

REPRESENTACIONES BIDIMENSIONALES Y TRIDIMENSIONALES DE POLIEDROS. EL CASO DE PRISMAS Y PIRÁMIDES REGULARES

Liliana Echeverry Andrade

Nayiby Andrea Caicedo Córdoba

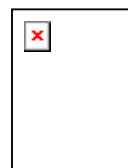
UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Santiago de Cali

2009



REPRESENTACIONES BIDIMENSIONALES Y TRIDIMENSIONALES DE POLIEDROS. EL CASO DE PRISMAS Y PIRÁMIDES REGULARES

Liliana Echeverry Andrade

Código 0433319

Nayiby Andrea Caicedo Córdoba

Código 0433320

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemática**

Asesora:

Ligia Amparo Torres Rengifo

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

2009

Nota de aceptación

Aprobado

Evaluador 1

Ma Cristina Velasco M.

Evaluador 2

Fauze

Asesora

Jorge

Dedicatoria

A nuestros maestros y maestras de la Universidad del Valle, quienes a lo largo de la carrera nos brindaron las herramientas necesarias para consolidarnos como docentes, reflexionando acerca de nuestra labor en la sociedad y compromiso en la Educación Matemática. A todos los maestros interesados en revolucionar la educación matemática de nuestro país, a nuestros padres, hermanos, familiares, amigos, a todos ellos con amor y gratitud.

Liliana y Nayiby

*“Un discípulo se quejaba de la costumbre que tenía el Maestro de echarle
abajo sus preciadas creencias. Y le dijo el Maestro “Lo que hago es
prenderle fuego al templo de tus creencias para que, cuando
haya quedado destruido, tengas una perfecta visión del
cielo inmenso y sin límites”
Anthony de Mello*

Agradecimientos

Cualquier reflexión que pueda surgir en el maestro de su qué hacer, no sólo aporta a su propia formación, sino a las enseñanzas que brinde a quienes le rodean, especialmente cuando dichas reflexiones surgen de una recolección de experiencias, de la interacción, el diálogo y los aportes de los demás.

Expresamos nuestros agradecimientos a todos aquellos quienes de una u otra manera han acompañado y fortalecido esta idea, a varios autores de otros libros y didactas interesados en mejorar las prácticas educativas, cuyas investigaciones fueron soporte para el desarrollo de este trabajo. A la maestra Amparo Franco quien permitió hacer la intervención en el aula, a los estudiantes, por su disposición y entusiasmo en cada una de las actividades implementadas. Sinceros agradecimientos a la maestra Ligia Amparo Torres Rengifo, quien además de acompañarnos en todo el proceso de conformación de la experiencia, hizo apreciables observaciones que permitieron culminar el documento final. A nuestros padres por su ayuda, comprensión y apoyo en nuestra formación profesional y personal. Finalmente, agradecemos a todos aquellos quienes presenten un interés en la investigación, por sus críticas y aportes que contribuyan a mejorar la educación de nuestro país.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	9
CAPÍTULO I ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	12
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	12
1.2 JUSTIFICACIÓN	16
1.3 OBJETIVOS	17
1.4 ANTECEDENTES.....	18
1.5 MARCO CONTEXTUAL	25
CAPÍTULO II ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS PARA LA INVESTIGACIÓN.....	29
2.1 ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS	29
2.1.1 Aspectos curriculares.....	30
2.1.2 Aspectos matemáticos.	34
2.1.3 Aspectos cognitivos.....	40
2.1.4 Sobre la secuencia didáctica.	46
CAPITULO III DESARROLLO DE DESTREZAS DE VISUALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE PRISMAS Y PIRÁMIDES EN LA ESCUELA.....	51
3.1 PLANEACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA	51
3.1.1 Diseño de la secuencia didáctica.	51
3.1.2 Materiales.	52
3.1.3 La población.	53
3.1.4 Metodología de implementación.	53
3.2. DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS, RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	54
3.2.1. Situación 1: reconociendo sólidos.	54
Tarea 1 caracterizando objetos del entorno.	54
Tarea 2 comparando envases con cuerpos geométricos.	65
Tarea 3 describiendo partes de cuerpos geométricos.....	76
3.2.2. Situación 2: análisis, descripción y clasificación de cuerpos geométricos.	90
Tarea 1 describiendo cuerpos geométricos.....	90
Tarea 2 reconociendo prismas a través de sus componentes.	104
Tarea 3 reconociendo pirámides a través de sus componentes.....	123
3.2.3. Situación 3: representación y visualización de prismas y pirámides.	140
Tarea 1 reconociendo invariantes de prismas y pirámides a través del movimiento.	140
Tarea 2 representación bidimensional de prismas y pirámides.....	157
Tarea 3 desarrollos de prismas y pirámides.....	179
Tarea 4 construcción de la pirámide cuadrangular con regla y compás.	202
Tarea 5 construcción en Cabri 3d de algunas pirámides.....	211
3.2.4 Algunas conclusiones de la experimentación	221

CAPÍTULO IV	228
CONCLUSIONES GENERALES.....	228
4.1 CONCLUSIONES FINALES	228
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	234
ANEXOS.....	236

RESUMEN

Este trabajo trata de una propuesta de intervención en el aula sobre el tratamiento de representaciones bidimensionales y tridimensionales y procesos de visualización de algunos poliedros como prismas y pirámides rectos, dirigida a estudiantes de grado quinto de la Educación Básica colombiana y realizada a través de una secuencia didáctica. Para su diseño, implementación y análisis, se toman elementos del marco teórico y metodológico planteados por Gregoria Guillén Soler y un grupo de investigadores de la Universidad de Valencia (España) en el proyecto de investigación titulado “La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B” llevado a cabo en la ciudad de Valencia en el año 1992.

La secuencia didáctica está conformada por tres situaciones cada una de las cuales contienen tareas de comparación, movimiento, representación y construcción de poliedros y se implementó con estudiantes de la Normal Superior Farallones de Cali.

Los resultados obtenidos se refieren fundamentalmente a la valoración de la geometría activa como propuesta didáctica de intervención en el aula, a desarrollos cognitivos en la formación de pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes que participaron en el proceso, relacionados fundamentalmente con el reconocimiento de propiedades de los prismas y pirámides y los procesos de visualización y representación de estos objetos.

Estos resultados y la secuencia misma pueden ser utilizados por maestros en formación o en ejercicio, interesados en esta problemática.

PALABRAS CLAVES

Secuencia didáctica, pensamiento espacial, poliedros, prismas y pirámides, visualización, representación, bidimensional, tridimensional, educación primaria.

INTRODUCCIÓN

Este documento es el producto de una indagación efectuada durante cuatro semestres de la formación como maestras de Educación Matemática, acerca de algunas problemáticas generadas en las aulas escolares relacionadas con el aprendizaje de los conocimientos matemáticos, en particular los conceptos, destrezas u otras habilidades desarrolladas en la geometría en el contexto escolar, para ello se implementa una secuencia didáctica que permita dar cuenta de algunos procesos y desempeños de los estudiantes entorno al pensamiento espacial, enfatizando dentro de éste lo relacionado con el uso de las representaciones tridimensionales y bidimensionales de poliedros, específicamente de prismas y pirámides.

En este proceso, se realizó una consulta bibliográfica que permitió dar cuenta del tipo de dificultades que presentan los estudiantes de cierto grado de escolaridad en relación con el paso de las representaciones tridimensionales a bidimensionales y viceversa, al igual que distintas investigaciones que abordan este tema ; en esta consulta se encontró un valioso trabajo de la didacta Gregoria Guillén Soler y un grupo de investigadores, que aborda la enseñanza de la geometría de sólidos en la E. G. B. (1.992) el cual proporciona elementos de apoyo para la planeación, implementación y análisis de resultados en la secuencia didáctica.

Este documento, ha sido organizado por capítulos; en el primero, se explicitan los aspectos generales de la investigación a partir de una estructura en la cual se hace el planteamiento del problema abordado desde diferentes enfoques teóricos, luego la justificación, seguida de los objetivos o fines de la secuencia didáctica, algunos antecedentes teóricos que reflejan el interés de otros autores por abordar el tema de investigación y la contextualización de la población en la cual se hace la intervención en el aula.

En el segundo capítulo, se explicitan algunos elementos teóricos que se convierten en el lente de análisis de los pasos a seguir, dichos elementos se dan a partir de aspectos curriculares tales como los propuestos en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias y el análisis de pruebas externas, de igual forma se plantean los aspectos matemáticos en los que se incluyen conceptos y características propias de los cuerpos geométricos objeto de estudio (prismas y pirámides)

Por otra parte, encontramos los aspectos cognitivos, donde se hace hincapié en los procesos didácticos propios del estudio de la geometría espacial concerniente a las representaciones bidimensionales y tridimensionales de poliedros, en específico de los prismas y pirámides, en el cual se explicitan algunos conceptos vitales en la investigación y en la intervención en el aula, entre ellos, el concepto de visualización y representación estimados en el trabajo.

Luego, se destacan algunos referentes teóricos bajo los cuales es entendida la secuencia didáctica así como su estructura.

En el tercer capítulo encontramos la intervención en el aula, la cual detalla los aspectos tenidos en cuenta en la planeación, organización e implementación de la secuencia didáctica, así como los resultados obtenidos y el análisis de la intervención a la luz tanto en los objetivos planteados como de los referentes teóricos que sustentan la experiencia.

Finalmente en el cuarto capítulo se explicitan las conclusiones a las cuales se llega en la investigación, encontrando como aspecto fundamental en el campo de las representaciones bidimensionales y tridimensionales, la aplicación de una metodología activa que promueva procesos de visualización que conlleven a un reconocimiento de las propiedades de prismas y pirámides en diferentes contextos y materiales; la bibliografía bajo la cual se delimitó el tema de interés como una problemática dentro del campo de las matemáticas y que es usada como referente en cada uno de los planteamientos, conceptos e ideas abordadas en el trabajo.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se encuentran los elementos que sustentan la investigación. Como punto de partida se presenta la definición de la problemática abordada desde diferentes enfoques, la cual explicita la debilidad de un elemento objeto de estudio dentro de las matemáticas, específicamente dentro de la geometría en el campo de la enseñanza y el aprendizaje escolar, referente a las representaciones bidimensionales y tridimensionales de poliedros tales como prismas y pirámides. También se delimitan otros aspectos de vital importancia que le dan sentido y forma a la investigación como la justificación del trabajo, el objetivo general y los objetivos específicos, los antecedentes teóricos que de una u otra manera permiten reflejar una realidad teórico-empírica en cuanto a la problemática abordada y el marco contextual de la población en la cual se implementa la secuencia didáctica.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las actuales reformas educativas en nuestro país las cuales guían la Educación Matemática bajo los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares básicos de competencias (2006), se han convertido en la base para la reflexión y planeación de los pensamientos y procesos de la actividad matemática que deben ser abordados en cada uno de los ciclos educativos; sin embargo, y a pesar de que estos Lineamientos llevan un poco más de una década de formulación, no han alcanzado el impacto necesario en las instituciones educativas para empezar a evidenciar reformas en la enseñanza impartida por los maestros, en tanto que no se desarrollan todas las competencias matemáticas que son planteadas en los diferentes tipos de pensamientos que indican estos documentos y de esta manera en los conocimientos adquiridos por los estudiantes.

Lo anterior se puede ejemplificar a través de las dificultades que presentan los estudiantes para resolver problemas en un contexto determinado lo cual hace explícito una orientación matemática que ha existido a través de los años, restringida generalmente a la parte algorítmica más que a la parte comprensiva, en tanto que la enseñanza de las matemáticas se basa principalmente en la

formación del pensamiento numérico desde diferentes ámbitos de la educación matemática y aplicado a otros pensamientos más de forma algorítmica que de manera analítica y espontánea.

Es evidente que la escuela ha priorizado la enseñanza del sistema métrico decimal y con él, algoritmos o fórmulas matemáticas que permiten obtener un resultado de una situación específica sin atribuirle significado en el contexto. Así, la geometría espacial también se ve limitada a los aspectos métricos o restringida a nociones espaciales sin relacionarlos con el sujeto o con su entorno, por tanto, no se abarcan las diferentes representaciones de los objetos (Delaney 1979).

Esta dificultad trasciende en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual no puede ser abordado desde el eje de los sistemas numéricos ni limitado a los sistemas de medidas, ello imposibilita a los estudiantes reconocer el espacio en el cual se desenvuelve y por ende realizar actividades que requieran de habilidad espacial tanto en su movilidad como en las representaciones que haga de este. Este tema ha sido objeto de estudio en diferentes investigaciones tales como las expuestas por autores como Guillen (1992), Bishop (1997) y Piaget (1980) las cuales muestran un déficit significativo en relación al manejo espacial y en particular a los diferentes tipos de representación de objetos tridimensionales.

Siendo coherentes con las reformas educativas, el pensamiento espacial es uno de los pensamientos planteados por los Lineamientos Curriculares en el área de matemáticas que deben ser abordados a través de la enseñanza de sistemas geométricos que generen un aprendizaje significativo en los estudiantes en el transcurso de la escolaridad, con el fin de que cada persona pueda tener una mejor ubicación, localización, orientación y distribución del espacio, teniendo en cuenta que en todos los momentos necesitamos ubicarnos en él, además de desarrollar otras grandes facultades dentro del razonamiento como la resolución de problemas, la formulación de conjeturas, el análisis funcional, entre otras actividades relacionadas con las matemáticas y potencializadas por ella misma.

De igual forma, dentro del desarrollo de este pensamiento, encontramos el manejo de las representaciones bidimensionales y tridimensionales de los objetos, los cuales a través de la escolaridad se han constituido en un gran problema en la educación, dadas todas las dificultades que presentan los estudiantes con relación a ello y a la poca comprensión del espacio que tienen, impidiendo así representar los objetos desde diferentes perspectivas.

Respecto a ello algunos autores como Lappan y Winter¹ plantean

A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional la mayor parte de las experiencias que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar de tal uso de <dibujos> de objetos que suponen al <niño> una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es, empero necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real.

Así mismo, Fuson² (1998) afirma.

Las proyecciones constituyen una experiencia corriente en la vida del niño. El descubrimiento de la invariancia de un objeto tridimensional al ser contemplado desde diversos puntos de vista constituye un gran logro. La formación y construcción de objetos tridimensionales cuando uno nunca puede verlos desde más de un punto de vista cada vez es tarea larga y difícil.

Es así como se observa una reforma educativa en lo que debe ser enseñado pero al mismo tiempo una deficiencia en su implementación, la cual abarca tanto lo planteado en el currículo como el impacto en lo que realmente aprenden los estudiantes.

Estas dificultades se evidencian en las pruebas Censales y Saber aplicadas en nuestro país, las cuales demuestran la poca aplicabilidad de los planteamientos del MEN, pues aunque los documentos estatales plantean la importancia del manejo del espacio y particularmente de las representaciones tanto bidimensionales como tridimensionales de los objetos, en las pruebas censales realizadas en Colombia, este tópico es poco abordado. En la evaluación Censal de la calidad de la Educación en Matemáticas, aplicada en el departamento del Valle del Cauca en el año 2002 identificamos solo cuatro preguntas que evalúan el sistema geométrico y la movilización de racionalidades propias del pensamiento espacial, de las cuales solo una emplea representaciones en perspectiva de un espacio tridimensional y hace referencia a ellas como elemento fundamental en su

¹ DICKSON Linda y otros, El aprendizaje de las matemáticas, citado por MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares. Colombia: Magisterio, 1998, P. 60.

² Ibíd., P.61

solución, demostrándonos la poca importancia que se le da al dominio de las representaciones bidimensionales y tridimensionales en el sistema escolar propuesto por el Ministerio de Educación Nacional. De igual forma un trabajo de investigación abordado por las autoras de esta propuesta de trabajo en el ciclo de estudios para Normalistas Superior con estudiantes de la institución educativa Normal Superior Farallones de Cali en el año 2004, titulado *Representaciones bidimensionales del espacio tridimensional y viceversa*, permitió dar cuenta de la gran dificultad que tienen los estudiantes para representar poliedros como el cubo, y las pirámides y en especial para abordar el paso de dichas representaciones de un espacio 2D al 3D.

Por otra parte investigaciones realizadas alrededor de este tema por investigadores en didáctica de las matemáticas, permiten dar cuenta de los obstáculos en el aprendizaje de los mismos; Gregoria Guillen en su proyecto de investigación titulado “La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B” pone de manifiesto dificultades dentro de las cuales encontramos: la representación segmentada de los sólidos geométricos desde una perspectiva sin tener en cuenta la globalidad del cuerpo, poca distinción entre las relaciones del sólido construido y desarrollado, carencia en la habilidad de discriminación visual, dificultad en la ubicación, posición u orientación de un cuerpo dada una variable visual, entre otras.

De igual forma, a pesar de que vivimos en un mundo donde los objetos muestran sus tres dimensiones, los textos escolares y los maestros se han basado en representaciones bidimensionales de ellos limitando el pensamiento y el análisis de los estudiantes acerca de las propiedades y espacios que ocupan en su entorno, en tanto que la enseñanza de la geometría se ha basado en designar objetos o definir conceptos tales como qué es una línea, un punto, las figuras geométricas planas, etc., al tiempo que propone algoritmos y teoremas limitando la creatividad, el análisis y el contacto de los estudiantes con los objetos geométricos a tratar, obstaculizando así una real comprensión de los mismos generando una dificultad en el momento de representarlos.

Por lo tanto en este trabajo nos interesa determinar ¿Cómo, a través de una secuencia didáctica relacionada con tareas de comparación, movimiento, representación y construcción de sólidos, se aproximan a los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, a conceptos y procedimientos relacionados con las representaciones

bidimensionales y tridimensionales de algunos sólidos geométricos como prismas y pirámides?

1.2 JUSTIFICACIÓN

Este trabajo tiene un interés centrado en el desarrollo del pensamiento espacial y en la exploración de las propiedades de los espacios en dos y tres dimensiones, construyéndose y potencializándose mediante la exploración activa y la modelación del espacio de los objetos en reposo y en movimiento, avanzando desde un espacio intuitivo o sensorio – motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio manipulando objetos, medidas, cálculos espaciales, etc.) a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas de acuerdo a manipulaciones mentales, debiendo la escuela favorecer estas interacciones.

De esta manera, es de suma importancia tener en cuenta la manera de aprender de los estudiantes y de organizar esquemas mentales que les permitan pasar de un estado, a otro más organizado con nuevos elementos, basados en este hecho, la secuencia didáctica permite plantear una coherencia esquemática en lo que se le “enseña a los estudiantes” por lo cual se generan procesos cognitivos donde ellos pueden llegar a conceptualizar, situación que se vuelve más compleja cuando se enseña a través de temas aislados y sin conexión.

Es así como la planeación, la organización y la coherencia en lo que lleva el maestro al aula juega un papel fundamental en la conceptualización y aprehensión de los conocimientos en los estudiantes, pues la secuencia didáctica no sólo permite partir de lo que los estudiantes saben, sino que genera actividades de clase desde sus necesidades, con un objetivo claro que permita visualizar a qué se quiere llegar y a través de qué medios. Por otra parte, no se ve al sujeto como un ser objeto de evaluación a través de las cotidianas pruebas, por el contrario la evaluación se convierte en un proceso constante, colaborativo y de retroalimentación por medio del cual se lleva a los estudiantes a reflexionar sobre ciertas situaciones, adoptar posturas críticas acompañadas de debate, con ideas tanto de sus compañeros como del maestro.

Dado que este trabajo de grado está basado en el paso de lo bidimensional a lo tridimensional, y viceversa, la secuencia propuesta tiene como eje fundamental

generar procesos organizados donde los estudiantes puedan manipular, visualizar y representar estos objetos tridimensionales (en el marco teórico se explica desde donde van a ser entendidos estos conceptos) en estos dos espacios, el cual es nuestro objetivo principal. Para ello, es necesario tener en cuenta dificultades que se han presentado en este aspecto, para a partir de ello tener mayores elementos en el momento de diseñar o rediseñar actividades en torno a las representaciones de los poliedros.

Por lo anterior este trabajo aporta a la reflexión de maestros interesados en este tipo de problemas y a los estudiantes objetos de investigación. De igual manera aporta a la formación de las autoras en prácticas investigativas propias del campo de la Educación Matemática que permitan ubicar variables de análisis en el estudio de los poliedros, validar situaciones y actividades diseñadas en otras investigaciones y fomentar procesos de sistematización de representación en geometría.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general.

Aproximar a estudiantes de la educación básica a conceptos y procedimientos relacionados con las representaciones tridimensionales y bidimensionales de algunos sólidos como los prismas y las pirámides a través de una secuencia didáctica.

1.3.2 Objetivos específicos.

- Identificar dificultades y problemáticas relacionadas con las representaciones de cuerpos geométricos en el espacio, a través de una búsqueda bibliográfica.
- Reconocer estrategias y desempeños de los estudiantes para manipular y representar sólidos a través de tareas de comparación, movimiento, representación y construcción de sólidos.
- Identificar procesos de visualización y representación en los estudiantes.
- Propiciar espacios de reflexión, análisis y argumentación de los componentes y propiedades de algunos cuerpos geométricos como prismas y pirámides.

1.4 ANTECEDENTES

El ser humano desde inicios de la existencia se ha preocupado por tratar de darle explicación a los fenómenos que lo rodean para así poder interactuar mejor en el mundo en el cual vive, basándose en campos científicos también creados por él como las matemáticas y sus diferentes ramas, entre ellas la geometría, donde gracias a éstas ha podido hallar respuesta a muchas de sus incógnitas.

Un factor interesante para el hombre ha sido comprender el espacio en el cual habita con la intención de desenvolverse en éste con mayor facilidad, por lo que se creó la geometría, tomada como la ciencia que estudia las representaciones espaciales, en este sentido, la escuela forjadora de cultura, presentó la gran preocupación por desarrollar en los estudiantes facultades que le permitan conocer el mundo exterior y manejar el espacio, ya que ésta es una “habilidad”³ que requerimos en todos los instantes de nuestra vida, incluye tanto la capacidad para no perdernos en algún lugar, saber buscar una dirección, aprovechar los espacios, pintar, realizar un plano, empacar una maleta, organizar una oficina, entre muchas otras actividades, motivo por el cual se empezó a incluir en el currículo escolar la enseñanza de la geometría.

Sin embargo y a pesar de la gran importancia que ésta tiene en los sujetos, la mayoría de veces, se ha tomado como un campo de estudio reducido, el cual se debe saber por añadidura en las clases de matemáticas estancando los estudiantes a los saberes más reducidos del área sin llevarlos a la práctica, el cuál debería de ser su principal objetivo, pues si privilegia el estudio de las relaciones del hombre con el espacio, ¿cómo es posible que no se lleve a su totalidad en lo que a ella se refiere?, ocasionando así dificultades a los niños con aquello que se refiere al dominio espacial.

Una de nuestros más grandes interrogantes y puntos de referencia en el desarrollo de este trabajo de investigación, es la pertinencia de la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar, pues esta debe ser concebida por los maestros como eje

³ Entendida como el grado de competencia de una persona frente a un objetivo determinado o como la destreza o capacidad para ejecutar una cosa en relación con las personas, bien a título individual o bien en grupo.

fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático y por ende de los conceptos geométricos implícitos en la vida cotidiana de todo ser humano, en este sentido cabe resaltar que algunas investigaciones muestran como ésta se ve limitada a la representación de elementos aislados u orientada a la asignación numérica (medición) o aplicación de unidades de medida, dejando de lado procesos fundamentales en el desarrollo de ésta ciencia, como son, la observación, la interacción, el análisis, las demostraciones, entre otros.

En este sentido retomamos los planteamientos de A Martínez Recio y E Juan Rivaya, en su libro “una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría” en el cual se plantea que

La geometría ha sido concebida como una clase sin contenido real, donde sólo se ve el concepto y la representación de líneas, puntos, copia de figuras y teoremas, dibujos, entre otros, sin verle sentido alguno (...) Se ha creado una gran cortina que le impide a las personas observar, actuar y pensar sobre los verdaderos basamentos constituidos de tan importante asignatura⁴.

No es desconocido que a la mayoría de las personas se les dificulta el poder conocer en un contexto definido un tipo de figura con unas características específicas, ello en gran parte se debe a la forma como nos han introducido a la geometría y especialmente a la poca utilidad que le encontramos en nuestra vida diaria, pues desde el inicio de la escolaridad se nos presenta el mundo de las figuras como un objeto de conocimiento dirigido únicamente a pocas de ellas tales como el cuadrado, triángulo, rectángulo y círculo, en una misma posición, asociados a factores visuales tales como el tamaño, el color y la textura, razón por la cual no se trasciende a sus propiedades, composiciones y clasificaciones, dejando de lado figuras más complejas e igual de importantes que las anteriores, las cuales encontramos representadas a nuestro alrededor en diversos elementos de la vida diaria, tales como la pirámide, cilindro, cubo, esfera, prisma, entre otras, que al ser exploradas en nuestro contexto generan una idea general de las propiedades y elementos que las conforman las cuales permiten hacer conjeturas o reflexiones con el fin de llegar a conceptualizarlos o matematizarlos para luego ser empleados en la construcción de nuevos elementos de la cotidianidad.

⁴ MARTÍNEZ Ángel y RIVAYA Juan. Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría. Madrid- España: Síntesis, , octubre de 1998.

La mayoría de los maestros tradicionalmente hacen en el aula representaciones a lápiz y papel de las figuras planas y tridimensionales, estancando los análisis y la visibilidad que podrían dar lugar las representaciones tridimensionales de los objetos, pues es más difícil tratar de comprenderlo con lo bidimensional cuando ésta no es su naturaleza. Si por el contrario en las clases de matemática se privilegiara la manipulación de las figuras, las comparaciones de unas con otras, la creación de hipótesis, entre muchas otras actividades, los estudiantes podrían atribuir mayor sentido a las tareas geométricas, lo cual disminuiría las falencias que se presentan en ésta área. Por tal razón y teniendo en cuenta que este trabajo de investigación se basa en una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría, se retoman algunos planteamientos al respecto.

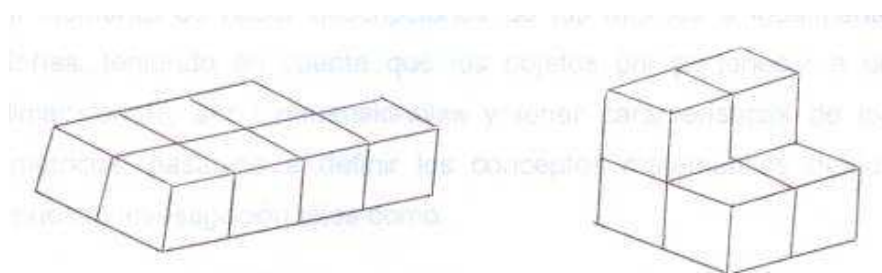
La geometría a través de los años de primaria, debe ser tan real como la aritmética, y aún más, pues los alumnos tienen mejores posibilidades para interactuar dentro de lo tangible y lo plástico y se hallan rodeados de cuanto constituye su estudio primordial: frutas, muebles, cajas, piedras, monumentos, edificios, vehículos, utensilios diversos, etc. la naturaleza y la industria contribuyen a que el estudio de la geometría sea verdaderamente concreto, lo cual equivale a afirmar que las relaciones de los cuerpos que forman el ambiente del niño es primordial para la geometría⁵.

Por otro lado, al revisar algunas investigaciones realizadas al respecto, identificamos la carencia que se encuentra en los estudiantes de básica primaria en la visualización de los elementos que conforman los poliedros a partir de diferentes perspectivas, así como de las falencias en la representación de los cuerpos geométricos y a establecer relaciones entre el desarrollo de una figura y su respectiva construcción, en este sentido, algunas investigaciones realizadas por Piaget acerca del aprendizaje de las matemáticas y especialmente de la geometría con niños de cinco a ocho años, identificó las dificultades que presentaban éstos con relación a la construcción de figuras tridimensionales, debido a que la escuela la mayoría de veces brinda experiencias donde se ponen en juego las representaciones bidimensionales, llevando a que los niños no sean capaces de imaginar un poliedro desarrollado o a partir del desarrollo de la figura, mostrarla tridimensionalmente y a la incapacidad que tienen de poder visualizar ciertos elementos desde diferentes perspectivas o imaginarlos.

⁵ CHAMORRO María del Carmen. Didáctica de las matemáticas. Madrid: Pearson, 2005, P. 28

La primera encuesta APU⁶ de enseñanza primaria informó de las dificultades que presentaron los estudiantes frente algunos problemas planteados, donde se ponían en juego las figuras tridimensionales, la visualización y construcción que éstos tenían con respecto a ellos desde diferentes ángulos. También se presentaron dificultades con las orientaciones izquierda-derecha, evidenciando un serio problema presente en las escuelas con relación a los conocimientos geométricos. Alrededor de la cuarta parte de los alumnos a los cuales se les aplicó la encuesta, supieron seleccionar en un conjunto de distintas configuraciones planas conformadas por seis cuadrados congruentes, las tres que correspondían a desarrollo de cubos.

Uno de los test prácticos de esta encuesta consistió en observar la capacidad de los alumnos para traducir figuras de sólidos tridimensionales a modelos materiales, utilizando dados de madera. Los encuestadores informan de que la gran mayoría de los niños de once años realizaron con gran facilidad la mayor parte de las tareas más sencillas, como la construcción de modelos a partir de estas figuras.



En cuanto a la importancia que tiene el pensamiento espacial se retoman los planteamientos de Delaney⁷

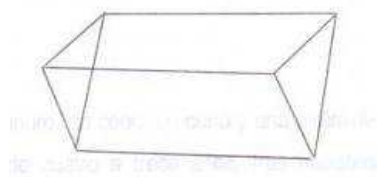
- La preocupación y ansiedad existentes por que los niños adquieran destrezas numéricas tiende a oscurecer el hecho real de que casi todo el mundo ha de afrontar con mucha mayor frecuencia problemas espaciales que problemas numéricos, ya sea trabajando de albañil, diseñador de ropa o de dibujante, ya en actividades "cotidianas" como estacionar automóviles, jugar al tenis o montar una estantería.
- (...) La facilidad y destreza para lo espacial es componente esencial del funcionamiento matemático (...) En el corazón mismo de casi todo el

⁶ DICKSON, Linda; BROWN, Margaret y GIBSON Olwen. Aprendizaje de las Matemáticas. Barcelona-España: Laboure S.A. Ministerio de Educación y Ciencia, 1991

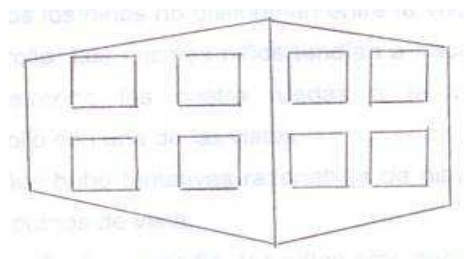
⁷ DELANEY. Libro maestro correspondiente a la serie televisiva Leapfrog. 1979.

pensamiento matemático parece latir un conocimiento intuitivo de las propiedades del espacio.

Por otra parte Bishop⁸ señala que las representaciones bidimensionales de los objetos tridimensionales son con frecuencia asunto convencional. Señala que mientras trabajaba en Papúa Nueva Guinea encontró estudiantes universitarios incapaces de interpretar como prisma rectangular la siguiente figura.



Mientras otros se contentaban con representar las ventanas de una casa cuyo esbozo se les daba, como en la siguiente figura.



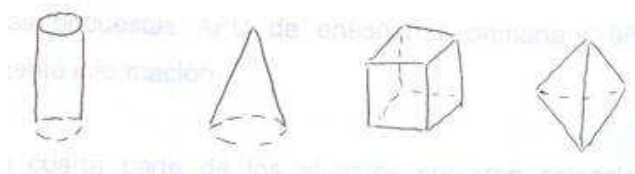
Sin embargo tales estudiantes eran capaces de realizar proezas de memorización espacial que dejaban muy atrás las que normalmente encontramos en nuestra cultura, lo que sugiere que tal representación no se desarrolla de forma <innata> siendo preciso aprenderla mediante el ejemplo.

También retomamos algunos experimentos realizados por Piaget⁹ con niños de cuatro a trece años para indagar qué comprensión tenían de las propiedades proyectivas de las figuras, en la cual mostró un cilindro, un cono, un cubo y una pirámide (tetraedro) a cierto número de niños, de cuatro a trece años, tras haberles mostrado que se entendida por desarrollo de un cuerpo (para lo cual desarrollaron un quinto objeto) Piaget les pidió que dibujasen

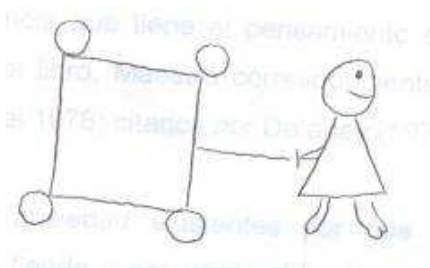
⁸ DICKSON, Op. Cit., P: 112

⁹ Ibid., P.113

primero el objeto tridimensional tal cual lo veían, y después, la forma que pensaban que se obtendría cuando lo desarrollasen.



Entre los cinco y los ocho años los niños no distinguían entre la vista que observaban del objeto y su desarrollo. Los mismos niños tendían a hacer un dibujo de un carro y caballo mostrando las cuatro ruedas a la vez, confundiendo nuevamente el desarrollo con una de las vistas. Entre los siete y los nueve años hubo tentativas razonables de dibujos del desarrollo, coordinando diversos puntos de vista. Desde la edad de unos ocho años y medio, los niños eran capaces de dibujar los desarrollos correspondientes al cubo, cilindro y cono.



De igual forma partimos de un proyecto de investigación realizado por las autoras de este documento, en el año 2002 para obtener el título de Normalista Superior en la Normal Superior Farallones de Cali, el cual tenía como título “Representaciones bidimensionales del espacio tridimensional y viceversa” pues éste permitió identificar las carencias que tienen los estudiantes respecto a las representaciones bidimensionales de algunos poliedros, al igual que las dificultades al relacionar el desarrollo de un cuerpo con su respectiva construcción; a identificar los componentes de un cuerpo geométrico a pesar de que su posición no les permita verlos; y a centrar su atención en los componentes de un cuerpo como vértices, aristas, caras etc. y no a verlos como un todo en el que su atención se centraba en elementos tales como el tamaño y color.

Este proyecto, en el cual se realizaron algunas pruebas diagnosticas con el fin de evaluar los conocimientos previos de los estudiantes y algunas actividades

de clase que buscaban fortalecer el pensamiento espacial y movilizar conocimiento respecto a los cuerpos geométricos, es una base fundamental en el desarrollo de los planteamientos expuestos como finalidad de esta investigación, pues partiendo de ellos, se identifica la existencia de una problemática respecto al aprendizaje de las representaciones tanto bidimensionales como tridimensionales de los objetos del entorno y de los cuerpos matemáticos que se encuentran representados a través de ellos.

Para fortalecer dichos planteamientos, este trabajo se basa en la investigación realizada por un grupo de maestros en Valencia España y dirigida por Gregoria Guillén Soler, el cual tiene como título “La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B” en ésta se realiza un diseño de secuencias didácticas, orientadas al reconocimiento y análisis de cuerpos geométricos espaciales, al análisis, descripción y clasificación de cuerpos geométricos y al desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales.

Este documento representa una fuente de información muy importante, pues parte de un marco teórico consistente en el que se incluye el análisis de libros de textos y documentos de diversos autores y épocas, de igual forma hace una propuesta de actividades planeadas para desarrollar en los estudiantes cada uno de los ejes propuestos, determinando entre uno de sus objetivos, experimentar con diferentes materiales y entornos en los que se puedan plantear actividades de visualización espacial.

Ha quedado demostrada plenamente nuestra previsión en la mayoría de las variables consideradas, pues hemos podido observar diferencias significativas en las actividades correspondientes a cada valor de las variables, tanto en la dificultad como en la necesidad de uso de distintos procesos y habilidades de visualización¹⁰.

Esta investigación muestra cómo con el uso de diferentes materiales físicos e informáticos, los estudiantes tienen una mejor visión de los elementos que conforman los cuerpos geométricos y pueden interactuar con ellos de una manera práctica, también logra incentivar en ellos el análisis, discusión y argumentación de sus planteamientos, razón por la cual se retoman algunas de las actividades planteadas por este grupo de investigadores y se hacen algunas reformas que permitan llevarlas al aula de clase, para movilizar

¹⁰ GUILLEN, Gregoria. La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B. Valencia España: 1992, P. 91

elementos y propiedades presentes en poliedros tales como los prismas y pirámides rectas.

1.5 MARCO CONTEXTUAL

La investigación planteada en este trabajo de grado es una investigación que no sólo pone de manifiesto algunos fundamentos teóricos y empíricos que reflejan una problemática en el campo matemático, en especial en el geométrico, sino, que busca abordar la problemática a través de una intervención directa en el aula para promover procesos que permitan a los estudiantes caer en un conflicto cognitivo interno que los conduzca a un cambio en sus esquemas de conocimiento y así pueda suceder lo que llamamos aprendizaje, el cual para efectos del proyecto concierne a los conceptos y procedimientos relacionados con las representaciones tridimensionales y bidimensionales de algunos poliedros como prismas y pirámides.

Teniendo en cuenta que dicha intervención en el aula se hace mediante la implementación de una secuencia didáctica, en la cual los estudiantes tienen un rol determinante, es necesario para la investigación y para los lectores de la misma, conocer un poco sobre la población en la cual se implementa la secuencia, para lo cual se muestra de manera muy general la institución en el cual se lleva a cabo la experiencia, así como algunos elementos de su filosofía, para después especificar lo concerniente al grupo de trabajo.

La Institución Educativa en la cual se hace la intervención en el aula es La Escuela Normal Superior Farallones de Cali ubicada al suroeste de la ciudad, en un estrato social medio (tres), la cual tiene como énfasis la formación de maestros. Es una Institución del estado líder en la ciudad de Cali, que cuenta con certificación de calidad desde el año 2007 con setenta y dos años de fundada, la cual en la actualidad busca mejorar sus prácticas en función de la formación integral de sus egresados. Para ello la institución ha planteado la siguiente visión y misión:

LA VISIÓN

El alcance de los horizontes trazados le permitirá a la Escuela Normal Superior, ser reconocida, en los ámbitos local, regional y nacional, como una institución educativa de excelencia por la formación inicial que brinde a sus egresados, bachilleres con profundización en educación y formación pedagógica y normalistas

superiores, con énfasis en educación matemática, cuyo campo de desempeño es el preescolar y la educación básica, fundamento de ulteriores profundizaciones.

LA MISIÓN

Formar maestros normalistas superiores que se distingan por su amor a la vida, su compromiso con el trabajo pedagógico y su identificación con su profesión, su idoneidad ética, su conciencia crítica, su contribución decidida a la superación de los problemas de convivencia, su disposición al dialogo con la ciencia y la tecnología, su capacidad de aportar al desarrollo del campo de la educación y de la pedagogía, de proponer soluciones a los problemas que plantea la educación preescolar y básica, con un adecuado conocimiento del desarrollo infantil y del papel que en este cumplen los distintos lenguajes y, concretamente, el lenguaje de las matemáticas.

Para ello, la institución plantea dentro de los objetivos institucionales, el objetivo general el cual busca formar maestros de educación preescolar y básica primaria con énfasis en Educación Matemática, caracterizados por su idoneidad ética y profesional e identificada con la labor que realiza y consciente de su valor social como intelectuales y trabajadores de la cultura.

Además de indagar un poco sobre los propósitos e ideales de la institución, es importante conocer algunos aspectos filosóficos planteados desde su Proyecto Educativo Institucional, los cuales son expuestos a continuación.

El concepto de educación que se maneja acoge la educación de sus maestros y futuros egresados a la manera como la concibe el pedagogo Pestalozzi. En ella se plantea una educación integral, por la vida y para la vida, a partir del cultivo de sus facultades y la disposición del corazón, del espíritu y del poder de cada cual de acuerdo con su naturaleza, este tipo de educación abarca el desarrollo armónico del niño bajo la orientación de los padres, en especial de la madre o el maestro a través de una obra gradual y progresiva. También privilegia el concepto de educación basado en las teorías de Emmanuel Kant donde el ser adquiera independencia y busque servirse de su propio entendimiento y responsabilidades.

Dentro de los componentes que soportan su PEI, según lo estipulado en el Art. 73 de la ley 115 de 1.994 encontramos algunos principios y fines del establecimiento, entre los cuales están:

- el desdibujamiento de la imagen del maestro.
- la indiferencia, cuando no la intolerancia ante el otro.

- la falta de compromiso como ciudadanos y consigo mismos.
- la actitud facilista y engañosa con relación al trabajo.
- La pérdida de valores éticos y estéticos fundamentales.

Para lograr lo planteado en el PEI y con el fin de lograr una educación integral de los estudiantes, es necesario también una formación y capacitación constante por parte de los maestros, proceso que requiere de una disposición de tiempos y espacios. El proceso de mejoramiento y certificación de calidad de la educación la Normal se ha caracterizado por consagrar un tiempo para favorecer la reflexión sobre las condiciones de posibilidad de su reestructuración.

En este sentido se ha enriquecido el dialogo permanente del maestro con la pedagogía y la didáctica en interrelación con otros saberes para la comprensión de la practica pedagógica y su transformación. Por ello se reconoce la importancia de una formación pedagógica y disciplinar permanente para el maestro y la continuidad del grupo docente y el trabajo en equipo.

Expuestos algunos aspectos filosóficos de la institución, se describen algunos elementos de la población estudiantil. La institución estudiantil cuenta con estudiantes de estrato uno, dos y tres en su gran mayoría, los cuales van desde el nivel preescolar hasta el ciclo complementario de educación superior, en ambas jornadas. Dada la función establecida por el MEN en el año 2005 ésta quedó conformada por siete sedes, de las cuales seis trabajan únicamente con los grados de educación básica primaria.

La secuencia didáctica es implementada con estudiantes de quinto grado jornada de la tarde, de la sede principal, el grado cuenta con treinta y dos estudiantes, de los cuales hay trece niños y diez y nueve niñas los cuales oscilan en un rango de edades entre los once y trece años. La enseñanza a los estudiantes es por áreas en algunas asignaturas como educación física, sistemas, danzas, música, natación, artística, e idioma extranjero. Las áreas como sociales, ética y valores y artística son enseñadas por un profesor y en las otras áreas como ciencias naturales, lengua castellana y matemática, tienen un maestro el cual es el orientador de grupo. La jornada académica inicia a 1:00 PM y finaliza las 6:00 PM.

CAPÍTULO II

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS PARA LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO II

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS PARA LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se integran todos los elementos teóricos por medio de los cuales se sustenta la problemática planteada y se le da consistencia a través de diferentes planteamientos por distintos autores tanto del campo didáctico, como curricular y matemático. Además, se especifican los referentes teóricos que sustentan la investigación a través de la delimitación de varios ejes dentro de los cuales se encuentran el aspecto curricular; éste es abordado desde diferentes enfoques, el primero concerniente a lo planteado por el MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), segundo a lo estipulado por los Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas (2006) y tercero desde las pruebas externas las cuales abordan elementos relacionados con factores de visualización y representaciones de los poliedros especialmente de los prismas y las pirámides; el aspecto matemático el cual delimita todos los conceptos pertinentes para la investigación; el aspecto didáctico, dentro del cual se desarrollan ideas relacionadas con los procesos de aprendizaje de los estudiantes haciendo hincapié en la especificidad de los procesos asociados a la geometría y al tema objeto de estudio y finalmente aspectos relacionados con la teoría de las situaciones didácticas, así como la forma de llevarla a cabo en la experiencia.

2.1 ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS

Para realizar este trabajo de investigación es necesario determinar algunos elementos, conceptos y aspectos que fueron de vital importancia en el diseño, planeación y ejecución de la situación didáctica propuesta. Estos son clasificados de acuerdo a tres aspectos, el curricular, matemático y didáctico.

Dado que la secuencia didáctica está enfocada en la exploración activa del espacio tridimensional y bidimensional a través de factores de representación y visualización; exponemos algunos aspectos relacionados con los distintos conceptos, procesos y enfoques didácticos - pedagógicos en los que está fundado el trabajo.

2.1.1 Aspectos curriculares

Como primer aspecto tratamos la noción de pensamiento espacial, este se entiende como “conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, las transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales”¹¹.

De acuerdo con lo anterior, el pensamiento espacial constituye un elemento importante en el desarrollo mental de los sujetos, en tanto que *“los conceptos espaciales se necesitan para interpretar, entender y apreciar nuestro mundo que es inherentemente geométrico”*¹² en esta medida entendemos que el desarrollo de este se hace posible a través de la interacción que tenga el sujeto con su entorno, permitiéndole conocer el espacio en el cual se desenvuelve y adquirir nociones que a su vez le permiten movilizarse en él de una manera consciente. De igual forma representar mentalmente el espacio circundante y aquel que su mente no ha constituido por experiencias pasadas, queriendo decir con ello que a pesar de no conocer en realidad algo, por esa capacidad de imaginación espacial y de poseer nociones y relaciones espaciales tales como arriba, abajo, derecha, izquierda, cerca – lejos, entre otras, puede aludir al objeto bajo representaciones mentales.

Retomando los planteamientos de los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática, los cuales plantean que *“los niños que desarrollan un sentido sólido de relaciones espaciales y que dominan los conceptos y el lenguaje de la geometría están mejor preparados para aprender ideas numéricas y de medición, así como otros temas matemáticos más avanzados”*¹³ y considerando que el desarrollo del pensamiento espacial genera en los estudiantes dominio de conceptos matemáticos y por consiguiente de otras disciplinas, es pertinente ahondar en el pensamiento espacial, en tanto que éste se haya íntimamente relacionado con el esquema corporal y puede entenderse como la estructuración del mundo externo, que primeramente se relaciona con el yo y luego con otras personas y objetos que se hallen en situación estática o en movimiento.

¹¹ MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Lineamientos curriculares en matemáticas, Colombia: cooperativa editorial magisterio, 1998, P. 56

¹² NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), Estándares Curriculares de Evaluación para la Educación Matemática, Sevilla, Edición en castellano: sociedad andaluza de Educación Matemática “THALES”, 1989, P. 48

¹³ Ibid., P.50

Se trata, por consiguiente, del conocimiento del mundo externo tomando como referencia el propio yo, conocimiento que le permite a través de la exploración reconocer formas y abstraer propiedades invariantes de objetos del entorno que pueden representarse bajo formas geométricas con propiedades establecidas que finalmente pueden ser estudiadas y empleadas en la construcción de nuevos elementos físicos o en aplicaciones materiales cotidianas.

Lo mencionado anteriormente, hace alusión al pensamiento espacial, aspecto relevante en la exploración activa del entorno, sin embargo, nuestra atención se centra en el manejo del espacio, direccionado hacia las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional y viceversa, la cual se entiende desde los Lineamientos Curriculares de Colombia (1998) como *“la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y en la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio”(…)* *“la representación en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la realidad, puede hacerse mediante dibujos de “vista única”¹⁴ o dibujos de “vista múltiple”¹⁵.*

De esta manera es de vital importancia dentro del aspecto curricular revisar lo planteado tanto desde los Lineamientos como los Estándares Curriculares y algunas pruebas externas.

▪ Desde los Lineamientos Curriculares.

Actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en la actividad matemática, no solo en lo que se refiere a la geometría. La propuesta de renovación curricular ha avanzado enfatizando la geometría como una alternativa para restablecer el estudio de sistemas geométricos de exploración y representación del espacio.

Para ello se hace necesario establecer una proximidad entre el estudiante, los objetos físicos y lo que éste puede hacer con ellos para desarrollar pensamientos matemáticos.

¹⁴ Los dibujos de vista única son aquellos en los que se ilustran las tres dimensiones del objeto en una sola vista, con la cual se logra representar el objeto de una manera muy próxima a la realidad.

¹⁵ Los dibujos de vistas múltiples representan los objetos a través de una serie fragmentada de vistas relacionadas

Entre los logros más importantes del estudio de la geometría están:

- Exploración del espacio.
- Desarrollo de la imaginación tridimensional.
- Formulación y discusión de conjeturas.
- Jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones.

En este sentido, el desarrollo del pensamiento espacial, se evidencia a través de ciertos desempeños tales como:

- Comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos 3D (a partir de la utilidad de representaciones planas de las formas y relaciones 3D).
- Desarrollar y contemplar la percepción del espacio (a través de distintas representaciones de variados objetos ubicados una multiplicidad de veces en el espacio).
- Desarrollo de la perspectiva (a través de la experimentación y visualización de distintos cuerpos desde varios puntos de referencia).
- Dar cuenta de las transformaciones que se presentan entre los objetos (dados por factores de visualización, nociones de proporcionalidad, conservación de propiedades y ubicación espacial).

▪ **Desde los estándares básicos de competencias.**

Basándonos en los Estándares Básicos de Competencias, en lo referente al desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, encontramos procesos cognitivos que subyacen a la actividad geométrica, entre los cuales para efectos de esta investigación, se retoma, la representación. En este sentido algunas de las actividades del trabajo matemático escolar deben estar encaminadas a reconocer características de los diversos objetos matemáticos, a través del estudio de sus diferentes sistemas de representación, lo cual lleva a los estudiantes a construir y comunicar su conocimiento matemático.

De esta manera, se explicitan algunos estándares establecidos para el segundo ciclo de la educación básica.

Estándar 1:

Dibujar y describir figuras 3D en distintas posiciones y tamaños.

Estándar 2:

Construir objetos 3D a partir de representaciones 2D y realizar el proceso contable en contextos de arte, diseño y arquitectura.

Estándar 3:

Comparar y clasificar objetos 3D de acuerdo a sus componentes (Caras, lados y aristas)

Estándar 4:

Construir y descomponer figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.

De esta manera, los planteamientos establecidos tanto por los Lineamientos Curriculares de Matemática como los Estándares correspondientes al segundo ciclo de la educación básica primaria (grados 4º y 5º) son tenidos en cuenta para el diseño, ejecución y análisis de la secuencia didáctica implementada en la intervención.

▪ **Desde las pruebas externas.**

Las pruebas TIMSS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencia) permiten realizar un análisis frente al desarrollo de habilidades en el área de geometría en donde se puede evidenciar las dificultades de los estudiantes frente al pensamiento espacial. En general, los resultados nacionales son muy bajos frente a los internacionales, encontrando que en las preguntas referidas a las representaciones de los objetos, en las cuales hay inmersos factores de visualización, hubo poco éxito, determinado en gran parte por la ausencia de dichos elementos en el currículo.

De igual forma, en las pruebas Censales (2002) de la educación para grado quinto referidas al pensamiento espacial encontramos sólo dos preguntas (14 y 19) que aluden a las representaciones, de las cuales una tiene un alto porcentaje de éxito y la otra no.

En general, las representaciones de cuerpos geométricos son tomadas en cuenta en mecanismos evaluativos tales como las pruebas Saber, TIMSS y pruebas Icfes, aunque no de una forma significativa, en tanto que se evidencia no sólo un descuido desde la escuela, los maestros y los textos escolares en abordar

representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos, sino también de éste tipo de mecanismos o referentes de evaluación.

Lo anterior permite reconocer que los documentos estatales proponen diversos aspectos que deben ser abordados en la enseñanza de la geometría y por consiguiente en las pruebas evaluativas de los estudiantes de básica primaria en los pensamientos espacial y geométrico, los cuales son pertinentes para la planeación de actividades de aula.

2.1.2 Aspectos matemáticos.

Para efectos de este trabajo de investigación, se hizo necesario determinar algunos conceptos matemáticos que son de vital importancia en el diseño y desarrollo de la secuencia didáctica. Como punto de partida de estos aspectos se tiene que estos elementos pertenecen al campo de la geometría euclídea en la cual se considera el espacio carente de métrica, lo que significa que la medición y la determinación de coordenadas no son objeto de referencia en este tipo de geometría sin embargo, no significa que los procesos de medición no se incorporen en algún tipo de tratamiento para determinar características de los objetos geométricos.

A continuación se definen conceptos fundamentales referidos a los poliedros regulares, los cuales se basan en la teoría de Doménech Romá¹⁶ y parten del concepto de ángulo diedro, ángulo poliedro con sus respectivas partes y teoremas para llegar a conceptualizar a partir de allí cualquier tipo de poliedro.

En este sentido, ángulo diedro es entendido como aquella porción del espacio comprendida y limitada por dos semiplanos que tienen en común la recta que los define y ángulo poliedro como aquella parte del espacio comprendida y limitada por varios planos que se cortan dos a dos y tienen un punto común.

Las partes de un ángulo poliedro son:

Arista: intersección de dos caras.

Vértice: punto común de todas las aristas.

Caras: porción de plano comprendida entre dos aristas consecutivas.

¹⁶ DOMÉNECH ROMÁ, Jorge. Geometría descriptiva: poliedros regulares. San Vicente (Alicante): club universitario, 2003, p.118.

