

**DIVERGENCIA Y CONTRADICCIÓN:
REVISIÓN DEL CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LÓGICAS NO-CLÁSICAS DE SUSAN HAACK**

Julián Mauricio Valdés Toro

**Trabajo de grado dirigido por el profesor Germán Guerrero Pino, Ph. D., presentado para
aspirar al título de Licenciado en Filosofía**

**Santiago de Cali
Universidad del Valle
Facultad de Humanidades
Departamento de Filosofía
Septiembre de 2011**

**DIVERGENCIA Y CONTRADICCIÓN:
REVISIÓN DEL CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LÓGICAS NO-CLÁSICAS DE SUSAN HAACK**

Julián Mauricio Valdés Toro

**Santiago de Cali
Universidad del Valle
Facultad de Humanidades
Departamento de Filosofía
Septiembre de 2011**

Revision even of the logical law of excluded middle has been proposed as a means of simplifying quantum mechanics; and what difference is there in principle between such a shift and the shift whereby Kepler superseded Ptolemy, or Einstein Newton, or Darwin Aristotle?

W. V. O QUINE, *Two dogmas of empiricism*

Esas ambigüedades, redundancias y deficiencias recuerdan las que el doctor Franz Kuhn atribuye a cierta enciclopedia china que se titula *Emporio celestial de conocimientos benévolos*. En sus remotas páginas está escrito que los animales se dividen en (a) pertenecientes al Emperador, (b) embalsamados, (c) amaestrados, (d) lechones, (e) sirenas, (f) fabulosos, (g) perros sueltos, (h) incluidos en esta clasificación, (i) que se agitan como locos, (j) innumerables, (k) dibujados con un pincel finísimo de pelo de camello, (l) etcétera, (m) que acaban de romper el jarrón, (n) que de lejos parecen moscas.

J. L. BORGES, *El idioma analítico de John Wilkins* en *Otras inquisiciones*

Do I contradict myself?
Very well then I contradict myself,
(I am large, I contain multitudes.)

W. WHITMAN, *Song of myself*

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	7
ABREVIATURAS UTILIZADAS	11
SÍMBOLOS UTILIZADOS	13
0. PRELIMINARES CONCEPTUALES	16
0.1 Sistema lógico	16
0.2 Lógica clásica	18
0.3 Lógica no-clásica	21
0.4 Familia de sistemas lógicos o familia de lógicas	21
1. A LOGIC CANDY STORE: PANORAMA HISTÓRICO DE LA LÓGICA ENTRE 1907 Y 1974	22
1.1 Preliminares metodológicos	22
1.2 Lógica intuicionista y lógica minimal	23
1.2.1 Las ideas intuicionistas: propuesta filosófica de Brouwer	24
1.2.2 Los sistemas B, H y J	26
1.3 Lógicas multivaluadas	28
1.3.1 El sistema $\mathcal{L}_3$	29
1.4 Lógicas modales aléticas	31
1.5 Lógicas modales epistémicas	35
1.6 Apuntes sobre lógicas cuánticas, deónticas y temporales	36
1.7 Conclusión	37

2.	DE LA DIVERGENCIA A LA RIVALIDAD: PRIMERA REVISIÓN DEL CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LÓGICAS NO CLÁSICAS DE SUSAN HAACK	39
2.1	El problema	39
2.2	El planteamiento	41
2.3	La propuesta	42
2.4	Algunos teoremas importantes	46
2.5	Aplicación	53
2.5.1	El caso de $\mathcal{L}_3$	53
2.5.2	S_4	54
2.5.3	La lógica intuicionista H	56
2.6	Modificaciones al criterio	56
2.7	Las dificultades	58
2.8	De la divergencia a la rivalidad	60
2.9	Conclusión	61
3.	INGENUIDAD TIPOGRÁFICA: SEGUNDA REVISIÓN DEL CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LÓGICAS NO CLÁSICAS DE SUSAN HAACK	63
3.1	Traducción	63
3.1.1	Ejemplos de traducciones	65
3.1.1.1	La traducción de H en S_4	65
3.1.1.2	La traducción de la LC en $\mathcal{L}_3$	66
3.1.2	Ingenuidad tipográfica	68
3.2	Violación de la clasificación	68
3.2.1	Lógica paraconsistente J_3	69
3.2.2	J_3 como lógica divergente	70

3.2.3	J_3 como lógica extendida	72
3.2.4	J_3 como violación a la clasificación de Haack	74
3.3	Conclusión	75
ANEXO A: LÓGICA PARACONSISTENTE, EL CASO DE J_3		78
	Introducción	78
1.	Sintaxis	79
2.	Axiomática y deducción para J_3	80
3.	Semántica	80
4.	Consistencia en la paraconsistencia: ©	83
	Conclusión	85
ANEXO B: LÍNEA DEL TIEMPO		86
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		88

INTRODUCCIÓN

Con la aparición en la primera y segunda década del siglo XX de las lógicas multivaluadas y la lógica intuicionista empieza el desarrollo de múltiples sistemas lógicos (no siempre relacionados) que no aceptan ciertas tesis de la Lógica Clásica (LC de ahora en adelante), tales como el principio del *tercero excluido* y el principio de *no contradicción*, entre otros (Cfr. GÓMEZ 2006: IX-XIII). Sin embargo, estas nuevas lógicas se recibieron (y hasta cierto punto aún se reciben) con cierto recelo, tanto en los círculos lógicos como filosóficos y matemáticos. No obstante, hoy, casi un siglo después de su aparición, y gracias (en gran parte) a su aplicabilidad tecnológica y en algunos ámbitos filosóficos, las llamadas lógicas no clásicas se ven, por lo general, como sistemas lógicos legítimos, paralelos a (y tal vez rivales de) la LC. De esta forma, encontramos hoy lógicas multivaluadas, intuicionistas, paraconsistentes, entre otras, que violan uno o varios principios de la LC. Así, por ejemplo, las lógicas multivaluadas violan la semántica clásica (generando también cambios en el sistema deductivo) al proponer más de dos posibles valores de verdad (ver PEÑA 1995). Es de aclarar que bajo cada denominación no se encuentra un único sistema lógico, sino un conjunto de ellos (familia); y, en tanto conjuntos, existen intersecciones entre estos. Así pues, por ejemplo, una lógica como la J_3 es, a la vez, paraconsistente y multivaluada.

Por otro lado, y al mismo tiempo que aparecen tales sistemas lógicos no clásicos, aparecen también ciertos sistemas lógicos que no parecían contradecir ninguna tesis de la LC, sino que (en cambio) parecían sólo ampliar el lenguaje, los teoremas y reglas de inferencia de esta (Cfr. ROBLES GARCÍA 1995: 67). Un ejemplo de tales sistemas lógicos son las lógicas modales, entre las que encontramos a los sistemas T, S4 y S5 que agregan los operadores de necesidad ($\Box$), posibilidad ($\Diamond$), implicación estricta ($\rightarrow$) y doble implicación estricta ($\leftrightarrow$), con sus respectivos axiomas, definiciones, teoremas y reglas de inferencia. Sin embargo, estos sistemas no parecen violar ninguno de los principios de la LC, manteniendo todos los operadores clásicos, definidos clásicamente, con sus respectivos axiomas y reglas de inferencia tradicionales. Ejemplos de sistemas lógicos que, sin ser LC, no la contradicen (al igual que las lógicas modales) son las lógicas deónticas —que suman vocabulario lógico para referirse a *proposiciones normativas*— y las lógicas epistémicas —que permiten revisar las propiedades lógicas de los conceptos de creencia y conocimiento a partir de nuevo vocabulario, axiomas y reglas de inferencia—, entre otras. Antes de continuar, debo aclarar que tanto los sistemas que no aceptan ciertas tesis de la LC, como los que sólo la amplían, en tanto diferentes de la LC, son llamados Lógicas no clásicas.

Ahora bien, siguiendo a la profesora Gladys Palau de la Universidad de Buenos Aires, sobre las relaciones entre las lógicas no clásicas y la lógica clásica, “las obras más conocidas en habla hispana son seguramente las de Susan Haack, *Deviant Logic* (1974) y *Philosophy of Logics* (1978) [y es] precisamente en la primera de ellas donde se expone el primer criterio para establecer una

clasificación [...] de sistemas lógicos diferentes de la lógica clásica” (PALAU 2002: 24). Sin embargo, como en otro lugar dirá Palau, “la cantidad de avances en lógica producidos especialmente a partir de los años ochenta del siglo XX, han mostrado que [este criterio] es insuficiente e inadecuado, ya que quedan muchos sistemas lógicos actuales fuera de su alcance” (Palau 2002, 34); lastimosamente, renglón seguido, la profesora Palau añade que no se ocupará de hacer una crítica a éste.

Es así que, siendo el criterio de clasificación de sistemas lógicos no clásicos más conocido en nuestro medio, llega a ser importante realizar revisiones de su vigencia a la luz de los avances actuales en lógica. Sin embargo, también es cierto que en nuestro medio filosófico y lógico no se encuentra prácticamente ninguna revisión crítica centrada en tal criterio. Lo más cercano a tal revisión que he logrado encontrar son algunos apuntes realizados por la profesora Palau en su artículo PALAU 1990. Sin embargo, sus apuntes no van encaminados hacia donde yo pretendo ir. De esta forma, en lo relativo al criterio de clasificación de lógicas no clásicas de Haack, sólo se limita a extender el criterio formulando una forma de divergencia (divergencia entre extensiones de la lógica clásica) que no había sido tomada en cuenta por Haack. Sin embargo, como aclararé en el desarrollo de este trabajo, tal extensión en poco afecta la validez del criterio de Haack, y en nada afecta mis posteriores desarrollos en su contra. Debido a esto, en este trabajo pretendo especialmente realizar tal revisión crítica a partir de la aplicación del criterio de Haack a una muestra de la familia paraconsistente; más exactamente, al sistema J_3 de D’Ottaviano y Da Costa. De esta forma, se verá la aplicabilidad o no del criterio de Haack. Igualmente, pretendo revisar las consecuencias, para el criterio de Haack, que trae la existencia de *traducciones* entre lógicas.

De esta forma, el presente trabajo se divide básicamente en tres capítulos. En el primer capítulo reconstruyo el panorama de la aparición de las lógicas no-clásicas, destacando algunos trabajos importantes y las características de los sistemas lógicos no-clásicos más representativos. En el segundo capítulo reconstruyo e interpreto el criterio de clasificación de lógicas no-clásicas de Susan Haack; *i.e.* las diversas definiciones que ella articula, destacando algunas consecuencias que se siguen de su formulación, y que serán importantes para el avance de la revisión que realizo. Por último, en el tercer capítulo comienzo con la revisión de las implicaciones —para el criterio de Haack— que tiene la existencia de funciones de traducción entre diferentes sistemas lógicos (revisión que, en efecto, inicio al final del segundo capítulo); y, posteriormente, aplico el criterio de clasificación de Haack a la lógica paraconsistente J_3 , lo cual develará como contradictorio el criterio de Haack al momento de su aplicación. Gracias a esto último, diagnostico un excesivo énfasis en la tipografía en el criterio de clasificación de lógicas no-clásicas de Susan Haack. Ahora bien, antes de empezar con el primer capítulo, he decidido redactar unas pequeñas notas bajo el nombre de **PRELIMINARES CONCEPTUALES**. En tales notas defino algunos conceptos fundamentales para este trabajo, de los cuales parto, y a los cuales nunca pongo en duda. Allí defino los conceptos de *Sistema lógico*, *Lógica clásica*, *Lógica no-clásica* y *Familia de lógicas*.

Antes de continuar, debo aclarar que se puede reconstruir el criterio de Haack a partir de los textos de HAACK 1974 y HAACK 1978; no obstante, debido a la imposibilidad de encontrar alguna copia del primero, he acudido a HAACK 1996 donde se encuentra una reimpresión de este. Así pues, siempre que en este trabajo me refiera a HAACK 1996, me referiré a la reimpresión de HAACK 1974. No utilizo la traducción al español de Eugenio Gil Borjabad de Editorial Paraninfo por considerarla algo inexacta. Efectivamente, donde en el original se lee “that a system should employ a set of connectives differing in meaning from those of classical logic, **while lacking the means to express classical connectives**” (HAACK 1996: 22, la negrilla es mía), Eugenio Gil Borjabad ha traducido “que un sistema debería emplear un conjunto de conectivas que difieren en significado de las de la lógica clásica, **sin omitir el significado que tienen las conectivas clásicas**” (HAACK 1980 trad.: 35, la negrilla es mía). Esta traducción no sólo es inexacta, sino totalmente contraria al sentido de las palabras de Susan Haack; de hecho, la traducción correcta de la frase escrita con negrilla sería “... mientras carece de medios para expresar a las conectivas clásicas”. Este y otros errores de la traducción de Gil Borjabad hacen, en muchos casos, incomprensible la lectura del texto de Haack.

Aclaro también que, en todos los casos de la bibliografía utilizada, tomo sólo textos en su idioma original. En los casos de citas cuyo idioma sea diferente al español —para mantener la fluidez del texto— he decidido traducirlas, incluyendo la cita en su idioma original en una nota a pie de página a fin de que el lector pueda contrastar la traducción. Por otro lado, en relación a las demostraciones que se realizan en este trabajo, todas se encuentran hechas con ayuda de la LC. Si bien esto puede parecer paradójico al tener en cuenta que el tema de este escrito versa sobre lógicas no-clásicas, me siento autorizado a hacer uso de la LC gracias a la preferencia que claramente muestra Haack, en HAACK 1974 y 1996, hacia la LC más allá de las demás lógicas estudiadas en su libro (*Cfr.* HAACK 1996: IX)¹. Así pues, para evitar que este texto se convierta en una exposición de diferentes demostraciones de teoremas de la LC, utilizo en mis demostraciones las reglas de inferencia expuestas en COPI & COHEN 2007. Igualmente, para evitar hacer más largas a las —de por sí extensas— demostraciones, omito algunos pasos excesivamente obvios en estos, especialmente conmutaciones.

Antes de seguir con el resto de este trabajo, y dado que no sé donde más hacer esto, quisiera hacer algunos reconocimientos. Así pues, nada de lo que aquí presento lo hubiera logrado sin la dirección, apoyo, ayuda y recomendaciones bibliográficas de los profesores Germán Guerrero, Guillermo Ortiz y Julián Trujillo, además de todos los profesores que me han guiado en mis estudios. Agradezco también a mi amigo Mateo Moreno, sin su ayuda no hubiera podido acceder a los textos en francés, a él especialmente le debo la traducción de D’OTTAVIANO & DA COSTA 1970. Igualmente, agradezco a Andrés Felipe Castillo, quien, junto al señor Moreno, aguantó mi

¹ De todas las citas y referencias que hago de HAACK 1996, esta es la única que proviene de una página no incluida en la reimpresión de HAACK 1974. Efectivamente, esta referencia proviene de la “Introducción” escrita por Haack especialmente para HAACK 1996.

insistente parloteo en temas lógicos, es debido a las charlas con ellos que al final logré demostrar la tesis de este escrito (aunque ésta haya tenido que cambiar varias veces). No puedo olvidar agradecer también a Katherin Arciniegas Barco por su constante apoyo y acompañamiento, además de su gran paciencia no sólo al aguantarme junto a ella, sino también al tenerme lejos de ella. Por último, nada de lo que he hecho en mi vida podría haberlo hecho sin el apoyo de mis padres, don Julio y doña Aura, les debo a ellos no sólo el apoyo económico, sino también el emocional, además de su gran fortaleza al soportar mi ausencia.

