciones problema de probabilidad en contexto debido a sus propiedades como son la posibilidad de graficar, tabular, manipular expresiones algebraicas, procesar estadísticamente un conjunto de datos, etc.

Heid (citado por Benítez, 2006) afirma que el uso de la tecnología en la resolución de problemas está ligado a brindar a los estudiantes experiencias similares a la de los matemáticos profesionales donde se argumenta que las herramientas tecnológicas favorecen el interés investigativo, debido a que los micromundos computacionales son avenidas para la actividad matemática.

En cuanto a las funcionalidades didácticas de las TIC, se puede abordar teniendo en cuenta los *principios didácticos* de Silvestre & Zilsberstein (2002) que los definen como regularidades esenciales presentes en el acto de enseñar, que permiten al educador guiar el desarrollo integral de la personalidad de los estudiantes, considerando sus estilos de aprendizaje, en medios propicios para la comunicación y la socialización, en los marcos que un salón de clases se extienda a la familia, la comunidad y la sociedad en general”. Teniendo en cuenta esto, se podría decir que los softwares educativos atienden a los marcos sociales en los que se desenvuelven los alumnos hoy en día, de esta manera se atiende a sus estilos de aprendizaje.

Además, disminuye tiempos de aprendizaje, amplía la dimensión de algunos conceptos y mejora la modelación de la realidad, enfoca la atención en aspectos esenciales, motivan el aprendizaje, sin embargo, su uso no puede chocar con lo preestablecido en el aula de clase (Benítez, 2006).

El presente trabajo incorpora la herramienta tecnológica GeoGebra con el fin de crear una avenida matemática que le permita a los estudiantes desenvolverse en un contexto conocido como lo es el tecnológico y además este les favorezca la construcción del concepto de probabilidad, a partir de los diferentes sistemas de representación que ofrece esta herramienta cognitiva, favoreciendo los procesos matemáticos descritos en los lineamientos curriculares: resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, el razonamiento, modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Se plantea además que “el uso de la tecnología puede verse desde dos perspectivas: como un amplificador o como un reorganizador de las estructuras cognitivas”. (Benítez, 2006, p.39), respecto a esto, Dörfler (1993) ha señalado:

Si la cognición se ve como una propiedad del individuo, entonces la metáfora de la ampliación es altamente sugestiva, pues son nuestras capacidades cognitivas las que se amplían sin sufrir cambios cualitativos. Pero si vemos la cognición como un sistema funcional que comprende el individuo y todo su entorno físico y social se abre la posibilidad de reconocer que las nuevas herramientas tienen un impacto transformador profundo en la cognición. (p.165)

Por ejemplo, en la solución del siguiente problema, se ilustra cómo funciona la dimensión de amplificación:

Dados un par de dados ¿Cuál es el resultado más probable al lanzar los dados en varias ocasiones?

Para resolver esta situación se hace uso del software Excel de la familia de Office. En primera instancia se programa una columna en la cual aparecerán números enteros al azar, esto se hace con el comando “ALEATORIO ()” y se despliega dicha columna hasta la casilla 6000.

	A	B	C	D	E
1	5	5	10		
2	1	1	2		
3	2	4	6		
4	5	5	10		
5	1	2	3		
6	3	4	7		
7	2	2	4		
8	3	2	5		
9	6	6	12		
10	3	1	4		
11	5	5	10		
12	2	2	4		
13	4	1	5		
14	5	4	9		
15	6	6	12		
16	5	6	11		
5993	3	1	4		
5994	2	4	6		
5995	5	5	10		
5996	1	4	5		
5997	2	4	6		
5998	3	6	9		
5999	4	6	10		
6000	6	2	8		

Ilustración 5: Representación tabular del lanzamiento de dos dados

El comando se utiliza en las columnas A y B de tal forma que simulan las 6 caras de cada dado y 6000 posibles lanzamientos al azar. En la columna C se suman las posibles caras de los dados

modelados en A y B. Luego con la función condicional “CONTAR.SI()” en la columna G se cuentan todas las sumas de C, es decir: dos, tres, cuatro, cinco,..., doce.

=CONTAR.SI(C1:C6000;2)				
D	E	F	G	H
		DOS	189	
		TRES	332	
		CUATRO	509	
		CINCO	666	
		SEIS	820	
		SIETE	1030	
		OCHO	833	
		NUEVE	680	
		DIEZ	440	
		ONCE	337	
		DOCE	164	

Ilustración 6: Función CONTAR.SI()

El comando “CONTAR.SI ()” permite visualizar en 6000 lanzamientos de un par de dados, cual es el resultado que se repite con mayor frecuencia. Hay que tener en cuenta que Excel permite hacer varias simulaciones del problema, esto se realiza con la tecla “SHIFT”+”F9” así que en otra simulación los datos de A, B y C cambian y por tanto G también lo hace. Esto es de vital importancia para que el estudiante comprenda que a pesar de los distintos y sin contables lanzamientos de los dados hay resultados que se repiten más que otros; en este caso el siete.

Para tener otro sistema de representación se usa dos tipos de gráficas, de barras y circular, con los datos G. Veamos.

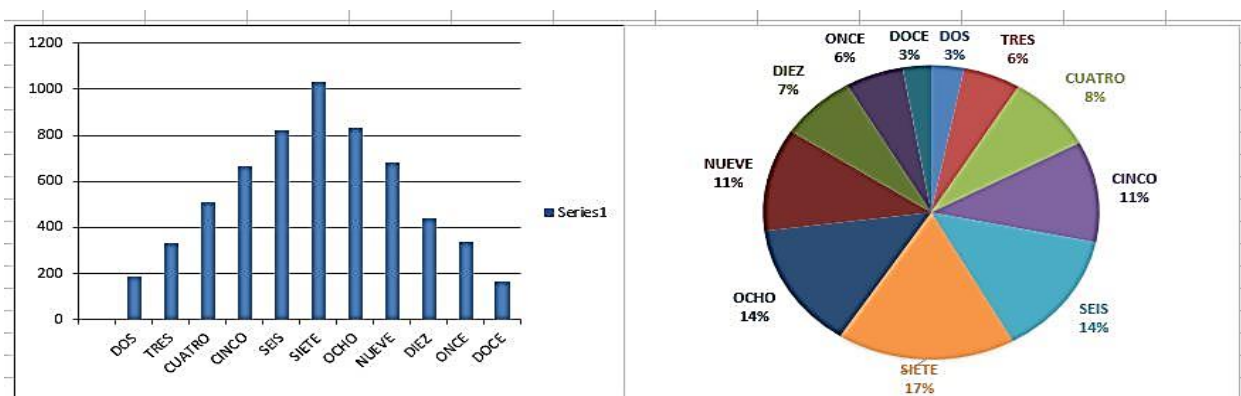


Ilustración 7: Representación gráfica

De nuevo se hace hincapié en la modelación de distintos lanzamientos que permite hacer Excel, ahora los estudiantes tendrán la oportunidad de observar cómo se mantienen ciertos valores en las dos gráficas a pesar de los distintos e innumerables lanzamientos. Con esta última representación y a través del desarrollo de la actividad se espera que el alumno deduzca y compruebe que la esperanza matemática en el lanzamiento de un par de dados es el siete.

En un software como Excel, donde se simula el lanzamiento simultáneo de dos dados, el manejo de las gráficas ayuda a que el resolutor pueda visualizar que suma se repite con mayor frecuencia. Para hacer las mismas visualizaciones con lápiz y papel se necesita el manejo de diagramas de árbol, tabulaciones que desemboquen en una gráfica, algoritmos basados en probabilidad, y otros recursos que requieren de mayor esfuerzo y desgaste de tiempo. Desde este punto de vista, se dice que la tecnología amplifica los recursos a disposición del estudiante.

Esta visualización presentada por Excel permite dar una aproximación intuitiva fundamentada en las gráficas, sirve además como acercamiento a argumentos de rigor donde se haga uso de algoritmos, definiciones o teoremas que sustenten que la suma que más se repite es la del 7.

Este señalamiento planteado por Dörfler, permite ver la importancia de la tecnología al momento de ser empleada en la educación matemática, favoreciendo el desarrollo de conceptos matemáticos vistos desde diferentes representaciones y permitiendo al estudiante el uso de herramientas con las que se encuentra relacionado, en este caso el computador y más en particular el software dinámico Geogebra.

La aparición y uso de la tecnología en la educación matemática tiene gran trascendencia en la manera como se desarrollan las actividades vinculadas con el currículo como lo plantean Rojano y Moreno (2002):

Uno de los objetivos de la investigación en este terreno es tratar de entender cómo hay que realizar la implantación de la tecnología. Bien sabemos que la primera etapa puede implicar que tengamos que trabajar dentro de un currículo establecido previamente. Pero las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de “erosionar” los currículos tradicionales. (p.200)

Se plantea entonces la posibilidad de que la tecnología erosione el currículo tradicional con lo que se hará posible a partir de las innovaciones realizar cambios futuros con el objetivo de infiltrar totalmente la tecnología en el aula, viéndola como una herramienta cognitiva que permite la construcción de conocimientos matemáticos de una manera muy eficiente.

Benítez (2006) plantea dos aspectos muy importantes cuando de involucrar la tecnología en el aula se trata:

- a)** Al introducir la tecnología en un currículo establecido, esta hará el papel de amplificador, logrando una evolución que dará como resultado la reorganización cognitiva.
- b)** Cuando la tecnología es aceptada en la construcción de conocimiento, se elabora un vínculo diferente en lo relacionado a las preguntas y la solución de problemas, con lo que será posible pensar en innovaciones o modificaciones que sufrirá el currículo a causa de la involucración de la tecnología en la educación.

Benítez (2006) afirma que los ambientes computacionales ofrecen una visualización conceptual, además de diferentes medios de representación que son accesibles a la observación.

A partir de estas ventajas el estudiante estará posibilitado a escoger un método de solución de problemas en el cual se desenvuelva mejor y no se quedará simplemente en el método del lápiz y papel el cual es una herramienta válida, pero que no ofrece diferentes posibilidades en la construcción de conceptos y conocimientos.

Para Benítez (2006) Otra ventaja que ofrece el uso de la tecnología al momento de resolver problemas, en particular con GeoGebra es el desarrollo de diferentes niveles de argumentación que incluyen:

- a)** El reconocimiento visual: con esta el estudiante puede plantear el problema desde una gráfica hasta una tabulación.

- b)** La prueba de arrastre: esta beneficia la verificación de propiedades que se visualizan, en el caso de la probabilidad puede ser el verificar que probabilidad en un suceso es más alta que en otro.
- c)** La simulación: se elaboran experimentos como son el juego de dados o incluso la posibilidad de que algún evento suceda.
- d)** Diferentes representaciones del mismo problema: conlleva a visualizar la solución de un problema desde diferentes perspectivas que conllevan al mismo resultado.

El uso de herramientas tecnológicas además de favorecer la argumentación también hace posible según Benítez (2006) la optimización del manejo del tiempo debido a las diferentes representaciones y a la amplificación de conceptos y recursos matemáticos como también el dominio de los estudiantes sobre esta tecnología.

2.1.4.1 GeoGebra

Mercado (2013) afirma que la presencia de la tecnología en el aula de clases ha modificado la acción de los docentes y ha establecido nuevas condiciones para el aprendizaje de un concepto matemático; en la actualidad el desarrollo de softwares dinámicos como GeoGebra permite la exploración de conceptos de geometría, álgebra, estadística y probabilidad entre otros, de una manera dinámica y a partir de diferentes sistemas de representación.

Institute International GeoGebra (2018) describe a GeoGebra como un software de matemáticas dinámicas que es útil en diferentes niveles y ramas de la matemática como lo son geometría, calculo, álgebra, estadística. Etc. GeoGebra es el software líder en matemáticas dinámicas y además ha cambiado la manera como se enseña y aprende en todo el mundo, favoreciendo la educación en ciencias, tecnología e ingenierías.

Respecto a GeoGebra Del pino (2013) propone características importantes como son:

- a)** Es software es gratuito, libre y de código abierto. No tiene valor alguno para los centros educativos y pueden ser cambiados elementos para tener funciones que no presentan en la versión estándar.
- b)** Es multiplataforma. Funciona tanto para Microsoft Windows, como para Apple, Linux e incluso existe una versión para tablets y celulares.

- c) Es sencillo y a la vez potente. contiene una hoja de cálculo y sus numerosas representaciones que permiten alternar el uso de la aritmética, representaciones algebraicas, cálculo simbólico y cálculo estadístico y probabilístico.

En el campo de la geometría, GeoGebra permite la construcción de diversas figuras geométricas. Desde un punto, hasta figuras más trabajadas, triángulos, polígonos, entre otros. Sin dejar de lado, la construcción de figuras en tercera dimensión. Luego de realizar cualquier figura el software permite trasladarlo, desplazarlo o arrastrarlo, con lo que se puede verificar propiedades y generar macro construcciones, posibilitando la fabricación de conjeturas. Geogebra también permite realizar operaciones algebraicas como lo son: explorar funciones y graficar las mismas, tabular, encontrar la pendiente y diferentes propiedades de una función.

En probabilidad GeoGebra nos permite enfrentar un problema desde diferentes sistemas de representación como tabulaciones, graficas, funciones, simulación de experimentos. Mercado (2013) afirma:

Las acciones posibles y los retornos a las construcciones se amplían y resultan de naturaleza diferente. Se integran conocimientos matemáticos y se amplía el campo de experimentación posible, se pueden esperar nuevas posibilidades de organización de las situaciones de aprendizaje, así como cambios en las conductas de los estudiantes. (p.310)

Balacheff & Kaput (citado por Mercado, 2013) afirman que GeoGebra permite diferentes visualizaciones del mismo problema, con lo que el estudiante podrá realizar variaciones instantáneas y precisas.

2.1.5. Diferentes tipos de contexto en situaciones problemáticas del aprendizaje de las matemáticas

Hace algunos años, para poder construir un modelo matemático de un problema real, era necesario que el alumno conociera herramientas computacionales en el aula, se abre la posibilidad de construir estos mismos modelos en los primeros semestres universitarios, con nuevos enfoques numéricos, algebraicos o simulaciones, que incluyen la geometría dinámica.

Se pueden distinguir tres tipos de contextos, utilizados para incentivar la participación de los estudiantes en actividades esenciales del quehacer de la disciplina: contextos del mundo real, los hipotéticos y los puramente matemáticos (Barrera y Santos, 2002).

2.1.5.1. Contextos del mundo real

Abarca situaciones o fenómenos reales, y para solucionar problemas de este tipo es necesario construir un modelo matemático

Para construir un modelo matemático se hace necesario partir de un problema real. Dada la complejidad de estos problemas, se debe simplificar las variables que lo rodean, de tal forma que se construya una representación lo más aproximada posible a la realidad. Tal modelo depende del sujeto que lo cree, así como de su cercanía a la realidad.

Simplificar la situación problemática tiene ciertas ventajas, como: un mejor manejo desde el punto de vista matemático, mejor enfoque de procesos para resolver el problema (ahorrar tiempo), y la posibilidad de acercar la situación a diferentes niveles escolares.

Los datos, variables, conceptos, relaciones, suposiciones y condiciones deben trasladarse a un lenguaje matemático y así resulta un modelo de la situación original.

El proceso de solución debe contener procesos matemáticos válidos, sin importar el modelo que se utilice, dichos procesos pueden verse mejorados con ayuda de la tecnología. Al final se deben realizar algunas predicciones y determinar si el modelo permite un acercamiento a la realidad.

2.1.5.2. Contextos hipotéticos.

Se plantea una situación dadas ciertas condiciones y suposiciones sobre las variables que rodean un problema real, por tanto, los datos que se manejan en este tipo de problemas no son reales.

Para Benítez (2006) el planteamiento de situaciones hipotéticas en el aula puede contribuir a que los estudiantes empleen una serie de recursos matemáticos, diferentes representaciones de los conceptos que se involucran, y diferentes formas de resolver el mismo problema. Un ejemplo de contexto hipotético es la actividad del lanzamiento de una chincheta (ver anexo 4).

2.1.5.3. Contextos puramente matemáticos.

El problema se construye alrededor de un referente que solamente involucra aspectos matemáticos.

El mayor objeto de estas situaciones es que los estudiantes construyan heurísticas para diseñar un método de solución, hallar regularidades, plantear conjeturas y revisarlas continuamente.

Capítulo 3: Metodología

En este capítulo se realizará una descripción de la metodología que fue usada en este trabajo de investigación, los participantes que hicieron parte del estudio, los materiales, herramientas e instrumentos que se usaron para la recolección de datos y posteriormente para el análisis de la información y datos recogidos.

3.1. Tipo de estudio

Se realizó un trabajo de corte mixto, llamado así, debido a que se combina el método de investigación cualitativo y el método cuantitativo. El método mixto posee varias ventajas según lo afirman Sampieri, Fernández & Baptista (2006): amplitud en los datos que serán recolectados, diversidad, profundidad, riqueza interpretativa, mayor sentido del entendimiento, de igual manera el poder usar la conversión de datos cualitativos en cuantitativos y viceversa.

En el presente trabajo, se registraron datos con ayuda de herramientas de corte cualitativo y cuantitativo: encuestas y hojas de trabajo con preguntas de única respuesta, y preguntas de tipo abiertas. Posteriormente se analizaron las respuestas o justificaciones que dieron los estudiantes al resolver problemas referentes al pensamiento aleatorio; los conceptos que presentan mayores dificultades y mayores fortalezas; qué conocimientos previos o que obstáculos tienen al momento de resolverlos. Dichos obstáculos están asociados a las percepciones que tienen los estudiantes sobre eventos azarosos. Por ejemplo: creer que para ganar el baloto solo hace falta tener “suerte” o pensar que, al lanzar una moneda al aire, la cara expuesta depende de las propiedades física.

Luego de lo anterior, se realizó una estandarización de la producción de los estudiantes. Ubicándolos en cinco niveles de razonamiento probabilístico y otorgando una nota a su rendimiento.

Las herramientas cuantitativas permitieron el uso de técnicas de inferencia estadística que a la postre sirvieron de ayuda en la escogencia de la muestra, el procesamiento de los datos y el análisis de éstos. Brindando datos numéricos y estadísticos, reflejados en tablas y graficas que permitieron cuantificar: la forma en que los sujetos entendían algunos fenómenos azarosos y el manejo de conceptos básicos de probabilidad.

Por su parte, las herramientas cualitativas ofrecieron datos característicos sobre la forma en que los estudiantes utilizaban sus conocimientos del concepto de probabilidad a la hora de resolver

problemas azarosos. Y comprobar si sus argumentos se basan en un sistema de creencias (suerte, dios, clima u otro), saberes empíricos, o en propiedades físicas de los objetos de estudio.

3.2. Descripción de la institución (PEI)

La Institución Educativa Industrial Marice Sinisterra (IEIMS) es de carácter público, se encuentra ubicada en la ciudad de Cali del departamento del Valle del Cauca, comuna 12, específicamente en la Calle 40 # 25A 43 y cuenta con 2 sedes: Fenalco, Asturias. La IEIMS promueve estudiantes técnicos en alguna de las siguientes: Mecánica Automotriz, Dibujo Técnico, Electricidad, Electrónica, Sistemas, Metalistería. La capacidad de atención escolar es de 1800 estudiantes, la cantidad de personal administrativo es 7, y el número de profesores 75.

3.2.1 Principios y fundamentos institucionales

La Institución Educativa Industrial Marice Sinisterra (IEIMS) bajo su componente filosófico busca una formación integral de sus estudiantes que sea basada en principios de buen comportamiento, pensamiento crítico, comportamiento ético en sociedad, y protección del medio ambiente. Bajo esta idea los valores como el respeto, solidaridad, responsabilidad, honestidad y justicia deben resaltar en cada una de las partes que conforman el aparato institucional, es decir, los padres de familia, los profesores, estudiantes y directivos. Todo esto para que el estudiante se forme como un ciudadano a carta cabal

También se procura que los estudiantes y padres de familia atiendan a un modelo cuasi-conservador en medio de una sociedad que permite la transgresión de los derechos de algunas personas, basados en la libre expresión y demás cuestiones propias del siglo XXI. Es por eso, que la autoridad (entendida como: *Hacer crecer*) es un concepto necesario para que se mantenga un orden dentro y fuera de la Institución, así que la familia debe contribuir para que se logre tal fin.

3.2.2 Perfil de los estudiantes

Ser una persona líder con valores y conocimiento, reflexiva, gestora de paz, promotora de actitudes, pensamientos críticos e innovadores, creativa, investigadora, comprometida con la protección del Medio Ambiente, y con sentido de pertenencia con la Institución.

3.2.3 Enseñanza de las matemáticas en la institución

Se propone la utilización de metodologías activas y constructivistas. Luego se emplean metodologías como Proyectos, Aprendizaje Colaborativo y Aprendizaje basado en problemas.

Ésta última, permea en gran medida la enseñanza de las matemáticas porque permite desarrollar el pensamiento crítico, imaginativo y reflexivo, y desarrollar habilidades cognitivas, metacognitivas y aprendizaje colaborativo.

Algunas ventajas de esta metodología basada en problemas son:

- Desarrolla en los estudiantes actitudes positivas para enfrentar problemas en un contexto real.
- Posibilita la adquisición de un conocimiento integrado
- Desarrolla habilidades cognitivas para el análisis y la síntesis de la información y habilidades sociales para el trabajo en equipo.
- Desarrolla la capacidad de aprender por cuenta propia.

3.3. Fases

Esta investigación consta de cinco fases: diseño, validación, uso de la tecnología, recolección y análisis. Las cuales, siempre estuvieron bajo la idea de identificar la incidencia de GeoGebra en la ascensión del razonamiento probabilístico por parte de los sujetos de estudio.

Tabla 6: Fases de la investigación

Diseño	Validación	Uso de la tecnología	Recolección	Análisis
-Selección de actividades	-Revisión por parte de expertos	-Descripción de GeoGebra.	-Aplicación del diagnóstico.	-Cuantitativo
-Diagnóstico	-Rediseño con base en el ítem a.		-Aplicación de las hojas de trabajo	-Cualitativo
-Hojas de trabajo				

Nota: elaboración propia

3.3.1. Diseño

Se dividió en tres sub- fases: El diseño del diagnóstico; el diseño de las hojas de trabajo y una fase que está inmersa en las dos anteriores; la selección de actividades en torno al pensamiento estocástico.

3.3.1.1. Selección de actividades o problemas

En las sub- fases de diseño se hizo una selección de actividades o problemas relacionados con el pensamiento estocástico, teniendo en cuenta, el contexto del sujeto de estudio; los objetivos del

trabajo de grado y la investigación de Benítez (2006): *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes universitarios en la resolución de problemas con el uso de tecnología. El*

Según Benítez (2006) las siguientes características son de gran importancia al momento de elegir y aplicar una actividad o problema en probabilidad.

- Con la solución de dichas actividades el estudiante podrá hacer uso de características fundamentales del quehacer matemático como lo es: particularizar, buscar un patrón, conjeturar y finalmente poder solucionar problemas semejantes o de un nivel más fácil. Además, basado en lo anterior podrá construir modelos matemáticos, dar contraejemplos mejorando su argumentación al momento de resolver una situación problema en el concepto de probabilidad.
- El problema podrá ser resuelto en Geogebra.
- Las situaciones problema deben estar en contextos matemáticos, hipotéticos y reales.
- Los problemas presentados deben comprometer al estudiante dentro de un contexto propio.

En los siguientes apartados (diagnóstico y hojas de trabajo) se hace hincapié en la selección de actividades, ya que, cada uno de los apartados guarda algunas diferencias en cuanto a éstas.

3.3.1.2. Diagnóstico

El diseño de la prueba diagnóstico es fundamental para identificar, errores, dificultades y concepciones de los estudiantes frente al concepto de probabilidad. La mayoría de preguntas se tomaron de las pruebas SABER y otras, creadas por los investigadores. El proceso para seleccionar y refinar las preguntas fue el siguiente:

1. Buscar en la base de datos del ICFES, los cuadernillos de pruebas para grado noveno.
2. Filtrar los problemas con el componente aleatorio.
3. Revisar el contexto y respectiva modificación según las necesidades.
4. Cambiar las opciones de respuesta, agregar la opción “No sé” (para el tipo de preguntas con opción múltiple) y un espacio para justificar la respuesta.