Dentro del concepto geométrico de ángulo poliedro conviene diferenciar a su vez dos conceptos ligados a él; en todo ángulo poliedro podremos hablar siempre de dos ángulos.

Ángulo de una cara: es el ángulo que una cara forma entre sus aristas.

Ángulo de un diedro: es un ángulo que un diedro concreto, del ángulo poliedro, forma entre las caras que lo configuran.

De igual forma se establecen algunos teoremas de los ángulos poliedros:

Teorema 1: en todo ángulo poliedro, el ángulo de una cara es menor que la suma de los ángulos de las demás caras.

Teorema 2: en todo ángulo poliedro convexo, la suma de sus ángulos de las caras es menor que cuatro rectos.

Teorema 3: en un ángulo poliedro de n caras, la suma de sus ángulos de sus diedros es mayor que $2(n-2)$ rectos y menor que $2n$ rectos.

Finalmente y teniendo en cuenta tanto las definiciones anteriores como los teoremas, podemos llegar al concepto de poliedro como: aquella porción del espacio cerrada y limitada por superficies planas poligonales de tal forma que cada lado pertenece simultáneamente a dos polígonos continuos y dos polígonos cualesquiera con un lado común pertenecen a dos distintos planos.

Sus partes son:

Caras: porción de plano de contorno poligonal que limita el poliedro.

Vértices: intersección de las aristas.

Aristas: intersección de dos caras.

Ángulos diedros: los formados por dos caras que tienen una arista común.

Ángulos poliedros: los formados por varias caras que tienen un vértice común.

Diagonal: segmento de recta que une dos vértices no situados en una misma cara y que contiene al centro geométrico del poliedro.

A partir de lo anterior tenemos que existen diferentes tipos de poliedros, para efectos de nuestro temas de interés se define poliedro regular.

Poliedros regulares: Un poliedro es regular cuando tiene todos sus ángulos poliedros iguales, siendo todas sus caras polígonos regulares.

Para efectos de este trabajo, los términos poliedro, cuerpo geométrico o sólido, deben ser entendidos de la misma forma.

Hay otra idea de poliedro distinta que se deriva de los modelos de poliedros contruidos y de las formas contruidas, en la cual se tiene como caras a los polígonos que forman el poliedro, aristas a cualquier lado común de dos caras y vértice a los puntos donde se juntan más de dos caras.

Encontramos también que los poliedros pueden tener distintas clasificaciones, en este documento, se alude a los cuerpos objeto de estudio en la secuencia, *prismas y pirámides de base regular*, los cuales son abordados desde los planteamientos de Gregoria Guillén Soler ¹⁷ en su texto Poliedros.

Prismas

Los Prismas son poliedros que tienen:

Dos caras paralelas; que son polígonos y se llaman bases.
El resto de las caras que son paralelogramos y son las caras laterales.

Clases de prismas:

- Prismas regulares: sus bases son polígonos regulares.
- Prismas irregulares: sus bases son polígonos irregulares.
- Prisma recto: cuando las caras laterales son perpendiculares a la base, son cuadrados o rectángulos.
- Prisma oblicuo: las caras laterales no son perpendiculares a las bases, las caras laterales son rombos o romboides.
- Paralelepípedo: es un prisma de seis caras todas ellas paralelogramos.

Los antiprismas de base irregular también se pueden construir. Tendrán dos caras iguales y paralelas y tantos triángulos por caras laterales como lados tenga el polígono de las bases. Pero los triángulos ya no tienen que ser isósceles.

Los sólidos que llamaremos antiprismas también tienen dos bases, pero están unidas por triángulos. Al igual que en los prismas las bases son polígonos iguales y paralelos, pero en los antiprismas el polígono de una base está girado respecto al polígono de la otra base. Las bases están colocadas en lo que llamaremos posición opuesta: en los polígonos regulares, los vértices de un Polígono se corresponden en los puntos medios de los lados del otro polígono.

¹⁷ GUILLÉN, Gregoria. Poliedros. Madrid: Síntesis, 1999, P. 16-19.

Pirámides

Las Pirámides son poliedros que tienen:

Una cara; que es un polígono y se llama base

El resto de las caras que son triángulos los cuales se unen en un vértice común y son las caras laterales de la pirámide

Las caras laterales son triángulos que concurren en un punto que llamaremos ápice. (Observe la Fig. 1)

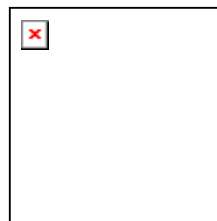


Fig. 1 pirámide pentagonal

Clases de pirámides:

- Pirámide regular: la base es un polígono regular y las caras laterales triángulos isósceles.
- Pirámide irregular: cuando tiene por base un polígono irregular.
- Pirámide recta: las caras laterales son triángulos isósceles.
- Pirámide oblicua: alguna de las caras laterales no es un triángulo isósceles.
- Pirámide convexa: cuando la base es un polígono convexo y pirámide cóncava cuando la base es un polígono cóncavo.

También se consideran prismas, antiprismas o pirámides los poliedros de la Fig.2

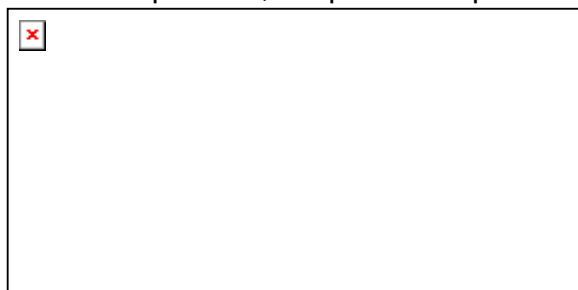


Fig. 2

Las Bipirámides son las formas que se obtienen cuando se juntan dos pirámides de bases iguales, de manera que ajusten completamente sus bases. (Observe Fig.3)

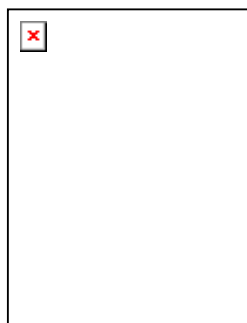


Fig. 3. bipirámide de base regular

Definidos estos conceptos, es pertinente tener en cuenta distintos procesos de aproximación a los objetos, dentro de lo matemático, que permiten una mejor apropiación de los mismos, para ello, se retoman igualmente algunos aspectos de la teoría de Gregoria, de carácter didáctico, siendo los hilos conductores y mediadores entre la implementación de la secuencia didáctica y el trabajo alrededor de los poliedros.

La imagen que uno se va formando de un concepto está basada, además de atributos críticos, en factores preceptuales y atributos no críticos se dan por casualidad que influyen en el reconocimiento de algunos ejemplos del concepto.

Se ha comprobado que la orientación es uno de los factores que tienen una considerable importancia en la imagen que los estudiantes y profesores se forman de algunos conceptos. En algunos prismas de la Fig. 3. La forma de presentarlos no corresponde a la manera usual de verlos, no se refleja la idea de esbeltez del prisma y además, al no estar apoyados sobre las caras que se llaman bases de prisma, se entra en conflicto con la idea que se tiene de base de un objeto como punto de apoyo. Pero ambas ideas están basadas en atributos preceptuales no críticos del concepto de prisma y de base de un prisma, que conduce a ideas erróneas que se tienen que corregir.

Además, la imagen que uno se va formando de un concepto se afina, ampliamente y cambia a medida que se va ampliando el mundo de ejemplos posibles. Por ejemplo, la imagen del concepto de prisma se irá formando de manera que al

principio incluya sólo a los prismas de base regular, luego a todos los que tienen por bases polígonos convexos, y después también a los que tienen bases cóncavas.

En algunos prismas, antiprismas y pirámides (véase Fig. 4) las bases no son regulares son polígonos convexos y en otros las bases son polígonos cóncavos.



Fig. 4

Observación y descripción de poliedros. Lo que permite organizar y dar nombre a los poliedros es la clasificación. Los poliedros nos permiten separarlos en virtud de ciertas características. De ahí que se dé nombre a familias de poliedros, los prismas, antiprismas, etc. Al introducir estas nuevas familias, por ejemplo los prismas oblicuos, se ha variado la idea que se tenía de las iniciales (prismas antiprismas, etc.) Y el problema del nombre asociado a la clasificación. A una clase de sólidos le damos el nombre genérico prisma, antiprismas, pirámide, etc. y un adjetivo que exprese la variación producida.

A una subclase que también cumpla otra característica, le damos el nombre de la clase aumentando con “algo” que haga referencia a la característica: por ejemplo prisma oblicuo de base cóncava. Al observar poliedros con diferentes aspectos surgen ideas sobre concavidad y convexidad: los poliedros cóncavos y los convexos (Véase Fig. 5).



Fig. 5

Una idea primitiva de **poliedro convexo** es la siguiente: Se puede apoyar sobre cualquiera de sus caras.

De esta manera, podremos observar, describir, trabajar con varias clases de poliedros que cumplan con distintas características como las que nombramos a continuación:

- Poliedros con todas las caras iguales
- Poliedros con caras laterales iguales
- Poliedros con todas las caras regulares
- Poliedros con todas las caras de la misma clase: todas son triángulos, o rectángulos.
- Poliedros con el mismo número de caras. Hay poliedros con el mismo número de aristas, vértices. Poliedros que están “inclinados”
- Poliedros que tienen claramente una cara donde apoyarse.
- Poliedros que cumplan varias de las observaciones enumeradas.
- Otro tipo de poliedros.

Los aspectos matemáticos que se retoman para el diseño de la secuencia implementada aluden a las características de prismas y pirámides regulares, fundamentalmente los relacionados con las formas de las caras y las bases, el paralelismo de estas, su congruencia, entre otras. Estos aspectos se abordan relacionados con las representaciones en el espacio bidimensional y en el espacio tridimensional.

2.1.3 Aspectos cognitivos.

Como punto de partida se debe tener presente que los significados matemáticos asociados a los procesos que se llevan a cabo en la experiencia están enmarcados dentro de la didáctica de la geometría y las nociones, conceptos, procesos, procedimientos, entre otros relacionados con ella. De esta manera es vital tanto para la investigación como para la contextualización del trabajo abordar desde qué concepción de geometría tiene impacto la experiencia en el aula.

Dado que el objetivo de una intervención escolar está directamente relacionado con los sujetos y los diferentes procesos cognitivos que estos realizan a través de las tareas llevadas por el maestro para que éste aprenda, es importante detallar la forma como el estudiante se acerca a los conceptos geométricos.

En este sentido, el inicio de las nociones geométricas debe comprometerse con el conocimiento, la comprensión y el manejo del espacio del niño. De esta manera se parte del acercamiento y las concepciones que el estudiante tiene del entorno circundante para a partir de ellos mediatizar reflexiones intencionadas que conlleven a darle uso y significado al espacio topológico.

Desde lo planteado en esta perspectiva, se trae a colación algunos referentes teóricos que plantean la necesidad en este tipo de relación entre los agentes del aprendizaje (maestro-estudiantes) y la geometría. Myriam Ortiz Hurtado plantea.

Para que el maestro de matemáticas pueda orientar procesos de construcción de conocimiento geométrico en niños y jóvenes, es imprescindible que haya reflexionado entre muchas otras cosas, en los aspectos que hacen parte del conocimiento y manejo comprensivo del espacio y que tienen relación con las nociones y/o conceptos geométricos, que desde esos conocimientos deberán construir los niños y los jóvenes. Dado que es a partir del estado real de los conocimientos anteriores y del surgimiento de inquietudes y preguntas, que se construyen nuevos conocimientos, éste aspecto de la reflexión y cualificación de los conocimientos que de su espacio tiene el maestro y el estudiante es el punto de partida que posibilita adelantar procesos de aproximación a nociones y conceptos geométricos¹⁸

De igual forma Hurtado¹⁹ plantea algunos aspectos relativos al conocimiento del espacio, los cuales son el lente bajo el cual son entendidas las representaciones bidimensionales y tridimensionales. El conocimiento de los objetos tiene que ver con la discriminación, diferenciación, identificación, separación y clasificación de esos mismos objetos, de acuerdo con sus características.

Sin duda podemos estar de acuerdo en que la forma, el tamaño y la posición son las características de los objetos de mayor relación con nociones y conceptos geométricos.

Lo relativo del tamaño de las dimensiones, y de las dimensiones de los objetos, está determinado entre otras cosas por el referencial respecto del cual se comparan, por la posición y por el espacio en que se les considere.

¹⁸ HURTADO Myriam, Didácticas de las Matemáticas: La iniciación en la construcción del conocimiento geométrico en la escuela. En: Encuentro de geometría y sus aplicaciones. Memorias. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

¹⁹ *Ibíd.*, P. 76.

El largo es característico de los objetos que podemos considerar unidimensionales. Lo ancho y lo largo es característico de objetos que podemos considerar bidimensionales. Lo grueso, lo profundo, lo ancho, lo largo y alto es característico de los objetos que consideramos tridimensionales.

La observación y reflexión intencional acerca de la posición de los objetos permite además de clasificarlos por sus diferentes posiciones, ordenarlos de acuerdo a algunas de éstas posiciones: de arriba hacia abajo; de cerca a lejos, iniciándose en la, apreciación de distancias y comparación de las distancias.

De esta manera la geometría que se aborda en la experiencia, se constituye dentro de un enfoque de la geometría activa como una exploración activa del espacio y de los modos de representación del mismo en la imaginación y en el plano del dibujo, la cual no deja de lado la métrica, por el contrario la tiene en cuenta pero no es el punto de partida sino un proceso necesario generado en el transcurso de la exploración activa.

Se sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aún de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de ‘hacer cosas’, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna²⁰

Por otra parte, con el fin de tener un lente para comprender y analizar los procesos que desarrollan los niños a través de la secuencia didáctica propuesta, tenemos en cuenta una clasificación basada en los procesos de visualización, representación y tipos de tareas propias de la enseñanza de sólidos geométricos, planteados en el proyecto de investigación “La Enseñanza de la Geometría de Sólidos” en el modulo III titulado “Desarrollo de Destrezas de Visualización y Representación de Cuerpos Geométricos Espaciales” escrito por Ángel Gutiérrez Rodríguez y Adela Jaime Pastor.

Dentro de los objetivos del trabajo está promover procesos de visualización y representación de los sólidos geométricos en los estudiantes, por lo que se considera pertinente hacer explicito lo que se entiende por cada uno de estos

²⁰ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Op. Cit., P. 57.

factores, ello se define a partir de diversos investigadores como Bishop (1980; 1983; 1989) Bishop & Nickson(1983) Gaulin (1985), Gaulin & Puchalska (1987), Hoffer (1981, 1987,1988)o Presmeg (1986a;1986b) quienes interpretan la visualización espacial como

Un conjunto de destrezas, predominantemente mentales, que permiten actuar a los individuos en el contexto de las representaciones graficas matemáticas, tomando este contexto en un sentido amplio que abarca las representaciones usuales en los diferentes campos matemáticos como geometría, análisis, álgebra, aritmética, estadística, etc. dentro de este complejo contexto de actividades mentales, se pueden diferenciar 3 tipos de elementos: imágenes, procesos y habilidades²¹.

Para efectos de esta investigación, se describen los conceptos, imágenes mentales, imágenes visuales, así como sus respectivos procesos y habilidades; los diferentes tipos de representaciones planas y tipos de tareas, todos ellos tomados desde la teoría de Guillén²².

En este sentido, las imágenes mentales son tomadas como las representaciones mentales que se pueden hacer de objetos físicos, relaciones, dibujos, conceptos, etc. son el elemento central en toda actividad de razonamiento visual o de visualización espacial. En este podemos encontrar los siguientes tipos de imágenes mentales.

- Imágenes concretas: se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.
- Imágenes de fórmulas: consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las ha visto, por ejemplo en el libro de texto o en la pizarra.
- Imágenes de patrones: son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas.
- Imágenes cinéticas: son imágenes que llevan asociada una actividad muscular, generalmente por el movimiento de manos, cabeza, etc.
- Imágenes dinámicas: son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se crean, utilizan y transforman en la actividad de visualización espacial. Esta manipulación de las

²¹ NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), Op. Cit., P.86

²² GUILLÉN, Op. Cit., P. 21-23

imágenes mentales tiene lugar mediante determinados procesos que, según Bishop (1983; 1989), son de dos tipos.

- Procesamiento visual: este es el proceso de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales. También es este el proceso que permite la transformación de unas imágenes, ya formadas, en otras.
- Interpretación de información figurativa: este es el proceso de lectura, comprensión e interpretación de las representaciones visuales utilizadas en matemáticas (figuras geométricas, gráficas y diagramas de todo tipo) para extraer la información que contienen.

También nos referimos a las habilidades utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales.

- Coordinación motriz de los ojos: es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo, es decir para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
- Percepción de figura y contexto: es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto.
- Conservación de la percepción: es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades, como su forma o tamaño, constantes aunque deje de verse total o parcialmente o se le observe desde diferentes puntos de vista (por ejemplo por un cambio de posición del objeto o del observador) esta habilidad es necesaria para asociar las propiedades identificadas en una imagen mental de un objeto a otras imágenes diferentes del mismo objeto.
- Reconocimiento de posiciones en el espacio: es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.
- Reconocimiento de las relaciones espaciales: es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Dichas relaciones pueden expresarse de manera relativa, es decir referida solamente a los propios objetos, o en términos absolutos, referidas al observador o a un tercer objeto.
- Discriminación visual: es la habilidad que permite compara varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.
- Memoria visual: es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos

que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Por otro lado, sabemos que la representación es un eje fundamental en el desarrollo de los procesos de visualización mencionados anteriormente, por tal motivo, acudimos a las formas de representación de sólidos propuestas por Gaulin & Puchalska (1987) quien se refiere a diferentes tipos de representaciones planas usadas en la enseñanza de la geometría tridimensional.

- Descripción verbal: surge de manera relativamente frecuente entre los estudiantes que carecen de instrucción previa en métodos de representación.
- Representación ortogonal: se basa en el dibujo de varias vistas laterales del sólido, cuyo número depende de la regularidad del cuerpo representado, a este tipo de representación la llamaremos de “vistas laterales”.
- Representación ortogonal codificada: está asociado a una clase especial de sólidos, que en adelante llamaremos “módulos policubos”, consistentes en uniones de una cantidad determinada de cubos unidad iguales. la codificación de cada vista lateral permite saber cuántos cubos unidad hay detrás de los representados en dicha vista.
- Representación plano a plano: esta representación también está asociada a los módulos policubos y consiste en dibujar la vista superior de cada plano del sólido.
- Representación isométrica: se basa en el uso de una retícula regular, generalmente de triángulos equiláteros.
- Representación en perspectiva: se trata de la forma tradicional de representación, si bien los estudiantes, debido a su falta de instrucción al respecto, desconocen la línea del horizonte, de los puntos de fuga y de su número.

Para el desarrollo de nuestra secuencia no nos referimos a todas las formas de representación, en él, hacemos hincapié en la utilización de las representaciones ortogonal, isométrica y en perspectiva.

De igual forma los procesos de representación y visualización se encuentran enmarcados dentro de un grupo de actividades clasificadas de acuerdo a los cuatro tipos planteados en el texto, los cuales son el punto de partida para la

planeación y ejecución de la secuencia didáctica y por ende del respectivo análisis. Los cuatro tipos de actividades son:

- Actividades de comparación de sólidos: a la vista de dos representaciones de sólidos, los estudiantes deben determinar si ambas corresponden al mismo sólido o no.
- Actividades de movimiento de sólidos: dadas dos o más posiciones diferentes de un mismo sólido, los estudiantes deben mover el sólido desde una de ellas hasta la otra.
- Actividades de representación de sólidos: los estudiantes deben dibujar en papel, en alguna de las formas de representación usadas, el sólido presentado.
- Construcción de sólidos: esta se refiere al proceso de hacer tridimensional lo que se encuentra plasmado en un plano bidimensional.

Los elementos anteriores se tienen en cuenta dentro del desarrollo y planeación de la secuencia didáctica, al igual que el análisis de las respuestas obtenidas de los estudiantes en su ejecución.

2.1.4 Sobre la secuencia didáctica.

La secuencia didáctica aquí se asume como un conjunto de acciones intencionales que se diseñan para abordar metas de aprendizaje en un campo del conocimiento, en este caso, en matemáticas. La secuencia didáctica a su vez, se constituye en una estructura para la organización de procesos de enseñanza y de aprendizaje y pone en relación las competencias a desarrollar de acuerdo con los estándares nacionales, los propósitos curriculares y formativos de la institución y las condiciones de contexto que posibilitan el alcance de la metas de aprendizaje. En este sentido, la secuencia didáctica propone un cambio en el tipo de acciones que se desarrollan en las aulas escolares, se constituye como un aspecto fundamental de la práctica del profesor.

Por una parte, permite delimitar una propuesta de trabajo a través del diseño y planeación de las tareas, en la cual se pone de manifiesto el contenido matemático a enseñar y la forma de llevarlo a cabo.

Por otra parte, enaltece la gestión del maestro, pues éste es de vital importancia como un ente orientador y generador de aprendizajes a través de la discusión.

Finalmente, permite dar cuenta de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, no sólo por parte del maestro sino que a través de la coherencia de las actividades o tareas, los estudiantes también pueden reconocer la utilidad del trabajo realizado, al igual que los errores o fallos producidos en el transcurso de la misma, permitiendo así modificaciones en las concepciones que tenían al inicio de la secuencia verbalizando algunos aprendizajes.

Desde este punto de vista, la secuencia didáctica puede ser entendida como el plan de actuación del profesor, en el cual se explicitan aquellos aspectos del sistema didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza aprendizaje; lo que algunos autores como Linares (1991) denominan fase preactiva. *“la secuencia didáctica es un aspecto central de la metodología de la ingeniería didáctica necesaria para estructurar el trabajo de aula de manera sistemática, en la relación estudiante, profesor, saber y entorno (relación didáctica)”*²³.

De esta manera, la secuencia didáctica propuesta para abordar las representaciones bidimensionales y tridimensionales de poliedros, el caso de prismas y pirámides, estructura procesos de construcción de los significados matemáticos mediante la concepción de que la construcción de dicho conocimiento por parte del estudiante ocurre bajo la tutoría y orientación del profesor o de sus compañeros de clase, en este proceso se privilegian concepciones, opiniones, intervenciones, discusiones u argumentos de los estudiantes generados por las tareas propuestas, en éste sentido la interacción por medio de trabajos en parejas o grupales es fundamental.

De igual modo la interacción que se presenta entre los estudiantes y el entorno es vital en la construcción de conceptos matemáticos relacionados con las representaciones de prismas y pirámides, por ende en la secuencia es esencial la manipulación de objetos tangibles que representen dichos cuerpos en distintos tipos de materiales (pitillos, cartulina, madera) los cuales permitan acercar a los estudiantes a una idea de poliedro (a través de distintas representaciones: sólido, en varillas, huecos) y a sus propiedades favoreciendo procesos de visualización, los cuales además de ser tratados por medio de la manipulación de los objetos, se abordan por medio del uso del Software Cabri 3D donde el estudiante tiene una manera distinta de manipular y visualizar los cuerpos geométricos en función de sus distintas representaciones.

²³ GUERRERO, Fernando; SÁNCHEZ Neila y o LURDUY Orlando. La práctica docente a partir del modelo Deca y de la teoría de las situaciones didácticas: Matemática para interpretar nuestro entorno En: Festival internacional de matemática (5: marzo 2006)

El software incorpora una interesante innovación en la enseñanza de las matemáticas, ya que pone al alcance de los maestros y los estudiantes objetos y experiencias que antes eran imposibles tener. Este programa, proporciona representaciones dinámicas de cuerpos geométricos que pueden llegar a ser muy complejos. Los estudiantes trabajan con el programa Cabri 3D el cual dentro de las tareas propuestas en la secuencia le permite:

- Desplazar poliedros.
- Construir prismas y pirámides
- Desarrollar poliedros.

Por consiguiente la relación que se genera en la secuencia propuesta entre los cuerpos y el entorno real inmediato, se hace, involucrando tanto objetos físicos manipulados por ellos en su cotidianidad, como representaciones específicas de prismas y pirámides en distintos medios y materiales. Como se ha visto, el entorno de trabajo de los estudiantes está basado en tres contextos muy importantes para la enseñanza de la geometría; un contexto físico, uno informático y otro impreso, componentes importantes para promover el desarrollo de las habilidades de visualización, las cuales a su vez llevan a procesos de conceptualización y representación objeto de la intervención en el aula.

Por otra parte, el impacto que el uso de estos materiales tiene en la construcción de los significados matemáticos, está mediado por el tipo de tareas que se proponen en la secuencia. Para efectos del diseño se plantean cuatro tipos de tareas las cuales de una manera organizada buscan aproximar a los estudiantes a conceptos y procedimientos relacionados con las representaciones tridimensionales y bidimensionales de algunos poliedros como prismas y pirámides.

Entre ellas encontramos tareas de comparación, movimiento, representación y construcción de sólidos.

Dentro de las tareas de comparación de poliedros se pretende que los estudiantes no sólo los comparen entre sí en relación con sus componentes y propiedades, sino que también los comparen con otros objetos del entorno buscando diferencias y similitudes entre ellos.

Dentro de las tareas de movimiento, los estudiantes pueden ampliar la visión que tengan de ellos y reafirmar propiedades que no varían al tener distintas vistas y/o representaciones.

Las tareas de representación, permiten ampliar la idea que se tiene de los poliedros (en especial de los prismas y las pirámides) a través de distintos tipos de representaciones planas de cuerpos tridimensionales abordado en los referentes teóricos. (Descripción verbal, representación ortogonal, representación ortogonal codificada, representación plano a plano, representación isométrica y representación en perspectiva) en especial éstas tareas aluden a las representaciones bidimensionales de los poliedros.

Finalmente las tareas de construcción, tratan el paso de lo bidimensional a lo tridimensional.

Este conjunto de tareas, diseñadas y planeadas dentro de la propuesta de la secuencia didáctica, aluden especialmente a los poliedros desde sus componentes y propiedades para llegar a las representaciones y al paso de lo bidimensional a tridimensional (y viceversa) de los prismas y las pirámides, enfatizando en que las tareas de dibujo y construcción constituyen el núcleo central de las actividades de representación.

No debemos olvidar que las competencias específicas que han de desarrollarse en cualquier secuencia didáctica están determinadas por una relación estrecha entre los saberes específicos que se determinen (conocimientos básicos), los aspectos fundamentales del pensamiento que se quiere desarrollar (procesos generales y desempeños) y los contextos en los cuales se lleve a cabo la actividad matemática.

Es así como para efectos del diseño se articulan los elementos matemáticos relacionados con conceptos, propiedades de prismas y pirámides, con los aspectos didácticos, curriculares y cognitivos relacionados con el desarrollo del pensamiento espacial particularmente los correspondientes al paso de las representaciones tridimensionales a las bidimensionales y la materialización con el fin de promover procesos de visualización, argumentación y representación.

CAPÍTULO III

DESARROLLO DE DESTREZAS DE VISUALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE PRISMAS Y PIRÁMIDES EN LA ESCUELA

CAPÍTULO III

DESARROLLO DE DESTREZAS DE VISUALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE PRISMAS Y PIRÁMIDES EN LA ESCUELA

En este capítulo se presentan tanto los elementos que constituyen la secuencia didáctica y aspectos relacionados con su implementación, como también el análisis preliminar de las tareas propuestas en la secuencia (expectativas de desempeño, contenidos, etc.), los resultados obtenidos en la implementación de la misma y los análisis de estos. Por último se presentan algunas conclusiones en la perspectiva de mostrar los desarrollos obtenidos, la coherencia con lo planeado y algunas dificultades evidenciadas en esta forma de trabajo.

Para lograr esto primero se describe lo correspondiente a la secuencia didáctica y luego se pasa al análisis de cada situación y cada tarea, para ello se presenta la descripción de la tarea, las expectativas de desempeño, los materiales y algunos aspectos de la gestión del maestro, luego se presentan los resultados y el análisis de estos.

3.1 PLANEACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

3.1.1 Diseño de la secuencia didáctica.

La secuencia didáctica está conformada por tres situaciones cada una de ellas diseñada a partir de cuatro tipos de tareas descritas en el marco teórico de este trabajo. La primera situación titulada “reconociendo sólidos” cuyo objetivo era acercar a los estudiantes a un análisis local de los poliedros a través de sus elementos físicos, está compuesta por tres tareas enmarcadas en las tareas de comparación.

La segunda situación titulada “análisis, descripción y clasificación de cuerpos geométricos” cuyo objetivo es revisar y ampliar la imagen mental de algunos conceptos relacionados con prismas y pirámides, está compuesta por tres tareas enmarcadas en las tareas de comparación y movimiento.

La tercera situación llamada “representación y visualización de prismas y pirámides” cuyos objetivos eran acercar a los estudiantes a un reconocimiento de las características invariantes de los prismas y pirámides a través de procesos de movimiento, desarrollos y construcciones, desarrollar habilidades propias de los procesos de representación y visualización a través de las construcciones de prismas y pirámides; estuvo compuesta por cinco tareas: de movimiento, representación y construcción.

3.1.2 Materiales.

Basados en el hecho de desarrollar destrezas de visualización y representación de prismas y pirámides en estudiantes de grado quinto, la implementación de la secuencia pone de manifiesto un enfoque a partir de la geometría activa en la cual los estudiantes a través de procesos de manipulación, observación, descripción y transformación de los cuerpos geométricos llegan a desarrollar dichas destrezas; de esta manera, el uso de materiales manipulables es indispensable para las conceptualizaciones que los estudiantes pueden llegar a hacer de los cuerpos mencionados anteriormente.

En este sentido, la implementación de la secuencia requiere el uso de objetos del entorno tales como envases, cajas, botellas u otros objetos que sirvan para guardar algo, con los cuales se hace un acercamiento a la idea de cuerpo geométrico en términos de sus semejanzas y diferencias físicas.

También se utilizan representaciones físicas de prismas y pirámides en distintos materiales, entre los cuales encontramos sólidos en madera y cartulina especialmente, sin embargo, en algunas tareas, se utilizan materiales como plastilina, palos y pitillos para representar estos poliedros.

Otro de los materiales usados en la implementación concierne a la regla y el compás, con ellos, los estudiantes hacen una construcción de un cuerpo geométrico a través de la descripción de una secuencia de pasos.

Entre otro de los materiales utilizados en la implementación encontramos el programa Cabri 3D, el cual permite construir poliedros tridimensionales en la pantalla y desarrollarlos.

3.1.3 La población.

La implementación de la secuencia didáctica inicio el 1 de junio del 2009 y finalizó el 15 de julio del mismo año, se llevo a cabo en el grado quinto conformado por treinta y dos estudiantes, de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, jornada tarde, Sede Martín Restrepo Mejía. Este curso estaba a cargo de la profesora Amparo Franco y la mayoría de los estudiantes han cursado los grados antecesores en la misma institución, sus edades oscilaban entre once y doce años de edad y pertenecen a un nivel socio económico medio.

Los estudiantes al iniciar la secuencia demuestran tener ideas respecto a la geometría plana, por lo cual aluden a nombres tales como lados, líneas, puntos, para referirse a componentes de los cuerpos geométricos lo que nos permite reconocer que han abordado muy poco los conceptos relacionados con geometría espacial y por ende de los distintos tipos de poliedros. De igual forma vemos que aluden a procesos de medida, lo que nos hace pensar que su pensamiento geométrico se basa en el uso del sistema métrico decimal más que en los sistemas geométricos.

Entre las tareas llevadas a cabo con el programa Cabri 3D (movimiento, construcción y desarrollo de prismas y pirámides) demostraron habilidades en el uso de este medio tecnológico.

Encontramos habilidades comunicativas en los estudiantes en tanto que tienen facilidad para expresar sus ideas tanto en los trabajos grupales como individuales o en las discusiones de clase; la interacción entre ellos permitió el buen desarrollo de las clases, evidenciando que son un grupo unido, que practican normas para una sana convivencia y cooperan entre ellos para llegar a un consenso conjuntamente.

Por otra parte, evidencian gran interés en los temas geométricos, pues a lo largo de la implementación, tuvieron buena disposición en las tareas propuestas.

3.1.4 Metodología de implementación.

La metodología utilizada en la implementación, es a través de un método activo en tanto el desarrollo de la clase cuenta con la participación del estudiante, de sus conocimientos previos y de los espacios de análisis que generan sus argumentos.

En este sentido, para cada una de las tareas²⁴, (las cuales dependiendo del objetivo planteado son de carácter individual o grupal) se da un espacio en el que cada uno de los estudiantes o de los grupos conformados, leen las preguntas e intentan resolverlas a partir de lo que conocen al respecto; seguido de ellos se abre un espacio de socialización de las respuestas y retroalimentación en el que el papel del maestro es fundamentalmente generar inquietudes respecto a las respuestas dadas, proponiendo preguntas que amplíen la capacidad de análisis y reflexión de los estudiantes a tal punto que sean ellos, por medio de una secuencia de preguntas organizadas coherentemente, los que logren expresar algunas generalidades.

Al finalizar cada tarea, se recoge de forma verbal todas las conclusiones a las que llegan los estudiantes a partir del desarrollo de la clase y se institucionalizan para que puedan ser utilizadas en otras tareas o contextos.

3.2. DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS, RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

3.2.1. Situación 1: reconociendo sólidos.

Tarea 1: caracterizando objetos del entorno.

Objetivos:

- Acercar a los estudiantes a un análisis de los sólidos geométricos a través de sus elementos físicos.
- Identificar formas a través de la observación, descripción y clasificación de objetos físicos.

²⁴ En la descripción de cada tarea se especifica si es llevada a cabo de manera individual o grupal.

I. Descripción de la tarea.

Para el desarrollo de esta tarea se organizan grupos de cuatro estudiantes a quienes se les entrega una guía, en la cual deben escribir cada una de las respuestas encontradas en consenso por todos los integrantes de cada grupo. Para la ejecución, el profesor lee en voz alta cada punto de la guía y da un tiempo de aproximadamente cinco minutos para que ellos puedan responderlo.

Para esta tarea los estudiantes llevan al salón de clase distintos envases tales como tarros plásticos, cajas, botellas, entre otros. Se parte de la observación de cada uno de ellos y se pide a los estudiantes realizar una descripción verbal de tres envase, determinando aspectos físicos tales como su forma, tamaño, partes que lo conforman, etc.

A continuación los estudiantes organizan los envases en grupos cuyos utensilios tengan características comunes y estableciendo las semejanzas entre ellos. Para lo cual se les pide asignar un nombre a los grupos formados y escribirlos en forma de mini cartel.

De acuerdo con los grupos formados con los envases semejantes, los estudiantes escogen dos envases que correspondan a la misma clasificación y escriben por qué estos pertenecen a esta clasificación.

Luego realizan el ejercicio siguiente escogiendo dos envases que corresponden a distinta clasificación y argumentando por qué estos no pertenecen a un mismo grupo.

Para finalizar se hace una plenaria en la que los estudiantes comentan a sus compañeros las respuestas de los puntos 3 y 4.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

En el desarrollo de esta primera tarea, se espera que los estudiantes reconozcan que los objetos del entorno tienen ciertas similitudes entre ellos y con cuerpos geométricos. De la misma manera se espera que ellos empleen un lenguaje natural (retórico) para la descripción de cada uno de los envases y que centren su atención en las características físicas de los objetos como la forma, partes que lo conforman y tamaño más que en su uso, textura, adornos, color, etc. Además incentiva a la escritura clara y detallada de sus descripciones, así como a realizar diferentes clasificaciones en subgrupos de los envases que presentan similitudes. Los estudiantes en la plenaria deben argumentar sus respuestas y escuchar los argumentos de otros para posteriormente contra argumentar.

El maestro en esta tarea cumple una función de orientador del trabajo, por lo cual se encarga de la lectura de cada una de las preguntas y explicita aquellos elementos que no están claros. De igual forma, lleva a los estudiantes a que observen detalladamente cada uno de los envases y centren su atención en las características de los cuerpos, a la vez que incita a los estudiantes a cuestionarse acerca de las similitudes y diferencias que se encuentran entre los objetos del entorno.

III. Materiales.

Se utilizan recipientes (llevados por los estudiantes) como cajas, envases, botellas, etc. Algunos cuerpos geométricos como el cilindro, prisma cuadrangular, cubo y pirámides elaboradas en cartulina u otros en pasta (llevados por las orientadoras de la actividad)

IV. Resultados.

Esta tarea se realizó en una sesión de sesenta minutos y asistencia de treinta estudiantes. Dado que la actividad debía resolverse en forma grupal, se conformaron siete grupos.

En grupos de cuatro estudiantes con los envases que han traído al salón de clases, realicen la siguiente actividad.

1. Hagan una descripción de cada uno de los envases que trajeron teniendo en cuenta los aspectos físicos (tamaño, forma, partes que lo conforman).

En las siguientes tablas se encuentran los envases escogidos por los estudiantes etiquetados con E1, E2, E3 y E4 con sus respectivas descripciones, escritas de manera textual.

Tabla 1 Descripción de envases grupo 1.



Tipo de envase	Descripción
E1	Tiene forma de cilindro, es de color rojo y dorado, lo conforma una tapa y se puede meter algo.
E2	Tiene una superficie plana, forma rectangular, se puede meter algo y su color es transparente.
E3	Tiene forma de cubo, no tiene una cara, una tapa, se puede meter algo y su color es verde.
E4	Es circular, con tapa, su superficie es plana, se puede meter algo, su color es morado.

Tabla 2 Descripción de envases grupo 2.



Tipo de envase	Descripción
E1	Cilindro pequeño con tapa circular enroscadora con su base plana.
E2	Rectangular, mediana, una tapa abre fácil y seis lados.
E3	Cubo, pequeño, cuadrado con seis lados planos.
E4	Redonda o circular, hondo, con base plana

Tabla 3 Descripción de envases grupo 3



Tipo de envase	Descripción
E1	Es rectangular y su color es café es alto y mediano tiene dos formas circulares y rectangular, se puede medir con regla.
E2	Es un cuadrado y es de color blanco y es pequeño, todos sus lados son iguales, se puede medir con regla.
E3	Es círculo, es amarillo, es de plástico y pequeño, se puede medir con metro.
E4	Es forma de cilindro de plástico y grande, se puede medir con regla o metro.

Tabla 4 Descripción de envases grupo 4.



Tipo de envase	Descripción
E1	Es de vidrio, boca ancha, es pequeño, tapa circular, forma de cilindro, transparente.
E2	Es blanco, es largo, es plano, con forma rectangular, es de plástico.
E3	Es de aluminio, es un cilindro, boca ancha, es rojo, verde, café y blanco.
E4	Es de madera, forma de cubo, café con negro, tiene una pintura en la tapa.

Tabla 5 Descripción de envases grupo 5



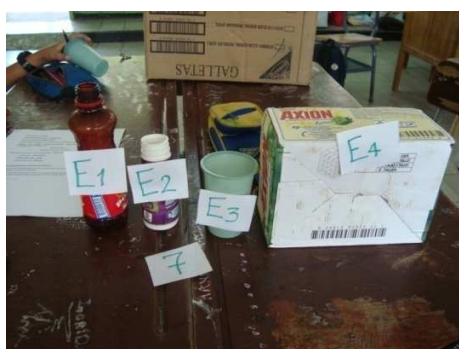
Tipo de envase	Descripción
E1	Es un cuadrilátero tamaño mediano consistencia plástica, partes que lo conforman.
E2	También es un cuadrilátero forma pequeña consistencia plástica, 4 esquinas.
E3	.tamaño pequeño, forma es oblicua es un triángulo, es plástico.
E4	Tamaño grande, forma circular consistencia plástica, base oblicua.

Tabla 6 Descripción de envases grupo 6.



Tipo de envase	Descripción
E1	Tiene franjas salidas, tiene rosca, tiene tapa, es de plástico, es ovalado.
E2	Es muy ancho, es ovalado al final, su altura mide 39.3cm. Parte de la botella tiene forma de rombo.
E3	Tiene forma rectangular, la parte de abajo es ovalada, la parte de arriba es como un pico, tiene láminas pegadas.
E4	Es cuadrado por debajo, su parte de abajo es plana, es de material plástico.

Tabla 7 Descripción de los envases grupo 7



Tipo de envase	Descripción
E1	Es de plástico, es ovalado con curvas y es de color café transparente.
E2	Es de plástico es redondo y tiene curvas tiene entrada para la tapa y es blanco.
E3	Es de plástico verde es redondo la parte de abajo es plana.
E4	Está hecho de cartón, la parte de abajo es plana, es rectangular es de color amarillo, verde y blanco.

2. Organicen los envases en grupos, de acuerdo a ciertas características comunes (buscando semejanzas entre ellos) asignándole nombre a cada grupo.

Clasificaciones realizadas por los estudiantes.

GRUPO 1. Los estudiantes clasificaron sus envases en cuatro grupos: “grupo de círculos”, “grupo de octágonos”, “grupo de cilindros” y “grupo de cubos”.

GRUPO 2. Los estudiantes clasificaron los envases en dos grupos: “los rebombachos” y “los cuadrículos”

GRUPO 3. Los estudiantes clasificaron sus envases en tres grupos: “cajitas”, “cilindros” y “tarritos”

GRUPO 4. Los estudiantes formaron tres grupos. “prisma”, “cilindros” y “cubo”

GRUPO 5. Los estudiantes organizaron los envases en tres grupos: “el triangular”, “cuadriláteros”, “cilindros”, “oblicua base circular”

GRUPO 6 “grupo cilindro”, “grupo de cuadrado”.

GRUPO 7. Los estudiantes clasificaron los envases en dos grupos: “grupo cuadrilátero” y “grupo cilindro”

3. Escojan dos envases que pertenezcan a una misma clasificación, es decir a un mismo grupo y escribe por qué pertenecen al mismo grupo.

En la siguiente tabla aparecen las respuestas textuales de los estudiantes.

Tabla 8 Semejanzas entre envases que pertenecen a igual clasificación

Grupo	Grupo al que pertenecen (de los inventados por ellos en el punto anterior)	Razones por las cuales pertenecen al mismo grupo
Grupo 1	Grupo de los cilindros	Son iguales porque tienen dos superficies planas y su cuerpo es de forma redondeada.
Grupo 2	Grupo de los rebombachos	Porque se parecen y por tener forma redonda con superficie y base plana.
Grupo 3	Grupo cilindros	Porque tiene los mismos lados y son cilindros y pertenece al círculo y tiene la misma forma.
Grupo 4	Grupo de cilindros	Porque sus caras de abajo y arriba son polígonos circulares lo cual le da forma al resto de la figura.
Grupo 5	Grupo de cilindros	Porque son circulares y tiene el mismo grosor, sus tapas son redondas y tiene superficie plana.
Grupo 6	Grupo cilindro	Porque tienen forma de cilindro, la parte de abajo es plana y tienen láminas.
Grupo 7	Grupo cuadrilátero	Porque tienen cuatro lados, son de igual tamaño y tienen seis caras y son rectangulares.

4. Escojan dos envases que pertenezcan a distinta clasificación y escriban por qué son diferentes.

Tabla 9 Diferencias entre envases

Grupo	Grupo al que pertenece un envase	Grupo al que pertenece el segundo envase	Razones por las cuales pertenecen a distinto grupo
Grupo 1	Grupo de los círculos	Grupo de los cubos	Son diferentes porque el de los círculos tiene forma circular y el de cubo tiene forma cuadrada.
Grupo 2	Grupo de los rebombachos	Grupo de los cuadriculos	Son diferentes porque tienen distintas formas, uno es cilindro y el otro es cubo, o sea que uno es circular y el otro es cuadrangular.
Grupo 3	Grupo de las cajitas	Grupo de los cilindros	No tiene la misma forma y uno pertenece a la prisma y otro al cilindro.
Grupo 4	Grupo de prisma	Grupo del cilindro	Son diferentes porque las caras del cilindro son redondas y el prisma tiene caras cuadradas y rectangulares.
Grupo 5	Grupo de cuadriláteros	Grupo de cilindros	Porque el cilindro es circular y el cuadrado tiene cuatro lados a diferencia del cilindro el cilindro es redondo y el cuadrilátero es plano.
Grupo 6	Grupo de cuadrado	Grupo de cilindro	Porque uno es un cilindro y el otro es un cuadrado.
Grupo 7	Grupo cuadrilátero	"grupo cilindro"	Porque uno tiene cuatro lados y el otro es circular

Los estudiantes en la socialización leen de sus guías lo que han escrito en el punto 3 y 4, argumentando las razones por las cuales dos envases pertenecen a un mismo grupo y dos envases pertenecen a distinto grupo a la vez que los muestran.

V. Análisis de resultados.

Esta tarea tenía como objetivo acercar a los estudiantes a un análisis de los sólidos geométricos a través de sus elementos físicos. En ella los estudiantes llevaban al aula de clase recipientes los cuales debían ser descritos teniendo en cuenta los aspectos físicos con el fin de encontrar entre ellos semejanzas o diferencias que permitieran hacer diversas clasificaciones.

Para esta tarea se conformaron siete grupos. Con relación a los resultados de esta tarea, en el punto 1 en el cual se describían los objetos teniendo en cuenta sus aspectos físicos como tamaño, forma, partes que lo conforman, se observa como aspectos comunes a cada grupo lo siguiente:

La mayoría describe aspectos físicos como el color, la forma, el tamaño y algunos relacionados con su uso.

Con relación a la forma utilizan términos como forma de cilindro, cubo, circular, cuadrado, rectangular, cuadrilátero, ovalado, octágono y redondo para describir objetos que son tridimensionales, lo que quiere decir que en algunos casos usan términos de lo bidimensional para éste tipo de descripción.

Por otra parte se mencionan características relacionadas con algún elemento como, es plano o tiene tapa circular, refiriéndose a una o varias componentes, además, la mayoría afirman que en algunos envases se puede meter algo y aunque ésta característica hace relación al uso, también indica que reconocen una profundidad o altura del recipiente.

Lo anterior parece indicar que los estudiantes en su formación escolar han estudiado algunas figuras geométricas (bidimensionales) de las cuales conocen sus nombres (como por ejemplo el cuadrado, círculo, rectángulo, octágono...) y algunas características que permiten transferir este vocabulario a los objetos tridimensionales para su forma general en tanto que son nombrados como objetos planos, y no para características de sus partes (cada una de sus caras o bases).

Es importante resaltar que en la plenaria de esta actividad algunos estudiantes muestran un reconocimiento de objetos tridimensionales como el cilindro y el cubo, lo cual no sucede con los demás cuerpos como la pirámide o prismas.

En forma particular los resultados de los grupos 4, 6 y 7, los cuales corresponden aproximadamente al 40% de la población se refieren a características eminentemente físicas como el material en que están hechos, el color, etc., lo cual significa que no se refieren a características geométricas (forma global del objeto y formas que se pueden extraer de las partes que lo componen) o métricas.

De esta manera se evidencia que los estudiantes comparan sus conocimientos previos con los conceptos desconocidos con el fin de describir algo nuevo. Es decir, usan términos conocidos, aunque éste no sea el vocabulario preciso, en tanto que usan el termino cuadrado para todo lo que tenga forma cúbica o paralelepípedos, o el termino circular para lo esférico o cilíndrico.

En el segundo punto de la tarea los estudiantes debían organizar los envases en grupos de acuerdo a ciertas características comunes y asignarle un nombre el cual consideraran pertinente.

Según sus respuestas podemos ver que se continúa presentando en relación al punto uno, una constante en la elección del tipo de envases escogidos para conformar los grupos, pues la mayoría hace referencia al grupo de los cilindros; también, en el tipo de vocabulario usado para referirse a ellos.

De igual forma, se evidencia que el uso del lenguaje está marcado por lo que conocen o han oído, haciendo referencia a algunos objetos matemáticos con términos que pueden ser de su cotidianidad o abordados anteriormente en contextos escolares; el uso de estas palabras especialmente hace referencia a la forma general de los envases, en tanto que sus nombres hacen alusión a la globalidad y no a características particulares de sus componentes. Un ejemplo de ello, es la etiqueta que utiliza un grupo de estudiantes: “rebombachos” para referirse a lo esférico.

Según la pregunta tres, los estudiantes escogieron dos envases y justificaron por qué pertenecen al mismo grupo, lo que dio como resultado que justificaran sus agrupaciones a través de sus similitudes refiriéndose la mayoría (6 grupos que corresponden aproximadamente al 84%) a características de los objetos y no a formas globales de ellos, como:

Pertenecen a los cilindros porque “tienen dos superficies planas y su cuerpo es de forma redondeada”

Lo cual en términos de la representación de objetos significa que en estos casos se puede lograr una imagen o representación mental más o menos clara a partir de las descripciones verbales.

Sin embargo, el grupo tres (corresponde al 16.6%) realiza una descripción verbal la cual no permite hacer una imagen mental del cuerpo geométrico, pues los términos usados para referirse a ellos no son claros.

“porque tiene los mismos lados y son cilindros y pertenecen al círculo y tienen la misma forma”, la expresión anterior describe dos envases que pertenecen al grupo de los cilindros.

En la pregunta cuatro los estudiantes escogen objetos que pertenecen a diferentes grupos (prisma, cilindro, cuadriláteros, rebombachos, cuadrículos) en la cual deben justificar las razones por las cuales pertenecen a distintos grupos.

Las justificaciones muestran un equilibrio entre el porcentaje de estudiantes que evidencian fijarse en la globalidad de los cuerpos y aquellos que ponen mayor énfasis en las partes que lo componen, dado que entre los primeros (globalidad) encontramos argumentos como “son diferentes porque tienen distintas formas, uno es cilindro y el otro es cubo...” donde el envase con forma cilíndrica pertenece al grupo de los “rebombachos” y el que es semejante al cubo pertenece al grupo de “los cuadrículos”, y en los segundos (partes) hay respuestas tales como: “porque las caras del cilindro son redondas y el prisma tiene caras cuadradas y rectangulares” es decir tienen en cuenta componentes de los cuerpos.

Al finalizar esta tarea se realizó una plenaria cuyo propósito era hacer un intercambio de saberes, los estudiantes leían sus descripciones mientras mostraban los envases y argumentaban en principio, por qué pertenecían a un mismo grupo y luego, por qué a distinto grupo.

Es importante resaltar que ésta es una tarea de comparación, pues los estudiantes deben comparar los envases entre sí para encontrar tanto semejanzas como diferencias. Al respecto, se encontró que los estudiantes en su totalidad relacionaron los objetos con cuerpos geométricos, en especial con el cilindro y el cubo (de los cuales no se hacían alusión ni en la guía entregada ni en las orientaciones dadas), por lo anterior podemos interpretar en las respuestas de los estudiantes un claro énfasis en la forma de los envases, más que en características de ellos como tamaño, color, textura, adornos, material, uso, entre otros. Pues ellos podrían haber clasificado los envases en diferentes grupos y

establecer etiquetas tales como “grandes”, “medianos”, “pequeños” o de acuerdo al color “azules”, “verdes”, “blancos”, etc.

En términos de visualización y específicamente a los elementos propios de este proceso, podemos destacar en los estudiantes la capacidad de interpretación de información figurativa, en tanto que ellos logran, a partir de representaciones visuales establecidas por cada uno de los envases, extraer relaciones entre ellos y algunos cuerpos geométricos, logrando reconocer que estos en su estructura tienen diversas componentes. De igual forma los estudiantes en el transcurso de toda la tarea destacan la habilidad de discriminar visualmente, pues tienen la capacidad de identificar con facilidad semejanzas y diferencias visuales de diversos objetos.

Al iniciar la tarea se esperaba que los estudiantes emplearan un lenguaje cotidiano en la realización de sus descripciones, sin embargo ellos superaron nuestras expectativas ya que usaron un lenguaje matemático que aunque no era del todo coherente con lo que querían explicitar, daba cuenta de la existencia de conocimientos geométricos previos.

Tarea 2: comparando envases con cuerpos geométricos.

Objetivo:

- Revisar y ampliar la imagen mental de algunos conceptos relacionados con los sólidos, al establecer relaciones con los objetos del entorno.
- Describir envases buscando similitudes con algunos cuerpos geométricos como el cilindro, la pirámide, cono, entre otros.

I. Descripción de la tarea.

Esta tarea se desarrolla a partir de la tarea 1, pues es necesario que los estudiantes sigan empleando los envases traídos con anterioridad. De igual forma son llevados al aula de clase algunos sólidos geométricos como el cilindro, prismas, cubo, cono y pirámides, con el fin de que tengan mayor cercanía con estos, puedan observarlos detalladamente y realizar comparaciones entre ellos y los envases.

Los estudiantes escogen un envase, lo observan detalladamente y lo comparan con cada uno de los sólidos presentados, para así llegar a establecer con cuál de los sólidos tiene similitud su envase y pueda a su vez justificar la respuesta.

Partiendo del punto 1, se realiza una indagación para establecer qué tanto conocen los estudiantes sobre los nombres de estos cuerpos, por lo cual se muestra cada uno de ellos y se pregunta al grupo si lo conocen y qué nombre recibe. Luego se parte de sus respuestas para explicitar su respectivo nombre.