ABREVIATURAS UTILIZADAS

LC	Lógica clásica o Sistema lógico clásico
Ax	Axioma
Teo	Conjunto de teoremas
Val	Conjunto de inferencias válidas
RVal	Conjunto de reglas de inferencia
<i>f.b.f</i>	Fórmula bien formada
sii	Si y sólo si
t. q.	Tal que
I	Regla de introducción
E	Regla de eliminación
<i>i.e.</i>	<i>Id est</i> : esto es, es decir,...
<i>e.g.</i>	<i>Exempli gratia</i> : por ejemplo
<i>Cfr.</i>	Confróntese
Ad	Regla clásica de adición
Conj	Regla clásica de conjunción
Conm	Regla clásica de conmutación
De M.	Regla clásica de De Morgan
GU	Regla clásica de generalización universal
IE	Regla clásica de instanciación existencial
IU	Regla clásica de instanciación universal
MP	Regla clásica de modus ponens
MT	Regla clásica de modus tollens

N	Regla modal de necesidad
SH	Regla clásica de silogismo hipotético
Sim	Regla clásica de simplificación

SÍMBOLOS UTILIZADOS

$\mathbb{L}$	Sistema lógico
$\mathcal{S}$	Base deductiva de $\mathbb{L}$
$\mathcal{L}$	Lenguaje de $\mathbb{L}$
i	Semántica o interpretación adecuada de $\mathbb{L}$
$\mathfrak{S}$	Conjunto de <i>f.b.f</i>
v	Función de valuación en semántica de valuaciones
$p, q, p_i, \dots$	Variables proposicionales
$\neg$	Operador básico de negación de $\mathbb{L}$
$\wedge$	Operador de conjunción de $\mathbb{L}$
$\vee$	Operador de disyunción de $\mathbb{L}$
$\rightarrow$	Operador básico de implicación de $\mathbb{L}$, en LC se trata de la implicación material
$\leftrightarrow$	Operador básico de doble implicación de $\mathbb{L}$
$\Diamond$	Operador de posibilidad de $\mathbb{L}$
$\Box$	Operador de necesidad de $\mathbb{L}$
$\rightarrow$	Operador de implicación de Monteiro de $\mathfrak{L}_3$
$\sim$	Operador opcional de negación, en J_3 y demás lógicas paraconsistentes es la negación fuerte
$\odot$	Operador de consistencia de J_3
$\rightarrow$	Operador de implicación estricta de los sistemas S1 a S5
$\Leftrightarrow$	Operador de doble implicación estricta de los sistemas S1 a S5
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Variables de proposiciones simples o complejas
Δ, Γ	Conjuntos de proposiciones

$\vdash$	Símbolo de derivación lógica
$\nvdash$	Símbolo de negación de derivación lógica
$\models$	Símbolo de consecuencia lógica
$\not\models$	Símbolo de negación de consecuencia lógica
$\mathfrak{K}$	Modelo de Kripke
e	Función de valuación al interior de un modelo de Kripke
$\subset$	Operador de subconjunto
$\subseteq$	Operador de subconjunto o igualdad
$\in$	Operador de pertenencia
$\notin$	Operador de negación de subconjunto
$\notin$	Operador de negación de pertenencia
$-$	Operador de diferencia: $x \in A - B \stackrel{\text{def}}{=} x \in A \wedge x \notin B$
$\cap$	Operador de intersección
$\emptyset$	Conjunto vacío
$=$	Símbolo de igualdad
$\neq$	Símbolo de negación de igualdad
$\forall$	Cuantificador universal
$\exists$	Cuantificador existencial
Φ, Ψ	Variables de predicados
$x_1, x_2, \dots$	Variables
$c_1, c_2, \dots$	Constantes
$t_1, t_2, \dots$	Términos
$F, G, H, \dots$	Predicados
$f, g, h, \dots$	Funciones

def

Símbolo de definición

$\rightarrow\leftarrow$

Contradicción

■

Símbolo de final de la demostración

O. PRELIMINARES CONCEPTUALES

Antes de dar paso al primer capítulo, realizo algunas definiciones que permitirán comprender mejor los posteriores desarrollos de este trabajo, y que se encuentran en su base. Así pues, me dispongo a definir los conceptos 1) sistema lógico, 2) Lógica Clásica, 3) lógica no-clásica y 4) familia de sistemas lógicos.

0.1 Sistema Lógico

En todo este trabajo entenderé el concepto *sistema lógico* $\mathbb{L}$ como un *sistema deductivo* o *base deductiva* $\mathcal{S}$ sobre un *lenguaje* $\mathcal{L}$ con una cierta *interpretación* i o *semántica adecuada*.

$$\mathbb{L} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{L}, i \rangle^2$$

El *Lenguaje* $\mathcal{L}$ sobre el que versa $\mathcal{S}$ es particular a cada $\mathbb{L}$, y varía entre diferentes lógicas³. No obstante, es más o menos general que, en el caso del nivel proposicional, $\mathcal{L}$ sea el conjunto constituido por las letras proposicionales o $p, q, r, s, \dots$ o $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, los símbolos de conectivos lógicos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, etc. y los símbolos auxiliares (especialmente los paréntesis $(,)$) (Cfr. ORTIZ a: 6). Debe ser resaltado que diferentes lógicas pueden llegar a usar diferentes conectivos; sin embargo, la diferencia entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ en relación al conjunto de conectivos usados puede ser solamente aparente, esto es, $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. Ello es posible dado que una misma lógica puede ser presentada con diferentes conjuntos de conectivos (*conjunto completo de conectivos*⁴), y esto último es posible debido a que los conectivos en muchos casos son interdefinibles⁵. Por último, toda lógica posee ciertas reglas de formación que definen el conjunto de fórmulas bien formadas (f.b.f) $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{L}$ (Cfr. ORTIZ a: 6-8).

Por otro lado, un *sistema deductivo* o *base deductiva* $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{L}$ puede presentarse en dos estilos diferentes: *tipo Hilbert* (o *axiomático*) o *tipo Gentzen* (o de *deducción natural*). En el primer caso, el *sistema deductivo* se encuentra determinado por un conjunto de axiomas (o esquemas

² Como se verá en poco, la inclusión de $\mathcal{L}$ en esta formulación es redundante, pues la caracterización de $\mathcal{S}$ incluye a $\mathcal{L}$; no obstante he decidido dejarlo aquí, puesto que lo considero un elemento clave.

³ Una misma lógica pueda presentarse en diferentes $\mathcal{L}$, caso en el cual las diferencias entre ambas presentaciones son sólo de notación, sin constituir ninguna diferencia más profunda.

⁴ Un *conjunto completo de conectivos* es un conjunto de conectivos que cumple con la particularidad que “todos los otros conectivos se pueden definir en términos de ellos” (ORTIZ a: 17).

⁵ De este modo, se puede presentar a LC usando solamente o $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$ o $\{\neg, \rightarrow\}$, lo mismo que usando el conjunto de todos los conectivos, dado que, por ejemplo, $p \vee q$ es equivalente a $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ o $(\neg p \rightarrow q)$ (Cfr. ORTIZ a: 17).

axiomáticos)⁶ y reglas de inferencia, de forma que el determinado sistema lógico queda caracterizado como un conjunto de fórmulas válidas o teoremas, entre los que se encuentran todas las instancias de los axiomas. Se entenderá $\mathcal{S}$ *tipo Hilbert* como un par $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, concibiendo $\vdash$ como una relación entre conjuntos de fórmulas (Δ) y fórmulas de $\mathcal{L}$. Se define $\vdash$ como sigue:

$\Delta \vdash \psi$ si y sólo si existe una sucesión finita $\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \rangle$ de fórmulas de $\mathfrak{F}$, tal que $\varphi_n = \psi$ y para todo $i \leq n$, se cumple alguna de las condiciones siguientes:

φ_i es una instancia de un axioma.

$\varphi_i \in \Delta$.

Para ciertos $i_1, i_2, \dots, i_k$ todos menores que i , φ_i es directamente demostrable a partir de $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}\}$ ⁷ (ORTIZ a: 30).

Esta sucesión es una *demostración* de ψ a partir de Δ ; de forma que ψ es derivable o demostrable a partir del conjunto de fórmulas Δ . Por su parte, toda fórmula derivable a partir de los meros axiomas de $\mathcal{S}$ es un *teorema* de $\mathcal{S}$.

En el caso de un *sistema deductivo* $\mathcal{S}$ *tipo Gentzen*, no se presenta a la base deductiva de las lógicas como sistemas axiomatizados (*i.e.* como conjuntos de axiomas y algunas reglas de inferencia), sino como, básicamente, conjuntos de reglas de inferencia que definen la introducción y eliminación de los diferentes operadores lógicos. Sin embargo, las discrepancias entre los enfoques de Hilbert y Gentzen —en la mayoría de los casos— no van más allá de la forma de presentación de los diferentes sistemas, teniendo como principal diferencia la alegada mayor naturalidad del enfoque de Gentzen. Empero, algunas lógicas son expresables adecuadamente sólo en el enfoque de Gentzen, mientras que otras sólo lo son en el enfoque de Hilbert (Cfr. PALAU 2002: 61-77 y QUESADA 1995: 83-86).

Por último, la *interpretación i* o *semántica adecuada* es la asignación de valores de verdad (que en el caso de la LC son 0 y 1) a los elementos de $\mathfrak{F}$. Dicha asignación es diferente en cada sistema lógico, siendo la semántica más básica la perteneciente a la lógica proposicional clásica. En tal semántica, las proposiciones simples reciben uno y solamente uno de los valores 1 y 0. Así, en la LC, una proposición negada se interpreta por una función definida de $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, de forma que si la proposición simple sobre la que recae la negación toma el valor 0 (ó 1), su negación toma el valor 1 (ó 0). Por otro lado, una proposición compuesta con conectivos binarios se interpreta por funciones definidas de $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, generando las conocidas tablas de verdad que, en cierta forma, definen a los diferentes conectivos clásicos. Se dice que esta semántica es verifuncional o veritativo-funcional dado que en ella el valor de verdad de las proposiciones

⁶ “Un axioma es una regla de la forma $\langle \emptyset, \psi \rangle$. Cualquier sustitución de un axioma es directamente demostrable a partir de cualquier conjunto de fórmulas Δ . Cada sustitución será una instancia del axioma” ORTIZ a: 30.

⁷ “Diremos que ψ es directamente demostrable a partir de Δ por la regla [de inferencia] $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, si existe una sustitución σ tal que $\sigma(\varphi) = \psi$ y $\sigma(\Gamma) \subseteq \Delta$ ” ORTIZ a: 30.

compuestas se encuentra determinado por el valor de verdad de las proposiciones simples que la componen. Por último, debo aclarar que el adjetivo “adecuada” no es injustificado, pues considero que una correcta interpretación de un sistema deductivo debe satisfacer el *metateorema de validez* (*Soundness*) —todos los teoremas de $\mathcal{S}$ son tautologías según su semántica— y el *metateorema de completitud*— todas las tautologías según la semántica son teoremas de $\mathcal{S}$ —. Dicho de otra forma, sólo considero como una interpretación adecuada de un sistema de deducción a una semántica que valúe como tautológicos a todos los teoremas de dicho sistema y sólo a ellos.

0.2 Lógica Clásica

Entiendo por lógica clásica al sistema lógico que posee las siguientes características:

a) Es presentado en $\mathcal{L} = \langle p_1, p_2, p_3, \dots, p_n; \neg, \rightarrow \rangle$ para el caso del nivel proposicional, o en $\mathcal{L} = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; c_1, c_2, c_3, \dots, c_n; \neg, \rightarrow; \forall, \exists; R; f \rangle$ ⁸ para el caso de primer orden, mientras $\mathfrak{S}$ se caracteriza por las siguientes reglas de formación para el caso proposicional:

- i) Toda variable proposicional p_i es *f.b.f.*
- ii) Si α es una *f.b.f.*, entonces $\neg\alpha$ es *f.b.f.*
- iii) Si α y β son *f.b.f.* y $\#$ es un conectivo binario, entonces $\alpha\#\beta$ es *f.b.f.*⁹
- iv) Algo es una *f.b.f.* sólo en virtud de las reglas i a iii.

Y $\mathfrak{S}$ se caracteriza por las siguientes reglas de formación para el caso de primer orden:

- i) — Toda variable o constante es un término
— Si f es una función n -aria y $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término
- ii) Una fórmula atómica es una expresión de la forma $R(t_1, \dots, t_n)$ donde R es un símbolo de relación n -ario y $t_1, \dots, t_n$ son términos
- iii) Toda fórmula atómica es *f.b.f.*
- iv) Si α es una *f.b.f.*, entonces $\neg\alpha$ es *f.b.f.*
- v) Si α y β son *f.b.f.* y $\#$ es un conectivo binario, entonces $\alpha\#\beta$ es *f.b.f.*
- vi) Si α es *f.b.f.* y x es una variable, entonces $\forall x \alpha$ y $\exists x \alpha$ son *f.b.f.*

⁸ Es decir, variables, constantes, operadores, cuantificadores, relatores y funtores.

⁹ Como es obvio, para esta presentación de la LC, el único conectivo binario es $\rightarrow$; no obstante, formulo así esta regla para facilitar futuros desarrollos.

vii) Algo es una *f.b.f* sólo en virtud de las reglas iii a vi.

b) Es interpretado de forma bivalente y veritativo-funcional según las siguientes reglas:

$$v(\neg p) = 1 \text{ sii } v(p) = 0$$

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \text{ sii } v(\alpha) = 0 \text{ o } v(\beta) = 1$$

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 \text{ sii } v(\alpha) = 1 \text{ o } v(\beta) = 1$$

$$v(\alpha \wedge \beta) = 1 \text{ sii } v(\alpha) = 1 \text{ y } v(\beta) = 1$$

$v(P(t_1, t_2, \dots, t_n)) = 1$ sii $v(t_1, t_2, \dots, t_n) \in v(P)$, t. q. $v(P) \subset D$, donde D (dominio) es parte de un modelo $\mathfrak{M}^{10}$ de T , tal que $T \subset \mathfrak{L}$.

$$v(\forall x \Phi(x)) = 1 \text{ si y sólo si para todo elemento } a_i \in D, v(\Phi(x))_{x/a_i} = 1$$

$$v(\exists x \Phi(x)) = 1 \text{ si y sólo si para algún elemento } a_i \in D, v(\Phi(x))_{x/a_i} = 1$$

c) Es caracterizado, en el caso de la presentación tipo Hilbert, por los siguientes esquemas axiomáticos (y sus teoremas) para el caso del nivel proposicional (Cfr. ORTIZ a: 16):

$$\text{Ax1. } \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\text{Ax2. } (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$\text{Ax3. } (\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\text{Regla de inferencia} \quad \text{Modus Ponens (MP): } \frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$

Para el caso de primer orden, a los anteriores axiomas se agregan los siguientes tres (Cfr. ORTIZ b: 23):

$$\text{Ax4. } \forall x \varphi \rightarrow \varphi \sigma \text{ donde } \sigma = \{x/t\}, \text{ siempre que } x \text{ aparece libre para } t \text{ en } \varphi.$$

$$\text{Ax5. } \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$$

$$\text{Ax6. } \varphi \rightarrow \forall x \varphi, \text{ si } x \text{ no ocurre libre en } \varphi$$

Para el caso en que el sistema lógico se presente tipo Gentzen, la característica c) queda reformulada como sigue:

¹⁰ Esto es, una estructura $\mathfrak{M} = \langle D, e \rangle$ donde el conjunto D es el dominio, tal que todas las constantes, relatores y funtores de T son representados en éste gracias a la función de interpretación e ; de forma que a cada constante c_i le corresponde un elemento en D , a cada functor n -ario $f \in F$ una función n -aria $f: D^n \rightarrow D$, y a cada relator n -ario $P \in R$ una subconjunto $e(P) \subset D^n$. Véase ORTIZ b: 14 y ss.

c') Es caracterizado por las siguientes reglas de deducción natural (y sus reglas derivadas) para el caso del nivel proposicional (Cfr. PALAU 2002: 31):

1. Introducción de $\wedge$ ($I \wedge$):	$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$	3. $I \vee$:	$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$
2. Eliminación de $\wedge$ ($E \wedge$):	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha \quad \beta}$	4. $E \vee$: ¹¹	$\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{c} [\alpha] \quad [\beta] \\ \vdots \quad \vdots \\ \gamma \quad \gamma \end{array}}{\gamma}$
5. $I \rightarrow$:	$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}$	7. $I \neg$:	$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \beta \wedge \neg \beta \end{array}}{\neg \alpha}$
6. $E \rightarrow$:	$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$	8. $E \neg$:	$\frac{\neg \neg \alpha}{\alpha}$

Para el caso de primer orden, a las anteriores reglas se agregan las siguientes (Cfr. MANZANO & HUERTAS 2004: 370 y 376):

9. $I \forall$:	$\frac{\begin{array}{c} [c] \\ \vdots \\ A(c) \end{array}}{\forall x A}$	para c una constante de $\mathcal{L}$
10. $E \forall$:	$\frac{\forall x A}{A(t)}$	para t un término cerrado cualquiera ¹² de $\mathcal{L}$
11. $I \exists$:	$\frac{A(t)}{\exists x A}$	para t un término cerrado cualquiera de $\mathcal{L}$
12. $E \exists$:	$\frac{\exists x A}{A(c)}$	para c una constante de $\mathcal{L}$

Igualmente, llamo Lógica Clásica a cualquier otro sistema lógico equivalente al aquí presentado tanto en el sistema deductivo como en la semántica. De esta forma, también considero como LC a otras axiomatizaciones de la lógica clásica proposicional y de la lógica clásica de primer orden

¹¹ Los corchetes indican que la fórmula es una hipótesis.