3.3.1.2.1. Características del instrumento

Las características de la prueba diagnóstico son las siguientes:

- Contiene 18 preguntas, 13 de opción múltiple y 5 de respuesta abierta.
- En todas las preguntas hay un espacio para justificar la respuesta.
- Las preguntas 12, 13, 14, 15 y 16 no incluyen opción de respuesta.
- Se agregó la opción de respuesta “No sé” para evitar que el alumno divagara en sus ideas, y respondiera adivinando, pues, sesgaría los resultados cuantitativos.
- Las preguntas 17 y 18 tienen por objetivo reunir información relacionada a la idea que tienen los estudiantes acerca del significado de la suerte y creencias místicas.
- Para realizar la prueba se requiere nociones básicas acerca de la regla de Laplace, espacio muestral, eventos dependientes e independientes, entre otros. Lo anterior, de acuerdo a los contenidos curriculares a lugar.
- Se busca involucrar al estudiante con el problema planteado, de tal forma que hicieran una reflexión interna de la situación y se formularan interrogantes como: ¿qué pienso del problema?, ¿cuál es mi experiencia frente al asunto?

3.3.1.2.2. Aplicación de la prueba diagnóstico

La prueba se realizó durante 45 minutos, de forma individual y en salón habitual de los estudiantes. Se llamó la atención en la importancia de la prueba para el trabajo de investigación, por lo cual, era necesario la justificación de cada respuesta, y que el resultado de ésta no traería consecuencias académicas.

3.3.1.3. Hojas de trabajo

La aplicación y el posterior análisis de la prueba diagnóstico reveló ciertas dificultades de los estudiantes, en especial las asociadas a creencias erróneas acerca de probabilidad. Por tanto, esto influyó en la forma de resolver los problemas que involucraban este concepto. Lo anterior motivó la construcción de tres hojas de trabajo, con el principal objetivo de optimizar el pensamiento probabilístico.

Todas las hojas de trabajo contienen una situación problema en torno al concepto de probabilidad y varias preguntas referentes a dicha situación. Algunos de los problemas están basados en contextos reales y otros en contextos hipotéticos. El diseño tuvo en cuenta los resultados de la prueba diagnóstico., Además, constan de una construcción realizada en GeoGebra que permite la simulación del problema. En cuanto al contenido de las hojas, se puede sintetizar en tres partes. En la primera se hacen preguntas relacionadas al tipo de representación gráfica, en la segunda la representación tabular y, por último, se repite una de las preguntas del diagnóstico, cuya respuesta sirve de parámetro para contrastar resultados.

En cuanto las construcciones de GeoGebra, fueron tres, una por cada hoja de trabajo. En primera instancia se descargaron algunos archivos de GeoGebraTube y se modificaron según las necesidades. La herramienta “ver protocolos de construcción” permitió ver el paso a paso de los archivos descargados y de esta forma, agregar detalles a la construcción final.

Durante la ejecución de las hojas de trabajo se destacan tres etapas: el trabajo individual, el acompañamiento y la reformulación de contextos.

- Trabajo individual: en esta etapa el estudiante se enfrenta al problema sin la ayuda del maestro o algún compañero
- Acompañamiento: en esta etapa interviene el profesor como formulador de preguntas y sugerencias que permitan al estudiante acercarse cada vez más a la solución del problema.
- Reformulación de contextos: es la oportunidad para que el estudiante se enfrente a problemas similares, pero en otros contextos, es decir, se mantiene una conexión con el problema inicial, pero se amplían algunas características, que permiten explorar nuevos terrenos.

3.3.2. Validación

3.3.2.1. Revisión por parte de expertos

Los diseños elaborados en la fase uno, fueron validados por, investigadores y profesores que cuentan con conocimientos tanto a nivel de probabilidad como profesores con conocimientos en las NTIC, en particular GeoGebra.

3.3.3. Uso de la tecnología

En esta fase, se explicó el funcionamiento de Geogebra, en especial para estudiantes que no habían manejado el software. Se hizo en forma de tutorial en el aula de clases, con la ayuda de una proyección de GeoGebra.

A su vez, se dividió en tres sub-fases que ayudaron a esquematizar las acciones a seguir que según Benítez (2006) deben ser: descripción general de Geogebra, taller de manejo de Geogebra, Solución de problemas con las herramientas de Geogebra.

3.3.3.1. Descripción general de GeoGebra.

Se presentaron las características principales del software, se realizó un recorrido por cada ventana de GeoGebra, se explicó la forma de realizar operaciones básicas, comandos, y ejemplo de resolución de situaciones problema.

3.3.3.2. Solución de problemas con las herramientas de GeoGebra.

Se plantearon situaciones problema para que los estudiantes comprendieran el uso de las herramientas de GeoGebra.

3.3.4. Recolección

La recolección de datos se llevó a cabo en dos sesiones de trabajo. La primera, una hora y la segunda de 30 minutos, con estudiantes que cursan noveno grado del colegio IEIMS (sede-central). El trabajo fue en un ambiente de resolución de problemas. También se hizo un gran esfuerzo para que las actividades resultaran entretenidas y/o interesantes para los estudiantes y se fomentará el trabajo en equipo, de tal forma que exista una comunicación de ideas entre ellos.

Se utilizaron instrumentos de recolección de dos tipos: hojas de trabajo y diagnóstico.

3.3.5. Análisis

El análisis de la información recolectada se realizó de forma cuantitativa y cualitativa. El análisis de tipo cualitativo se desarrolló en dos fases que para Benítez (2006) son importantes para el propósito de recolectar datos, en la primera fase se realizó una etapa previa que sirvió de guía en el momento de dar seguimiento a los estudiantes, escogencia de alumnos y muestra para la encuesta. En la segunda etapa se compilaron los datos para dar una visión global de los mismos.

En el análisis de información se tomaron estrategias utilizadas por Benítez (2006) donde se realizó una observación grupal e individual, se definieron categorías de análisis y se utilizó el estudio de casos.

Las categorías de análisis se basan en la investigación de Benítez (2006), la cual define cinco niveles de razonamiento probabilístico: impredicción, indeterminismo, mecánico, pre- rigor y rigor.

Para el análisis cuantitativo se usaron técnicas de inferencia estadística que fueron de ayuda en la escogencia de la muestra, el procesamiento de los datos y el análisis de éstos. El proceso de análisis cuantitativo se puede visualizar en el siguiente esquema:

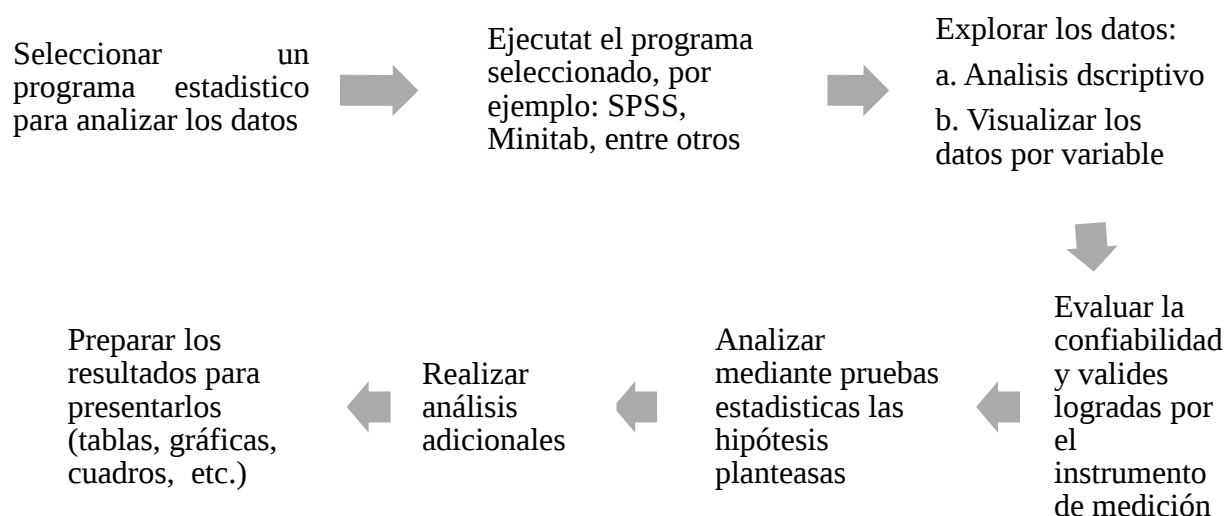


Ilustración 8: Proceso para el análisis cuantitativo, Sampieri (2006)

Capítulo 4: análisis de resultados

4.1. Presentación de la prueba diagnóstico

La prueba diagnóstico (ver anexo 1) permite explorar las nociones que tienen los estudiantes en relación con equiprobabilidad, significado de probabilidad, eventos independientes y dependientes, además de los conocimientos que tienen sobre algoritmos para calcular probabilidad simple y compuesta; el tipo de sistemas de representación que identifican y utilizan, al igual que las habilidades para la resolución de problemas y el sistema de creencias.

4.1.2 Objetivos

Los objetivos de la prueba diagnóstico es identificar los errores, dificultades, y creencias infundadas en relación con el razonamiento probabilístico. Además, tener un parámetro que, permita perfeccionar el diseño de las hojas de trabajo y analizar su impacto.

4.1.3 Condiciones de la aplicación

Esta prueba fue aplicada a 21 estudiantes, contiene 18 preguntas, 13 de opción múltiple y 5 de respuesta abierta. Aunque, todas disponen de un recuadro en blanco para la justificación, algo que se recordó a los estudiantes antes de resolver la actividad.

La prueba diagnóstica se contestó de manera individual con una duración de 120 minutos, y fue aplicada a estudiantes del grado noveno de la institución educativa Marice Sinisterra, el cual está conformado por 11 mujeres (52%) y 10 hombres (48%) entre los 14-17 años, pero en su mayoría de 14.

4.2. Análisis cuantitativo

Para esta parte se considera las preguntas cerradas, éstas se encuentran asociadas a diferentes temas de la probabilidad y también incluyen aspectos relacionados con las creencias (suerte, dios, azar). Que como lo menciona Schonfeld (1985) y Santos (Citado por Benítez, 2006) son muy importantes a la hora de resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad.

La siguiente gráfica muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante, si la respuesta y su justificación eran correctas, se calificaba con 1, de lo contrario 0. También se muestran otras variables estadísticas (promedio, desviación estándar y coeficiente de variación)

Tabla 7: Análisis cuantitativo

Pregunta Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total	Porcentaje	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	5	0,45455	
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	4	0,36364	
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00000	
4	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4	0,36364	
5	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0,27273	
6	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	4	0,36364	
7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,18182	
8	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0,18182	
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,09091	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00000	
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00000	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00000	
13	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0,18182	
14	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0,18182	
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,09091	
16	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	5	0,45455	
17	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	5	0,45455	
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,09091	
19	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0,27273	
20	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	3	0,27273	
21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,09091	
Promedio	0,2078			Desviación estándar			0,1578			Coeficiente de variación			75,9574	

La media del grupo es 0,2078 en una escala de 0 a 1. Esta medida de tendencia central, nos indica que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes es del 20,78%.

El coeficiente de variación permite medir la dispersión en forma de porcentaje. Esta medida de dispersión representa la desviación típica respecto a la media (Hueso y Cascant, 2012). Para las medidas de la tabla 10 el coeficiente es 75,9574% lo que indica una alta dispersión en la calificación de los estudiantes, pues, si observamos *grosso modo*, hay estudiantes que tienen una nota de 5/11, otros tienen 0/11 y 1/11. Por tanto, concluimos que el grupo es altamente heterogéneo.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de respuestas correctas de las primeras 11 preguntas.

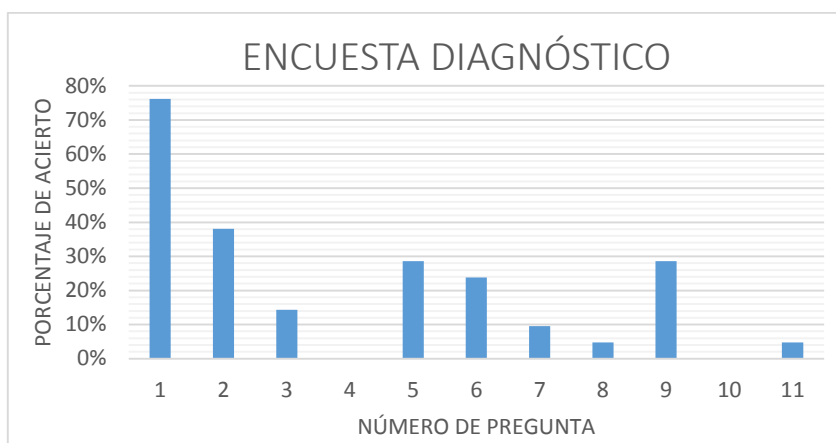


Ilustración 9: Encuesta diagnóstico

Como puede observarse el rendimiento de los estudiantes fue muy bajo, tan solo en la pregunta 1 se obtuvo un porcentaje de respuesta correcta mayor al 50%, mientras que el resto de las respuestas correctas están por debajo del 30%, donde las preguntas con resultados más bajos son las preguntas 4, 8, 10 y 11.

A continuación, se muestran y se analizan las preguntas con menor porcentaje.

Número de pregunta	Preguntas con menor porcentaje de respuesta correcta	Porcentaje de aciertos
4	En una baraja de póquer hay en total 52 cartas; 13 por cada símbolo. Los símbolos son: picas, corazones, diamantes y tréboles.  Usted va a extraer 4 cartas de la baraja al azar. ¿Qué es más probable que ocurra? A. Que las cuatro cartas sean del mismo símbolo. B. Que cada una de las cuatro cartas sea de símbolos distintos. C. Que dos pares de cartas tengan igual símbolo. D. Que tres cartas tengan el mismo símbolo. E. No sé.	0%
8	En el juego de parkés se lanzan dos dados y se suman los puntos de las caras expuestas hacia arriba. En una partida de parkés hay dos fichas expuestas para ir a la cárcel, la ficha roja está a siete puntos y la ficha verde está a 5 puntos. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta? A. Las dos fichas tienen la misma probabilidad de ir a la cárcel B. La ficha que está a siete puntos tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.	5%

	C. a ficha que está a siete puntos tiene menor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos. D. o se puede predecir cuál de las dos fichas tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel. E. o sé.																									
10	En las últimas elecciones presidenciales de cierto país se presentaron 6 candidatos, una firma encuestadora decidió realizar una encuesta para determinar la intención de voto. Los resultados de la encuesta se reflejan en la siguiente tabla: <table><tr><th>Candidato</th><th>Intención de voto</th></tr><tr><td>Justiniano Pérez</td><td>34%</td></tr><tr><td>Sergio Fandiño</td><td>27%</td></tr><tr><td>George Vargas</td><td>20%</td></tr><tr><td>Humberto Callejón</td><td>10%</td></tr><tr><td>Valenciano Duque</td><td>9%</td></tr></table> Un mes después se llevó a cabo las elecciones y despertó el asombro de todo el país. Los resultados se presentan a continuación <table><tr><th>Candidato</th><th>Porcentaje de votos</th></tr><tr><td>Humberto Callejón</td><td>38%</td></tr><tr><td>Jorge Vargas</td><td>29%</td></tr><tr><td>Justiniano Pérez</td><td>20%</td></tr><tr><td>Sergio Fandiño</td><td>7%</td></tr><tr><td>Valenciano Duque</td><td>6%</td></tr></table> ¿Por qué sucedió este fenómeno? A. Un error en la firma encuestadora. B. Fraude electoral. C. El candidato Humberto Callejón trabajo fuertemente en el último mes en su campaña electoral. D. Azares del destino E. No sé.	Candidato	Intención de voto	Justiniano Pérez	34%	Sergio Fandiño	27%	George Vargas	20%	Humberto Callejón	10%	Valenciano Duque	9%	Candidato	Porcentaje de votos	Humberto Callejón	38%	Jorge Vargas	29%	Justiniano Pérez	20%	Sergio Fandiño	7%	Valenciano Duque	6%	0%
Candidato	Intención de voto																									
Justiniano Pérez	34%																									
Sergio Fandiño	27%																									
George Vargas	20%																									
Humberto Callejón	10%																									
Valenciano Duque	9%																									
Candidato	Porcentaje de votos																									
Humberto Callejón	38%																									
Jorge Vargas	29%																									
Justiniano Pérez	20%																									
Sergio Fandiño	7%																									
Valenciano Duque	6%																									
11	La tabla muestra la incidencia de embarazos en mujeres adolescentes en una ciudad. <table><tr><th>Edad</th><th>Número de adolescentes que han estado embarazadas</th><th>Población total de mujeres adolescentes</th></tr><tr><td>15</td><td>150</td><td>3.000</td></tr><tr><td>16</td><td>150</td><td>1.500</td></tr><tr><td>17</td><td>200</td><td>2.000</td></tr><tr><td>18</td><td>400</td><td>2.000</td></tr></table>	Edad	Número de adolescentes que han estado embarazadas	Población total de mujeres adolescentes	15	150	3.000	16	150	1.500	17	200	2.000	18	400	2.000	5%									
Edad	Número de adolescentes que han estado embarazadas	Población total de mujeres adolescentes																								
15	150	3.000																								
16	150	1.500																								
17	200	2.000																								
18	400	2.000																								

	19	450	1.500	
	¿Cuál es la edad en que las adolescentes tienen mayor probabilidad de quedar en embarazo?			

Ilustración 10: preguntas con menor porcentaje de respuesta correcta

Para contestar la pregunta número 4 se debe tener en cuenta el espacio muestral y además el concepto de probabilidad condicional, podría emplearse un diagrama de árbol para dar solución.

Vale la pena resaltar que el bajo porcentaje de efectividad puede ir ligado también a problemas de redacción en la pregunta, ya que deja espacio a la confusión al no destacarse que son eventos independientes e igualmente que el espacio muestral va variando al sacar cada carta (probabilidad condicional).

Para responder la pregunta 8 se hace necesario tener presente el espacio muestral y todas las posibles combinaciones, para ello se puede realizar un diagrama de árbol o una tabla como la que muestra a continuación:

			DADO #1					
			Número					
			1	2	3	4	5	6
DADO #2	Número	1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
		2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
		3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
		4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
		5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
		6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Ilustración 11: Dados.

A partir de esta tabla se muestra que hay 36 resultados posibles, de los cuales, la suma que más se repite o mayor probabilidad tiene de salir es la del número 7, (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1) mientras que la opción del número 5 se repite solo 4 veces, (1+4, 2+3, 3+2, 4+1). Por lo tanto, de las dos fichas expuestas, la roja (que está a siete puntos) es la que tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel. Puede notarse claramente como los estudiantes tienen problemas con los diferentes tipos

de representaciones, estos no usan los cuadros o graficas como una ayuda, sino que antes representa para ellos un obstáculo que los hace dudar sobre que concepto de probabilidad usar.

Para dar respuesta a la pregunta número 10 se deben tener en cuenta conceptos tales como: muestra, tipos de variable, en este caso la mayoría de los estudiantes argumento haciendo uso del azar, de la fuerza de voluntad y trabajo del candidato para salir adelante en su campaña, ninguno uso argumentos que dejara notar algún tipo de razonamiento probabilístico.

También es pertinente revisar esta pregunta y tratar de mejorarla, ya que puede que esta esté mal redactada o un poco fuera de contexto para este grupo de estudiantes de noveno grado.

El problema 11 se resolvía teniendo en cuenta conceptos como: muestra, población total, y el algoritmo de probabilidad o regla de Laplace $P(A) = \frac{\# \text{ casos a favor}}{\# \text{ casos totales}}$, donde a partir del logaritmo se llegaba a la respuesta inmediata donde la mayor probabilidad de quedar en embarazo está en la edad de los 19 años.

Por las características que poseen estas preguntas se hace interesante explorar la capacidad que tiene los estudiantes para resolver este tipo de problemas, que tipos de representaciones usan y como resuelven la situación problema, ya que estos pueden usar diagramas de árbol, cuadros, graficas e incluso el algoritmo para encontrar la probabilidad; también se hace importante tener en cuenta el cómo los estudiantes se dejan influenciar por la parte cultural la cual como lo expresan Sánchez y Benítez, (1997): la cultura es un imán que por naturaleza influencia el pensamiento probabilístico.

Ahora bien, no basta con analizar solamente el tipo de respuesta anterior. Por eso, a continuación, se presenta un análisis de las preguntas con mayor porcentaje de respuesta correcta.

Número de pregunta	Preguntas con mayor porcentaje de respuesta correcta	Porcentaje de aciertos																					
1	Pregunta 1. Angélica y Laura son jugadoras destacadas de tenis de mesa en el Colegio. La tabla registra los partidos ganados y perdidos por cada una, en los últimos 20 enfrentamientos entre ellas. <table><tr><th rowspan="2">Jugadora</th><th colspan="10">Partido</th></tr><tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th></tr></table>	Jugadora	Partido										1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	76%
Jugadora	Partido																						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10													

Angélica	P	G	G	G	P	G	G	P	G	P
Laura	G	P	P	P	G	P	P	G	P	G

Jugadora	Partido									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Angélica										
Laura										

P: partido perdido.

G: partido ganado

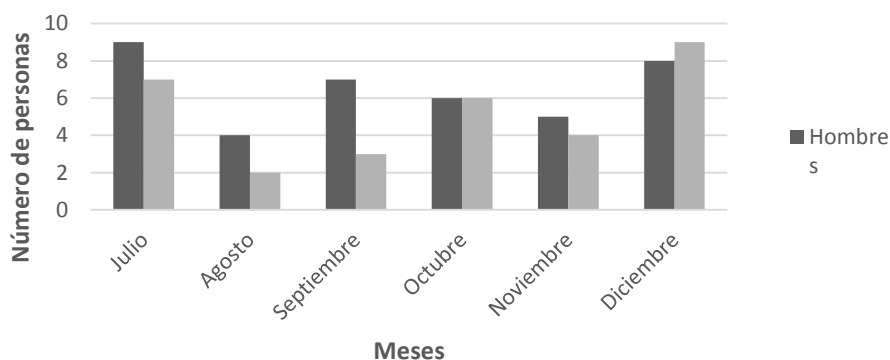
Mañana jugarán el partido 21 que será la final. De acuerdo a la información presentada en la tabla anterior es correcto afirmar que:

- Angélica tiene Igual probabilidad de ganar el partido 21 que Laura
- Angélica tiene Menor probabilidad de ganar el partido 21 que Laura
- Angélica tiene Mayor probabilidad de ganar el partido 21 que Laura
- No se puede predecir cuál de las dos jugadoras tiene mayor probabilidad de ganar

2

Pregunta 2. La gráfica representa el número de hombres y de mujeres de una región del país que compraron moto en un concesionario, durante el segundo semestre del año pasado.

38%



Se va a premiar un comprador, elegido al azar, con un bono de \$500.000 en mantenimiento de la moto. De acuerdo con la información de la gráfica es correcto afirmar:

- Los hombres tienen Mayor probabilidad de ganar el bono que las mujeres
- Los hombres tienen Menor probabilidad de ganar el bono que las mujeres
- Los hombres tienen Igual r probabilidad de ganar el bono que las mujeres
- No se puede decidir cuál de los dos géneros tiene mayor probabilidad de ganar.

Ilustración 12: Preguntas con mayor porcentaje de respuesta correcta.

El problema 1 obtuvo un porcentaje alto de acierto, tal vez por su sencillez. Para esta pregunta era necesario realizar un conteo de los casos a favor en cada partido y tener en cuenta los partidos totales, luego se comparaban los casos y se determinaba que Angélica tiene una probabilidad de

ganar de $\frac{15}{20}$; por su parte Laura tiene una probabilidad de ganar de $\frac{5}{20}$. El concepto probabilístico inmerso es la regla de Laplace, aunque; ningún estudiante usa tal procedimiento matemático.

El problema 2 obtuvo un porcentaje alto-medio dado el resultado global. Para encontrar su respuesta era necesario analizar la gráfica de tal forma que se hiciera una comparación entre las barras que mostraban el comportamiento de mujeres y hombres respecto a la compra de motos en los últimos meses. Al hacerlo, se debe concluir que los hombres compraron mayor cantidad de motos en los últimos meses y por tanto tendrán mayor probabilidad de ganar el bono.

Igual que en el problema 1, la regla de Laplace subyace a la respuesta, aunque no tan directamente. Pues en este caso, el objetivo era identificar el nivel de interpretación gráfica que poseen los estudiantes ante un problema que involucraba fenómenos probabilísticos.