Partiendo de la plenaria, los estudiantes escogen tres de sus envases, los observan detalladamente, los comparan con cada uno de los poliedros presentes, para luego consignar las respuestas, en la que deberán dibujar cada uno de sus envases, establecer la semejanza con cada cuerpo geométrico (cilindro, cubo, prisma o pirámides) y explicitar las semejanzas que encuentran entre ellos.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro:

A partir de esta tarea se espera que los estudiantes identifiquen semejanzas entre los diferentes envases y los cuerpos geométricos, teniendo como referencia su forma y los componentes de cada uno de ellos; que puedan explicitar de forma verbal y empleando un lenguaje retórico lo que conocen acerca de las etiquetas de los sólidos presentados y partiendo de las etiquetas generadas a partir de un conversatorio, establezcan y justifiquen las semejanzas entre su envase y los cuerpos mostrados (cilindro, cubo, prismas y pirámides).

Para esta tarea el maestro muestra los diferentes cuerpos y brinda la posibilidad de que los estudiantes expongan ante el grupo sus conocimientos previos respecto a los sólidos geométricos y específicamente a los nombres que recibe cada uno de ellos, con el objetivo que luego planteen las semejanzas entre un envase y los cuerpos geométricos llevados por el maestro.

Además, genera un espacio de análisis en el que pretende llevar a los estudiantes a fijar la atención en los componentes tanto de los cuerpos geométricos como de los envases, con el propósito de que establezcan similitudes y diferencias entre ellos.

III. Materiales.

Representaciones en cartulina o madera de algunos cuerpos geométricos como el cilindro, prismas, cubo y pirámides.

IV. Resultados.

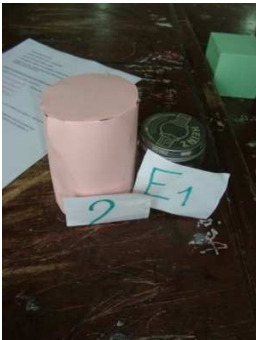
Esta tarea se realizó en una sesión de sesenta minutos y asistencia de treinta estudiantes. Dado que la actividad debía resolverse en forma grupal, se conformaron siete grupos.

Con los sólidos que presenta el profesor y los envases que trajeron, realicen la siguiente actividad

1. Escojan un envase de los que trajeron y compárenlo con los sólidos que presenta el profesor, luego indiquen a cuál se parece el de ustedes y por qué.

En la siguiente tabla podemos ver el envase y sólido geométrico entre el cual cada grupo planteó semejanzas, así como las descripciones textuales realizadas por los estudiantes.

Tabla 10 Comparación de envase con sólido geométrico.

GRUPO 1 “Se parece a un cilindro porque sus dos caras son circulares, no tiene lados y su cuerpo es redondo.”	
GRUPO 2 “El envase que escogimos se parece al cilindro ya que es circular, con base y superficie plana”.	

GRUPO 3 “Porque son de la misma forma y sus lados son similares”.			
GRUPO 4 “Se parece al prisma porque los dos tienen seis caras planas, algunas en forma de cuadrado y otras en forma de rectángulo o sea que todas no tienen la misma medida.”			
GRUPO 5 “Se parece al cilindro porque sus bases son circulares, su forma es cilíndrica.”			
GRUPO 6 “El tarro que escogimos se parece a un cilindro porque son ovalados, son planos en la parte de arriba y abajo.”			

GRUPO 7 “Se parecen porque los dos son redondos y la base es plana, el cilindro tiene dos tapas y el vaso sólo tiene una tapa.”	
--	--

2. Escojan tres envases diferentes de los que trajeron y completa la siguiente tabla.
 - a. Dibujen en las casillas envase 1, envase 2 y envase 3, los envases escogidos.
 - b. Marquen con una X las casillas vacías para cada envase que tenga semejanzas con algunos de los sólidos geométricos nombrados.

En las siguientes tablas se sistematiza la información recolectada en la guía de los estudiantes, la cual muestra la foto de los envases escogidos, la semejanza establecida con el sólido geométrico y su respectiva justificación.

Tabla 11 Semejanza entre envases y sólidos geométricos (grupo1).

Foto	Envase semejante a	Por qué
	E1: cilindro	Tiene forma de cilindro porque tiene dos superficies planas.
	E2: cubo	Tiene forma de cubo porque tiene la misma forma de caras.
	E3: prisma	Tiene forma de prisma porque tiene caras rectangulares.

Tabla 12 Semejanzas entre envases y sólidos geométricos (grupo 2).

Foto	Envase semejante a	Por qué
	E1: cilindro	Porque su contextura es redonda, con base y superficie plana, porque no tiene lados.
	E2: cubo	Porque su contextura cuadrada, con lados planos y seis lados iguales a los del cubo.
	E3: prisma	Porque su contextura es rectangular y cuadrangular.

Tabla 13 Semejanzas entre envases y sólidos geométricos (grupo 3).

Foto	Envase semejante a	Por qué
	E1: prisma	Porque tiene lados cuadrados y rectangulares y no tiene los lados iguales.
	E2: cubo	Porque tiene todos los lados iguales.
	E3: cilindro	Porque es alargado y tiene forma de círculo.

Tabla 14 Semejanzas entre envases y sólidos geométricos (grupo 4).

Foto	Envase semejante a	Por qué
	E1: cilindro	Tiene un polígono en forma circular en la base y en la cima y es largo.
	E2: prisma	No tiene los lados iguales y tiene relieve.
	E3: cilindro	Es redondo en las caras de arriba y de abajo.

Tabla 15 Semejanzas entre envases y sólidos geométricos (grupo 5).

Foto	Envase semejante a	Por qué
	E1: cubo	Tiene cuatro lados, son cuadriláteros.
	E2: pirámide	Porque tiene tres lados.
	E3: cilindro	Porque son de igual forma.

Tabla 16 Semejanzas entre envases y sólidos geométricos (grupo 6).

Foto	Envase semejante a	Por qué
	E1: cilindro	Porque tiene parte plana, son ovalados.
	E2: pirámide	Porque su parte de arriba tiene forma de pirámide y su forma de abajo es plana.
	E3: cubo	Porque su forma es cuadrada y tiene aristas.

Tabla 17 Semejanzas entre envases y sólidos geométricos (grupo 7).

Foto	Envase semejante a	Por qué
	E1: prisma	Porque tiene varios lados y todos cuadrados.
	E2: prisma	Porque tiene varios lados y todos cuadrados.
	E3: cilindro	Porque la parte de abajo es redonda, parece un cilindro.

V. Análisis de resultados.

Esta tarea pretendía principalmente que los estudiantes compararan envases con algunos poliedros, encontrando rasgos por medio de los cuales se pudieran plantear semejanzas entre ellos.

Con relación a la pregunta 1, los estudiantes compararon sus envases con los cuerpos geométricos llevados por el maestro, entre los cuales había pirámides de base cuadrada y triangular, cilindros, prismas y cubos.

De acuerdo a las semejanzas encontradas y explícitas en las respuestas, se puede ver que en su gran mayoría los estudiantes escogen envases que se parecen a los cilindros (cinco de los siete grupos), sólo un grupo plantea semejanzas entre el objeto y un prisma. Entre éstas descripciones podemos plantear tres categorías.

- **Categoría 1:** Estudiantes que reconocen el objeto como un elemento formado por partes, las cuales coinciden con algunos componentes de los cuerpos geométricos como sus bases y/o caras.
- **Categoría 2:** Reconocen entre los envases y los cuerpos geométricos semejanzas en sus componentes pero su descripción alude más a la globalidad de éstos.
- **Categoría 3:** Aluden a la semejanza entre el objeto y el cuerpo por su forma, pero esta no se hace explícita en la descripción.

En la categoría 1 se encuentran tres grupos, los cuales corresponden al 42% de la población, estos relacionan los envases llevados al aula con cuerpos geométricos tales como cilindros (2 grupos) y prismas (1 grupo). Las semejanzas que describen entre los envases y los cuerpos aluden a características de los cuerpos proporcionadas por las partes que lo componen, además usan un lenguaje matemático un poco más preciso que en la tarea 1, el cual permite hacer una imagen mental de ellos, tales como “se parece al cilindro porque sus dos caras son circulares, no tiene lados y su cuerpo es redondo”.

En la categoría 2 se encuentran tres grupos los cuales corresponden al 42% de la población, (todos asemejan sus envases con el cilindro), éstos hacen mayor énfasis en los aspectos generales del cuerpo que en las partes que lo componen, donde encontramos argumentos como: “se parecen porque los dos son redondos y la base es plana, el cilindro tiene dos tapas y el vaso sólo tiene una tapa”. Hacen

referencia a características tales como ser ovalados, tener alguna parte plana, ser circulares, ser redondos.

En la categoría 3 encontramos un solo grupo, argumentando que son similares en la forma, pero ésta no se describe en aspectos generales ni específicos, además no permite hacer una imagen mental de ninguno de los dos objetos (envase y sólido geométrico) “porque son de la misma forma y sus lados son similares”. Esta descripción no permite hacer ni siquiera una aproximación a lo que están etiquetando como “lados”, por eso se categoriza como una descripción poco clara.

Anteriormente hemos dicho que la gran mayoría de los estudiantes asemejó sus envases con los cilindros (86%), es importante resaltar, que en este caso, los componentes más relevantes por medio de los cuales los estudiantes asemejan los recipientes son sus bases (círculos), ya que en general los envases llevados al aula como tarros, botellas, vasos, entre otros tienen componentes (parte superior e inferior) que coinciden con esta forma.

En el caso del prisma el componente por el cual los estudiantes lo asemejan a los recipientes corresponde a la forma y cantidad de sus caras.

Sin embargo, cabe resaltar que esta semejanza encontrada solo corresponde al 13,3% de los estudiantes lo cual nos permite plantear una posible razón concerniente al tipo de envases llevados por los estudiantes a la actividad, los cuales en su mayoría eran tarros plásticos que en su forma son semejantes a los cilindros, mientras que pocos estudiantes llevaron cajas similares a cubos o prismas. Es importante mencionar la precisión de la descripción de este grupo al asemejarlo con el prisma, por una parte en el momento donde plantean la coincidencia en la cantidad de caras del prisma y la caja y otra, en su forma, la cual está entre cuadrado y rectángulo destacando entre estos dos una diferencia en la longitud de sus lados que aunque no se dice explícitamente se puede inferir cuando dicen “algunos en forma de cuadrado y otros en forma de rectángulo o sea que todos no tienen la misma medida”.

En todo lo expuesto anteriormente se hace evidente que los estudiantes cumplen con las características propias del proceso de “percepción de información figurativa”, pues hacen una lectura, interpretación y comprensión de las representaciones visuales (envases y sólidos) para extraer de ellos, la información que contienen.

Finalizado el punto 1, se realiza un conversatorio con los estudiantes, en el que se indaga acerca del conocimiento que tienen respecto a los nombres de algunos

cuerpos geométricos, tales como prismas, pirámides, cubo y cilindro. En ella son mostrados los cuerpos, al tiempo que se pregunta por su respectivo nombre y no por sus componentes ya que esta no es la finalidad. En él hubo una constante al referirse a esos cuerpos (tridimensionales) como figuras planas, lo que permite identificar que estos son etiquetados a partir de una de sus caras. Esto es evidente al mostrar por ejemplo la pirámide, pues ellos la llaman triángulo o para el prisma rectangular, al que llaman rectángulo.

Esto ocurre con mucha frecuencia para el caso de los prismas y las pirámides, pues en el primero de ellos, solo un estudiante se refiere a él con el nombre adecuado y en el segundo solo un estudiante lo nombró correctamente, el resto por el contrario los nombra como rectángulo y triángulo respectivamente.

Para el caso del cubo, la gran mayoría de los estudiantes lo nombró de manera adecuada, mientras que al mostrar el cilindro todos coincidieron con su respectiva etiqueta.

Dada esta discusión, se explicitan los respectivos nombres de cada cuerpo y se parte de allí para el desarrollo del punto 2. En el cual se pedía a los estudiantes comparar tres de sus envases con los cuerpos geométricos que fueron llevados al salón (prisma cuadrangular, cilindro, cubo y pirámide cuadrangular y triangular) y establecer las razones por las cuales su envase era similar a uno de ellos.

Cabe resaltar que los envases escogidos por la mayoría de los grupos tenían semejanzas con prismas, cilindro y cubo, y solo dos de ellos encontraron semejanzas con la pirámide.

Para establecer las semejanzas entre sus envases y los sólidos geométricos, los estudiantes plantearon una relación basada en los componentes de uno u otro, es decir, si una de las partes del envase era circular, lo relacionaban con el cilindro, el cual también cumple con esta característica.

Al igual que en la tarea 1, los estudiantes para referirse a las componentes emplean un lenguaje matemático que aunque no sea apropiado, muestra que estos términos han sido escuchados con anterioridad, esto se hace evidente cuando los estudiantes se refieren a las caras del sólido, las cuales son nombradas como lados. “es semejante al prisma porque tiene lados cuadrados y rectangulares y no tiene los lados iguales” o “es semejante al cubo porque no tiene todos sus lados iguales”.

Un grupo reconoce en su envase la composición entre dos cuerpos, pues describe el envase como parecido a una pirámide en su parte superior y a un cilindro en la parte inferior, esto muestra que la observación está encaminada a las partes y no a la globalidad, lo cual se puede ejemplificar cuando los estudiantes responden “son semejantes porque su parte de arriba tiene forma de pirámide y su parte de abajo es plana” esto refleja que los estudiantes tienen la habilidad “percepción de figura y contexto” en tanto que reconocen una figura aislándola de su contexto, también se evidencia el reconocimiento que tienen de una de sus componentes en la globalidad del cuerpo (tridimensional). Otra de las habilidades desarrolladas, es la de “discriminación visual” pues al comparar los envases con sólidos geométricos identifican sus semejanzas, esto se da, gracias a que la actividad fue planteada entre las tareas de comparación expuestas en el marco teórico.

▪ **Tarea 3 describiendo partes de cuerpos geométricos.**

Objetivo:

- Reconocer componentes de los cuerpos geométricos (vértices, aristas y caras)
- Realizar descripciones de los cuerpos teniendo en cuenta sus componentes (vértices, aristas y caras)

I. Descripción de la tarea.

Se lleva al salón de clase cuerpos geométricos tales como el cubo, cilindro, pirámides y prismas, los estudiantes los observan detalladamente y de forma individual, realizan una descripción de cada uno de ellos, teniendo en cuenta sus componentes. Partiendo de estas descripciones, se realiza una plenaria en la que algunos estudiantes leen las descripciones hechas.

El orientador las escribe en el tablero, enfatizando en los nombres que ellos emplearon para designar cada una de las componentes del cuerpo, mientras se indaga a qué se refieren con cada uno de esos nombres y se pide que muestren ante el grupo cada parte que se va nombrando.

Del conversatorio, se fortalecen aquellos conceptos que tienen los estudiantes y se explicitan los conceptos o designaciones matemáticas que recibe cada parte del cuerpo así como sus usos en la conformación de cada sólido.

Al explicar los conceptos de caras, bases, vértices y aristas, los estudiantes encontraran la cantidad y forma de cada componente, lo cual será plasmado dentro de un cuadro planteado en la ficha del estudiante.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

Se espera que los estudiantes, para desarrollar esta tarea empleen un lenguaje cotidiano para designar los componentes de los cuerpos geométricos, pero que éste sea transformado a partir de la conceptualización generada por un conversatorio en un lenguaje matemático más elaborado.

De igual forma se espera que los estudiantes reconozcan a qué hace alusión cada uno de los componentes de los cuerpos y puedan establecer la cantidad y forma de cada uno de ellos.

El maestro lleva a los estudiantes a identificar y centrar su atención en los componentes de los cuerpos geométricos, así como a generar en ellos la confianza para realizar descripciones de cada uno de los cuerpos presentados, a través de un lenguaje cotidiano en el que nombren sus componentes a partir de sus conocimientos previos.

De igual forma genera una plenaria en la que brinda la posibilidad a los estudiantes de compartir sus respuestas ante el grupo, sin ser regulador de las palabras que estos empleen, por el contrario es un compilador de todas esas ideas y generador de inquietudes en los estudiantes con el fin de que adquieran mayor capacidad de análisis, y entre las ideas expresadas por ellos, se llegue a la conceptualización e institucionalización de los saberes.

III. Materiales.

Representaciones en cartulina o madera de algunos cuerpos geométricos como el cilindro, prismas, cubo y pirámides.

IV. Resultados.

Esta tarea fue realizada de forma individual en una sesión de aproximadamente 60 minutos en la cual participaron 30 estudiantes

1. Describe individualmente cada uno de los cuerpos que se presentan, teniendo en cuenta cada uno de sus componentes.

Para efectos de la recolección de la información, han sido planteadas algunas categorías que parten de las descripciones de los estudiantes, conservando la idea que desean plantear pero modificando algunos elementos en relación a las palabras utilizadas para designar los componentes. Encontramos en particular, que para hacer referencia a las caras del cuerpo, la mayoría de estudiantes, aproximadamente el 90%, utilizaba la palabra “lados”. (En la categoría se designa con el nombre adecuado – caras).

Las representaciones de los cuerpos, era madera sólida y en especial en el cubo tenía en una de sus aristas, una cinta que designaba su longitud (10 cm), la cual incide un poco en las descripciones realizadas en la tarea.

En la tabla presentada a continuación se encuentran las categorías de las descripciones realizadas por los estudiantes de acuerdo a cada sólido. La convención N°E hace referencia a la cantidad de estudiantes y % al porcentaje de estudiantes que se encuentran en cada categoría (los cuales serán empleados de este momento en adelante).

Tabla 18 Descripción de sólidos geométricos.

sólido	Categoría	N°E	%
Cilindro	1. Estudiantes que afirman tiene dos caras (arriba y abajo) redondas, planas y aluden a la altura (10 cm)	18	60%
	2. Estudiantes que aluden a características generales, a su forma global (redondo) y similares a otros objetos.	9	30%
	3. Estudiantes que para hacer su descripción además de nombrar características del cuerpo utilizan gráficos.	3	10%
Cubo	1. La descripción alude a componentes del cuerpo como la forma y cantidad de sus caras, vértices, ángulos, altura y/o superficie. “tiene superficie plana”.	13	43%
	2. Descripciones que comprenden algunos elementos de la categoría 1 y además aluden al término congruente.	2	7%
	3. Descripciones que aluden a elementos como el color y el material.	2	7%
	4. Descripciones que aluden al a forma de las caras (algunos a la altura)	8	27%
	5. Descripciones que comprenden algunos elementos de la categoría 1 y además aluden al gráfico.	5	17%

Pirámide (de base cuadrada)	1. Estudiantes que describen la pirámide como un cuerpo formado por 4 caras triangulares, una cara cuadrada y una punta (refiriéndose al ápice- algunos aluden a “vértices, ángulos, esquinas, partes planas”).	16	53%
	2. Estudiantes que plantean una semejanza entre el cuerpo y el triángulo, además en que tiene 5 caras.	3	10%
	3. Descripciones que hacen referencia a la cantidad de las caras pero no especifican la forma.	4	13%
	4. Descripciones que hacen referencia a componentes como la cantidad de caras (no especifican forma) y “las puntas”, además utilizan un gráfico.	4	13%
	5. Hacen referencia a algunos componentes geométricos pero hacen énfasis en características como el color y el material.	3	10%
Prisma	1. Estudiantes que describen el prisma con caras (si utilizan éste término), dos de ellas cuadradas y cuatro rectangulares.	2	7%
	2. Descripciones que aluden a partes del prisma con formas rectangulares y cuadradas. (algunos nombran otras características como superficie plana, ángulos o vértices).	5	17%
	3. Describen el prisma con algunos componentes y plantean una similitud con el cubo o con el cuadrado. “tiene forma de cubo aplastado y con cuatro laterales”.	8	27%
	4. Hace referencia a algunos componentes (ángulos o vértices) y aluden únicamente a la forma: cuadrada o rectangular (alguna de las dos).	8	27%
	5. Alude a componentes como vértices, aristas o caras pero no a la forma.	7	13%

2. Lee a tus compañeros la descripción que hiciste anteriormente nombrando cada componente, discute con tu maestro los nombres de éstos.

En esta parte de la tarea se hace un conversatorio donde los estudiantes leen sus descripciones, las cuales se compilan en el tablero. De ahí surge el siguiente cuadro el cual incluye las intervenciones de casi todos los estudiantes de manera textual.

Tabla 19 Componentes de los sólidos geométricos.

Cilindro	Cubo	Pirámide	Prisma
▪ Forma ovalada ▪ Tiene tres lados ▪ Se parece a una pipa ▪ Es congruente ▪ La forma de arriba y de abajo es plana ▪ Tiene dos caras ▪ Tiene dos vértices ▪ Se parece a un círculo	▪ tiene 6 lados ▪ 8 puntas ▪ Es ancho ▪ Congruente ▪ Todos los lados son cuadrados ▪ Tiene 12 vértices (se refiere a las aristas señalándolas) ▪ Mide 8 cm por cada lado ▪ Todos los lados miden lo mismo ▪ Todas las partes son planas ▪ Tiene 24 ángulos	▪ Es triangular ▪ Tiene 5 lados ▪ Todas las partes son planas ▪ Tiene 8 vértices (refiriéndose a las aristas) ▪ La forma de arriba es en forma de punta. ▪ Su base es cuadrada ▪ Tiene 5 esquinas. ▪ Es alto. ▪ Su base es plana.	▪ Tiene 6 lados. ▪ Forma cuadrada. ▪ Lo ancho tiene forma rectangular ▪ Lo alto es cuadrado. ▪ Es congruente ▪ Es ancho. ▪ Tiene 12 vértices (señalando las aristas) ▪ Tiene 8 puntas. ▪ Es pequeño. ▪ Tiene todas las partes planas.

Luego de realizar el cuadro, se cuestiona a los niños, dada la variedad de palabras empleadas para designar los componentes, cuáles serían los términos apropiados para referirse a las partes de los cuerpos de tal forma que todos pudiéramos pensar en lo mismo.

En este punto hacemos uso de un protocolo de observación el cual pone de manifiesto las intervenciones tanto de los estudiantes como de quienes aplican la tarea, en relación a las descripciones de los sólidos geométricos.

E, representa cualquier estudiante, Es, la mayoría de los estudiantes, E con un subíndice (E1, E2, E3...) se refiere a un mismo estudiante y P la persona que aplica la tarea.

Éste protocolo inicia cuando un estudiante lee su descripción y utiliza el término es congruente (lo lee en las descripciones que hizo del cubo, el cilindro y el prisma) se le pregunta.

P: ¿A qué te refieres con congruente?

E: Los lados son iguales. (El estudiante procede a mostrarlo señalando las caras del cubo).

P: Pero, ¿qué quiere decir?

E: Sí, (señala las caras) este lado es igual a este lado, todos son iguales.

Entonces surgen otras preguntas y respuestas como:

P: ¿A qué se refieren cuando hablan de lados, cuáles son?

(Algunos estudiantes señalan en el cuerpo con su mano mostrando las caras).

P: ¿Puede venir alguien a mostrarnos cuáles son los lados?

(Un estudiante toma el cubo y señala las caras, además afirma que tiene seis lados mostrándolos).

P: El nombre adecuado para referirse a ellas es caras, el cubo está formado por caras.

E: Las caras son cuadrados, son congruentes.

P: ¿Qué quiere decir?

E: Que las caras son iguales.

P: Todos nos ponemos de acuerdo que cuando hablemos de congruente nos vamos a referir en que son iguales. Ustedes dicen que las caras del cubo tienen forma de cuadrado. Todos ellos son polígonos que conforman las caras.

¿Si el cuadrado es un polígono, qué otros polígonos conocen?

E: rectángulo, rombo, octágono, triángulo, cuadrado, hexágono, cuadrilátero.

P: Los polígonos son figuras conformadas por lados rectos. (Se toma el cubo y se muestra una cara, en ella, se señala el polígono y los lados).

E: El círculo no se sabe cuántos lados tiene.

P: ¿Entonces el círculo es un polígono?

Es: No, Sus bordes son curvos.

P: ¿Cómo son las caras de los otros de los otros cuerpos?

E: El prisma también tiene seis caras, pero unas son las más largas que otras, el prisma tiene caras que son cuadradas y rectángulos, la pirámide tiene triángulos.

P: Tiene caras que son triangulares. ¿Puede alguien mostrarlas?

(Un E se para y las muestra con su mano)

E: Estas: una, dos, tres, cuatro, también tiene una cara que es un cuadrado.

(Luego, se procedió a detallar la forma y cantidad de las caras de los cuerpos, salieron algunos estudiantes, las contaron y las señalaron).

P: ¿Cuáles serían los vértices?

E: (Se para y señala las aristas).

E: No, esas son las aristas.

P: ¿Bueno, si esa es una arista?, entonces ¿qué es una arista?

E: (levanta la mano) es un segmento de recta.

E: Las aristas son líneas rectas.

P: Entonces ¿cómo se forma esa arista?

Es: Son rectas formadas por la unión de otros lados.

P: ¿Lados o caras?

Es: Caras.

P: ¿Alguien puede salir y mostrarme cómo se forma ésta arista?

E: (muestra las caras por medio de las cuales se forma cada arista del cubo) ésta se forma con ésta y ésta cara... y así sucesivamente.

P: Contemos las aristas del cubo,

Es: Tiene doce aristas.

P: Cuando ustedes hablan de puntas, esquinas, ¿a qué se refieren? ¿Puede alguien mostrarlas?

E: (señala los vértices de la pirámide) tiene cinco esquinas. El prisma tiene ocho puntas.

E1: No, los vértices son las puntas, por eso tiene ocho puntas (refiriéndose al prisma).

E: Las esquinas son los vértices.

P: Entonces ¿qué es un vértice?

E: Una esquina donde se unen varios segmentos de recta. (Procede a señalarlos).

Con los estudiantes se cuentan los vértices y las aristas de los cuerpos.

P: Bueno, ustedes también nombran ángulos. El estudiante que leyó en su descripción que el cubo tiene veinte cuatro ángulos puede explicarme.

E2: Si, (se levanta, toma el cubo y muestra en una de las caras los ángulos que se forman) esto es un ángulo.

P: Cómo así, entonces ¿qué es el ángulo?

E2: Es... ésta distancia. (Señalando la apertura de un ángulo de una de las caras)

P: Es la medida de la apertura entre los lados del cuadrado. (Señalándolos en el cuerpo)

E2: Si, entonces ésta cara (señalándola) tiene cuatro ángulos.

E3: Entonces seis por cuatro, veinte cuatro. Tiene veinticuatro ángulos.

E2: Si, ésta cara tiene cuatro ángulos, ésta cuatro ángulos.... (Así sucesivamente hasta referirse a todas las caras del cubo), por eso el cubo tiene veinte cuatro ángulos.

P: Listo muy bien, ya sabemos además que los cuerpos están compuestos por ángulos.

De esta manera, se alude de nuevo a los términos que ellos utilizaron, se acordó los nombres adecuados de los componentes de los cuerpos descritos (caras, vértices y aristas), además se especifica las formas que tienen y la cantidad.

1. De acuerdo con lo que observaste de cada cuerpo geométrico y teniendo en cuenta la explicación anterior, completa el siguiente cuadro.

En el cuadro entregado a los estudiantes se encontraban elementos como: cuerpo, número de vértices, número de aristas, número de caras, forma de las caras y forma de la base.

Para efectos de los resultados, en la siguiente tabla se ha compilado las respuestas de los estudiantes en relación a lo mencionado anteriormente. El porcentaje corresponde a la cantidad de estudiantes que dieron esas características, como algunos no responden u otros dan más de una respuesta, el porcentaje podría no alcanzar o sobre pasar el 100%.

Tabla 20 Cantidad y/o forma de los componentes de los cuerpos geométricos.

Cuerpo	Vértices	N° E	%	Aristas	N° E	%	Caras	N° E	%	Forma – caras	N° E	%	Forma-base	N°E	%
Cubo	8	15	50%	12	19	63%	6	28	93%	Cuadrada	23	77%	Cuadrada	21	70%
	12	11	40%	24	8	26%	12	1	3%	Plana	4	13%	Plana	9	30%
	24	2	6.5%	8	2	7%									
	18	1	3%												
Pirámide	5	21	70%	8	28	93%	5	25	83%	Triangular y cuadrada	6	20%	Cuadrada	21	70%
	8	9	30%	16	1	3%	4	5	17%	Triangular	17	57%	Plana	7	23%
				4	1	3%				Rectangular	1	3%	Ovalada	2	7%
										Inclinada	2	7%			
										Cuadrada	2	7%			
										Plana	2	7%			
Prisma	8	19	63%	12	19	63%	6	29	97%	Rectangulares	17	57%	Cuadrada	20	67%
	12	5	17%	8	6	20%	8	1	3%	Plana	4	13%	Plana	8	27%
	24	5	17%	24	4	13%				Cuadrada	18	60%	Rectangular	2	7%
	2	1	3%	16	1	3%				Cuadrilátero	1	3%			
										Triángulo	1	3%			

V. Análisis de resultados.

Esta tarea tenía como finalidad que los estudiantes describieran los sólidos geométricos tales como el cilindro, el cubo, la pirámide cuadrangular y el prisma cuadrangular fijando su atención en los componentes (vértices, forma y número de caras y aristas). Para ello, el conversatorio en el cual se exponían las ideas era de vital importancia, pues era el momento para institucionalizar los términos y llegar a conceptualizar cada uno de los componentes de éstos cuerpos, en especial los vértices, las aristas y las caras.

En el punto número uno se pide a cada estudiante describir los cuerpos que se le presentan (cilindro, cubo, pirámide y prisma) teniendo en cuenta cada uno de sus componentes.

Esta tarea requiere poner en juego el proceso de interpretación de información figurativa, pues se parte de un cuerpo geométrico del cual se deben extraer sus componentes y así ir delimitando propiedades.

Con respecto a las descripciones realizadas del cilindro encontramos un alto porcentaje (60%) que fija la atención en las particularidades del cuerpo, haciendo referencia a la forma y cantidad sus bases, el 30% de los estudiantes continúan haciendo referencia a la globalidad del cuerpo en tanto que lo ven como un todo, utilizando expresiones tales como “tiene forma ovalada” “se parece a una pipa” “su forma es redonda”, entre otras y solo el 10% hace uso de representaciones gráficas (dibujos) para ampliar su descripción, pues aunque emplean el lenguaje natural y expresan de forma escrita sus ideas, también realizan los respectivos dibujos; lo cual indica una falta de seguridad en sus descripciones, por lo que ven la necesidad de acompañarlo con un gráfico.

En las descripciones del cubo, encontramos que la gran mayoría de los estudiantes centran su atención en los componentes del cuerpo, pues especifican en las descripciones sus elementos constitutivos, empleando expresiones tales como “tiene seis caras” “tiene seis lados, ocho puntas, veinticuatro ángulos” lo anterior corresponde al 43% de la población. Un porcentaje de 17% realizan descripciones del cuerpo, basándose en sus componentes y las amplían con el uso de representaciones gráficas (dibujos), permitiéndonos hacer el mismo análisis que en el cuerpo anterior.

Por otro lado encontramos que el 27% especifican básicamente las formas de las caras y hacen referencia a la altura del cuerpo, otro grupo de estudiantes,

correspondientes con el 7% de la población, hacen explícito el término congruente, al referirse por ejemplo a las caras del cubo, pues dicen “tiene seis lados y ocho ángulos, sus caras son planas, es cuadrado y mide 8cm y medio y es congruente” “tiene seis lados, tiene ocho puntas, es ancho, es congruente, todos sus lados son cuadrados y tiene doce vértices mide 8cm cada lado, veinticuatro ángulos”. Este término según el contexto, nos permite comprender que sí hace referencia a la igualdad entre la forma y tamaño de los polígonos (caras).

Cabe resaltar que, aún, encontramos estudiantes (7%) que aluden en sus descripciones a elementos del cuerpo tales como color y materiales, lo cual indica que se encuentran en un nivel inferior al de sus compañeros, ya que no tienen en cuenta los aspectos geométricos ni métricos, sino físicos, los cuales no son punto de interés en la actividad.

Respecto a las descripciones de las pirámides, identificamos que el 53% de las descripciones aluden a sus componentes, reconociéndolo como un todo (tridimensional) formado por varias partes, sin embargo encontramos descripciones realizadas a partir de la comparación de éste con una figura bidimensional (triángulo), las cuales corresponden con el 10%, lo que muestra que la percepción del cuerpo parte de la vista desde un solo punto de referencia o de la familiaridad del estudiante con las figuras planas.

Un 13% de las descripciones, hacen referencia a la cantidad de componentes, más no a sus formas, en tanto que es expresada como “la pirámide tiene cinco lados, tiene también ocho vértices, es de tamaño pequeño”. Esto nos hace pensar que están tan enfocados en hacer referencia a los componentes, que obvian un elemento importante como es la forma y se basan en una asignación numérica. Se evidencia también que algunas descripciones (13%) aluden, al igual que las anteriores, a la cantidad más no a la forma, pero hacen uso de las representaciones figurativas (dibujo) para ampliar dichos escritos. Encontramos también un 10% de descripciones basadas en características del cuerpo relativas al color y material.

En cuanto a las descripciones realizadas para el prisma, encontramos que la gran mayoría de estudiantes (27%) lo comparan con el cubo o el cuadrado, en tanto que especifican las similitudes entre ellos, “es familiar del cubo por tener seis lados” “puede parecer un cubo”, lo cual nos permite pensar que prevaleció el hecho de comparar los cuerpos como en las tareas anteriores. De igual forma el 27% describen los componentes, haciendo referencia únicamente a una de las formas de sus caras (cuadrada o rectangular), lo cual indica que no realizan una

diferenciación visual entre la métrica del cuadrado y del rectángulo, pues pareciera que las tomaran como iguales, a diferencia de quienes se encuentran en la categoría 2, los cuales corresponden al 17% donde muestran la discriminación entre el cuadrado y el rectángulo, referenciados como componentes del cuerpo.

El 23% tienen en cuenta componentes tales como vértices, aristas y caras, especificando su existencia más no su forma “tiene ocho vértices, seis caras y ocho puntas”. Un porcentaje del 7% muestra tener claridad acerca del concepto de caras, ya que lo definen como un cuerpo formado por dos caras cuadradas y cuatro rectangulares lo cual es acertado.

En general, se evidencia algunos aspectos relacionados con el lenguaje utilizado para referirse a los componentes de los cuerpos, el cual, aunque refleja uso de términos matemáticos como aristas, lados, vértices, ángulos, en algunos casos caras, éstos no tienen claridad en su correcta aplicación, reflejando que han tenido familiarización con estas palabras al ser escuchadas en otras ocasiones, pero no han sido objeto de reflexión para nombrar cada elemento correctamente.

También es importante resaltar la tendencia de las descripciones en hacer referencia a los componentes del sólido, más que en su globalidad, mostrando avances respecto a la manera de ver los objetos y en particularizar en los aspectos geométricos y en algunos casos métricos, pues realizan mediciones. A diferencia de un bajo porcentaje de la población que persiste en particularizar características asociadas al material y color, lo que evidencia una habilidad “percepción de figura y contexto” desarrollada en la mayoría de niños.

Por otra parte, se refleja una tendencia en plantear semejanzas entre las figuras planas y los cuerpos geométricos, lo cual es interesante ya que de una u otra manera los objetos tridimensionales contienen éstas formas, pero también es necesario hacer distinciones en relación a las particularidades de cada uno. Ello muestra que los estudiantes tienden a realizar una discriminación visual al hacer comparaciones e identificar semejanzas y diferencias.

Por otra parte, el conversatorio generado en la tarea, permitió dar cuenta de las concepciones de los estudiantes y a partir de lo que ellas, movilizar esquemas, en los cuales fue muy interesante ver la forma como ellos mismos definieron términos tan importantes para la actividad como aristas o vértices, pues el objetivo no era darles definiciones, sino construirlas entre todos a través de la observación, confrontación de ideas y la manipulación de los objetos.

También debemos reconocer que esto se dio gracias a las ideas que ellos tenían, donde se puso de manifiesto elementos tan interesantes como: la definición de arista como un segmento de recta, o como un segmento formado al unir dos caras.

De igual forma hubo otros aspectos que fortalecieron la actividad y permitieron que los estudiantes reflexionaran un poco sobre los componentes de los poliedros tomándose la tarea de moverlos, manipularlos una y otra vez para contar, señalar, y palpar los componentes a los cuales ya se había hecho referencia, evidenciando un uso de las imágenes cinéticas, pues en el momento de referirse a ellas asocian una actividad muscular, por ejemplo: mover las manos para tocar las aristas.

Ello pone de manifiesto ciertas destrezas mentales que tiene que ver con el aprendizaje de las matemáticas, en las cuales las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que hacen de los objetos (relaciones, dibujos, conceptos, etc.) permite hacer un análisis acerca de los componentes de los cuerpos haciendo un razonamiento visual.

De igual forma, los resultados obtenidos son producto de la participación activa de los niños, la iniciativa que demostraban en cada parte de la tarea y la aceptación a las actividades planteadas.

Luego, se pasó a llenar la tabla con los componentes de los prismas, ahí, cada estudiante refleja en cierta forma la aprehensión de lo que se había hecho anteriormente en el conversatorio, lo cual podemos afirmar porque:

En cuanto a la coherencia entre la cantidad de vértices de los cuerpos y las respuestas de los estudiantes encontramos que su gran mayoría muestra claridad en el concepto al escribir respuestas acertadas. Con un porcentaje del 50% en el cubo, 70% en la pirámide y 63 % en el prisma.

Respecto a las aristas y caras también hay un alto porcentaje de acierto, para el cubo 63 % y 93%, para la pirámide 93% y 83% y para el prisma 63% y 97 %.

Los estudiantes que presentan dificultades en determinar correctamente la cantidad, tanto de los vértices como de las aristas, dan respuestas incorrectas a partir del conteo que realizan, pues en su gran mayoría cuentan varias veces el mismo componente. Un ejemplo de ello es cuando, en el cubo, algunos estudiantes responden que la cantidad de aristas son veinticuatro, donde establecen la relación entre la cantidad de lados de cada cara (cuatro) los cuales son tomados como aristas y la cantidad de caras que lo componen;

específicamente multiplican la cantidad de lados (cuatro) con la cantidad de caras (seis) lo que da como resultado veinticuatro, respuesta que es incorrecta al tener en cuenta que las aristas en los cuerpos tridimensionales son comunes a varias caras.

Respecto a la forma de las caras y la base, la mayor cantidad de respuestas fueron acertadas, sin embargo, el porcentaje que no acertó, presentan una particularidad, en tanto que expresan su respuesta no en términos de la forma como estaba planteado en el enunciado, sino en ciertas características que aluden a una cualidad “ser plana” o “inclinada” para el caso de las caras de la pirámide. Ello nos deja pensar que los estudiantes hacen una asociación entre las caras y la posición en que se ven o nos dan una idea de la lectura que están haciendo del enunciado, pues es posible pensar que éste no fue comprendido.

En el desarrollo de esta situación se evidencia una evolución en los desempeños de los estudiantes en diferentes aspectos, tal vez uno de los más marcados está relacionado con el paso de la lengua natural a un lenguaje especializado en los argumentos y descripciones de los componentes de los cuerpos. Este paso se dio a partir de sus concepciones previas y a las tareas propuestas mediadas constantemente por las discusiones en clase y socializaciones.

Al iniciar las tareas de esta situación, los estudiantes aludían a aspectos matemáticos de manera errada, pero con el transcurso de las tareas y haciendo uso de imágenes cinéticas, es decir del uso de movimientos corporales y percepción de los objetos, logran conceptualizar esos términos y emplearlos de manera adecuada en algunos contextos de la situación.

De igual forma y teniendo en cuenta que la situación estaba fundamentada en tareas de comparación, el uso de recursos de su entorno y sólidos geométricos, condujo a los estudiantes a desarrollar el proceso de visualización “interpretación de la información figurativa”, en tanto que lograron compararlos y plantear semejanzas en sus componentes para conceptualizarlos y darles significado independientemente del contexto.

3.2.2. Situación 2: análisis, descripción y clasificación de cuerpos geométricos.

▪ Tarea 1 describiendo cuerpos geométricos.

Objetivos:

- Revisar y ampliar la imagen mental de algunos conceptos relacionados con los sólidos geométricos, especialmente prismas y pirámides.
- Analizar en las descripciones que realicen los estudiantes de algunos cuerpos geométricos, qué tanto conocen de sus características y/o propiedades.
- Describir cuerpos geométricos prestando atención en las partes que lo componen.

I. Descripción de la tarea.

Para el desarrollo de esta tarea, se lleva al grupo al laboratorio de matemáticas y se pide a los estudiantes realizar grupos de cuatro o cinco estudiantes, con lo cual el grupo queda dividido en 6 subgrupos. Se entrega a cada grupo, sólidos geométricos elaborados en madera (cubo, prisma rectangular y pirámide cuadrangular).

Se les da la consigna de describir uno de los sólidos que tienen, el cual será determinado por el orientador, pues éste dice a cada grupo, sin que los demás escuchen, cuál es el sólido que deben describir.

A dos grupos se les asigna el cubo, a dos la pirámide cuadrangular y a dos el prisma cuadrangular. Los estudiantes describen el cuerpo en la ficha que se les ha sido entregada, sin el nombre de dicho cuerpo. Seguido de ello, el orientador recoge las guías y la entrega de tal forma que cada grupo reciba una descripción diferente a la realizada. Ellos leen la descripción que se les entrega y seleccionan (encierran) entre un grupo de representaciones plasmadas en la hoja, la que corresponde al sólido que está descrito en el numeral 1.

Dado que los estudiantes realizan una selección del cuerpo descrito por sus compañeros, se les entrega diferentes materiales, tales como plastilina, pitillos, lana, palos, cartulina etc. con los cuales cada grupo construye el sólido descrito por sus compañeros. Seguido de ello, los estudiantes analizan y determinan si la descripción que les fue entregada es suficientemente clara y concisa para realizar la respectiva construcción y las dificultades que encuentran al hacer la lectura de ésta para llegar a construir el cuerpo descrito.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

Teniendo en cuenta el desarrollo de la situación 1, en esta tarea se espera que los estudiantes empleen un lenguaje matemático más elaborado en cada una de sus descripciones, es decir que empleen los términos aprendidos en clases anteriores para mencionar los cuerpos geométricos y sus respectivas componentes.

También se espera que los estudiantes reflexionen acerca de la importancia del uso adecuado del lenguaje al hacer referencia a un cuerpo o a una componente, pues este es el punto de partida para la realización de toda la tarea.

Para esta tarea y teniendo en cuenta que previamente se ha puesto en discusión los componentes que conforman los sólidos geométricos (caras, vértices y aristas), el maestro propicia un ambiente de aprendizaje, en el que incita a los estudiantes a realizar una buena producción escrita (descripción del cuerpo) y brinda la posibilidad de que empleen los términos matemáticos aprendidos en la situación didáctica anterior. De la misma manera, el maestro facilita los recursos necesarios para que los estudiantes realicen las construcciones del cuerpo geométrico correspondiente a cada descripción.

Por otro lado el maestro fomenta la capacidad crítica y de análisis por parte de los estudiantes, con lo cual indaga acerca de la calidad o pertinencia del lenguaje empleado en las producciones textuales de sus compañeros y de sus falencias o fortalezas en la construcción de un cuerpo, a partir del lenguaje empleado por sus pares.

Por otro lado, se espera que los estudiantes fijen la atención en cada uno de los componentes del cuerpo (caras, vértices y arista) y tengan en cuenta aspectos de estos tales como forma, cantidad, etc., y que puedan materializar a través del uso de por lo menos dos materiales distintos, los cuerpos descritos por sus compañeros.

III. Materiales.

Para la actividad se utilizan materiales tales como plastilina, pitillos, ega, cartulina, regla, lana, palos.

IV. Resultados.

Esta tarea se realizó en una sesión de 90 minutos con treinta y un estudiantes. Se conformaron seis grupos, de los cuales cinco eran de cinco estudiantes y el restante de seis estudiantes. En grupos de 5 estudiantes

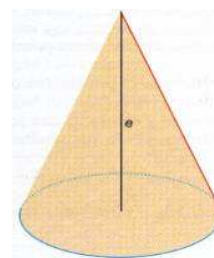
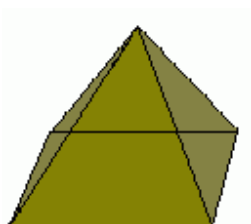
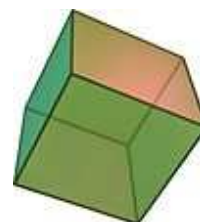
1. Describan el cuerpo que tienen en la mano para que sus compañeros puedan saber, sin verlo, cómo es. Si quieren pueden mover el cuerpo.

En la siguiente tabla se encuentran las descripciones de la pirámide, el cubo o el prisma, realizadas por los grupos conformados.

Tabla 21 Descripción de poliedros.

CUERPO	DESCRIPCIÓN	NºE	%
PIRÁMIDE	GRUPO 1 Tiene una base, tiene 5 vértices, tiene 8 aristas, la parte de arriba es puntiaguda, está conformado por triángulos y su base es plana. Es congruente de alto mide 9 cm y de ancho 5 cm	5	16%
PIRÁMIDE	GRUPO 2 Tiene 8 aristas 5 caras, todas las partes son planas, forma triangular, tiene 8 vértices, la parte de arriba es puntiaguda, la parte de abajo es plana, en la punta es delgada y abajo es ancho.	5	16%
CUBO	GRUPO 3 8 vértices, 6 lados, 12 aristas, 2 bases y todos sus lados son iguales	5	16%
CUBO	GRUPO 4 Tiene 6 lados, tiene 24 ángulos, tiene 12 aristas, tiene 12 vértices, sus bases y caras son planas y cuadradas y mide 8cm por cada lado.	5	16%
PRISMA	GRUPO 5 2 bases, 4 caras, su superficie es plana 8 vértices, sus bases son cuadradas, sus bases son rectangulares, 24 ángulos y 12 aristas.	6	19 %
PRISMA	GRUPO 6 Sus caras son rectangulares y cuadradas, tiene 8 vértices, 6 caras, 12 aristas de base plana, 24 ángulos, es la mitad de un cubo y es pequeño.	5	16%

2. Lean la descripción hecha por sus compañeros y escojan el cuerpo que corresponde a dicha descripción y enciérrenlo en la siguiente representación.



3. Escojan entre los siguientes materiales, los que consideren necesarios y construyan el cuerpo geométrico que tienes en la descripción con dos materiales diferentes. (cartulina, palo, pitillo, lana, plastilina etc.)

A continuación se compila en una tabla las respuestas de las preguntas dos y tres, en la cual se encuentra la descripción textual realizada por cada grupo, la representación que encerraron en la guía (los grupos a los cuales le correspondía dicha descripción), si ésta corresponde o no con el cuerpo descrito y las construcciones realizadas con los distintos materiales entregados.

Se debe tener en cuenta que las construcciones de los cuerpos geométricos, realizadas por los distintos grupos, no corresponden a lo que en un primer momento describió ese mismo grupo en el punto uno.

Es decir, mientras los grupos uno y dos describieron la pirámide, la construcción fue realizada por los grupos tres y cinco. Los grupos tres y cuatro describieron el cubo pero la construcción la realizaron los grupos uno y seis. Los grupos cinco y seis describieron el prisma y la construcción, la realizaron los grupos dos y cuatro. Lo anterior se explicita en la tabla.

Tabla 22 Descripción y construcción de poliedros.

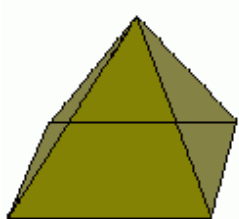
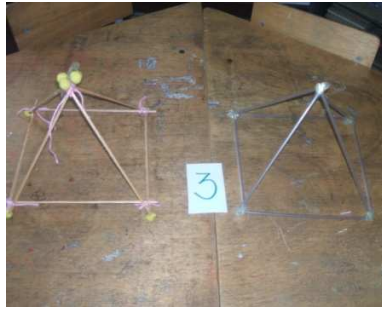
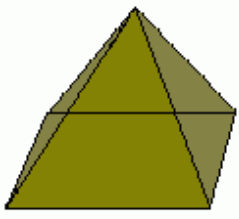
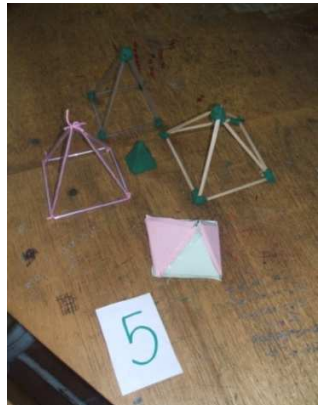
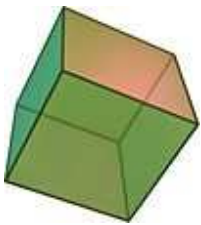
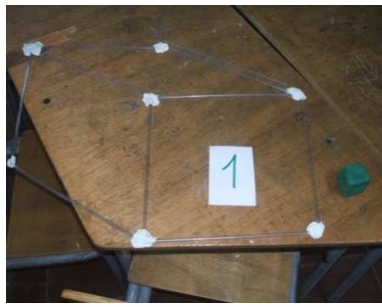
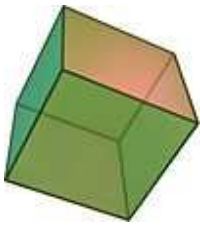
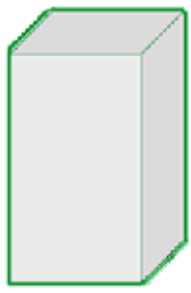
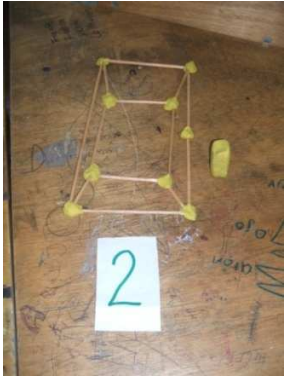
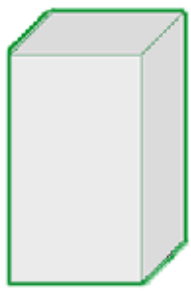
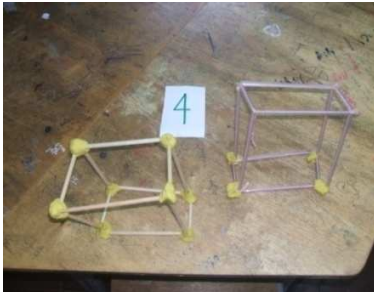
Descripción realizada por:	Corresponde si / no	Cuerpo encerrado por:	Cuerpo construido por:
Grupo 1: Tiene una base, tiene 5 vértices, tiene 8 aristas, la parte de arriba es puntiaguda, está conformado por triángulos y su base es plana. Es congruente, de alto mide 9 cm y de ancho 5 cm.	Grupo 3: Si	Grupo 3 	Grupo 3 
Grupo 2: Tiene 8 aristas, 5 caras, todas las partes son planas, forma triangular, tiene 8 vértices, la parte de arriba es puntiaguda, la parte de abajo es plana, en la punta es delgada y abajo es ancho.	Grupo 5: Si	Grupo 5 	Grupo 5 
Grupo 3: 8 vértices, 6 lados, 12 aristas, 2 bases y todos sus lados son iguales.	Grupo 1: Si	Grupo 1 	Grupo 1 

Tabla 22 Continuación.

Descripción realizada por:	Corresponde si / no	Cuerpo encerrado por:	Cuerpo construido por:
Grupo 4: Tiene 6 lados, tiene 24 ángulos, tiene 12 aristas, tiene 12 vértices, sus bases y caras son planas y cuadradas y mide 8cm por cada lado.	Grupo 6: Si	Grupo 6 	Grupo 6 
Grupo 5: 2 bases, 4 caras, su superficie es plana 8 vértices, sus bases son cuadradas, sus bases son rectangulares, 24 ángulos y 12 aristas.	Grupo 2: Si	Grupo 2 	Grupo 2 
Grupo 6: Sus caras son rectangulares y cuadradas, tiene 8 vértices, 6 caras, 12 aristas de base plana, 24 ángulos, es la mitad de un cubo y es pequeño.	Grupo 4: Si	Grupo 4 	Grupo 4 

a. Escriban si la descripción permitió hacer algún cuerpo geométrico y porqué.

Tabla 23 Justificación respecto a la posibilidad para construir el cuerpo geométrico.

Respuestas	Justificación	%
Si	• Porque estaba bien descrita y clara, tenía varias características bien dichas. • Nos dejó hacer un cuerpo geométrico. • Porque con la descripción supimos como era la figura y la pudimos hacer. • Permitió hacer algún cuerpo geométrico según la descripción. • Un grupo no justificó su respuesta.	84%
No		0%
No contesta		16%

b. Escriban las dificultades que tuvieron para construir el cuerpo geométrico descrito.

Tabla 24 Justificaciones respecto a las dificultades para construir el cuerpo geométrico.