¹² Esto es, una variable ligada o una constante cualquiera.

expresadas en otros lenguajes. Dada la falta del *metateorema de completitud* y la carencia de *decibilidad* de las lógicas de órdenes superiores (Cfr. MANZANO y HUERTAS 2004: 23-24), he decidido no incluirlas como parte de la LC; no obstante, la discusión sobre el carácter de estos sistemas se encuentra, hasta cierto punto, aún abierto hoy. Por ello he decidido justificar su ausencia aquí principalmente en el hecho que la discusión sobre las relaciones entre la LC y las lógicas no-clásicas se centra exclusivamente en los niveles proposicional y de primer orden¹³.

0.3 Lógica no-clásica

Llamo lógica no-clásica a cualquier sistema lógico que en cualquier aspecto se diferencie de la anterior caracterización de LC y sus formas equivalentes. A saber, cualquier sistema que use signos no interpretables en los ya existentes en $\mathcal{L}_{LC}$ ($\mathcal{L}$ de LC), o que modifique la semántica clásica o modifique el sistema deductivo clásico.

0.4 Familia de sistemas lógicos o familia de lógicas

Entiendo por *familia de sistemas lógicos* o *familia de lógicas* los conjuntos que reúnen sistemas lógicos con ciertas características comunes, ya sean semánticas, deductivas, o (incluso) de aplicación. Tales familias no son cerradas sino que permiten que sus integrantes se encuentren también en otras familias. Con este concepto no pretendo presentar ningún tipo de teoría clasificatoria de lógicas; en cambio, deseo esquematizar las razones por las que algunas lógicas reciben un mismo título. Tomando un ejemplo, las llamadas lógicas multivaluadas o polivalentes constituyen una familia caracterizada por poseer en sus semánticas más de dos valores veritativos. Esto no evita que la lógica multivaluada $\mathcal{L}_3$ de Łukasiewicz sea igualmente una lógica modal alética al formalizar también los conceptos de necesidad y posibilidad. Espero que en la caracterización histórica de las lógicas no-clásicas queden claras algunas de las características que definen a cada familia tratada.

¹³ No obstante, siguiendo una clara tendencia de los investigadores de estos temas, en lo que viene me centro casi exclusivamente en el nivel proposicional.

**1. A LOGIC CANDY STORE:
PANORAMA HISTÓRICO DE LA LÓGICA ENTRE 1907 Y 1974**

Antes de revisar el criterio de clasificación de lógicas no clásicas de Susan Haack, es pertinente, para una mayor comprensión del papel desempeñado por dicho criterio, detenerse un poco en el contexto histórico en que éste se enmarca. Dicho de otra forma, es conveniente resaltar los profundos cambios al interior de la disciplina científica conocida bajo el nombre de Lógica que se producen después de (e incluso al mismo tiempo que) la estabilización de lo que hoy en día se conoce bajo el nombre de lógica clásica (LC). Así pues, en este capítulo me propongo revisar la historia —aparición y desarrollo— de las llamadas lógicas no-clásicas; las cuales generaron no sólo la concepción de nuevas temáticas de investigación lógica-formal, sino que también avivaron un debate filosófico sobre la naturaleza de la lógica y sobre la relación entre las lógicas no clásicas y la LC. En medio de dicha discusión se encuentra la clasificación propuesta por Haack.

1.1 Preliminares metodológicos

Considero necesario realizar ciertas aclaraciones preliminares antes de comenzar con la caracterización que me propongo en este capítulo.

Primero, dado que no es el objeto de esta monografía realizar una reconstrucción del panorama lógico a partir de 1907 hasta finales de siglo (empresa, por demás, titánica), me he tomado la libertad de acudir, para realizar esta reconstrucción, generalmente a textos de carácter histórico-reconstructivo de las diferentes familias de lógicas no clásicas. Así pues, he decidido abandonar la difícil tarea de consultar a los autores en sus propias obras, perdiendo el rigor del trabajo bibliográfico, pero ganando en la posibilidad de realización de dicha reconstrucción sin afectar el objetivo principal de esta monografía (*i.e.* he decidido abandonar la pretensión de consultar las fuentes originales para evitar realizar un trabajo de investigación centrado más en la caracterización del contexto histórico del problema que me ocupa). No obstante, esto no convierte a esta primera parte del trabajo en una labor sencilla o trivial, puesto que, al no haber podido encontrar textos que realicen dicha reconstrucción para el conjunto total (o al menos parcial) de lógicas no-clásicas, la pesquisa bibliográfica que he debido realizar va más allá de una simple consulta a dos o tres libros de carácter histórico. También debo aclarar que este capítulo constituye tanto una introducción al mundo e historia de las lógicas no-clásicas para el lector no familiarizado con estos temas (de forma que pueda comprenderse a qué viene el trabajo realizado por Susan Haack en HAACK 1974 y 1996), como una invitación a dicho lector a profundizar en lo aquí expuesto.

Segundo, considerando la ingente cantidad de lógicas no-clásicas que han aparecido desde 1907, ocuparme aquí del conjunto de todas ellas no constituye sólo una labor poco práctica (en miras al objetivo principal del trabajo completo), sino una empresa que creo imposible de realizar siquiera en una vida. Debido a esto, he recurrido a lo que podría considerarse un criterio de selección (aunque algo arbitrario) bastante práctico: dado que mi objetivo general es reconstruir y criticar el criterio de clasificación de lógicas no-clásicas presentado en HAACK 1974 y 1996, he decidido incluir en esta reconstrucción sólo lógicas o *familias de lógicas* consideradas allí. Esto lo hago dado que creo que dichos sistemas son, precisamente, algunos de los más importantes representantes de las lógicas no-clásicas. Sin decir más sobre este criterio, las lógicas o familias de lógicas que aparecerán en este panorama son¹⁴:

1. Lógica intuicionista y Lógica minimal
2. Lógicas multivaluadas
3. Lógicas modales (aléticas)
4. Lógicas (modales) epistémicas¹⁵

Tercero y último, considerando que esto es sólo una contextualización para entender mejor el trabajo de Susan Haack, no pretendo profundizar demasiado en cada uno de los numerales anteriores, sino solamente generar un rápido panorama, pero lo suficientemente riguroso y completo, para contextualizar al lector en la problemática abordada por Haack. Debido a esto, la exposición de cada numeral será relativamente corta, centrada en los sistemas lógicos del nivel proposicional, pero pretenderá mostrar por lo menos la esencia de cada uno de dichos sistemas o familias.

1.2 Lógica intuicionista y lógica minimal

Tradicionalmente se ha entendido por *lógica intuicionista* al sistema propuesto por Heyting en 1930 (Cfr. BOBENRIETH 1996: 135-136; GÓMEZ 2006: 136-137; VAN DALEN 1986: 228; y KNEALE & KNEALE 1962: 677) que pretende formalizar las ideas que Brouwer defendiera especialmente en sus textos de 1907, 1908 y 1912 llamados *Over de grondslagen der wiskunde* (*Sobre los fundamentos de las matemáticas*), *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (*La no-fiabilidad de los principios lógicos*), e *Intuitionisme en formalisme* (Intuicionismo y formalismo) respectivamente (Cfr. VAN DALEN 1986: 227-228 y EPSTEIN 2001: 272-276). No obstante, el concepto de lógica

¹⁴ Los siguientes numerales no son todos los tratados por Haack, pero sí son todos tratados por ella en HAACK 1974 y 1996. He decidido eliminar de esta lista a los Lenguajes presuposicionales de van Fraassen, las lógicas cuánticas, las lógicas (modales) deónticas y las lógicas (modales) temporales por razones de espacio, siendo suficientes (a mi entender) los numerales a desarrollar para generar un panorama lógico del momento en que Haack hace su propuesta de clasificación. No obstante, diré algo sobre los elementos omitidos al final del capítulo.

¹⁵ Véase HAACK 1980 (trad. Española de HAACK 1974): 17, y HAACK 1996 (principalmente reimpresión de HAACK 1974): 2. Con respecto al pasaje al que remito aquí, quisiera hacer la aclaración de que Haack ni usa el término modal para referirse a 4 ni el término alético para 3; la razón por la que me aparto de la denominación de Haack será expuesta al comienzo de la sección dedicada a 3.

intuicionista antes que ligado a un sistema formal determinado, lo entiendo relacionado a las ideas sostenidas por el intuicionismo en tanto escuela o corriente filosófico-matemática (corriente fundada precisamente por los citados textos de Brouwer). Por tal razón, he decidido desligar el título de *lógica intuicionista* del sistema presentado por Heyting, siendo este último tan sólo un sistema lógico más entre los que pretenden formalizar las ideas intuicionistas. Así pues, antes que una lógica intuicionista, concibo una *familia de lógicas* bajo el nombre de *Lógicas Intuicionistas*, familia caracterizada por la pretensión de representar formalmente algunas ideas básicas de dicha escuela. Dentro de tal familia incluyo al menos tres sistemas lógicos: *Lógica intuicionista de Heyting* (H), *Lógica minimal de Johansson* (J) y *Lógica intuicionista de Kolmogorov* (B —por Brouwer—) (Cfr. BOBENRIETH 1996: 132-136 y 141-146)¹⁶.

1.2.1 Las ideas intuicionistas: propuesta filosófica de Brouwer

El intuicionismo, antes que una concepción sobre la lógica, es una concepción filosófica sobre la naturaleza de las matemáticas; siendo sus ideas lógicas tan solo consecuencia de su filosofía de las matemáticas. Brouwer planteaba que la matemática es exclusivamente una actividad mental, de forma que los objetos matemáticos y sus propiedades son realmente construcciones mentales (Cfr. VAN DALEN 1986: 227). Y en tanto actividad mental, las matemáticas nacen (y se *construyen* a partir) de la *intuición* que posee el intelecto humano sobre el tiempo:

[El intuicionismo] considera la disgregación de los momentos de la vida en partes cualitativamente diferentes susceptibles de reunión sólo en tanto permanecen separados en el tiempo, como el fenómeno fundamental del intelecto humano, pasando por la abstracción de su contenido emocional se encuentra el fenómeno fundamental del pensamiento matemático [en el cual] [...] lo continuo y lo discreto están unidos, dando paso inmediatamente a la intuición del continuo lineal [...] (BROUWER, *Intuicionismo y formalismo* (1912): 80 citado en EPSTEIN 2001: 272-273)¹⁷.

¹⁶ Antes de seguir con más detalles, debo aclarar que si bien ubico en esta presentación a H, J y B en un mismo grupo y bajo un mismo nombre, Haack no parece hacerlo explícitamente. No obstante, ella sí se encuentra al tanto de la discusión que se presenta sobre si J representa mejor a la concepción intuicionista que H. De hecho, ella misma afirma que “The minimal calculus represents the set of intuitionistically valid formulae better than the Heyting calculus.” (HAACK 1996: 102), mientras en otro lado dice que “the Heyting and Johansson calculi are perhaps, in view of their relative entrenchment, the most serious candidates for the title ‘Intuitionist logic’” (HAACK 1996: 95), afirmación que hace bastante extraño el hecho de haber diferenciado entre *Lógica intuicionista* y *Lógica minimal* usando tales nombres en HAACK 1996: 2. Sea como sea, no creo alejarme demasiado de Haack como para evitar una comprensión de su propuesta de clasificación, al optar por una posición pluralista que incluya bajo el título de lógicas intuicionistas tanto a H, como a J y a B, dejando un poco de lado la cuestión de si alguno de tales sistemas debería ser llamado *la* lógica intuicionista.

¹⁷ En el original: “[The intuitionism] considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time, as fundamental phenomenon of human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking [where] [...] the continuous and discrete are united, gives rise immediately to the intuition of the linear continuum [...].”

Ahora bien, al *construirse* las matemáticas mentalmente a partir de la intuición temporal, sólo son objetos y propiedades matemáticos aquellos efectivamente *construidos* por el intelecto humano. El intuicionismo es, entonces, una forma de constructivismo; *i.e.* sostiene que sólo se puede considerar como conocimiento matemático aquel obtenido mediante pruebas constructivas o directas (Cfr. BOBENRIETH 1996: 131-132; VAN DALEN 1986: 227-228; EPSTEIN 2001: 273).

Por otro lado, Brouwer consideraba que el lenguaje matemático no era sustancial a las matemáticas en tanto estas son una actividad completamente mental, siendo el lenguaje solamente necesario por motivos de comunicación (Cfr. VAN DALEN 1986: 227). En lo relacionado con la lógica, Brouwer la concebía, al contrario de la corriente logicista, no como el fundamento de las matemáticas, sino como una mera formalización *a posteriori* del razonamiento matemático (Cfr. HAACK 1996: 91). Dicha concepción de la lógica la hace revisable a la luz de si representa bien o no al razonamiento matemático; o más exactamente, al razonamiento matemático en la concepción constructivista de Brouwer. Ahora bien, dado que la LC acepta como válidos, por ejemplo, a razonamientos indirectos (reducción al absurdo), debe haber algo mal en ella. Así, Brouwer encamina su crítica contra los principios clásicos de tercero excluido $\alpha \vee \neg\alpha$ y de eliminación de la doble negación $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$, ambos básicos en las demostraciones indirectas.

Con relación al principio de tercero excluido, Brouwer lo rechaza dado que, según él, éste fracasa en el contexto de conjuntos infinitos, puesto que una disyunción valdría en el razonamiento matemático sólo si se *construyera* una prueba de alguno de sus dos componentes. Tomando un ejemplo, la conjetura de Goldbach, al no ser cierto que se haya construido una prueba matemática de que todos los números pares sean la suma de dos primos, ni de lo contrario, no valdría la instanciación del tercero excluido que dice que “se ha construido una prueba de que todo número par es el resultado de la suma de dos primos o se ha construido una prueba de que no es el caso que todo número par sea el resultado de la suma de dos primos”; siendo este un ejemplo que imposibilita la afirmación de la supuesta validez universal de $\alpha \vee \neg\alpha$ ¹⁸. En el segundo caso, se justifica su exclusión dado que $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ descansaría en la aceptación del principio de tercero excluido, de forma que, como *es verdad que* $\alpha \vee \neg\alpha$ y no es verdad que $\neg\alpha$, debe ser verdad que α ; y es precisamente tal teorema sobre el cual recae especialmente la crítica intuicionista.

Por otro lado, en la lógica de primer orden, Brouwer rechaza el teorema que permite pasar de la negación de una proposición universal a la afirmación de una proposición existencial, $\neg\forall x(\Phi x \rightarrow \Psi x) \rightarrow \exists x(\Phi x \wedge \neg\Psi x)$ ¹⁹. Lo anterior, puesto que si, por ejemplo, hemos refutado “el enunciado universal $[\forall x(Fx \rightarrow Gx)]$ mostrando que este lleva a una contradicción, no estaríamos más cerca

¹⁸ Nótese que al considerarse la lógica como una formalización del razonamiento matemático, $\alpha \vee \neg\alpha$ no significa que sea el caso que α o que sea el caso que $\neg\alpha$, sino que se ha construido una prueba de que es el caso que α o una prueba de que es el caso que $\neg\alpha$. Este aspecto del intuicionismo pone en duda su supuesta divergencia con la LC.