Una vez que se han analizado las preguntas con mayor y menor porcentaje de acierto, para tener una idea global de los resultados de la prueba diagnóstica se presenta la siguiente tabla por opción de respuesta de los primeros 11 problemas planteados, la opción correcta estará sombreada.

Número de pregunta	Opciones de respuesta de cada pregunta					
	A	B	C	D	E (no sé)	F
1	1 4,76%	0 0%	16 76,19%	2 9,52%	2 9,52%	0 0%
2	11 52,38%	0 0%	3 14,29%	7 33,33%	0 0%	0 0%
3	0 0%	2 9,52%	2 9,52%	4 19,05%	13 61,9%	0 0%
4	1 4,76%	4 19,05%	2 9,52%	0 0%	3 14,29%	11 52,38%
5	2 9,52%	2 9,52%	8 38,09%	6 28,57%	3 14,29%	0 0%
6	3 14,29%	1 4,76%	5 23,8%	9 42,86%	3 14,29%	0 0%
7	10 47,62%	3 14,29%	1 4,76%	2 9,52%	2 9,52%	3 14,29%

8	7 33,33%	3 14,29%	6 28,57%	2 9,52%	3 14,29%	0 0%
9	9 42,86%	1 4,76%	1 4,76%	9 42,86%	1 4,76%	0 0%
10	0 0%	5 23,8%	13 61,9%	2 9,52%	1 4,76%	0 0%

Ilustración 13: Porcentajes de respuestas correctas.

4.3. Análisis cualitativo

El análisis de los datos recolectados nos da una idea de la población estudiada, pero hacerlo teniendo en cuenta solamente la parte cuantitativa, no permite entrar en detalles que pueden ser significativos en este trabajo de grado. Es por eso, que también se apela por un análisis de corte cualitativo donde se tenga presente su carácter reflexivo; el perfil del investigador como sujeto activo dentro del mundo social que estudia; y la importancia de las observaciones a través de diversas herramientas, para luego construir una interpretación comprensible del fenómeno (Aravena, Kimelman, Micheli, Torrealba , & Zúñiga, 2006)

A continuación, se presenta la clasificación de las respuestas en niveles de razonamiento probabilístico, teniendo en cuenta los resultados de la encuesta.

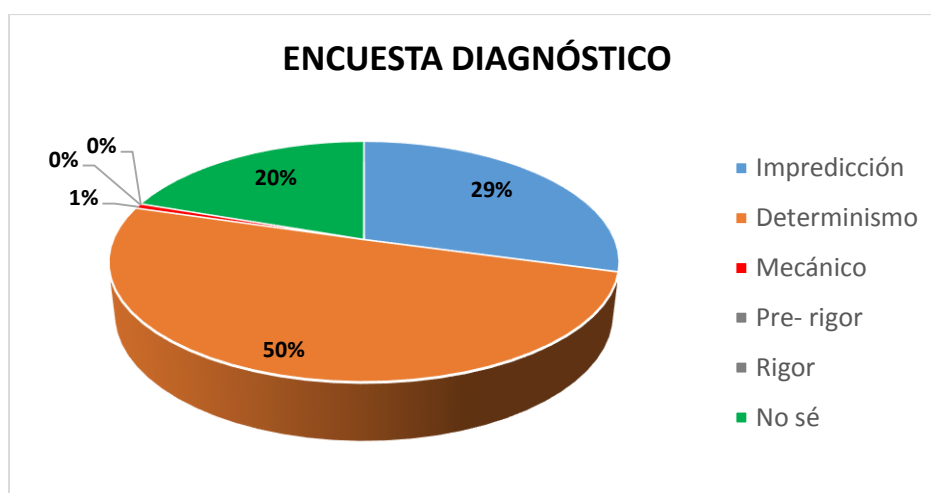


Ilustración 14: Encuesta diagnóstica.

Se puede apreciar que el nivel de determinismo impera en las respuestas con un porcentaje de 50%; le sigue el nivel de impredicción con un 29%; luego No justifica un considerable 20%; el

nivel mecánico con un 1%; y por último con un panorama desalentador los niveles pre- rigor y rigor con 0%. Los datos reflejados apoyan la construcción de hojas de trabajo que sirvan de instrumento para que los estudiantes avancen en los niveles de razonamiento probabilístico.

Para esta parte se consideraron de las preguntas de corte abierto, es decir, desde la 12 hasta la 18. En el momento de hacer el análisis se nota que varias justificaciones pueden clasificarse en una o más categorías, sin embargo, se escogió el nivel predominante.

La gráfica anterior brindaba información global de los resultados, pero para mayor precisión se presenta la siguiente tabla que presenta la clasificación de las últimas siete preguntas del diagnóstico, en los niveles de razonamiento ya mencionados a lo largo del capítulo.

Tabla 8: Calificación cualitativa.

Pregunta (Número)	Niveles de razonamiento probabilístico							
	Impredicción	Determinismo			Mecánico	Pre- rigor	Rigor	No justifica
		Física	Empírica	Mítico/mágicas				
12	5%	0%	5%	81%	0%	0%	0%	10%
13	38%	0%	14%	19%	0%	0%	0%	29%
14	38%	0%	33%	5%	0%	0%	0%	24%
15	52%	5%	5%	14%	0%	0%	0%	24%
16	33%	24%	5%	5%	5%	0%	0%	29%
17	24%	0%	14%	48%	0%	0%	0%	14%
18	14%	0%	5%	71%	0%	0%	0%	10%

Para analizar esta parte del diagnóstico se revisa las ultimas 7 preguntas (12 a la 18) de las veintiún (21) encuestas diagnósticas, y se categoriza (tabla 8) en cinco niveles de razonamiento probabilístico, que son: impredicción, determinismo, mecánico, pre- rigor, y rigor (Sánchez y Benítez, 1997). Para el caso de no respuesta, se agregó la categoría No justifica. En la tabla 8 se observa que solo una pregunta está dentro del nivel mecánico, mientras que el resto se encuentra en los niveles más básicos que son impredicción y determinismo.

Ahora, se hará una descripción de algunas preguntas que reflejan los niveles de razonamiento presentados por los estudiantes.

Pregunta 12. Una persona ganó la lotería hace un mes y la presente semana la volvió a ganar.
¿Usted cómo explica este hecho?

Puede ser Suerte o Seguramente fue
donde una bruja que le predijera el
numero que iba a Caer.

Se puede apreciar, que el estudiante posee algunas creencias infundadas como la suerte o la brujería y que basa su respuesta considerando lo anterior como agentes externos que alteran la probabilidad de ganar la lotería. Este tipo de razonamiento es propio del nivel determinístico (más exactamente mítico- mágico), al cual le corresponde un 86% de la justificación.

Pregunta 12. Una persona ganó la lotería hace un mes y la presente semana la volvió a ganar.
¿Usted cómo explica este hecho?

no hay forma de explicarlo, si se
sucesos aleatoriamente se puede decir que
la persona tuvo buena suerte

En este ejemplo se puede notar claramente que el estudiante piensa en la imposibilidad de predecir un resultado ante esta situación del azar, no da una respuesta y considera que no puede ser contestada la pregunta, dice que no se puede explicar el fenómeno; Puede verse claramente que el tipo de razonamiento es del nivel de impredeción que corresponde al 5% de la justificación.

Pregunta 13. Usted va a comprar una rifa le ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el boleto marcado con ese número?

No, en un rifa no hay tanta probabilidad
de que calgan 3 números iguales

Al manifestar que en dicho juego la probabilidad que resulten tres números iguales es mínima, se revela una justificación basada en la experiencia del estudiante. Para justificar de esa manera tuvo que ver en alguna ocasión, por la tv quizás, resultados de los números ganadores en una rifa. Luego la justificación pertenece al nivel de determinismo- empírico.

Pregunta 13. Usted va a comprar una rifa le ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el boleto marcado con ese número?

Si lo compraría si una tiene suerte
gana con cual quier numero

En esta justificación se denota una creencia mítico- mágica, pues argumenta que algo llamado suerte que es propio de personas afortunadas, basta para ganar el premio que ofrece la rifa; Esta respuesta pertenece al nivel de razonamiento determinista, el cual es uno de los básicos y está muy arraigado a la cultura en que el estudiante se desenvuelve.

Pregunta 13. Usted va a comprar una rifa le ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el boleto marcado con ese número?

Pues NOSE. Porque si me lo ofrecen es para un bien
o un mal. Pues si el bien es que gane que gana la
loteria pero si el mal lo gana un pobre porque si no
lo gana el a ver que pasa.

En esta pregunta puede notarse que se trata del tipo de razonamiento de nivel de impredeción, para el estudiante es imposible dar una respuesta y se basa luego en hablar del bien y el mal para dar una justificación, podría decirse que se pasa de un tipo de razonamiento de nivel de impredeción a un nivel de determinismo tipo empírico, dando como explicación experiencias o incluso la cultura juega un papel importante para hablar del bien y el mal que le quiera hacer una persona al ofrecerle una rifa.

Pregunta 14. Si su equipo favorito de futbol va a jugar el partido de vuelta en los octavos de final de la Champions League de local, y necesita un triunfo para pasar de ronda ¿Qué tan probable consideras la clasificación de tu equipo teniendo en cuenta que juega de local?

no se sabe porque no puedo predecir lo que va a llegar a suceder.

El estudiante no se atreve a dar un posible resultado, pues dice que no se puede predecir el fenómeno. Tal justificación podría ser producto de una incapacidad para predecir sucesos probabilísticos, luego, hace parte del nivel de impredeción, que según la tabla 10, pertenece al 38% de estudiantes. Aunque en gran medida (el 33%) pertenecen a lo determinismo- empírico, y al observar la opción “no justifica” hay un 24% que no justificaron. Lo anterior puede apuntar a cierta ambigüedad en la pregunta, mas no impide identificar y clasificar en los niveles de razonamiento.

Pregunta 14. Si su equipo favorito de futbol va a jugar el partido de vuelta en los octavos de final de la Champions League de local, y necesita un triunfo para pasar de ronda ¿Qué tan probable consideras la clasificación de tu equipo teniendo en cuenta que juega de local?

muy probable porque al jugar de local tiene muchas ventajas:
- Hinchada
- Estadio

El estudiante en esta pregunta hace uso del nivel de razonamiento de nivel determinístico (empírico) para dar la respuesta, ya que centra su justificación en su experiencia, habla de cómo la hinchada y el estadio puede ser una ventaja para el equipo local, en ningún momento hace uso de conceptos probabilísticos; Este tipo de respuesta se repitió en un 33% en esta pregunta donde el estudiante se basa en su experiencia e incluso en rasgos culturales propios del fútbol.

Pregunta 15. Al hacer girar la pirinola las opciones que se tendrán serán las siguientes: toma 1, toma 2, pon 1, pon 2, toma todo, todos ponen. Usted se encuentra jugando con sus amigos a la pirinola sobre una superficie lisa y te toca hacerla girar ¿Qué opción consideras es más probable que salga en tu turno?

no se porque puede llegar a caer cualquier de las opciones.

Aunque parte de la justificación es verdad al decir que cualquier cara puede salir, no se identifica un razonamiento basado en la equiprobabilidad, pues desde el comienzo afirma que no sabe. Luego lo que sigue en el argumento, está basado en la incapacidad para predecir el fenómeno, así que la justificación se clasifica en el nivel de impredeción que para esta pregunta se dio en un 52% de las respuestas de los estudiantes.

Pregunta 15. Al hacer girar la pirinola las opciones que se tendrán serán las siguientes: toma 1, toma 2, pon 1, pon 2, toma todo, todos ponen. Usted se encuentra jugando con sus amigos a la pirinola sobre una superficie lisa y te toca hacerla girar ¿Qué opción consideras es más probable que salga en tu turno?

Al ser una superficie lisa puede salir cualquiera

Es evidente que en esta respuesta el estudiante centra su atención en la superficie donde se pone a girar la pirinola, en este caso no hay argumentos donde se haga uso de algún concepto probabilístico, por lo tanto, la respuesta se basa en un nivel de razonamiento determinista de la categoría físico, donde apunta a que el posible resultado estará ligado al lugar donde se realice el juego, este tipo de respuestas se dio en esta pregunta con un porcentaje del 5%.

Pregunta 15. Al hacer girar la pirinola las opciones que se tendrán serán las siguientes: toma 1, toma 2, pon 1, pon 2, toma todo, todos ponen. Usted se encuentra jugando con sus amigos a la pirinola sobre una superficie lisa y te toca hacerla girar ¿Qué opción consideras es más probable que salga en tu turno?

Todos poneré. Es lo que más sale en el juego de la pirinola.

El estudiante para esta respuesta usa su experiencia, se basa en las veces que ha llegado a realizar dicho juego, se limita a responder dejando de lado conceptos básicos de la probabilidad como lo es la regla de Laplace, por lo que la respuesta que brinda el estudiante se asocia al nivel de razonamiento determinista de la categoría empírica que se dio en esta pregunta con un porcentaje del 5%.

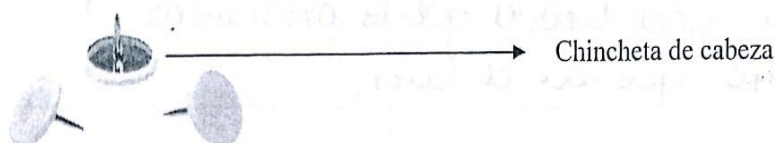
Pregunta 15. Al hacer girar la pirinola las opciones que se tendrán serán las siguientes: toma 1, toma 2, pon 1, pon 2, toma todo, todos ponen. Usted se encuentra jugando con sus amigos a la pirinola sobre una superficie lisa y te toca hacerla girar ¿Qué opción consideras es más probable que salga en tu turno?

no se eso" es de suerte uno no puede dar esa respuesta exacta

El nivel de impredeción se hace presente en esta justificación. Se nota que el estudiante no se atreve a predecir lo que sucederá, y más bien, deja que la llamada suerte decida. Aquí se puede destacar una de tantas creencias que poseen los sujetos, impidiendo el uso de un criterio razonable para la predicción de sucesos probabilísticos.

Lo anterior se afirma en el resultado global de la pregunta 15, en la cual el 52% de los estudiantes se encuentra en el nivel de impredeción.

Pregunta 16. Una persona deja caer una chincheta. ¿La probabilidad que la chincheta caiga de Cabeza es igual a que caiga de costado?

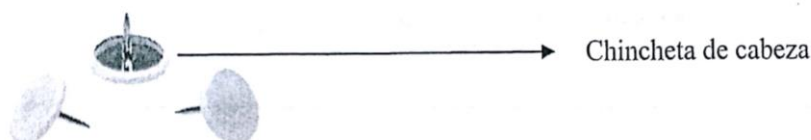


Si es mas probable que caiga a Costado
por que parada no puede + a Costado
pues tiene suerte.

De nuevo la “suerte” cobra protagonismo en el argumento. Además de ello, se suma un desconocimiento asociado a la parte física del problema, donde se considera improbable una de las opciones (caer de cabeza). Entonces se tienen dos tipos de sub-razonamientos: determinístico-físico y determinístico- mítico mágico, y la categorización queda abierta a cualquiera de las dos.

A nivel global, el 24% se encuentra en determinismo-físico y el 5% en mítico-mágico.

Pregunta 16. Una persona deja caer una chincheta. ¿La probabilidad que la chincheta caiga de Cabeza es igual a que caiga de costado?



Porque mi tiene Probabilidad de que caiga de
cabeza porque de cabeza tiene mayor Superficie

En la respuesta a la pregunta 16 el estudiante se basa en las propiedades físicas del objeto de estudio (chincheta), hace un comentario sobre la superficie de la cabeza de la chincheta, más nunca

deja ver el uso de algún concepto de probabilidad, por lo que se clasifica su respuesta en el nivel básico de determinismo del tipo físico que se repitió con un porcentaje del 24% en esta pregunta.

Pregunta 17. Usted va a comprar un chance, con la lotería que juega hoy. Con qué criterio selecciona el número del chance:

- a. Con su número de la suerte
- b. Con la fecha del día de hoy
- c. Con la fecha de su cumpleaños.
- d. Con un número al azar
- e. Con un número de placa de un carro que acaba de pasar
- f. Con otro criterio un número visto en un sueño.

F, porque siempre que soñamos con un número se hace un chance tenemos más fe y creemos que hay más probabilidad de que caiga.

Para esta respuesta el estudiante fundamenta su justificación en un sueño y en la fe, no proporciona ningún tipo de argumento probabilístico, por lo que su respuesta se encuentra en la categoría determinista tipo mítico/mágica donde el estudiante atribuye a causas poderosas los resultados de una situación azarosa.

Pregunta 17. Usted va a comprar un chance, con la lotería que juega hoy. Con qué criterio selecciona el número del chance:

- a. Con su número de la suerte
- b. Con la fecha del día de hoy
- ☒ c. Con la fecha de su cumpleaños.
- d. Con un número al azar
- e. Con un número de placa de un carro que acaba de pasar
- f. Con otro criterio _____

Puede que tenga probabilidad de ganar o no se sabe

Este tipo de pregunta con opción múltiple, le da al estudiante la posibilidad de escoger cual es la opción más ajustada a los conceptos probabilísticos, sin embargo, se puede evidenciar que a pesar de que la respuesta debería ser la D, el estudiante prefiere dejarse llevar por una causa sobrenatural, como lo es jugar el chance con la fecha de su cumpleaños creyendo en rituales culturales que funcionan de imán y prevalecen antes que argumentos más fuertes y verificables

como lo son los conceptos probabilísticos. Este tipo de respuesta se encuentra en un nivel de determinismo tipo mítico/mágico y se repitió en esta pregunta con un porcentaje del 48%.

Pregunta 17. Usted va a comprar un chance, con la lotería que juega hoy. Con qué criterio selecciona el número del chance:

- a. Con su número de la suerte
- b. Con la fecha del día de hoy
- c. Con la fecha de su cumpleaños.
- d. Con un número al azar
- e. Con un número de placa de un carro que acaba de pasar
- ☒ Con otro criterio yo misma los armo

pues yo cuando juego hago números
mezclando números que se me vengán
a la mente

El objeto de esta pregunta era indagar por los criterios que acoge el sujeto, cuando participa en el juego del chance. Pues, hay algunas “estrategias” para la escogencia del número a apostar, que se manifiestan en el medio.

Esta pregunta posee una particularidad, porque, aunque la respuesta correcta es la opción d. se ha optado por la f. pero la justificación revela un pensamiento válido dentro de la probabilidad, y su categorización, aunque no sea tan clara, cae dentro del nivel de determinismo- empírico. Ya que se podría pensar que su “estrategia” se deriva de continuas experiencias en el chance, y esto le ha permitido refinar su método.

Pregunta 18. A una persona permanentemente le va muy mal en su vida. Generalmente tiene malos resultados, tiene accidentes, le ocurren malas cosas. ¿A qué le atribuye usted este hecho?

- a. La persona tiene muy mala suerte.
- b. Es la voluntad de Dios
- c. Es el azar
- ☒ Otra causa _____
- e. No sé

hay días que nos va mal como hay días que
nos va bien

Este argumento que plantea el estudiante claramente es del tipo mítico-mágico y demuestra el papel que juega el sistema de creencias en la resolución de problemas, especialmente, los que se asocian a la probabilidad.

Pregunta 18. A una persona permanentemente le va muy mal en su vida. Generalmente tiene malos resultados, tiene accidentes, le ocurren malas cosas. ¿A qué le atribuye usted este hecho?

- a. La persona tiene muy mala suerte.
- ☒ b. Es la voluntad de Dios
- c. Es el azar
- d. Otra causa _____
- e. No sé

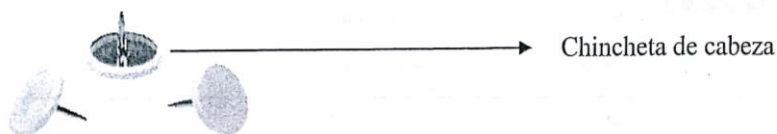
Por que quizás no tiene o mejor dicho no cree en nadie y tiene pensamientos y mente muy cerrada o esta salado y tiene que hacerse un baño.

La respuesta que elige y la justificación denotan un pensamiento en el que impera asuntos externos al pensamiento probabilístico, ya que la opción correcta es la c.

Atribuir a eventos desafortunados, razones como creencias en un dios o una “mente cerrada” refleja la permeabilidad que tiene las decisiones de los jóvenes. Tal influencia se le podría atribuir a la familia, el colegio y medios de comunicación.

Aterrizando la atención en el nivel de pensamiento; es claro, que pertenece al determinismo tipo mítico- mágico, que para esta pregunta corresponde al 71% de los estudiantes.

Pregunta 16. Una persona deja caer una chincheta. ¿La probabilidad que la chincheta caiga de Cabeza es igual a que caiga de costado?



tiene Mayor Probabilidad que la Chincheta caiga de costado

Pregunta 16. Una persona deja caer una chincheta. ¿La probabilidad que la chincheta caiga de Cabeza es igual a que caiga de costado?



no se puede saber cuando caiga puede caer acostada como puede caer de cabeza

Pregunta 18. A una persona permanentemente le va muy mal en su vida. Generalmente tiene malos resultados, tiene accidentes, le ocurren malas cosas. ¿A qué le atribuye usted este hecho?

- a. La persona tiene muy mala suerte.
- b. Es la voluntad de Dios
- c. Es el azar
- d. Otra causa _____
- ☒ e. No sé

no se sabe puede ser causa de la vida

Estas tres respuestas, no revelan gran cosa. La extensión del diagnóstico puede causar un agotamiento, que se revela en las preguntas finales con justificaciones para salir de paso.

Reflexión

Se pueden notar ciertas creencias de los estudiantes asociados a eventos probabilísticos, lo que impide un discernimiento de las causas asociadas a la predicción de fenómenos azarosos. Creencias como la suerte, los sueños, los agüeros, determinan respuestas categorizadas en los niveles más básicos del razonamiento probabilístico, y no se distingue un conocimiento formal de algoritmos o conceptos propios de la probabilidad que permitan acertar en las preguntas formuladas.

4.4. Análisis de las hojas de trabajo

En este apartado se realizará una descripción de las hojas de trabajo que fueron aplicadas a los estudiantes de noveno grado de la institución Educativa Marice Sinisterra, se describen además los objetivos y resultados del análisis cuantitativo y cualitativo de cada una de las hojas de trabajo.

Las hojas de trabajo 1 y 3 constan de tres partes mientras que la hoja de trabajo 2 consta de dos partes. Las hojas de trabajo en general se apoyan en una computadora y más particularmente, la herramienta GeoGebra. Las hojas de trabajo fueron aplicadas a 21 estudiantes y esta aplicación se hizo en dos secciones.

4.4.1. Hoja de trabajo #1

4.4.1.1. *Presentación de la actividad*

En esta hoja de trabajo (Anexo 2) se plantean una serie de preguntas que realizarán los estudiantes interactuando con un diseño elaborado en GeoGebra llamado “Dados” el cual simula varias cantidades (1000, 2000, 5000, 10000) de lanzamientos de dos dados, cada cantidad es escrita en una casilla de entrada y con un botón animación se simulan los lanzamientos. En la primera parte se esperaba que los estudiantes centraran su atención en la gráfica de barras e identificaran que el número que tiene mayor probabilidad de salir es el siete y los que tienen menos probabilidad son el dos y el doce, es decir que identificaran que el juego de los dados no es equiprobable.

Una manera de resolver las actividades planteadas en la parte uno de la hoja de trabajo #1 es la planteada en la ilustración 10, o con un diagrama de árbol.

La segunda parte de la hoja de trabajo se realiza con ayuda del mismo diseño elaborado en GeoGebra, en esta parte los estudiantes deben centrar su atención en la tabla, se realizan de nuevo la cantidad de lanzamientos de la primera parte y se espera que los estudiantes observen la suma de puntos que más se repite y la que ocurre con menor frecuencia. También, se plantea una situación donde se hace una pregunta referente a una apuesta, esperando que el estudiante sea capaz de identificar al siete, como la suma de puntos de dados que, le otorga mayor probabilidad de ganar, mientras que el dos o el doce, la menor.

Para que el lector tenga una idea del diseño que apoya la hoja de trabajo# 1 se presenta la siguiente imagen que es lo que se encuentran los estudiantes en la herramienta GeoGebra.