Respuestas	Justificación	%
Con dificultad	• Pegar los vértices porque la figura no se quedaba firme. • Dificultades grupales para hacer, porque no me dejaban hacer nada.	36%
Sin dificultad	• No porque describieron muy bien el cuerpo los de la hoja que nos tocó. • Porque fue una figura muy fácil de hacer con esos materiales. • No tuvimos.	48%
No responde		16%

V. Análisis de resultados.

Esta tarea tiene como finalidad que los estudiantes pongan en juego todos los conocimientos adquiridos hasta este momento respecto de los componentes y características de los sólidos en la descripción de cuerpos geométricos tales como el prisma cuadrangular, la pirámide cuadrangular y el cubo. Para ello, se acude a estrategias de movimiento, para que finalmente a través de dichas descripciones otro grupo pueda llegar a la construcción respectiva.

La tarea inicia pidiendo a los estudiantes que describan el cuerpo que tienen en la mano, para que los demás compañeros puedan saber sin verlo, cómo es, para ello los estudiantes podían mover el cuerpo. A cada grupo se le entregaron los tres sólidos, pero sólo describirían el cuerpo asignado, para lo cual a dos grupos se les asignó el cubo, a dos grupos el prisma y a otros dos grupos la pirámide, sin que los demás grupos supieran qué cuerpo se le habían asignado a los demás.

Con relación a las descripciones de la pirámide cuadrangular, el cubo y el prisma cuadrangular realizados por los grupos de estudiantes, se puede observar que desarrollan procesos de interpretación de la información figurativa, en tanto que logran abstraer de una figura todos sus componentes y características generales para plasmarlos en un texto. En dichas descripciones encontramos que los estudiantes tienen la habilidad para percibir las figuras independientemente del contexto, en tanto que identifican en cada uno de los cuerpos, sus respectivas componentes.

Los grupos que corresponden a la pirámide realizan esta descripción nombrando componentes como la base, vértices, caras, aristas y vértice superior (ápice). De éstos nombran número y forma en las caras pertinentes. Estos grupos reconocen en forma acertada el número de caras y su forma triangular con relación a la base determinando la cantidad y cualidad plana. Sin embargo, no especifican su forma (bidimensional cuadrada) elemento aparentemente importante para su construcción en el paso siguiente.

Es importante reconocer que los dos grupos hacen referencia al ápice “arriba es puntiaguda” y cada uno referencia elementos fundamentales como: el primero, alude a la altura de cada triángulo y a la base de éstos “de alto 9 cm y de ancho 5cm” lo que parece indicar que reconocen la forma congruente de cada uno y su carácter de isósceles. El segundo grupo, reconoce la forma general de la pirámide,

indicando que efectúan un reconocimiento global del cuerpo “la parte de arriba es puntiaguda, la parte de abajo es plana, en la parte es delgada y abajo es ancho”. Según los resultados de la tabla 22, los grupos tres y cinco a los cuales les correspondió realizar la pirámide según descripciones hechas en el apartado uno, logran identificarla según representación bidimensional y construirla en distintos materiales, entre los cuales utilizan palillos de madera, pitillos, plastilina, cartulina y lana, surgiendo una gran variedad de representaciones tridimensionales de ella. En este caso es indispensable resaltar que no se hizo necesario conocer la forma de la base (cuadrada) para construir la pirámide cuadrangular, esto parece indicar que con las descripciones de los otros componentes se podía deducir la forma de la base (cuatro caras, una base, ocho aristas, cinco vértices).

Sobre las estrategias que utilizan los estudiantes para la construcción, encontramos que cada uno de ellos planteó distintas formas para llegar a una representación tridimensional y surgieron procedimientos matemáticos muy específicos como comparar magnitudes, superponer la cartulina en las caras de la pirámide para calcarla, tomar medidas iguales para construir la base de la pirámide y a su vez los triángulos de las caras, delimitar vértices, entre otros.

Por otra parte, con los distintos materiales, llegaron a variadas representaciones del cuerpo, (conservando sus componentes) entre los cuales surgieron construcciones diversas: sólidos de varillas, macizos y huecos, los cuales les permitió observar el mismo cuerpo de diferente manera, entre los que algunas construcciones resaltan componentes como las aristas y los vértices, u otros facilitan una visualización global del mismo; también los condujo a reflexionar un poco sobre la diversidad de inconvenientes y elementos a tener en cuenta con el uso de cada material para poder llegar a una construcción aproximada del cuerpo. En este sentido es importante resaltar que en el grupo cinco todos los integrantes buscaron construir la pirámide, un estudiante la realizó en cartulina para lo cual calcó por separado las caras y la base de la pirámide de madera que se les había entregado (calcando los polígonos), a cada polígono por cada lado le anexó en la cartulina espacio para hacer las pestañas, los recortó y finalmente los pegó con cinta. Esta construcción refleja una concepción del cuerpo formado por polígonos, donde se tiene en cuenta las relaciones métricas y geométricas de algunos de sus componentes, hecho que se hace evidente al calcar las caras y ver la necesidad de que los polígonos de las caras sean iguales, reconociendo que esta es una condición necesaria para llegar a la construcción. Además permitió ver al estudiante la relación que debe existir entre la medida de las bases de los

triángulos y los lados del cuadrado que conformarían la base de la pirámide cuadrangular.

Dos de los estudiantes del mismo grupo realizaron la construcción con pitillos y lana, la cual iban anudando y amarrando, donde también era necesario hacer una medición previa de los pitillos que iban a conformar tanto la base como los triángulos de las caras, característica que delimitaba la altura de la pirámide, reflejando una concientización en que estos triángulos deben ser congruentes y que la longitud de sus bases dependen de la base de la misma. De igual forma, hubo entre ambos grupos otras construcciones en palillos y plastilina, reflejando que los estudiantes tuvieron en cuenta los mismos elementos para su construcción.

En este sentido, es importante mencionar que estos análisis realizados por los estudiantes fueron producto de la exploración que tuvieron con los materiales, pues algunos iniciaron sus construcciones sin tener en cuenta factores métricos pero después de realizar varios intentos se dieron cuenta que era necesario cortar tanto palos como pitillos para llegar a la construcción solicitada.

Los grupos tres y cuatro a quienes les corresponde la descripción del cubo, también realizan descripciones asociadas a la cantidad de sus componentes “ocho vértices, seis lados, doce aristas...”, indicando que centran la atención en las partes que lo conforman y las particularizan mediante un conteo, ya que hacen referencia a la cantidad de los mismos. Sin embargo, hay una distinción entre estos dos grupos, en el cual el grupo tres, hace referencia acertadamente a la cantidad de aristas, caras y vértices, mientras el grupo cuatro, tiene dificultades en delimitar la cantidad de vértices del cubo, afirmando que tiene doce vértices y doce aristas, ello puede hacernos pensar que plantean una relación de igualdad entre los vértices y las aristas o hacen un conteo inapropiado de vértices, sin tener en cuenta que son comunes a varias caras.

Por otra parte, aunque se hace referencia a las caras del cubo, ambos grupos se refieren a ellas designándolas como “lados”, lo cual muestra que aún no hay un dominio del término matemático o una inclinación a utilizar un término de la geometría bidimensional para referirse a ellas. También es importante resaltar que el grupo tres no hace referencia a la forma de las caras, sólo hace una descripción afirmando “todos sus lados son iguales”, mientras el grupo cuatro, además de aludir a la cantidad, nombra otras características como: “sus bases y caras son planas y cuadradas y mide 8 cm por cada lado”, dejando ver que reconocen en el

cubo una relación de congruencia entre las caras y particularmente un reconocimiento en que cualquiera de ellas puede ser base de acuerdo a la posición en que se ubique, elemento que no parecen reconocer los estudiantes del grupo tres, pues describen el cubo afirmando que tienen dos bases, ello permite pensar que observan y designan en él las bases compuestas por la cara de abajo y su cara paralela (arriba).

De igual forma como sucedió con las descripciones de la pirámide, ambos grupos a los que les correspondió la construcción, (grupo tres y cinco) llegaron a ella sin la necesidad de tener la descripción de la forma de las caras, reafirmando que mediante la designación de los demás componentes se puede hacer una imagen mental y dar cuenta del sólido que se quiere representar.

Según la tabla 22, los grupos uno y seis a los cuales les correspondía realizar el cubo según descripciones hechas en el apartado 1, logran identificarlo según representación bidimensional y construirlo en distintos materiales, entre los cuales utilizan palillos en madera, pitillos, plastilina y lana, surgiendo dos representaciones tridimensionales de él.

Es importante resaltar que estas representaciones surgen en gran medida a las posibilidades que los materiales brindan, dependiendo de las dificultades que los estudiantes tengan con los mismos, hacen representaciones bidimensionales o tridimensionales. En el caso del cubo, uno de los dos grupos aunque persistió en construir el sólido de varillas utilizando pitillos y plastilina (la cual desempeñaba la función de unir los pitillos y de ser los vértices del cubo), terminó por hacer una representación bidimensional, colocando sobre el suelo los pitillos, porque no fue posible que los pitillos por sí solos se sostuvieran; cuando lo hicieron tridimensionalmente surgieron expresiones como “no se sostiene, se cae, está torcido”, razones por las cuales decidieron realizar la representación bidimensional.

La otra representación que realizaron los estudiantes de ambos grupos, la hicieron moldeando con la plastilina la forma de las caras, (sólido macizo) tratando de conservar la forma y medida de ésta, evidenciando una igualdad entre las caras que conforman el cubo.

Los grupos cinco y seis que corresponden al prisma (al igual que los grupos anteriores), hacen sus descripciones refiriéndose a los componentes, pero a diferencia de los grupos anteriores utilizan un vocabulario matemático adecuado para nombrar tanto los vértices, como ángulos, aristas y caras. Estas

descripciones aluden a la cantidad de componentes, ambos aciertan respecto a las aristas, vértices y ángulos. Cuando hacen referencia a las caras, encontramos que reconocen su forma, pero el grupo cinco es enfático en afirmar que el prisma está compuesto por dos bases y cuatro caras, por el contrario, el grupo seis, lo ve de forma más general afirmando que tienen seis caras, sin especificar cuántas de ellas tienen forma cuadrada, cuántas forma rectangular y así plantear una diferencia entre las bases y las caras laterales. De igual forma, ambos grupos aluden a una característica de algunos componentes del cuerpo en la cual dicen: “superficie plana” “de base plana”.

En particular, el grupo seis describe el prisma afirmando “es la mitad de un cubo y es pequeño” permitiéndonos pensar que hacen un corte imaginario del cubo para ver el prisma, generando una relación tanto en la cantidad de caras que los conforman como en su forma, donde el cuadrado puede ser la mitad de un rectángulo.

Según la tabla 22, los grupos dos y cuatro a quienes les corresponde realizar el prisma según descripciones hechas en el apartado 1, logran identificarlo según representación bidimensional y construirlo en distintos materiales, utilizando palillos en madera, pitillos, plastilina y lana, surgiendo distintas representaciones tridimensionales de él con elementos geométricos y métricos asociados al cuerpo y tenidos en cuenta para su construcción.

La pregunta 3, en los ítem a y b generan un espacio de reflexión y argumentación en el cual los estudiantes debían analizar cada una de las descripciones realizadas por sus compañeros e identificar en ellas la importancia del uso adecuado del vocabulario matemático y argumentar desde sus percepciones, la importancia de éste en la imagen mental que se hicieron del cuerpo para realizar su respectiva construcción.

En esta, se tiene en cuenta que los lineamientos curriculares especifican la importancia de procesos de argumentación en las clases de matemáticas y aunque la argumentación que hicieron los estudiantes fue elemental, la tarea les permitió analizar tanto el vocabulario matemático empleado por sus compañeros como reflexionar en torno de sus respectivas descripciones.

En cuanto a las justificaciones de los estudiantes respecto de su construcción, encontramos que el 84% de los estudiantes considera que la descripción era pertinente para la realización del cuerpo, especificando desde sus justificaciones

que a partir de ella supieron cómo era el cuerpo e identificar varias características que les permitió hacerse una imagen mental de él. Sus justificaciones muestran la necesidad de argumentar que sí lograron construir el cuerpo; al emplear expresiones tales como “sí porque estaba bien descrita y clara, tenía varias características bien dichas”, “porque con la descripción supimos como era la figura y la pudimos hacer”, mostrando que reconocen en cada una de ellas la importancia de un lenguaje matemático claro y específico para designar cada uno de sus componentes, ningún grupo respondió lo contrario.

De igual forma se interroga a los estudiantes acerca de las dificultades que tuvieron para construir el cuerpo, los grupos dos y cinco tuvieron dificultades con la actividad, el grupo cinco asociadas al trabajo en equipo, pues dicen “dificultades grupales para hacer porque no me dejaban hacer nada” y el otro, asociado a la construcción como tal, pues dicen “dificultad para pegar los vértices porque la figura no se quedaba firme” lo cual muestra que las dificultades parten del espacio y los materiales para la realización de las construcciones y no, de las descripciones realizadas por sus compañeros.

El 48% de los estudiantes, por el contrario, aseguran que no hubo ninguna dificultad al construir el cuerpo geométrico descrito, algunos de ellos lo argumentan desde las descripciones realizadas “no tuvimos dificultad porque describieron muy bien el cuerpo los de la hoja que nos tocó” corroborando la importancia de una descripción verbal apropiada; y otros desde la poca complejidad del cuerpo que debían construir “porque fue una figura muy fácil de hacer con los materiales” (Pirámide).

En general, podemos afirmar que las descripciones fueron pertinentes para la construcción de cada uno de los sólidos mencionados, donde los estudiantes hicieron uso de diversos materiales, empleando diferentes estrategias, que los condujo a distintas representaciones tales como, sólidos en varillas, macizos y huecos.

Para el proceso de construcción de los poliedros, cuando los estudiantes emplearon los palillos, mostraron un reconocimiento en la métrica de cada uno de los palos que corresponderían con las aristas de las figuras, en tanto que realizaron los cortes necesarios para que éstos permitieran la congruencia entre las caras del cuerpo y por ende su respectiva construcción fuera lo más aproximada posible. De igual forma las construcciones muestran un reconocimiento de cada una de las componentes de los cuerpos e intentan

construirlos a partir de lo que se les brinda. Tuvieron dificultades al conformar los cuerpos, porque los palillos no brindaban firmeza a la construcción, sin embargo emplearon diversas estrategias para su conformación tales como lana para amarrarlos o plastilina en cada uno de sus vértices. En cuanto al uso de lana, al amarrar los palos, encontramos que estos no podían coincidir en un mismo punto, lo cual no permite ver la conformación de los vértices, sin embargo no es obstáculo para que su construcción sea lo más cercano posible a la realidad.

Respecto al uso de los pitillos, los estudiantes realizaron, al igual que con los palillos las mediciones y cortes necesarios para que fuera posible llegar a la respectiva construcción, como complemento, los estudiantes utilizaron materiales tales como cinta o plastilina para conformar los vértices, es decir unir varios palillos, sin embargo hubo construcciones de pitillos en los cuales se emplea lana, ésta en el interior de los pitillos, permite amarrarlos desde el inicio hasta la finalización de la construcción siguiendo una secuencia. Esta forma de construir los cuerpos, permite verlo tanto de forma bidimensional como tridimensional.

Con respecto al uso de cartulina, los estudiantes hicieron una representación hueca del sólido, sin generar dificultades en su construcción, ya que tuvieron en cuenta que dicho sólido está conformado por partes, en tanto que calcan por separado cada una de las caras y la base, dejando un espacio para las pestañas y finalmente las unen para conformarlo. Esto nos da una idea de que los estudiantes reconocen que un cuerpo tridimensional está conformado por varias componentes bidimensionales (polígonos) con unas características específicas.

La plastilina, fue utilizada en algunos casos para realizar el cuerpo macizo y en otros para la construcción del cuerpo en varillas. Para el primer caso, bastó con que los estudiantes moldearan el material (teniendo en cuenta los componentes) para darle la forma necesaria, lo cual hizo que esta fuera la construcción más rápida en realizar. Para el segundo caso, la plastilina fue empleada para representar las aristas del cuerpo, lo que hizo que esta construcción no tuviera firmeza.

Aunque la tarea no tenía como única finalidad las construcciones de los cuerpos, el proceso de estas generó mucho interés en los estudiantes, a tal punto que decidían hacer uso de varios materiales para realizar más construcciones de las que se les solicitaba, por otro lado, esta motivación fue plasmada en el uso de los materiales, pues aunque algunos de ellos presentaban mayor facilidad en su manejo, como la plastilina, estos prefirieron hacer diversas representaciones a

partir de otros materiales aunque su uso conllevara algunas dificultades. De igual forma es evidente que los estudiantes realizaron dicha actividad poniendo de manifiesto sus experiencias previas respecto al uso de algunos materiales.

Tarea 2 reconociendo prismas a través de sus componentes.

Objetivos:

- Acercar a los estudiantes al reconocimiento de las características y propiedades de los prismas.
- Nombrar geométricamente las partes que componen de los prismas (aristas, vértices, caras y bases)
- Reconocer características propias de los prismas.

I. Descripción de la tarea.

Para iniciar, se entrega a cada grupo, un prisma cuadrangular (denominado prisma 1), se pide a los estudiantes que observen detalladamente ese cuerpo, lo muevan y realicen una descripción de él teniendo en cuenta todas sus componentes.

Se pide a su vez que lo imaginen desarmado, para que escriban los polígonos que lo conforman y las características de estos. De igual forma, se les entrega un pedazo de piola y se pide que comparen todas las longitudes de sus caras laterales. Lo anterior debe ser consignado en la guía que se les entrega al inicio de la tarea.

Después de ello, se les entrega a cada grupo un prisma triangular (llamado prisma 2) el cual deben observar detalladamente, moverlo y determinar la cantidad y forma, tanto de las caras laterales como de sus bases. También deben comparar las aristas de sus caras laterales usando piola.

Este mismo proceso se realiza con el prisma 3 y 4, los cuales corresponden con prismas pentagonales y hexagonales respectivamente.

Partiendo de las respuestas dadas en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 de esta tarea, los cuales fueron descritos anteriormente, se pide a los estudiantes que completen

una tabla, en la cual se recopila la información respecto a la forma de las bases y cantidad de caras laterales de cada uno de los prismas, al tiempo que se les pide asignar un nombre a cada uno de estos.

Seguido de ello, los estudiantes escriben las características comunes de las caras laterales de las bases y se pide que establezcan relaciones entre ambas.

Partiendo de la resolución de esta tabla y con las respuestas anteriores, se realiza un conversatorio en el cual los estudiantes tienen la posibilidad de leer y compartir sus respuestas con el grupo. De igual forma se cuestiona acerca de la cantidad de bases que conforman los prismas, cantidad y forma de caras laterales y la relación que encuentran entre ambos componentes.

En esta socialización, se aborda el cubo, para el cual se indaga acerca de sus características y se cuestiona acerca de los elementos que lo conforman y las similitudes y diferencias entre éste y el prisma, las cuales deberán escribir en su respectiva hoja.

Finalmente se pide a los estudiantes que lean la afirmación “Todo cubo es prisma, pero todo prisma no es cubo” y realicen un análisis de ésta argumentando su veracidad o falsedad.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

Para esta tarea, se espera que los estudiantes empleen aquellos conceptos abordados en tareas anteriores referentes a los componentes de los cuerpos (caras, vértices, aristas y bases) y por ende hagan uso adecuado de estos términos, de igual forma se espera que tengan la capacidad de identificar en cada uno de los prismas, todos sus componentes y aludan tanto a su forma como a su cantidad.

Esta tarea requiere de un nivel de análisis de los estudiantes respecto a las relaciones que se pueden establecer entre dichas componentes, con el fin de llegar a características y propiedades de cualquier tipo de prisma; para ello es necesario que los estudiantes manejen nociones generales de la geometría como paralelismo, lo cual es abordado de manera implícita al pedirles que midan cada una de las aristas de las caras laterales, con lo que se espera que lleguen a concluir que las bases de los prismas son paralelas.

El nivel de generalidad por parte de los estudiantes es la mayor expectativa, pues se espera que a partir de características particulares de los diferentes tipos de prismas se llegue a las propiedades generales para todos ellos, en tanto que se pueda establecer para el caso particular de los cubos, una relación entre sus propiedades y las de los prismas de tal forma que se pueda concluir que este cuerpo es una clase particular de esta familia.

Para el desarrollo de esta tarea, el maestro cumple la función de orientador en el trabajo, el cual lee de forma grupal cada una de las preguntas y abre un espacio de autonomía y discusión a nivel de grupo, en el que los estudiantes reflexionen acerca de las características particulares de cada prisma.

De igual forma, por medio de la interacción con el grupo, genera un espacio de socialización de las respuestas, cuestionando acerca de las particularidades de cada tipo de prisma, a la vez que promueve una reflexión respecto a las generalidades que se pueden obtener a partir de ciertas regularidades, con lo cual cada estudiante pueda hallar las características y propiedades generales para este tipo de cuerpos.

III. Materiales.

Representaciones en madera de 6 Prismas cuadrangulares, 6 prismas triangulares, 6 prismas pentagonales y 6 prismas hexagonales. Piola.

IV. Resultados.

Esta tarea se realizó en una sesión de 90 minutos con treinta y dos estudiantes distribuidos en seis grupos.

1. Observen detalladamente el prisma que se les ha entregado (prisma 1), muévanlo en distintas posiciones y realicen una descripción de él, teniendo en cuenta la cantidad y forma de sus bases y caras laterales.
2. Imaginen que desarmamos el prisma1.
 - a) ¿Qué tipo de polígonos obtendrían? Descríbanlos
 - b). Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales (use piola) ¿Qué pueden concluir?

En la siguiente tabla, se encuentran consignadas de forma textual las descripciones del prisma 1 realizadas por los grupos de trabajo, así como los

polígonos que se obtendrían de sus desarrollos y las conclusiones de las características de las aristas de las caras laterales después de realizar sus mediciones.

Tabla 25 Componentes del prisma 1.

Cuerpo	Descripción	Polígonos obtenidos del desarrollo	Conclusiones al medir las aristas de las caras laterales
Prisma 1 cuadrangular	GRUPO 1: Tiene los lados rectangulares, tiene 2 caras, tiene 24 puntas, tiene 8 puntas y tiene 24 ángulos.	Cuadrados y rectángulos.	Que unas son más largas y otras pequeñas.
	GRUPO 2: Tiene 2 bases planas, tiene 8 vértices y 12 aristas, tiene 4 caras en forma de rectángulo, las bases son cuadradas y tiene 24 ángulos.	Tiene 2 cuadrados entre los que hay 8 ángulos, 8 vértices y 8 aristas. Hay 4 rectángulos, hay 16 ángulos, hay 16 vértices y hay 16 aristas entre los 4.	Todas las aristas son iguales.
	GRUPO 3 : Tiene 4 caras rectangulares y 2 bases cuadradas, tiene 12 aristas, 8 vértices y tiene 24 ángulos.	2 cuadrados y 4 rectángulos.	Todas las aristas de as caras laterales son congruentes.
	GRUPO 4: 2 bases, 4 caras, 12 aristas, 8 vértices, sus bases son cuadradas, sus caras son rectangulares.	Rectángulos y cuadrados, 4 rectángulos y 2 cuadrados.	2 bases y ambas son triángulos.
	GRUPO 5: Esta figura está formada por 2 bases cuadradas y planas compuestas por 8 vértices en los que se unen 12 aristas, tiene 4 caras rectangulares.	Dos polígonos, cuadrados y rectángulos estos tienen 4 vértices, 4 ángulos y son figuras planas con 4 aristas.	Todas las aristas son iguales, o sea que miden lo mismo.
	GRUPO 6: Tiene dos bases, tiene 4 caras, tiene 8 vértices, tiene 12 aristas, las bases son iguales, tienen 8 cm de largo, tiene 6.1 cm de ancho, la forma de su base es cuadrada y sus caras son rectangulares.	El cuadrado el rectángulo.	Que todas miden lo mismo usando la piola las aristas.

3. Ahora tomen el prisma 2, obsérvenlo detalladamente y respondan.

- ¿Cuántos polígonos conforman las bases y que formas tienen?
- ¿Cuántos polígonos conforman las caras laterales y qué formas tienen?
- Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales (use piola) ¿Qué pueden concluir?

En las siguientes tablas, se encuentran consignadas de forma textual las respuestas dadas por los grupos de trabajo, respecto a la forma y cantidad tanto de las bases como de las caras laterales de los prismas 2, 3 y 4 así como las conclusiones a las que llegan después de medir las aristas de las caras laterales.

Tabla 26 Componentes del prisma 2.

Cuerpo	Grupo	Bases		Caras laterales		Características de las aristas
		Forma	Cantidad	Forma	Cantidad	
Prisma 2 triangular	1	triangular	2	Cuadrada	3	Todas son iguales
	2	triangulares	2	Rectángulos	3	Todas las aristas son iguales
	3	Triangulares	2	Rectangular	3	Tienen la misma longitud
	4	triangulares	2	rectangulares	3	Son el doble de largas a las bases
	5	Triangulo	1	Rectángulo	1	Son iguales o sea que miden lo mismo
	6	Triangular	1	Rectangular	1	Miden lo mismo

3. Observen detalladamente el prisma 3 y de acuerdo a ello respondan.

- ¿Cuántos polígonos conforman las bases y qué formas tienen?
- ¿Cuántos polígonos conforman las caras laterales y qué formas tienen?
- Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales (use piola) ¿Qué pueden concluir?

Tabla 27 Componentes del prisma 3.

Cuerpo	Grupo	Bases		Caras laterales		Características de las aristas
		Forma	Cantidad	forma	Cantidad	
Prisma 3 pentagonal						
	1	Pentágono	2	Rectángulo	5	Todas son iguales
	2	Pentágono	2	Rectángulos	5	Son diferentes
	3	Pentágono	2	Rectángulo	5	Tienen la misma longitud
	4	Pentágono	2	Rectangular	5	El doble de largas de las bases
	5	Pentágono	1	Rectángulo	5	No son iguales
	6	Pentágono	1	Rectángulo	1	Miden lo mismo

4. Observando el prisma 4, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos polígonos conforman las bases y qué formas tienen?
- ¿Cuántos polígonos conforman las caras laterales y qué formas tienen?

Tabla 28 Componentes prisma 4.

Cuerpo	Grupo	Bases		Caras laterales	
		forma	cantidad	Forma	Cantidad
Prisma 4 hexagonal					
	1	Hexágono	2	Rectangular	6
	2	Hexágonos	2	Rectangulares	No contesta
	3	hexágono	2	Rectángulo	6
	4	Hexágono	2	Rectangulares	6
	5	Hexágono	1	Rectángulo	1
	6	Hexágono	1	Rectangular	1

5. Con la información recolectada en las preguntas anteriores completa la tabla.

En la siguiente tabla se encuentran los nombres asignados por los estudiantes a los diferentes prismas así como la forma de las bases y cantidad de caras laterales.

Tabla 29 Relación entre la forma de la base y cantidad de caras laterales de los prismas.

Prisma	Nombre asignado	Forma de base	Cantidad de caras laterales
1	Cuadrangular	Cuadradas	4
	Cuadrangular	Cuadradas	Rectangulares
	Cuapris	2	4
	Cuadrangular	Cuadradas	4
	4 caras	Cuadradas	4
	Cuadrangular	Cuadradas	4
2	Triangulrectangular	Triangular	3
	Triangular	Triangular	Rectangular
	Recpris	2	4
	Triangular	Triangular	3
	Triangulin	Triangular	3
	Triangular	Triangulares	3
3	Pentagonrectangular	Pentágono	5
	Pentagonal	Pentágonos	Rectangulares
	Tripis	2	3
	Pentagonal	Pentágonos	5
	Pentagonin	Pentágono	5
	Pentagonal	Pentagonales	5
4	Hexagonrectangular	Hexágono	6
	Hexagonal	Hexágonos	Rectangulares
	Dospris	2	6
	Hexagonal	Hexágonos	6
	6 caras	Hexágono	6
	Hexagonal	Hexagonales	6

- a) Escriban la relación que encuentran entre la forma de los polígonos que conforman la base de los prismas y la cantidad de caras laterales
- b) Escriban una característica común de las caras laterales de los prismas (independiente de las bases)
- c) Escriban las características de las bases de los prismas

En la siguiente tabla, encontramos la relación que los estudiantes plantearon en los diferentes prismas entre la forma de los polígonos que conforman sus bases y sus caras laterales, así como las características comunes entre cada uno de estos componentes (escritos textualmente).

Tabla 30 Características generales de los prismas.

Grupo	Relaciones	Características comunes de las caras laterales	Características de las bases
1	Que tiene lados y tienen dos bases y tienen diferentes caras laterales.	Que tiene forma rectangular y dos bases.	Tienen dos y tiene lados.
2	Que todos los prismas eran rectangulares caras laterales, y de bases diferentes, y tenían diferentes números de caras laterales.	Todas eran rectangulares.	En diferentes: cuadrados, triángulos, pentágonos, hexágonos
3	Que las bases tienen igual número y tienen las caras rectangulares.	Todas las caras laterales son rectangulares	Todos son polígonos.
4	No responde.	Miden lo mismo en ancho y en alto.	Son hexágonos.
5	El número de lados de la base conforman el número de caras laterales.	Son rectangulares y tienen dos bases.	Son planas y tienen distintas formas.
6	Todas sus caras son rectangulares, se relacionan porque son planas, que todas sus aristas miden lo mismo.	Todas son rectangulares miden lo mismo y son paralelas.	Tiene los lados paralelos y tiene vértices y son planas.

Es importante resaltar que los estudiantes resuelven prácticamente solos la guía hasta el numeral 6.

Antes de resolver el punto 7, se realiza un conversatorio, en el que se parte de la exposición de cada una de las respuestas dadas por los estudiantes, las cuales generan espacios de discusión que promueven la generalización de cada una de las propiedades o características de los prismas.

En este sentido, al indagar respecto a sus respuestas se cuestiona por la relación entre la forma de la base y la cantidad de caras laterales de los prismas, en la cual surgen las siguientes preguntas y respuestas.

P: Del prisma 1, ¿qué nombre le pusieron?

E: (leen los nombres) prisma cuadrangular, cuadrangular, cuadrado...

P: ¿Cuál es la forma de la base?

Es: Cuadrada.

P: ¿Cuántas bases tiene el prisma 1?

Es: Dos

E: Todos tienen dos caras.

P: Señalen las bases de los prismas que tienen en la mesa. (Los estudiantes proceden a mostrar las respectivas bases). Entonces, podemos decir que una característica de todos los prismas es que tienen dos bases, y ¿cuántas caras laterales tiene el prisma 1?

Es: Cuatro

P: Ustedes compararon las aristas con la piola que se les entregó. ¿Cómo son esas aristas?

E1: Son diferentes.

E2: ¡No!, tienen la misma longitud. (Refiriéndose al grupo anterior) lo que pasa es que ustedes las midieron mal. Venga le muestro y verá. (Se para, toma una piola, el prisma 1 y compara todas las aristas mostrando que tienen la misma longitud).

P: Entonces, ¿cómo son esas aristas?

Es: Son iguales.

P: Si todas las aristas miden lo mismo, ¿qué podemos decir de las bases?

Es: (permanecen en silencio pensando por un momento).

E: Son iguales.

P: Si, sabemos que son iguales o congruentes como dice Juan Camilo, pero ¿que más podemos decir? Si todas las aristas tienen la misma longitud, quiere decir que esas bases están a la misma distancia (mostrando dos hojas separadas por la misma distancia) ¿entonces como son las bases?

E: Son paralelas.

P: ¿Cómo así paralelas?

E: Pues que ellas están separadas. (El estudiante muestra en el techo, dos rectas formadas en la separación del cielo falso del techo del salón) con la misma distancia.

P: Y cuando midieron las aristas de los otros prismas (refiriéndose a los prismas 2, 3, 4) ¿cómo eran estas?

Es: Iguales.

P: Entonces ya podemos decir algo más de esas bases.

E: Que son paralelas.

P: Listo, entonces, ¿quién me puede decir cuáles son las características de las bases de los prismas?

Es: (levantan la mano).

E: Los prismas tienen dos bases iguales (y se queda en silencio)

Es: Y paralelas.

P: Ya sabemos que todos los prismas tienen dos caras que son paralelas u congruentes. Ahora revisemos, ¿Cuántas caras laterales tiene el prisma 1?

Es: Cuatro.

P: ¿Cómo es la forma de la base?

Es: Cuadrada.

P: Bueno y si tuviera un prisma con base octagonal ¿Cuántas caras laterales tendría?

Es: Ocho

P: ¿Por qué saben que son ocho?

E: Porque la base tiene 8 lados

P: Entonces si tuviéramos un prisma y su base tuviera 12 lados, ¿Cuántas caras laterales tendría?

Es: Doce

P: Y si tuviera un prisma que su base tuviera n lados, ¿cuántas caras laterales tendría?

Es: n caras.

P: ¿Entonces qué relación hay entre la base y las caras laterales?

Es: (levantaron la mano para contestar)

E1: Si la base tiene 4 lados, tiene 4 caras, si tiene 5 lados tiene 5 caras.... (Un compañero lo interrumpe y dice)

E2: si la base es cuadrada tiene 4 caras, si la base es un triángulo, tiene 3 caras y así sucesivamente.

E3: Que dependiendo de la cantidad de lados de la base será la cantidad de caras laterales.

E4: Que la cantidad de caras laterales depende de la cantidad de lados que tenga el polígono de la base.

P: Si, dependiendo de la cantidad de lados que tiene la base, será la cantidad de caras laterales del prisma. ¿Pero cómo son todas esas caras laterales?

Es: Rectangulares.

E: Son cuadriláteros.

P: ¿En todos los prismas?

Es: Si

P: Ahora vamos a observar detalladamente el cubo y respondan la pregunta 7, los ítems a, b y c y dejamos el d para más adelante.

6. Observen el cubo y contesten.

- a) ¿Qué polígonos conforman las bases y como son estos?
- b) Escriban una característica común de las caras laterales del cubo.
- c) Escriban las características de las bases del cubo.
- d) Escriban el análisis de la siguiente afirmación: “ Todo cubo es prisma, pero todo prisma no es cubo”

En la siguiente tabla, encontramos las respuestas textuales de los estudiantes respecto a la forma y características de las bases y caras laterales del cubo, así como la justificación o análisis realizado al enunciado: “todo cubo es prisma, pero todo prisma no es cubo”

Tabla 31 Características generales del cubo

Grupo	Polígonos de las bases	Característica común de las caras laterales	Características de las bases	Justificación “todo cubo es prisma, pero todo prisma no es cubo”
1	Cuadrados, tiene 4 lados y cuatro aristas	cuadradas	Cuadradas, planas, tiene 4 lados, 4 aristas	Todo cubo es prisma: Verdad, porque el cubo tiene dos caras. Todo prisma no es cubo: falso porque el prisma no es igual al cubo
2	Cuadrados son dos	Que son iguales a las bases, cuadradas	Tienen 8 aristas, 8 ángulos, 8 vértices, su longitud es igual y es plana	No, hay distintas clases de prisma como: triangulares, hexagonales, pentagonales, etc. no todas tienen que ser cubos.
3	Dos bases de forma cuadrada	Que tienen la misma longitud y son cuadradas	Que las bases son cuadradas y tienen 4 vértices	Que todos los cubos son prismas pero hay prismas de diferentes formas no solo de cubo
4	Lo conforman hexágonos y son que tienen 6 aristas	Miden lo mismo en alto y en ancho	Depende de cómo se colocan para definir las bases y miden igual.	Es que los cubos son una clase de prisma pero todos los prismas no son cubos.
5	Un polígono, que es el cuadrado	Que todas son iguales	Que son planas y cuadradas	Esto si es verdad porque el cubo tiene dos bases cuadradas que son paralelas, en cambio el prisma no es cubo porque no tiene sus bases cuadradas pero si son paralelas
6	Los conforman los cuadrados y son congruentes de cm	Son cuadrados y mide lo mismo	Las dos bases son paralelas son cuadradas y que miden lo mismo.	El cubo tiene dos bases pero sus no son rectangulares

Dado un tiempo aproximadamente de 5 minutos para que los estudiantes respondieran el punto 7, se interrumpe para hablar acerca de las características del cubo.

P: ¿Qué polígonos conforman la base del cubo?

Es: Cuadrados

P: ¿Cuántas bases tiene?

E: Depende como se ponga, si se pone así estas son las bases y si se pone así, estas son las bases (gira el cubo, mostrando en cada caso las bases correspondientes.)

E: Cualquiera puede ser la base

P: ¿Pero cuántas son?

Es: Dos

P: Entonces ¿podemos decir que el cubo es un prisma?

E1: Si

E2: No

P: ¿Quiénes dicen que si, explíquenme porque creen que el cubo si es un prisma?

E1: Porque tiene dos bases iguales, cuadradas y paralelas.

P: Y los que dicen no ¿Por qué creen que el cubo no es un prisma?

E2: Porque las caras laterales no son rectángulos.

P: Aquí queríamos llegar, los prismas tienen dos bases congruentes y paralelas como en el caso del cubo, pero además sus caras laterales son paralelogramos, ¿ustedes saben que es un paralelogramo?

E: Que tiene sus lados paralelos

P: ¿Cómo así?

E: Si, éste lado es paralelo con éste y éste lado es paralelo con éste (mostrándolos respectivamente en una base del cubo)

P: ¿las caras laterales de los prismas también son paralelogramos?

Es: Si

E: Si porque éste lado es paralelo con éste y éste con éste, (mostrándolo en las caras rectangulares de los prismas)

P: Entonces ya sabemos que tanto el cuadrado como el rectángulo son paralelogramos y que otra de las características de los prismas es que todas sus caras laterales son paralelogramos. Muy bien, hasta aquí estamos claros, ahora quiero que respondan del punto 7. Ahora quiero que alguno de ustedes me diga las características generales de todos los prismas.

Es: (levantan la mano para responder)

E1: Tiene dos bases iguales y paralelas, además todas sus caras son paralelogramos y dependen de la cantidad de lados que tiene la base.

E2: Ya no, yo iba a decir lo mismo

P: Listo, entonces ¿para todos están claras las características generales de los prismas?

Es: Si

P: En cuanto a los nombres que les asignaron a los prismas, vamos a ver que los nombres dependen de la forma de sus bases, ¿Qué nombre le asignaron al prisma 1?

Es: (leen sus respuestas) cuadrangular, cuadrangular, cuadrangular...

P: El nombre adecuado de ese prisma es “prisma cuadrangular” porque su base es un cuadrado. Entonces ¿cuál sería el nombre adecuado para el prisma dos?

Es: Prisma triangular

P: Si, muy bien, este es el prisma triangular, porque su base es un triángulo. Y el tres ¿Cómo se llama?

Es: Prisma pentagonal

P: ¿Y el prisma cuatro?

Es: Prisma hexagonal.

Finalizada esta plenaria, los estudiantes respondieron el ítem d del numeral 7, el cual se encuentra plasmado en la tabla 31 titulada características generales del cubo.

V. Análisis de resultados.

La tarea tenía como finalidad, llegar a conceptualizar las propiedades y características generales de los prismas, a través de un compendio de preguntas para cada tipo de prisma, las cuales conducirían a los estudiantes a plantear elementos comunes entre ellos, involucrando espacios de discusión y argumentación.

La tarea privilegia la manipulación y movimiento de los sólidos geométricos, favoreciendo procesos de visualización. Esta tarea fue resuelta por treinta y dos estudiantes organizados en 6 grupos.

Con respecto a los prismas cuadrangular, triangular, pentagonal y hexagonal nombrados prisma 1, 2, 3 y 4 respectivamente, se pide a los estudiantes que los observen detalladamente, los muevan en distintas posiciones y realicen una descripción del primero de ellos teniendo en cuenta la cantidad y forma de sus bases y caras laterales. De igual forma se solicita que imaginen todos los cuerpos desarmados y describan el tipo de polígonos que se obtendrían para finalmente con una piola comparar la longitud de las aristas de las caras laterales y concluir la relación que se puede establecer entre ellas.

De acuerdo a las descripciones del prisma 1, encontramos que los estudiantes son muy enfáticos en designar la cantidad, forma y características de sus componentes, mostrando una cualificación en el lenguaje matemático utilizado; la mayoría de los grupos, muestran una apropiación de los términos y conceptos desarrollados en tareas anteriores, en tanto que mencionan en todas sus descripciones la cantidad y forma de las bases y caras laterales, cantidad de ángulos, vértices y aristas. Algunos grupos, además de la cantidad y forma de las bases, establecen comparaciones entre ellas, mencionando características tales como ser planas, iguales o congruentes. Otros estudiantes aluden a aspectos métricos, pues realizan mediciones para componentes tales como caras o base.

Al revisar las respuestas de los estudiantes con respecto a la cantidad y forma de los polígonos que se obtendrían al desarrollar el prisma 1, encontramos que todos los grupos logran identificar su forma (cuadrado y rectángulo), de ellos el 70% aluden además de la forma a la cantidad (dos cuadrados y cuatro rectángulos) de los cuales un 35% hacen referencia a aspectos particulares de cada uno de estos polígonos, en tanto que mencionan aspectos tales como “tiene dos cuadrados entre los que hay ocho ángulos, ocho vértices y ocho aristas. Hay cuatro rectángulos, hay dieciséis ángulos, hay dieciséis vértices y hay dieciséis aristas entre los cuatro”. Es claro, que estos estudiantes hacen una descripción muy detallada de los componentes de estos polígonos, pero utilizan términos de la geometría tridimensional para referirse a elementos como lados, aludiendo a éstos con el término aristas.

En este sentido, es importante mencionar que para los estudiantes va a generar dificultades el uso adecuado de estos términos si no se hace un trabajo en el aula que involucre tanto de la geometría tridimensional como bidimensional, pues dependiendo de la familiaridad con los cuerpos o las figuras planas, se van a denominar los componentes concernientes a cada uno de ellos.

En cuanto a las conclusiones a las que llegan los estudiantes al medir las aristas de las caras laterales, un porcentaje del 69% concluye que son iguales y emplean argumentos tales como “son iguales” “miden lo mismo” o “son congruentes”, el 16% (correspondiente a un grupo) afirma que unas son más largas y otras más pequeñas, por otro lado, el 16% de los estudiantes parece indicar que no entienden lo que se pregunta, pues responden “dos bases y ambas son triángulos”.

Con respecto al prisma triangular, el 94% de los estudiantes concluye que tiene dos bases triangulares y el porcentaje restante afirma que tiene una base

triangular, ello nos hace pensar que este grupo hace alusión no a la cantidad de bases que conforman el cuerpo, sino a la cantidad de polígonos diferentes que ven. En cuanto a las caras laterales, el 54% de los estudiantes afirma que el prisma está formado por tres caras laterales rectangulares, el 16% acierta en la cantidad de caras laterales pero no en su forma, pues afirma que es cuadrada y el 16% restante coincide en la forma más no en la cantidad, pues determina que solo es una, para lo cual realizamos el mismo análisis respecto a las bases.

De acuerdo a las características de las aristas de las caras laterales, el 94% determina que estas son iguales, empleando argumentos tales como “son iguales” “tienen la misma longitud”, “miden lo mismo” respuesta que es correcta; el 16% restante plantea que son “el doble de largas a las bases”, lo que nos permite ver que la comparación no fue realizada entre las aristas de las caras laterales sino entre estas y las aristas de las bases, por lo cual llegan a dicha conclusión.

Respecto al prisma pentagonal y hexagonal, el 70% de los estudiantes acierta en la cantidad y forma de sus bases, el 30% restante reconoce la forma de las bases, pero establece que tiene una, lo cual indica que continúan reconociendo la existencia de un solo polígono, más no, que éste es igual para ambas bases.

El 74% acierta en cuanto a la forma y cantidad de las caras laterales, pero un grupo continua haciendo referencia a la cantidad de polígonos diferentes y no a la cantidad de caras laterales. Respecto a las características de las aristas laterales, en el prisma pentagonal, el 35% afirma que son diferentes, un 50% determinan la igualdad entre estas, lo cual es acertado y el 16% continúa diciendo que son el doble de largas de las bases.

A partir de ello, los estudiantes prosiguen a asignar el nombre que consideraran pertinente para cada uno de los prismas y ponen otra vez de manifiesto la forma de las base y cantidad de caras laterales en un cuadro, lo cual permite constantemente retroalimentar la tarea, verificando conclusiones encontradas anteriormente para así ir conceptualizando algunas de las propiedades de estos cuerpos.

De esta manera encontramos nombres tales como: cuadradular, cuadrangular, cuapris, cuadricular, (prisma 1). Trianrectangular, triangular, (prisma2), pentagorectangular, pentagonal, pentagonin, (prisma 4) hexagonorectangular, hexagonal, u otros, los cuales reflejan la asociación que ellos realizan entre la forma de las base y las caras laterales para asignar el nombre.

También ponen de manifiesto conocimientos previos de figuras geométricas planas como pentágonos y hexágonos ya que sin ninguna instrucción previa, hacen referencia a estos objetos, mostrando claridad en que dependiendo de los lados que conforman el polígono de la base se asigna un nombre.

La mayoría de los grupos, recopilan la información de los prismas, acertando en la forma de la base y cantidad de caras laterales, en particular, un grupo tres correspondiente al 19% de la población, no acierta, ya que cuando se les cuestiona sobre la forma de la base responden “2” reflejando poca comprensión del enunciado dado que se les pregunta por la forma y ellos hacen referencia a la cantidad. Igual porcentaje, no acierta respecto a la cantidad de caras laterales, ya que hacen referencia a la forma de las caras laterales más no a la cantidad, que era lo que se les cuestionaba.

Luego, en un cuadro se pide a los estudiantes plantear la relación entre la forma de los polígonos que conforman la base de los prismas y la cantidad de caras laterales, entre los cuales encontramos diversas respuestas: Un solo grupo concluye que “el número de lados de la base conforman el número de caras laterales”, lo cual era a lo que pretendíamos llegar, pues es una propiedad de estos cuerpos (la cantidad de caras laterales de los prismas depende de la forma del polígono de la base).

Los demás grupos, plantean una relación enfocada en otros aspectos como la forma de las bases o de las caras laterales. “tienen dos bases y tienen diferentes caras laterales”, “todas sus caras son rectangulares, se relacionan porque son planas, que todas sus aristas miden lo mismo”, elementos que no son las respuestas a las que esperábamos llegar (las cuales pueden ser producto de falta de claridad en el enunciado); sin embargo, en el momento de la plenaria, se retoman elementos que ayudan a conceptualizar propiedades de los prismas.

Lo mismo sucede con las características comunes de las caras laterales, especificando en la gran mayoría, su forma, u otras, a elementos que no se les cuestionaba como la cantidad de bases. En cuanto a las bases, los estudiantes no logran plantear elementos comunes a todos los prismas, reconociendo únicamente características independientes a cada uno de ellos sin llegar a generalizar.

Posteriormente, en la plenaria se ponen en juego todos los componentes de los prismas pertinentes para llegar a conceptualizar sobre sus propiedades, discusión, que permite concluir a través de las intervenciones anteriores, las explicaciones dadas u otras reflexiones, las propiedades de los prismas. En este sentido, las concepciones que tienen los estudiantes y la discusión generada a partir de

procedimientos ya realizados en la tarea, permiten que ellos den cuenta de los elementos comunes entre los prismas y así poder plantear componentes que comunes a cualquier tipo de prisma.

De forma oral, la mayoría de los estudiantes hace intervenciones que permiten concluir que los prismas están formados por dos caras, paralelas y congruentes, que todas sus caras laterales son paralelogramos congruentes y que la cantidad de caras laterales depende de la forma de la base.

Para finalizar, se pide a los estudiantes que observen el cubo, determinen los polígonos que conforman las bases y las características comunes de caras laterales y bases, con el fin de analizar la afirmación “todo cubo es prisma, pero todo prisma no es cubo”.

Con respecto a los polígonos que conforman las bases, encontramos un grupo que parece, no haber leído correctamente el enunciado o estar pensando en otro cuerpo geométrico distinto al cubo, pues afirman, “lo conforman hexágonos y son que tienen seis aristas”. El resto de grupos los cuales corresponden al 84% hacen referencia a la forma de los polígonos de la base (cuadrados), de este porcentaje, el 32% aluden además de la forma, a la cantidad (dos), igual porcentaje nombra otros elementos. Un grupo afirma que “los conforman los cuadrados y son congruentes de cm”, otro grupo afirma “cuadrados, tiene 4 lados y 4 aristas”, lo cual parece indicar que el primer grupo establece además de la forma, una congruencia entre las bases del cuerpo; y el segundo, hace referencia a los componentes de los polígonos, utilizando un vocabulario matemático tanto de la geometría 3D como 2D.

Por otro lado, plantean una igualdad entre la magnitud y forma de las caras laterales, utilizando expresiones tales como “tienen la misma longitud”, “miden lo mismo”, y al hacer comparaciones entre éstas y las bases aluden a expresiones tales como “son iguales a las bases”.

Entre las características de las bases, un grupo plantea una relación de dependencia entre la cara que sería la base y la posición en que se ubique el cubo, determinando una congruencia entre éstas. “depende de cómo se colocan para definir las bases y miden igual”. Otros estudiantes hacen referencia a la cantidad, forma y demás características de los polígonos tales como “son paralelas, miden lo mismo”, “son planas, su longitud es igual”. Sin embargo, hay estudiantes que aluden a las partes que conforman dichos polígonos refiriéndose a los vértices, ángulos y lados.

Posteriormente se hace la reflexión en cuanto si el cubo podría estar dentro de la familia de los prismas, para ello, los estudiantes dan sus ideas empezando a comparar el cubo y el prisma, para establecer si éste es o no, una clase de prisma. Algunos afirman que si pertenece a esta familia por tener dos bases iguales y paralelas, característica común a ambos cuerpos, sin embargo, otros estudiantes afirman que el cubo no pertenecía a la familia de los prismas porque a pesar de cumplir con la característica mencionada anteriormente, sus caras laterales no son rectangulares, elemento aparentemente común en todos los prismas de la tarea.

Podemos ver que los estudiantes ponen en juego los elementos que se habían discutido en el transcurso de la actividad en cuanto las características de las bases de los prismas, pero les causaba ruido la distinción entre la forma de las caras laterales, pues estos, asumían que todas debían ser rectangulares, elemento que permitió generar una nueva discusión respecto a las características de las caras laterales, en la que se especifico que éstas eran paralelogramos, llegando a concluir que tanto los rectángulos como los cuadrados cumplen con esta condición y por tanto, el cubo sí hace parte de la familia de los prismas.

A partir de la discusión, los estudiantes escriben el análisis de la siguiente afirmación: “Todo cubo es prisma, pero todo prisma no es cubo”, entre los cuales encontramos argumentos más elaborados que otros, explicitando sus características y las razones por los cuales no todo prisma es cubo.

Entre los argumentos más elaborados encontramos:

“Hay distintas clases de prismas como: triangulares, pentagonales, hexagonales, etc. no todas tienen que ser cubos”. En particular, es un argumento que no alude a la primera parte de la afirmación- todo cubo es prisma-, pero sin embargo a través de la escritura organizada y los términos utilizados podemos darnos cuenta que comprenden la afirmación y toman una posición respecto a ella ejemplificándola en su respuesta.

“Que todos los cubos son prismas, pero hay prismas de diferentes formas, no sólo de cubo”, “es que los cubos son una clase de prisma pero todos los prismas no son cubos”. Implícitamente los estudiantes están haciendo una distinción entre las distintas formas que pueden tener las bases de los prismas, razones por las cuales se argumenta que no todo prisma es cubo, mientras que si se puede afirmar que todo cubo es prisma.

Encontramos también, argumentos no muy elaborados, en tanto que emplean términos no muy específicos, pero sin embargo, buscan argumentar la certeza de la afirmación. “esto sí es verdad porque el cubo tiene dos bases cuadradas que son paralelas, en cambio el prisma no es cubo porque no tiene sus bases cuadradas pero si son paralelas”, tal vez, este argumento no de claridad al lector, sin embargo pretendieron explicar que todos los prismas no son cubos, pues a partir de sus expresiones se puede entender que aunque todos los prismas no tienen caras cuadradas, cumplen con la condición de ser paralelas.

El proceso de argumentación en la parte final de la tarea, es un elemento primordial en la expresión de las ideas de los estudiantes, en tanto que al llegar a la reflexión de forma oral, los estudiantes muestran mayores habilidades para argumentar sus ideas, pero al realizarlo de forma escrita muestran ciertas falencias en la utilización de las expresiones.

Poner en juego, procesos de manipulación y recolección de datos, permite que los estudiantes de manera espontanea observen y encuentren características propias de los cuerpos geométricos, para llegar a generalizarlas y conceptualizarlas. La confrontación de ideas entre los mismos estudiantes permite que sientan la necesidad de ser exigentes al expresar sus ideas y llegar a acuerdos grupales sobre conceptos individuales que parten de sus conocimientos previos. De igual forma la discusión que se genera entre los estudiantes, le permite al maestro analizar las concepciones y conocimientos que ellos poseen para generar mayores interrogantes que amplíen dichas concepciones y motiven a un nuevo análisis por medio del cual se llegue a la conceptualización.