¹⁹ Por ejemplo, el paso de “no todos los conjuntos son infinitos” a “existe un conjunto que no es infinito”.

de descubrir [*construir*] una cosa llamada A de la cual podamos afirmar $FA \wedge \neg GA$, y entonces no deberíamos tener derecho a afirmar la proposición existencial” (KNEALE & KNEALE 1962: 676)²⁰.

1.2.2 Los sistemas B, H y J

Para formalizar de alguna forma el razonamiento matemático intuicionista en el nivel proposicional, se presentó primero el sistema B de Kolmogorov en 1925 tomando los axiomas de la implicación propuestos por Hilbert en 1923²¹ y agregando $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ como único axioma para la negación. Sin embargo, el sistema lógico que mayormente se conoció como lógica intuicionista (como antes afirmé) es el sistema H de Heyting publicado en 1930 en el artículo *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* (Las reglas formales de la lógica intuicionista) (Cfr. BOBENRIETH 1996: 135). Dicho sistema tenía la particularidad de no aceptar la interdefinibilidad de las conectivas lógicas, presentándose, por lo tanto, en $\mathcal{L} = \langle \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$ ²², con las mismas reglas de formación que la LC, y con los axiomas y reglas de inferencia siguientes (Cfr. BOBENRIETH 1996: 136 nota a pie de página 10, EPSTEIN 2001: 276-277 y KNEALE & KNEALE 1962: 678):

- Ax1. $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$
- Ax2. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)$
- Ax3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$
- Ax4. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- Ax5. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- Ax6. $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$
- Ax7. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- Ax8. $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$
- Ax9. $((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)$
- Ax10. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- Ax11. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \neg\alpha$

Reglas de inferencia:

$$\text{MP: } \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha} \quad \text{Conjunción (Conj): } \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

Este sistema evita efectivamente la derivación de los principios de tercero excluido y eliminación de la doble negación. No obstante, como se ve en HAACK 1996: 102, la presencia del axioma 10 de este cálculo (principio del Pseudo-Escoto²³ en su forma implicativa) parece violar los principios

²⁰ En el original: “if we succeeded in refuting the universal statement by showing that it involved a contradiction, we should be no nearer to discover a thing called A of which we could assert $FA \wedge \neg GA$, and so should not be entitled to assert the existential proposition”.

²¹ Para más información, véase BOBENRIETH 1996: 131 y 62 nota a pie de página 11 y EPSTEIN 2001: 308-309.

²² Para acortar la presentación de $\mathcal{L}$, de ahora en adelante voy a obviar las variables proposicionales $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

²³ De una contradicción se sigue cualquier proposición.

intuicionistas al permitir demostrar cualquier proposición (sin necesidad de proporcionar una prueba constructiva o directa) a partir de cualquier contradicción. Precisamente por esto es que Johansson propone su sistema minimal en 1936 en el artículo *Der minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus* (El cálculo minimal, un formalismo intuicionista reducido); dicho cálculo J es el resultado de eliminar del anterior sistema H el controvertido axioma 10 (Cfr. BOBENRIETH 1996: 141-146), y así formalizar de una mejor manera las ideas intuicionistas sobre el razonamiento matemático.

Con relación a la interpretación de dichos cálculos, refiriéndome especialmente a H y J, la semántica clásica fracasa. De hecho es imposible definir para H o J una semántica a partir de matrices finitas (i.e. H y J no son verifuncionales, siendo imposible crear tablas de verdad adecuadas para ellos). Por tal razón han sido creadas varias semánticas para estos sistemas, especialmente para H, para el que fueron propuestas la semántica topológica de Tarski y Stone en 1937, las semánticas algorítmicas de Kleene en 1952 y de Gödel en 1958, y la semántica de Kripke en 1963; sin embargo, la más aceptada en la actualidad para H es la última de estas propuestas. En el caso de J, la semántica más aceptada es también una semántica de Kripke, siendo una pequeña variación con respecto a la semántica de H.

Esquemáticamente, una *semántica tipo Kripke*²⁴ consiste en la interpretación de las proposiciones en *modelos de Kripke*. Un modelo de Kripke es una tripleta ordenada $\mathfrak{K} = \langle W, R, e \rangle$ donde W es un conjunto no vacío de *mundos posibles* o *estados de información* $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, R es una relación dentro de W , y e una función de valuación $VP \rightarrow SubW$ ²⁵. Así pues, una fórmula α se mantiene en una semántica de Kripke si y sólo si $\mathfrak{K} \models \alpha$ ²⁶ para todo $\mathfrak{K}$ posible y adecuado para cada sistema lógico; mientras $\mathfrak{K} \models \alpha$ si y sólo si $w_i \models \alpha$ para todo $w_i \in W$. Todo modelo de Kripke para H es un modelo de Kripke tal que R es reflexiva y transitiva²⁷. Ahora bien, las condiciones para que se sostenga una proposición en cualquier $w_i \in W$ son las siguientes (Cfr. EPSTEIN 2001: 277 y GÓMEZ 2006: 146-147):

1. $w_i \models p$ si y sólo si para todo w_j tal que $w_i R w_j$, $w_j \in e(p)$ ²⁸
2. $w_i \models \alpha \wedge \beta$ si y sólo si $w_i \models \alpha$ y $w_i \models \beta$
3. $w_i \models \alpha \vee \beta$ si y sólo si $w_i \models \alpha$ o $w_i \models \beta$
4. $w_i \models \neg \alpha$ si y sólo si para todo w_j tal que $w_i R w_j$, $w_j \not\models \alpha$
5. $w_i \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si para todo w_j tal que $w_i R w_j$, $w_j \not\models \alpha$ o $w_j \models \beta$

²⁴ Propuestas primero para algunas lógicas modales aléticas.

²⁵ Esto es, una función que asigna a cada variable proposicional o proposición simple un elemento del conjunto partes de W .

²⁶ Esto se lee: “ α se mantiene en $\mathfrak{K}$ ”, “ $\mathfrak{K}$ valida α ”, o “ α es consecuencia de $\mathfrak{K}$ ”.

²⁷ Es decir, tal que para todo w_i , se cumple que $w_i R w_i$ (reflexiva); y si $w_i R w_j$ y $w_j R w_k$, entonces $w_i R w_k$ (transitiva).

²⁸ Intuitivamente, una proposición simple se sostiene en w_i si y sólo si la función e dice que p se sostiene en todos los w_j con los que w_i sostiene la relación de accesibilidad R .

En lo relacionado con J, su semántica de Kripke es la misma que para H, con la excepción de la anterior condición 4, que queda reformulada como sigue:

4'. $w_i \models \neg \alpha$ si y sólo si para todo w_j tal que $w_i R w_j$, $w_j \not\models \alpha$ o $w_j \in Q$, donde $Q \subset W$, Q es un conjunto de *mundos posibles* inconsistentes y es R -cerrado²⁹.

Vale la pena hacer notar que tanto H como J poseen teoremas de validez y completitud. Además, las reglas de formación de *f.b.f* de estos sistemas son idénticas a las de la LC.

1.3 Lógicas multivaluadas

A diferencia de las lógicas de la familia intuicionista, las lógicas multivaluadas no se encuentran ligadas por una doctrina filosófica común, sino por una característica formal muy particular: sus semánticas poseen más de dos valores de verdad. Dentro de esta familia encontramos innumerables sistemas lógicos, muchos de los cuales se encuentran, a su vez, agrupados en series; tal es el caso de la lógica $\mathbb{L}_3$ de Łukasiewicz, la cual pertenece a la serie $\mathbb{L}_n$ donde n puede ser cualquier número entero mayor que 2 representando la cantidad de valores de verdad posibles en una lógica dada, siendo $\mathbb{L}_2 = LC$. Por razones de sencillez y la no necesidad (ni posibilidad) de una exposición exhaustiva, me centraré especialmente en $\mathbb{L}_3$.

La historia de las lógicas multivaluadas se dice generalmente que comienza con la publicación de Łukasiewicz en 1920 de *O logice trójwartościowej* (*Sobre lógica trivaluada*) y de Post en 1921 de *Introduction to a general theory of elementary propositions* (*Introducción a una teoría general de las proposiciones elementales*) (Cfr. GOTTWALD 2007: 680-681, MALINOWSKI 2007: 15, EPSTEIN 2001: 314, PALAU 2002: 136 y BOCHENSKI 1961: 406). No obstante, su historia, sin salirnos de la lógica moderna, puede remontarse hasta algunos artículos de McColl publicados hacia 1897 y ciertas notas de alrededor de 1909 de Peirce no publicadas hasta 1931 en una colección de escritos reunidos por la Universidad de Harvard³⁰.

Con respecto a los sistemas $\mathbb{L}_n$ de Łukasiewicz, estos son las primeras lógicas multivaluadas, siendo desarrollados por él mismo en colaboración con Tarski, especialmente entre 1920 y 1930; su axiomatización fue provista por Wajsberg en 1932 (Cfr. GOTTWALD 2007: 681-682). Por otro lado, otros sistemas multivaluados importantes son el propuesto por Bochvar en *Ob odnom tr'ehznačnom isčisl'enii i 'ego prim'en'enii k analizu paradosov klassičeskogo rasširennogo funkcional'nogo isčisl'enia* (*Sobre un cálculo trivaluado y su aplicación al análisis de paradojas del cálculo funcional extendido clásico*), y el propuesto por Kleene en *On a notation for ordinal numbers* (*Sobre una notación para los números ordinales*), de 1938 y 1939 respectivamente (Cfr. GOTTWALD 2007: 682, URQUHART 1986: 75-76 y PEÑA 1995: 324). Tras esos primeros años, las lógicas

²⁹ Es decir, si $w_i \in Q$ y $w_i R w_j$, entonces $w_j \in Q$.

³⁰ Aunque estas ideas, de una manera informal, pueden rastrearse por toda la modernidad, la edad media y la antigüedad; desde Boole y De Morgan, pasando por Raimundo Lulio hasta el mismo Aristóteles y los epicúreos. Ver MALINOWSKI 2007: 14, GOTTWALD 2007: 680-681, y PEÑA 1995: 323.

multivaluadas han presentado un vertiginoso desarrollo teórico y de aplicaciones tecnológicas, destacando las creaciones de lógicas n -valuadas e infinitamente-valuadas, los desarrollos de tableaux semánticos multivaluados, el desarrollo de sistemas de deducción natural multivaluados, avances algebraicos (como es el caso de la creación de las MV-álgebras), desarrollos de lógica *fuzzy* a partir de los trabajos de 1965 de L. Zadeh, y aplicaciones a electricidad y electrónica³¹.

1.3.1 El sistema $\mathcal{L}_3$

Łukasiewicz, antes de su publicación de 1920, había estudiado con detenimiento los textos lógicos de Aristóteles, de donde sacó el argumento según el cual, al aceptar el principio de bivalencia alética (*i. e* toda *proposición* es bien, o verdadera o falsa) se caía en el determinismo, puesto que *proposiciones* sobre el futuro como “habrá una batalla naval mañana”, al ser necesariamente o verdadera o falsa, estaría predeterminado ya, según su valor de verdad, si efectivamente hay o no una batalla naval mañana. La solución que Łukasiewicz propone para este viejo problema es la asignación de un tercer valor de verdad $\frac{1}{2}$ para proposiciones *posibles* sobre el futuro (Cfr. EPSTEIN 2001: 318)³². De esta forma, se solucionaría este problema, en tanto no serían ni verdaderas ni falsas las proposiciones futuras, actualizándose en su momento su valor de verdad. Dejando de lado los apuntes sobre las motivaciones filosóficas para el cambio de lógica propuesto, paso a exponer algunas particularidades formales de este sistema, comenzando, al contrario que con las lógicas intuicionistas, con su semántica³³.

$\mathcal{L}_3$ presenta una matriz semántica de la forma

$$\mathcal{M} = \langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, D, \bar{D}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$$

$$\text{donde } D = \{1\} \text{ y } \bar{D} = \{0\}$$

Es decir, es trivaluada, su único valor designado³⁴ es 1, y su único valor antidesignado³⁵ es 0; presentándose con el conjunto de conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ (aunque es posible presentarlo sólo con

³¹ Para más información, véase MALINOWSKI 2007: 70-87, y PEÑA 1995: 325-327.

³² Para una discusión sobre la validez del argumento de Aristóteles según la interpretación de Łukasiewicz véase HAACK 1996: 73-90.

³³ Esto, dado que, contrario al caso del intuicionismo, las lógicas multivaluadas aparecieron primero como innovaciones semánticas que como sistemas deductivos propiamente dichos.

³⁴ “Por valor de verdad designado se entiende un valor tal que, si es el valor de verdad de una oración [o proposición] dada, ‘p’, entonces ‘p’ es afirmable (o sea: toda persona al tanto de las cosas hará bien en afirmar ‘p’)” (PEÑA 1993: 34). De forma intuitiva, un valor designado es más o menos equivalente al valor “V” clásico, siendo el valor de verdad de toda tautología; nótese, sin embargo, que una lógica multivaluada puede tener más de un valor designado.

³⁵ “Por valor de verdad antidesignado se entiende un valor tal que, si es el valor de verdad de una oración [o proposición] ‘p’, entonces ‘p’ es negable (o sea: una persona al tanto de las cosas hará bien en afirmar *la negación* [...] de ‘p’)” (PEÑA 1993: 34). De forma intuitiva, un valor antidesignado es más o menos equivalente al valor “F” clásico, siendo el único valor de verdad de toda contradicción; nótese, sin embargo, que una lógica multivaluada puede tener más de un valor antidesignado.

las conectivas $\{\neg, \rightarrow\}$. Para definir los conectivos se presentan las siguientes tablas de verdad (Cfr. GÓMEZ 2006: 12-13 y EPSTEIN 2001: 319):

α	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
β		β	β
1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0

$\alpha \rightarrow \beta$	β	1	$\frac{1}{2}$	0
α				
1	1	$\frac{1}{2}$	0	
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	
0	1	1	1	

Para $\mathcal{L}_3$, una axiomatización propuesta entre otras —y que cumple con los metateoremas de validez y completitud con referencia a la semántica presentada— es la ya referida de Wajsberg, que se presenta en $\mathcal{L} = \langle \neg, \rightarrow \rangle$ (Cfr. EPSTEIN 2001: 328 y GÓMEZ 2006: 48):

- Ax1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
 Ax2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
 Ax3. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
 Ax4. $((\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Regla de inferencia:

$$\text{MP: } \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha} \rightarrow \beta$$

Debido a estos cambios semánticos y sintácticos, no son válidos en $\mathcal{L}_3$ —entre otros— los siguientes teoremas de la LC: $\alpha \vee \neg\alpha$, $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$, $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$, $((\alpha \rightarrow$

$\beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$. Por último, debo apuntar que sus reglas de formación de $f.b.f$ son las mismas de la LC adicionando algunas nuevas para nuevos conectivos definibles.

1.4 Lógicas modales aléticas³⁶

En la familia de lógicas modales aléticas, a diferencia de las anteriores familias, sus miembros no son necesariamente lógicas consideradas rivales de la LC. Así pues, hay lógicas modales aléticas que expanden el lenguaje de la LC para poder manejar los conceptos de necesidad y posibilidad, coincidiendo sus sistemas de cálculo con el de la LC en la sección no modal de ellos. No obstante, otros sistemas se basan en sistemas que parecen contradecir algún teorema de la LC, tal es el caso de la sección modal alética definible al interior de $\mathcal{L}_3$. Es de aclarar, entonces, que lo que une a esta familia de lógicas es la pretensión de formalizar principalmente determinadas concepciones de las nociones de necesidad y posibilidad.