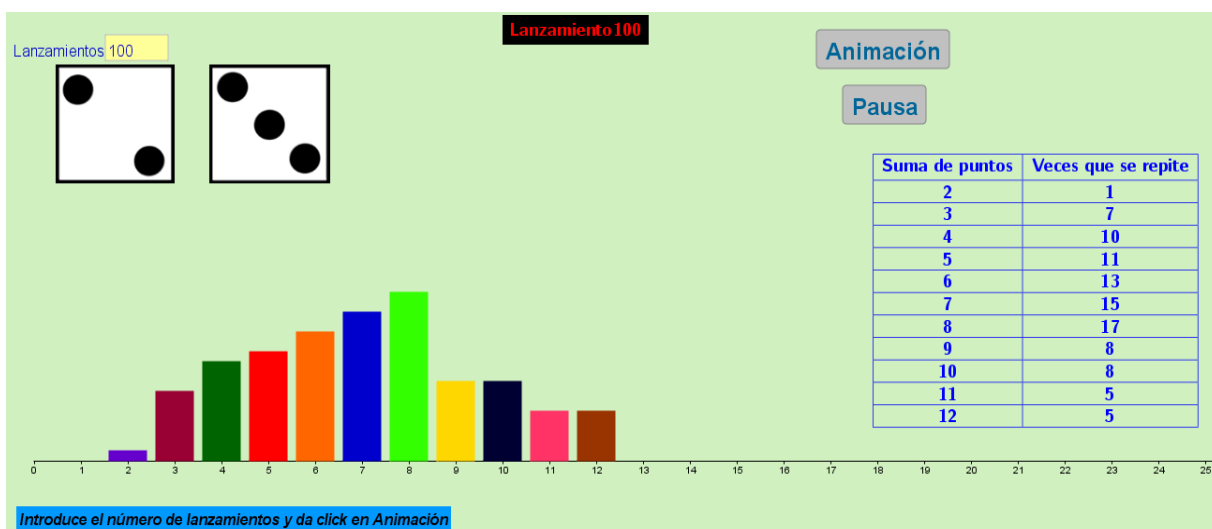


Ilustración 15: Diseño #1. Nota: elaboración propia.

En la ilustración se puede observar una zona de grafica de barras y una tabla que ilustran la suma de los puntos al lanzar dos dados y permite al estudiante visualizar que ocurre al realizar (1000, 2000, 5000, 10000 lanzamientos), el propósito de esta actividad es articular dos tipos de representación, que según Barrera y Santos (2002) en una actividad matemática propician. Cada una de ellas distintas miradas para analizar los parámetros, por ejemplo, el uso de gráficas ayuda a encontrar regularidades, apreciaciones y estructuras del concepto matemático. (Duval, 1999) clasifica los diferentes tipos de representación y en este proceso, centra su atención en las representaciones conscientes, que son aquellas que se presentan de forma intencional y cumplen una función de objetivación. Este tipo de representaciones permite darle significado a los objetos que observa el sujeto y a la postre la posibilidad de tomar consciencia de lo observado.

En otra de las actividades que se realiza en la segunda parte de la hoja de trabajo se les propone a los estudiantes apostar y que basen su apuesta en lo visto en la tabla que representa la suma al lanzar un par de dados, esta tiene como finalidad que los estudiantes den cuenta de que apostarían por el siete e identifiquen que el motivo por el que este sale más fácil es por los casos favorables para que la suma de siete.

En la tercera parte de la hoja de trabajo, las preguntas se centran en hacer que los estudiantes observen las características en común que tienen los dos tipos de representación es decir la tabla y la gráfica de barras, también se les hace una de las preguntas del diagnóstico en la cual tuvieron dificultad, con el propósito de detectar si a partir de la hoja de trabajo se logra un avance y por

último se les hizo una pregunta que permita determinar si después de realizar la hoja de trabajo asimilan que el juego de los dados no es equiprobable.

4.3.1.2. Propósitos de la actividad

A través del diagnóstico fue posible identificar algunas concepciones erróneas asociadas a el lanzamiento de dados. Algunos estudiantes piensan que el número que más se repite en dicho lanzamiento es el cinco o el seis, de tal forma, que no se evidencia un proceso de razonamiento probabilístico donde surja la combinatoria como arma de peso para decidir.

Los propósitos:

- Que el estudiante, de forma indirecta integre la combinatoria y la ley de los grandes números a sus argumentos que permiten concluir que número se repite con mayor frecuencia en el lanzamiento de dos dados.
- Avanzar en los niveles de razonamiento probabilístico
- Que el estudiante trabaje con diferentes representaciones de la situación.
- Superar creencias erróneas al momento de decidir cuál es la combinación más frecuente en el lanzamiento de dados.

Para cumplir el propósito, la hoja de trabajo se apoya en tres sistemas de representación: gráfico de barras, una tabla, y un modelo de los dados. Esto con el fin de evidenciar la situación (azarosa en este caso) desde distintas representaciones, de tal forma que haya una congruencia entre ellas, y al final, un entendimiento global (Duval, 1999). También, la construcción en GeoGebra permite la simulación de lanzamiento de dados, desde un simple lanzamiento, hasta 10000 o más.

4.3.1.3. Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo se aplicó en un tiempo de dos horas-clase es decir 90 minutos en total, la solución de la hoja de trabajo se realizó de manera individual en el salón de clase con uso de la tecnología computacional y la herramienta GeoGebra.

En general la hoja de trabajo contiene instrucciones al inicio y una descripción de lo que se encontraran los estudiantes al abrir en GeoGebra el archivo “Datos”, además esta hoja tiene tres partes, con preguntas en su mayoría abiertas y una pregunta (tomada del diagnóstico) de opción múltiple con única respuesta, y cada pregunta dispone de un espacio en blanco para justificar.

Vale la pena mencionar que la actividad por sí misma no garantiza la consecución de los propósitos establecidos, se hace necesario establecer una dinámica de clase en que los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje, además se trata de guiar al estudiante por la hoja de trabajo y el diseño de GeoGebra.

4.3.1.4. Análisis de resultados

Teniendo en cuenta los objetivos del trabajo de grado, es fundamental contrastar el nivel de producción de los estudiantes en la prueba diagnóstica, respecto de las hojas de trabajo. También, es importante clasificar sus argumentos dentro de los niveles de razonamiento probabilístico. Es por ello que los análisis de las hojas de trabajo tienen un esquema similar al realizado en la prueba diagnóstica.

4.3.1.4.1. Análisis cuantitativo

A continuación, se presenta una tabla que captura las respuestas de los estudiantes, de forma cuantitativa. Si la pregunta es correcta se calificaba con 1 punto; si era incorrecta con 0 puntos.

Tabla 8: Análisis cuantitativo hoja de trabajo #1.

Pregunta \ Estudiante	a ₁	b ₁	a ₂	b ₂	c ₂	a ₃	b ₃	c ₃	Total	Porcentaje
1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1,0000
2	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1,0000
3	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1,0000
4	1	1	1	1	1	1	1	0	7	0,8750
5	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1,0000
6	1	0	1	1	1	1	1	0	6	0,7500
7	1	1	0	0	0	0	1	0	3	0,3750
8	1	1	0	0	0	0	1	0	3	0,3750
9	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0,2500
10	1	1	0	1	1	1	1	1	7	0,8750
11	1	0	0	0	0	0	1	0	2	0,2500
12	1	1	0	1	1	1	0	1	6	0,7500
13	1	1	0	1	1	1	1	1	7	0,8750
14	1	1	1	1	1	1	0	0	6	0,7500
15	1	1	1	1	0	1	1	1	7	0,8750
16	0	0	0	1	1	0	0	1	3	0,3750
17	1	1	0	1	1	0	0	1	5	0,6250
18	1	0	1	1	1	0	1	0	5	0,6250
19	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1,0000
20	1	0	0	0	1	1	1	1	5	0,6250
Total	19	15	10	15	15	12	16	11		
	Promedio	0,7188		Desviación estándar	0,2624		Coefficiente de variación	36,5130		

Las preguntas a_1 , b_1 corresponden a la primera parte de la prueba; las preguntas a_2 , b_2 , c_2 a la segunda; y las preguntas a_3 , b_3 , c_3 a la tercera parte.

La media del grupo es 0,7188 en una escala de 0 a 1. Esta medida de posición nos indica que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes es del 71,88%.

El valor de la desviación estándar es 0,2664. Esto indica que el nivel de desempeño, en su mayoría está a 0,2664 puntos de la media (0,7188) en una escala de 0 a 1.

El coeficiente de variación permite medir la dispersión en forma de porcentaje. Esta medida de dispersión representa la desviación típica respecto a la media (Hueso y Cascant, 2012). Para las medidas de la tabla el coeficiente es 36,5130% lo que indica una baja dispersión en la calificación del desempeño del sujeto. Por tanto, concluimos que el grupo es homogéneo.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de respuestas correctas de la hoja de trabajo #1

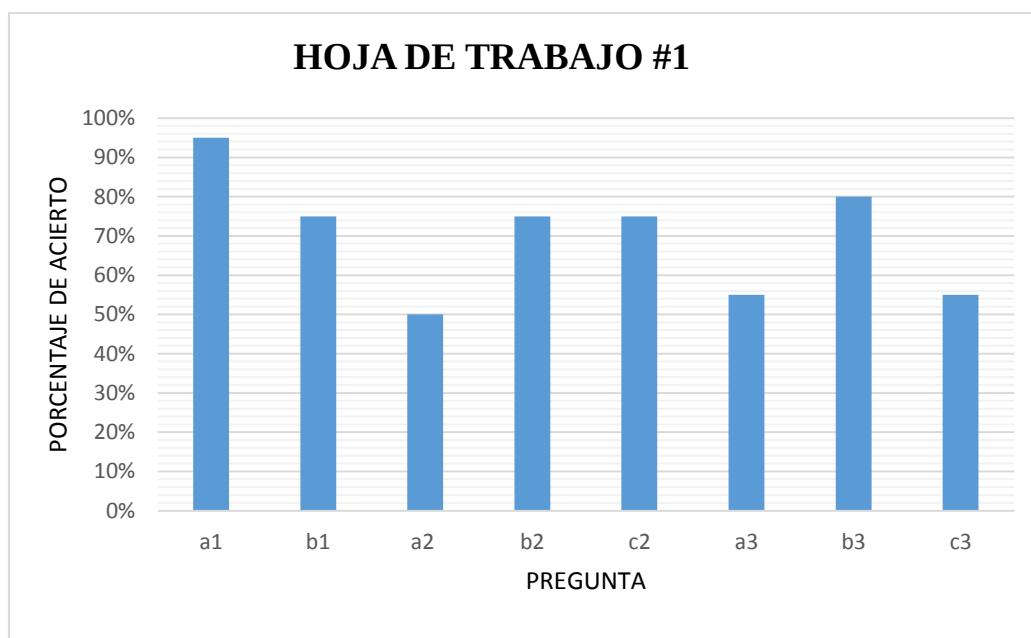


Ilustración 16: Porcentaje de respuestas correctas hoja de trabajo #1.

En forma general se observa:

- Todas las preguntas poseen un acierto mayor o igual al 50%
- La pregunta a_1 obtuvo el mayor acierto, superior al 90%

- La pregunta a₂ obtuvo el menor acierto, igual al 50%
- Las preguntas b₁, b₂, y c₂ tienen igual porcentaje de acierto
- La pregunta b₃ corresponde a la pregunta 8 de la prueba diagnóstico, y obtuvo un porcentaje de acierto igual al 80%. Al compararlo con el 5% de la prueba diagnóstico, se puede notar un gran aumento en la producción de los estudiantes en la hoja de trabajo.

4.3.1.4.2. Análisis cualitativo

A continuación, se presenta la clasificación del rendimiento de los estudiantes frente a la hoja de trabajo #1

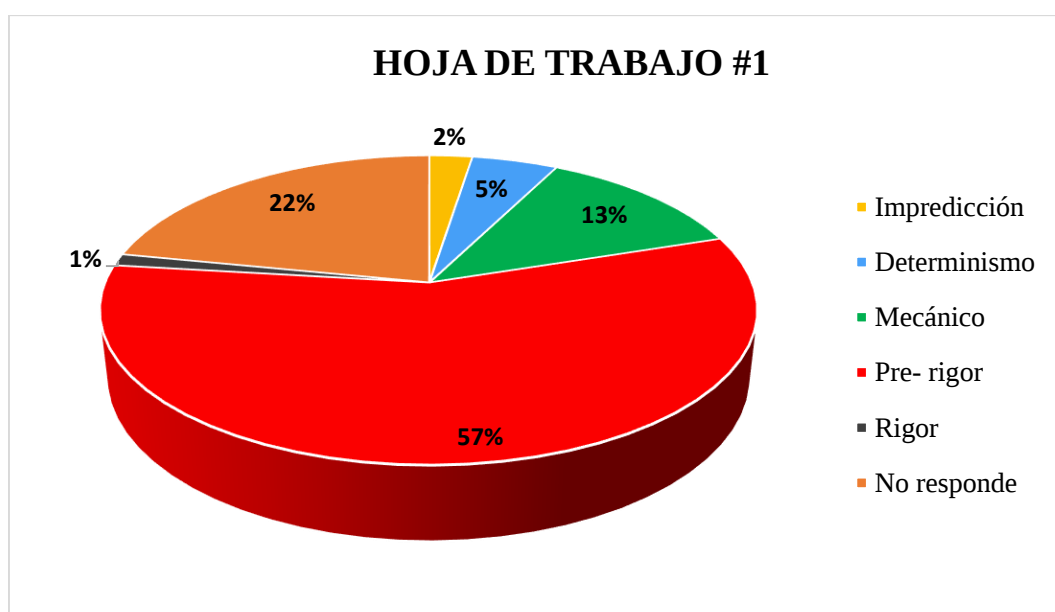


Ilustración 17: Rendimiento de los estudiantes frente a la hoja de trabajo #1.

Se puede apreciar que el nivel de pre-rigor impera en las respuestas con un porcentaje de 57%; le sigue No responde con un considerable 22%; luego el nivel mecánico con un 13%; el nivel determinístico con un 5%; y por último los niveles impredicción y rigor con 2% y 1% respectivamente. Los datos reflejados muestran una mejoría en los niveles de razonamiento probabilístico con respecto al diagnóstico.

La gráfica anterior brindaba información global de los resultados, pero para mayor precisión se presenta la siguiente tabla que presenta la clasificación de las ocho preguntas, en los niveles de razonamiento ya mencionados a lo largo del capítulo.

Tabla 9: Análisis cualitativo hoja de trabajo #1.

	Niveles de razonamiento probabilístico							
Pregunta (Número)	Impredicción	Determinismo			Mecánico	Pre- rigor	Rigor	No responde
		Física	Empírica	Mítico/mágicas				
a ₁	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	15,00%	80,00%	0,00%	5,00%
b ₁	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	45,00%	30,00%	0,00%	25,00%
a ₂	0,00%	10,00%	0,00%	0,00%	10,00%	35,00%	5,00%	40,00%
b ₂	0,00%	0,00%	5,00%	5,00%	0,00%	70,00%	5,00%	15,00%
c ₂	0,00%	0,00%	0,00%	5,00%	0,00%	75,00%	0,00%	20,00%
a ₃	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	25,00%	40,00%	0,00%	35,00%
b ₃	5,00%	0,00%	10,00%	0,00%	0,00%	75,00%	0,00%	10,00%
c ₃	15,00%	0,00%	0,00%	5,00%	5,00%	50,00%	0,00%	25,00%

Al analizar la tabla se concluye:

- Las preguntas a₁, b₂, c₂ y b₃ superan el 70% en el nivel de pre- rigor.
- La pregunta b₁ fue la menos respondida, con un 40%
- El nivel de rigor solamente se alcanza en las preguntas a₂ y b₂, pero con un bajo porcentaje de 5% en cada una.
- Aún persiste el nivel de impredicción y determinismo, pero con un bajo porcentaje. Lo anterior se evidencia en las preguntas a₂, b₂, c₂, b₃, y c₃; cada una con un porcentaje de 10%, 10%, 5%, 5%, 15%, y 15% respectivamente.

Ahora se presenta un análisis más detallado de la hoja de trabajo. Para ello, se escogieron algunas preguntas y se hace una descripción basado en los niveles de razonamiento probabilístico.

Veamos:

1. Realiza 1000, 2000, 5000, 10000 lanzamientos de los dados, en cada caso observa la zona grafica de barras y responde las siguientes preguntas:

a) Escribe las cosas comunes que viste en las cuatro graficas.

que el valor mas central fue el 7 y fue el Mayor de todo los números?
y el 6 y 8 casi siempre son iguales.

Esta respuesta puede ubicarse en el nivel de pre-rigor, donde según (Sánchez y Benítez, 1997) el estudiante se aleja radicalmente de la impredeción y lo determinista (físico, mítico -mágico y empíricas) dando argumentos matemáticos y favoreciendo la discusión de los fenómenos probabilísticos a pesar de no haber tenido un curso de probabilidad, también el estudiante es capaz de avizorar resultados, en este caso que el 7 sea el número que más sale y además que el 6 y 8 son iguales, es decir tienen la misma probabilidad de salir, pero le falta el poder argumentar sobre otros resultados como son el 2 y el 12 y esto puede ser a causa de falacias o deficiencias en los conceptos probabilísticos sobre combinatoria.

b) Con tus propias palabras explica por qué hay barras que tienen más altura que otras

porque se cuenta la veces que salio cada aquella suma de puntos

En esta respuesta puede ver como la producción del estudiante se encuentra en el nivel de pre-rigor debido a su manera de argumentar acercandose a lo matemático, de igual manera el estudiante ha mostrado avances en la interpretación de gráficas, lo cual es una manera de representación de un fenomeno probabilistico donde según Barrera y Santos (2002) en una actividad matemática los sistemas de representación ofrecen una mirada al estudiante que le permite encontrar regularidades y aterrizar conceptos que hacen que esté a pesar de no haber tenido un curso formal de probabilidad se aleje de lo determinista y de ciertos sesgos culturales.

Segunda parte

2. Nuevamente realiza los siguientes números de lanzamientos: 1000, 2000, 5000 y 10000, en cada caso observa la tabla y contesta los siguientes puntos.

a) Ahora observa la tabla. Encontrarás que hay suma de puntos que se repiten más que otros. ¿Cómo puedes explicar eso?

que la suma sea 12 es muy bajo por hay una forma de que salga 6 y 6.

Se puede notar que el estudiante se encuentra en nivel de pre-rigor, debido a que ya hace uso de las posibles combinaciones para que salga el número 12, además es capaz de avizorar y combinar parcialmente algunos resultados, a partir de esto se puede notar que el estudiante ya encuentra algo matemático en el fenómeno probabilístico, sin dejar de lado que además puede interpretar una tabla de datos la cual hace parte de una representación diferente para el fenómeno del juego de dados.

b) ¿si tuvieras que apostar, por cual número No lo harías?

por 2 y por 12 por que son la que menos salen.

En esta respuesta el estudiante entiende algo de combinatoria mas no tiene el concepto formal muy claro, es decir le falta madurar en lo matemático; el estudiante se aleja claramente del nivel de razonamiento de impredeción y determinismo entendiendo que el fenómeno probabilístico no es causado por la suerte, ni la magia y menos por dios; además puede evidenciarse cómo el estudiante a partir de la simulación en GeoGebra, pudo apartarse de algunos sesgos culturales, logrando contextualizar el problema de los dados usando diferentes representaciones (gráfica, barras).

c) ¿si tuvieras que apostar, por cual número SI lo harías?

yo apostaria por 12 por que es la que mas sale

Este tipo de respuesta se ubica en el nivel de razonamiento de pre-rigor, puede entenderse que el estudiante a pesar de no tener una formación en probabilidad es capaz de entender el fenómeno como un caso de combinatoria, además su producción se aleja de los niveles de razonamiento de impredeción y de determinismo acercándose al concepto formal pero con falencias o falta de madurez lo cual conlleva a que haya un terreno abonado para llegar al rigor.

Tercera parte

d) De acuerdo con la primera y segunda parte de la actividad, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aspectos tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

Que los dos miden la cantidad de veces
que salen los números

En esta tipo de pregunta se pretende que el estudiante relacione dos tipos de representación (tabla y gráfica de barras) e interprete que tienen en común. La respuesta dada, permite ver que el estudiante encuentra que lo representado, es la cantidad de veces que sale un número en una cantidad determinada de tiros o lanzamientos. A partir de su interpretación se puede situar la producción del estudiante en el nivel de razonamiento de pre-rigor, pues logra avizorar resultados y utilizar argumentos de tipo matemático. Sin embargo los debe madurar y contextualizar para lograr llegar al rigor.

b) En el juego de parqués se lanzan dos dados y se suman los puntos de las caras expuestas hacia arriba. En una partida de parqués hay dos fichas expuestas para ir a la cárcel, la ficha roja está a siete puntos y la ficha verde está a 5 puntos. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta?

- A. Las dos fichas tienen la misma probabilidad de ir a la cárcel
- ☒ B. La ficha que está a siete puntos tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- C. La ficha que está a siete puntos tiene menor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- D. No se puede predecir cuál de las dos fichas tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel.
- E. No sé.

Por lo que tiene mas combinaciones el 7
que el resto

Este tipo de pregunta se relaciona con un contexto conocido por los estudiantes, con esta respuesta se puede observar que el estudiante a partir de la manipulación del diseño de GeoGebra logra entender las posibles combinaciones con las que puede sacar 7, de igual manera utiliza algunos de los pasos propuestos por Schoenfeld (1985) (citado por Benítez, 2006) para resolver un problema como lo son las heurísticas que son los diferentes tipos de representación que visualizo en GeoGebra, recursos que se ven reflejados en los conocimientos informales que usa como argumentos fundamentados en el diseño que acaba de manipular, de igual manera deja de lado su sistema de creencias, por lo que se puede ubicar la producción del estudiante en un nivel de pre-rigor con falta de madurez en sus argumentos matemáticos pero este se aleja notablemente del nivel de determinismo y el de impredeción.

c) En el juego de parkés se lanzan los dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir?

La Probabilidad No es la misma por que en los lanzamientos 2 sale menos que 7

Se puede apreciar un argumento basado en el desarrollo de la hoja de trabajo, pues el estudiante identifica que el 2 sale menos que el 7 y utiliza la palabra “probabilidad”. Lo anterior denota un razonamiento probabilístico clasificado como pre-rigor, según (Sánchez y Benítez, 1997), donde el estudiante ya habla de un fenómeno probabilístico, alejándose de lo determinístico y de la impredeción. Además, intenta usar argumentos matemáticos, pero comete algunos errores típicos de alguien que no ha tenido un curso formal de probabilidad.

4.3.2. Hoja de trabajo #2

4.3.2.1. Presentación de la actividad

En esta hoja de trabajo (Anexo 3) se plantean una serie de preguntas que responderán los estudiantes interactuando con un diseño elaborado en GeoGebra llamado tiro al blanco, el cual simula varias cantidades (100, 2000, 5000, 10000) de disparos, cada cantidad es escrita en una casilla de disparos y dando Click en Enter se simulan los disparos al blanco; los estudiantes también encontraran un recuadro que muestra la cantidad de disparos que cae en cada zona del

tablero o blanco. En la primera parte se esperaba que los estudiantes centraran su atención en el tablero y tabla e identificaran en que zonas caen la mayoría y la minoría de los disparos, a su vez se esperaba que observaran que la probabilidad en cada zona era distinta logrando argumentar porque sucedía este fenómeno, es decir que identificaran que el juego del tiro al blanco no es equiprobable.

La segunda parte de la hoja de trabajo se realiza con ayuda del mismo diseño elaborado en GeoGebra, en esta parte los estudiantes deben centrar su atención en una situación problema que se planteó en el diagnóstico, la cual se les pregunta de nuevo para identificar un progreso a partir del uso de la tecnología, en esta pregunta se hace una comparación entre zonas del blanco y se busca que el estudiante sea capaz de responder cual es la probabilidad de que se acierte a una zona en comparación de otras dos de menor superficie.

En esta segunda parte también se elaboran preguntas destinadas a que los estudiantes identifiquen las zonas con mayor y menor probabilidad de acierto, para que finalmente el estudiante logre argumentar que el fenómeno probabilístico del tiro al blanco no depende de la suerte ni de eventos físicos o culturales.

Para que el lector tenga una idea del diseño que apoya la hoja de trabajo# 2 se presenta la siguiente imagen que es lo que se encuentran los estudiantes en la herramienta GeoGebra.