- **Tarea 3: reconociendo pirámides a través de sus componentes.**

Objetivos:

- Acercar a los estudiantes al reconocimiento de las características y propiedades de las pirámides.
- Nombrar geométricamente las partes que componen las pirámides (aristas, vértices, caras y bases)
- Reconocer características propias de las pirámides.

I. Descripción de la tarea.

Para el desarrollo de esta tarea, se organiza a los estudiantes en seis grupos, se les entrega representaciones en madera de una pirámide cuadrangular, triangular, pentagonal y hexagonal (nombradas pirámide 1,2,3 y 4 respectivamente), se pide que la observen y la describan teniendo en cuenta los componentes vistos en clases anteriores.

Luego deben imaginar desarmada la pirámide cuadrangular y determinar los polígonos que la conforman, forma de la base y cantidad y forma de las caras laterales, para consignarlo en la guía que se les entrega al iniciar la actividad. Este mismo proceso se realiza con las demás pirámides.

Partiendo de las respuestas dadas en los puntos anteriores, se pide a los estudiantes que completen una tabla, en la cual recopilan la información respecto de la forma de las bases y cantidad de caras laterales de cada una de las pirámides, al tiempo que se les pide asignar un nombre a cada una de ellas. También plantean características comunes de las caras laterales, las bases y establecen relaciones entre ellas.

Partiendo de la resolución de esta tabla, se realiza un conversatorio en el cual los estudiantes tienen la posibilidad de leer y compartir sus respuestas con el grupo. De igual forma se indaga acerca de la forma y cantidad de bases y caras laterales de los diferentes tipos de pirámides, se brinda un espacio de análisis en el que los estudiantes tienen la posibilidad de encontrar relaciones entre los componentes de las pirámides y por medio de ello, llegar a concluir las características y propiedades generales de este tipo de cuerpos.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

Para esta tarea, se espera que los estudiantes empleen aquellos conceptos abordados en tareas anteriores referentes a los componentes de los cuerpos (caras, vértices, aristas y bases) y por ende hagan un uso adecuado de estos términos. De igual forma se espera que tengan la capacidad de identificar en cada uno de las pirámides, todas sus componentes teniendo en cuenta tanto la forma como la cantidad. Esta tarea requiere de un nivel de análisis de los estudiantes respecto a las relaciones que se pueden establecer entre dichas componentes con el fin de llegar a características y propiedades de todos los tipos de pirámides.

El nivel de generalidad por parte de los estudiantes es la mayor expectativa, pues se espera que a partir de características particulares de los diferentes tipos de pirámides se llegue a las propiedades generales para todas ellas.

El maestro es un orientador en el trabajo de los estudiantes, en tanto que lee de forma grupal cada una de las preguntas y abre un espacio de autonomía y discusión a nivel de grupo, en el que los estudiantes reflexionen acerca de las características de cada una de las pirámides.

De igual forma, genera un espacio de socialización de las respuestas, en el que cuestiona acerca de las particularidades de cada tipo de pirámide, promueve una reflexión respecto a las generalidades que se pueden obtener a partir de ciertas particularidades y motiva a concluir respecto al análisis de las relaciones entre las componentes de las pirámides, en tanto que cada estudiante pueda hallar las características y propiedades generales para este tipo de cuerpos.

III. Materiales.

Representaciones en madera de pirámides cuadrangulares, triangulares, pentagonales y hexagonales. Piola.

IV. Resultados.

Esta tarea fue resuelta por treinta y dos estudiantes en una sesión de aproximadamente 90 minutos.

1. Observen las distintas pirámides que se les ha entregado, muévanlas en distintas posiciones y realicen una descripción de cada una de ellas, teniendo en cuenta la cantidad y forma de sus bases y caras
2. Imaginen que desarmamos la pirámide 1 y respondan.
 - a) ¿Qué tipo de polígonos la conforman?
 - b) ¿Qué forma tiene la base?
 - c) ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

En las siguientes tablas, se encuentran consignadas de forma textual las descripciones de las distintas pirámides realizadas por los grupos de trabajo, así como los polígonos que la conforman, forma y cantidad de base y caras laterales.

Tabla 32 Características de la pirámide triangular.

Cuerpo	Descripción	Polígonos que la conforman	Forma de la base	Cantidad de caras y forma	N°E	%
Pirámide 1	GRUPO1: Tiene una base, la punta es triangular, tiene 4 caras, 8 aristas, tiene una base plana, las caras son triangulares.	4 triángulos y un cuadrado	Cuadrada	Lo conforman 4 caras y son triangulares	5	16%
	GRUPO 2: La pirámide tiene 4 caras laterales y una base, 8 aristas, 5 vértices, su base es cuadrada, 16 ángulos y sus caras laterales son triangulares	Triángulos y cuadrados (los dibuja)	Cuadrado (lo dibuja)	4 triángulos (lo dibuja)	6	19%
	GRUPO 3: Tiene 4 caras triangulares, tiene una base cuadrada, tiene 8 aristas 5 vértices y un ápice.	Lo conforman un polígono cuadrado y 4 polígonos triangulares	Su forma es cuadrada	4 caras y son triangulares	6	19%
	GRUPO 4: Tiene una base cuadrada tiene 4 caras triangulares, tiene 5 vértices, tiene 8 aristas, tiene 16 ángulos.	Triángulos	Cuadrada	4 caras son triangulares	5	16%
	GRUPO 5: Esta pirámide tiene una base cuadrada, la forma de sus caras laterales son triangulares, tiene 5 vértices, 8 aristas, su base es plana y 16 ángulos	4 triángulos y un cuadrado			5	16%
	GRUPO 6: Tiene una base, sus caras tienen forma triangular, tiene 5 vértices, tiene 8 aristas, 4 caras y la forma de su base es cuadrada.	El triángulo y el cuadrado	Cuadrada	4 caras y son triangulares.	5	16%

3. Ahora tomen la pirámide 2, obsérvenla detalladamente y respondan.

- a) Que polígonos la conforman?
- b) ¿Qué forma tiene la base?
- c) ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

Tabla 33 Características de la pirámide triangular.

Cuerpo	Descripción	Polígonos que la conforman	Forma de la base	Cantidad de caras y forma	NºE	%
Pirámide 2	GRUPO1: Tiene una base, la forma de la base es triangular, tiene los lados iguales, tiene punta triangular, tiene tres caras tiene 4 vértices.	Triángulos	Triangular	3 caras y tiene forma triangular	5	16%
	GRUPO 2: Tiene tres caras laterales que son triangulares y la base tiene 1 y es triangular, 4 vértices, 6 aristas, 12 ángulos.	Triángulos	Triangular	Triangulares son 3	6	19%
	GRUPO 3: Tiene 3 caras triangulares, tiene una base, tiene 6 aristas 4 vértices y un ápice.	4 triángulos	Triangular	3 caras triangulares	6	19%
	GRUPO 4: Tiene una base triangular, tiene tres caras triangulares, tiene 6 aristas, tiene 12 ángulos, tiene 4 vértices.	Triángulos	Triangulo	Tres caras laterales y son triangulares	5	16%
	GRUPO 5: Esta pirámide tiene una base triangular, la forma de sus caras laterales son triangulares, tiene 4 vértices, 6 aristas y tiene 12 ángulos.	Triángulos	Triangular	3 caras triangulares	5	16%
	GRUPO 6: Cualquiera puede ser su base, su forma triangular, 6 aristas, 4 vértices, tiene 3 caras laterales.	El triangulo	Triangular	3 caras laterales con forma triangular	5	16%

4. Observen detalladamente la pirámide 3 y respondan.

- a) ¿Qué polígonos la conforman?
- b) ¿Qué forma tiene la base?
- c) ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

Tabla 34 Características de la pirámide pentagonal.

Cuerpo	Descripción	Polígonos que la conforman	Forma de la base	Cantidad de caras y forma	NºE	%
Pirámide 3	GRUPO1: Tiene una base, tiene 5 lados, la base es pentagonal, tiene 5 caras, 6 vértices, tiene 20 ángulos.	Triángulos, pentagonal	Pentagonal	La conforman 5 caras y son triángulos	5	16%
	GRUPO 2: Tiene 5 caras laterales que son triangulares, una base pentagonal, 10 aristas y 7 vértices, 20 ángulos.	Pentagonal y triangular	Pentagonal	5 y son triangulares	6	19%
	GRUPO 3: Tiene 6 caras triangulares, 1 base pentagonal, 6 vértices, 10 aristas y 1 ápice.	5 triángulos y un pentágono	Tiene forma pentagonal	5 triangulares	6	19%
	GRUPO 4: Tiene una base en forma pentagonal, tiene 5 caras laterales, tiene 10 aristas, tiene 20 ángulos, tiene 6 vértices.	Triángulos	Pentagonal	5 caras laterales y son triangulares	5	15,6 %
	GRUPO 5: Su base es pentagonal, tiene 5 caras laterales en forma de triángulo, 10 aristas, 6 vértices y 20 ángulos.	1 pentágono y 5 triángulos	Pentagonal	5 caras y son triangulares	5	16%
	GRUPO 6: Tiene 5 caras, su base tiene forma pentagonal, tiene 10 aristas y 6 vértices y las caras laterales son triangulares.	El triángulo y el pentágono	Pentagonal	5 caras con forma triangular	5	16%

5. Observando la pirámide 4 respóndanlas siguientes pregunta:

- d) ¿Qué polígonos la conforman?
- e) ¿Qué forma tiene la base?
- f) ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

Tabla 35 Características de la pirámide hexagonal.

Cuerpo	Descripción	Polígonos que la conforman	Forma de la base	Cantidad de caras y forma	Nº	%
Pirámide 4	GRUPO 1: Tiene una base, tiene 6 lados, la base es hexagonal, tiene 6 aristas, la base es plana, tiene punta puntiaguda, tiene 24 ángulos, tiene 6 caras, tiene 7 vértices.	Hexágono y triángulos	Hexágono	Lo conforman 6 caras y son triangulares	5	16%
	GRUPO 2: 6 caras laterales, una base hexagonal, 12 aristas y 7 vértices 24 ángulos.	Hexágonos, triángulos	Hexagonal	6 caras laterales en forma de triángulo.	6	19%
	GRUPO 3: Tiene 6 caras triangulares, 1 base hexagonal, 7 vértices, 12 aristas y 1 ápice.	1 hexágono, 6 triángulos.	Forma hexagonal	6 caras triangulares .	6	19%
	GRUPO 4: Tiene 12 aristas, tiene 6 caras laterales, tiene 1 base de forma hexagonal y tiene 27 ángulos.	Triángulos	Hexagonal	6 caras laterales triangulares .	5	16%
	GRUPO 5: Su base es hexagonal, tiene 6 caras laterales las cuales son triángulos, 7 vértices, 24 ángulos, su base es plana y 12 aristas.	Un hexágono y 6 triángulos	Un hexágono	6 caras triangulares .	5	16%
	GRUPO 6: Tiene una base de forma hexagonal, tiene 6 caras laterales y tiene forma triangular, 12 aristas y 7 vértices.	El triángulo y hexágono	Hexagonal	.6 caras laterales y tienen forma triangular	5	16%

6. Con la información recolectada en las preguntas anteriores completa la tabla.

En la siguiente tabla se compila la información respecto a los nombres asignados por los grupos a las diferentes pirámides así como la forma de la base y cantidad de caras laterales.

Tabla 36 Relación entre la base y la cantidad de caras laterales de las pirámides.

Pirámide	Nombre asignado	Forma de base	Cantidad de caras laterales
1	Cuadrangular	Cuadrada	4 caras
	Cuadritriangular	Cuadrada	4 caras triangulares
	Cuadrangular	Cuadrada	4 caras
	Cuadrangular	Cuadrada	4 caras triangulares
	Cuadrangular	Cuadrada	4 caras triangulares
	Cuadricula	Cuadradas	4 caras
2	Triangular	Triangular	3 caras
	Triangular	Triangular	3 caras triangulares
	Triangular	Triangular	3 caras
	Triangular	Triangular	3 caras triangulares
	Triangular	Triangular	3 caras triangulares
	Triangular	Triangular	3 caras
3	Pentagonal	Pentágono	5 caras
	Pentagonal	Pentagonal	5 caras triangulares
	Pentagonal	Pentagonal	5 caras
	Pentagonal	Pentagonal	5 caras triangulares
	Pentagonal	Pentagonal	5 caras triangulares
	Pentagonal	Pentagonal	5 caras
4	Hexagonal	Hexágono	6 caras
	Hexagonal	Hexagonal	6 caras triangulares
	Hexagonal	Hexágono	6 caras
	Hexagonal	Hexagonal	6 caras triangulares
	Hexagonal	Hexágonos	6 caras triangulares
	Hexagonal	Hexagonal	6 caras

En este punto de la tarea se abre un espacio de socialización de las respuestas dadas por el estudiantes en cada una de las preguntas anteriores, se inicia con las descripciones de cada uno de los prismas y de los nombres asignados para cada uno, algunos estudiantes leen las descripciones realizadas.

Partiendo de ello se pregunta a los estudiantes acerca de cada una de las pirámides. Al tiempo que se elabora un cuadro en el tablero, el cual incluía el tipo de pirámide, la forma de la base, cantidad de caras laterales, cantidad de aristas y cantidad de vértice

P: ¿Qué nombre recibe la piramide1?

E: Pirámide cuadrangular

Es: No, pirámide cuadrangular

P: ¿Por qué?

Es: (Levantando la mano para responder)

E: Porque su base es cuadrada.

P: ¿Cuántas caras laterales tiene?

Es: Cuatro

P: ¿Cuántas aristas?

Es: Ocho

P: ¿Cuántos vértices?

Es: Cinco

P: ¿Cuáles?

E: (Se para y señala los cuatro vértices de la base y el ápice).

P: Este vértice recibe el nombre de ápice, (señalándolo), entonces ahora díganme, ¿Cómo se forma ese ápice?

E: Se forma al unir las caras laterales (se para y las señala)

P: Es cierto, el ápice es ese punto o vértice en el que se unen todas las caras laterales (se muestra). Entonces a partir de ahora nos vamos a referir a él por su respectivo nombre.

P: ¿Qué nombre le pusieron a la pirámide 2?

Es: Pirámide triangular

P: ¿Qué forma tiene la base?

Es: Triangular

E: Cualquiera puede ser la base

P: ¿Cómo así?

E: Si, porque si lo pones así, esta es la base, si lo pones así, esta sería la base y si lo pones así, la base sería esta. (Gira la pirámide y va mostrando cada una de las bases respectivas a cada posición)

P: ¿Cuántas caras laterales tiene?

Es: Tres

P: ¿Cuántas aristas tiene?

Es: Seis

P: ¿Cuántos vértices?

Es: Cuatro.

P: Listo, quiero que vayan viendo regularidades entre estas respuestas. Ahora, ¿Qué nombre le dieron a la pirámide 3?

Es: Pentagonal

P: ¿Qué forma tenía el polígono de la base?

Es: Pentagonal

P: ¿Cuántas caras laterales tiene?

Es: Cinco

P: ¿Cuántas aristas tiene?

Es: Diez

P: ¿Cuántos vértices?

Es: Seis.

P: ¿Qué nombre le dieron a la pirámide 4?

Es: hexagonal

P: ¿Cuántas caras laterales tiene?

Es: seis

P: ¿cuántas aristas tiene?

Es: doce

P: ¿Cuántos vértices?

Es: siete

Con las respuestas dadas por los estudiantes, se llena la siguiente tabla en el tablero.

Tabla 37 Conclusiones de los componentes de las pirámides.

Pirámide	Forma de la base	Cantidad de caras laterales	Cantidad de aristas	Cantidad de vértices
1. cuadrangular	cuadrada	4	8	5
2. triangular	triangular	3	6	4
3. pentagonal	pentagonal	5	10	6
4. hexagonal	hexagonal	6	12	7

P: Ahora vamos a encontrar relaciones entre esos componentes, miremos por ejemplo qué relación hay entre la forma de la base y la cantidad de caras laterales. (Señalando el cuadro) en la pirámide 1, la base es cuadrada y tiene cuatro caras laterales, en la pirámide 2, la base es triangular y tiene tres caras laterales...(así sucesivamente con la pirámide 3 y 4). ¿Cuántas caras laterales tendría una pirámide de base octagonal?

Es: Ocho

P: ¿Y si la pirámide tuviera una base con diez lados?

Es: Diez caras

P: Y si tuviera una pirámide cuya base tuviera n lados, ¿cuántas serían las caras laterales?

Es: (permanecen en silencio por un instante) n caras.

P: ¿Entonces de qué depende la cantidad de caras laterales de una pirámide?

Es: De la forma de la base

E: Dependiendo de la cantidad de lados que tenga la base, así mismo son las caras laterales.

P: Bueno, ahora vamos a ver si podemos plantear una relación entre las caras laterales y las aristas.

E1: (lee de la tabla para cada pirámide la cantidad de caras laterales y la cantidad de aristas respectivas).

E2: Si, las aristas son el doble de las caras.

P: O sea que si tengo una pirámide de 8 caras, ¿cuántas aristas tendría?

Es: 16 aristas

E: Hay que multiplicarlo por dos, porque cuatro por dos ocho, (refiriéndose a la pirámide cuadrangular), tres por dos seis (refiriéndose a la pirámide triangular) y así sucesivamente.

P: Y una pirámide con n caras laterales, ¿Cuántas aristas tendría?

E1: n por 2

P: Pero ¿Quién es n ?

E1: Las caras laterales.

P: Bien, si tiene n caras, entonces va a tener el doble de aristas.

En la parte de debajo de la tabla, se fue escribiendo en la columna de las caras la expresión n y en la columna de las aristas $n \times 2$

P: ¿Podemos plantear alguna relación entre las caras y los vértices?

Es: (se quedaron pensando)

E3: n punto uno.

E4: n más uno.

P: Revisemos si sería n mas 1 o n punto 1. (Mientras se escribían ambas expresiones en el tablero, debajo de las columnas de los vértices)

$n + 1$

$n.1$

E: $n.1$ es n por uno

P: Si $n.1$ es n por 1, revisemos si en la tabla se cumple esta condición. (Se reemplaza esta expresión en la pirámide cuadrangular, la cual tiene cuatro caras laterales, o sea n igual a 4)

$4.1 = 4$ y ¿esta pirámide tiene 4 vértices?

E5: ¡no!, tiene 5 vértices, entonces es $n + 1$

E3: Este vértice es el ápice.

P: ¿Cómo así?

E3: Ese uno es el ápice, los vértices de la base más el ápice.

P: Bueno, entonces vamos a mirar como son las caras laterales independientemente de la base ¿qué forma tienen?

Es: Triangulares

E: Todas las caras laterales de las pirámides son triangulares.

P: ¿Alguna pirámide tiene caras laterales diferentes, es decir que no sean triangulares?

Es: No, todas son triangulares

P: entonces ya llegamos a una característica común de todas las pirámides. Ahora cuéntenme ¿cómo son esos triángulos?

E: Iguales

E: Diferentes

P: Calquemos una de las caras laterales, recortémosla y compáremosla con el resto de las caras laterales de la misma pirámide para ver si son congruentes.

Es: (Calcan y cortan los polígonos de una pirámide y los comparan entre sí). Si, son iguales.

P: Todas las conclusiones a las que llegamos hoy, son las propiedades de las pirámides que era a lo que queríamos llegar. Ahora ustedes me van a ir diciendo que conclusiones sacaron de todo esto y las vamos a ir escribiendo en el tablero y ustedes en las hojitas que les entregamos para pegar en el cuaderno.

A continuación se escriben las conclusiones dadas por los estudiantes de manera literal.

Conclusiones:

- Tienen una base
- Todas sus caras laterales son triangulares e iguales
- Todas las aristas de las caras laterales se unen en el ápice.
- La cantidad de caras laterales depende de las aristas de la base.
- Si la base tiene n lados al aumentarle el ápice sería $n+1$ vértices
- Si la base tiene n lados, al multiplicarlo por dos daría la cantidad de aristas que tiene la pirámide, sería $n \times 2 =$ número de aristas

Luego de esta discusión, se prosiguió con el resto de la actividad.

- a) Escriban la relación que encuentran entre la forma de los polígonos que conforman la base de las pirámides y la cantidad de caras laterales.
- b) Escriban una característica común de las caras de las pirámides (independiente de las bases).

7. Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales de la pirámide (use piola) ¿Qué pueden concluir?

En la siguiente tabla, encontramos la relación que los estudiantes plantearon para las diferentes pirámides entre, la forma del polígonos de la base y la cantidad de caras laterales, así como las conclusiones obtenidas al compara las aristas de las caras laterales. (Escritos textualmente).

Tabla 38 Características generales de las pirámides.

Grupo	Relación entre la forma de la base y la cantidad de caras laterales	Características de las caras de las pirámides.	Comparar las aristas de las caras laterales de las pirámides
1	Que la base no es igual, todas las caras son triangulares	Son iguales, son iguales	Que son iguales
2	Todas las caras laterales son triangulares y tienen diferentes bases (realiza un dibujo)	Que todas son triangulares	Todas las aristas están bien tienen la misma longitud
3	La cantidad de aristas de la base, es la misma cantidad de las caras	Que son congruentes	Que la longitud es la misma
4	Depende de las aristas de la base para formar las caras laterales.	Podemos concluir que son muy diferentes	Conclusión todas miden lo mismo
5	Que la cantidad de caras laterales depende de los lados de su base	Que todas las caras laterales de las pirámides son triangulares y iguales.	Que todas las aristas de las pirámides son iguales.
6	Porque sus caras son triangulares y que todas tienen una base	Que todas sus caras miden lo mismo	Que algunas miden diferente.

V. Análisis de resultados.

La tarea tenía como finalidad, llegar a conceptualizar las propiedades y características generales de las pirámides, a través de un compendio de preguntas para cada una de ellas, las cuales permiten que los estudiantes planteen elementos comunes, involucrando espacios de discusión y argumentación.

La tarea privilegia la manipulación y movimiento de los sólidos geométricos, favoreciendo procesos de visualización. Esta tarea fue resuelta por treinta y dos estudiantes organizados en seis grupos.

Se pide a los estudiantes que observen las pirámides detalladamente, las muevan en distintas posiciones y realicen una descripción de ellas, teniendo en cuenta la

cantidad y forma de sus bases y caras laterales. De igual forma se solicita que imaginen todos los cuerpos desarmados y describan el tipo de polígonos que se obtendrían así como la forma de las bases y caras laterales.

Las descripciones realizadas para todos los tipos de pirámides, muestran una apropiación de todos los conceptos referidos en las tareas anteriores, en tanto que son realizadas a partir del uso de términos matemáticos que describen los componentes de los cuerpos, tales como caras, vértices, aristas, base; además su conteo corresponde con la cantidad de cada uno de estos componentes.

Lo anterior, nos permite generalizar que los estudiantes tienen claros los conceptos respectivos a las características de los cuerpos geométricos y por ende los identifican en un sólido. De igual forma vemos que su lenguaje matemático se ha ampliado empleando términos adecuados para enunciar los elementos de las pirámides.

Para este momento no se había puesto en discusión el término “ápice”, por tal motivo los estudiantes emplean el termino vértice para nombrarlo, pues ellos reconocen que este cumple con las características comunes de los vértices, sin embargo encontramos que un grupo nombra el ápice con su respectivo termino, lo que nos permite pensar que algunos de sus integrantes habían escuchado dicho termino con anterioridad.

Respecto a las caras laterales, encontramos que todos los grupos hacen referencia a su cantidad y forma de manera acertada, sin embargo no encontramos ninguno de ellos que mencionen el tipo de triángulos ni la congruencia entre estas. Respecto a la base, encontramos que en todas las pirámides reconocen el polígono que la conforma, su cantidad y forma. Particularmente para la pirámide triangular un grupo explicita que cualquiera de sus caras puede ser la base y que ésta depende de la posición en que se ubique.

En el numeral seis, los estudiantes deben recopilar la información de las preguntas anteriores y se da la posibilidad de que asignen un nombre a cada una de las pirámides, encontrando que la mayoría coincide con su respectivo nombre, sin embargo para la pirámide 1 (cuadrangular) escuchamos nombres tales como “cuadricula” o “cuadritriangular” lo que nos permite pensar que el nombre asignado por los estudiantes correspondiente tanto a la forma de la base como a las caras laterales. Considerando que esta tarea es consecuente a la tarea de conceptualización de prismas, pensamos que éste fue un punto a favor en el que los estudiantes lograron comprender que los nombres de algunos cuerpos

dependen de la forma de la base, encontrando que las respuestas en su gran mayoría fueron acertadas.

En este punto de la tarea se realiza una pausa para que los estudiantes socialicen las respuestas de las preguntas anteriores, en dicha socialización, encontramos gran apropiación en los conceptos y características de las pirámides, pues sus respuestas son acertadas. La compilación de la información en una tabla plasmada en el tablero permitió, que los estudiantes plantearan relaciones entre los componentes de la pirámide y llegar a una expresión general para cada uno de ellos.

En este sentido los estudiantes llegan fácilmente a plantear una relación de igualdad entre los lados del polígono de la base y las caras laterales de la pirámide, de igual forma determinan la expresión $n \times 2$ o $n.2$, donde n es la cantidad de caras laterales, para establecer la relación entre ellas y la cantidad de aristas. Pensamos que los estudiantes llegan fácilmente a esta relación puesto que entre las cantidades hay una relación del doble a lo que era fácil llegar por medio de la multiplicación por 2.

Al plantear la relación entre la cantidad de caras laterales y de vértices, surgieron dos expresiones : $n.1$ y $n+1$ las cuales se pusieron en discusión, remplazando la primera expresión en el caso particular de la pirámide cuadrangular para verificar si era la expresión adecuada, por medio de la cual se encontrarían la cantidad de vértices. Este proceso permitió que los estudiantes reconocieran que esta no era una expresión adecuada para lo que se estaba pidiendo y finalmente llegan a concluir que la expresión general para referirse a los vértices de cualquier pirámide es $n + 1$. Por medio de esta expresión también se reflexionan dos aspectos, el primero es que n corresponde a la cantidad de vértices de la base y el segundo que el número uno, es el ápice.

Para finalizar la plenaria, se pide a los estudiantes que sean ellos mismos quienes enuncien las propiedades de las pirámides, entre las cuales encontramos enunciaciones claras y concisas de cada una de ellas. Por ejemplo “si la base tiene n lados, al multiplicarlo por dos, daría la cantidad de aristas que tiene la pirámide, sería $n \times 2$ igual al número de aristas” la cual establece la relación entre la cantidad de lados de la base y la cantidad de aristas para cualquier pirámide.

Estos resultados superaron todas las expectativas de desempeño planteadas al inicio de la tarea, pues teníamos como objetivo que los estudiantes llegaran a las propiedades de las pirámides, pero estos además, hicieron procesos de generalización, los cuales son vitales dentro de las matemáticas.

Para el punto seis, en los ítems a y b se pide a los estudiantes que escriban su reflexión respecto a la relación que encuentran entre la forma de la base de las pirámides y la cantidad de caras laterales, así como de las características de todas las caras laterales de estos cuerpos.

Teniendo en cuenta que este punto fue resuelto después de la discusión grupal de las propiedades de las pirámides y específicamente a la relación entre la forma de la base y la cantidad de caras laterales, encontramos que todas las respuestas son acertadas, pero el 50% no profundizan lo suficiente en la generalidad -de acuerdo a la cantidad de lados del polígono de la base, será la cantidad de caras laterales del cuerpo- pues hacen referencia a aspectos como “todas las caras laterales son triangulares y tienen diferentes bases”, más no a la relaciones entre unas y otras. El 50% restante logra por medio de sus argumentos dar cuenta de la relación “la cantidad de caras laterales depende de los lados de su base”

Respecto a las características de las caras laterales de la pirámide, el 65 % aluden a que éstas son congruentes, de estos el 15% determina que además son triangulares, el 19% únicamente a su forma y el 16% no logra determinar una característica general para las caras laterales de las pirámides.

Para el punto siete en el cual se pide a los estudiantes comparar las aristas de las caras laterales de la pirámide, vemos que el 85% concluye que son iguales y el 15% restante afirma lo contrario, permitiéndonos pensar que no realizaron correctamente las comparaciones.

A nuestro parecer este cuadro reflejó la conceptualización hecha por los estudiantes en el transcurso de la tarea, en tanto que demuestran una apropiación de las propiedades de este cuerpo.

Finalmente la realización de esta situación, permitió que los estudiantes conceptualizaran acerca de los prismas y pirámides, en tanto que logran por medio de una secuencia de preguntas llegar a conclusiones generales de casos particulares y por ende conceptualizar los componentes generales para cada una de estas familias. Para tal fin, se generó un espacio en el que los estudiantes manipularon y movieron los cuerpos, teniendo en sus manos una representación o imagen visual de éste que favoreciera el proceso descrito por Gregoria Guillén como “interpretación de la información figurativa” en donde los estudiantes al tener contacto con el cuerpo, podían deducir ciertas propiedades. En este sentido muestran la habilidad de “percepción figura y contexto”, pues reconocen ciertos elementos que lo conforman (partes de él) e identifican ciertas características que permanecen invariantes para ambas representaciones.

Por otro lado al cuestionar a los estudiantes acerca de las características de los cubos que los hacían pertenecer a la familia de los prismas, encontramos en la gran mayoría la habilidad de discriminación visual, pues comparan los componentes de uno y otro, encontrando semejanzas y diferencias entre ellos; por otra parte las descripciones escritas generan el proceso de representación “descripción verbal”, en tanto que debían tener un nivel de argumentación elaborado que favoreciera el análisis y uso de un lenguaje correspondiente con lo que se pretende explicitar.

3.2.3. Situación 3: representación y visualización de prismas y pirámides.

- **Tarea 1: reconociendo invariantes de prismas y pirámides a través del movimiento.**

Objetivos:

- Acercar a los estudiantes a un reconocimiento de las características invariantes de los prismas y pirámides a través de procesos de movimiento.

I. Descripción de la tarea.

Para el desarrollo de esta tarea se conforman grupos de tres estudiantes, quienes en el computador, utilizando el programa Cabri 3D mueven dos cuerpos, tales como: pirámide y prisma triangular, (los cuales estaban guardados en un archivo en el computador) para observarlos desde distintos puntos de vista. En el inicio de la actividad se explica a los estudiantes la forma de realizar los movimientos de los cuerpos utilizando el mouse.

Luego de esta exploración se pide a los estudiantes que muevan los cuerpos que tiene en la pantalla para ubicarlos en las posiciones representadas en las guías entregadas, en la cual encierran las representaciones que corresponden con los sólidos de la pantalla y responden algunas cuestiones respecto a la cantidad de componentes que son observados y a la ubicación de aquellos que no son vistos desde dicho punto de referencia; así como a las características de aquellos cuerpos que no corresponden a los vistos en la pantalla.

En la guía se encuentra la representación de un prisma y una pirámide pentagonal en cuatro posiciones diferentes cada uno, los cuales a su vez se encuentran

representados en la pantalla del computador, se pide a los estudiantes que los muevan y escriban para cada posición la cantidad de componentes que le observan, los componentes que varían a partir de dichos movimientos y los que permanecen invariantes.

Después de finalizado este punto, se realiza una socialización en la que los estudiantes expresan sus respuestas al grupo, de la cual se cuestiona principalmente acerca de las características invariantes de los cuerpos en la actividad de movimiento. Finalmente los estudiantes escriben sus conclusiones respecto a la afirmación “las características de los prismas y pirámides no se alteran cuando éstas se mueven”.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

En esta tarea se espera que los estudiantes sean autónomos en la exploración activa del programa y por tanto en la realización de movimientos de los cuerpos. De igual forma, se espera que identifiquen que las propiedades de los cuerpos no varían al ser cambiados de posición, que reconozcan los componentes de un tipo especial de prismas y pirámides que les permitan escoger adecuadamente sus representaciones tridimensionales plasmadas en la guía y que argumenten haciendo uso de los conocimientos adquiridos en tareas anteriores, porque, algunas representaciones no corresponden con el cuerpo plasmado en la pantalla del computador.

El maestro es el encargado de propiciar un ambiente de aprendizaje, en el que enseña los pasos para llevar a cabo movimientos de sólidos geométricos y conduce a los estudiantes a observar detalladamente cada una de las representaciones presentadas a partir de los diferentes movimientos, con el fin de que den cuenta de la invariabilidad de sus propiedades. De igual forma genera un espacio de análisis en relación a los elementos visibles y ocultos de los cuerpos, los cuales dependen tanto de la posición del observador como del cuerpo mismo.

III. Materiales.

La actividad se desarrolla utilizando el programa interactivo Cabri 3D

IV. Resultados.

La tarea fue resuelta por veintiocho estudiantes, en las cuales se conformaron diez grupos. La actividad se aborda a través del Software Cabri 3D por medio del cual los estudiantes tienen distintas maneras de manipular y visualizar los cuerpos geométricos en función de sus distintas representaciones, proporciona

representaciones dinámicas de los cuerpos dentro de los cuales los estudiantes (en la tarea) mueven en la pantalla prismas y pirámides observando todos sus componentes en distintas posiciones. Después de esta manipulación, resuelven la tarea en una guía impresa.

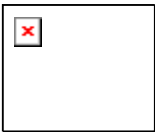
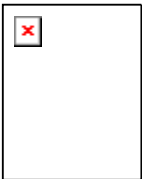
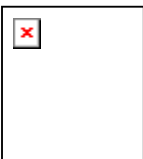
Para una mejor lectura de los resultados, se ha concatenado en cuadros, las respuestas de los estudiantes.

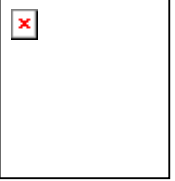
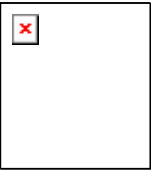
Enunciados de este punto en la guía entregada a los estudiantes:

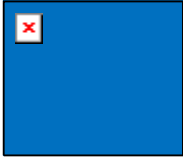
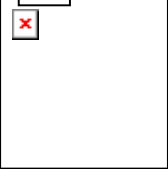
1. Encierren en las vistas de los cuerpos que hay debajo, aquellos que correspondan a la pirámide triangular que está en la pantalla. Si quieren pueden mover la pirámide. (representaciones 1 a 7 que están en el cuadro)
 - a. Completen la siguiente tabla en relación con las representaciones que si corresponden con la pirámide triangular.
 - b. Escriban qué pasa con los componentes que no se observan por la posición que tiene la pirámide en cada caso
 - c. Completen la siguiente tabla en relación con las representaciones que no corresponden con la pirámide triangular.

En el siguiente cuadro, encontramos los resultados del punto 1, ítems a y c, donde los estudiantes encerraban en la guía entregada las representaciones de pirámides que correspondían a la pirámide triangular, escogían tres de ellas para escribir los componentes que le observaban, los cuales son tipificados para una mejor sistematización. De igual forma se plasma las respuestas textuales de lo que pasa con los componentes que no eran observables por la posición en la que se encontraban y sus explicaciones de por qué los otros cuerpos que no son encerrados no corresponden a representaciones de este cuerpo.

Tabla 39 Vistas que representan la pirámide triangular.

Dibujo	Grupos que encerraron esta posición que corresponde a la pirámide triangular (1)	Componentes que se le observan a las que corresponden (a)	Por qué no corresponden a la pirámide triangular (c)
1 	8 grupos (80 %)	TIPO 1: Estudiantes que aluden a las caras y otros componentes (4) TIPO 2: Estudiantes que no aluden a caras sino a otros componentes. (3)	- No tiene su base triangular, no tiene la misma forma. - No puede tomar esa forma. (22 %)
2 	10 grupos 100 %	TIPO 1: Estudiantes que dicen que la representación es una cara (2) TIPO 2: La representación es una base (7). TIPO 3: Aluden sólo a los componentes (1)	
3 	8 grupos 80 %	TIPO 1: Estudiantes que ven en la representación 2 caras o una base y una cara y algunos componentes. (4) TIPO 2: Respuestas incorrectas (no corresponde a la representación) (3)	No corresponde porque no tiene base. (11 %)

Dibujo	Grupos que encerraron esta posición que corresponde a la pirámide triangular (1)	Componentes que se le observan a las que corresponden (a)	Por qué no corresponden a la pirámide triangular (c)
4 	10 grupos 100 %	TIPO 1: Descripción correcta de los elementos que se visualizan: dos caras una base, dos caras o 6 aristas y 4 vértices. (3) TIPO 2: Descripción que alude a una sola componente. (2)	
5 	Ningún grupo 0 %		• Porque no tiene caras triangulares. • Tiene dos bases y es un prisma. • Porque tiene 4 bases. • Porque sus caras tienen 4 lados. • Porque no tiene 3 lados y tiene 4 lados y 2 bases. • Porque sus caras laterales son cuadradas. (89 %)
6 	10 grupos 100 %	Los grupos describen componentes parciales de la representación (10)	

Dibujo	Grupos que encerraron esta posición que corresponde a la pirámide triangular (1	Componentes que se le observan a las que corresponden (a)	Componentes que se le observan a las que corresponden (a)
7 	Ningún grupo 0 %		• Porque su base tiene 4 lados. • Porque su base es cuadrada. (5 grupos) • Tiene 4 caras laterales. (93 %)
8 	8 grupos 80 %	Dos caras	• No corresponde porque no se le ve la base ni una cara. 11 %

Respecto a la pregunta b la cual indagaba acerca de lo que sucede con los componentes que no se observan por la posición que tiene la pirámide se encontró lo siguiente:

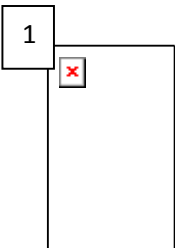
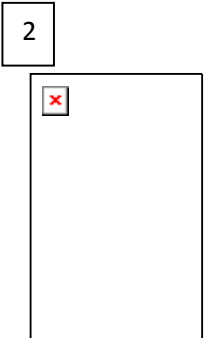
TIPO 1: estudiantes que dicen que la pirámide no cambia sino los elementos que se pueden observar de ella (8)

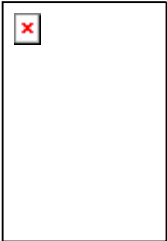
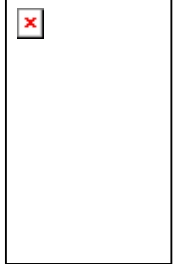
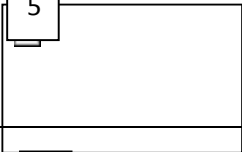
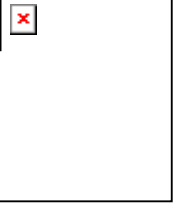
- Hacen afirmaciones como: Depende del punto de vista de uno y la posición del sólido, algunas cosas no se ven.
- Está en el otro lado, por consecuencia no se observan los otros componentes.
- Siguen allí.
- Por la posición de la pirámide de las caras laterales.

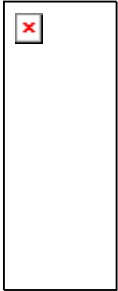
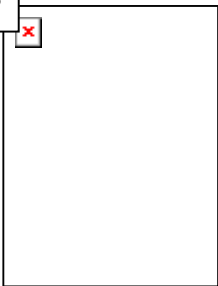
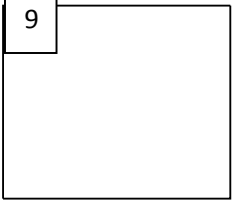
TIPO 2: Estudiantes que determinan que algunos de sus componentes cambian (2)

En el siguiente cuadro, encontramos los resultados del punto 1, ítems a y c, donde los estudiantes encerraban en la guía entregada las representaciones de prismas que correspondían al prisma triangular, escogían tres de ellas para escribir los componentes que le observaban, los cuales son tipificados para una mejor sistematización. De igual forma se plasma las respuestas textuales de lo que pasa con los componentes que no eran observables por la posición en la que se encontraban y sus explicaciones de por qué los otros cuerpos que no son encerrados no corresponden a representaciones de este cuerpo.

Tabla 40 Vistas que representan el prisma triangular.

Dibujo	Grupos que encerraron esta posición que corresponde al prisma triangular (2)	Componentes que se le observan a las que corresponden (a)	Por qué no corresponden al prisma triangular (c)
	9 grupos 90 %	TIPO 1: Estudiantes que aluden a las caras y otros componentes (6)	
	9 grupos 93 %	TIPO 1: Estudiantes que observan una cara, aluden a su forma y a otros componentes como aristas. (3) TIPO 2: Estudiantes que afirman ver dos caras. (2)	

3 	1 grupo (2 estudiantes) 7 %	Afirman observar 4 caras.	• Porque tiene la base cuadrada. (44 %) • Porque su base es cuadrada y tiene 4 caras. (10 %) • porque tiene muchas caras. (7 %)
4 	10 grupos 100 %	TIPO 1: Estudiantes que ven en la representación una cara y una base y otros componentes. (2) TIPO 2: Estudiantes que observan una cara, dos bases y aluden a otros componentes. (2) TIPO 3: Estudiantes que aluden solo a lo forma de la cara lateral. (2)	
5 	Ningún grupo 0 %		• Tiene forma octagonal. (30 %)
6 	9 grupos 93%	TIPO 1: estudiantes que observan una base triangular y una cara, además a luden a otros componentes. (3) TIPO 2: estudiantes que solo observan una cara. (1)	

7 	7 grupos 70 %	Los estudiantes aluden a su base triangular y una cara. (2)	
8 	ningún grupo 0 %		• Porque su cara y la base es pentagonal. (10 %) • Porque su base es pentagonal. (55 %)
9 	7 grupos 77 %	TIPO 1: Los estudiantes afirman que la representación corresponde a la base (2) TIPO 2: afirman que es una cara y nombran las aristas. (1)	

Respecto a la pregunta b la cual cuestiona lo qué sucede con los componentes que no se observan por la posición que tiene el prisma se encontró lo siguiente:

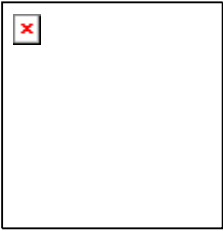
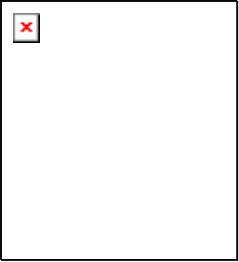
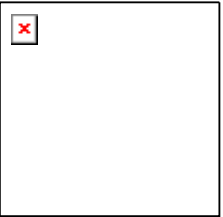
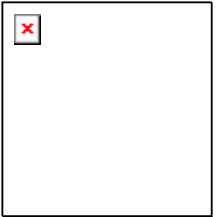
TIPO 1: estudiantes que dicen el prisma no cambia sino los elementos que se pueden observar de ella (2)

TIPO 2: estudiantes que dan respuestas que no tienen nada que ver con la pregunta sino nombrando distintos tipos de prismas. (4)

3. Muevan la pirámide que tienen en la pantalla del computador para colocarla en la primera posición que ven a continuación, luego colóquenla en la segunda posición y así sucesivamente. Completen el cuadro.

En el siguiente cuadro se compilan las respuestas textuales respecto a las componentes que se observan en las representaciones de la pirámide pentagonal, de acuerdo a la posición en que se encuentra ubicada.

Tabla 41 Componentes observables de la pirámide pentagonal.

Posiciones				
Qué partes alcanzas a observar	- caras. (40 %) 3 caras, 4 vértices, un ápice y 7 aristas. 7 aristas y 5 vértices. - Todas. - Las aristas, ángulos, vértices, base, caras.	- La parte lateral. 2 caras, 6 aristas. 2 caras. (50 %) 5 aristas y 4 vértices. 2 caras, un ápice, 5 aristas, 4 vértices. - Todas.	8 aristas y 3 vértices. - Dos caras y la base. (50 %) - la base y las caras laterales. 1 base y dos caras, 6 vértices, 8 aristas y un ápice. - Todas. 1 base, 2 caras, 11 aristas.	5 caras, un ápice, 10 aristas, 5 vértices. - Las caras laterales. - Se le ven todas las caras. - Todas las caras y el ápice. - Las 5 caras. 5 aristas y 6 vértices. 5 caras. 1 base, 4 caras, 12 aristas. - Todas.

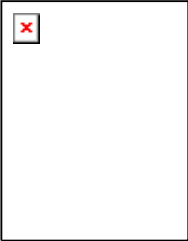
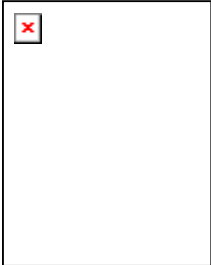
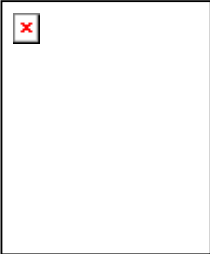
a. Indiquen los elementos de la pirámide que cambian (desde el observador) cuando ésta cambia de posición. (respuestas textuales)

- Todos los elementos observados.
- Sigue ahí.
- La posición.(20 %)
- Forma y el número de vértices y aristas.
- Cuando se mueve la vemos desde otro punto de vista.
- No cambia nada.
- Los elementos cambian.

- Depende de su posición y caras laterales.
 - Que cambia de forma y todas sus partes de su cuerpo también cambian.
- b. ¿Qué componentes y propiedades se conservan cuando la pirámide cambia de posición? (respuestas textuales)
- Las caras y las aristas y los vértices y el ápice.
 - Se observan las caras laterales y el ápice.
 - Su base y caras.
 - Cambia de forma.
 - Algunas partes no se ven
 - Se le ven las caras y la base. Se cambia su posición.
 - Los vértices, las caras y las aristas.
 - Las caras y la base.
 - Las aristas.
 - Aristas y vértices.
4. Muevan el prisma que tienen en la mano para colóquenlo en la primera posición que ven a continuación, luego colóquenlo en la segunda posición y así sucesivamente. Completen el cuadro.

En el siguiente cuadro se compilan las respuestas textuales respecto a las componentes que se observan en las representaciones del prisma pentagonal, de acuerdo a la posición en que se encuentra ubicado.

Tabla 42 Componentes observables del prisma pentagonal.

Posiciones				
Qué partes alcanzas a observar	▪ Todas. ▪ 4 caras, 2 bases, aristas. ▪ 1 base y dos caras. ▪ 10 aristas y 8 vértices. ▪ Dos caras y una base. (50 %) ▪ Una base, dos caras, 10 aristas, 8 vértices.	▪ 2 caras, 1 base, 8 aristas, 8 vértices. ▪ 1 base y 2 caras. (70 %) ▪ 10 aristas y 8 vértices. ▪ Todas.	▪ 12 aristas y 9 vértices. ▪ Todas. ▪ 3 caras y una base (40 %) ▪ 1 base, 1 cara y la mitad de dos caras. ▪ 3 caras, 1 base, 12 aristas, 9 vértices. ▪ 1 base, 2 caras, 11 aristas. ▪ Base y caras.	▪ La Base.(60%) ▪ Forma pentagonal, aristas. ▪ 1 base, 5 aristas, 5 vértices. ▪ Todos. ▪ 5 aristas y 5 vértices.

a. Indiquen los elementos de la pirámide que cambian (desde el observador) cuando ésta cambia de posición. (respuestas textuales)

- Sigue ahí,
- Que cambian la forma de sus bases.
- Base y caras.
- Cuando la movemos desde los vértices o desde las aristas o cuando la miramos desde otro punto de vista.
- la base y la cara
- Cambia de posición.
- su posición.
- No le cambia nada
- Los elementos de la pirámide cambian cuatro veces de posición.

b. ¿Qué componentes y propiedades se conservan cuando la pirámide cambia de posición? (respuestas textuales)

- La base, la cara, los vértices, las aristas, los ángulos y caras.
- Que su cara es pentagonal y que tiene 5 caras laterales.
- Su base y caras.
- Que sus lados cambian de posición y la base conserva su forma y sus cantidades.
- Que se le ven sus caras y lados como las ponga.
- Las caras y la base.
- Que algunas partes ya no se ven.
- Su base, sus caras, vértices y aristas.
- Las aristas.

5. Escriban el análisis de las siguiente afirmación “las características de los prismas y pirámides no se alteran cuando éstas se mueven”

Las siguientes expresiones corresponden con los argumentos dados por los estudiantes (de manera textual) para esta afirmación.

“Que cuando se cambia de posición sigue siendo la misma, pero hay cosas que no se ven”.

“A pesar de que se ve diferente sigue siendo igual, sólo que se ve desde otro punto de vista”.

“No se alteran porque siguen siendo prismas y pirámides”.

“No se alteran porque al moverlas son iguales”

“Que no cambian su forma sino su lugar”

“Si porque si las muevan no cambian”

“Si es verdad porque siguen siendo prismas y pirámides”.

V. Análisis de resultados.

Esta tarea pone en juego fundamentalmente el movimiento de prismas y pirámides en el programa Cabri 3D, la cual busca ampliar las imágenes visuales que tienen los estudiantes de los cuerpos geométricos, desarrollar habilidades para la creación y procesamiento de imágenes visuales como la memoria visual, conservación de la percepción y discriminación visual y el proceso de visualización “interpretación de información figurativa”

Después de que los estudiantes en grupos de aproximadamente 3 estudiantes trabajan con Cabri 3D moviendo una pirámide triangular la cual corresponde con una representación tridimensional, pasan a escoger en una representación bidimensional (hoja de papel) alguna de éstas representaciones que se estatizan en un momento en la pantalla. En la actividad pueden cambiar la posición del cuerpo para observar los componentes que no se alteran a pesar del movimiento, caracterizando los componentes que se observan y que no se pueden ver para concluir algunas propiedades. Además pueden hacer otras modificaciones sobre el cuerpo tales como cambiar su color o el color del fondo. Es importante resaltar que en el programa las caras laterales de los cuerpos son de un color y su base de otro, en ella está delimitado un punto el cual se encuentra en el centro del polígono, razón por la cual es fácil diferenciarla de las caras laterales.

Con relación a la pregunta 1 de esta tarea se puede afirmar lo siguiente, de forma general.

Los estudiantes fácilmente pudieron acceder al programa y utilizar las herramientas que brindaba concernientes a la movilidad de los cuerpos, lo cual les permitió observarlos desde distintos puntos de vista y explorar otros aspectos tales como cambiar los colores a las caras y la base, manipular los objetos y a su vez generar motivación hacía la tarea y el trabajo en equipo, dentro del cual todos se sentían partícipes.

De igual forma pusieron de manifiesto habilidades relacionadas con el uso de programas tecnológicos interactivos. pues a pesar de ser su primera experiencia con el software, lo manejaron con mucha propiedad, explorando sus usos sin instrucciones previas. Este proceso de interactuar con los cuerpos de manera virtual, generó en los estudiantes la capacidad de interpretar la información figurativa plasmada en la pantalla del ordenador, y aunque hasta este momento todas las interacciones con los cuerpos había sido físicas, no produjo ninguna dificultad en que ellos reconocieran las diferentes representaciones o formas de ver el cuerpo y abstraieran de ellas, sus propiedades y características fundamentales.

De esta manera, todos los estudiantes logran reconocer entre todas las representaciones plasmadas en la guía entregada, aquellas que corresponden a la pirámide triangular, evidenciando que hay un reconocimiento de “lo triangular” como una característica fundamental de este tipo de pirámides. Esto se puede corroborar al ver que ningún grupo escoge las representaciones cinco y siete

concernientes a un prisma triangular y una pirámide cuadrangular respectivamente, pues en el primero de ellos se observan dos caras laterales rectangulares y en el segundo su base. De igual forma, sus argumentos explicitan esta afirmación, en tanto que encontramos expresiones tales como: “porque no tiene caras triangulares”, “porque sus caras laterales son cuadradas” en el caso del prisma y “porque su base tiene 4 lados”, “porque su base es cuadrada” en el caso de la pirámide cuadrangular.

Al momento de especificar los componentes que se observan en las distintas representaciones respectivas a la pirámide triangular, encontramos descripciones entre las cuales:

- La mayoría aluden siempre a las caras y su forma como elemento diferenciador.
- Pocos estudiantes aluden a otras características tales como la cantidad de aristas, vértices o ángulos.
- Muy pocos estudiantes hacen referencia al ápice, lo incluyen entre la totalidad de los vértices del cuerpo, pero sin especificarlo.

De lo anterior podemos darnos cuenta que los estudiantes describen componentes parciales de los cuerpos, haciendo referencia en su mayoría a las caras de este o en otros casos a sus restantes componentes, mostrando una debilidad en sus descripciones, pues aunque son correctas, no son lo suficientemente completas para la tarea que se les está pidiendo.

Este mismo análisis lo podemos realizar respecto al punto 2 ítems a, b y c, en el cual los estudiantes debían escoger las representaciones que correspondían al prisma triangular, pues en su mayoría seleccionan las representaciones acertadas y también toman como elementos fundamentales la cantidad y forma tanto de sus bases como de las caras laterales, otros, responden la pregunta en términos de explicar por qué la representación corresponde al prisma pedido, más no a los componentes observables, “porque tiene base triangular y caras rectangulares”. Una poca cantidad de estudiantes aluden a otras características como vértices o aristas.