El primer sistema lógico modal alético moderno propiamente dicho aparece en el libro *A survey of symbolic logic (Un estudio de lógica simbólica)* de C. I. Lewis en 1918. No obstante, existen tentativas de desarrollo de una lógica modal ya en el artículo *Implication and the algebra of logic (Implicación y el álgebra de la lógica)* publicado por el mismo autor en 1912, y en los artículos conocidos como *Symbolical reasoning (Razonamiento simbólico)* y el libro *Symbolic logic and its applications (Lógica simbólica y sus aplicaciones)* de H. McColl publicados entre 1880 y 1906 (Cfr. ORAYEN 1995: 301, KNEALE & KNEALE 1962: 548-549, y GOLDBLATT 2006: 4-7). Posteriormente, es el mismo Lewis quien en 1932, junto con C. H. Langford, en un libro llamado *Symbolic Logic (Lógica simbólica)* propone la serie de lógicas S, compuesta por cinco sistemas modales aléticos diferentes S1, S2, S3, S4 y S5, siendo S3 equivalente al sistema ya presentado por Lewis en 1918 (Cfr. ORAYEN 1995: 302).

Antes de exponer unos pocos detalles técnicos, considero necesario aclarar las motivaciones filosóficas de Lewis al proponer sus sistemas. La principal preocupación de este autor expresada en 1912 es la inadecuación de la LC con respecto a la disyunción y la implicación. En el caso de la disyunción, Lewis propone la formulación de una disyunción intencional (i. e. no verifuncional) que formalice la idea de una disyunción natural que no sea verdadera independientemente de la relación entre ambos disyuntos. Es decir, propone un operador que no haga verdadera a una

³⁶ Antes de pasar a dar las referencias históricas y técnicas concernientes a esta sección, quisiera aclarar que “desde hace [...] [algunos] años —desde los trabajos de von Wright de 1951—, la denominación «lógica modal» se emplea también [...] en una acepción más amplia. Además de las modalidades aléticas, existirían modalidades epistémicas [...], existenciales [...] y modalidades deónticas” (DEAÑO 1974: 319), además de las temporales. Así pues, considero como “modalidad” a “cualquier palabra o frase que pueda ser aplicada a un enunciado dado S para crear un nuevo enunciado que hace una aserción sobre el *modo* de verdad de S: sobre cuándo, dónde o cómo S es verdad, o sobre las circunstancias bajo las cuales S puede ser verdad” (GOLDBLATT 2006: 2,3). Debido a esto he decidido no usar las denominaciones de “lógica modal”, “lógica epistémica”, “lógica deóntica” y “lógica temporal” que usa Haack en 1996 y 1974, reemplazándolas por “lógica modal alética”, “lógica modal epistémica”, “lógica modal deóntica” y “lógica modal temporal”, respectivamente. Este apartado trata sólo de lógica modal alética.

proposición de disyunción en que sus componentes no tengan ninguna relación más allá de la veritativo-funcional establecida por el operador clásico (Cfr. BULL & SEGERBERG 1984: 4-5). Por otro lado, con relación a la implicación de la LC (implicación material) Lewis se muestra preocupado por la existencia de algunas de las llamadas *paradojas de la implicación material*:

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \\ \neg\alpha &\rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)\end{aligned}$$

Lo que intuitivamente podría leerse como “una proposición verdadera es implicada por cualquier otra proposición” para el primer caso, y “una contradicción implica cualquier proposición” para el segundo caso. Según Lewis, estas fórmulas (tautológicas en LC) son indeseables, por lo que desarrolla su sistema en 1918, mientras “su propósito es el de construir un cálculo en el que ‘p implica q’ sea sinónimo de ‘q es deducible de p’” (DEAÑO 1974: 316). Para lograr dicho propósito Lewis propone un operador no verifuncional $\rightarrow$ que llama implicación estricta, y un sistema lógico que, como ya fue expresado, equivale al posterior S3, en el que apelando a una noción del concepto de *posibilidad* define $\alpha \rightarrow \beta$ como $\neg \Diamond (\alpha \wedge \neg \beta)$ ³⁷. No obstante, fácilmente se demuestra que en todos los sistemas S son demostrables las ahora llamadas *paradojas de la implicación estricta* (Cfr. CASTRILLO 1989: 69-70):

$$\begin{aligned}\Box\alpha &\rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \\ \neg \Diamond \alpha &\rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)\end{aligned}$$

Que podrían leerse como “toda proposición necesaria es deducible de cualquier otra proposición” y “de toda proposición imposible es deducible cualquier otra proposición”, respectivamente; lo que, a juicio de algunos, deja en las mismas a la supuesta solución de Lewis. No obstante, esto no demerita la creación de los sistemas modales más estudiados.

Ahora bien, según la formulación de 1932 los axiomas de S1 son (Cfr. GOLDBLATT 2006: 7)

- Ax1. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)$
- Ax2. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- Ax3. $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$
- Ax4. $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$
- Ax5. $\alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$
- Ax6. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- Ax7. $(\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow \gamma$

Reglas de inferencia:

³⁷ Antes de continuar, quisiera tan solo aclarar que, de la misma forma que con los conectivos clásicos, $\Diamond$ y $\Box$ son interdefinibles. Así pues, usando a $\Diamond$ puedo definir $\Box\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \Diamond \neg\alpha$, y $\alpha \rightarrow \beta$ de la forma ya señalada; en cambio, usando a $\Box$ puedo definir $\Diamond \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \Box \neg\alpha$, y $\alpha \rightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} \Box(\alpha \rightarrow \beta)$.

$$\text{Conj.: } \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{MP estricto: } \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha}$$

Por su parte, S2 se obtiene agregando Ax8. $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\alpha$ a S1. Con la misma base más Ax8'. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \Diamond\beta \rightarrow \neg \Diamond\alpha)$ se obtiene S3. Con S4 se agrega a S1 el Ax8''. $\Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$. Y por último, S5 se obtiene con S1 más Ax8'''. $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$. Sobre esta misma axiomatización, McKinsey demostró en 1934 que el Ax5 era redundante.

A pesar de las motivaciones de Lewis, “la lógica modal [alética por él propuesta], lejos de su pretensión inicial de rivalizar con la clásica, ha devenido una prolongación de la misma al incrementar sus símbolos y principios con otros símbolos nuevos” (CASTRILLO 1989: 76). Tal transformación de lógica rival en una mera extensión de la LC fue propuesta por Gödel en 1933 en su artículo *An interpretation of the intuitionistic propositional calculus (Una interpretación del cálculo proposicional intuicionista)* junto a la ya referida interpretación de H en S4. En dicho artículo Gödel presenta a S4 a partir de la LC (Cfr. KNEALE & KNEALE 1962: 555):

- Ax0. Todos los teoremas de LC
- Ax1. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$
- Ax2. $\Box\alpha \rightarrow [\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\beta]$
- Ax3. $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

Regla de inferencia:

$$\text{Regla de necesidad (N): } \frac{\alpha}{\Box\alpha} \quad \text{MP: } \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha}$$

A partir de estos axiomas se pueden obtener los demás integrantes de la serie S; así, por ejemplo, en el caso de S5 tan solo adicionando Ax4. $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$. De forma que las lógicas modales de Lewis terminan siendo nada más que la adición a la LC de nuevos operadores y los respectivos axiomas para operar con ellos. Con relación a las reglas de formación de *f.b.f.*, los sistemas de Lewis mantienen las mismas reglas de la LC adicionando las necesarias para los nuevos operadores lógicos.

Pero ¿cuál es la razón para que Lewis haya propuesto no uno sino varios sistemas? Una interesante explicación para esto la proporciona Dalla Chiara al sugerir que las diferentes respuestas a preguntas del tipo “si algo es necesario ¿es necesario que sea necesario?” dan diferentes caracterizaciones a la modalidad “*es necesario que*”; de forma que la selección de los axiomas característicos de cada lógica modal formaliza una diferente concepción de las modalidades aléticas en cada caso (Cfr. DALLA CHIARA 1974: 107-108). Sobre esta pluralidad de concepciones, también se desarrollaron otras lógicas modales aléticas cercanas a la LC como lo hizo Feys en 1937 al crear el sistema T eliminando el Ax3 de la formulación de Gödel.

Con relación a la semántica de estos sistemas, la primera propuesta fue la de Carnap, quien logró formular una interpretación satisfactoria de $S5^{38}$; pero no es sino hasta la creación de las semánticas de Kripke —por Kripke en los artículos *A completeness theorem in modal logic* (Un teorema de completitud en la lógica modal), *Semantical analysis of modal logic* (Análisis semántico de la lógica modal), y *Semantical considerations on modal logics* (Consideraciones semánticas sobre lógicas modales) de 1959 el primero y 1963 los otros dos (Cfr. ORAYEN 1995: 304)— que se logró generar una semántica adecuada para todas las lógicas modales de la serie S y otros sistemas cercanos a estos. Una semántica de Kripke es definida como se hizo en la sección de *Lógica intuicionista*, pero las condiciones para que se sostenga una proposición en cualquier $w_i \in W$ cambian (Cfr. EPSTEIN 2001: 214):

1. $w_i \models p$ si y sólo si $w_i \in e(p)$
2. $w_i \models \alpha \wedge \beta$ si y sólo si $w_i \models \alpha$ y $w_i \models \beta$
3. $w_i \models \alpha \vee \beta$ si y sólo si $w_i \models \alpha$ o $w_i \models \beta$
4. $w_i \models \neg \alpha$ si y sólo si $w_i \not\models \alpha$
5. $w_i \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si $w_i \not\models \alpha$ o $w_i \models \beta$
6. $w_i \models \Box \alpha$ si y sólo si para todo w_j tal que $w_i R w_j$, $w_j \models \alpha$
7. $w_i \models \Diamond \alpha$ si y sólo si para algún w_j tal que $w_i R w_j$, $w_j \models \alpha$
8. $w_i \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si para todo w_j tal que $w_i R w_j$, $w_j \models \alpha \rightarrow \beta$

Además, para lograr mantener la adecuación con cada sistema, las características de R varían, de forma que en T es reflexiva, en S4 es reflexiva y transitiva y en S5 es reflexiva, transitiva y simétrica³⁹ (i. e. es una relación universal). Para todos los casos expuestos existen teoremas de validez y completitud. Además, las reglas de formación de *f.b.f* de estos sistemas son las mismas de la LC más las respectivas reglas para los nuevos conectivos.

Por último, quisiera, aunque sólo sea de paso, hacer referencia a la existencia de lógicas modales aléticas que se alejan de la LC. Uno de dichos casos es la misma lógica $\mathbb{L}_3$ ya expuesta que, como ya he dicho, no valida ciertos teoremas de la LC. Esta lógica es también una lógica modal en tanto en ella son formalizables las modalidades aléticas $\Box$ y $\Diamond$ verifuncionalmente (Cfr. GÓMEZ 2006: 15):

α	$\Box \alpha$	α	$\Diamond \alpha$
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0

³⁸ Para mayores detalles se puede consultar BULL & SEGERBERG 1984: 12-15.

³⁹ Una R simétrica es tal que si $w_i R w_j$, entonces $w_j R w_i$.

Igualmente, dichos operadores modales son definibles dentro del lenguaje básico del sistema, ya que

$$\Diamond \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \alpha \rightarrow \alpha$$

Mientras $\Box$ mantiene su definición en base a $\Diamond$, y por lo tanto, también en términos del lenguaje básico de $\mathcal{L}_3$.

1.5 Lógicas modales epistémicas

Si bien la idea de una lógica epistémica (en sentido moderno) se remonta a von Wright, los primeros desarrollos formales de una lógica de las modalidades epistémicas fueron hechos por J. Hintikka en su libro *Knowledge and belief, an introduction to the logic of the two notions* (Saber y creencia, una introducción a la lógica de las dos nociones) en 1962 (Cfr. GOCHET & GRIBOMONT 2006: 99). La estrategia de Hintikka en este libro fue formular su sistema lógico como una lógica modal alética alterada cercana a LC, en la cual en vez del operador de necesidad $\Box$, se introducía el operador K leído como “se sabe que” (“it is known that”). Por tal razón, la interpretación del sistema propuesto por Hintikka (comúnmente llamado H, pero que aquí llamaremos Hk para evitar confusiones con el sistema H de Heyting) se construye como una semántica de Kripke de la misma forma como está construida la semántica para las lógicas modales aléticas cercanas a la LC cambiando todas las apariciones de $\Box$ por K , y con una R universal (sin apelar a $\Diamond \alpha$ como abreviación de $\neg K_i \neg \alpha$).

El sistema Hk es presentado en $\mathcal{L} = \langle K_1, \dots, K_n, \wedge, \rightarrow, \neg \rangle$, donde $K_i p$ expresa el conocimiento de p por parte de un agente i dado. Sus reglas de formación son iguales a las de la LC adicionando la regla correspondiente para el nuevo operador. Sus axiomas son (Cfr. FREUND 1995: 209)

- Ax0. Todos los teoremas de LC
- Ax1. $(K_i \alpha \wedge K_i (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow K_i \beta$
- Ax2. $K_i \alpha \rightarrow \alpha$
- Ax3. $K_i \alpha \rightarrow K_i K_i \alpha$
- Ax4. $\neg K_i \alpha \rightarrow K_i \neg K_i \alpha$

Reglas de inferencia:

$$\text{N: } \frac{\alpha}{K_i \alpha} \quad \text{MP: } \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Hasta este momento Hk es equivalente a S5, variando sólo en los símbolos usados. No obstante, los subíndices de K permiten un mayor poder expresivo, de forma que se puede expresar el conocimiento de un agente sobre el conocimiento de otro agente diferente ($K_i K_j \alpha$) y el fenómeno del conocimiento colectivo con la introducción del operador de *saber colectivo* C_S sobre un grupo S de agentes, de forma que $C_S \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i \in S} K_{i_1} \alpha, \dots, K_{i_n} \alpha$. Semánticamente, esta posibilidad de expresión genera un cambio significativo que hace diferenciar a Hk de S5: los modelos de Kripke

para Hk deben variar para lograr dar cuenta de la multiplicidad de agentes. Tal cambio consiste en que, dado que los diferentes agentes generan diferentes operadores K_i , cada operador depende semánticamente de una relación de accesibilidad R_i diferente e independiente (Cfr. GOCHET & GRIBOMONT 2006: 105). Así pues, un modelo n-agente de Kripke será el n-tuplo:

$$\mathfrak{K}_{n-agente} = \langle W, R_1, \dots, R_n, e \rangle$$

Por otro lado, de la misma forma que las demás familias, las lógicas modales epistémicas no son sólo un sistema, sino una colección de lógicas que buscan formalizar alguna concepción de modalidades epistémicas (saber y creer principalmente). Debido a esto, podemos encontrar varias lógicas epistémicas, siendo las cercanas a la LC comúnmente modificaciones de sistemas lógicos modales aléticos (tal es el caso de los sistemas S4-epistémico y T-epistémico con relación a los sistemas S4 y T), mientras los lejanos a la LC son contruidos en relación a algún sistema considerado rival de la LC. No se debe olvidar que, aunque los sistemas a los que me he referido son proposicionales, también existen sistemas lógicos de primer orden dentro de esta familia; normalmente extensiones de lógicas proposicionales modales epistémicas.

Una última observación de carácter filosófico. Los sistemas lógicos modales epistémicos han presentado algunos problemas graves en su pretensión de formalizar el uso de conceptos epistémicos. A mi entender, el principal problema sería, por lo menos en el caso de algunos sistemas (como Hk), que bajo la irrestricta aplicación de las reglas MP y N, del conocimiento de cualquier agente i sobre cualquier proposición α , se sigue que el agente conoce todas las consecuencias lógicas de su conocimiento actual, e incluso que conoce todos los teoremas de la LC⁴⁰.

1.6 Apuntes sobre lógicas cuánticas, deónticas y temporales

Finalmente, para resarcir un poco su falta en los desarrollos anteriores, quisiera tan sólo dar algunas referencias sobre las familias de lógicas cuánticas y de lógicas modales tanto deónticas como temporales:

1) Las lógicas cuánticas comparten la idea que si se usa la LC en la física cuántica, se obtienen algunas consecuencias inaceptables al interior de dicho campo científico; razón por la cual la física cuántica sugiere (si no constriñe a) la adopción de una lógica no-clásica (Cfr. HAACK 1996: 148-153 y DALLA CHIARA 1974: 143-144). La primera sugerencia hacia un cambio de lógica al interior de la física cuántica aparece en la sección 5 del capítulo III de *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (*Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*) de von Neumann publicado en 1932; no obstante, sólo se desarrollaría un sistema lógico cuántico hasta 1936 en *The logic of quantum mechanics* (*La lógica de la mecánica cuántica*) de Birkhoff y von Neumann a partir de la interpretación de los conectivos lógicos en operaciones al interior de *retículos de*

⁴⁰ Ver, por ejemplo, la queja de DALLA CHIARA 1974: 114.