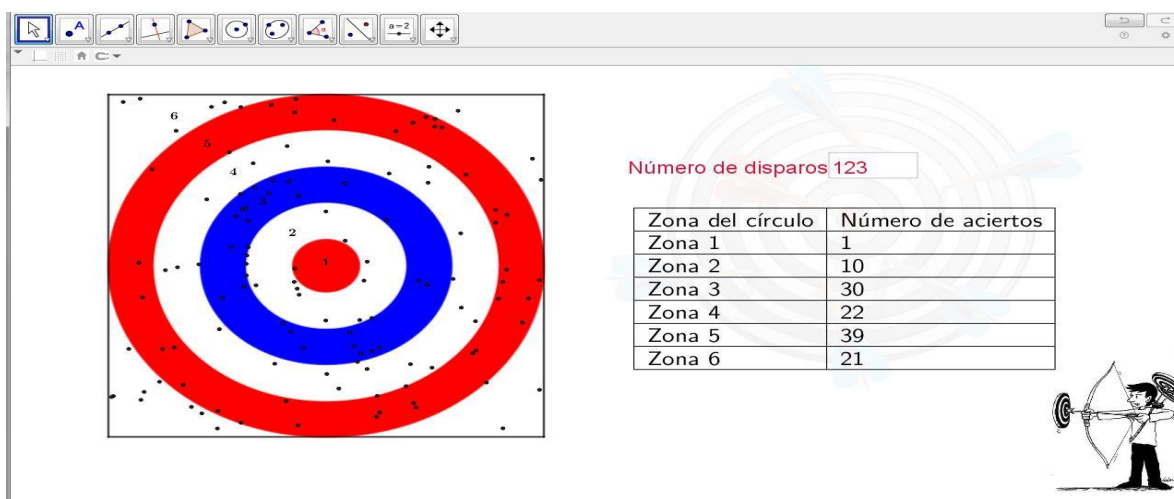


Ilustración 18: Diseño #1. Nota: elaboración propia.

En la ilustración se puede observar una zona de grafica donde se simulan los disparos al blanco y una tabla que representa la cantidad de aciertos en cada zona del tablero o blanco y permite al estudiante visualizar que ocurre al realizar (100, 2000, 5000, 10000 disparos), el propósito de esta actividad es articular dos tipos de representación, que según Barrera y Santos (2002) en una actividad matemática propician Cada una de ellas distintas miradas para analizar los parámetros, por ejemplo, el uso de gráficas ayuda a encontrar regularidades, apreciaciones y estructuras del concepto matemático. Duval (1999) clasifica los diferentes tipos de representación y en este proceso, centra su atención en las representaciones conscientes, que son aquellas que se presentan de forma intencional y cumplen una función de objetivación. Este tipo de representaciones permite darle significado a los objetos que observa el sujeto y a la postre la posibilidad de tomar consciencia de lo observado.

4.3.2.2. Propósitos de la actividad

- Que el estudiante pueda transitar entre las dos formas de representación del lanzamiento de dardos.
- Vencer algunas creencias erróneas con relación al lanzamiento de dardos.
- Avanzar en los niveles de razonamiento probabilístico, más específicamente superar el nivel de determinismo- físico.

Para cumplir el propósito, la hoja de trabajo se apoya en dos sistemas de representación: una tabla, y un modelo del tablero de tiro al blanco. Esto con el fin de evidenciar la situación (azarosa en este caso) desde distintas representaciones. También cuestiona al estudiante constantemente sobre la situación, buscando en su razonamiento, un proceso en el que impere los argumentos probabilísticos.

4.3.2.3. Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo se aplicó en un tiempo de una hora-clase es decir 45 minutos en total, la solución de la hoja de trabajo se realizó de manera individual en el salón de clase con uso de la tecnología computacional y la herramienta GeoGebra.

En general la hoja de trabajo contiene instrucciones al inicio y una descripción de lo que se encontraran los estudiantes al abrir en GeoGebra el archivo “Tiro al blanco”, además esta hoja

tiene dos partes, con preguntas en su mayoría abiertas y una pregunta (tomada del diagnóstico) de opción múltiple con única respuesta; cada pregunta dispone de un espacio en blanco para justificar.

Vale la pena mencionar que la actividad por sí misma no garantiza la consecución de los propósitos establecidos, se hace necesario establecer una dinámica de clase en que los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje, además se trata de guiar al estudiante por la hoja de trabajo y el diseño de GeoGebra.

4.3.2.4. Análisis de resultados

El análisis de los datos recolectados se hace simultáneamente desde dos perspectivas, cuantitativa y cualitativamente. Los datos recabados son presentados en una tabla la cual nos brindara información de los niveles de razonamiento probabilístico de los estudiantes.

4.3.2.4.1. Análisis cuantitativo

A continuación, se presenta una tabla que captura las respuestas de los estudiantes, de forma cuantitativa. Si la pregunta es correcta se calificaba con 1 punto; si era incorrecta con 0 puntos.

Tabla 10: Análisis cuantitativo hoja de trabajo #2.

Pregunta Estudiante	a ₁	b ₁	c ₁	d ₁	a ₂	b ₂	c ₂	Total	Porcentaje
1	1	1	1	0	0	0	1	4	0,5714
2	1	0	1	1	1	1	1	6	0,8571
3	1	1	1	1	1	1	1	7	1,0000
4	1	0	1	1	1	1	1	6	0,8571
5	1	1	1	1	0	1	1	6	0,8571
6	1	1	1	1	1	1	1	7	1,0000
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1,0000
8	1	1	1	1	1	1	1	7	1,0000
9	1	1	1	1	1	0	0	5	0,7143
10	1	1	1	1	1	1	1	7	1,0000
11	1	0	1	0	0	1	0	3	0,4286
12	1	1	1	1	0	1	0	5	0,7143
13	1	1	1	1	1	1	1	7	1,0000
14	1	1	1	1	1	1	0	6	0,8571
15	1	1	1	0	1	1	1	6	0,8571
16	0	1	1	1	0	1	0	4	0,5714
Total	15	13	16	13	11	14	11		
	Promedio	0,8304		Desviación estándar	0,1823		Coeficiente de variación	21,9594	

Las preguntas a₁, b₁, c₁, d₁ corresponden a la primera parte de la prueba; las preguntas a₂, b₂, c₂ a la segunda.

La media del grupo es 0,8304 en una escala de 0 a 1. Esta medida de posición nos indica que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes es del 83,04%.

El valor de la desviación estándar es 0,1823. Esto indica que el nivel de desempeño, en su mayoría está a 0,1823 puntos de la media (0,8304) en una escala de 0 a 1.

El coeficiente de variación permite medir la dispersión en forma de porcentaje. Esta medida de dispersión representa la desviación típica respecto a la media (Hueso y Cascant, 2012). Para las medidas de la tabla el coeficiente es 21,9594% lo que indica una baja dispersión en la calificación del desempeño del sujeto. Por tanto, concluimos que el grupo es homogéneo.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de respuestas correctas de la hoja de trabajo #2

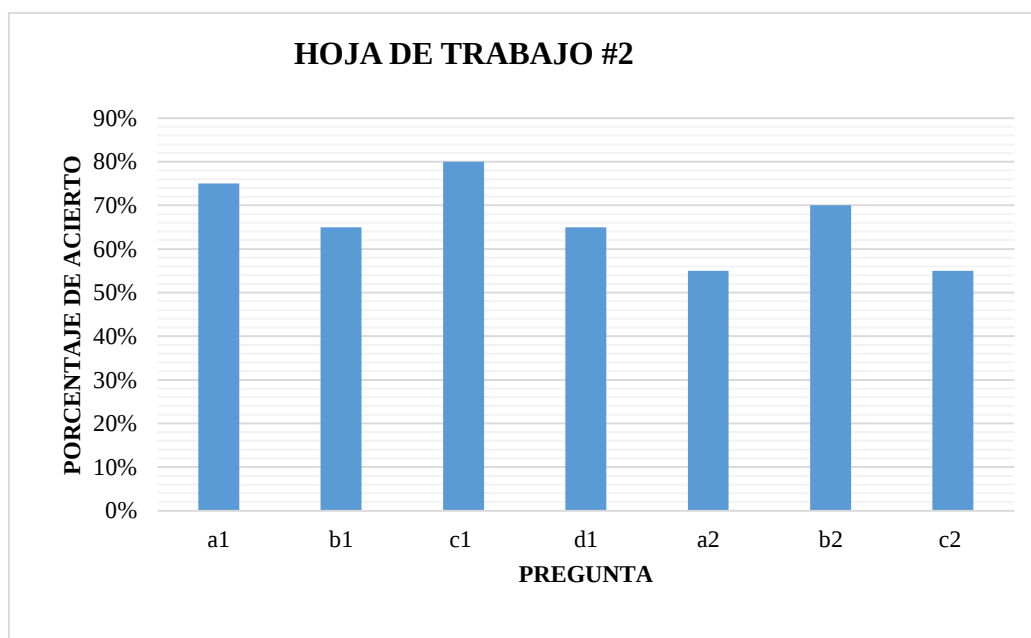


Ilustración 19: Porcentaje de respuestas correctas hoja de trabajo #2.

En forma general se observa:

- Todas las preguntas poseen un acierto mayor o igual al 50%
- La pregunta c₁ obtuvo el mayor acierto, superior al 79%

- La pregunta a_2 obtuvo el menor acierto.
- Las preguntas b_1 y d_1 tienen igual porcentaje de acierto.
- La pregunta a_2 corresponde a la pregunta 7 de la prueba diagnóstico, y obtuvo un porcentaje de acierto igual al 55%. Al compararlo con el 10% de la prueba diagnóstico, se puede notar un gran aumento en la producción de los estudiantes en la hoja de trabajo.

4.3.1.4.2. Análisis cualitativo

A continuación, se presenta la clasificación del rendimiento de los estudiantes frente a la hoja de trabajo #2

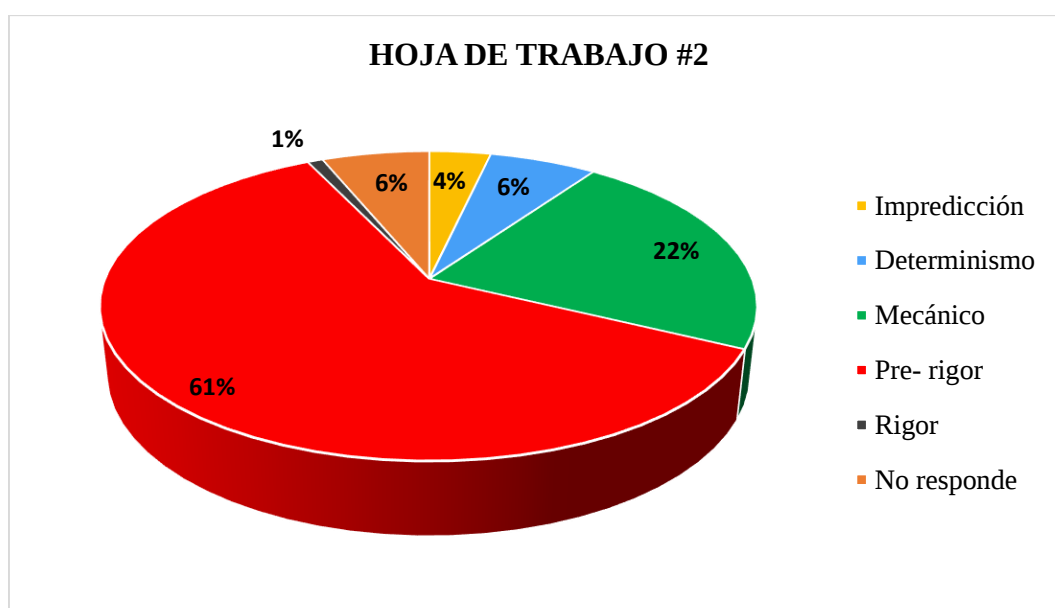


Ilustración 20: Rendimiento de los estudiantes hoja de trabajo #2.

Se puede apreciar que el nivel de pre- rigor impera en las respuestas con un porcentaje de 61%; le sigue el nivel mecánico con un 22%; luego determinismo y No responde con un 6%; seguido de impredicción con 4%; y por último el nivel de rigor con 1%. Los datos reflejados muestran una mejoría en los niveles de razonamiento probabilístico con respecto al diagnóstico.

La gráfica anterior brindaba información global de los resultados, pero para mayor precisión se presenta la siguiente tabla que presenta la clasificación de las ocho preguntas, en los niveles de razonamiento ya mencionados a lo largo del capítulo.

Tabla 11: Análisis cualitativo hoja de trabajo #2.

	Niveles de razonamiento probabilístico							
Pregunta (Número)	Impredicción	Determinismo			Mecánico	Pre- rigor	Rigor	No responde
		Física	Empírica	Mítico/mágicas				
a1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	75,00%	25,00%	0,00%	0,00%
b1	0,00%	6,25%	0,00%	0,00%	0,00%	75,00%	0,00%	18,75%
c1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	68,75%	31,25%	0,00%	0,00%
d1	6,25%	6,25%	6,25%	0,00%	0,00%	75,00%	0,00%	6,25%
a2	18,75%	0,00%	0,00%	0,00%	6,25%	62,50%	0,00%	12,50%
b2	0,00%	18,75%	0,00%	0,00%	6,25%	75,00%	0,00%	0,00%
c2	0,00%	6,25%	0,00%	0,00%	0,00%	81,25%	6,25%	6,25%

Al analizar la tabla se concluye:

- Las preguntas b₁, d₁, b₂ y c₂ superan el 70% en el nivel de pre- rigor.
- La pregunta b₁ fue la menos respondida, con un 18,75%
- El nivel de rigor solamente se alcanza en las preguntas c₂, pero con un bajo porcentaje de 6,25%.
- Aún persiste el nivel de impredicción y determinismo, pero con un bajo porcentaje. Lo anterior se evidencia en las preguntas b₁, d₁, a₂, b₂, y c₂; cada una con un porcentaje de 6,25%, 12,5%, 18,75%, 18,75%, y 6,25% respectivamente.

Ahora se presenta un análisis más detallado de la hoja de trabajo. Para ello, se escogieron algunas respuestas y se hace una descripción basado en los niveles de razonamiento probabilístico. Veamos:

Primera parte

1. Realiza 100, 2000, 5000, 10000 “número disparos”, en cada caso observa el tablero, la tabla y responde las siguientes preguntas:

a) Escribe para cada caso la Zona donde caen más disparos.

100 - (caen más disparos) en la zona 6
 500 - caen más disparos en la zona 5
 2000 - En la zona 5 caen más

En esta pregunta, se buscaba que el sujeto tuviese una primera conclusión basada en la exploración de la construcción. La respuesta muestra una progresión de lanzamientos vs zona de más incidencia de disparos, para 100 lanzamientos la zona 6; para 500 la zona 5; para 2000 la zona 5. Sin embargo, no se evidencia una apropiación de lo registrado en la respuesta, sino una transcripción basada en la exploración que no muestra un entendimiento. Se esperaba que concluyera, que la zona 5 es donde más inciden los lanzamientos. Por lo anterior, se clasifica la producción del sujeto como razonamiento probabilístico mecánico.

b) ¿Existen Zonas donde caen mayor número de disparos que otras? Sí ~~No~~ ____

La zona 5 fue la zona donde cayo mas veces porque es una zona que tiene bastante espacio y hay mas probabilidad de caer hay

Su argumento se asienta en la visualización del fenómeno, en la cual puede distinguir que hay zonas con mayor acierto que otras, en este caso la zona 5. Luego, asocia la idea de área con la zona de acierto, tal idea se puede considerar fuera del determinismo, pues la idea de espacio es derivada de un proceso de razonamiento donde considera que la zona 5 es donde más veces caen los dardos, según lo observado en la tabla y en el tablero de lanzamientos. De tal forma, que la producción de este sujeto se clasifica como pre- rigor.

- c) De acuerdo con el tablero, completa la tabla escribiendo que Zonas tienen mayor número de disparos

Zona 1	30
Zona 2	158
Zona 3	324
Zona 4	444
Zona 5	638
Zona 6	406

En esta pregunta se buscaba que el sujeto contara zona por zona los aciertos de dardos, pero en esta respuesta observa que el estudiante utilizó la tabla de acierto y traspaso la información a la tabla de la respuesta c. Para responder de forma sencilla, era necesario pocos lanzamientos en la barra de entrada, de tal forma que se facilitara el conteo de aciertos en cada zona, pero este sujeto realizó 2320 lanzamientos, lo cual, por supuesto, le iba a acarrear gran dificultad para contar. Ahora bien, se puede pensar que hubo un puente entre sistemas de representación (tabular y gráfico) y el sujeto entendió que ambos sistemas representan lo mismo. Pensando que fue así, entonces, el nivel de producción del sujeto se clasifica como razonamiento de pre-rigor, de lo contrario, se encuentra en el razonamiento mecánico, donde el sujeto no muestra que haya entendido el problema.

- d) ¿Si tuvieras que jugar, donde crees que caerán la mayoría de tus disparos?

En la zona numero 5 tiene mas probabilidad

La pregunta tiene un condimento especial, ya que ataca la creencia del sujeto ante el evento probabilístico. La respuesta se basa en decir que la zona 5 tiene más “probabilidad”, luego se observa un argumento alejado del pensamiento físico, empírico, y mágico. No hace explícito porque la zona 5 tiene mayor probabilidad, pero podemos inferir que tal respuesta se basa en la exploración y en las preguntas anteriores. Así pues, el razonamiento que más se acerca a esta respuesta, es el pre-rigor.

También es menester recalcar el uso del concepto “probabilidad”, parece que el sujeto lo tiene adherido a sus procesos de raciocinio de manera inconsciente, tal vez por su interacción con prácticas donde imperan los fenómenos azarosos, ejemplo: jugar el chance, jugar parques, jugar cartas, etc. Y la hoja de trabajo saco a flote el conocimiento del concepto probabilidad, que para este caso se puede entender como un significado intuitivo según Batanero.

De acuerdo con las observaciones si el dardo cayó en el tablero, la probabilidad de que haya caído en la zona E fue

- A. Igual que la probabilidad de que haya caído en la zona F o en la H.
- ☒ B. Mayor que la probabilidad de que haya caído en la zona G o en la H.
- C. Igual que la probabilidad de que haya caído en la zona H.
- D. Menor que la probabilidad de que haya caído en la zona.
- E. No sé.

porque la zona E tiene un area mas grande que la zona G y H

- b) Según lo observado en la parte uno y teniendo en cuenta la pregunta anterior, si usted se encuentra jugando tiro al arco, ¿considera que es pertinente apostar que su tiro acierte a la zona más grande o a la zona más pequeña del tablero? ¿en qué zona es más probable que acierte su tiro?

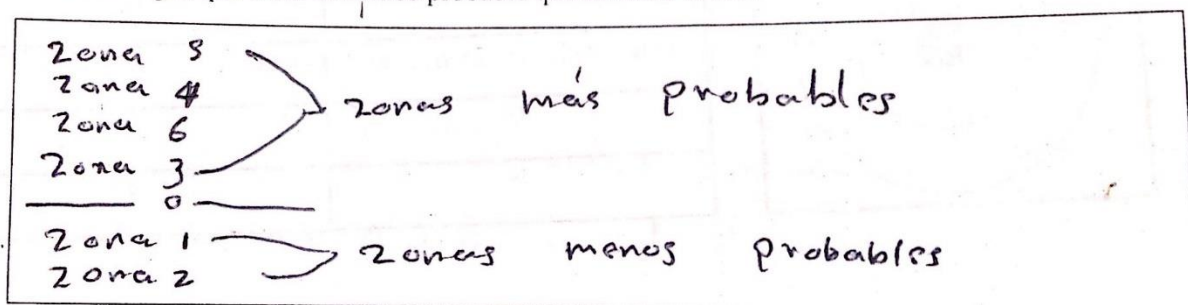
En la zona mas grande hay más probabilidad que caiga o en la siguiente zona un poquito mas pequeña

El argumento se basa en condiciones físicas del tablero de dardos, pero es derivado de la exploración en GeoGebra (¿por qué?). Cuando los estudiantes simulaban 1000, 2000, 5000, y 10000 lanzamientos, la mayoría (colocar el porcentaje de acierto de la pregunta asociada) coincidía que en la zona 5 era el lugar donde más veces incidían los dardos, luego asociaban el

discernimiento anterior con la idea del área de cada zona. Así que la zona 5 era la zona donde más caían los dardos y a su vez la zona de mayor área, luego la zona 4, zona 3, etc, en una relación lineal.

Por lo anterior, se puede pensar en una producción del sujeto asociada al nivel de pre-rigor, pues ya reconoce ciertas regularidades del problema y esto le permite concluir de forma correcta, pero sin usar un procedimiento matemático.

- c) En el juego de tiro al arco se realizan una cantidad determinada de lanzamientos, se tienen las opciones de caer en la zona 1, 2, 3, 4, 5, 6 ¿en qué zonas es más probable que aciertes el tiro? ¿en qué zona es menos probable que aciertes el tiro?



El sujeto realiza un diagrama para identificar las zonas más probables de tiro al blanco. El diagrama muestra que las zonas 5, 4, 6 y 3 tienen mayor probabilidad de acierto, al contrario de 1 y 2. Lo anterior permite evidenciar una representación gráfica del problema, la cual clasifica las zonas de tiro al blanco. En este caso el estudiante alcanza el nivel de pre-rigor, pues argumenta a través de algunos conceptos asociados con probabilidad, pero aún no utilizó un procedimiento formal y/o matemático.

4.3.3. Hoja de trabajo #3

4.3.3.1. Presentación de la actividad

En esta hoja de trabajo (Anexo 4) se plantean una serie de preguntas que realizarán los estudiantes interactuando con un diseño elaborado en GeoGebra llamado “Chincheta” el cual simula varias cantidades (50.000, 100.000, 200.000, 500.000) de lanzamientos de una chincheta, cada cantidad es escrita en una casilla de entrada y con un botón (lanzar) se simulan los lanzamientos. En la primera parte se esperaba que los estudiantes centraran su atención en la

gráfica de barras e identificaran que barra es más alta y más baja, llegando a entender que entre más lanzamientos se realizan las barras tendrán la misma altura, representando un 50% de probabilidad en cada caso (ley de los grandes números).

La segunda parte de la hoja de trabajo se realiza con ayuda del mismo diseño elaborado en GeoGebra, en esta parte los estudiantes deben centrar su atención en la tabla, se realizan de nuevo la cantidad de lanzamientos de la primera parte y se espera que los estudiantes observen que sucede en cada lanzamiento, además se pretende que el estudiante analice que sucede con el porcentaje cuando se realizan 500.000 lanzamientos.

En la tercera parte de la hoja de trabajo se espera que el estudiante relacione los tipos de representaciones (tabla, gráficas), y de la misma manera que en las hojas de trabajo pasadas, se les elabora la misma pregunta en la cual tuvieron fallas a la hora de resolver el diagnostico con el objetivo de poder realizar una comparación del antes y después de la intervención tecnológica con la herramienta GeoGebra.

Para que el lector tenga una idea del diseño que apoya la hoja de trabajo# 3 se presenta la siguiente imagen que es lo que se encuentran los estudiantes en la herramienta GeoGebra.

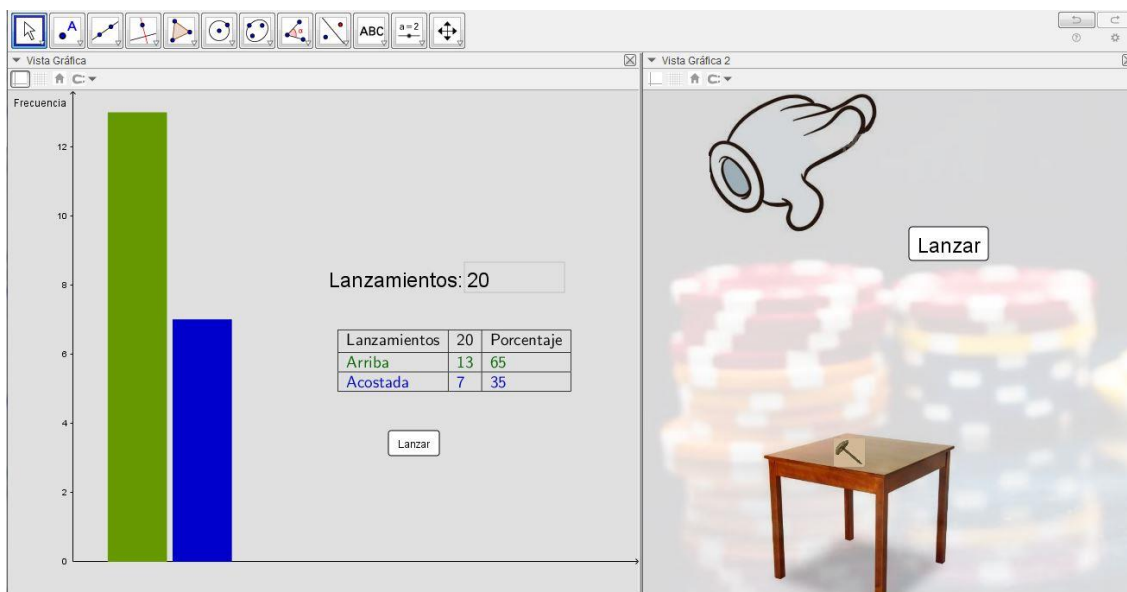


Ilustración 21: Diseño #3. Nota: elaboración propia.