Al respecto, podemos notar que hay un reconocimiento de dos componentes fundamentales del prisma triangular, uno referido a la forma de su base “triangular” y otro a la forma de sus caras laterales “rectangular”, razón por la cual en su mayoría no escogen las representaciones tres, cinco y ocho concernientes al

prisma cuadrangular, octagonal y pentagonal, pues al momento de explicar las razones por las cuales no correspondían al prisma triangular, lo hacían refiriéndose a la forma de la base, escribiendo afirmaciones como: “porque su base es cuadrada y tiene cuatro caras”, “tiene forma octagonal” y “porque su base es pentagonal” respectivamente.

Por otra parte, al analizar el ítem b del punto 1 y 2 en el cual los estudiantes debían explicar lo qué sucedía con los componentes que no se le observan, podemos ver que los estudiantes han adquirido habilidades para la creación y procesamiento de imágenes visuales como la conservación de la percepción “es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades como su forma o tamaño, constantes aunque deje de verse total o parcialmente o se le observe desde diferente punto de vista” y la memoria visual “es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición”, en tanto que manifiestan en sus argumentos que hay componentes que no se observan por la posición en la que se encuentra el cuerpo, pero se conservan aún sin ser vistos, pues encontramos afirmaciones tales como “depende del punto de vista de uno y la posición del sólido, algunas cosas no se ven”, “está en el otro lado, por consecuencia no se observan los otros componentes”.

En el numeral 3 y 4, en los cual los estudiantes debían especificar los componentes observables a varias representaciones bidimensionales de la pirámide y el prisma pentagonal, encontramos que de forma general los reconocen aquellas características visibles y hacen evidente que dependiendo de la posición del cuerpo, son observadas cierta cantidad de componentes como aristas, vértices, caras, bases, ángulos o ápice para el caso de la pirámide.

En este sentido, podemos notar en los estudiantes una apropiación de los términos matemáticos y de algunas propiedades, así como de los componentes que los conforman, lo cual se evidencia en el momento que hacen sus descripciones con la cantidad correcta de elementos que conforman tanto prismas como pirámides y características fundamentales como forma y número de bases y caras laterales.

Para el análisis del punto a de los numerales 3 y 4 en el cual los estudiantes debían explicitar los componentes que varían al cambiar los cuerpos de posición, se ha encontrado dos tipos de respuestas:

Categoría 1: Estudiantes que afirman que ni la pirámide ni el prisma cambian, sino los elementos que se pueden observar de ellos.

Categoría 2: Estudiantes que determinan que algunos de sus componentes cambian (Aristas, vértices).

En el caso de la pirámide, el 70% de los estudiantes se encuentran en la categoría 1, afirmando por ejemplo “cuando se mueve la vemos desde otro punto de vista”, “cambia la posición”, mientras que el 30 % se encuentran en la categoría 2, afirmando por ejemplo que cambia: “ forma y número de vértices y aristas”, “cambia de forma todas sus partes y todas las partes de su cuerpo también cambian”.

En el caso del prisma, el 50 % de la población se encuentra en la categoría 1 afirmando por ejemplo que cambia “los lados y la base de posición” y el 50 % restante en la categoría 2 afirmando por ejemplo que cambia “cuando la movemos desde los vértices o desde las aristas o cuando la miramos desde otro punto de vista”.

Sin embargo al analizar el ítem b de los mismos puntos encontramos que los estudiantes reconocen que al cambiar la posición de los cuerpos sus componentes permanecen invariantes, pues el porcentaje de acierto es del 100%, en tanto que al argumentar qué componentes no varían, encontramos respuestas como: “la base, la cara, los vértices, las aristas, los ángulos”, “las caras y la base”, “su base, sus caras, vértices y aristas.” Podemos notar que los estudiantes afirman que son invariantes la forma de las caras, el número de éstas, el número de vértices y aristas, además plantean que aunque cambie su posición y algunas partes no se vean, los componentes se conservan, pues se puede ver cuando dicen: “algunas partes ya no se ven”, “siguen ahí” evidenciando de nuevo la capacidad para reconocer que los elementos y su número, varían desde la perspectiva del observador.

En este sentido podemos afirmar que los estudiantes manejan la memoria visual “es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición” , pues parece que anteriormente han interiorizado mentalmente las formas y cantidad de las caras que conforman los cuerpos, retomándolas en cualquier representación que la ocultara y afirmando su correspondencia o no a cierto cuerpo.

En el punto 5 de la tarea los estudiantes debían analizar la afirmación “las características de los prismas y pirámides no se alteran cuando éstos se mueven”, para lo cual se condensa toda la actividad y se llega a la finalidad de la tarea, la cual era reconocer los invariantes de éstos cuerpos al ser movidos, pues los estudiantes hacen afirmaciones tales como “sí, a pesar que se ve diferente sigue siendo igual, sólo que se ve desde otro punto de vista”, “no se alteran porque siguen siendo prismas y pirámides”, “que cuando cambia de posición sigue siendo la misma pero hay cosas que no se ven”.

A medida que han transcurrido las tareas, los estudiantes han ido afianzando las propiedades de prismas y pirámides las cuales le permiten hablar con propiedad de estos cuerpos y sus componentes. Evidentemente este reconocimiento de las propiedades de estos cuerpos, son confirmadas mediante el desarrollo de la tarea, pues se deja de manifiesto que los prismas y pirámides a pesar de aplicarles cierto movimiento, continúan conservando sus características fundamentales.

Tarea 2 representación bidimensional de prismas y pirámides.

Objetivos:

- Acercar a los estudiantes a distintas representaciones bidimensionales de prismas y pirámides.
- Identificar desarrollos de prismas y pirámides teniendo en cuenta sus componentes.
- Realizar diferentes representaciones bidimensionales de prismas y pirámides., teniendo en cuenta puntos de referencia.

I. Descripción de la tarea.

Para el desarrollo de esta tarea, se realizan grupos de cinco estudiantes, a los cuales se les entrega cuatro cuerpos contruidos en madera, que corresponden a prisma y pirámide triangular y cuadrangular. En un primer momento se pide que los dibujen tal y como son vistos. Luego que representen el prisma y la pirámide triangular desde diversas perspectivas, (arriba, abajo, lateral y de frente) seguido de ello se da una retícula con la representación incompleta de diferentes cuerpos, entre los que encontramos un cubo, dos pirámides triangulares, un prisma

triangular, una pirámide pentagonal y un prisma cuadrangular, los cuales deben completarse y especificar para cada caso el nombre geométrico respectivo. Finalmente se pide a los estudiantes que lean, discutan y escriban su reflexión de acuerdo a la afirmación “tanto los prismas como las pirámides las podemos representar en distintas posiciones y sus características fundamentales no cambian”

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

Se espera que los estudiantes reconozcan que de acuerdo a la posición en que se encuentre ubicado un cuerpo, se le pueden observar ciertos componentes y por ende deben ser tenidos en cuenta para las representaciones que se hagan de ellos. De igual forma, se espera que pongan en juego diferentes factores de visualización que les permitan reconocer elementos faltantes en una representación dada, de tal forma que puedan completarlos e identificar a qué cuerpo corresponden.

En cuanto a la representación isométrica, se espera que los estudiantes hagan uso de la retícula dada y que tengan en cuenta una proporción entre los elementos dados y aquellos que se deben representar. Por otro lado se espera que los estudiantes corroboren que a pesar de tener estos cuerpos representados de distintas formas, sus propiedades no varían.

El maestro hace intervenciones que conduzcan a los estudiantes a observar los cuerpos geométricos desde diferentes puntos de vista conduciéndolos a que presten atención a los elementos observables y no observables desde cada uno de ellos. De igual forma orienta los diferentes tipos de representaciones planas asociados a factores de visualización que deben ser tenidos en cuenta a partir de cada uno de los tipos de representaciones planas.

III. Materiales.

Representaciones en madera de poliedros

IV. Resultados.

Esta tarea se desarrolló en una sesión de 90 minutos, con una asistencia de treinta y dos estudiantes, los cuales fueron distribuidos en 6 grupos.

1. Observen detalladamente cada uno de los cuerpos y realicen los siguientes puntos.

- a) Dibujen la pirámide triangular.
- b) Dibujen la pirámide cuadrangular
- c) Dibujes el prisma cuadrangular
- d) Dibujes el prisma triangular.

Las tablas presentadas a continuación (tablas 43, 44, 45 y 46) recopilan las representaciones que los grupos hacen de la pirámide y prisma triangular y cuadrangular.

Tabla 43 Representación de la pirámide triangular.

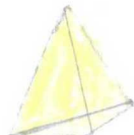
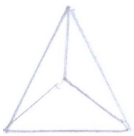
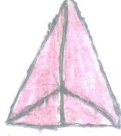
Grupo	Representación
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

Tabla 44 Representación de la pirámide cuadrangular.

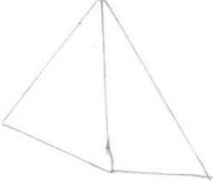
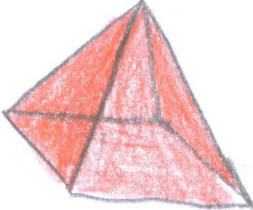
Grupo	Representación
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

Tabla 45 Representación del prisma cuadrangular.

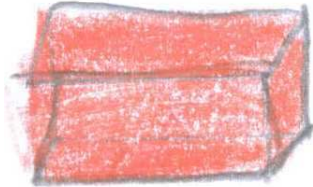
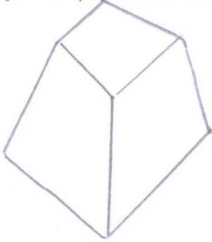
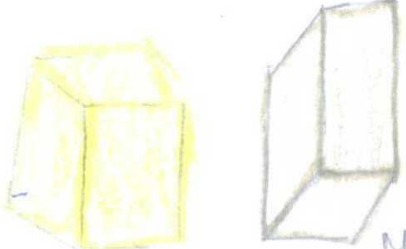
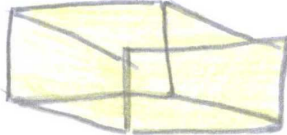
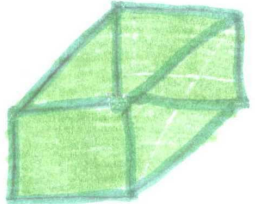
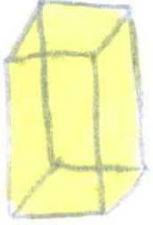
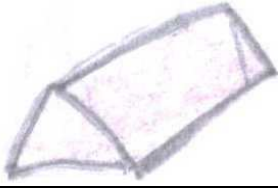
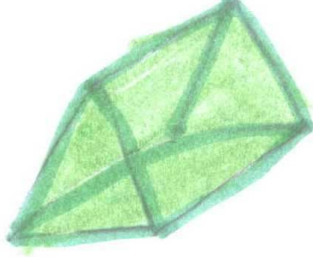
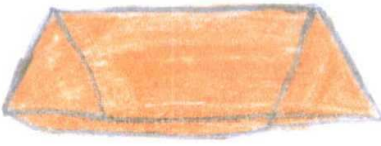
Grupo	Representación
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

Tabla 46 Representación del prisma triangular.

Grupo	Representación
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

2. Observen el prisma y la pirámide desde distintos puntos de vista. Muévanlos, rótenlos, gírenlos. Para que los puedan ver desde distintas posiciones. Dibujen cada uno de los cuerpos desde las siguientes posiciones: desde arriba, abajo, frente y lado (lateral) teniendo en cuenta las partes que verían desde cada posición.

Las tablas presentadas a continuación (tablas 47, 48, 49 y 50) recopilan las representaciones que los grupos hacen de la pirámide y prisma triangular en estas vistas.

Tabla 47 Representaciones de la pirámide y prisma triangular vistas desde arriba.

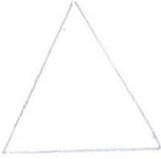
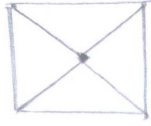
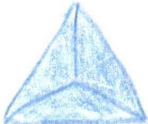
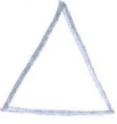
Grupo	Prisma	Pirámide
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

Tabla 48 Representaciones de la pirámide y el prisma triangular vistos desde un lado (lateral).

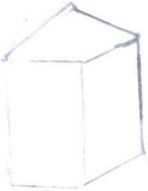
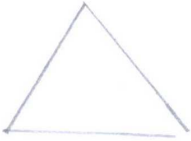
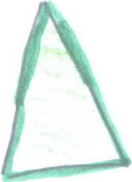
Grupo	Prisma	Pirámide
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

Tabla 49 Representaciones de la pirámide y el prisma triangular vistos desde el frente.

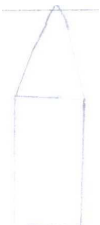
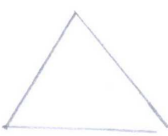
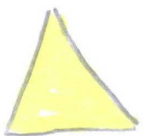
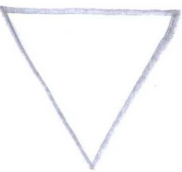
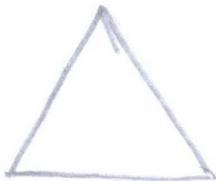
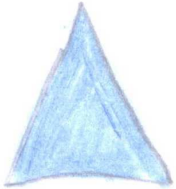
Grupo	Prisma	Pirámide
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

Tabla 50 Representaciones de la pirámide y el prisma triangular vistos desde abajo.

Grupo	Prisma	Pirámide
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

3. En la siguiente retícula se encuentra una parte de la representación de un cuerpo, complétenlo y digan a qué sólido corresponde.

En las siguientes tablas (51 a 56) se encuentran plasmadas las representaciones realizadas por los estudiantes en la retícula, de poliedros tales como el cubo, pirámide triangular, pentagonal y prisma triangular y pentagonal.

Tabla 51 Representaciones del cubo en la retícula.

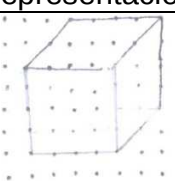
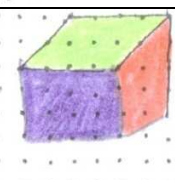
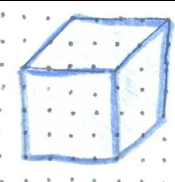
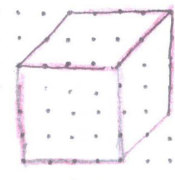
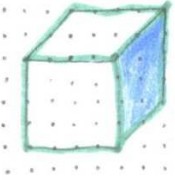
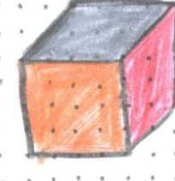
Grupo	Representación	Nombre asignado
1.		Cubo
2.		No asignan nombre
3.		Cubo
4.		Prisma cuadrangular
5.		Cubo
6.		cubo

Tabla 52 Representaciones de la pirámide triangular en la retícula.

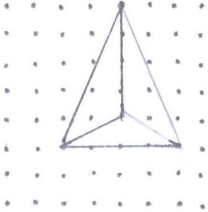
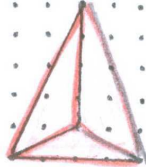
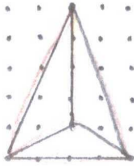
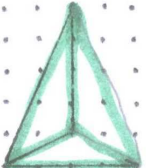
Grupo	Representación	Nombre asignado
1.		Pirámide triangular
2.		No asignan nombre
3.		Pirámide triangular
4.		Pirámide triangular
5.		Pirámide
6.		Pirámide triangular

Tabla 53 Representaciones de la pirámide pentagonal.

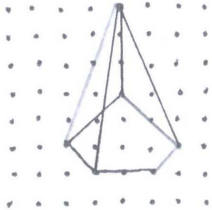
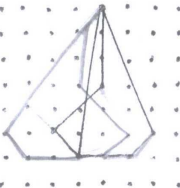
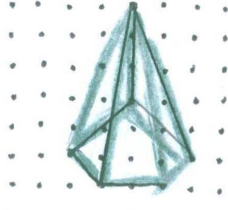
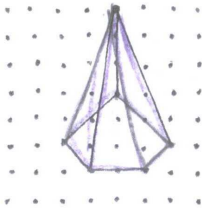
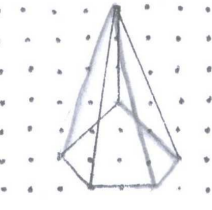
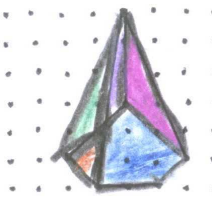
Grupo	Representación	Nombre asignado
1.		Pirámide pentagonal
2.		No asignan nombre
3.		Pirámide pentagonal
4.		Pirámide pentagonal
5.		Pirámide pentagonal
6.		Pirámide pentagonal

Tabla 54 Representaciones de la pirámide triangular.

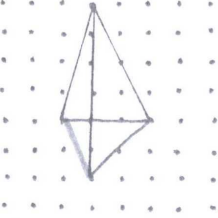
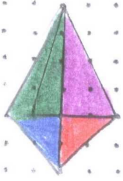
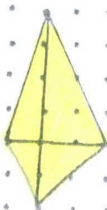
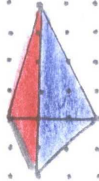
Grupo	Representación	Nombre asignado
1.		Pirámide triangular
2.		No asignan nombre
3.		Pirámide triangular
4.		Pirámide triangular
5.		Pirámide triangular
6.		Pirámide triangular

Tabla 55 Representaciones del prisma triangular.

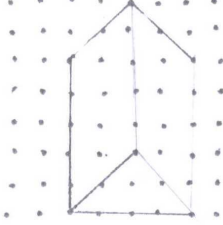
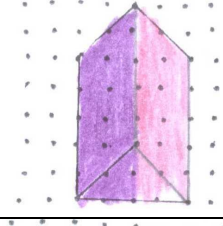
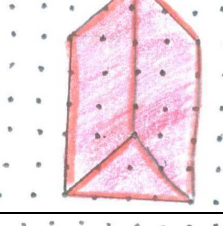
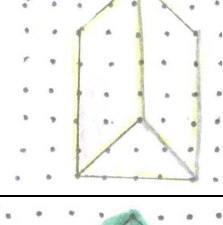
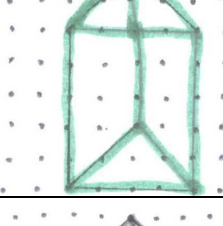
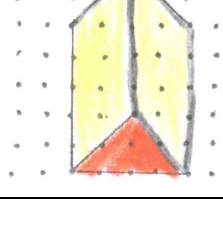
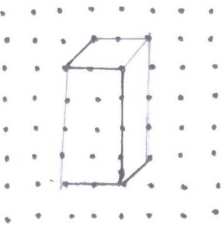
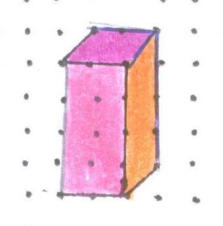
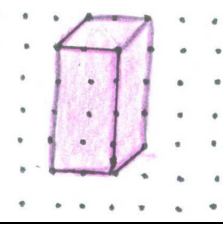
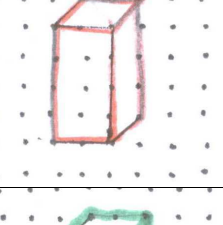
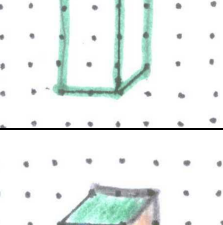
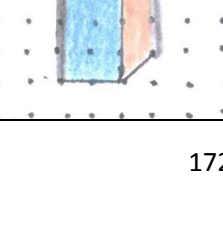
Grupo	Representación	Nombre asignado
1.		Prisma triangular
2.		No asignan nombre
3.		Prisma triangular
4.		Prisma triangular
5.		Pirámide rectangular
6.		Prisma triangular

Tabla 56 Representaciones del prisma cuadrangular.

Grupo	Representación	Nombre asignado
1.		Prisma cuadrangular
2.		No asignan nombre
3.		Prisma cuadrangular
4.		Prisma cuadrangular
5.		Cubo rectangular
6.		Prisma cuadrangular

4. De acuerdo a la actividad anterior podemos decir: “tanto los prismas como las pirámides las podemos representar en distintas posiciones y sus características fundamentales no cambian” expliquen lo que entienden de dicha expresión.

Las siguientes respuestas, son explicaciones textuales realizadas por los estudiantes de la afirmación anterior.

GRUPO 1:

Que al cambiar su posición no altera su forma, ni sus bases y caras laterales

GRUPO 2:

Quiere decir que si los cambiamos de posición, no cambian sus características, solo que no vemos algunas características.

GRUPO 3:

Si uno pone una pirámide o un prisma de diferente posición no cambia su forma pero si su posición.

GRUPO 4:

Lo que entiendo es que no cambia nada porque en cualquier forma no cambia la forma.

GRUPO 5:

Porque los vértices y las aristas siguen siendo los mismos y tampoco cambian sus caras y sus bases.

GRUPO 6:

Que es la misma figura pero lo único que cambia es de donde lo miremos.

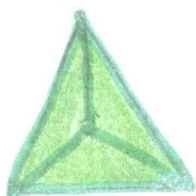
V. Análisis de resultados.

Esta tarea aborda distintas formas de representaciones planas de cuerpos tridimensionales, particularmente los prismas y pirámides, entre las cuales los estudiantes deben dibujar estos cuerpos utilizando tres formas de representación bidimensional: “representación en perspectiva”, “representación ortogonal o de vistas laterales” y “representación isométrica”, cada una de ellas con una características específicas, pero que a su vez, interrelacionándolas, permiten acercar a los estudiantes a una reflexión en torno a la invariabilidad de las propiedades de los cuerpos al tenerlos en distintas representaciones.

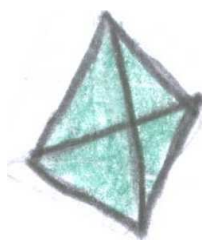
Respecto al punto 1 en el cual los estudiantes observaban cuerpos como la pirámide triangular y cuadrangular (ítems a y b) y el prisma cuadrangular y

triangular (ítems c y d) para luego representarlos, encontramos dibujos de dos tipos tales como:

a.

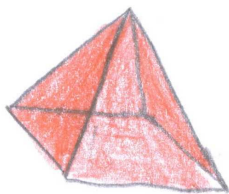


(4)



(2)

b.

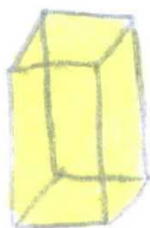


(4)

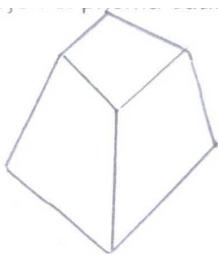


(2)

c.



(4)



(2)

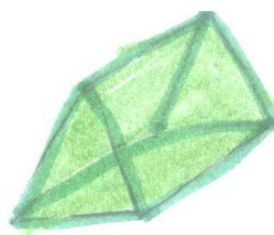
d.



(2)



(2)



(2)

En ellas se observa una representación bidimensional en perspectiva desde un ángulo particular de un observador, en la cual tratan de tener en cuenta el mayor número de componentes, es decir su base, caras laterales, vértices y aristas vistas, pues, ninguno de ellos hace referencia a sólo una de las caras o a dibujos de figuras planas como por ejemplo un triángulo. Ello deja ver que los estudiantes perciben en los cuerpos además de sus tres dimensiones, elementos importantes tales como su profundidad y la altura.

En particular sus representaciones muestran una apropiación del cuerpo y habilidad en la conservación de la percepción, pues al hacer sus representaciones reconocen que se mantienen determinadas propiedades y formas que deben ser representadas de acuerdo a la posición en que se coloquen, delimitando por ejemplo la forma y posición de la base y caras laterales. Es evidente que en este proceso además de la habilidad mencionada anteriormente, también se realiza un reconocimiento de posiciones en el espacio, ya que dependiendo de la posición en que se hayan ubicado para observarla, se le podrán ver ciertos componentes y así se llegará a la representación.

Las representaciones muestran todos los componentes incluyendo aquellos que no se deberían ver, de acuerdo a la posición que han elegido. Entre ellos encontramos dibujos donde parece estar representados esos cuerpos como sólidos en varillas, o con sus caras traslúcidas, dejando ver aquellos componentes que deben estar ocultos, en tanto que no utilizan otras formas de representación como líneas punteadas, sombras o degradaciones del color (mostrar efectos de luz) para dichos factores.

Es importante tener en cuenta que estos elementos no fueron objeto de reflexión dentro de las tareas anteriores y por tanto no es un desempeño que debíamos esperar para la tarea actual, pero cabe mencionar que las estrategias utilizadas por ellos para hacer una representación aproximada a estos cuerpos, sin ninguna instrucción diferente a lo que pedía el enunciado, radicó, en dibujar elementos fundamentales del cuerpo como la base, para a partir de ella, dibujar las caras laterales. Otra de las estrategias utilizadas consistió en hacer el dibujo en una hoja cuadriculada y luego calcarla en la guía de trabajo, lo que indica que para los estudiantes, es más fácil estipular algunos puntos de referencia que le permitan iniciar su representación, en este sentido, podemos ver que la cuadrícula les otorga esta facilidad, ya que contando los cuadritos, pueden fácilmente dibujar figuras como triángulos, cuadrados o rectángulos, componentes tanto de prismas como de pirámides.

Por otra parte, los estudiantes evidencian en sus trabajos una apropiación de elementos matemáticos y geométricos más que a elementos relacionados con la estética, pues a pesar que se preocupan por entregar guías bien elaboradas, es evidente que el énfasis lo ejercen en que sus representaciones cumplan con las propiedades y características fundamentales de los cuerpos.

En el punto 2 los estudiantes deben observar el prisma y la pirámide desde diferentes posiciones y realizar una representación ortogonal o de vistas laterales de estos cuerpos teniendo en cuenta las partes que le verían. Esta tarea pedía que los estudiantes hicieran la representación de ambos cuerpos teniendo como referencia varios puntos de vista, desde arriba, desde abajo, desde un lado y desde el frente, en la cual no se tuvo en cuenta la variable posición inicial común, por esta razón en el análisis no se van a tener en cuenta las posiciones lateral y frente, pues ésta es subjetiva o depende de la posición en la que cada observador se halla ubicado o halla ubicado el cuerpo.

En las representaciones de la pirámide desde arriba, encontramos que el 50 % de los estudiantes realizaron una representación acertada desde este punto de vista, pues dibujaron la pirámide dejando ver el ápice y sus tres caras laterales. El porcentaje restante hace una representación inapropiada de ella desde este punto de vista, entre los cuales encontramos una representación que alude a lo nombrado anteriormente, pero concerniente a una pirámide cuadrangular, otro grupo hace una representación en perspectiva, dejando ver dos de las caras laterales y el otro hizo una representación aislada de las caras.

Se puede ver que un buen porcentaje de los estudiantes, tiene en cuenta elementos fundamentales del cuerpo que se le observan en esta posición como por ejemplo el ápice, al igual que sus caras laterales, las cuales tienen la característica de ser triángulos isósceles, donde para este caso, se ven un poco inclinados y así es como los estudiantes la dibujan, manifestando una conservación en la percepción de aquellos elementos que por la posición no se observan en su totalidad.

En las representaciones del prisma desde esta misma posición encontramos que todos los estudiantes hacen una representación de la base superior, lo cual es acertado. En otro contexto dicha representación podría aludir a una figura plana, pero dadas las condiciones de la tarea, se observa que es producto del reconocimiento de los componentes de un cuerpo tridimensional.

En las representaciones de la pirámide desde abajo, el 82% de los estudiantes hicieron representaciones acertadas, en la cual dibujan el polígono de la base, para lo cual hacemos el mismo análisis anterior. El porcentaje restante dibuja como base de la pirámide un cuadrado, permitiéndonos ver que no estaban pensando en una pirámide triangular, sino en una pirámide cuadrangular.

En cuanto al prisma, encontramos que la mayoría de los estudiantes hacen correctamente la vista de este cuerpo desde abajo, pues dibujan el polígono de la base, sin embargo, hay un grupo que dibuja un cuadrado refiriéndose a la base inferior, a pesar de haber dibujado en la vista de la cara superior un triángulo, lo cual genera un poco de ruido, en relación al cuerpo que ellos podrían estar aludiendo, ya que ninguno cumple con estas características.

En general se puede ver que los estudiantes al realizar la representación octogonal, tuvieron en cuenta los elementos observables desde el punto de vista indicado y por ende sus representaciones dejan ver las caras visibles de los cuerpos, sin dejar de lado que tienen una percepción de figura y contexto, mostrando habilidad para reconocer los componentes que conforman la globalidad del cuerpo, abstrayéndolos, para representarlos en situaciones específicas.

De igual forma, estas habilidades se ponen de manifiesto al realizar el punto 3 de la tarea, en el cual los estudiantes debían completar las representaciones de ciertos cuerpos en una retícula a partir de algunos componentes dados como vértices, caras o aristas y decir a qué sólido correspondía.

En particular, encontramos que tuvieron éxito al completar los cuerpos, elemento que puede ser atribuido a varios factores, uno de ellos relacionado con el modo de representación, o sea isométrico en el cual la retícula juega un papel importante y mediador entre el sujeto y lo que éste quiere representar, pues los estudiantes encuentran facilidad para plasmar las tres dimensiones de los cuerpos realizando un conteo de puntos, que a su vez le permiten ver la relación entre la longitud de las aristas correspondientes entre si y las dimensiones de las caras que lo conforman.

De igual manera, tanto las formas de las bases como la cantidad de aristas o vértices dados, permitieron que los estudiantes, conociendo propiedades de los cuerpos en actividades anteriores, llegaran directamente a la representación en la retícula.

Además es importante resaltar que dadas las condiciones de esta tarea, en la cual los estudiantes no tenían el objeto físico como tal, hubo una exigencia mental para realizar un procesamiento visual “este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, pero también es el proceso que permite la transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras”, en el cual, debían retomar características y componentes de los cuerpos, aunque estos no estuvieran presentes ni física ni virtualmente para hacer la representación correcta de cada uno.

De igual forma observamos que los nombres asignados en su gran mayoría corresponden con los cuerpos representados, lo cual muestra un avance en el reconocimiento de este tipo de sólidos, los cuales fueron objeto de estudio en tareas anteriores, dejando ver la conceptualización de los saberes generada a partir de la coherencia de las actividades llevadas a cabo.

En el punto 4 se pretendían recoger las percepciones de los estudiantes respecto a la invarianza de los componentes de los prismas y pirámides a pesar de las diferentes representaciones que se pudieran hacer de estos, donde se corrobora el desarrollo de la habilidades mencionadas anteriormente, en tanto que afirman: “al cambiar su posición no altera su forma ni sus bases y caras laterales”, “porque los vértices y las aristas siguen siendo los mismos y tampoco cambian sus caras y sus bases”. Podemos deducir que los estudiantes se apropian cada vez más de las habilidades de visualización e invarianza de los cuerpos a pesar de su posición o en este caso forma de representación.

El éxito en las distintas representaciones fue un punto al cual llegó haciendo una reflexión en torno a los componentes y propiedades de los cuerpos, en tanto que la visualización no es tomada simplemente como “ver”, ni representar como “dibujar”, son tomados en un sentido más amplio, donde se ponen en juego factores matemáticos y geométricos como la posición, forma, habilidades espaciales, imágenes mentales y visuales, al igual que procesos cognitivos producto de la interrelación de lo mencionado anteriormente.

- **Tarea 3 desarrollos de prismas y pirámides.**

Objetivos:

- Aproximar a los estudiantes a un análisis de las características de los cuerpos en dos y tres dimensiones.
- Reconocer desarrollos de prismas y pirámides
- Identificar diferencias y similitudes entre cuerpos armados y desarrollados.

I. Descripción de la tarea.

Se lleva una caja al salón de clase y se pide a los estudiantes que la describan oralmente teniendo en cuenta sus características, luego se les pide que imaginen que se desarma y se cuestiona acerca de las diferencias entre ambos procesos. Seguido de ello se entrega a los estudiantes una pirámide triangular, cuadrangular, un prisma triangular y cuadrangular elaborados en cartulina, para que los desarmen y puedan dar cuenta de las modificaciones presentes entre ambas representaciones, explicitando los componentes particulares a cada representación.

Seguido de ello, los estudiantes deben escoger entre un grupo de representaciones de cuerpos desarrollados, el corresponde con una pirámide cuadrangular y un prisma triangular, argumentando las razones por las cuales los otros desarrollos no corresponden.

Partiendo de los desarrollos dados en la guía de algunos cuerpos geométricos a los cuales les hace falta una componente, los estudiantes deben ubicar y determinar la cantidad de posibilidades, de acuerdo al cuerpo al que corresponde. De igual forma, se debe tener en cuenta características proporcionales de la componente faltante con las dadas.

Finalmente se dan algunos desarrollos de otros cuerpos geométricos y los estudiantes deben especificar a qué cuerpo corresponde.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

En esta tarea se espera que los estudiantes planteen diferencias entre las representaciones bidimensionales y tridimensionales, que reconozcan en los cuerpos geométricos los componentes que conforman una representación tridimensional y las transformaciones ocurridas entre ellos al pasar a una representación bidimensional, que tengan en cuenta propiedades de prismas y pirámides referidas a la forma y cantidad de caras laterales de acuerdo a sus bases, para identificar fácilmente los desarrollos concernientes a distintos cuerpos pertenecientes a estas familias. La gestión del maestro es orientar el trabajo de cada grupo, mediante un acompañamiento constante, en el que promueva el análisis a través de la manipulación de los objetos, de tal forma que los estudiantes identifiquen las similitudes y diferencias entre las representaciones bidimensionales (desarrollos) y tridimensionales de los cuerpos; también plantea una reflexión en relación a los componentes y designaciones geométricas particulares a cada una de ellas. De igual forma, la intervención del maestro enfatiza en generar reflexiones que conlleven a reconocer las distintas posibilidades para la ubicación de componentes faltantes de los cuerpos desarrollados.

III. Materiales.

Representaciones en cartulina de sólidos geométricos.

IV. Resultados.

Esta tarea tuvo una duración de 90 minutos, con una asistencia de treinta y dos estudiantes, los cuales fueron distribuidos en seis grupos.

1. Desarmen la pirámide triangular, la pirámide cuadrangular, el prisma triangular y el prisma cuadrangular para observar sus desarrollos y contesten:
 - a. ¿Qué diferencias encuentran entre las pirámides armadas y desarmadas?
 - b. ¿Qué componentes no varían en las pirámides al estar armadas o desarmadas?
 - c. ¿Qué diferencias encuentran entre los prismas armados y desarmados?
 - d. ¿Qué componentes no varían de los prismas al estar armados o desarmados?

Las siguientes tablas recopilan las respuestas textuales de los estudiantes para los ítems a y b, c y d, en la cual plantean las diferencias encontradas entre pirámides armadas y desarmadas, prismas armados y desarmados, así como sus componentes invariantes.

Tabla 57 Diferencias y elementos invariantes en pirámides armadas y desarmadas.

Grupo	Diferencias entre pirámides armadas y desarmadas	Componentes que no varían entre las pirámides armadas y desarmadas.
1.	Que pierden sus vértices, aristas y ya no son tridimensionales y pierden su ápice.	No varían los ángulos ni tampoco sus caras.
2.	Que una es tridimensional y otra es bidimensional.	En las desarmadas no hay aristas sino que son lados y en las armadas si hay todas.
3.	Que las armadas tienen altura, largo y ancho, o sea que son tridimensionales y las desarmadas tienen ancho y largo, son planas y bidimensionales.	Sus caras laterales y bases.
4.	Que cuando están armadas se ven en segunda dimensión y desarmadas en primera dimensión.	No varía nada.
5.	Que las pirámides armadas tienen tres dimensiones, las desarmadas solo tienen dos y un ápice.	La base.
6.	Que las pirámides desarmadas son bidimensionales y las pirámides armadas son tridimensionales y sus figuras son triángulos.	Su cara y sus figuras.

Tabla 58 Diferencias y elementos invariantes entre prismas armados y desarmados.

Grupo	Diferencias entre prismas armados y desarmados	Componentes que no varían entre los prismas armados y desarmados.
1.	Que pierden sus vértices aristas y porque ya no son tridimensionales.	No varían los ángulos ni caras.
2.	Que es tridimensional y la otra bidimensional porque tiene largo, ancho y altura en tridimensional y la bidimensional tiene largo y ancho.	Que cuando esta armado tiene aristas y cuando esta desarmado tiene lados.
3.	Que los armados no son planos y los desarmados son planos, o sea que son tridimensionales y bidimensionales.	Que no cambian sus caras laterales y bases.
4.	Que los armados tenían base, ángulos vértices, aristas, caras laterales y los desarmados no más tienen base y lados.	Que no le varían siendo tridimensional y bidimensional la altura.
5.	Que armados tienen aristas y desarmados no tienen.	No varía la figura.
6.	Que los armados son tridimensionales y los desarmados son bidimensionales	Las figuras de las caras laterales y las o la base.

e. Marca con una x los componentes que conforman cada representación:
Representación del cuerpo armado (TRIDIMENSIONAL)

- Caras
- Lados
- Aristas
- Tiene altura
- Es plano
- Tiene vértices
- Es sólido
- tiene puntas

Representación del cuerpo desarmado (BIDIMENSIONAL)

- Es plano
- Tiene vértices
- Está formado por polígonos
- Tiene altura

- Tiene aristas - lados
- Caras

Respuestas de la Representación del cuerpo armado (TRIDIMENSIONAL),

El número entre paréntesis corresponde a la cantidad de grupos que marcaron con x cada componente

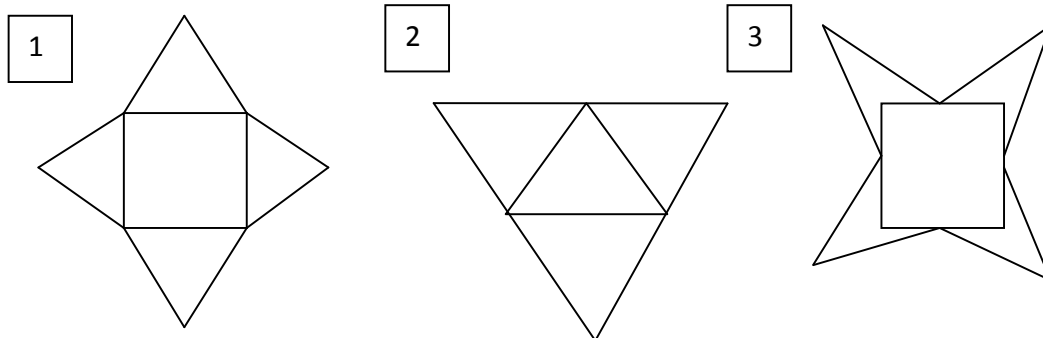
- Caras (6)
- Lados (0)
- Aristas (6)
- Tiene altura (6)
- Es plano (0)
- Tiene vértices (6)
- Es sólido (3)
- tiene puntas (2)

Respuestas de la Representación del cuerpo desarmado
(BIDIMENSIONAL)

- Es plano (6)
- Está formado por polígonos (4)
- Tiene aristas (0)
- Caras (1)
- Tiene vértices (2)
- Tiene altura (0)
- lados (6)

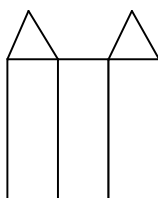
2. De acuerdo a la actividad anterior, ENCIERREN en cada caso la representación que corresponda al cuerpo desarrollado ahí nombrado.

PIRÁMIDE CUADRANGULAR

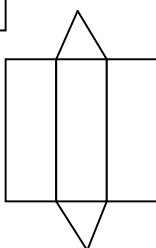


PRISMA TRIANGULAR

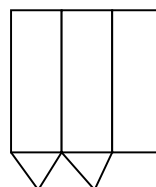
1



2



3



Explica porqué las otras representaciones no corresponden al prisma triangular.

En las tablas presentadas a continuación se encuentran las respuestas de los estudiantes de las representaciones escogidas que corresponden o no corresponden a la pirámide cuadrangular y el prisma triangular, así como sus argumentos.

Tabla 59 Representación que corresponde y no corresponde a la pirámide cuadrangular.

Grupo	Representación escogida	Cuáles no y porqué
1.	1	2. porque su base es triangular 3. porque sus caras están ubicadas en las esquinas.
2.	1	2. porque la base es triangular 3. porque sus caras están atravesadas en las puntas de la base
3.	1	2. porque la base es triangular y no cuadrada 3. porque sus caras están en la punta de cada lado de la base
4.	1	2. porque tiene base triangular 3. porque tiene la base salida
5.	1	2. porque al desarmarla su base es triangular 3. porque la forma de los lados no es igual
6.	1	2. le falta una cara lateral y su base es triangular 3. no es ni siquiera una pirámide

Tabla 60 Representación que corresponde y no corresponde al prisma triangular.

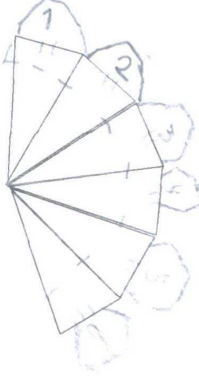
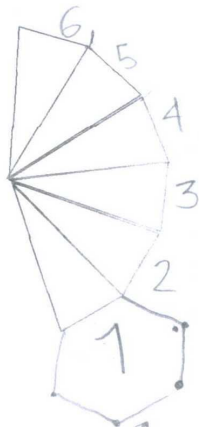
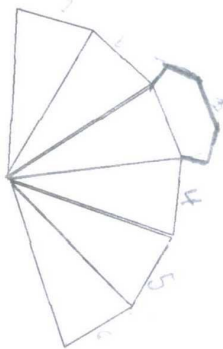
Grupo	Representación escogida	Cuáles no y porqué
1.	2	1 porque sus dos bases están mal ubicadas 3 porque sus bases están mal ubicadas
2.	2	1 porque no tiene las dos bases triangulares 3 porque no se puede armar
3.	2	1 porque al tener sus bases seguidas al armarla una queda hueca 3 porque al armarla las dos bases quedan juntas
4.	2	1 porque tiene dos bases juntas 3 porque tiene dos bases juntas
5.	2	1 porque los triángulos están arriba 3 porque dos de sus lados están por debajo
6.	2	1 porque necesita tener las bases 3 porque si se arma queda un lado hueco.

3. Para construir algunos prismas y pirámides tenemos los siguientes desarrollos pero en cada uno hace falta alguna de las componentes:

a. Al frente de cada desarrollo dibuja las distintas posibilidades donde se puede ubicar la cara o base faltante.

En las siguientes tablas (61 a 68), se encuentran las diferentes partes donde los estudiantes ubicaron la cara o base faltante para los desarrollos de los cuerpos dados.

Tabla 61 Ubicación de la base faltante en el prisma hexagonal.

Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Base
2.		Hay 6 posibilidades y falta la base
3.		La base

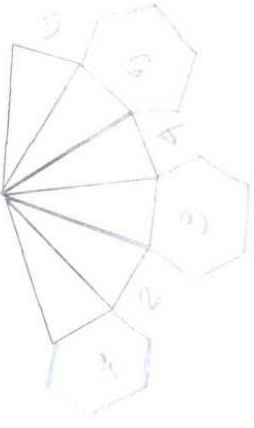
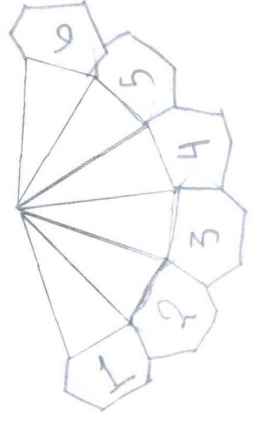
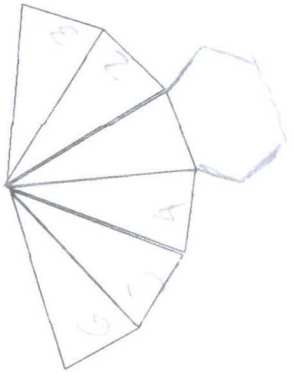
Grupo	Representación	Polígono faltante
4.		Le falta la base de la pirámide
5.		Le hacía falta la base
6.		Base

Tabla 62 Ubicación de la base faltante en el prisma triangular.

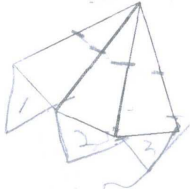
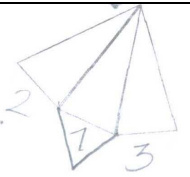
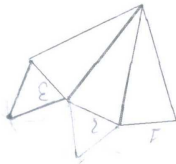
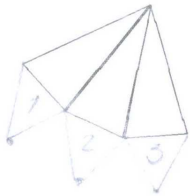
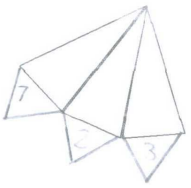
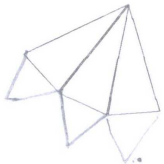
Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Base
2.		Le falta la base y tiene tres posibilidades
3.		Base
4.		Le falta la base
5.		Le hacía falta la base
6.		Base

Tabla 63 Ubicación de la cara o base faltante en el prisma triangular.

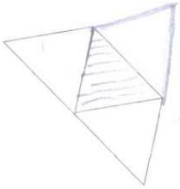
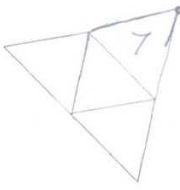
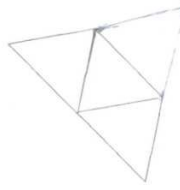
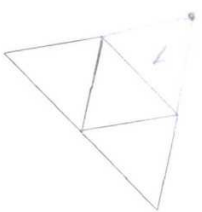
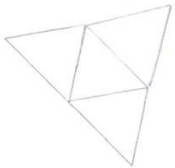
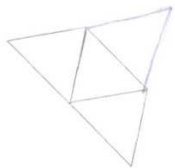
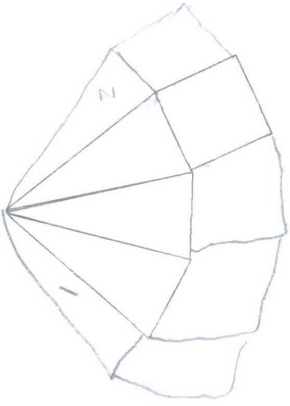
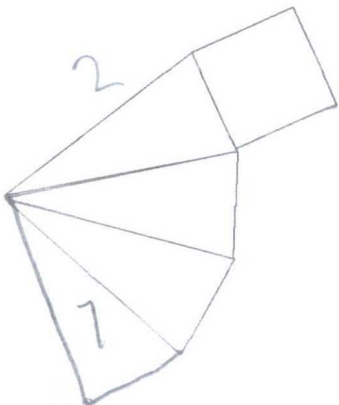
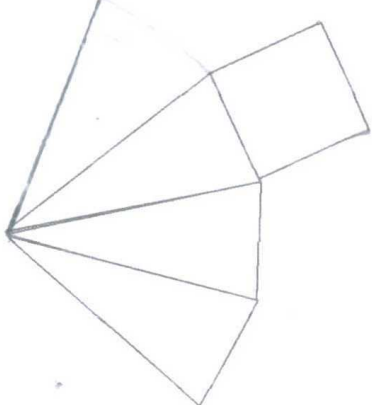
Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Una cara lateral
2.		Una cara tiene una posibilidad
3.		Una cara
4.		Le falta la cara
5.		Le hacía falta una cara
6.		Cara lateral

Tabla 64 Ubicación de la cara faltante en la pirámide pentagonal.

Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Una cara
2.		La cara y tiene dos posibilidades
3.		La cara y dos posibilidades

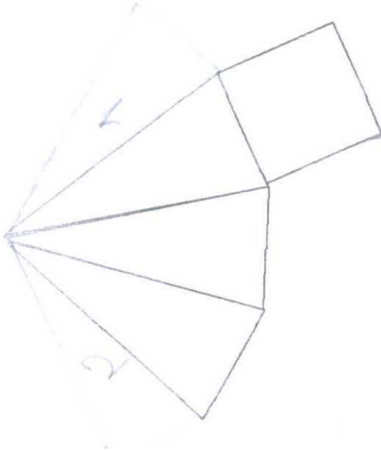
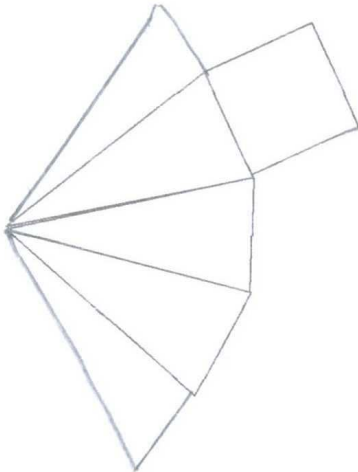
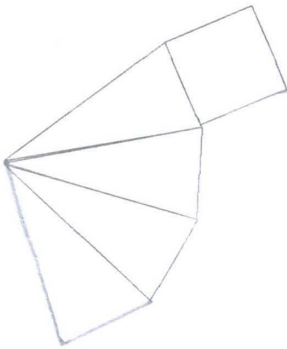
Grupo	Representación	Polígono faltante
4.		Le falta la cara
5.		Le hacía falta una cara
6.		La cara lateral

Tabla 65 Ubicación de la cara o base faltante en el cubo.

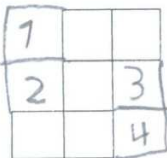
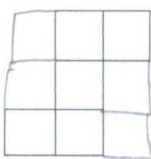
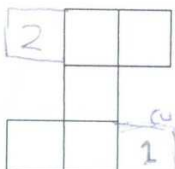
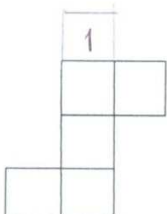
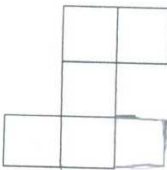
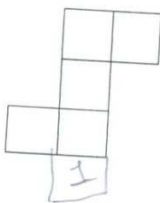
Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Una cara
2.		Una cara
3.		Una cara
4.		Una cara
5.		Una cara
6.		Una cara

Tabla 66 Ubicación de la base faltante en el prisma triangular.

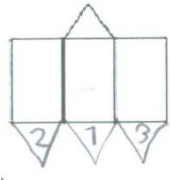
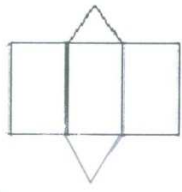
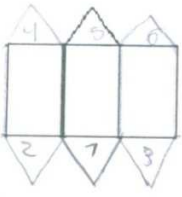
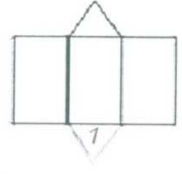
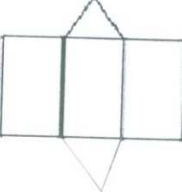
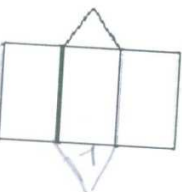
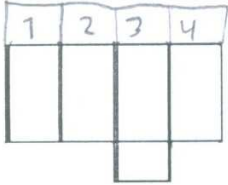
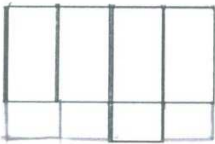
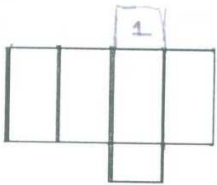
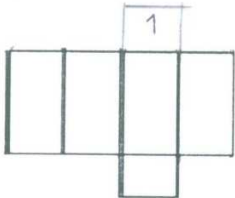
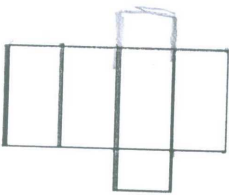
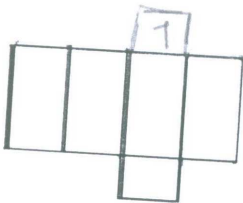
Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Una base
2.		Una base
3.		Una base
4.		Una base
5.		Una base
6.		Una base

Tabla 67 Ubicación de la cara faltante en el prisma triangular.

Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Una cara lateral
2.		Una cara lateral
3.		Una cara
4.		Una cara
5.		Una cara
6.		Una cara

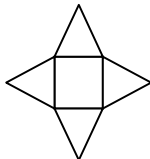
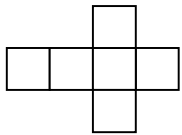
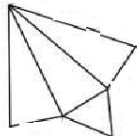
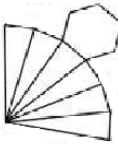
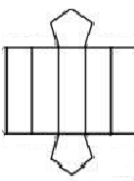
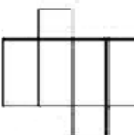
Tabla 68 Ubicación de la base faltante en el prisma cuadrangular.

Grupo	Representación	Polígono faltante
1.		Una base
2.		Una base
3.		Una base
4.		Una base
5.		Una base
6.		Una base

4. Al armar las redes de las figuras ¿Qué cuerpos se forman?

La siguiente tabla muestra las respuestas que dieron los estudiantes al preguntarles qué cuerpo se forma al armar las redes de figuras.

Tabla 69 Cuerpos que se forman al armar las redes de figuras.