Hilbert (Hilbert lattices) (Cfr. DALLA CHIARA, ET AL 2007: 205-210); la principal característica del sistema resultante (BvN) es el abandono del principio distributivo $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Antes de terminar esta breve exposición sobre lógica cuántica quisiera hacer referencia a la existencia de una multitud de lógicas cuánticas; algunas de las más conocidas son las referenciadas por HAACK 1996: lógica trivaluada y lógica de la subjetividad de Destouches-Février (DF₃ y DF respectivamente), y lógica trivaluada de Reichenbach (R₃)⁴¹; además de la lógica cuántica parcial (UPaQL), lógica cuántica de Łukasiewicz (ŁQL)⁴² y lógica cuántica paraconsistente (PQL). Para mayores detalles se puede consultar DALLA CHIARA 1986, DALLA CHIARA, ET AL 2007 y MARTÍNEZ 1995.

2) En el caso de las lógicas modales deónticas, dicha familia agrupa los sistemas lógicos que tratan de formalizar y estudiar conceptos como *obligación* y *permisión*. Su historia comienza con la publicación en 1951 del artículo *Deontic Logic (Lógica Deóntica)* de von Wright. Algunos otros autores que trabajaron sobre lógica deóntica son Prior, Anderson, Kanger y Hintikka, quienes tendieron (de una forma parecida a algunas lógicas modales epistémicas) a desarrollar lógicas deónticas a partir de modificaciones realizadas a lógicas modales aléticas (Cfr. ÅQVIST 1984: 608). Empero, tales desarrollos debían hacerse cuidadosamente, pues algunos teoremas modales aléticos bastante deseables son realmente nefastos en el caso deóntico —tal es el caso de $\Box A \rightarrow A$, puesto que si bien de que algo sea necesario se sigue ese algo, no sucede lo mismo en el caso de la obligación, de forma que de que algo sea obligatorio no se sigue que sea efectivo (como lo sabrá todo aquel que haya infringido una norma)—. Son buenos textos de referencia sobre esta familia McNAMARA 2006, ÅQVIST 1984 y BULYGIN 1995.

3) Y para terminar, las lógicas modales temporales son aquellos sistemas que tratan de formalizar los razonamientos cuya validez depende del tiempo gramatical en el cual se encuentra el enunciado. Para tal fin se ha tendido a crear operadores modales que representen los tiempos de los enunciados (tal es el caso de *P(Juan es político)* que podría leerse “En el pasado Juan es político” o “Juan era político”). Ahora bien, al igual que sucede con otras lógicas modales, es común que se desarrollen sistemas lógicos temporales extendiendo los axiomas y el lenguaje de la LC. En tanto a su historia, el primer desarrollo formal de estas lógicas se le debe a Prior, quien diseñó por primera vez una lógica modal temporal en su libro *Time and modality (Tiempo y modalidad)* de 1957. Algunos textos en los que se puede encontrar más información sobre lógicas modales temporales son BURGESS 1984, ØHRSTRØM & HASLE 2006 y VÁSQUEZ 1995.

1.7 Conclusión

En este capítulo he expuesto los principales rasgos de algunos sistemas lógicos y familias de ellos que aparecen en el panorama histórico de la lógica del siglo XX. Panorama al cual precisamente hace frente el criterio de distinción entre lógicas divergentes y extensiones de la LC de Susan Haack. No obstante, como dije en su momento, no es el objetivo principal de esta monografía

⁴¹ Para consultar pequeños esquemas sobre estas véase HAACK 1996: 172-173 y 176-177.

⁴² Desarrollada sobre las MV-álgebras y no directamente por el lógico polaco.

realizar tal panorama histórico; este trabajo ha sido hecho básicamente por dos razones: 1) permitir una mayor comprensión del criterio de Haack en tanto respuesta a fenómenos históricos muy particulares al interior de la disciplina llamada Lógica, y 2) facilitar la posterior aplicación del criterio de Haack a algunos sistemas, al ya haber sido expuestas aquí sus principales características.

Finalizando toda esta exposición, ahora es fácil ver por qué JACQUETTE 2007: 2 habla del panorama lógico del siglo XX como una *logic candy store*. Es sólo en 1879 que se publica la *Begriffsschrift* de Frege, y es entre 1910 y 1913 que aparece la primera edición de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead. Y sin embargo, al mismo tiempo que se gesta y consolida con dichos libros la llamada lógica clásica, ya en 1907 se encuentra a Brouwer luchando desde un punto de vista filosófico contra esta, y en 1918 y 1920 Lewis y Łukasiewicz, respectivamente, comienzan a desarrollar formalmente los primeros sistemas lógicos que partían del supuesto de la inadecuación de la LC para ciertos razonamientos. Hoy en día, los sistemas lógicos abundan. Habiendo superado la supuesta unicidad de la *razón* expresada en la llamada apodicticidad de la lógica clásica, actualmente no es posible sostener más el dominio incuestionable de esta. Esto no se trata, como podría llegarse a pensar, de investigar si son posibles lógicas no-clásicas; es simplemente un hecho que las hay, y en abundancia. Tal era el propósito de este primer capítulo, mostrar el hecho de la existencia de sistemas no clásicos de lógica. Habiendo pintado a grandes trazos dicho paisaje, me dispongo en lo que sigue a reconstruir el criterio de distinción de Susan Haack.

2. DE LA DIVERGENCIA A LA RIVALIDAD:

PRIMERA REVISIÓN DEL CRITERIO DE CLASIFICACIÓN DE LÓGICAS NO CLÁSICAS DE SUSAN HAACK

Tras haber develado el hecho de la existencia de una multiplicidad de sistemas lógicos, empiezan a mostrarse, igualmente, los problemas filosóficos relacionados. Algunas de las primeras preguntas que vienen a la mente son aquellas que versan sobre la relación existente entre estos sistemas ¿qué resultados se obtienen al compararlos entre sí?, ¿son equivalentes?, ¿qué diferencia se presenta entre ellos? Y más aún ¿qué diferencia presentan las lógicas no clásicas respecto de la LC? Siguiendo a Deaño, “la dificultad estriba en que no sólo no está clara la posible solución de la cuestión, sino ni siquiera el modo adecuado de planteamiento de ésta. Cuando esto ocurre, dicho sea de paso, suele decirse que estamos ante un problema filosófico” (DEAÑO 1974: 324).

El propósito de este capítulo es presentar el criterio de clasificación de lógicas no clásicas que desarrolla Susan Haack en HAACK 1974 —reimpreso en HAACK 1996—, aún sostenido por la autora en HAACK 1978. No obstante, antes que exponer la clasificación de esta filósofa inglesa, la reconstruiré como la respuesta a un problema que va más allá de la necesidad de una taxonomía. Esto es, como una respuesta a la necesidad de comprobar la supuesta rivalidad entre algunas lógicas no-clásicas y la LC. Empero, más adelante mostraré que el criterio de clasificación de Haack, muy a pesar de su objetivo principal, no funciona adecuadamente para decir qué sistemas no clásicos son efectivamente rivales de la LC. Sea como sea, este criterio, aún despojado de su objetivo inicial, se mantiene como el criterio de clasificación más conocido en el medio filosófico (Cfr. PALAU 2002: 34). Para completar la muestra de la propuesta de Haack, terminaré este capítulo aplicando dicha clasificación a algunos sistemas lógicos expuestos en el primer capítulo, a fin de ilustrar cómo funciona la propuesta de esta filósofa. De esta forma, pretendo concluir que, aún fracasando en su objetivo de proporcionar un criterio que diga cuándo un sistema lógico es rival de la LC, la propuesta de Haack es, en principio, defendible como criterio para realizar una clasificación de las lógicas no-clásicas.

2.1 El problema

Aunque sea más un fenómeno histórico que una característica intrínseca de cada lógica no-clásica, es importante destacar que éstas han aparecido en reacción a la supuesta inadecuación de la LC para dar cuenta de todos o de algún tipo de contexto argumentativo. Así por ejemplo, las lógicas modales epistémicas parten de la supuesta inadecuación de la LC para dar cuenta de los argumentos que incluyen relaciones lógicas entre conceptos como conocimiento y creencia; mientras las lógicas multivaluadas parten de la inadecuación de la LC por la gran estrechez de su semántica para dar cuenta de, por ejemplo, enunciados vagos o enunciados sobre el futuro.

No obstante, hay una gran diferencia entre sistemas modales epistémicos como Hk y sistemas multivaluados como $\mathcal{L}_3$. Revisemos el primer caso: Hk se presenta desde un comienzo como un sistema que amplía a la LC; es decir, como una teoría lógica que da cuenta de todos los teoremas e inferencias de las que también da cuenta la LC más los respectivos teoremas e inferencias concernientes al nuevo vocabulario. Lo anterior se expresa en el hecho que la axiomatización de Hk se construye sobre los teoremas de la LC y el MP, agregando tan solo cuatro axiomas nuevos y la regla de *Necesitación* (estos últimos elementos son concernientes al nuevo operador monario “K”). En el segundo caso, $\mathcal{L}_3$, desde su formulación por Łukasiewicz se presenta como una alternativa o rival de la LC, en tanto no todos los teoremas ni inferencias de esta última son válidos desde $\mathcal{L}_3$; de esta forma, este sistema multivaluado no aceptaría afirmaciones válidas al interior de la LC. Usando las palabras de Haack, parece ser que desde la visión del lógico partidario del uso de lógicas como Hk, “su sistema [es] una alternativa a la lógica clásica solamente en el sentido más débil de que debería ser empleado *lo mismo que* la clásica” (HAACK 1996: 2)⁴³; en cambio, para el partidario de sistemas como $\mathcal{L}_3$, “su sistema es una alternativa a la lógica clásica en el sentido fuerte de que su sistema debería ser empleado *en lugar* del clásico” (HAACK 1996: 2)⁴⁴.

En lo anterior vemos cómo Hk parece presentar una relación de suplemento o extensión con la LC; es decir, Hk parece extender a la LC. Por otro lado, $\mathcal{L}_3$ presenta en apariencia una relación de rivalidad o divergencia respecto a la LC; o sea que $\mathcal{L}_3$ en apariencia rivaliza con esta última al no aceptar teoremas e inferencias válidos en dicho sistema. No obstante, históricamente no todos los sistemas lógicos que se han presentado como relacionados de una cierta forma con la LC han estado efectivamente relacionados de la forma pretendida. El principal ejemplo de este fenómeno histórico son las lógicas modales aléticas S4 y S5 de Lewis. Recordemos que los sistemas modales aléticos de Lewis nacen por la acusación de inadecuación de la implicación material de la LC para dar cuenta de los enunciados implicativos del lenguaje natural —inadecuación expresada en las llamadas paradojas de la implicación material—. De esta forma, tanto S4 como S5 pretenden modificar al sistema clásico alegando la invalidez de teoremas clásicos como $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. Así pues, estos sistemas se presentan como rivales de la LC que no aceptan, en primera instancia, algunos de los teoremas de esta última, por lo que *reemplazan* la implicación material con la llamada *implicación estricta*. Como fue mostrado en el capítulo anterior, lejos de rivalizar con la LC, S4 y S5 pueden ser presentados, como lo hizo por primera vez Gödel en 1933, como extensiones de esta al axiomatizarse a partir de los teoremas de la LC y MP más los axiomas correspondientes para los nuevos conectores que incluyen S4 y S5, además de la regla de *Necesitación* correspondiente.

⁴³ En el original: “[the former] takes his system to be an alternative to classical logic only in the weaker sense that it should be employed *as well* as the classical.”

⁴⁴ En el original: “the former takes his system to be an alternative to classical logic in the strong sense that his system should be employed *instead* of the classical [...]”

Siendo esto así, establecer el tipo de relación existente entre la LC y cualquier sistema no-clásico resulta ser una tarea más complicada de lo que parece a primera vista. No es posible, entonces, fiarnos de la forma en que se presenta por primera vez el respectivo sistema. Esto, dado que, como acabo de mostrar, un mismo sistema puede presentarse manteniendo, digamos, una relación de rivalidad con la LC, mientras realmente sostiene una relación de extensión con esta. En la anterior exposición he mantenido deliberadamente —desde el punto de vista de los desarrollos de Haack— una confusión entre los aspectos *sociales* y *formales* de la presentación de un sistema lógico. La delimitación y caracterización de estos aspectos es la estrategia que adopta Haack para proporcionarle al problema de la relación entre la LC y las lógicas no-clásicas un planteamiento claro.

2.2 El planteamiento

La estrategia con la que da comienzo el análisis de HAACK 1974 y su reimpresión en HAACK 1996 consiste en la distinción meticulosa entre lo que arriba he llamado aspectos *sociales* y *formales* de la presentación de un sistema lógico. Dicho de otra forma, Haack distingue entre la presentación de una determinada lógica según las intenciones de sus lógicos partidarios, y la presentación de esta según sus propiedades estrictamente formales. A partir de este momento usaré, como no lo hice en lo anterior, cuidadosamente los respectivos conceptos que resultan del análisis de Haack.

Teniendo en cuenta el aspecto *social* —i.e. las intenciones de los lógicos que proponen las lógicas no-clásicas—, son distinguibles dos tipos de lógicas: *lógicas rivales* y *lógicas suplementarias*. Lógica rival es aquella que se propone “incompatible [...] con el uso del sistema estándar” (HAACK 1996: 2)⁴⁵. Mientras tanto, lógica suplementaria es aquella “cuyo uso es compatible con el uso del sistema estándar” (HAACK 1996: 2)⁴⁶. El problema está en que, por ahora, la única forma en que podemos saber si un sistema es efectivamente incompatible o no con la LC, es confiando en cómo lo presentan sus proponentes. Dicho de otra forma, el único criterio que tenemos para decir si una determinada lógica es rival o suplemento es identificar el *ser presentado como rival* (o suplemento) con el *ser rival* (o suplemento). El problema con esto es que, como vimos, un sistema puede ser presentado como rival sin realmente ser rival.

Dejando de lado lo que he llamado *aspecto social*, Haack se dispone a proponer un nuevo criterio que diga cuándo una lógica es realmente una lógica rival o suplementaria. Ahora nos dice Haack, respecto a esto que

“[es] tentador [...] asumir que las lógicas intuicionistas y multivaluadas realmente son, como sus proponentes dicen, rivales de la lógica clásica, mientras que las lógicas modales [aléticas] realmente son, como sus proponentes dicen, suplementarias de la lógica clásica [...]. Pero esto sería

⁴⁵ En el original: “A rival system is, then, one the use of which is incompatible [...] with the use of the standard system.”

⁴⁶ En el original: “a supplementary system one the use of which is compatible with the use of the standard system.”

obviamente insatisfactorio. Uno debe, al menos, preguntarse si las lógicas intuicionistas y multivaluadas realmente son, como se dice, alternativas a la lógica clásica en el sentido fuerte de que están en conflicto con ella. Una manera natural de sortear este asunto es preguntar si hay alguna característica *formal* de estos sistemas por la cual uno pueda reconocer su rivalidad con la lógica clásica” (Haack 1996: 3)⁴⁷.

Ahora bien, habiendo ubicado el asunto en un contexto completamente formal, la pregunta por la relación entre las lógicas no-clásicas y la LC toma una clara formulación: desde el punto de vista formal ¿entre sistemas lógicos realmente existen relaciones equivalentes a las de rivalidad y suplemento? De ser así ¿en qué consisten tales relaciones? Y de no ser así ¿hay otro tipo de relaciones formales entre ellas, digamos, de igualdad? Dichas preguntas exigen el planteamiento de un criterio formal que permita comparar a los diferentes sistemas.