4.3.3.2. Propósitos de la actividad

- Que el estudiante pueda transitar entre las dos formas de representación del lanzamiento de la chincheta.
- Vencer algunas creencias erróneas en relación con el lanzamiento de una chincheta.
- Avanzar en los niveles de razonamiento probabilístico, más específicamente superar el nivel de determinismo- físico.
- Sembrar en el razonamiento del estudiante (de forma indirecta) la ley de los grandes números.

Para cumplir el propósito, la hoja de trabajo se apoya en tres sistemas de representación: una tabla, un gráfico de barras, y una construcción que simula el lanzamiento de una chincheta. Esto con el fin de evidenciar la situación (azarosa en este caso) desde distintas representaciones. También cuestiona al estudiante constantemente sobre la situación, buscando en su razonamiento, un proceso en el que impere los argumentos probabilísticos. Por último, la construcción en GeoGebra permite simular más de cien mil lanzamientos de la chincheta, lo cual es una condición necesaria para que el sujeto entienda la equiprobabilidad de los sucesos, a mayor número de veces realizado.

4.3.3.3. Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo se aplicó en un tiempo de una hora-clase es decir 45 minutos en total, el mismo día que se aplicó la hoja de trabajo #2; la solución de la hoja de trabajo se realizó de manera individual en el salón de clase con uso de la tecnología computacional y la herramienta GeoGebra.

En general la hoja de trabajo contiene instrucciones al inicio y una descripción de lo que se encontraran los estudiantes al abrir en GeoGebra el archivo “Chincheta”, además esta hoja tiene tres partes, con preguntas en su mayoría abiertas y una pregunta (tomada del diagnóstico); cada pregunta dispone de un espacio en blanco para justificar.

Vale la pena mencionar que la actividad por sí misma no garantiza la consecución de los propósitos establecidos, se hace necesario establecer una dinámica de clase en que los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje, además se trata de guiar al estudiante por la hoja de trabajo y el diseño de GeoGebra.

Cabe mencionar que esta situación se desarrolla dentro de un contexto hipotético como lo mencionan (Barrera y Santos, 2002).

4.3.3.4. Análisis de resultados

4.3.3.4.1. Análisis cuantitativo

A continuación, se presenta una tabla que captura las respuestas de los estudiantes, de forma cuantitativa. Si la pregunta es correcta se calificaba con 1 punto; si era incorrecta con 0 puntos.

Tabla 12: Análisis cuantitativo hoja de trabajo #3.

Pregunta Estudiante	a ₁	b ₁	c ₁	a ₂	b ₂	a ₃	b ₃	Total	Porcentaje
1	1	0	1	1	1	1	0	5	0,71429
2	1	1	1	0	1	0	1	5	0,71429
3	1	1	1	1	1	1	1	7	1,00000
4	1	0	0	0	0	2	1	4	0,57143
5	0	1	0	0	1	1	0	3	0,42857
6	0	1	0	0	0	0	0	1	0,14286
7	0	1	0	0	1	0	0	2	0,28571
8	0	1	0	0	1	0	0	2	0,28571
9	0	1	0	1	0	0	1	3	0,42857
10	1	1	0	1	1	1	1	6	0,85714
11	1	1	1	1	1	1	1	7	1,00000
12	1	1	0	0	0	1	0	3	0,42857
13	0	1	0	1	1	0	0	3	0,42857
14	1	1	1	1	1	1	0	6	0,85714
15	1	1	1	1	1	1	0	6	0,85714
Total	9	13	6	8	11	10	6		
	Promedio	0,6000		Desviación estándar	0,2764		Coefficiente de variación	46,0630	

Las preguntas a₁, b₁, c₁ corresponden a la primera parte de la prueba; las preguntas a₂, b₂, c₂ a la segunda; y las a₃, b₃ a la tercera parte.

La media del grupo es 0,6000 en una escala de 0 a 1. Esta medida de posición nos indica que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes es del 60,00%.

El valor de la desviación estándar es 0,2764. Esto indica que el nivel de desempeño, en su mayoría está a 0,2764 puntos de la media (0,8304) en una escala de 0 a 1.

El coeficiente de variación permite medir la dispersión en forma de porcentaje. Esta medida de dispersión representa la desviación típica respecto a la media (Hueso y Cascant, 2012). Para las medidas de la tabla el coeficiente es 46,0630% lo que indica una dispersión media, por debajo del 50,00% en la calificación del desempeño del sujeto. Por tanto, se podría pensar que el grupo es más o menos homogéneo.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de respuestas correctas de la hoja de trabajo #3

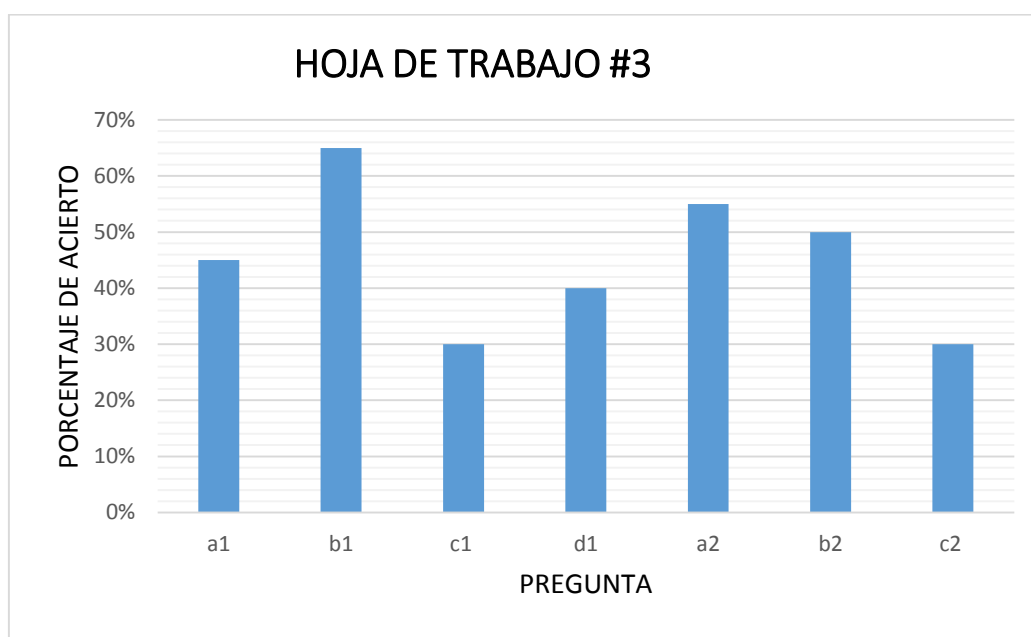


Ilustración 22: Porcentaje de respuestas correctas hoja de trabajo #3.

En forma general se observa:

- Todas las preguntas poseen un acierto mayor o igual al 30%
- La pregunta b₁ obtuvo el mayor acierto, superior al 60%
- La pregunta c₁ y c₂ obtuvieron el menor acierto.
- Las preguntas c₁ y c₂ tienen igual porcentaje de acierto.

4.3.3.4.2. Análisis cualitativo

A continuación, se presenta la clasificación del rendimiento de los estudiantes frente a la hoja de trabajo #3

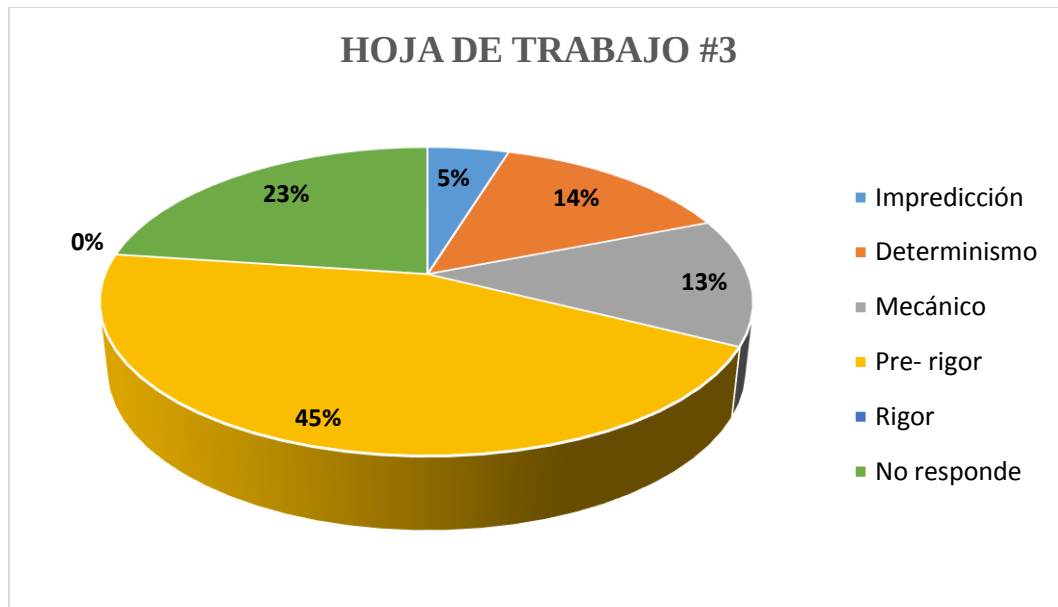


Ilustración 23: Rendimiento de los estudiantes hoja de trabajo #3.

Se puede apreciar que el nivel de pre- rigor impera en las respuestas con un porcentaje de 45%; le sigue No responde con un 23%; luego determinismo con 14%; seguido del nivel mecánico con 13%; determinismo 5% y por último el nivel de rigor con un 0%. Los datos reflejados muestran una mejoría en los niveles de razonamiento probabilístico con respecto al diagnóstico.

La gráfica anterior brindaba información global de los resultados, pero para mayor precisión se presenta la siguiente tabla que presenta la clasificación de las ocho preguntas, en los niveles de razonamiento ya mencionados a lo largo del capítulo.

Tabla 13: Análisis cualitativo hoja de trabajo #3.

Pregunta (Número)	Impredicción	Determinismo			Mecánico	Pre- rigor	Rigor	No responde
		Física	Empírica	Mítico/mágicas				
a1	6,25%	6,25%	0,00%	0,00%	37,50%	18,75%	0,00%	25,00%
b1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	6,25%	75,00%	0,00%	12,50%
c1	6,25%	0,00%	50,00%	0,00%	0,00%	31,25%	0,00%	6,25%
d1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	25,00%	31,25%	0,00%	37,50%
a2	0,00%	0,00%	12,50%	0,00%	12,50%	50,00%	0,00%	18,75%
b2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	6,25%	50,00%	0,00%	37,50%
c2	18,75%	12,50%	6,25%	6,25%	0,00%	37,50%	0,00%	12,50%

Al analizar la tabla se concluye:

- La pregunta b_1 , supera el 70% en el nivel de pre-rigor.
- La pregunta d_1 , b_2 fueron las menos respondidas, con un 37,50%
- El nivel mecánico está presente en las preguntas a_1 , b_1 , d_1 , a_2 , b_2 , c_2 con 37,50%, 6,25%, 25%, 12,50% y 6,25% respectivamente.
- Aún persiste el nivel de impredeción y determinismo, pero con un bajo porcentaje. Lo anterior se evidencia en las preguntas a_1 con 6,25% en impredeción y 6,25% en determinismo (física), c_1 con 6,25% en impredeción y determinismo (empírico) con un 50%, a_2 con un 12,50% en determinismo (empírico) y c_2 con 18,75% en impredeción, 12,50% en determinismo (físico), 6,25% en determinismo (empírico y mítico/mágicas).

Ahora se presenta un análisis más detallado de la hoja de trabajo. Para ello, se escogieron algunas respuestas y se hace una descripción basado en los niveles de razonamiento probabilístico. Veamos:

1. Realiza varios lanzamientos y observa que sucede
2. Realiza los siguientes lanzamientos: 50.000, 100.000, 200.000, 500.000, en cada caso observa la zona de grafica de barras y contesta:

a) ¿Qué barra es más alta y más baja? Explique en cada caso.

de echo no hay una barra que sea mayor que el otro
la probabilidad es de un 50%.

Luego de realizar varios lanzamientos, el estudiante logra generalizar lo observado dando como resultado, su interpretación de un 50% de probabilidad para que la chincheta caiga ya sea de cabeza o acostada; esto permite observar que el nivel de producción del estudiante se encuentra en el pre-rigor donde el estudiante logra alejarse del pensamiento de impredeción e igualmente del nivel determinístico, puede notarse que el estudiante a pesar de no haber tenido un curso de probabilidad logra dar argumentos matemáticos aun poco maduros pero más adecuados a la hora de responder la pregunta planteada. Por otra parte, los diferentes tipos de representación a partir del diseño de GeoGebra lograron como lo definen Barrera y Santos (2002) propiciar una actividad matemática

donde se distingan diferentes miradas para analizar la pregunta y de esta forma el estudiante visualizo y encontró regularidades en las estructuras de los conceptos matemáticos.

b) ¿Qué ocurre con el tamaño de las barras a medida que el número de lanzamientos es mayor?

Se parecen mucho los resultados es muy poca la diferencia

Luego de hacer varios lanzamientos, el sujeto determina que las barras no tienen diferencia. Por tanto, hay una generalización de la situación, que le permite razonar que no hay diferencia entre la chincheta de cabeza o acostada. Lo anterior es un razonamiento encasillado en el nivel de pre-rigor, donde se manejan algunos conceptos de probabilidad, por ejemplo, los casos totales, los casos a favor, y la equiprobabilidad.

c) ¿Si te encontraras apostando con un amigo al tirar la chincheta, que opción escogerías para ganar, arriba o acostada?

por cualquiera porque los porcentajes son iguales

Esta respuesta revela un gran avance en el razonamiento del sujeto frente a la situación azarosa, pues no se vale de argumentos deterministas, como la suerte o las propiedades físicas del objeto. Por el contrario, usa un argumento matemático que avala su respuesta (los porcentajes de la tabla), y es consiente que la chincheta tiene igual probabilidad de caer arriba, que acostada, aunque faltaría mencionar que la equiprobabilidad se aprecia mejor cuando el número de lanzamientos es muy grande. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede evidenciar un nivel de razonamiento apoyado en el pre-rigor. También es importante destacar el uso de la representación tabular para justificar la respuesta, la cual, sin duda fue de gran importancia para el discernimiento del problema.

Segunda parte

3. Nuevamente realiza los siguientes lanzamientos 50.000, 100.000, 200.000, 500.000, en cada caso observe la tabla y conteste los siguientes puntos.

a) Describe las cosas que viste en la tabla en cada uno de los lanzamientos realizados

Cada vez que tiro hago mayor porcentaje
Arriba pero a medida que sigue tirando
se van pareciendo los resultados

En un principio el porcentaje era mayor para la chincheta arriba y cuando aumentaron los lanzamientos los resultados se parecen más, esta fue la idea expresada por el sujeto. La anterior es una reflexión adherida al nivel de pre- rigor, donde el sujeto usa conceptos matemáticos (los porcentajes de la tabla) para justificar su respuesta. Además, entiende la ley de los grandes números ya que menciona el aumento de lanzamientos como causa de la nivelación de los porcentajes.

b) ¿Qué porcentaje es mayor al realizar 500.000 tiros? Explique.

El mayor porcentaje es arriba con un 50.03%
Sinceramente no sé, porque sigo pensando que acostado
tiene mas porcentaje de caer

Hay que poner la mirada en lo subrayado: “no sé, porque sigo pensando (...)”. Las palabras subrayadas reflejan las creencias que el sujeto tienen consigo en el momento de pensar los efectos de una situación azarosa. Es claro que maneja un significado intuitivo de probabilidad (Batanero, 2006) y así mismo un razonamiento determinista- empírico, pues su experiencia ha sembrado una cierta creencia que le hace pensar que la chincheta tiene mayor probabilidad de caer acostada, y no permite que crea en lo que el sistema de representación tabular le presenta ante sus ojos. Es como si se negara a aceptar lo tangible y se negara a renunciar a las creencias que su mente a construido, pero por lo menos hay sembrada una duda en sus procesos de raciocinio.

Tercera parte

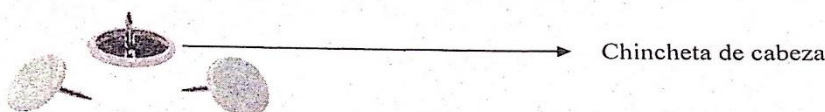
4. Teniendo en cuenta la primera y segunda parte conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aspecto tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

La barra nos hace ver cual es el porcentaje de las chinchetas con un simple dibujo, y la tabla hace lo mismo pero sin dibujo.

Esta pregunta tenía por propósito excavar sobre el manejo del sujeto frente a dos representaciones de la situación. En este caso, el sujeto ha entendido que la representación tabular, y la representación gráfica son dos formas diferentes de apreciar los porcentajes de la chincheta para arriba y acostada. Pero también se puede clasificar la producción del sujeto en el nivel de pre-rigor, porque identifica la relación que persiste entre lo presentado en la gráfica y en la tabla, esto demuestra que en su estructura mental aflora el razonamiento matemático.

b) Una persona deja caer una chincheta. ¿La probabilidad que la chincheta caiga de Cabeza es igual a que caiga de costado?



La probabilidad va ser la misma porque por lo que es igual de probable que caiga acostada a que caiga hacia arriba.

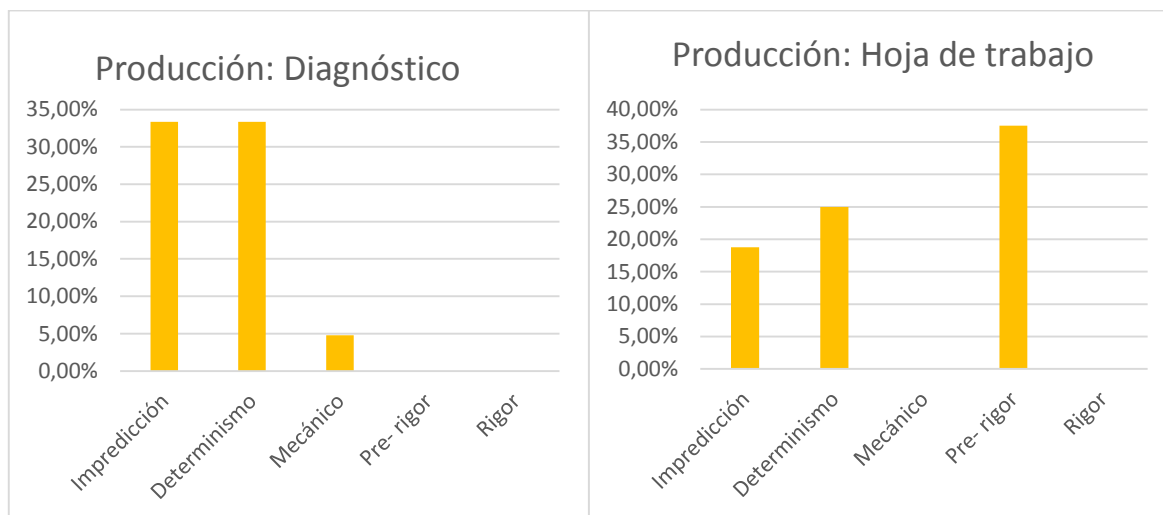
Ahora, al revisar en detalle la respuesta del sujeto se evidencia un razonamiento de pre-rigor, porque responde de manera correcta y usa el argumento de equiprobabilidad, tal vez basado en las preguntas anteriores, la exploración de GeoGebra, y por supuesto las representaciones en forma tabular y gráfica de la situación.

Como en todas las hojas de trabajo, siempre se presentó una de las preguntas del diagnóstico, con el fin de comparar los resultados. En el diagnóstico el 33,33%, el 33,32%, y el 4,76% se encontraban en los niveles de impredeción, determinismo, y mecánico, respectivamente. Lo cual

indicaba que la más del 70% de estudiantes no lograban predecir lo que pasaba con la chincheta, o argumentaban a partir de creencias.

Al revisar la tabla #17 se encuentra que hay un avance, pues el 37,50% de la producción del sujeto, se encuentra en el nivel de pre- rigor; el 19% en determinismo; y el 18,75% en impredeción. Para visualizar mejor, se presenta la siguiente gráfica:

Tabla 14: Comparación de la Producción entre diagnóstico y hoja de trabajo.



Se puede ver una mejoría, aunque aún persiste el determinismo y la impredeción.

Capítulo 5: Conclusiones y sugerencias

Al inicio del presente trabajo de grado se plantearon una serie de preguntas y objetivos que sirvieron de directrices y de interés, al momento de diseñar e implementar actividades encaminadas a determinar como a través de la mediación computacional de Geogebra se lograba el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes del grado noveno. Precisamente en este capítulo se dará respuesta a las preguntas planteadas que sirvieron de directriz en este trabajo.

Por otro lado, además de responder las preguntas del trabajo de grado, se presentan algunas sugerencias pertinentes para futuras investigaciones y se darán consideraciones finales a manera de reflexión o conclusión.

5.1. Respuestas a las preguntas del trabajo

En el capítulo 1 del presente trabajo (Ítem 1.5) se propusieron tres preguntas auxiliares y una pregunta central que sirvieron de guía y parámetro para el avance del trabajo de grado. A continuación, se responde a cada una de ellas.

5.1.1. Respuesta a la pregunta central

La pregunta central es la siguiente:

¿Qué impacto (importancia) tiene el uso de mediación computacional de GeoGebra, en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes del grado noveno?

El impacto que se produce al usar GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico es considerablemente favorable. Pues los resultados en la prueba diagnóstica, en la cual no hubo intervención tecnológica, comparados con los encontrados en las tres hojas de trabajo, donde si hubo intervención tecnológica (GeoGebra) son desfavorables en el primer caso y muestran una mejoría en el segundo. Si nos remitimos a la parte cuantitativa, en el diagnóstico el promedio de respuestas correctas es de 0,2078, bajo por demás. Mientras que, en las tres hojas de trabajo el promedio fue 0.78, 0.8304 y 0.60 en orden de hoja. Se puede arriesgar a afirmar que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes pasó de 0,2078 a 0,7638 y el factor principal de este cambio fue el uso de GeoGebra. Esta mejoría debe acarrear un avance en los niveles de razonamiento probabilístico, debido al diseño de las hojas de trabajo.

Aunque se debe guardar cordura frente a la afirmación anterior, ya que la prueba diagnóstica tiene una configuración diferente a las hojas de trabajo, pero permite definir un parámetro.

Si se observa la parte cualitativa, ocurre un fenómeno similar al análisis cuantitativo; hay un avance en los niveles de razonamiento probabilístico. Lo que se refleja en los argumentos que presentaban los estudiantes en el diagnóstico frente a los argumentos en las hojas de trabajo

Sumado a lo dicho en los párrafos anteriores, también se observa una mejoría en la comparación directa que se realiza de una pregunta puntual del diagnóstico respecto de la última pregunta de cada hoja de trabajo. Esa mejoría solo es posible si hay un planteamiento diferente en la forma que se afronta la situación azarosa. Se observan justificaciones de nivel mecánico en adelante. (En el análisis debe estar presente una justificación que respalde el uso de GeoGebra para el avance en los niveles de razonamiento).