Cuerpo	Nombre asignado	Cantidad de grupos
	Pirámide cuadrangular	5
	Pirámide cuadrangular	1
	Cubo	5
	Prisma cuadrangular	1
	Pirámide triangular	6
	Pirámide hexagonal	6
	Prisma hexagonal	1
	Prisma pentagonal	5
	Prisma cuadrangular	1
	Prisma cuadrangular	5

V. Análisis de resultados.

La tarea trata el paso de las representaciones tridimensionales a las bidimensionales, en la cual los estudiantes a través de las actividades propuestas puedan llegar a reconocer que dadas las modificaciones que sufren estos cuerpos, se generan algunas diferencias conceptuales en sus componentes, también a dar cuenta de las diferencias entre las características geométricas de un objeto tridimensional y uno bidimensional reconociendo elementos fundamentales como sus dimensiones: ancho, largo, profundidad o altura.

De igual forma, profundiza en las representaciones planas de los cuerpos tridimensionales, enfatizando en la posición y ubicación apropiada de cada una de sus caras o bases pertinentes así como las distintas posibilidades que hay para cada uno.

Los estudiantes iniciaron la actividad manipulando sólidos opacos (representaciones en cartulina de la pirámide triangular y cuadrangular, el prisma triangular y cuadrangular), los cuales desarmarían teniendo la posibilidad de observar y dar cuenta de las transformaciones que iban transcurriendo en dicho proceso.

Luego de hacer esta exploración y manipulación de los cuerpos físicos, los estudiantes debían explicitar las diferencias que había entre estos cuerpos armados y desarmados, encontrando en el caso de la pirámide, que un bajo porcentaje de estudiantes hacen referencia a los cambios que sufren los componentes en términos de las aristas y los vértices; particularmente afirman que en la representación bidimensional de las pirámides, no existe el ápice, identificando claramente que al desligar las caras, no hay un vértice común en el desarrollo. Encontramos afirmaciones como “pierden su ápice”. Por el contrario la mayoría de estudiantes afirmó que armada era tridimensional y desarmada era bidimensional, reflejando que centran la atención en la globalidad más que en sus características.

En el caso del prisma, existe un porcentaje equilibrado entre los que hacen referencia a sus componentes y a la globalidad, nombrando las dimensiones, siendo en el primer caso un poco más descriptivos en cuanto a las caras, aristas o vértices que compone cada representación y las modificaciones existentes. “que los armados tenían base, ángulos, vértices, aristas, caras laterales y los desarmados no más tienen base y lados”, reflejando un análisis detallado

realizado por ellos, en el cual en las representaciones desarrolladas hay una tendencia a ver los polígonos presentes y aludir a términos de la geometría plana como por ejemplo, nombrar la palabra lados (refiriéndose a aquellos que conforman los polígonos).

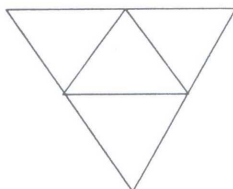
Es evidente que los estudiantes en sus descripciones escritas logran plantear una diferenciación entre la definición de arista y lados, pues retoman elementos discutidos en tareas anteriores, donde se habían definido estos conceptos a través de intervenciones hechas por ellos mismos, como por ejemplo en la tarea 3 de la situación 1 “describiendo partes de los cuerpos geométricos”, en la cual definieron arista como un segmento de recta formado al unir dos caras, lo cual al pasar al plano, cambia, y por tanto se convierte en los lados que conforman las figuras planas.

Se puede afirmar que esta parte de la tarea permitió que los niños vieran claramente que algunos componentes permanecían constantes y otros se modificaban, de igual forma ayudó a tener claridad entre el significado de lo bidimensional y lo tridimensional, donde en lo bidimensional se hace referencia a elementos tales como el largo y el ancho, mientras en el tridimensional, se alude además a la altura y a su vez a la profundidad, volumen de un cuerpo.

Luego de ello, los estudiantes pudieran observar algunos desarrollos de los cuerpos y pusieran en juego factores de visualización, pasan al segundo punto de la tarea en la cual sin ver físicamente los objetos ni manipularlos, debían escoger entre tres posibilidades el desarrollo que consideraran adecuado para la pirámide cuadrangular y el prisma triangular.

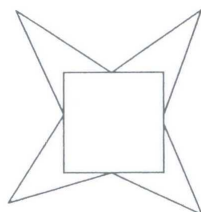
Entre los desarrollos de la pirámide cuadrangular encontramos que el 100% de los estudiantes escoge correctamente la representación plana concerniente al cuerpo, de igual forma argumentan las razones por las cuales las otras dos opciones dadas no corresponden con el desarrollo de la pirámide pedida. En particular encontramos:

Para la opción 2



Los estudiantes hacen argumentos en términos de la forma de la base, ya que afirman que no corresponde con una pirámide cuadrangular pues su base es triangular, “su base es triangular”, “porque al desarmarla su base es triangular”.

Para la opción 3:



Todos los estudiantes hacen referencia a la ubicación de las caras laterales en tanto que afirman que están mal ubicadas o se encuentran en las esquinas: “porque las caras están ubicadas en las esquinas”, “porque tiene la base salida”, “no es ni siquiera una pirámide”.

Podemos ver que los estudiantes retoman conceptos abordados en las actividades anteriores referentes a esta clase de cuerpos, pues identifican a partir del título proporcionado para este desarrollo, (el cual delimitaba su escogencia) la representación correspondiente. En este sentido se evidencia que los estudiantes traen a colación propiedades conceptualizadas de pirámides respecto a la relación entre la forma de la base y la cantidad de caras laterales, así como del nombre adquirido de acuerdo a la forma de la base, pues aunque entre las representaciones había una que correspondía al desarrollo de una pirámide triangular, no acudieron a ella guiados por el término cuadrangular, donde identificaban que hacía referencia a la forma de la base la cual era cuadrada y no triangular.

De igual forma, reconocen que en dichos desarrollos los polígonos no son aislados, por el contrario van relacionados unos con otros, conformando una “plantilla” en la cual tanto la ubicación como la orientación de la base o caras laterales es indispensable para que se pueda armar, pues al afirmar para el caso del desarrollo 3: “sus caras están ubicadas en las esquinas”, se refleja lo mencionado anteriormente.

Dichos elementos se hacen aún más evidentes en el momento que deben escoger el desarrollo del prisma triangular, donde el 100% de los estudiantes acierta, afirmando (para las opciones incorrectas) que no corresponden, por la mala ubicación de sus bases, en tanto que ambas se encuentran en el mismo lado, lo cual sería imposible para su construcción tridimensional. “porque si se arma queda

a un lado hueco”, “porque no se puede armar”, “porque al armarla, las dos bases quedan juntas”.

Podemos ver que los estudiantes reconocen características fundamentales de los prismas en relación a la cantidad y ubicación de sus bases. En este sentido, identifican que el prisma está conformado por dos bases triangulares que al armar el cuerpo deben ser paralelas, poniéndose de manifiesto en el momento donde afirman: “porque tiene dos bases juntas”

Por otro lado, demuestran entre sus análisis la habilidad de “conservación de la percepción”, en tanto que pueden establecer que el prisma conserva determinadas propiedades se encuentre armado o desarrollado y por ende aluden a la transformación mental de pasar de este cuerpo como es visto (desarrollado) a su respectiva construcción, en tanto que afirman que los cuerpos 1 y 3 no podrían ser armados, haciéndose evidente en expresiones tales como: “ porque si se arma queda un lado hueco” o “porque no se puede armar”.

En el punto 3, se daban varias representaciones de prismas y pirámides a las cuales les faltaba una de sus componentes, los estudiantes debían dibujarla y establecer la cantidad de posibilidades para su ubicación.

En ella encontramos que en su totalidad, los estudiantes coinciden con el componente faltante (cara o base) y que en sus dibujos aluden correctamente a su forma, evidenciando que ponen en juego los conocimientos adquiridos en tareas anteriores respecto a las características propias de cada tipo de cuerpo y aluden a ellos de manera implícita en cada una de sus representaciones, pues, reconocen que dichos desarrollos corresponden a este tipo de cuerpos, por la forma de sus caras laterales (triangulares para las pirámides y paralelogramos para los prismas). Igualmente, identifican la forma de la componente faltante, respecto a los componentes dados y especialmente a la cantidad de caras laterales (para aquellos desarrollos a los que les hace falta la base) y viceversa.

En este sentido podemos establecer que los estudiantes tienen la habilidad de “memoria visual” y “conservación de la percepción”, en tanto que al haber interactuado con estos cuerpo armados en tareas anteriores y tener la posibilidad de desarrollarlos, demuestran un reconocimiento en que los conceptos pueden ser empleados para ambos tipos de procesos y que han sido interiorizados de tal manera que logran establecer entre ellos semejanzas y diferencias, que les

permite hablar con propiedad de cada uno de sus componentes aún cuando no están presentes.

En cuanto a la cantidad de posibilidades para la ubicación de las componentes faltantes, se puede establecer que los estudiantes reconocen que el desarrollo de un cuerpo geométrico puede darse de diferentes maneras y por tanto no hay una única posibilidad para la realización de una plantilla, en este sentido, identificamos que los estudiantes logran establecer varias ubicaciones para las componentes faltantes, todas ellas en lugares correspondientes, mostrando habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de las relaciones espaciales, donde relacionan la posición de cada una de las componentes en el desarrollo y en su respectiva imagen mental de la construcción respectiva.

Para finalizar, los estudiantes debían especificar a qué cuerpos correspondían distintos desarrollos dados tanto de prismas (entre los cuales se encontraba el cubo, el prisma cuadrangular y pentagonal) como de pirámides (triangular, cuadrangular y hexagonal).

Encontramos que la totalidad de estudiantes reconoce a qué cuerpos correspondían dichos desarrollos evidenciando que no era necesario “ver” desarmados todos los cuerpos, sino que a través del análisis de particularidades en algunos desarrollos, tuvieron la capacidad para imaginar y desarrollar mentalmente otros, en los cuales tienen en cuenta características y propiedades ya establecidas, planteando una relación entre la forma y cantidad de caras laterales con la forma de la base, pues si tiene caras laterales rectangulares concierne a prismas y su nombre depende de la forma de la base, de igual modo si tiene caras laterales triangulares concierne a las pirámides y su nombre también depende de la base. En este sentido se evidencia que han adquirido habilidades de visualización para reconocer representaciones plano a plano de distintos cuerpos.

Además demuestran una apropiación en la designación geométrica de estos cuerpos llamándolos por el nombre adecuado.

- **Tarea 4: construcción de la pirámide cuadrangular con regla y compás.**

Objetivos:

- Familiarizar a los estudiantes con una construcción de la pirámide cuadrangular utilizando regla y compás.
- Reconocer propiedades de las pirámides relacionadas con los polígonos que conforman sus caras laterales y la base.

I. Descripción de la tarea.

Se inicia la tarea, entregando a los estudiantes materiales tales como cartulina, el compás y la regla, una guía en la cual están descritos 11 pasos para la construcción de la pirámide cuadrangular, la cual el maestro y los estudiantes deben ir leyendo paso a paso, al tiempo que se genera una discusión en torno al significado de los enunciados (a partir de las concepciones e interpretaciones que los estudiantes hagan de ellos).

Conjuntamente se realizan los pasos descritos, los estudiantes hacen su construcción en la cartulina y la maestra en el tablero, ayudando a aquellos que tengan dudas sobre los pasos que deben seguir o necesiten una orientación adicional. De igual forma, en el transcurso de la construcción, se cuestionan algunos pasos concernientes a los polígonos que se van formando, sus características y el trazo del punto medio.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

Se espera que los estudiantes comprendan los enunciados matemáticos encontrados en la guía, donde se describe una secuencia de pasos para la construcción de la pirámide cuadrangular, poniendo en juego algunos conceptos aprendidos previamente o discutiendo en torno a ello, generando espacios de retroalimentación para reflexionar sobre los significados de los términos utilizados, que conlleven a realizar el paso con facilidad.

El maestro es indispensable en este proceso, ya que debe hacer preguntas pertinentes que conduzcan a los estudiantes a reflexionar sobre los pasos que están realizando en función de llegar a una construcción que permita armar el cuerpo deseado, e ir conceptualizando algunas propiedades fundamentales

relacionadas con la congruencia de las caras laterales de la pirámide cuadrangular.

III. Materiales.

Para esta actividad, se utiliza cartulina, regla, compás, tijeras y cinta.

IV. Resultados.

Esta tarea se hizo en una sesión de 120 minutos en la cual participaron treinta estudiantes. Se le entregó una guía a cada uno, en la cual estaban descritos una secuencia de pasos para una construcción de la pirámide cuadrangular con regla y compás, la cual ellos debían seguir. Dadas las características de los enunciados, el cual empleaba términos especializados para designar objetos matemáticos, la construcción se realizó paso a paso, donde se leía el enunciado, se ponía en discusión su interpretación y luego se efectuaba. Por tal motivo, los resultados de la tarea se harán de acuerdo a lo que sucedió en el transcurso de su ejecución, en relación a las intervenciones de los estudiantes y de acuerdo a las construcciones finales realizadas por los estudiantes.

Para el primer paso descrito en la guía:

1. Traza un segmento AB de cualquier medida, ahora utilizando este segmento como radio, haga un círculo trazando una circunferencia.

Se cuestiona a los estudiantes sobre cómo dibujar el segmento AB, algunos afirman que se realiza demarcando y uniendo dos puntos.

En relación a la utilidad de este segmento como radio para trazar la circunferencia, un estudiante señala con sus manos que debemos poner la punta del compás en un extremo del segmento y la otra punta (donde está el lápiz) en el otro extremo, para hacer la circunferencia dibujándola en el aire. Luego cada uno lo efectúa en su cartulina para, se les pide que ubiquen la circunferencia más o menos centrada (en la cartulina) para toda la construcción, al tiempo que se realizan dichos pasos en el tablero.

En el segundo paso:

2. Prolonga el segmento AB hasta cortar la circunferencia en un nuevo punto el cual llamaremos C para obtener el diámetro de la circunferencia. (segmento que pasa por el centro cortando la circunferencia en dos puntos).

Se lee el enunciado y se pregunta a los estudiantes qué comprenden por prolongar el segmento AB donde uno de ellos afirma que debemos alargarlo, al efectuarlo se dan cuenta que corta la circunferencia en un punto el cual según la instrucción debían llamar C, así se puso en discusión que el segmento CB sería el diámetro de la circunferencia, el cual cumplía con la característica de pasar por el centro de la circunferencia “A” además de cortar la circunferencia en dos puntos, lo cual estaba especificado en la guía, algunos estudiantes agregaron, que por medio del diámetro la circunferencia era dividida por la mitad o en dos partes iguales.

Para el tercer paso:

3. Con centro en C y cualquier apertura del compás mayor a AB trazar arcos a cada lado de la circunferencia.

Se pregunta a los estudiantes lo que entienden por “cualquier apertura del compás mayor a AB”, a la vez, que se señala este segmento con el instrumento que hacía la misma función de compás (marcador amarrado a una cuerda) en el tablero, algunos estudiantes se quedan pensativos y otros muestran que debemos abrir el compás un poco más que la distancia entre AB, entonces se pasa a abrir el compás como se ha dicho y hacer los arcos pedidos en el tablero, a ambos lados de la circunferencia, mostrando que se refería a hacer 2 arcos pequeños desde este punto a cada lado del segmento CB.

Igualmente pasamos a hacer el punto 4, especificando a los niños que la apertura del compás debe ser la misma con la que efectuaron el paso anterior.

4. Con centro en B y cualquier apertura del compás mayor a AB trazar arcos a cada lado de la circunferencia.

Luego los estudiantes hacen el punto 5 en el cual muestran que al cortarse los arcos se delimitan 2 puntos.

5. Donde se cortan los arcos traza los puntos y únelos para formar una recta
 - ¿qué observas?

Con respecto a la pregunta anterior, encontramos que el **30%** de los estudiantes contesta que la recta pasa por el punto A, el **13,3%** afirman que la circunferencia se ha dividido por la mitad o “se corta el círculo en cuatro partes iguales” y el **10%** contesta que el segmento AB “se parte a la mitad”, el resto de la población no contesta. Entonces se interviene mostrando que dadas las particularidades de la

construcción de la recta, esta divide el segmento en dos partes iguales, de tal modo que pasa por su punto medio, en ese caso A, de esta manera, los estudiantes prosiguen a realizar el punto 6 y 7.

6. Los puntos de intersección de la recta con la circunferencia los llamaremos D y E

7. Une los puntos CD, DB, BE y EC.

- ¿qué polígono obtienes?

Al preguntarles qué polígono observaban se obtuvo los siguientes resultados:

El **30 %** de los estudiantes afirma que se obtiene un cuadrado, el **16,6%** un rombo, el **16.6%** cuadrado, triángulos (algunos especifican la cantidad) y rombo, el **10%** afirman que se observa un cuadrado y triángulos, el **3.3%** triángulos y el porcentaje restante no contesta. Entonces, se pide que salgan al frente y en la construcción realizada en el tablero muestren dichos polígonos. Algunos estudiantes salen y los señalan. Ahí se especifica que el cuadrado es un tipo de rombo, el cual cumple con la condición de que todos sus lados tienen la misma longitud y así se observen otras figuras, vamos a centrar la atención en éste polígono, algunos estudiantes intervienen diciendo que “ese” iba a ser la base de la pirámide.

Dada esta intervención, pasamos al punto 8. Los estudiantes lo realizan como se había trazado DE, el cual pasaba por el punto medio del segmento CB, de igual forma se va construyendo en el tablero.

8. Halle el punto medio de cada lado del cuadrado, cuando los tengas, traza una recta que corte los lados CD y EB y otra recta que corte los lados DB y CE.

Para el punto 9 se especifica a los estudiantes que la abertura del compás tomada debe ser la misma para cada lado de las dos rectas.

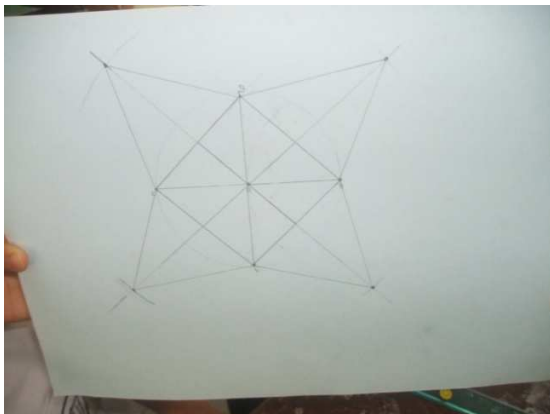
9. Con una abertura del compás mayor que el radio (AB) y parados en el centro de la circunferencia (A) corta ambas rectas en dos puntos.

En este punto los estudiantes se dan cuenta el por qué de la especificación anterior, pues algunos afirman que era necesario para que los triángulos de las caras laterales fueran iguales.

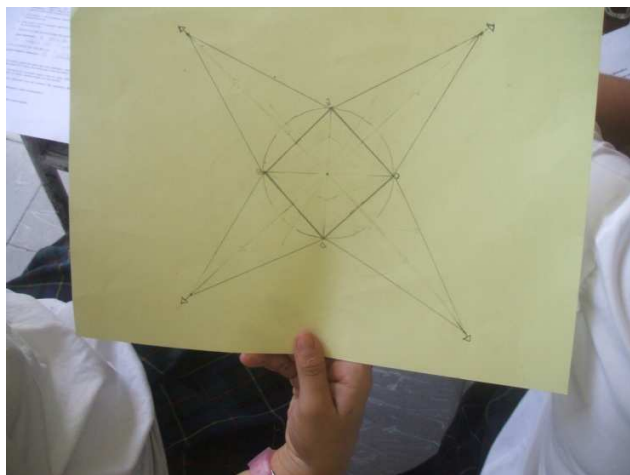
10. Une cada punto obtenido con los vértices del cuadrado (BCDE) para formar triángulos isósceles.

- **Compara cada triangulo. ¿qué concluyes?**

En las respuestas a esta pregunta, encontramos que la mayoría de los estudiantes concluyen que estos triángulos son congruentes, utilizando expresiones como “son



iguales”, “tienen la misma medida”, “son congruentes”. Entre algunas construcciones (del cuerpo desarrollado) realizadas por los estudiantes encontramos:



Finalmente todos los estudiantes prosiguen a cortar y armar la pirámide para lo cual obtenemos construcciones tales como las mostradas a continuación.



Los estudiantes al armar sus cuerpos y observar el de sus compañeros, se dan cuenta que hay distintas representaciones de este mismo cuerpo a pesar de haber seguido los mismos pasos en la construcción, pues surgieron expresiones como: “la mía es muy bajita”, “la mía casi no tiene altura”, “la mía es alta”, “casi no la puedo armar”, “es gordita”, “casi que no se le puede formar el ápice”, refiriéndose a algunas pirámides (unas con más altura que otras) que por las características de su construcción quedaron de esta manera, delimitadas por la altura de los triángulos isósceles. Sin embargo, dieron cuenta que dadas estas particularidades, todas las construcciones correspondían a la pirámide cuadrangular.

V. Análisis de resultados.

Esta tarea, permite hacer el paso de una representación bidimensional a una representación tridimensional de la pirámide cuadrangular, a partir de una construcción en regla y compás, para ella, se describe una secuencia de once pasos que deben seguir los estudiantes para llegar a la construcción, de igual forma, dado la especificidad del lenguaje que tiene este proceso, se requiere del acompañamiento del maestro y de la reflexión en cada uno de los pasos a seguir, que permitan hacer una comprensión de lo que se está realizando para llegar a lo pedido.

En la Educación Matemática, específicamente geométrica, que se hace en las escuelas de educación básica primaria, generalmente los estudiantes no tienen ningún tipo de acercamiento a construcciones con estas características, en la

mayoría de las veces, éstos son procesos que se inician en un nivel mayor de la educación como la educación media o en algunos casos son experiencias de tipo universitario. Habitualmente tanto los maestros como los libros de texto, proporcionan moldes, los cuales simplemente deben ser calcados por los estudiantes, para recortar y armar sin tener implícita una reflexión en torno a las partes que lo componen.

En este sentido, la tarea, por ser poco usual en las prácticas educativas, generó en los estudiantes interés, expectativa en cada uno de los pasos a realizar y conjuntamente en el producto final que obtendría cada uno.

En este proceso, se debía tener en cuenta que los pasos de construcción planteados para la tarea, estaban diseñados a partir del uso de un lenguaje matemático, con el cual se pretendía que los estudiantes lograran adquirir ciertas habilidades de comprensión e interpretación de los términos empleados y por ende, su construcción reflejara una apropiación de dichos conceptos.

Teniendo presente que este tipo de enunciados son poco usuales en clases de geometría, el acompañamiento por parte del orientador era fundamental, no solo en la lectura de cada uno de estos enunciados, sino en la generación de un espacio de interacción en el que se posibilita la expresión de los conocimientos previos y de las interpretaciones que se hacían de estos para llegar a comprender lo que se pedía y por tanto realizar en cada punto de la construcción lo que la orientación determinaba.

De igual forma, los pasos estaban organizados secuencialmente de tal manera que era necesario comprender y efectuar un paso para poder pasar al siguiente. En este sentido, en medio de la construcción surgieron intervenciones generadas por el maestro en relación a elementos geométricos que no habían sido abordados en el desarrollo de las tareas anteriores tales como segmento, radio, circunferencia, prolongar, arcos, punto medio entre otros. En ello algunos estudiantes demostraban tener algunas ideas al respecto e intervenían aportando al grupo sus conocimientos previos, de tal forma que eran tenidos en cuenta por sus pares para efectuar cada paso.

Este proceso de acompañamiento en el desarrollo de cada uno de los puntos, permitió identificar en los estudiantes tanto la familiarización con un lenguaje matemático, como la conceptualización que se tiene de algunos elementos de la geometría, lo cual no produjo grandes dificultades en la comprensión de los enunciados, sin embargo para aquellos en que no se tenía completa claridad, la intervención y orientación del maestro, acompañada de la realización de cada

paso en el tablero, permitió una correcta comprensión y por ende una adecuada construcción de cada uno de los pasos efectuados por los estudiantes.

Uno de los factores importantes en la realización de la construcción está mediado por el uso y manejo de artefactos, en el caso de esta tarea, la regla y el compas, los cuales permitían realizar diversas proyecciones de longitudes sin hacer uso del sistema métrico decimal como eje fundamental en la comparación y construcción de las componentes tales como caras o lados.

En particular, los estudiantes tuvieron la experiencia de tomar medidas a partir del uso del compas, dejando a un lado la costumbre de medir utilizando la regla, en este proceso, se dieron cuenta de la necesidad en la precisión de las medidas que debían tomar, fijando el compás en un punto y conservando esta apertura para realizar otros trazos, como por ejemplo en el caso de la construcción de los triángulos de las caras laterales de la pirámide o en la construcción del polígono de la base, por otra parte, permitió que se dieran cuenta en la importancia de la precisión de sus trazos, proceso que se hizo aún más evidente en el momento de hacer los dobleces para armar la pirámide, pues algunos estudiantes tuvieron dificultades en armarla porque los triángulos no coincidían en un punto, impidiendo juntar sus caras laterales. De ahí que podían analizar respecto a propiedades fundamentales de este cuerpo, como por ejemplo el ápice, pues al juntar las caras laterales y la coincidencia que debían tener en un mismo punto dejaba ver claramente la conformación de éste vértice y de una u otra manera conceptualizar un poco más sobre él, ya que además de haber sido objeto de discusión en tareas anteriores, lo estaban vivenciando.

De igual forma, el uso de los instrumentos en la construcción, conjugado con lo que los estudiantes iban observando en la ejecución de cada paso, permitió corroborar propiedades de los componentes, tales como la congruencia en las caras laterales de la pirámide, pues pudieron dar cuenta de la igualdad entre los triángulos que habían construido, así como de la cantidad de caras laterales que la iban a conformar, pues sabían que en cada lado del polígono de la base, estaría ubicado uno de los triángulos que conformarían las caras.

También en el reconocimiento de las partes que iban a conformar la construcción, pues en el paso en el cual se construyó el cuadrado, todos coincidieron en afirmar que este polígono conformaría la base de la pirámide. Lo anterior, permite ver la habilidad para reconocer las características visuales y de posición de un cuerpo así como sus componentes, aún en ausencia de este, pues los estudiantes a

pesar de no estarlo viendo, traen a colación una memoria visual que les permite ver con claridad el cuerpo que se quiere armar.

Del mismo modo, ponen de manifiesto, la habilidad de percepción de figura y contexto, en la cual se reconoce la figura, dejando de lado otros elementos que podían causar ruido visual, pues al finalizar la construcción con regla y compás quedan impresos en la cartulina ciertas líneas, segmentos, arcos, o figuras que fueron necesarios para llegar a la representación (construcciones auxiliares), pero no eran fundamentales para armar el cuerpo como tal y los estudiantes obviaron estos elementos reconociendo los trazos adecuados por los cuales se debían hacer los cortes y dobleces, identificando claramente la representación plano a plano de la pirámide cuadrangular.

Otro factor importante en dicha representación es el tipo de material empleado, en tanto que proporciona a los estudiantes en su construcción final una de las representaciones de “sólidos opacos” propuestas de acuerdo a las clasificaciones de materiales planteadas en el documento de Gregoria Guillén, las cuales están determinadas por materiales tales como cartulina. Este tipo de representación, deja ver que este cuerpo aunque muestra todas sus componentes, no es sólido, lo que permite reconocer que puede ser desarmado para tener una representación plana de un objeto tridimensional. Este factor es fundamental en el paso de una representación bidimensional (dibujo en el papel) a una tridimensional (cuerpo construido) y por ende a su proceso inverso (pasar de la construcción al desarrollo).

Al finalizar la actividad, los estudiantes pudieron observar a través de las construcciones realizadas por sus compañeros, distintos tipos de representaciones de la pirámide, pues aunque todos siguieron los mismos pasos de construcción, se ponían en juego elementos métricos particulares para cada uno, los cuales dejan ver pirámides con poca altura (chatas) o con bastante altura, dado por la particularidad de los triángulos que habían realizado para las caras laterales. Dicho elemento fue muy importante para la actividad, ya que los estudiantes reconocieron que a pesar de las variables existentes entre unas y otras, todas cumplían con las características necesarias para ser pirámides cuadrangulares, ampliando la forma de visualizar y representar estos objetos.

- **Tarea 5: construcción en Cabri 3d de algunas pirámides.**

Objetivo:

- Hacer uso del programa Cabri 3D para la construcción y desarrollos de diferentes pirámides para reconocer en cada una de ellas las características propias de este tipo de cuerpos geométricos.
- Plantear semejanzas y diferencias entre las pirámides rectas y las pirámides oblicuas y establecer la congruencia de las caras laterales en las pirámides rectas.

I. Descripción de la tarea.

Para iniciar esta tarea, se da la posibilidad a los estudiantes de explorar el programa Cabri 3D y abrir cada uno de sus links con el fin de hallar y reconocer las herramientas que propone. Partiendo de esta exploración, se realiza la explicación de los usos del software y cada una de las herramientas que ofrece y se da un espacio, en el que se pide a los estudiantes intentar construir con este software algún tipo de pirámide.

Partiendo de la exploración activa, se entregan dos guías, en una de ellas se explicitan los pasos necesarios para la realización de una pirámide cuadrangular y en la otra, se haya algunas preguntas referentes a las construcciones que realicen. El orientador lee cada uno de los ítems e indaga acerca del link en el cual se encuentra la opción necesaria para la realización de dicho paso y da un tiempo de aproximadamente 5 minutos para que los estudiantes lo construyan paso a paso, de igual forma indaga acerca de las características de dicha pirámide y las relaciones entre sus componentes. Una vez la pirámide esté construida, se pide a los estudiantes realizar nuevamente el mismo procedimiento, pero esta vez con una recta perpendicular a la base que no pase por el centro del polígono, la cual deben observar y caracterizar a partir de sus componentes.

Al finalizar las construcciones, se realiza un conversatorio, en el cual se indaga acerca de las características de las dos representaciones realizadas (una pirámide recta y una oblicua), en ella se pide a los estudiantes describir cada una de las pirámides que se encuentran plasmadas en la pantalla y encontrar sus diferencias.

A partir de dicho conversatorio, se formulan preguntas que conlleven a la conceptualización de pirámides rectas y oblicuas. Luego se pide a los estudiantes construir otra pirámide con cualquier tipo de polígono como base.

II. Expectativas de desempeño y gestión del maestro.

En esta tarea se espera que los estudiantes se familiaricen con el programa Cabri 3D de tal forma que puedan llegar a realizar construcciones de diferentes tipos de pirámides, se espera que los estudiantes logren caracterizar las pirámides rectas y oblicuas, no solo a partir de las construcciones sino también de sus respectivos desarrollos.

Por otro lado, se espera que reconozcan en cada una de las construcciones, la importancia de la delimitación de la base, en tanto que puedan a partir de ello, recordar los pasos, construir cualquier tipo de pirámide (dependiendo de la forma de la base) y conceptualizarlas a partir de sus componentes.

El maestro es el encargado de dar a conocer el programa Cabri 3D, en tanto que permite a sus estudiantes la exploración de cada una de las opciones y herramientas que éste propone, de igual forma permite que examinen el programa e intenten construir una pirámide y orienta los pasos a seguir para llegar a la construcción de una pirámide cuadrangular.

Dadas las construcciones, el maestro es el encargado de generar un espacio de análisis y discusión, en el que los estudiantes reflexionen acerca de las características de las construcciones realizadas haciendo preguntas que conlleven a la conceptualización de las pirámides rectas y oblicuas referentes a ambos tipos de representaciones (armadas y desarrolladas). De igual forma, brinda la posibilidad de que los estudiantes realicen construcciones de diferentes tipos de pirámides.

III. Materiales.

Software Cabri 3D

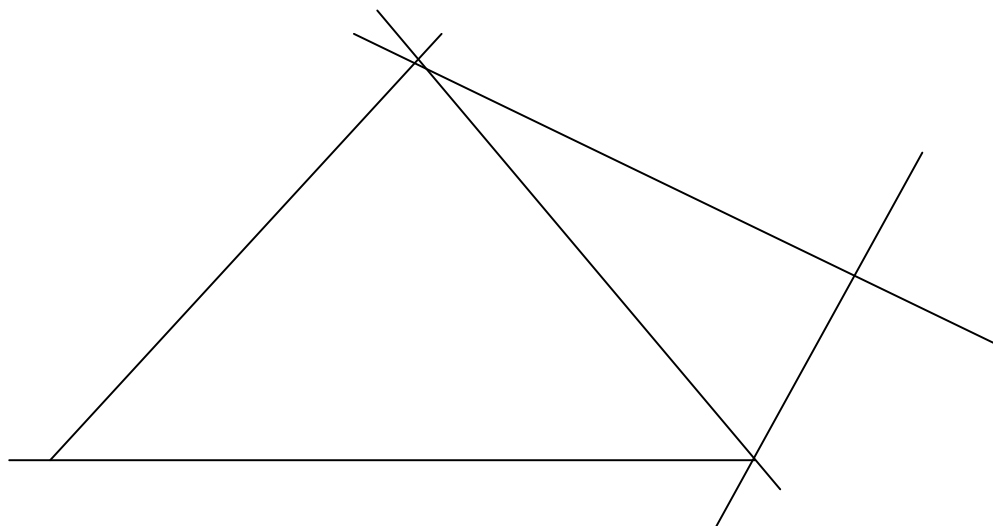
IV. Resultados.

Para dar inicio a la tarea, se lleva a los estudiantes a la sala inteligente de la institución, se organizan diez grupos de tres personas cada uno y se entrega la guía 1 la cual contiene los pasos para la construcción de la pirámide cuadrangular.

Dadas las características de la tarea, los resultados son presentados en dos sentidos. Primero, describiendo las situaciones presentadas entre los estudiantes en el transcurso de la interacción con el programa al hacer las construcciones, y, de acuerdo a las respuestas que escribieron a las preguntas escritas. Es necesario hacer hincapié en que la forma de interacción que los estudiantes debían tener con el software es un poco más amplia que en la tarea 1 donde también habían hecho uso del programa, en ésta ocasión no sólo podían mover los cuerpos, sino construirlos, a partir de la exploración que tenían con el menú y de las pautas dadas. Para tal fin buscaban en cada una de las herramientas del software los elementos que se pedían en la guía y los empleaban para la construcción. Finalmente desarmaban los cuerpos para ver sus desarrollos.

Primero los estudiantes en el computador observan los íconos que se encuentran en la parte de arriba de la pantalla e ingresan a cada uno dando clic para leer conjuntamente las distintas opciones que el programa brinda, luego de esta exploración con los usos de Cabri 3D, se pide a los estudiantes que intenten construir una pirámide, sin darles ninguna instrucción.

Un grupo de estudiantes ingresó en el menú donde estaba la opción de dibujar rectas y con éste elemento empezaron a dibujar varias rectas en la pantalla de tal forma que se encontraran en un punto, determinando que sería el ápice, de igual forma, con este elemento intentaron hacer la forma de las caras laterales. Es decir, hacer una representación plana (dibujo) de la pirámide a través del encuentro de rectas, las cuales se encontraban en ciertos puntos pero al mismo tiempo se prolongaban, como por ejemplo:



(Obsérvese en la pantalla del computador)



Se pide que la muevan y al realizar este proceso logran darse cuenta que se desarma, y por tanto que su construcción era plana e intentan construir la pirámide de otras maneras sin obtener resultados positivos.

Siete grupos, ingresan a varios elementos del programa pero no logran hacer ninguna construcción. Dos grupos, logran construir una pirámide a partir de los siguientes pasos:

1. Tetraedro regular.
2. Lo realizaron en la pantalla
3. Dos clics en el vector.

Efectivamente descubrieron una forma de construir la pirámide que al moverla no se deformaba, también, hicieron otras actividades tales como cambiar el color a las caras y moverla para observarla desde distintos puntos de vista.

Luego, explicaron en voz alta, los pasos que habían seguido para la construcción. Después de ésta exploración, los estudiantes efectúan los pasos 1, 2 y 3 de la guía 1 en la cual estaban los pasos de construcción.

1. Construyan un cuadrado en el plano como base.
2. Tracen una recta perpendicular al plano que pase por el centro del cuadrado

3. Construyan una pirámide con base en el cuadrado cuyo ápice esté sobre la recta perpendicular.

Algunos estudiantes necesitaron del acompañamiento del maestro para efectuar los pasos enunciados, en el cual se les decía que buscaran en el menú cómo se podía construir un cuadrado, incitándolos a buscar polígono y así escoger el solicitado en la guía para la base de la pirámide. Otros lo hicieron solos explorando en el menú.

Para la construcción de la recta perpendicular, los estudiantes lo hicieron con gran facilidad porque en este programa, todos los polígonos construidos tienen demarcado un punto en el centro, de igual forma para construir la pirámide, fueron a la opción pirámide ubicando el ápice sobre la perpendicular.

Inmediatamente todos los estudiantes efectuaron estas construcciones les pedimos que las movieran para observarlas desde varios puntos de vista.

Luego, los estudiantes siguieron el punto 4 de la guía 1.

4. Construyan otra pirámide con la misma forma de la base cuya recta perpendicular no pase por el centro del cuadrado siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior.

Algunos estudiantes necesitaron que les explicáramos el enunciado, en el cual les dijimos que iban a realizar los pasos 1, 2 y 3 de nuevo, con la diferencia de que la recta perpendicular no pasara por el centro del polígono de la base, es decir, que pasara por cualquier otro lado tanto dentro del polígono como por fuera de él.

La mayoría de estudiantes hicieron la construcción con la perpendicular pasando por dentro del polígono de la base sin tocar el centro, pocos la realizaron con la perpendicular por fuera del polígono de la base.

Luego de realizar este paso y tener construidas las dos pirámides, se les pidió que las movieran y enunciaran en voz alta las diferencias que encontraban entre las dos construcciones, para lo cual dieron respuestas como: “una es torcida y la otra no”, “en la primera (recta) el ápice está en el centro y en la otra (oblicua) no” o “en una los triángulos son iguales y en la otra los triángulos están torcidos”.

En este momento se hizo una intervención explicándoles que ambas construcciones, eran representaciones tridimensionales de pirámides, pero que

aquella en la cual la perpendicular pasaba por el centro del polígono se denominaba pirámide recta, mientras que la otra donde la perpendicular no pasaba por este punto eran pirámides oblicuas y por tanto tenían esta forma, inclinada hacia la perpendicular que se había trazado. De ahí que la pirámide recta fuera esbelta y sus caras laterales eran triángulos congruentes, mientras que la oblicua, era inclinada y sus caras laterales eran triángulos no congruentes, pues podíamos observar en la pantalla que unos eran un poco más pequeños que otros y además los lados que conformaban estos triángulos eran de distinta longitud, por lo que no eran isósceles.

Luego, los estudiantes hicieron el punto 5.

5. Utilice la opción abrir poliedro para desarrollar cada pirámide.

Abrieron ambos poliedros y pudieron observar claramente la diferencia que se presenta entre las caras laterales de una y otra, en la cual en la pirámide recta son congruentes y en la pirámide oblicua no.

Luego realizaron el punto 6 donde se les pedía que construyeran otras pirámides rectas de distinta base, los grupos hicieron distintas representaciones de pirámides cuya base era triangular, pentagonal, hexagonal, un decágono regular o un dodecágono regular, ampliando la gama de pirámides con las cuales se había trabajado en la secuencia.

Al terminar el trabajo con el software pasaron a resolver las preguntas de la guía 2.

A continuación se presentan las tipificaciones de las respuestas de los estudiantes para cada pregunta.

1. ¿De qué depende la cantidad de caras laterales de la pirámide recta?

Tipo 1: estudiantes que plantean una relación entre la forma de la base y la cantidad de caras laterales de la pirámide **80%**

Tipo 2: estudiantes que determinan la dependencia de la cantidad de caras laterales a factores distintos de la forma de la base. **20%**

2. ¿Qué relación hay entre las caras laterales de la pirámide recta?

El 100% de los estudiantes determinan una congruencia entre las caras laterales de la pirámide recta.

3. ¿Qué pasa al construir La pirámide con una recta perpendicular que no pasa por el centro de la base? ¿Qué pueden concluir?

Tipo 1: estudiantes que determinan una no congruencia entre las caras laterales de la pirámide al construirla con la recta perpendicular que no pase por el centro de la base del polígono. **70%**

Tipo 2: afirman que el hecho de que la perpendicular no pase por el centro de la base es una característica de las pirámides oblicuas. **30%**

4. Si la primera construcción es una pirámide recta, ¿Cuáles serían las características de este tipo de pirámides?

Tipo 1: estudiantes que determinan como característica fundamental de las pirámides rectas la congruencia de las caras laterales. **60%**

Tipo 2: estudiantes que para caracterizar las pirámides rectas determinan la congruencia de sus caras y nombran otros componentes como la base y el ápice. **30%**

Tipo 3: estudiantes que determinan que las pirámides rectas tienen una perpendicular que pasa por el centro del polígono de la base. **10%**

5. Si la segunda construcción es una pirámide oblicua ¿Cuáles serían las características de este tipo de pirámides?

Tipo 1: estudiantes que determinan una no congruencia entre las caras laterales de la pirámide oblicua. **70%**

Tipo 2: estudiantes que determinan una no congruencia entre las caras laterales de la pirámide oblicua y además nombran otros componentes como su base y ápice. **10%**

Tipo 3: determinan que la perpendicular no pasa por el centro del polígono de la base. **10%**

Tipo 4: determinan una no congruencia entre las caras laterales y plantean una particularidad en la ubicación del ápice de la pirámide, el cual no está ubicado en el centro del polígono de la base al estar sobre la perpendicular que pasa por otro punto. **10%**

6. Expliquen las diferencias de la pirámide recta y la oblicua.

Tipo 1: estudiantes que determinan las diferencias de las pirámides rectas y oblicuas en términos de la congruencia y no congruencia de las caras laterales respectivamente. **50%**

Tipo 2: estudiantes que determinan las diferencias de las pirámides rectas y oblicuas en términos de la congruencia y no congruencia de las caras laterales respectivamente y afirman que en la pirámide recta “el ápice está en el medio” y en la pirámide oblicua no. **10%**

Tipo 3: estudiantes que determinan que la diferencia radica en que en la pirámide recta, la perpendicular pasa por el centro del polígono de la base y en la oblicua no. **20%**

No responde 10%

V. Análisis de resultados.

Para el desarrollo de esta tarea se utilizó el software Cabri 3D el cual permitía una relación interactiva entre los estudiantes y el programa, en función de construir y desarrollar poliedros. Encontramos que los estudiantes tuvieron muy buenos desempeños al manejar el programa a pesar de ser la primera vez que lo utilizaban, poniendo de manifiesto las habilidades que los niños tienen en manipular e interactuar con cualquier medio tecnológico aún al carecer de instrucciones, pues ellos de forma espontánea, ingresaron a los distintos usos que tenía el programa e iniciaron a jugar con ellos buscando construir pirámides. En el momento en que se les dio las instrucciones, presentaron mucha facilidad en la realización de cada paso de la construcción.

Entre las fortalezas brindadas por el programa, encontramos el paso de representaciones bidimensionales a tridimensionales y viceversa que se puede realizar de los distintos poliedros, , pues en la tarea, los estudiantes al construir las pirámides, estaban visualizando representaciones tridimensionales de esos cuerpos y al abrirlos, observaban su desarrollo, dando cuenta del paso de lo tri a lo bidimensional, de igual forma, estos cuerpos se podían volver a armar, generando el proceso contrario, donde vamos de lo bi a lo tridimensional, es decir, manipulaban las representaciones en dos sentidos, objetivo fundamental no sólo de la tarea sino de toda la secuencia didáctica poniendo de manifiesto el desarrollo del pensamiento espacial, en tanto que se pone en juego las propuestas

que desde los lineamientos curriculares se plantean, donde los estudiantes dan cuenta de las transformaciones que se presentan entre los objetos a partir de las diferentes representaciones realizadas de un mismo cuerpo.

De igual forma, las construcciones realizadas permiten afianzar conceptos ya elaborados y realizar representaciones de vista única en donde se ilustran las tres dimensiones del objeto en una vista, por medio de la cual se hacen una aproximación muy cercana al objeto matemático. A través de ello, los estudiantes generaron una conciencia donde diferencian los objetos y sus representaciones sin importar el espacio en el cual se haga, un ejemplo de ello es la introspección que se da al reconocer que aunque se está trabajando en un medio bidimensional como lo es la pantalla del computador, se están representado cuerpos tridimensionales que poseen volumen, altura, entre otros.

Es evidente que los estudiantes por medio de esta tarea han llegado a interiorizar y desarrollar habilidades específicas del pensamiento espacial planteadas en los estándares básicos de competencias matemáticas concernientes al ciclo escolar en que se encuentran, pues llegan a comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo a sus componentes (caras, lados y aristas) y a construir y descomponer figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.

Por otro lado, se explicitan propiedades fundamentales de estos cuerpos, en relación a las características de las caras laterales, a su dependencia (en términos de cantidad) a la forma de la base y otros componentes como el ápice, aristas y vértices. De igual forma se amplían las imágenes mentales de este tipo de cuerpos en los cuales no sólo se encuentran las pirámides rectas sino también las oblicuas, cada una de ellas con unas similitudes por las cuales pertenecen a este tipo de poliedros pero también con particularidades específicas, las cuales los estudiantes hacen explícitas en las respuestas que dan al caracterizar cada una de ellas.

Para el caso de la pirámide recta, la caracterizan afirmando “tiene las caras iguales, las caras tienen la misma longitud, todas sus líneas perpendiculares pasan por el centro, tiene caras congruentes...” y para el caso de las pirámides oblicuas “no tienen las caras iguales, el ápice no está en el medio y sus caras no son iguales, la perpendicular no pasa por el centro de la base”, podemos observar que han adquirido un lenguaje matemático importante para designar este tipo de objetos abstractos, haciendo referencia a varios términos para aludir a características de sus componentes, como por ejemplo la congruencia entre las

caras laterales afirmando: “son iguales”, “todas tiene una misma longitud”, “son congruentes”.

En este sentido, se alcanzaron algunos procesos de generalización, el cual es de suma importancia dentro de las matemáticas y los planteamientos del MEN en los distintos documentos estatales, pues los estudiantes luego de construir, observar, mover y reflexionar en cuanto a las características tanto de las pirámides rectas como oblicuas, llegaron a concluir propiedades fundamentales de cada uno de ellos, explicitando entre sus argumentos, la congruencia de las caras laterales para las pirámides rectas y la no congruencia entre las caras laterales de la pirámide oblicua. Entre estas afirmaciones encontramos “en la recta las caras son congruentes y en la oblicua las caras no son congruentes”

Otros estudiantes, llegan a una generalización de estos cuerpos a través de otros componentes distintos a las caras laterales tales como la perpendicular que pasa por el centro del polígono de la base en el caso de las pirámides rectas o por fuera de él en el caso de las pirámides oblicuas. “en las pirámides rectas la línea perpendicular pasa por el centro y en la otra la perpendicular no pasa por el centro.”

Dicha generalización también se da a partir de la comparación en la ubicación del ápice para cada uno de los tipos de pirámides, en la cual afirman para el caso de las pirámides oblicuas “el ápice no está en el medio” y para las pirámides rectas “caras iguales, ápice en el medio”, “en la recta las caras son iguales y el ápice en el medio, en la oblicua las caras son diferentes y el ápice no está en el medio”

A pesar de que todos los estudiantes hacen distintas afirmaciones, relacionadas con distintos componentes de las pirámides, todos llegan a conceptualizar y generalizar las propiedades de ellas. Vemos que para la tarea, fue muy importante construir y desarrollar ambos tipos de pirámides, primero para reafirmar las propiedades de las pirámides que se habían trabajado durante todas las tareas anteriores y segundo, para enfatizar en la particularidad del tipo de triángulos que conforman las caras laterales de las pirámides rectas, los cuales son congruentes e isósceles. Dicho elemento se había abordado en la construcción que los estudiantes hicieron con regla y compás, pero en ésta que era la última tarea de toda la secuencia, la reforzó y amplió con otro elemento indispensable como la recta perpendicular, pues ésta en los objetos físicos no es visible y sólo se podía abordar a partir de la construcción en el programa, la cual era fundamental para establecer diferencias entre ambas construcciones.

3.2.4 Algunas conclusiones de la experimentación

La implementación de la secuencia didáctica sobre “las representaciones bidimensionales y tridimensionales de poliedros. El caso de los prismas y las pirámides”, así como la organización de los resultados obtenidos y el análisis de estos permite afirmar que

1. Los estudiantes logran a partir de la secuencia de tareas, identificar y conceptualizar las características y propiedades de los cuerpos geométricos, especialmente los relacionados con prismas y pirámides regulares, en tanto que su vocabulario se especializó en el uso de términos matemáticos que designan cada una de las características propias de este tipo de poliedros. De igual forma, el uso de estos términos se ve referido a la correspondencia con los componentes en tanto que aluden correctamente a ellos, no solo en términos de su cantidad sino también en su forma y usos dentro de la composición o construcción del cuerpo. El uso de estos conceptos, se da para los diferentes tipos de representación, es decir que aluden a los componentes tanto de los poliedros que muestran sus tres dimensiones como de aquellos representados de manera bidimensional o en sus respectivos desarrollos, aspecto por el cual logran identificar las componentes invariantes a ambos tipo de representación. Lo anterior, lo podemos afirmar a partir del análisis de todas las tareas, en tanto que al iniciar, se nota un desconocimiento de las componentes de los cuerpos y por ende de las expresiones empleadas para su designación, pero este se va modificando en el transcurso de la secuencia, donde los porcentajes de acierto y las expresiones empleadas dan cuenta de una apropiación conceptual.
2. La interiorización de las propiedades de cada una de la familia de poliedros (prismas y pirámides) se da a partir de varios tipos de representaciones tanto físicas como mentales, lo cual le facilitó al estudiante el reconocimiento de las componentes desde diferentes ámbitos, logrando a partir de imágenes visuales abstraer las propiedades de cada uno de los objetos representados y a su vez, poder aludir a ellos aún cuando el objeto de estudio no estuviera presente en materiales físicos.
3. los estudiantes llegan a procesos de generalización de las características propias de cada una de las familias de poliedros, en tanto que alcanzan

procesos de análisis y razonamiento a partir de la formulación y discusión de conjeturas con sus compañeros y maestros, que le permiten establecer comparaciones y hallar las relaciones entre las componentes de los cuerpos. Esto no sólo los deja en el ámbito de lo particular para cada uno de los poliedros, sino que también los lleva a plantear expresiones algebraicas que dan cuenta de la cantidad de componentes de algún cuerpo a partir del reconocimiento de otros dados previamente, esto se hace evidente cuando los estudiantes en la tarea 3 de la situación 2, logran llegar a expresiones tales como $n+1$ para determinar la cantidad de vértices de una pirámide, para lo cual dicen que n corresponde con la cantidad de lados de la base y el uno corresponde con el ápice; o $2n$ para referirse a la cantidad de aristas que tiene una pirámide de acuerdo a la cantidad de lados de la base.

4. Encontramos que los estudiantes han logrado un dominio del espacio generado a partir de la interacción con los diferentes materiales, con sus compañeros y con el entorno, comprendiendo la importancia de las construcciones y desarrollos de cuerpos que en un primer momento fueron estáticos. Podemos ver que a través de la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad, la imaginación y en las representaciones de los sólidos, los estudiantes desarrollaron pensamiento espacial en la cual lograron caracterizar particularidades del espacio 2D y 3D, al igual que el paso entre estas dos dimensiones, tal como se puede certificar en la secuencia didáctica, en especial en la situación 3. Por otra parte, los estudiantes adquirieron habilidades que favorecieron el desarrollo de dicho pensamiento, reflejando desempeños asociados, tales como comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar objetos 3D (a partir de la utilidad de representaciones planas de las formas y relaciones 3D), ya que en todas las tareas los estudiantes debían comunicar en forma verbal o escrita tanto concepciones tenidas, como conclusiones a las que habían llegado, u otros desempeños como desarrollar y contemplar la percepción del espacio a través de distintas representaciones de variados objetos ubicados una multiplicidad de veces en el espacio, elemento abordado sobre todo en las tareas 2 y 3 de la situación 3.
5. Encontramos que los estudiantes desarrollaron de forma significativa conocimientos asociados a diferentes sistemas de representación de cuerpos, en especial prismas y pirámides, planteados en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas para el segundo ciclo de la

educación básica (grado 4º y 5º) los cuales fueron tenidos en cuenta entre algunos de los referentes teóricos abordados para este trabajo de investigación. En particular, podemos ver que los estudiantes se apropiaron de actividades tales como: dibujar y describir figuras en distintas posiciones, (abordado sobre todo en las situaciones 2 y 3), construir objetos 3D a partir de representaciones 2D, (abordado en la tarea 1 de la situación 2), comparar y clasificar objetos 3D de acuerdo a sus componentes (abordado especialmente en la situación 1), y construir y descomponer figuras y sólidos a partir de condiciones dadas (abordado en la situación 3).