2.3 La propuesta

Como insiste Haack, “los sistemas pueden diferenciarse *sintácticamente* (i.e. con respecto al conjunto de teoremas) o *semánticamente* (i.e. con respecto a la interpretación) o, por supuesto, de ambas formas” (HAACK 1996: 4)⁴⁸. Esta precisión complica la labor de encontrar un criterio formal que permita comparar a los diferentes sistemas, puesto que (al menos en principio) es posible solicitar criterios diferentes para las diferencias sintácticas y semánticas. Para sortear este impase Haack apunta que “[comienza] investigando las posibles diferencias sintácticas entre sistemas” (HAACK 1996: 4)⁴⁹; lastimosamente nunca realiza una investigación sistemática sobre las diferencias semánticas.

Ahora bien, teniendo en cuenta sólo las diferencias que ella ha llamado *sintácticas*, Haack propone un criterio para distinguir a las lógicas rivales de los suplementos de la LC. Haack comienza definiendo los conceptos de *lógica extendida* (*extended logic*), *lógica divergente* o *desviada* (*deviant logic*) y *lógica cuasi-divergente* o *cuasi-desviada* (*quasi-deviant logic*) (Cfr. HAACK 1996: 4-5):

(1) la clase de *f.b.f* [fórmulas bien formadas] de $\mathbb{L}_1$ incluye propiamente la clase de *f.b.f* de $\mathbb{L}_2$ y la clase de teoremas/inferencias válidas de $\mathbb{L}_1$ incluye propiamente la clase de teoremas/inferencias válidas de $\mathbb{L}_2$, todos los teoremas/inferencias válidas adicionales de $\mathbb{L}_1$ contienen esencialmente ocurrencias del vocabulario adicional de $\mathbb{L}_1$.

⁴⁷ En el original: “It is tempting [...] to assume, that is, that Intuitionist or many-valued logics really are, as their proponents say they are, rivals to classical logic, whereas modal logics really are, as their proponents say they are, supplements to classical logic [...]. But this would obviously be unsatisfactory. One must, at least, raise the question, whether Intuitionist or many-valued logics really are, as is claimed, alternatives to classical logic in the strong sense that they are in conflict with it. A natural way to tackle this question is to ask whether there is any *formal* feature of these system by which one can recognize their rivalry to classical logic?”

⁴⁸ En el original: “Systems may differ from each other *syntactically* (i.e. with respect to the set of theorems) or *semantically* (i.e. with respect to interpretation) or, of course, both.”

⁴⁹ En el original: “I begin by investigating the possible syntactic differences between systems.”

En este caso llamo a $\mathbb{L}_1$ una extensión de $\mathbb{L}_2$. Para el caso donde $\mathbb{L}_2$ es la lógica clásica, llamo a $\mathbb{L}_1$ una *lógica extendida* [...].

(2) la clase de *f.b.f* de $\mathbb{L}_1$ y la clase de *f.b.f* de $\mathbb{L}_2$ coinciden, pero la clase de teoremas/inferencias válidas de $\mathbb{L}_1$ difiere de la clase de teoremas/inferencias válidas de $\mathbb{L}_2$.

En este caso llamo a $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ divergentes uno de otro. Para el caso donde $\mathbb{L}_2$ es la lógica clásica, llamo a $\mathbb{L}_1$ una *lógica divergente* [...].

(3) la clase de *f.b.f* de $\mathbb{L}_1$ incluye propiamente la clase de *f.b.f* de $\mathbb{L}_2$ y la clase de teoremas/inferencias válidas de $\mathbb{L}_1$ difiere de la clase de teoremas/inferencias válidas de $\mathbb{L}_2$ no sólo en que $\mathbb{L}_1$ incluye teoremas/inferencias válidas adicionales que presuponen esencialmente el vocabulario adicional, sino también en los conjuntos de teoremas/inferencias válidas que presuponen sólo el vocabulario común.

En este caso llamo a $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ cuasi-divergentes uno de otro. Para el caso donde $\mathbb{L}_2$ es la lógica clásica, llamo a $\mathbb{L}_1$ una *lógica cuasi-divergente* [...] (HAACK 1996: 4-5)⁵⁰.

Antes de continuar, quisiera dar una rápida explicación del uso de “teoremas/inferencias válidas” en la formulación de Haack. En HAACK 1978: 175, nuestra autora reformula a (1) usando la expresión “teoremas y/o inferencias válidas”⁵¹. Así las cosas, podemos interpretar a “teoremas/inferencias válidas” como “teoremas y/o inferencias válidas”. Pero ¿Qué significa “y/o”? Como quedó expresado en los preliminares conceptuales, es posible caracterizar la base deductiva de una lógica como un sistema deductivo tipo Hilbert o como un sistema deductivo tipo Gentzen. En el primer caso, la base deductiva se caracteriza como un conjunto de axiomas y sus teoremas; en el segundo caso, como un conjunto de reglas de inferencia. Para dar cuenta de esta posibilidad, Haack formula su criterio de divergencia teniendo en cuenta no sólo al conjunto de teoremas de un sistema, sino también al conjunto de inferencias válidas (Cfr. LAMBERT 1978: 377). Teniendo en cuenta que algunos sistemas lógicos son caracterizables sólo en uno de estos enfoques (Cfr. PALAU 2002: 32), propongo interpretar el “y/o” que usa Haack como una disyunción inclusiva; es decir, que se cumple con la condición si se cumple con al menos uno de los dos componentes de la expresión (teoremas e inferencias válidas). Ahora bien, dada la imposibilidad

⁵⁰ En el original: “(1) the class of wffs of L_1 properly includes the class of wffs of L_2 and the class of theorems/valid inferences of L_1 properly includes the class of theorems/valid inferences of L_2 , the additional theorems/valid inferences of L_1 all containing essentially occurrences of L_1 ’s additional vocabulary. In this case I call L_1 an extension of L_2 . For the case where L_2 is classical logic, I call L_1 an *extended logic* [...].

(2) the class of wffs of L_1 and the class of wffs of L_2 coincide, but the class of theorems/valid inferences of L_1 differs from the class of theorems/valid inferences of L_2 .

In this case I call L_1 and L_2 *deviations* of each other. For the case where L_2 is classical logic, I call L_1 a *deviant logic* [...].

(3) the class of wffs of L_1 properly includes the class of wffs of L_2 , and the class of theorems/valid inferences of L_1 differs from the class of theorems/valid inferences of L_2 not only in that L_1 includes additional theorems/valid inferences involving essentially the additional vocabulary, but also in that the sets of theorems/valid inferences involving only the common vocabulary differ.

In this case I call L_1 and L_2 *quasi-deviations* of each other. For the case where L_2 is classical logic, I call L_1 a *quasi-deviant logic*.”

⁵¹ En el original: “One system is an extension of another if it [...] also has additional vocabulary, and additional theorems and/or valid inferences involving that vocabulary essentially [...].”

de comparar adecuadamente conjuntos de inferencias con conjuntos de teoremas, por ser elementos diferentes, se hace patente que una lógica sólo se puede comparar con otra en la propuesta de Haack si y sólo si ambas lógicas se encuentran caracterizadas ya como conjuntos de axiomas y teoremas, ya como conjuntos de inferencias válidas. Esto no significa que una lógica que se caracterice al estilo Hilbert sea imposible de comparar con otra caracterizada al estilo Gentzen, sino que, para poder compararlas, o se debe formular la primera al estilo Gentzen, o se debe formular la segunda al estilo Hilbert.

Paso a reformular las definiciones de Haack de una forma más técnica que me permita derivar más adelante algunas de sus consecuencias.

Lógica extendida:	Definición 2.1. $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$ sii $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones⁵²: 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \subset \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \subset \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. $\forall \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple al menos una de las siguientes condiciones: a) $\exists \psi \in \Gamma$ para la cual $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$, o b) $\exists \psi = \varphi$ t. q. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$. Definición 2.2. $\mathbb{L}_1$ es una <i>Lógica extendida</i> sii $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_2 = \text{LC}$.
Lógica divergente:	Definición 2.3. $\mathbb{L}_1$ es una divergencia de $\mathbb{L}_2$ sii $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} = \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones: 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$, o 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$. Definición 2.4. $\mathbb{L}_1$ es una <i>Lógica divergente</i> sii $\mathbb{L}_1$ es una divergencia de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_2 = \text{LC}$.
Lógica cuasi-divergente:	Definición 2.5. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$ sii $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, y se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones: 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen que: a) $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ b) $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ o $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen las dos siguientes condiciones: a) Se cumple o bien que

⁵² $\text{Teo}_{\mathbb{L}_i}$ es el conjunto de todos los teoremas de $\mathbb{L}_i$. $\text{Val}_{\mathbb{L}_i}$ es el conjunto de todas las inferencias válidas de $\mathbb{L}_i$.

i) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$.
o bien que ii) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_2} - \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$.
b) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ t. q. se cumple al menos una de las siguientes condiciones: $\exists \psi \in \Gamma$ para la cual $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ o $\forall \psi = \varphi$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$.

Definición 2.6. $\mathbb{L}_1$ es una *Lógica cuasi-divergente* sii $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_2 = \text{LC}$.⁵³

Nota 2.1. Si $\mathbb{L}_1$ es presentado estilo Hilbert, $\mathbb{L}_2$ debe presentarse también estilo Hilbert, caso en el cual aplica sólo las condiciones “1)” de las Definiciones 2.1, 2.3 y 2.5 para establecer si $\mathbb{L}_1$ es una extensión, divergencia o cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$. Esto, dado que en una presentación estilo Hilbert los sistemas lógicos se presentan como conjuntos de teoremas (Teo)⁵⁴.

Nota 2.2. Si $\mathbb{L}_1$ es presentado estilo Gentzen, $\mathbb{L}_2$ debe presentarse también estilo Gentzen, caso en el cual aplica sólo las condiciones “2)” de las Definiciones 2.1, 2.3 y 2.5 para establecer si $\mathbb{L}_1$ es una extensión, divergencia o cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$. Esto, dado que en una presentación estilo Gentzen los sistemas lógicos se presentan como conjuntos de inferencias válidas (Val).

Por último, Haack afirma que “los sistemas propuestos como suplementos de la lógica clásica típicamente difieren de ella en la primera manera [*i.e.* son lógicas extendidas], y los sistemas propuestos como rivales, típicamente difieren de ella en la segunda o tercera manera [*i.e.* son lógicas divergentes o cuasi-divergentes]” (HAACK 1996: 5)⁵⁵. De esta forma, esta filósofa inglesa llega a proponer un criterio formal que permite comparar a los diferentes sistemas lógicos entre sí, tomando como piedra de toque a la LC. Claramente, este criterio no caracteriza por sí mismo a las relaciones entre las lógicas no-clásicas y la LC. No obstante, tomando en cuenta la última de las afirmaciones de Haack aquí referidas, este criterio permitiría dar cuenta de cuáles son las lógicas

⁵³ He de aclarar que Susan Haack apunta que “I shall refer to both deviant and quasi-deviant systems as Deviant logics” (Haack 1996: 5).

⁵⁴ Todos los sistemas lógicos tomados como ejemplos o contraejemplos en este trabajo serán presentados al estilo Hilbert.

⁵⁵ En el original: “the systems proposed as supplements to classical logic typically differ from it in the first way, and the systems proposed as rivals typically differ from it in the second and third ways.”

que sostienen una relación de rivalidad, y cuales una relación de suplemento con la LC^{56} . Nos encontramos, entonces, frente al criterio de clasificación de lógicas no-clásicas de Haack, criterio que permite diferenciar entre lógicas rivales y lógicas suplementarias.

2.4 Algunos teoremas importantes

Antes de continuar, demuestro que de las anteriores definiciones se sigue que un sistema no es caracterizado por más de una de dichas definiciones. No obstante, comienzo demostrando algunos teoremas que me serán de ayuda más adelante. Todos los teoremas resultantes de mis demostraciones serán de gran importancia en el desarrollo de mi argumentación.

Teorema 2.1. Presentados estilo Hilbert, Si $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$, se cumple que $\forall \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$.

Demostración.

Supóngase que $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$, y ambos se encuentran presentados al estilo Hilbert

1. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y se cumple que $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \subset \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (por Definición 2.1 y Nota 2.1)
2. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 1)
3. $\forall \psi (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (de 2)
4. $\forall \psi (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (def. “-”)
5. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (I.U. 4)
6. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (hipótesis)
7. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 6)
8. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 7)
9. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \vee \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (ad. 8)
10. $\psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \vee \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (conm. 9)
11. $\neg(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (De M. 10)
12. $\neg(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2})$ (M.T. 5, 11)
13. $\psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \vee \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (De M. 12)
14. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (def. “ $\rightarrow$ ”)
15. $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \subset \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (de 1)
16. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (def. “ $\subset$ ”)
17. $(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \wedge (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (conj. 14, 17)
18. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (def. “ $\leftrightarrow$ ”)
19. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (De 6 a 19)

⁵⁶ O incluso, respecto a cualquier otro sistema lógico al retocar un poco las definiciones de lógica rival y suplementaria.

$$21. \quad \forall \psi \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}) \right) \text{ (G.U. 20) } \blacksquare$$

Teorema 2.2. Para cualquier $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ presentados al estilo Hilbert, si $\forall \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$, entonces $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$.

Demostración.

Supóngase que $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se encuentran presentados al estilo Hilbert

1. $\text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (inmediato)
2. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (def. " $\subset$ ")
3. $\forall \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (hipótesis)
4. $\forall \psi \left((\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \right)$ (de 3)
5. $\forall \psi \left((\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \right)$ (def. " $\cap$ ")
6. $(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2})$ (I.U. 5)
7. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (hipótesis)
8. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (M.P. 6,7)
9. $(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \wedge (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (def. " $\leftrightarrow$ ")
10. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 7)
11. $(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2})$ (de 5 a 8)
12. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (hipótesis)
13. $\neg(\psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \vee \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2})$ (De M. 12)
14. $\neg(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2})$ (def. " $\rightarrow$ ")
15. $\neg(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (M.T. 11, 14)
16. $\psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \vee \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (De M. 15)
17. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 12)
18. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (M.P. 2,17)
19. $\psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (S.D. 16, 18)
20. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (conj. 18, 19)
21. $(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (de 12 a 20)
22. $\forall \psi \left((\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \right)$ (G.U. 21)
23. $\forall \psi \left((\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \right)$ (def. " $-$ ")
24. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 23)
25. Si $\forall \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$, entonces $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 3 a 25) $\blacksquare$

Teorema 2.3. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$.

Demostración

1. $\mathbb{L}_1$ es una divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (hipótesis)
2. $\mathbb{L}_1$ es una divergencia de $\mathbb{L}_2$; i. e., $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} = \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones: 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$, o 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ (de 1 y por Definición 2.3)
3. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} = \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 2)
4. $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$; i.e., $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones:
 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \subset \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$
 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \subset \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. $\forall \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple al menos una de las siguientes condiciones: a) $\exists \psi \in \Gamma$ para la cual $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$, o b) $\exists \psi = \varphi$ t. q. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 1 y por Definición 2.1)
5. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 4)
6. $(\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} = \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \wedge (\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ (conj. 3, 5) $\rightarrow \leftarrow$
7. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (RAA 1 a 6) ■

Teorema 2.4. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una divergencia y una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$.

Demostración

1. $\mathbb{L}_1$ es una divergencia y una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$ (hipótesis)
2. $\mathbb{L}_1$ es una divergencia de $\mathbb{L}_2$; i. e., $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} = \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones: 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$, o 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ (de 1 y por Definición 2.3)
3. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} = \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 2)
4. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$, i.e. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, y se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones:
 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen que:
 a) $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$
 b) $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ o $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$
 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen las dos siguientes condiciones:
 a) Se cumple o bien que i) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi_i \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$; o bien que ii) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_2} - \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$
 b) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ t. q. se cumple al menos una de las siguientes condiciones: $\exists \psi \in \Gamma$ para la cual $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ o $\forall \psi = \varphi$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 1 y por Definición 2.5)
5. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 4)

6. $(\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} = \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \wedge (\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \rightarrow \leftarrow$ (conj. 3, 5)
7. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una divergencia y una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$ ■

Teorema 2.5. Si se presentan al estilo Hilbert, no sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$.