Por último, mencionar que el uso de GeoGebra es una herramienta de gran valor en el proceso de enseñanza- aprendizaje. Precisamente tomando en cuenta el enorme potencial de las computadoras y GeoGebra, en el presente trabajo de grado se promovió su uso sistemático para desarrollar el pensamiento probabilístico de los estudiantes de noveno grado, Entre las ventajas de utilizar la tecnología computacional se encontraron los siguientes resultados:

- a)** El uso sistemático de GeoGebra como herramienta computacional, permite confrontar las ideas previas de los estudiantes en torno al concepto de probabilidad, con los resultados de explorar los diseños en GeoGebra. Para Benítez (2006) las herramientas tecnológicas ofrecen un potencial que ayuda a los estudiantes, en la discusión de ideas matemáticas y la construcción de conceptos. Lo anterior se evidenció en cada una de las hojas de trabajo.
- b)** La asombrosa capacidad de cálculo de los diseños presentados en GeoGebra permite hacer una elevada cantidad de simulaciones de lanzamientos o disparos, que pueden ser configurados por los estudiantes con tan solo colocar un número y dar “Enter” o poner una cantidad de lanzamientos en el recuadro indicado. Esto permite una aproximación a la probabilidad clásica y teoría de los grandes números, a partir de la probabilidad frecuencial. Esta ventaja de los recursos tecnológicos presentados en GeoGebra disminuye la persistencia de creencias (mítico/mágicas) erróneas que se verían favorecidas cuando se presentan fenómenos aleatorios con un número reducido de simulaciones, un ejemplo claro de esta ventaja es la hoja de trabajo de la “Chincheta”.
- c)** El uso de los diseños elaborados en GeoGebra favorece el empleo de diferentes tipos de representación de los fenómenos probabilísticos, como son: tabular y el gráfico de barras, con lo que se da realismo al fenómeno azaroso, y además les permite a los estudiantes

visualizar un mismo concepto desde diversas perspectivas. Adicionalmente para Barrera y Santos (2002) las múltiples representaciones permiten que los estudiantes visualicen y encuentren regularidades en las estructuras de los conceptos matemáticos.

- d) La simulación de fenómenos probabilísticos por medio de GeoGebra permite un acercamiento lúdico, y por lo tanto amable, a la resolución de problemas de probabilidad. A su vez las simulaciones permiten el paso del concepto informal al formal.

5.1.2. Respuestas a las preguntas auxiliares

De la pregunta central principal se desprenden algunas preguntas auxiliares que a continuación se mencionan, incluyendo en cada una de ellas la respuesta correspondiente.

5.1.2.1. Respuesta a la primera Pregunta auxiliar

¿Cuáles son las concepciones iniciales que tienen los estudiantes del grado noveno frente a situaciones azarosas donde sobresale el concepto de probabilidad?

Lo primero que se hizo en el trabajo de campo fue identificar en qué nivel de razonamiento probabilístico se encontraba la producción del sujeto. Para llevar a cabo tal clasificación, los sujetos respondieron una encuesta o diagnóstico que contaba con problemas de probabilidad. Luego de un análisis de corte mixto (cuantitativo y cualitativo) se encuentra que la media del grupo fue 20,78% lo que posiblemente derivaría en los niveles más básicos del razonamiento probabilístico; a la postre, fue así.

El análisis cualitativo permite apreciar que los niveles de determinismo, e impredeción imperan en las respuestas con un porcentaje de 50% y 29% respectivamente.

Estos resultados se deben al manejo del significado intuitivo de probabilidad, que según Batanero (2005) va ligado a los juegos de azar, apuestas, la esperanza, la ganancia en un juego y las ideas primitivas que aparecen en civilizaciones cuando de sucesos inciertos se quiere dar alguna explicación, este significado de probabilidad se da tanto en niños como personas que no han estudiado el concepto de probabilidad. La idea anterior se sustenta en que los sujetos no tenían una formación académica en el concepto de probabilidad, pero si tenían algunas experiencias con situaciones azarosas. Situaciones, a las que trataban de encontrarles alguna explicación.

También se deben a la imposibilidad de predecir situaciones de azar, considerar la suerte como factor principal, y pensar que las condiciones físicas determinan la probabilidad que suceda un

evento. Otro factor importante es que los sujetos no consideran los experimentos aleatorios como independientes, y no prevén la equiprobabilidad de sucesos conforme aumenta el número de ensayos. Lo anterior es propio del significado subjetivo, el cual describe la probabilidad como algo basado en las creencias personales y la experiencia de cada persona, de ahí sale como resultado esa probabilidad condicionada por un sistema de conocimientos y puede ser distinto en cada persona (Batanero, 2005).

Asimismo, el significado Laplaciano reclama su lugar en las concepciones iniciales, pues los resultados de la prueba diagnóstica revelaron que el 76% acertaron en la pregunta 1. Esa pregunta obligaba pensar en casos totales y casos a favor, para una respuesta acertada. Aunque, los sujetos nunca utilizaron un algoritmo para encontrar la respuesta; su técnica se basaba en el conteo.

Los factores mencionados en los párrafos anteriores causan un bajo desempeño en la producción de los estudiantes. Y van en dirección de las dimensiones trabajadas por Schoenfeld (1985), en especial el sistema de creencias.

5.1.2.2. Respuesta a la segunda pregunta auxiliar

¿Qué características deben tener las actividades de aprendizaje para promover la resolución de problemas que involucren el concepto de probabilidad?

Las actividades de aprendizaje que promueven la resolución de problemas que involucran el concepto de probabilidad deben tener características como las que serán presentadas a continuación:

- a) Actividades contextualizadas:** según Schoenfeld (1985) la escuela y el salón de clase deben ser una réplica de la cultura propia del estudiante esto debido a la importancia del contexto a la hora de resolver problemas; este contexto debe estar ligado a casos reales o hipotéticos que propicien un conocimiento individual en el proceso de solución, en este caso particular los problemas asociados a la probabilidad deben permitir que el estudiante utilice heurísticas en las actividades, con lo cual estos comuniquen por escrito sus procedimientos de solución y, además los justifiquen.

De este modo, se propicia un acercamiento individual al proceso de solución. Un ejemplo claro es el presentado en la hoja de trabajo #1 haciendo uso de los dados.

También es pertinente el manejo de contextos hipotéticos según (Barrera y Santos, 2002), dichos contextos deben prestar mayor atención en los recursos, las representaciones y las

heurísticas que usan los estudiantes para resolver un problema. En este caso, se puede mencionar la situación del lanzamiento de una chincheta (ver anexo 4), el cual es un contexto hipotético, donde se toma como condición inicial, que la probabilidad que una chincheta caiga para arriba es igual a caer acostada, es decir 50 a 50. Pero la importancia de esta situación radica en las representaciones que contiene la construcción en GeoGebra, y en su respectiva congruencia, de tal manera, que se ayuda al estudiante a construir una heurística para encontrar la solución del problema.

- b) **Actividades que propicien el uso de recursos:** según Penalva, Posadas, y Roig (2010) los recursos son la amalgama de conocimientos matemáticos que posee el estudiante, que pueden servir para la resolución de problemas, en un dominio matemático particular, en este caso particular la probabilidad. Algunas herramientas pueden ser: teoremas y definiciones, perspicacias y conocimientos informales de acuerdo con el dominio del problema, algoritmos, entre otros. Con cada hoja de trabajo y diseño presentado en el presente trabajo los estudiantes deben hacer uso del conocimiento informal debido a que no han tenido un curso formal de probabilidad.
- c) **Actividades con múltiples representaciones:** las múltiples representaciones ofrecen la oportunidad al estudiante de entender un concepto matemático desde diferentes perspectivas; Barrera y Santos (2002) afirman que una actividad matemática debe propiciar tres sistemas de representación: sistemático o uso de tablas, gráfico o visual y algebraico. Cada uno de ellos ofrece distintas miradas para analizar los parámetros, por ejemplo, el uso de gráficas ayuda a encontrar regularidades, con esto se da la oportunidad al estudiante de comunicar en forma oral sus estrategias de solución y argumentar sus procedimientos, igualmente se motiva el análisis de diferentes formas de solución con lo que pueden llegar a encontrar las ventajas y desventajas de las diferentes opciones de respuesta, incluso, es posible visualizar y vincular las diversas formas de representación que surjan en esta fase del trabajo.

Las hojas de trabajo presentadas no solo fomentan el desarrollo de conceptos probabilísticos (significado Laplaciano, combinatoria) sino que a través de las múltiples representaciones incentivan la argumentación, visualización y entendimiento de los procedimientos empleados a la hora de resolver problemas que involucren conceptos probabilísticos.

d) Actividades que hagan uso de la tecnología: el uso de los diseños empleados en GeoGebra es de gran ayuda al momento de resolver problemas que involucren el concepto probabilístico.

Para Benítez (2006) Otra ventaja que ofrece el uso de la tecnología al momento de resolver problemas, en particular con GeoGebra es el desarrollo de diferentes niveles de argumentación que incluyen:

- i. **El reconocimiento visual:** con esta el estudiante puede plantear el problema desde una gráfica hasta una tabulación.
- ii. **La prueba de arrastre:** esta beneficia la verificación de propiedades que se visualizan, en el caso de la probabilidad puede ser el verificar que probabilidad en un suceso es más alta que en otro.
- iii. **La simulación:** se elaboran experimentos como son el juego de dados o incluso la posibilidad de que algún evento suceda.
- iv. **Diferentes representaciones del mismo problema:** conlleva a visualizar la solución de un problema desde diferentes perspectivas que conllevan al mismo resultado.

Además de todo lo anterior, se debe tener en cuenta una formación profesional del educador en torno a las tecnologías de la educación, para que sea garante y pleno formador del razonamiento probabilístico

5.1.2.3. Respuesta de la tercera pregunta auxiliar

¿Cuál es la importancia de las múltiples representaciones del objeto matemático en la solución de problemas de probabilidad?

La importancia de las múltiples representaciones radica en que el estudiante puede emplear diferentes registros para representar el concepto de probabilidad, por ejemplo: registro tabular, grafico, diagramas de árbol, porcentajes y registro algebraico por medio de los algoritmos vinculados al cálculo de probabilidades. En fin, se dispone de una amalgama de representaciones que les permite a los estudiantes resolver problemas que involucren el concepto de probabilidad. Además de explorar diferentes caminos para llegar a la meta, la cual, en este caso, es la solución y entendimiento del problema, para posteriormente encontrar conexiones entre las diferentes representaciones, con lo cual tendría a su disposición diferentes recursos para llegar a una misma respuesta.

Este trabajo incorporó la herramienta tecnológica GeoGebra la cual contribuyó y favoreció la construcción del concepto de probabilidad, a partir de los diferentes sistemas de representación que ofrece esta herramienta cognitiva, favoreciendo los procesos matemáticos descritos en los lineamientos curriculares: resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, el razonamiento, modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Se plantea además que “el uso de la tecnología puede verse desde dos perspectivas: como un amplificador o como un reorganizador de las estructuras cognitivas”. (Benítez ,2006, p.39), respecto a esto, Dörfler (1993) ha señalado:

Si la cognición se ve como una propiedad del individuo, entonces la metáfora de la ampliación es altamente sugestiva, pues son nuestras capacidades cognitivas las que se amplían sin sufrir cambios cualitativos. Pero si vemos la cognición como un sistema funcional que comprende el individuo y todo su entorno físico y social se abre la posibilidad de reconocer que las nuevas herramientas tienen un impacto transformador profundo en la cognición. (p.165)

Por otra parte, se puede afirmar que un estudiante adquiere un concepto de probabilidad cuando es capaz de:

- a) Reconoce, identifica y vincula cada sistema de representación como un mismo ente matemático. Según Schoenfeld (1985) este aspecto constituye un recurso matemático.
- b) Puede pasar de una representación a otra con lo que se le facilitaría entender y dar solución a problemas usando: tablas, gráficos, porcentajes, diagramas de árbol o combinaciones, que según (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985) son estrategias heurísticas.
- c) Asocia las diferentes representaciones con la competencia de resolución de problemas. (Benítez, 2006)

En conclusión, se puede afirmar que el uso de las múltiples representaciones fue determinante en el éxito del desarrollo de los niveles de razonamiento y la solución de problemas que involucran el concepto de probabilidad. Lo anterior se comprueba en las respuestas de algunas preguntas de las hojas de trabajo, que tenían como principal ingrediente el manejo de diferentes registros de representación.

5.2. Sugerencias para investigaciones posteriores

En el transcurso de la investigación surgieron algunos interrogantes y detalles que merecían un detenimiento, de tal forma que se refinara los diferentes tópicos trabajados. Pero en un contexto cómo el pregrado el tiempo es un factor determinante para no abarcar ésas minuciosas, así que se

opta por hacerlas evidentes, de tal forma que sirvan de sugerencias para investigaciones subsecuentes.

- Conviene una muestra entre 10 y 15 estudiantes.
- Trabajar con estudiantes que demuestren cierto interés por el aprendizaje de la probabilidad.
- La aplicación de las hojas de trabajo se debe hacer por fuera de clase.
- El diagnóstico, las hojas de trabajo, y los diseños en GeoGebra merecen un pilotaje.
- Se puede pensar esta investigación, como una herramienta que dirija una clase. La idea es concebir una situación que tenga sentido para el estudiante, relacionada con fenómenos azarosos y poner en juego alguna de las hojas de trabajo.
- Cuando el investigador intervenga durante la sesión de aplicación, debe ser puntual, manejando un discurso que respete todos los conceptos alrededor de la probabilidad.
- Las instrucciones de las hojas de trabajo deben manejar un léxico conforme los sujetos de aplicación.

Lo anterior fueron algunas sugerencias, ahora se presentan las cuestiones que surgen en la investigación.

- ¿El uso de GeoGebra permite una apropiación consiente de las situaciones probabilísticas?
- ¿En qué medida las herramientas tecnológicas alteran el sistema de creencias de los estudiantes?
- ¿Cómo construir en los estudiantes un significado matemático de la probabilidad, usando las herramientas tecnológicas?

5.3. Reflexiones

- Se logró observar que las aulas inteligentes son de gran ayuda para los estudiantes, pues, el contexto donde se desenvuelven está permeado en gran medida, por las herramientas tecnológicas. Sumado a ello, la disposición de los estudiantes y la configuración mental que permite apropiarse de la forma en que opera un software. Todo lo anterior también desemboca en un aprovechamiento eficaz del proceso enseñanza- aprendizaje. Además, las aulas inteligentes podrían, si se hace un uso adecuado dentro del marco de un sistema de enseñanza

validado por las TIC, mejorar la enseñanza tradicional y agregarle un condimento especial y llamativo para los estudiantes. Llamar la atención del estudiante; eh ahí el reto.

- Hubo cierta dificultad en los estudiantes al momento de establecer relaciones entre los sistemas de representación. Sin embargo, es importante tener en cuenta, que era la primera vez que algunos de los estudiantes usaban GeoGebra y su disposición siempre fue positiva y de colaboración frente a esta nueva estrategia de enseñanza.
- Las situaciones problema contextualizadas y representadas en GeoGebra, facilitan la interpretación de un concepto matemático en este caso, por ejemplo, la ley de los grandes números, también se hace importante en esta parte hablar de la asimilación que tienen los estudiantes frente a diversos conceptos probabilísticos, lo cual los confronta con su sistema de creencias.
- Aunque no es un tema que nos concierne en este trabajo, es importante mencionar que a pesar del estrato y la situación social en que se encuentran los estudiantes de la Institución Educativa Marice Sinisterra, donde el día a día trae consigo males como la violencia y el tráfico de estupefacientes, la disposición por aprender algunos conceptos de probabilidad a través de GeoGebra probabilidad fue notoria. No hubo problemas de indisciplina, ni desinterés por el asunto a tratar. Son jóvenes curiosos; jóvenes por los que se puede apostar y “apostar”, con alto porcentaje de acierto.

Referencias

- Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., & Zúñiga, J. (2006). *Investigación Educativa I*. Santiago de Chile: Universidad Arcis.
- Aya, O., & Echeverry, A. (2008). Matemáticas escolares con GeoGebra. *Memorias 18 Encuentro de Geometría y 6to encuentro de Aritmética* (pp. 167 - 174). Bogotá: Universidad pedagógica nacional.
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas el trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1-9.
- Barrera, F., & Santos, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotetico de suministro de medicamentos. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 166-185). Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 247-263.
- Batanero, C., & Cañizares, M. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *Uno*, 7.
- Benitez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes universitarios en la resolución de problemas con el uso de tecnología* (tesis de doctorado). Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN. México Df.
- Benítez, D., Mederos, A., Londoño, N., & Ruiz (2010). Tercer encuentro nacional de profesores de ciencias exactas y naturales. *Las TIC en el proceso de aprendizaje* (pp. 1-55). Ibagué: Universidad de Ibagué.
- Del pino, J. (2013). El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Revista de didáctica de la Estadística*, 243-250.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. V. Restrepo, Trad.) Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- García, J. (2000). Historia de un problema: El reparto de la apuesta. *Suma*, 25-36.
- García, J., Medina, M., & Sanches, E. (2014). *Avances de Investigación en Educación Matemática*. Obtenido de Avances de Investigación en Educación Matemática: <http://www.dante-project.eu/aiem/index.php/aiem/article/view/90>
- Godino, J., & Cañizares, M. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Guilcapi, D. (2015). *Impacto del uso de las herramientas computacionales en el proceso de enseñanza- aprendizaje en los estudiantes de noveno año de educación básica del colegio bachiller "juan de Velasco" de la ciudad de Riobamba en el periodo lectivo 2013- 2014. Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo*. Obtenido de <http://dspace.esPOCH.edu.ec/handle/123456789/4378>.

- Hueso, A., & Cascant, J. (2012). *Metodología y técnicas cuantitativas de investigación*. Valencia: Universitat Politècnica de València.
- ICFES. (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Resumen ejecutivo*. Obtenido de <http://aplicaciones2.colombiaaprende.edu.co/ntg/ca/Modulos/magnitudes/docs/ResultadoSdeColombiaenTIMSS2007.pdf>
- ICFES. (2013). *Informe nacional de resultados PISA 2012*. Obtenido de Icfes: <http://www.icfes.gov.co/en/docman/instituciones-educativas-y-secretarias/evaluaciones-internacionales-investigadores/pisa/pisa-2012/2788-informe-nacional-de-resultados-pisa-2012/file?force-download=1>
- ICFES. (2016). *Resultados nacionales saber 3o-5o-y-9o*. Obtenido de <http://www.icfes.gov.co/docman/instituciones-educativas-y-secretarias/pruebas-saber-3579/documentos/informes-saber-3-5-y-9/2323-resultados-nacionales-saber-3o-5o-y-9o-2009-2014/file?force-download=1>.
- Institute International GeoGebra. (2018). *Geogebra* . Obtenido de Geogebra : <https://www.geogebra.org/about>
- Inzuna, S. (2014). Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. *Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad* (págs. 1-11). Buenos Aires: OEI.
- León, N. (1998). Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. *Paradigma*, 1-10.
- Levin, R., & Rubin, D. (2004). Estadística para administración y economía . En R. I. Levin, *Estadística para administración y economía* (p. 2). Atlacomulco: Pearson.
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá
- MEN (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Santa Fe de Bogotá
- MEN. (2015). *Pruebas Saber*. Obtenido de <http://www.mineduacion.gov.co/portal/>
- MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias. En lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadana*. Obtenido de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Obtenido de https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Mercado, M. (2013). Actas de las primeras Jornadas de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. *Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra* (págs. 309-318). Granada: Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

- Penalva, C., Adolfo, J., & Roig, A. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad . *Educación matemática*, 23-54.
- Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2015). *Educación Matemática Aportes a la formación de docentes desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires: Editorial Univesitaria Villa María.
- Pólya, G. (1965). ¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas? . Mexico: Trillas.
- Rojano, T., & Moreno, L. (2002). Educación Matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo. En Ministerio de Educación Nacional. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 194-201). Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Sampieri, R. (2006). *Metodología de la investigación* . México D.F: Mc Graw-Hill interamericana editores.
- Sánchez, E., & Benitez, D. (1997). Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. *Algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos* (págs. 158-160). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Florida: Academic Press.
- Silvestre, O., & Zilberstein, J. (2002). Hacia una Didáctica Desarrolladora. En O. Silvestre. La Habana: Pueblo y Educación.
- Universidad de Antioquia . (2016). *Aprende en línea*. Recuperado el 19 de Septiembre de 2017, de <http://aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/mod/page/view.php?id=68071&lang=es>

Anexo 1: Prueba diagnóstico



Institución Educativa Industrial Marice Sinisterra

Área de Matemáticas



Colegio: _____

Grado: _____

Estudiante: _____

Edad: _____

Fecha: _____

Importante

El presente documento contiene un diagnóstico con preguntas usted debe resolverlas y es muy importante que en el espacio en blanco justifique sus respuestas.

Pregunta 1. Angélica y Laura son jugadoras destacadas de tenis de mesa en el Colegio.

La tabla registra los partidos ganados y perdidos por cada una, en los últimos 20 enfrentamientos entre ellas.

Jugadora	Partido																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Angélica	P	G	G	G	P	G	G	P	G	P	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G
Laura	G	P	P	P	G	P	P	G	P	G	P	P	P	P	P	G	P	P	P	P

P: partido perdido.

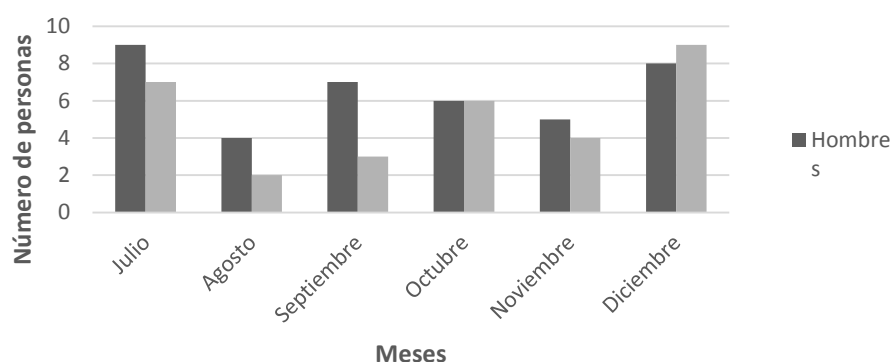
G: partido ganado

Mañana jugarán el partido 21 que será la final. De acuerdo a la información presentada en la tabla anterior es correcto afirmar que:

- e. Angélica tiene Igual probabilidad de ganar el partido 21 que Laura
- f. Angélica tiene Menor probabilidad de ganar el partido 21 que Laura
- g. Angélica tiene Mayor probabilidad de ganar el partido 21 que Laura
- h. No se puede predecir cuál de las dos jugadoras tiene mayor probabilidad de ganar

Espacio para Justificar la respuesta

Pregunta 2. La gráfica representa el número de hombres y de mujeres de una región del país que compraron moto en un concesionario, durante el segundo semestre del año pasado.



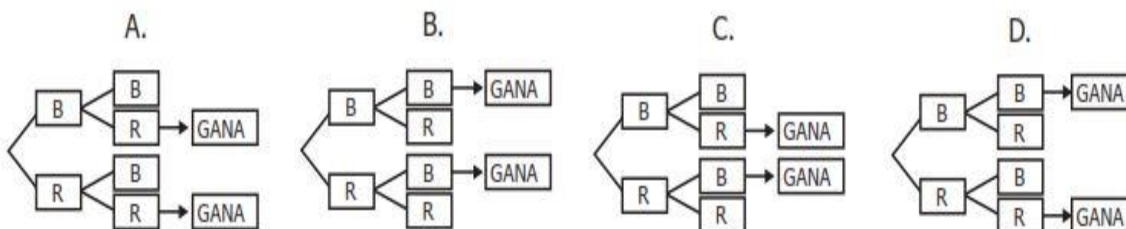
Se va a premiar un comprador, elegido al azar, con un bono de \$500.000 en mantenimiento de la moto. De acuerdo con la información de la gráfica es correcto afirmar:

- e. Los hombres tienen Mayor probabilidad de ganar el bono que las mujeres
- f. Los hombres tienen Menor probabilidad de ganar el bono que las mujeres
- g. Los hombres tienen Igual r probabilidad de ganar el bono que las mujeres
- h. No se puede decidir cuál de los dos géneros tiene mayor probabilidad de ganar.

Espacio para justificar

Pregunta 3. En un concurso hay una urna con 2 fichas rojas y 2 fichas blancas. Un jugador selecciona al azar una ficha de la urna, sin devolver esta. Luego, selecciona al azar una segunda ficha. Si tiene el mismo color de la primera gana el juego.

¿En cuál de los siguientes diagramas se representan las posibilidades de ganar que tiene un jugador?