6. Los estudiantes adquirieron destrezas mentales de visualización espacial entre las cuales ponían en juego diferentes imágenes, procesos y habilidades inherentes a ellas, de tal forma que a medida que iban transcurriendo las diferentes tareas, se estructuraban y afianzaban un poco más. En particular encontramos que los niños lograron hacer diferentes imágenes mentales de los cuerpos, donde a pesar de incluir variables asociadas al movimiento, a la posición, incluso a la ausencia física del objeto, pudieron aludir a sus características específicas en actividades de descripción, representación o construcción como por ejemplo en las tareas de la situación 2 y 3 de la secuencia. También lograron desarrollar ciertas habilidades y procesos, de tal forma que llegaron a comparar varios objetos identificando semejanzas y diferencias como por ejemplo en la situación 1; recordar características visuales y de posición de los cuerpos en las tareas 2 y 3 de la situación 3 y reconocer la figura aislándola del contexto, en las tareas de construcción con regla y compás o en los desarrollos de los cuerpos.
7. Los estudiantes plantearon especificidades entre las representaciones planas y tridimensionales de los cuerpos, haciéndolo evidente en los resultados obtenidos de la situación 3 la cual trataba el paso de las representaciones en ambas direcciones. En particular para las representaciones bidimensionales, identificaron representaciones de cuerpos desarrollados y los componentes vistos u ocultos de un objeto respecto a la posición del observador, realizaron dibujos de varias vistas laterales de los sólidos correctamente, evidenciando dominio en este sentido. De igual forma, lograron hacer el paso de lo plano a lo tridimensional a partir de la construcción en regla y compás como también

en Cabri 3D reconociendo propiedades fundamentales tanto de prismas como pirámides.

8. El diseño y planeación de las tareas propuestas para la secuencia didáctica, fue un elemento fundamental en el desarrollo e implementación de esta y por ende en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en tanto que por medio del análisis a priori, el cual incluía la descripción de las tareas, la gestión del maestro, expectativas de desempeño y materiales necesarios para cada actividad, se logra prever ciertas dificultades y organizar de manera coherente los aspectos propuestos desde el marco teórico (referentes principalmente a los 4 tipos de tareas), ello permitió ordenar los puntos de las tareas, los conocimientos a desarrollar a partir de cada una de ellas y la forma de llevarlos a cabo, con lo que se logra, partir de los conocimientos previos de los estudiantes, así como de sus concepciones, intervenciones, opiniones y argumentos, para llegar a designar geométricamente cada una de las componentes y lograr conceptualizaciones al respecto. Esto se hace evidente en el análisis de las tareas, en tanto que se plantea una diferenciación entre las respuestas de los estudiantes en la primera situación, para la cual describían los cuerpos a partir de características funcionales o estéticas que no eran nuestro centro de interés y aludían a sus componentes haciendo uso de un lenguaje cotidiano, pero con el transcurso de las tareas centraron su atención en aspectos puramente matemáticos y por tanto comenzaron a hacer uso de expresiones geométricas que hacían referencia a los nombres de cada una de los componentes.
9. El hecho de plantear una secuencia didáctica como metodología para la enseñanza de las propiedades de los cuerpos geométricos, permitió que los estudiantes llegaran a procesos de generalización, en tanto que se logra por medio de la secuencia de preguntas (organizadas de manera coherente) que al avanzar en el desarrollo de las tareas, el nivel de análisis y argumentación se fuera incrementando. En este sentido fue fundamental comenzar con la visualización de cuerpos pertenecientes al entorno (envases), para luego ir delimitando nuestro objeto de estudio y llegar a matematizarlos, en tanto que vemos que los estudiantes logran a partir de una variedad de preguntas llegar a conclusiones respecto a las características generales para cualquier tipo de prisma o pirámide. En este sentido, vemos que no solo se logra una conceptualización de prismas y pirámides si no también la obtención de un pensamiento geométrico que

trasciende más allá de las simples características estéticas o de uso de los sólidos geométricos.

Ello se hace evidente en el desarrollo de las tareas y específicamente en la tarea 3 de la situación 2, pues podemos observar que después de una serie de preguntas relacionadas con las características particulares de diferentes tipos de pirámides (cuadrangular, triangular, pentagonal y hexagonal) los estudiantes logran llegar a generalizar las propiedades para cualquier cuerpo que pertenezca a esta familia y a establecer relaciones entre la forma de la base y la cantidad de caras laterales, vértices y aristas de cualquiera de ellas, al punto de plantear expresiones algebraicas que den cuenta de sus generalidades.

10. Los estudiantes logran aproximarse a conceptos y procedimientos relacionados con las representaciones bidimensionales y tridimensionales de prismas y pirámides a través de la generación de un entorno rico en materiales manipulables tales como los objetos físicos, el software informático, regla y compás y materiales impresos, pues se evidencia que en el transcurso de la secuencia didáctica, especialmente para la situación 1 y 2 donde se manipulan objetos físicos como envases y representaciones tridimensionales de prismas y pirámides en madera, cartulina, palillos, pitillos y plastilina, logran reconocer características específicas de estos cuerpos y compararlos delimitando propiedades. (a pesar de la diversidad de materiales). De igual forma en la situación 3 tareas 1 y 5 donde utilizan el software Cabri 3D, los estudiantes logran interactuar fácilmente con el programa, identificando funciones elementales en relación a su uso para mover, construir y desarrollar estos cuerpos, reafirmando y ampliando conceptos establecidos, ello también sucede en la tarea 4 de la situación 3 con el uso de la regla y el compás, en la cual a pesar de enfrentarse a una construcción geométrica mediada por una secuencia de pasos establecidos, se evidencian buenos desempeños, motivación y dominio del material. Particularmente para los materiales impresos, los cuales son transversales a cada una de las situaciones, encontramos que son la principal fuente de información, además de un elemento fundamental para la coherencia de cada una de las tareas, la interpretación y dibujo de representaciones planas de sólidos, medio que complementa el paso de lo bidimensional a lo tridimensional.

11. El proceso de construcción de los conocimientos de los estudiantes se dio gracias a la gestión del maestro, en tanto que éste en el desarrollo de las tareas fue más que un orientador un generador de espacios de aprendizaje, al ser el encargado de guiar a los estudiantes en procesos de interpretación, discusión y argumentación. En este sentido los aprendizajes no son “impartidos por el maestro” sino contruidos a través de la interacción entre pares y por la discusión grupal en la exposición de sus respuestas, por medio de la cual se logra cuestionar y reflexionar en términos de los conceptos matemáticos abordados con el fin de conceptualizar los saberes adquiridos. De esta manera, para la modificación de las estructuras cognitivas en los estudiantes, no es suficiente sólo con un buen diseño de la secuencia didáctica, sino que también requiere de un interventor con capacidad de escucha y de fomentar por medio de sus interrogantes, un mayor análisis que los aproxime a los objetivos planteados en las tareas.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES GENERALES

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES GENERALES

4.1 CONCLUSIONES FINALES

Los procesos de consolidación, implementación y análisis de una propuesta de intervención en el aula (secuencia didáctica) para acercar a los estudiantes a representaciones bidimensionales y tridimensionales de prismas y pirámides y el proceso de implementación permitieron concluir que:

1. Una de las principales fortalezas en nuestro trabajo de investigación, se basó en la propuesta de un marco teórico coherente tanto con los propósitos a los que pretendíamos llegar como a la forma de obtener dichos resultados. En este sentido el marco teórico determinado a partir de varios ejes, nos permitió tener una mirada más amplia de los procesos a desarrollar y de todas las posibilidades a tener en cuenta a partir de diversos factores, por tanto el eje curricular, determinó las fortalezas del desarrollo del pensamiento espacial en este nivel de escolaridad, proporcionó las especificidades del grado y por ende de los pensamientos y habilidades a desarrollar a partir de los procesos generados en años anteriores; el didáctico, propició todos los factores a tener en cuenta para el diseño de la secuencia didáctica, en tanto que fue pensada a partir de varios puntos de referencia tales como los tipos de tareas y las estrategias de visualización y representación que debían ser abordadas para lograr una movilización de conocimiento matemático, de igual forma aportó las pautas para la realización del análisis de resultados obtenidos a partir de la aplicación, en tanto que brindo las herramientas necesarias para identificar las habilidades y desempeños de los estudiantes y por ende del nivel alcanzado a partir de la realización de cada una de ellas. El eje matemático, brindó las generalidades de conceptos que debían ser abordados a partir de las tareas, las cuales fueron ordenadas secuencialmente y siguiendo las características de una metodología basada en una secuencia didáctica, en tanto que se buscaba generar un aprendizaje significativo a partir de una secuencia de tareas organizadas que llevaran al estudiante por

medio de la exploración activa del espacio y de la interacción con sus pares a un nivel de análisis y razonamiento que le permitiera deducir y conceptualizar todas las propiedades de los prismas y pirámides. En este sentido podemos determinar que el marco teórico nos brindó las herramientas necesarias para lograr nuestros objetivos y superar nuestras expectativas.

2. Teniendo en cuenta que la investigación se desarrollaba a partir de la implementación de una secuencia didáctica, en la cual las respuestas de los estudiantes eran nuestro elemento de análisis y que por su carácter subjetivo se obtendrían distintos tipos de planteamientos para una misma pregunta, se recurre a la sistematización de la información en algunos casos a modo de tipificación y en otros en forma de tablas que relacionaban las respuestas con sus respectivos porcentajes. Este proceso de recolección y ordenamiento de las respuestas es uno de los aspectos que enriquecen la investigación, en tanto que logran poner en evidencia de manera sistemática las respuestas posibilitando la lectura y análisis de los enunciados de los estudiantes y por ende la comprensión de los planteamientos en el transcurso de este documento.
3. Para desarrollar pensamiento espacial en los estudiantes es necesario partir de un enfoque de la geometría activa donde se aborden los conocimientos geométricos a partir de experiencias de observación, manipulación y movimiento de los objetos (matemáticos). Cuando se privilegian dichos procesos, se enfatiza en los aspectos generales de los poliedros, (tanto de conceptos, como de cuerpos, figuras, entre otros) permitiendo desarrollar en los estudiantes una conceptualización que puede ir desde lo global hasta lo particular del objeto de estudio. En este sentido, podemos ver que los sistemas de medida, pueden ser el producto de la interacción de una multiplicidad de tareas en las cuales el objetivo fundamental no sea sólo llegar a delimitar las características métricas, por el contrario, sea el producto de ejecutar una variedad de hechos entre los cuales se puedan desarrollar otros pensamientos, es decir, contrario a lo que se hace generalmente en las aulas, las cuales inician sus clases de geometría particularizando en los aspectos métricos asociados a conceptos tales como el área, el perímetro, o “la medida” de ángulos, segmentos, etc.

4. Existe una tendencia entre los estudiantes en particularizar características de los cuerpos relacionándolos con aspectos de la geometría plana, en tanto que las experiencias que tienen en la escuela se dirigen especialmente en desarrollar estos conceptos, obviando otros aspectos que deben ser objeto de enseñanza, como por ejemplo las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional, tema abordado en la investigación. De igual forma, se evidencia, que en los casos en los cuales este tema es tenido en cuenta en el currículo, es abordado de una forma muy superficial sin profundizar en las propiedades de los cuerpos, dejando procesos cognitivos tan importantes como la representación y la visualización en simples actividades como “ver” y “dibujar”, pues aunque creemos que los estudiantes en grado quinto de la educación básica primaria en nuestro país deben haber desarrollado las competencias necesarias para comprender el paso de las representaciones bidimensionales a tridimensionales y viceversa, estos procesos son relegados.
5. Dada la conclusión anterior, podemos afirmar que para llegar a procesos de representación y visualización, es necesario, partir de una apropiación de las propiedades, características y componentes de los cuerpos, pues la experiencia tenida en el aula nos muestra que es a través de la conceptualización, que se puede llegar a dichos procesos (representación y visualización). Para ser un poco más explícitos, traemos a colación algunas reflexiones personales de la experiencia tenida en la implementación: los estudiantes llegaron a representar fácilmente los cuerpos bidimensionalmente (desarrollados), porque en momentos anteriores habían interiorizado mentalmente las imágenes tanto de prismas y pirámides, teniendo en cuenta la forma y cantidad de las bases, caras laterales y otros componentes como aristas, vértices, entre otros. De igual forma, pudieron llegar a representaciones tridimensionales de ellos, en las actividades de construcción, porque pusieron de manifiesto la apropiación conceptual de los componentes que los conformaban. Podemos pensar que si en la intervención no hubiéramos enfatizado en aspectos matemáticos de estas familias de poliedros, los procesos de representación y visualización no hubieran sido tan potentes como lo fueron.
6. Es posible desarrollar en los estudiantes procesos de razonamiento matemático que los conduzca a ordenar ideas en su mente para hallar

conclusiones de cualquier tipo de trabajo abordado, este proceso, debe tener en cuenta el ciclo escolar en el que se encuentran los estudiantes así como su nivel de desarrollo, para a partir de él potencializar sus capacidades haciendo que pasen de un nivel informal de razonamiento hasta un nivel más elaborado; para ello deben plantearse actividades organizadas y enfocadas en desarrollar estos procesos a través de acciones donde deban justificar las estrategias y los procedimientos, formulen hipótesis, hagan conjeturas y predicciones, usen hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos, donde encuentren patrones y los expresen matemáticamente, utilicen argumentos propios para expresar sus ideas, reconociendo las matemáticas como un ente que potencia su capacidad de pensar y no como se ha hecho generalmente en nuestra educación, en la cual las matemáticas nos atiborra de fórmulas, operaciones y definiciones. Podemos ver que en la secuencia implementada, los estudiantes desarrollaron procesos de razonamiento basados en acciones como las descritas anteriormente pasando de un nivel de desarrollo a otro, en el cual llegaron a explicitar propiedades de los prismas y las pirámides, construidas en el transcurso de la implementación.

7. A través del análisis de la aplicación y los resultados obtenidos por los estudiantes en la secuencia didáctica, podemos afirmar que uno de los aspectos fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas, está relacionado con los procesos comunicativos generados en el aula, pues la comunicación verbal es una parte crucial en la construcción de argumentos lógicos por medio de los cuales los conocimientos personales se sistematizan en un ámbito, para luego ser aceptados como un conocimiento nuevo.
8. La implementación de una secuencia didáctica permite a los maestros organizar el currículo de tal forma que se puedan abordar los diferentes pensamientos, facilitando al maestro la manera de desarrollar todas las competencias planteadas en los diferentes ciclos escolares por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y a los estudiantes la forma de aprender de una manera más coherente relacionando unos conceptos con otros y no de forma aislada. Aunque en la implementación de la secuencia el objetivo no estuvo dirigido a lo mencionado anteriormente, debemos tener en cuenta que es una intervención relegada a cuestiones de tiempo otorgado en la institución y

a otros aspectos relacionados con el objetivo de la investigación, pero un maestro de aula, en el transcurso del año escolar, planificando su qué hacer educativo puede realizarlo teniendo en cuenta los factores mencionados anteriormente.

9. Los maestros de matemáticas debemos preocuparnos por propiciar un ambiente que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas; esto implica que escuchemos con atención a nuestros estudiantes, orientemos el desarrollo de sus ideas y hagamos uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas, pues particularmente sabemos, que dada la naturaleza misma de las matemáticas, la aproximación a conceptos es posible sólo a través de diferentes representaciones.
10. La investigación basada en la aplicación de una secuencia didáctica como metodología del proceso de aprendizaje, generó gran expectativa e interés, en tanto que por medio de una experiencia práctica en la cual se puso en juego los aspectos propios a ella, pudimos llegar a concluir que este tipo de prácticas educativas fomentan en los estudiantes grandes interrogantes que les permite cuestionarse a tal punto de llegar a la adquisición de conocimiento significativo en diferentes contextos. De igual forma como maestras en ejercicio, consideramos que esta propuesta es un insumo para realizar diversas propuestas de enseñanza en las que se ponga en práctica el papel del maestro no como el encargado de llevar al salón de clase los conceptos ya elaborados, sino como aquel forjador de pensamiento crítico que estimula en los estudiantes una mayor capacidad de análisis y razonamiento, en tanto que los conocimientos se den a partir de un ambiente dinámico en el que las concepciones, pensamientos y opiniones de los estudiantes sea el motor para la generación de inquietudes y argumentos elaborados a tal punto que sea posible llegar a generalidades y finalmente a la institucionalización de los saberes producto de sus experimentaciones e investigaciones.
11. La realización de este proyecto de investigación determinó una experiencia significativa tanto en nuestras expectativas en el desarrollo de esta temática dentro de nuestra formación como licenciadas en Educación Matemática, como en nuestra labor como docentes, en tanto que fomentó una mayor capacidad investigativa en el ámbito escolar y

referente a las potencialidades de ciertas metodologías de enseñanza, así como en el papel que desempeñamos en nuestras aulas escolares, en tanto que logramos tener una posición crítica de nuestro propio material y de nuestras intervenciones en la enseñanza de las matemáticas, en este sentido logramos identificar la importancia del papel del maestro en la conformación de los conceptos en los niños, de la planeación de los conceptos abordados a partir de cada una de nuestras clases y la forma de llegar a la movilización de conocimientos.

12. Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de la secuencia didáctica deja ver en los estudiantes una apropiación de los conceptos desarrollados a través de las diferentes tareas, esto se hace evidente en el desarrollo de la secuencia, pues en la medida en que se avanzaba en la aplicación, los estudiantes demostraban el reconocimiento de las características propias de los cuerpos geométricos y por ende de los conceptos matemáticos abordados, los cuales eran explicitados a partir de un lenguaje matemático. De igual forma nuestra propuesta basada en el uso de diferentes materiales y recursos tanto físicos como interactivos, motivó a los estudiantes en la medida en que nos cuestionaban a cerca de cuando les daríamos la próxima clase y el tema a tratar. Finalmente sus intereses y avances se ven reflejados en sus desempeños, en tanto que logran sobrepasar nuestras expectativas y las de la maestra de aula, la cual manifiesta que los estudiantes durante la semana continúan hablando de lo aprendido durante la intervención de aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BISHOP, A. Spatial abilities and mathematics education- A review. Education Studies in Mathematics, 1980, P. 257-269.

BISHOP, A. Space and geometry. En R. Lesh & M. landau (Ed.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Press, 1983. P. 176-203.

BISHOP, A. Review of research on visualization in mathematics education: Focus on Learning Problems in Mathematics, 1989. P. 7-16.

BIHOP, A. y NICKSON, M. a review of research in mathematical education, part B: Research on the social context of mathematics education. Gran Bretaña, 1983.

CHAMORRO, M. Didáctica de las matemáticas. Madrid: Pearson, 2005, P. 28.

DELANEY. Libro maestro correspondiente a la serie televisiva Leapfrog: Hemmings et.al. 1979.

DICKSON, L. BROWN, M. y GIBSON, O. El aprendizaje de las Matemáticas. Barcelona-España: Laboure, 1991.

GAULIN, C. y PUCHALSKA, E. Coden graphical representations: A valuable but neglected means of communicating spatial information in geometry. En I. Wirszup & R: Streit (Ed.) Developments in school mathematics education around the world. Applications-oriented curricula and technology-supported learning for all students. Usa, 1987, P. 514-539.

GUERRERO, F; SÁNCHEZ, N. y LURDUY, O. La práctica docente a partir del modelo Deca y de la teoría de las situaciones didácticas: Matemática para interpretar nuestro entorno En: Festival internacional de matemática (5: 29 – 31, marzo). 2006.

GUILLÉN, G. La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B. Valencia-España: 1992, 223P.

GUILLÉN, G. Poliedros. Madrid: Síntesis, 1999, P. 16-19

MARTÍNEZ, A. y RIVAYA, J. Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría. Madrid- España: Síntesis, octubre de 1998.

HOFFER, A. Geometry is more than proof. The mathematics Teacher, 1981, p: 11-18.

HOFFER, A. Geometry and Visual thinking. En T.R post (Ed.), Teaching mathematics in grades k-8. Research based methods. Londres, 1988, P. 232-261.

HURTADO, M. Didácticas de las Matemáticas: La iniciación en la construcción del conocimiento geométrico en la escuela. En: IV Encuentro de geometría y sus aplicaciones. Memorias. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Colombia: Editor Ministerio de Educación Nacional, 2006 P.82-83.

MINISTERIO DE DUCACION NACIONAL, Lineamientos curriculares en matemáticas, Colombia: cooperativa editorial magisterio, 1998, P. 56.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), Estándares Curriculares de Evaluación para la Educación Matemática, Sevilla, Edición en castellano: sociedad andaluza de Educación Matemática "THALES", 1989, P. 48.

PRESMEG, NC. Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 1986b, P. 42-46.

PRESMEG, NC. Visualization and mathematical giftedness. Educational studies in mathematics, 1986a, P. 297-311.

ANEXOS



SITUACIÓN 1: “RECONOCIENDO SÓLIDOS”

TAREA 1 caracterizando objetos del entorno

En grupos de cuatro estudiantes con los envases que han traído al salón de clases, realicen la siguiente actividad.

1. Hagan una descripción de cada uno de los envases que trajeron teniendo en cuenta los aspectos físicos (tamaño, forma, partes que lo conforman).
2. Organicen los envases en grupos, de acuerdo a ciertas características comunes (buscando semejanzas entre ellos) asignándole nombre a cada grupo.
3. Escojan dos envases que pertenezcan a una misma clasificación, es decir a un mismo grupo y escribe por qué pertenecen al mismo grupo.
4. Escojan dos envases que pertenezcan a distinta clasificación y escriban por qué son diferentes.



TAREA 2 comparando envases con sólidos geométricos

Con los sólidos que presenta el profesor y los envases que trajeron, realicen la siguiente actividad:

1. Escojan un envase de los que trajeron y compárenlo con los sólidos que presenta el profesor, luego indiquen a cuál se parece el de ustedes y porqué.
2. Escojan tres envases diferentes de los que trajeron y completa la siguiente tabla.
 - c. Dibujen en las casillas envase 1, envase 2 y envase 3, los envases escogidos.
 - d. Marquen con una X las casillas vacías para cada envase que tenga semejanzas con algunos de los sólidos geométricos nombrados.

Dibuja el envase que Elegiste	cilindro	prisma	cubo	pirámide	Son semejantes porque:
Envase 1					
Envase 2					
Envase 3					



TAREA 3 describiendo partes de los cuerpos geométricos

1. Describe individualmente cada uno de los cuerpos que se presentan, teniendo en cuenta cada uno de sus componentes.

CILINDRO.

CUBO

PIRÁMIDE

PRISMA

2. Lee a tus compañeros la descripción que hiciste anteriormente nombrando cada componente, discute con tu maestro los nombres de éstos.

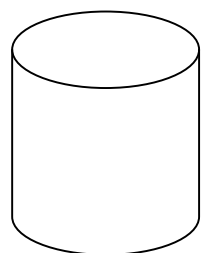
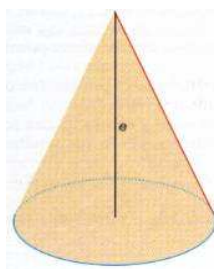
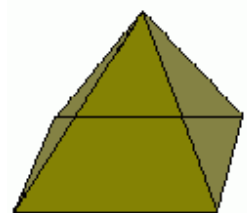
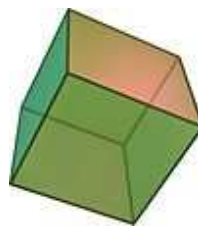
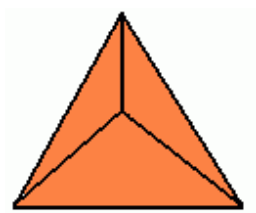
3. De acuerdo con lo que observaste de cada cuerpo geométrico y teniendo en cuenta la explicación anterior, completa el siguiente cuadro.

CUERPO	NÚMERO DE VÉRTICES	NÚMERO DE ARISTAS	NÚMERO DE CARAS	FORMA DE LAS CARAS	FORMA DE LA BASE
Cilindro					
Cubo					
Pirámide					
prisma					

SITUACIÓN 2: “ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS”

TAREA 1 Describiendo cuerpos geométricos

1. Describan el cuerpo que tienen en la mano para que sus compañeros puedan saber, sin verlo, cómo es. Si quieren pueden mover el cuerpo.
2. Lean la descripción hecha por sus compañeros y escojan el cuerpo que corresponde a dicha descripción y enciérrenlo en la siguiente representación.



3. Escojan entre los siguientes materiales, los que consideren necesarios y construyan el cuerpo geométrico que tienes en la descripción con dos materiales diferentes.

- Plastilina
- Cartulina
- Palos
- pitillos
- regla

a. Escriban si la descripción permitió hacer algún cuerpo geométrico y porqué

b. Escriban las dificultades que tuvieron para construir el cuerpo geométrico descrito.



TAREA 2 Reconociendo prismas a través de sus componentes

1. Observen detalladamente el prisma que se les ha entregado (prisma 1), muévanlo en distintas posiciones y realicen una descripción de él, teniendo en cuenta la cantidad y forma de sus bases y caras laterales.
2. imaginen que desarmamos el prisma1.
 - a) ¿Qué tipo de polígonos obtendrían? Descríbanlos
 - b) Dibujen los polígonos que obtendrían.
 - c) Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales (use piola) ¿Qué pueden concluir?
3. Ahora tomen el prima 2, obsérvenlo detalladamente y respondan.
 - a) ¿Cuántos polígonos conforman las bases y que formas tienen?
 - b) ¿Cuántos polígonos conforman las caras laterales y qué formas tienen?
 - c) Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales (use piola) ¿Qué pueden concluir?
4. Observen detalladamente el prisma 3 y de acuerdo a ello respondan.
 - a) ¿Cuántos polígonos conforman las bases y qué formas tienen?
 - b) ¿Cuántos polígonos conforman las caras laterales y qué formas tienen?
 - c) Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales (use piola) ¿Qué pueden concluir?
5. Observando el prima 4, respondan las siguientes preguntas.
 - a) ¿Cuántos polígonos conforman las bases y qué formas tienen?
 - b) ¿Cuántos polígonos conforman las caras laterales y qué formas tienen?

6. Con la información recolectada en las preguntas anteriores completa la tabla.

PRISMA	FORMA DE LAS BASES	NÚMERO DE CARAS LATERALES
Prisma 1. _____		
Prisma 2. _____		
Prisma 3. _____		
Prisma 4. _____		

- Escriban la relación que encuentran entre la forma de los polígonos que conforman la base de los prismas y la cantidad de caras laterales.
- Escriban una característica común de las caras laterales de los prismas (independiente de las bases)
- Escriban las características de las bases de los prismas

7. Observen el cubo y contesten.

- ¿Qué polígonos conforman las bases y como son estos?
- Escriban una característica común de las caras laterales del cubo.
- Escriban las características de las bases del cubo.
- Escriban el análisis de la siguiente afirmación: “Todo cubo es prisma, pero todo prisma no es cubo”

TAREA 3 Reconociendo pirámides a través de sus componentes

1. observen las distintas pirámides que se les ha entregado, muévanlas en distintas posiciones y realicen una descripción de cada una de ella teniendo en cuenta la cantidad y forma de la base y caras.

Pirámide 1

Pirámide 2

Pirámide 3

Pirámide 4

2. Imaginen que desarmamos la pirámide 1 y respondan:

- a. ¿Qué polígonos la conforman?
- b. ¿Qué forma tiene la base?
- c. ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

3. Ahora tomen la pirámide 2, obsérvenla detalladamente y respondan:

- a. ¿Qué polígonos la conforman?
- b. ¿Qué forma tiene la base?
- c. ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

4. Observen detalladamente la pirámide 3 y respondan:

- a. ¿Qué polígonos la conforman?
- b. ¿Qué forma tiene la base?
- c. ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

5. Observando la pirámide 4 respondan las siguientes preguntas.

a. ¿Qué polígonos la conforman?

b. ¿Qué forma tiene la base?

c. ¿Cuántas caras lo conforman y cómo son éstas?

6. Con la información recolectada en las preguntas anteriores completa la tabla.

PIRAMIDE	FORMA DE LA BASE	NÚMERO DE CARAS
Pirámide 1. _____		
Pirámide 2. _____		
Pirámide 3. _____ _____		
Pirámide 4. _____ _____		

a) Escriban la relación que encuentran entre la forma del polígono que conforma la base de las pirámides y la cantidad de caras laterales.

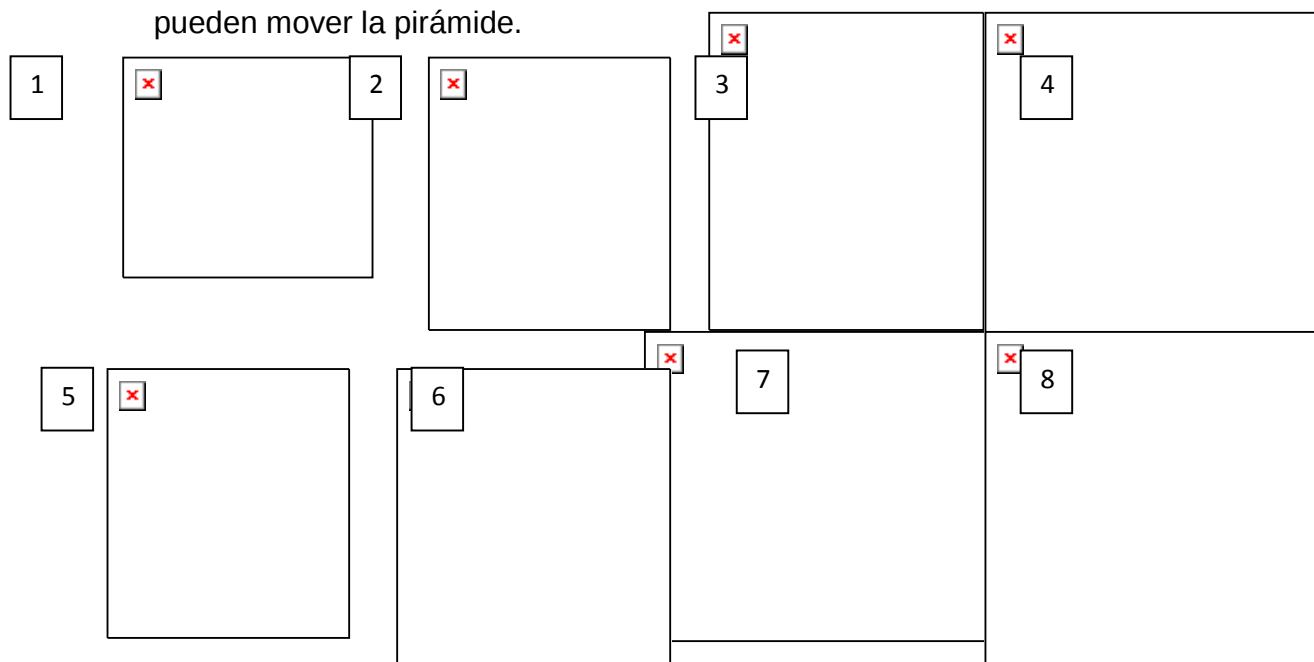
b) Escriban una característica común de las caras de las pirámides (independientemente de la base)

7. Comparen la longitud de cada arista de las caras laterales de la pirámide (usa piola) ¿Qué pueden concluir?

SITUACIÓN 3: “REPRESENTACIÓN Y VISUALIZACIÓN DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

TAREA 1 Reconociendo invariantes de prismas y pirámides a través del movimiento.

- Encierren en las vistas de los cuerpos que hay debajo, aquellos que correspondan a la pirámide triangular que está en la pantalla. Si quieren pueden mover la pirámide.



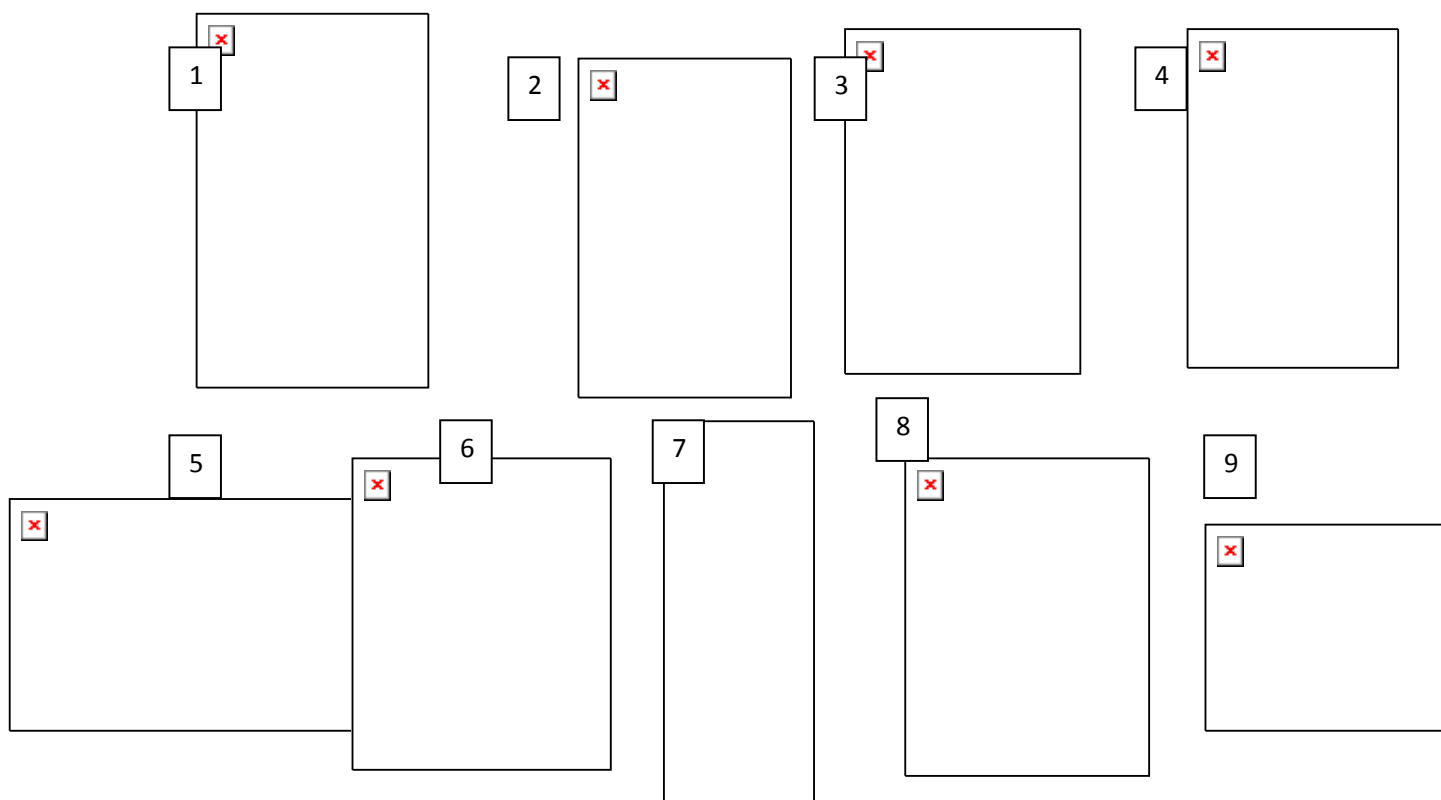
- Completen la siguiente tabla en relación con las representaciones que si corresponden con la pirámide triangular.

POSICIÓN	Qué componentes observas

- b. Escriban qué pasa con los componentes que no se observan por la posición que tiene la pirámide en cada caso
- c. Completen la siguiente tabla en relación con las representaciones que no corresponden con la pirámide triangular.

POSICIÓN	Porqué no corresponde a la pirámide triangular

2. Encierren en las vistas de los cuerpos que hay debajo, aquellos que correspondan al prisma triangular que está en la pantalla del computador. Si quieren pueden mover el prisma.



- a. Completen la siguiente tabla en relación con las representaciones que si corresponden con el prisma triangular.

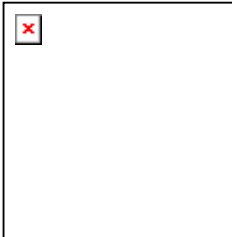
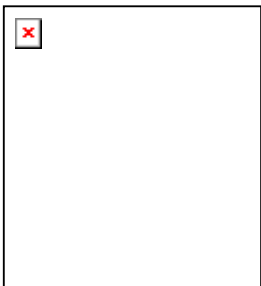
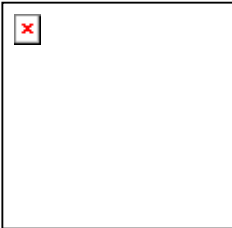
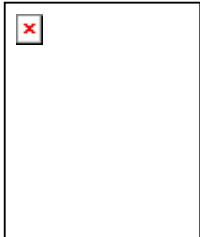
POSICIÓN	Qué componentes observas

b. Escriban qué pasa con los componentes que no se observan por la posición que tiene la pirámide en cada caso

c. Completen la siguiente tabla en relación con las representaciones que no corresponden con el prisma triangular.

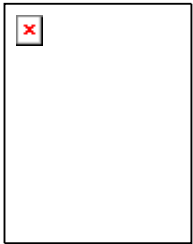
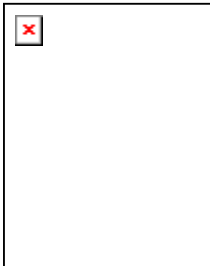
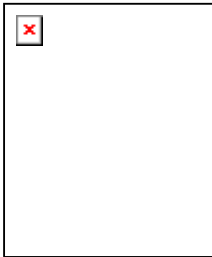
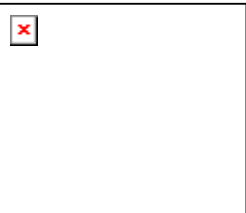
POSICIÓN	Porqué no corresponde a la pirámide triangular

3. Muevan la pirámide que tienen en la pantalla del computador para colocarla en la primera posición que ven a continuación, luego colóquenla en la segunda posición y así sucesivamente. Completen el cuadro.

posiciones				
Que partes alcanzas a observar				

a. Indiquen los elementos de la pirámide que cambian (desde el observador) cuando ésta cambia de posición.

4. ¿Qué componentes y propiedades se conservan cuando la pirámide cambia de posición?
5. Muevan el prisma que tienen en la mano para colóquenlo en la primera posición que ven a continuación, luego colóquenlo en la segunda posición y así sucesivamente. Completen el cuadro.

posiciones				
Que partes alcanzas a observar				

- a. Indiquen los elementos de la pirámide que cambian (desde el observador) cuando ésta cambia de posición.
- b. ¿Qué componentes y propiedades se conservan cuando la pirámide cambia de posición?
- c. Escriban el análisis de las siguiente afirmación “las características de los prismas y pirámides no se alteran cuando éstas se mueven”



TAREA 2 Representación bidimensional de prismas y pirámides

1. Observen detalladamente cada uno de los cuerpos y realicen los siguientes puntos.
 - a. Dibujen la pirámide triangular.
 - b. Dibujen la pirámide cuadrangular.
 - c. Dibujen el prisma cuadrangular.
 - d. Dibujen el prisma triangular.
2. Observen el prisma y la pirámide desde distintos puntos de vista. Muévanlos, rótenlos, gírenlos. Para que los puedan ver en distintas posiciones.

Ahora dibujen cada uno de los cuerpos desde las siguientes posiciones teniendo en cuenta las partes que le varían desde cada posición.

a. Desde arriba

Prisma	Pirámide

b. Desde un lado (lateral)

Prisma	Pirámide

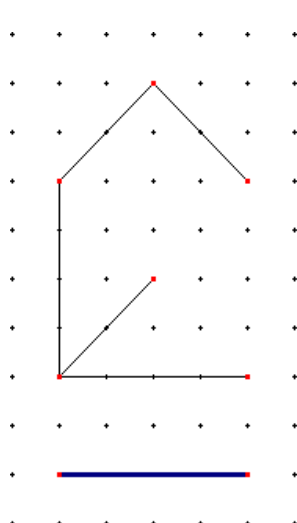
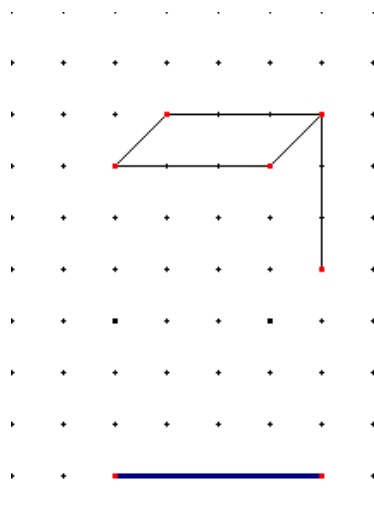
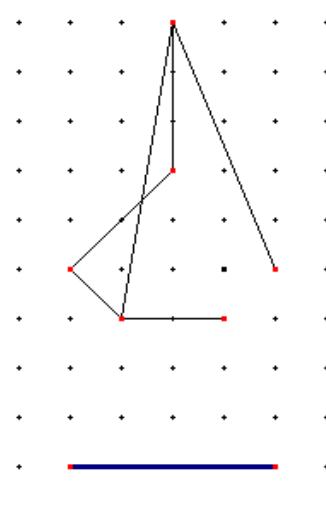
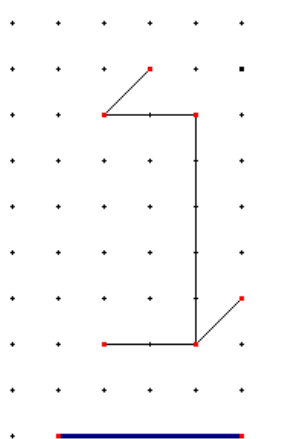
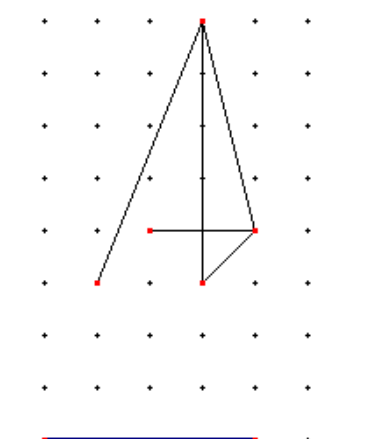
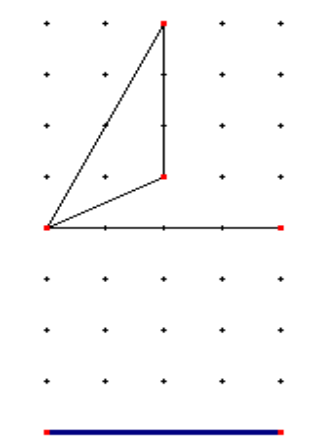
c. Desde el frente.

Prisma	Pirámide

d. Desde abajo.

Prisma	Pirámide

3. En la siguiente retícula se encuentra una parte de la representación de un cuerpo, complétenlo y digan a qué solido corresponde.

		
_____	_____	_____
		
_____	_____	_____

4. De acuerdo a la actividad anterior podemos decir:
“tanto los prismas como las pirámides las podemos representar en distintas posiciones y sus características fundamentales no cambian” expliquen lo que entienden de dicha afirmación.

TAREA 3 desarrollos de prismas y pirámides



1. Desarmen la pirámide triangular, la pirámide cuadrangular, el prisma triangular y el prisma cuadrangular para observar sus desarrollos y contesten:

- ¿Qué diferencias encuentran entre las pirámides armadas y desarmadas?
- ¿Qué componentes no varían en las pirámides al estar armadas o desarmadas?
- ¿Qué diferencias encuentran entre los prismas armados y desarmados?
- ¿Qué componentes no varían de los prismas al estar armados o desarmados?
- Marca con una x los componentes que conforman cada representación:

Representación del cuerpo armado (TRIDIMENSIONAL)

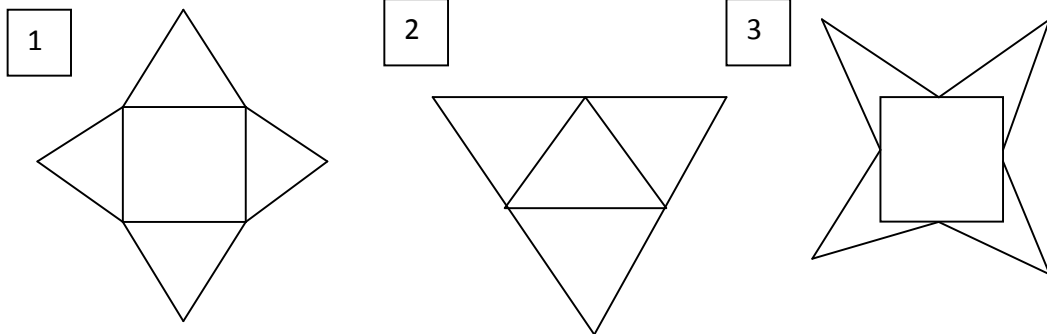
- Caras - Es plano
- Lados - Tiene vértices
- Aristas - Es sólido
- Tiene altura - tiene puntas

Representación del cuerpo desarmado (BIDIMENSIONAL)

- Es plano - Tiene vértices
- Está formado por polígonos - Tiene altura
- Tiene aristas - lados
- Caras

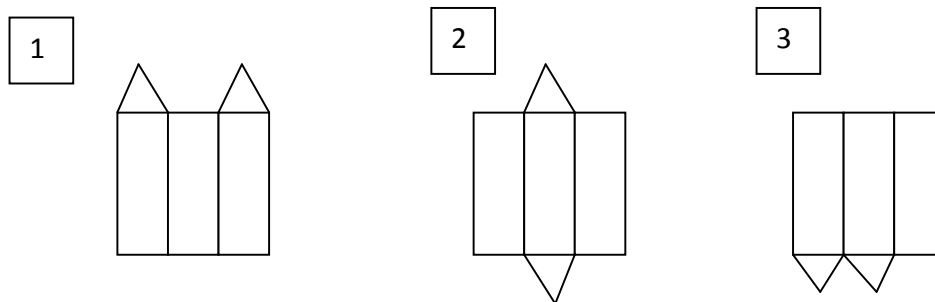
2. De acuerdo a la actividad anterior, ENCIERREN en cada caso la representación que corresponda al cuerpo desarrollado ahí nombrado.

PIRÁMIDE CUADRANGULAR



Explica porqué las otras representaciones no corresponden a la pirámide cuadrangular

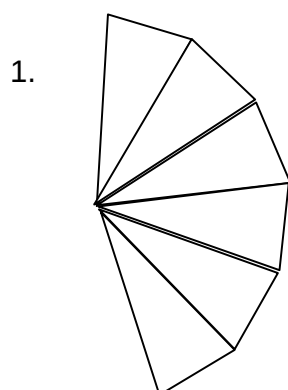
PRISMA TRIANGULAR



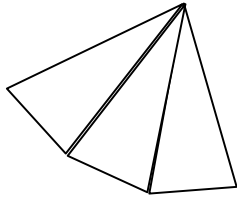
Explica porqué las otras representaciones no corresponden al prisma triangular.

3. Para construir algunos prismas y pirámides tenemos los siguientes desarrollos pero en cada uno hace falta alguna de las componentes:

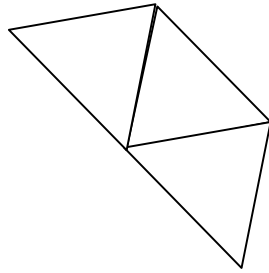
a. Al frente de cada desarrollo dibuja las distintas posibilidades donde se puede ubicar la cara o base faltante.



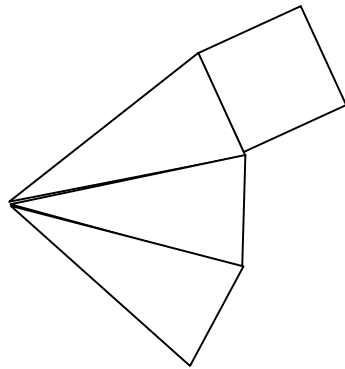
2.



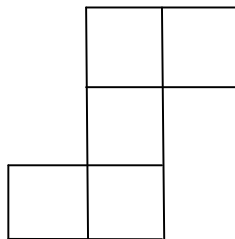
3.

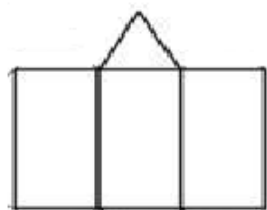


4.



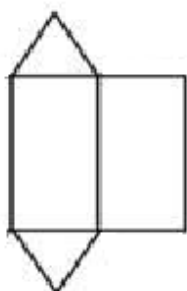
5.



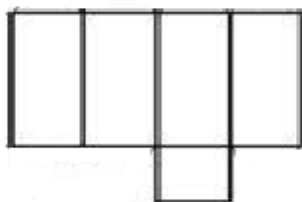


6.

7.

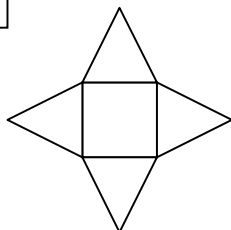


8.

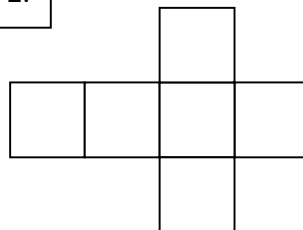


4. Al armar las redes de las figuras ¿Qué cuerpos se forman?

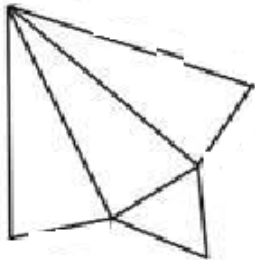
1



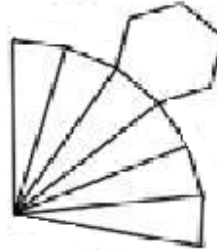
2.



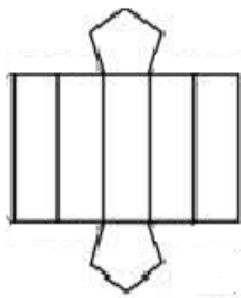
3.



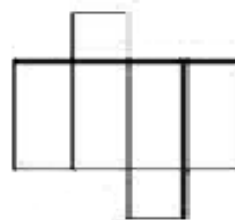
4.



5.



6.



|

TAREA 4 Construcción de la pirámide cuadrangular con regla y compás

Construyamos una pirámide cuadrangular con regla y compás, sigue los siguientes pasos:

1. Traza un segmento AB de cualquier medida, ahora utilizando este segmento como radio, haga un círculo trazando una circunferencia.
2. Prolonga el segmento AB hasta cortar la circunferencia en un nuevo punto el cual llamaremos C para obtener el diámetro de la circunferencia. (segmento que pasa por el centro cortando la circunferencia en dos puntos).
3. Con centro en C y cualquier apertura del compás mayor a AB trazar arcos a cada lado de la circunferencia.
4. Con centro en B y cualquier apertura del compás mayor a AB trazar arcos a cada lado de la circunferencia.
5. Donde se cortan los arcos traza los puntos y únelos para formar una recta
 - **¿qué observas?**
6. Los puntos de intersección de la recta con la circunferencia los llamaremos D y E
7. Une los puntos CD, DB, BE y EC.
 - **¿qué polígono obtienes?**
8. Halle el punto medio de cada lado del cuadrado, cuando los tengas, traza una recta que corte los lados CD y EB y otra recta que corte los lados DB y CE.
9. Con una abertura del compás mayor que el radio (AB) y parados en el centro de la circunferencia (A) corta ambas rectas en dos puntos.
10. Une cada punto obtenido con los vértices del cuadrado (BCDE) para formar triángulos isósceles.
 - **Compara cada triángulo. ¿qué concluyes?**
11. Corta y arma la pirámide cuadrangular.



TAREA 5 Construcción en Cabri 3D de algunas pirámides

GUÍA 1

Construyan la pirámide cuadrangular siguiendo los pasos enunciados a continuación.

1. Construyan un cuadrado en el plano como base.
2. Tracen una recta perpendicular al plano que pase por el centro del cuadrado
3. Construyan una pirámide con base en el cuadrado cuyo ápice esté sobre la recta perpendicular.
4. Construyan otra pirámide con la misma forma de la base cuya recta perpendicular no pase por el centro del cuadrado siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior.
5. Utilice la opción abrir poliedro para desarrollar cada pirámide.
6. Construyan una pirámide recta de distinta base (triangular, pentagonal, hexagonal, etc.)



TAREA 5 Construcción en Cabri 3D de algunas pirámides

GUÍA 2

De acuerdo con las construcciones realizadas contesten:

1. ¿De qué depende la cantidad de caras laterales de la pirámide recta?
2. ¿Qué relación hay entre las caras laterales de la pirámide recta?
3. ¿Qué pasa al construir La pirámide con una recta perpendicular que no pasa por el centro de la base? ¿Qué pueden concluir?
4. Si la primera construcción es una pirámide recta, ¿Cuáles serían las características de este tipo de pirámides?
5. Si la segunda construcción es una pirámide oblicua ¿Cuáles serían las características de este tipo de pirámides?
6. Expliquen las diferencias de la pirámide recta y la oblicua.