E. No sé.

Espacio para justificar

Pregunta 4. En una baraja de póquer hay en total 52 cartas; 13 por cada símbolo. Los símbolos son: picas, corazones, diamantes y tréboles.



Usted va a extraer 4 cartas de la baraja al azar. ¿Qué es más probable que ocurra?

- F. Que las cuatro cartas sean del mismo símbolo.
- G. Que cada una de las cuatro cartas sea de símbolos distintos.
- H. Que dos pares de cartas tengan igual símbolo.
- I. Que tres cartas tengan el mismo símbolo.
- J. No se puede predecir cuál de los eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir
- K. No sé.

Pregunta 5. Usted lanza tres veces una moneda de mil pesos y las tres veces obtiene cara. Se lanzará nuevamente la moneda, qué se puede afirmar sobre ese lanzamiento:

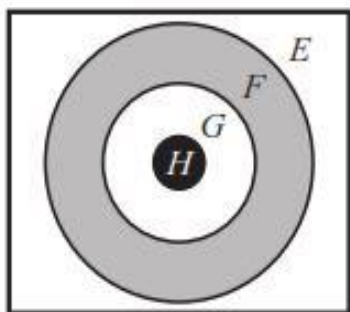
- A. Es más probable obtener una cara
- B. Es más probable obtener un sello
- C. Es igualmente probable obtener cara que obtener sello
- D. No se puede decidir cuál de los tres eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir
- E. No sé

Pregunta No 6. Una persona tuvo un accidente automovilístico hace un mes y hoy acaba de tener otro accidente automovilístico. Esta situación ocurre por:

- a. Por Mala suerte Mala suerte
- b. Por Voluntad Divina
- c. Por Azar
- d. Por otra Causa _____
- e. No sé

Pregunta 7. Alberto va a participar en un torneo de tiro al blanco con lanzamiento de dardos, utilizando un tablero como el que aparece en la ilustración.

En una de sus prácticas, Alberto registró las veces que cayó el dardo en cada zona.



Zona de tablero	Aciertos
E	
F	
G	
H	

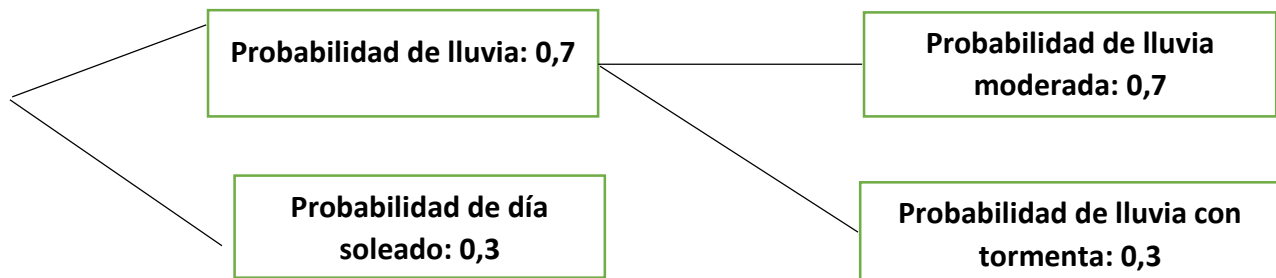
De acuerdo con las observaciones si el dardo cayó en el tablero, la probabilidad de que haya caído en la zona E fue

- A. Igual que la probabilidad de que haya caído en la zona F o en la H.
- B. Mayor que la probabilidad de que haya caído en la zona G o en la H.
- C. Igual que la probabilidad de que haya caído en la zona H.
- D. Menor que la probabilidad de que haya caído en la zona.
- E. No se puede predecir en qué zona hay mayor probabilidad
- F. No sé.

Pregunta 8. En el juego de parques se lanzan dos dados y se suman los puntos de las caras expuestas hacia arriba. En una partida de parques hay dos fichas expuestas para ir a la cárcel, la ficha roja está a siete puntos y la ficha verde está a 5 puntos. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta?

- F. Las dos fichas tienen la misma probabilidad de ir a la cárcel
- G. La ficha que está a siete puntos tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- H. La ficha que está a siete puntos tiene menor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- I. No se puede predecir cuál de las dos fichas tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel.
- J. No sé.

Pregunta9. Un noticiero de Televisión, en la selección del estado del tiempo , presenta la siguiente gráfica en la que se muestra la probabilidad de que el próximo domingo sea soleado o lluvioso, con lluvia moderada o con tormenta.



De acuerdo a la información presentada por el noticiero, es correcto afirmar que:

- a. Mañana lloverá de manera moderada
- b. Mañana lloverá con tormenta
- c. Mañana habrá un día soleado.
- d. No se puede predecir cuál de estos tres eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir
- e. No sé

Pregunta 10. En las últimas elecciones presidenciales de cierto país se presentaron 6 candidatos, una firma encuestadora decidió realizar una encuesta para determinar la intención de voto. Los resultados de la encuesta se reflejan en la siguiente tabla:

Candidato	Intención de voto
Justiniano Pérez	34%
Sergio Fandiño	27%
George Vargas	20%
Humberto Callejón	10%
Valenciano Duque	9%

Un mes después se llevó a cabo las elecciones y despertó el asombro de todo el país. Los resultados se presentan a continuación

Candidato	Porcentaje de votos
Humberto Callejón	38%
Jorge Vargas	29%
Justiniano Pérez	20%
Sergio Fandiño	7%
Valenciano Duque	6%

¿Por qué sucedió este fenómeno?

- F. Un error en la firma encuestadora.
- G. Fraude electoral.
- H. El candidato Humberto Callejón trabajó fuertemente en el último mes en su campaña electoral.
- I. Azares del destino
- J. No sé.

Pregunta 11. La tabla muestra la incidencia de embarazos en mujeres adolescentes en una ciudad.

Edad	Número de adolescentes que han estado embarazadas	Población total de mujeres adolescentes
15	150	3.000
16	150	1.500
17	200	2.000
18	400	2.000
19	450	1.500

¿Cuál es la edad en que las adolescentes tienen mayor probabilidad de quedar en embarazo?

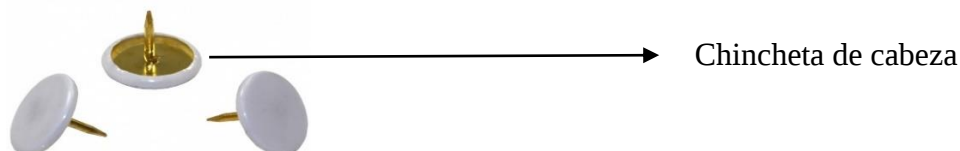
Pregunta 12. Una persona ganó la lotería hace un mes y la presente semana la volvió a ganar. ¿Usted cómo explica este hecho?

Pregunta 13. Usted va a comprar una rifa le ofrecen el número 111 ¿Usted compraría el boleto marcado con ese número?

Pregunta 14. Si su equipo favorito de futbol va a jugar el partido de vuelta en los octavos de final de la Champions League de local, y necesita un triunfo para pasar de ronda ¿Qué tan probable consideras la clasificación de tu equipo teniendo en cuenta que juega de local?

Pregunta 15. Al hacer girar la pirinola las opciones que se tendrán serán las siguientes: toma 1, toma 2, pon 1, pon 2, toma todo, todos ponen. Usted se encuentra jugando con sus amigos a la pirinola sobre una superficie lisa y te toca hacerla girar ¿Qué opción consideras es más probable que salga en tu turno?

Pregunta 16. Una persona deja caer una chincheta. ¿La probabilidad que la chincheta caiga de Cabeza es igual a que caiga de costado?



Pregunta 17. Usted va a comprar un chance, con la lotería que juega hoy. Con qué criterio selecciona el número del chance:

- a. Con su número de la suerte
- b. Con la fecha del día de hoy
- c. Con la fecha de su cumpleaños.
- d. Con un número al azar
- e. Con un número de placa de un carro que acaba de pasar
- f. Con otro criterio _____

Pregunta 18. A una persona permanentemente le va muy mal en su vida. Generalmente tiene malos resultados, tiene accidentes, le ocurren malas cosas. ¿A qué le atribuye usted este hecho?

- a. La persona tiene muy mala suerte.
- b. Es la voluntad de Dios
- c. Es el azar
- d. Otra causa _____
- e. No sé

Anexo 2: Hoja de trabajo #1



Institución Educativa Industrial Marice Sinisterra

Área de Matemáticas



Colegio: _____
 Estudiante: _____
 Fecha: _____

Grado: _____
 Edad: _____

Hoja de trabajo #1

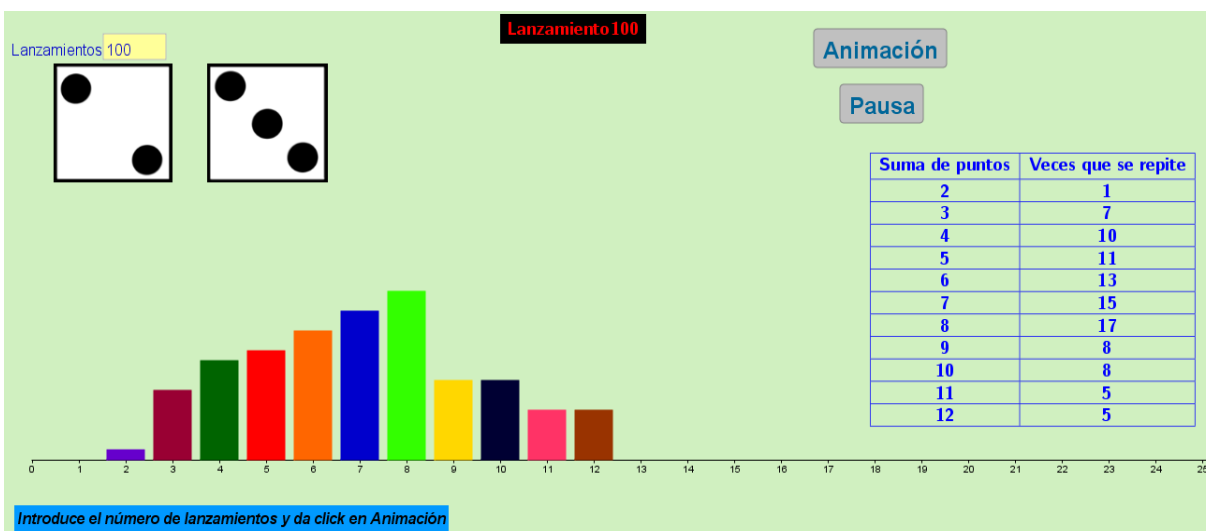
Instrucciones: tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar todas las actividades de la hoja de trabajo.

1. Lee atentamente la actividad que se te propone, así como las preguntas que se hacen.
2. **Justifica** tus respuestas en el espacio en blanco correspondiente.
3. Sigue cada una de las indicaciones mencionadas en cada actividad.

Abre el archivo de Geogebra llamado “Datos”. En este archivo te encontraras con una ventana que contiene los siguientes elementos:

- **Cuadro de lanzamientos:** se encuentra al lado izquierdo superior de la pantalla, en el cual se puede escribir el número de lanzamientos que se desea realizar.
- **Botón Animación:** este botón se encuentra en la parte superior derecha de la pantalla, este a su vez activa la animación, es decir los lanzamientos.
- **Botón Pausa:** este botón se encuentra debajo del botón de animación y como su nombre lo indica detiene la animación.
- **Grafica de dados:** se podrán encontrar con la imagen de dos dados, los cuales muestran el puntaje de cada lanzamiento.
- **Grafica de barras:** estas se encuentran al lado inferior izquierdo y muestran la suma de puntos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
- **Tabla:** esta se encuentra al lado inferior derecho de la pantalla y muestra la suma de los puntos y la cantidad de veces que se repitió esa suma en una cantidad determinada de lanzamientos.

A continuación, se muestra un ejemplo:



Se realizaron 100 lanzamientos, puede observarse que la gráfica muestra que la suma de puntos que más se repitió fue el número 8, al igual que se puede verificar con la tabla.

Primera parte

1. Realiza 1000, 2000, 5000, 10000 lanzamientos de los dados, en cada caso observa la zona grafica de barras y responde las siguientes preguntas:

- a) Escribe las cosas comunes que viste en las cuatro graficas.

b) Con tus propias palabras explica por qué hay barras que tienen más altura que otras

Segunda parte

2. Nuevamente realiza los siguientes números de lanzamientos: 1000, 2000, 5000 y 10000, en cada caso observa la tabla y contesta los siguientes puntos.

a. Ahora observa la tabla. Encontrarás que hay suma de puntos que se repiten más que otros. ¿Cómo puedes explicar eso?

b. ¿si tuvieras que apostar, por cual número No lo harías?

c. ¿si tuvieras que apostar, por cual número SI lo harías?

Tercera parte

De acuerdo con la primera y segunda parte de la actividad, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aspectos tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

b) En el juego de parqués se lanzan dos dados y se suman los puntos de las caras expuestas hacia arriba. En una partida de parqués hay dos fichas expuestas para ir a la cárcel, la ficha roja está a siete puntos y la ficha verde está a 5 puntos. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta?

- K. Las dos fichas tienen la misma probabilidad de ir a la cárcel
- L. La ficha que está a siete puntos tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- M. La ficha que está a siete puntos tiene menor probabilidad de ir a la cárcel que la ficha que está a 5 puntos.
- N. No se puede predecir cuál de las dos fichas tiene mayor probabilidad de ir a la cárcel.
- O. No sé.

c) En el juego de parqués se lanzan los dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir?

Anexo 3: Hoja de trabajo #2



Institución Educativa Industrial Marice Sinisterra

Área de Matemáticas



Colegio: _____

Grado: _____

Estudiante: _____

Edad: _____

Fecha: _____

Hoja de trabajo #2

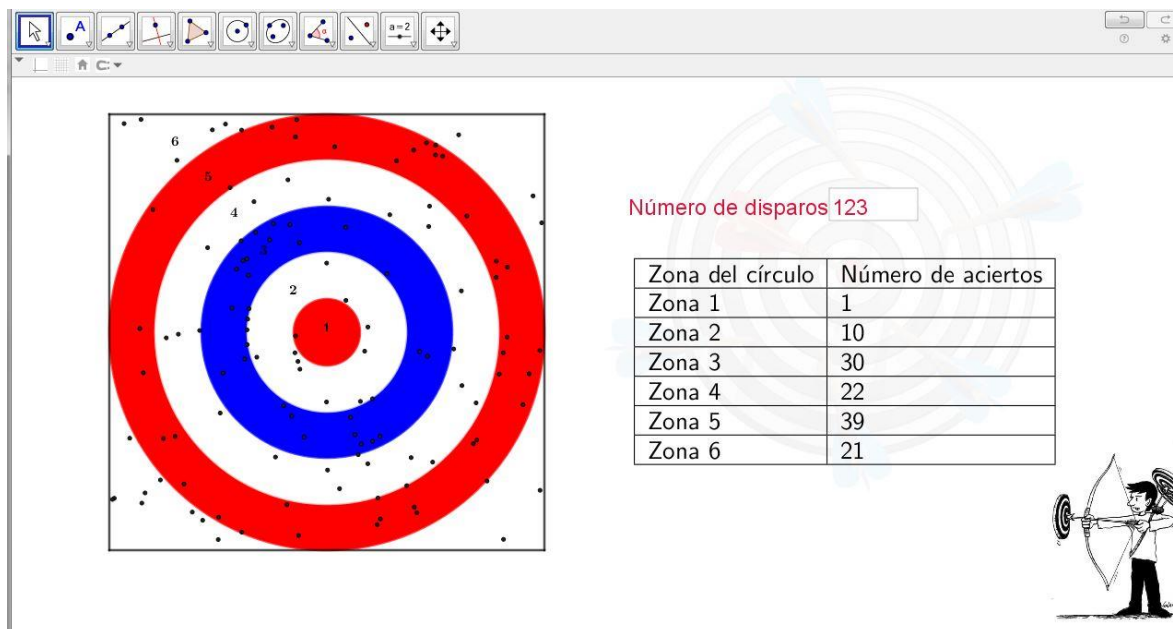
Instrucciones: tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar todas las actividades de la hoja de trabajo.

1. Lee atentamente la actividad que se te propone, así como las preguntas que se hacen.
2. **Justifica** tus respuestas en el espacio correspondiente.
3. Sigue cada una de las indicaciones mencionadas en cada actividad.

Abre el archivo de GeoGebra “tiro al blanco”. En este archivo te encontraras con una ventana que contiene los siguientes elementos:

- **Tablero de tiro al blanco:** se encuentra al lado izquierdo superior de la pantalla y contiene 6 Zonas marcadas por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- **Casilla de disparos:** se encuentra al lado derecho de la pantalla y su función es definir el número de disparos que se realizan.
- **Tabla de datos:** se encuentra justo debajo de la casilla de disparos. Su función es contar el número de disparos en cada Zona (Zona 1, Zona 2, Zona 3, Zona 4, Zona 5, Zona 6).

A continuación, se muestra un ejemplo:



Se realizaron 123 disparos, puede observarse que la tabla muestra la Zona del círculo y el respectivo número de aciertos.

Primera parte

1. Realiza 100, 2000, 5000, 10000 “número disparos”, en cada caso observa el tablero, la tabla y responde las siguientes preguntas:

a) Escribe para cada caso la Zona donde caen más disparos.

b) ¿Existen Zonas donde caen mayor número de disparos que otras? **Sí**__ **No** __

c) De acuerdo con el tablero, completa la tabla escribiendo que Zonas tienen mayor número de disparos

Zona 1	
Zona 2	
Zona 3	
Zona 4	
Zona 5	
Zona 6	

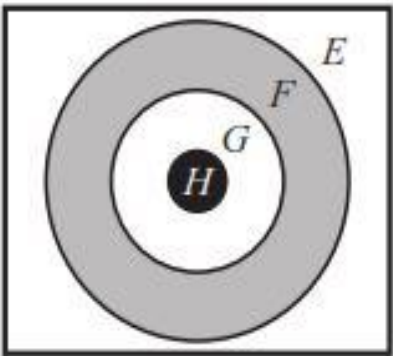
d) ¿Si tuvieras que jugar, donde crees que caerán la mayoría de tus disparos?

Segunda parte

2. Responde las siguientes preguntas teniendo en cuenta la primera parte

a) Alberto va a participar en un torneo de tiro al blanco con lanzamiento de dardos, utilizando un tablero como el que aparece en la ilustración.

En una de sus prácticas, Alberto registró las veces que cayó el dardo en cada zona.



Zona de tablero	Aciertos
E	26
F	52
G	8
H	9

De acuerdo con las observaciones si el dardo cayó en el tablero, la probabilidad de que haya caído en la zona E fue

- G. Igual que la probabilidad de que haya caído en la zona F o en la H.
- H. Mayor que la probabilidad de que haya caído en la zona G o en la H.
- I. Igual que la probabilidad de que haya caído en la zona H.
- J. Menor que la probabilidad de que haya caído en la zona.
- K. No sé.

- b)** Según lo observado en la parte uno y teniendo en cuenta la pregunta anterior, si usted se encuentra jugando tiro al arco, ¿considera que es pertinente apostar que su tiro acierte a la zona más grande o a la zona más pequeña del tablero? ¿en qué zona es más probable que acierte su tiro?

- c)** En el juego de tiro al arco se realizan una cantidad determinada de lanzamientos, se tienen las opciones de caer en la zona **1, 2, 3, 4, 5, 6** ¿en qué zonas es más probable que aciertes el tiro? ¿en qué zona es menos probable que aciertes el tiro?

Anexo 4: Hoja de trabajo #3



Institución Educativa Industrial Marice Sinisterra

Área de Matemáticas



Colegio: _____

Grado: _____

Estudiante: _____

Edad: _____

Fecha: _____

Hoja de trabajo #3

Instrucciones: tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar todas las actividades de la hoja de trabajo.

1. Lee atentamente la actividad que se te propone, así como las preguntas que se hacen.
2. **Justifica** tus respuestas en el espacio en blanco correspondiente.
3. Sigue cada una de las indicaciones mencionadas en cada actividad.

Abre el archivo de Geogebra llamado “Chincheta”. En este archivo te encontraras con **dos** ventanas que contiene los siguientes elementos:

Vista gráfica 1 y Vista gráfica 2

Vista Gráfica 1:

Gráfico de barras: se encuentra a la izquierda de su pantalla.

Botón lanzamientos: se encuentra a la derecha de su pantalla y su función es definir la cantidad de lanzamientos de la chincheta

Tabla: se encuentra justo debajo de el botón tiradas. Describe la cantidad de lanzamientos y el porcentaje de veces que cae la chincheta (acostada o arriba).

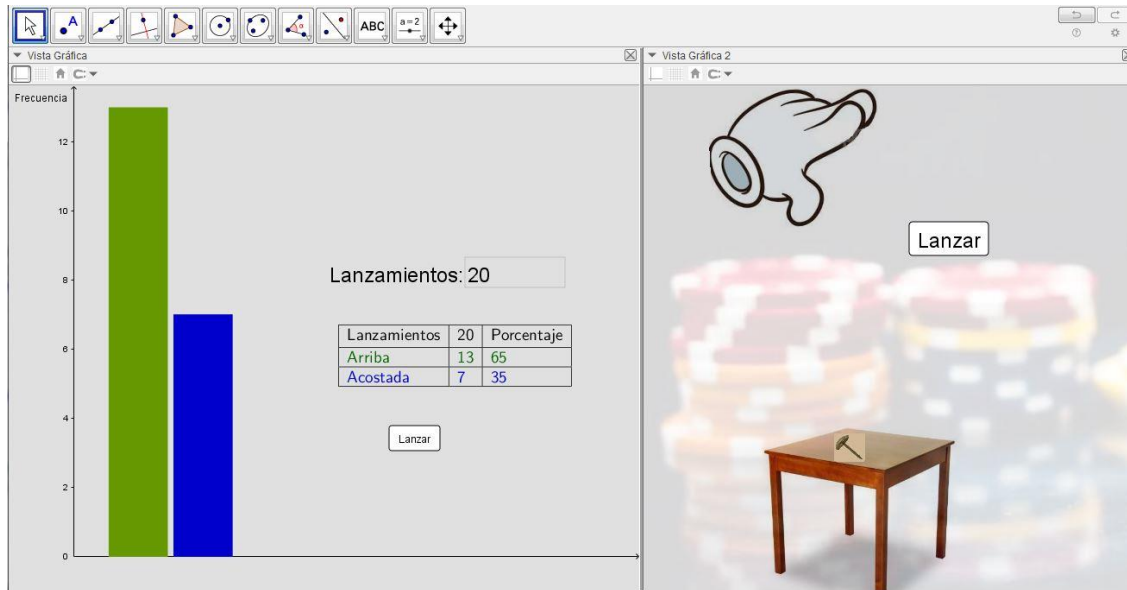
Botón lanzar: se encuentra justo debajo de la tabla. Sirve para simular el lanzamiento de la chincheta una o varias veces.

Vista Gráfica 2:

Montaje para el lanzamiento de una chincheta: observara una mano, una chincheta y una mesa.

Botón lanzar: simula el lanzamiento de la chincheta, una o varias veces.

A continuación, se muestra un ejemplo:



En la vista gráfica se realizaron 20 lanzamientos, puede observarse que la barra verde muestra la cantidad de veces que la chincheta cae arriba y la azul, la cantidad de veces que cae acostada. Al igual que se puede verificar con la tabla.

Primera parte

1. Realiza varios lanzamientos y observa que sucede
2. Realiza los siguientes lanzamientos: 50.000, 100.000, 200.000, 500.000, en cada caso observa la zona de grafica de barras y contesta:

a) ¿Qué barra es más alta y más baja? Explique en cada caso.

--

b) ¿Qué ocurre con el tamaño de las barras a medida que el número de lanzamientos es mayor?

--

c) ¿Si te encontraras apostando con un amigo al tirar la chincheta, que opción escogerías para ganar, arriba o acostada?

--

Segunda parte

3. Nuevamente realiza los siguientes lanzamientos 50.000, 100.000, 200.000, 500.000, en cada caso observe la tabla y conteste los siguientes puntos.

a) Describe las cosas que viste en la tabla en cada uno de los lanzamientos realizados

--

b) ¿Qué porcentaje es mayor al realizar 500.000 tiros? Explique.

--

Tercera parte

4. Teniendo en cuenta la primera y segunda parte conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aspecto tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

b) Una persona deja caer una chincheta. ¿La probabilidad que la chincheta caiga de Cabeza es igual a que caiga de costado?