Demostración

Supóngase que $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se encuentran presentados al estilo Hilbert

1. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (hipótesis)
2. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$; i. e. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, y se cumple que $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ t. q.:
 - a) $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$
 - b) $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ o $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (De 1, por Definición 2.5 y Nota 2.1)
3. $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ o $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (de 2)
4. $\exists \psi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \vee \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}))$ (de 3)
5. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \vee \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (I.E 4)
6. $(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \wedge (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \vee \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (def. "∩")
7. $(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \wedge ((\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \vee (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}))$ (def. "−")
8. $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$; i.e. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y $\text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \subset \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 1, por Definición 2.1 y Nota 2.1)
9. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 8)
10. $\forall \psi (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} - \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (de 9)
11. $\forall \psi ((\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}))$ (def. "−")
12. $(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (I.U. 11)
13. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 7)
14. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 13)
15. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \vee \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (ad. 14)
16. $\psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \vee \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (conm. 15)
17. $\neg(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (De M. 16)
18. $\neg(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2})$ (M.T. 12, 17)
19. $(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \vee (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (sim. 7)
20. $\neg(\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (def. "→")

21. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (M.P. 18, 20)
22. Presentados estilo Hilbert, Si $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$, se cumple que $\forall \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (Teorema 2.1)
23. $\forall \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ se cumple que $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (de 22 y por 8)
24. $\forall \psi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}))$ (de 23)
25. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (I.U. 24)
26. $(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \rightarrow (\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1})$ (def. “ $\cap$ ”)
27. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \leftrightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (M.P. 13, 26)
28. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (def. “ $\leftrightarrow$ ”)
29. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 21)
30. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (M.P. 28, 29)
31. $\psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 21)
32. $\psi \in \text{Teo}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \text{Teo}_{\mathbb{L}_1}$ (conj. 30, 31) $\rightarrow \leftarrow$
33. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ ■

Teorema 2.6. Si se presentan al estilo Gentzen, no sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$.

Demostración

Supóngase que $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se encuentran presentados al estilo Gentzen

1. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (hipótesis)
2. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia de $\mathbb{L}_2$; i.e. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, y se cumple que $\text{Val}_{\mathbb{L}_2} \neq \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen las dos siguientes condiciones:
 - a) Se cumple o bien que i) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$; o bien que ii) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_2} - \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$
 - b) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ t. q. se cumple al menos una de las siguientes condiciones: $\exists \psi \in \Gamma$ para la cual $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ o $\forall \psi = \varphi$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (De 1, por Definición 2.5 y Nota 2.2)
3. Se cumple o bien que i) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} - \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$; o bien que ii) $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_2} - \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ t. q. se cumplen las siguientes condiciones: $\forall \psi \in \Gamma (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ y $\forall \psi = \varphi (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ (de 2)

4. $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_1} - Val_{\mathbb{L}_2} \wedge \left(\forall \psi (\psi \in \Gamma \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \wedge \right. \right.$
 $\left. \forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \right) \vee \exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_2} - Val_{\mathbb{L}_1} \wedge \right.$
 $\left. \left(\forall \psi (\psi \in \Gamma \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \wedge \forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \right) \right) \text{ (de 3)}$
5. $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_1} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin Val_{\mathbb{L}_2} \right) \wedge \left(\forall \psi \left(\psi \in \Gamma \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \right. \right. \right.$
 $\left. \left. \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}) \right) \wedge \forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \right) \vee \exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \right. \right.$
 $Val_{\mathbb{L}_2} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin Val_{\mathbb{L}_1} \right) \wedge \left(\forall \psi (\psi \in \Gamma \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \wedge \right.$
 $\left. \forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \right) \text{ (def. “-” y def. “\cap”)}$
6. $\mathbb{L}_1$ es una extensión de $\mathbb{L}_2$; i.e. $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \neq \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y $Val_{\mathbb{L}_2} \subset Val_{\mathbb{L}_1}$ t. q. $\forall \langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_1} - Val_{\mathbb{L}_2}$ se cumple al menos una de las siguientes condiciones: a) $\exists \psi \in \Gamma$ para la cual $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$, o b) $\exists \psi = \varphi$ t. q. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (De 1, por Definición 2.1 y Nota 2.2)
7. $\forall \langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_1} - Val_{\mathbb{L}_2}$ se cumple al menos una de las siguientes condiciones: a) $\exists \psi \in \Gamma$ para la cual $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$, o b) $\exists \psi = \varphi$ t. q. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (de 6)
8. $\forall \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_1} - Val_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \left(\exists \psi (\psi \in \Gamma \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \vee \right. \right.$
 $\left. \exists \psi (\psi = \varphi \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} - \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \right) \text{ (de 7)}$
9. $\forall \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_1} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin Val_{\mathbb{L}_2} \right) \rightarrow \left(\exists \psi \left(\psi \in \Gamma \wedge (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \right. \right. \right.$
 $\left. \left. \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}) \right) \vee \exists \psi (\psi = \varphi \wedge (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})) \right) \text{ (def. “-”)}$
10. $Val_{\mathbb{L}_2} \subset Val_{\mathbb{L}_1}$ (de 6)
11. $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_2} \rightarrow \langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_1}$ (def. “ $\subset$ ”)
12. $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_2} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin Val_{\mathbb{L}_1} \right) \wedge \left(\forall \psi (\psi \in \Gamma \rightarrow \right. \right.$
 $\left. (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \wedge \forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \right) \text{ (hipótesis)}$
13. $\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_2} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin Val_{\mathbb{L}_1} \right) \wedge \left(\forall \psi (\psi \in \Gamma \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \right.$
 $\left. \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \wedge \forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \right) \text{ (I.E. 12)}$
14. $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_2} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin Val_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 13)
15. $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in Val_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 14)

16. $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ (M.P. 11, 15)
17. $\langle \Gamma, \varphi \rangle \notin \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ (sim. 14)
18. $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin \text{Val}_{\mathbb{L}_1}$ (conj. 16, 17) $\rightarrow \leftarrow$
19. $\neg \left(\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_2} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin \text{Val}_{\mathbb{L}_1} \right) \wedge \left(\forall \psi \left(\psi \in \Gamma \rightarrow \right. \right. \right. \right.$
 $\left. \left. \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \wedge \forall \psi \left(\psi = \varphi \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \right) \right) \right) \quad (\text{R.A.A}$
12-18)
20. $\exists \langle \Gamma, \varphi \rangle \left(\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin \text{Val}_{\mathbb{L}_2} \right) \wedge \left(\forall \psi \left(\psi \in \Gamma \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \right. \right. \right. \right.$
 $\left. \left. \left. \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \wedge \forall \psi \left(\psi = \varphi \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \right) \right) \quad (\text{S.D. 5, 19})$
21. $\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin \text{Val}_{\mathbb{L}_2} \right) \wedge \left(\forall \psi \left(\psi \in \Gamma \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \right. \right. \right. \right.$
 $\left. \left. \left. \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \wedge \forall \psi \left(\psi = \varphi \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \right) \quad (\text{I. E. 20})$
22. $\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin \text{Val}_{\mathbb{L}_2} \right)$ (sim. 21)
23. $\left(\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \text{Val}_{\mathbb{L}_1} \wedge \langle \Gamma, \varphi \rangle \notin \text{Val}_{\mathbb{L}_2} \right) \rightarrow \left(\exists \psi \left(\psi \in \Gamma \wedge \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \right. \right. \right. \right.$
 $\left. \left. \left. \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \right) \right) \vee \exists \psi \left(\psi = \varphi \wedge \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \right) \right) \right) \quad (\text{I. U. 9})$
24. $\exists \psi \left(\psi \in \Gamma \wedge \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \right) \right) \vee \exists \psi \left(\psi = \varphi \wedge \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \right. \right.$
 $\left. \left. \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \right) \right) \quad (\text{M.P. 22, 23})$
25. $\forall \psi \left(\psi \in \Gamma \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \wedge \forall \psi \left(\psi = \varphi \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \right. \right.$
 $\left. \left. \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right) \quad (\text{sim. 21})$
26. $\forall \psi \left(\psi \in \Gamma \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right) \right)$ (sim. 25)
27. $\psi \in \Gamma \rightarrow \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \right)$ (I.U. 26)
28. $\exists \psi \left(\psi \in \Gamma \wedge \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \right) \right)$ (hipótesis)
29. $\psi \in \Gamma \wedge \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \right)$ (I.E. 28)
30. $\psi \in \Gamma$ (sim. 29)
31. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (M.P. 27, 30)
32. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 31)
33. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 29)
34. $\psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 33)
35. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (conj. 32, 34) $\rightarrow \leftarrow$
36. $\neg \left(\exists \psi \left(\psi \in \Gamma \wedge \left(\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \right) \right) \right) \quad (\text{R.A.A 28-35})$

37. $\exists \psi (\psi = \varphi \wedge (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}))$ (S.D. 24, 36)
38. $\psi = \varphi \wedge (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2})$ (I.E. 37)
39. $\forall \psi (\psi \in \Gamma \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})) \wedge \forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}))$ (sim. 13)
40. $\forall \psi (\psi = \varphi \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}))$ (sim. 39)
41. $\psi = \varphi \rightarrow (\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1})$ (I.U. 40)
42. $\psi = \varphi$ (sim. 38)
43. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ (M.P. 41, 42)
44. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 43)
45. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 38)
46. $\psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (sim. 45)
47. $\psi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2} \wedge \psi \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (conj. 44, 46) $\rightarrow \leftarrow$
48. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (R.A.A 1-47) ■

Teorema 2.7. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$.

Demostración

1. $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se presentan estilo Hilbert o estilo Gentzen (inmediato)
2. $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se presentan estilo Hilbert o $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se presentan estilo Gentzen (de 1, Nota 2.1 y 2.2)
3. Si $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se presentan al estilo Hilbert, no sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (Teorema 2.5)
4. Si $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se presentan al estilo Gentzen, no sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (Teorema 2.6)
5. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$, o no sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (S.H. 2, 3, 4)
6. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (de 5) ■

2.5 Aplicación

En esta sección pretendo dar una muestra del criterio de Susan Haack en acción. Las lógicas que tomaré para la muestra son los sistemas trivaluado $\mathfrak{t}_3$, modal alético S4 e intuicionista H. En todos los casos las demostraciones son propias.

2.5.1 El caso de $\mathfrak{t}_3$

Definición 2.10. El conjunto de valores designados de $\mathfrak{t}_3$ $D = \{1\}$

Teorema 2.8. $\alpha \vee \neg \alpha$ no es teorema de $\mathfrak{t}_3$, $\alpha \vee \neg \alpha \notin \text{Teo}_{\mathfrak{t}_3}$

Demostración

1. Considérese la valuación $v(\alpha) = 1/2$

$$v(\alpha \vee \neg\alpha) = v(v(\alpha), v(\neg\alpha)) = v(v(\alpha), \neg(v(\alpha))) = v((1/2), \neg(1/2)) = v(1/2, 1/2) = 1/2$$
2. $\alpha \vee \neg\alpha$ no es una tautología de $\mathfrak{L}_3$ (por Definición 2.12)
3. $\alpha \vee \neg\alpha$ no es un teorema de $\mathfrak{L}_3$ (por Metateorema de completitud de $\mathfrak{L}_3$) ■

Teorema 2.9 $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ es teorema de $\mathfrak{L}_3$, $\Box\alpha \rightarrow \alpha \in \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$

Demostración

1. Se verifica fácilmente por medio de una tabla de verdad que $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ es una tautología de $\mathfrak{L}_3$ (por Definición 2.12)
2. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ es un teorema de $\mathfrak{L}_3$ (por Metateorema de completitud de $\mathfrak{L}_3$) ■

Teorema 2.10. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3}$ y $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} \neq \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3}$

Demostración

Todas las reglas para crear fórmulas bien formadas $f.b.f$ (tal que toda $f.b.f_{\mathbb{L}_i} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_i}$) de LC son reglas de $\mathfrak{L}_3$. Pero dado que $\mathfrak{L}_3$ posee conectores (como ' $\Box$ ') que no posee LC, no todas las reglas para las $f.b.f$ de $\mathfrak{L}_3$ son reglas de LC. ■

Teorema 2.11. $\text{Teo}_{\mathfrak{L}_3} \neq \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$ t. q. $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$; y $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3} - \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$

Demostración

1. Como ' $\Box$ ' no es símbolo de LC, $\Box\alpha \rightarrow \alpha \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3}$
2. $\Box\alpha \rightarrow \alpha \in \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$ (por Teorema 2.9)
3. $\alpha \vee \neg\alpha \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3}$
4. $\alpha \vee \neg\alpha \notin \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$ (por Teorema 2.8)
5. $\alpha \vee \neg\alpha \in \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$
6. $\alpha \vee \neg\alpha \in \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3} - \text{Teo}_{\mathfrak{L}_3}$ (de 4 y 5) ■

Teorema 2.12. $\mathfrak{L}_3$ es una lógica cuasi-divergente.

Demostración

1. $\mathfrak{L}_3$ es una cuasi-divergencia de LC (por Teoremas 2.10, 2.11 y Definición 2.3)
2. $\mathfrak{L}_3$ es una cuasi-divergencia (por Definición 2.6) ■

2.5.2 S4

Teorema 2.13. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} \subset \mathfrak{S}_{S4}$ y $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_3} \neq \mathfrak{S}_{S4}$

Demostración. Igual a la Demostración del Teorema 2.10 ■

Teorema 2.14. $\text{Teo}_{\text{LC}} \subset \text{Teo}_{\text{S4}}$

Demostración

1. Todos los axiomas de LC son axiomas de S4, por lo tanto, todos los teoremas de LC son teoremas de S4 (Cfr. EPSTEIN 2001: 235)
2. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ es teorema de S4 (Cfr. EPSTEIN 2001: 235)
3. Como $\Box\alpha \rightarrow \alpha \notin \mathfrak{S}_{\text{LC}}$, entonces $\Box\alpha \rightarrow \alpha \notin \text{Teo}_{\text{LC}}$
4. Por lo tanto, todos los teoremas de LC son teoremas de S4, pero no todos los teoremas de S4 son teoremas de LC. ■

Teorema 2.15. $\forall \psi \in \text{Teo}_{\text{S4}} - \text{Teo}_{\text{LC}}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{\text{S4}} - \mathfrak{S}_{\text{LC}}$

Demostración

Interprétese $v(\alpha) = 1$ como $w_v \models \alpha$ y $v(\alpha) = 0$ como $w_v \not\models \alpha$ para un determinado conjunto de fórmulas verdaderas o mundo posible w_v .

1. Considérese el lenguaje de S4 restringido a la intersección con el lenguaje de LC; esto es, $\forall \psi, \psi \in \mathfrak{S}_{\text{S4}} \cap \mathfrak{S}_{\text{LC}}$ (hipótesis)
2.
 - a) $\alpha \in \text{Teo}_{\text{S4}}$ sii $\forall \mathfrak{K}, \mathfrak{K} \models \alpha$ (característica de la semántica de Kripke)
 - b) $\forall \mathfrak{K}, \mathfrak{K} \models \alpha$ sii $\forall w \in W, w \models \alpha$ (característica de la semántica de Kripke)
 - c) $\alpha \in \text{Teo}_{\text{S4}}$ sii $\forall w \in W, w \models \alpha$ (De a y b por característica del Bicondicional)
3.
 - a) $\alpha \in \text{Teo}_{\text{LC}}$ sii $\forall v, v(\alpha) = 1$
 - b) $\alpha \in \text{Teo}_{\text{LC}}$ sii $\forall w_v, w_v \models \alpha$
4. α sólo puede ser de alguna de las siguientes formas: $p, \beta \wedge \gamma, \beta \vee \gamma, \beta \rightarrow \gamma, \neg\beta$ tanto para LC como para S4.
 - a) Cuando $\alpha = p, p \notin \text{Teo}_{\text{LC}}$ y $p \notin \text{Teo}_{\text{S4}}$. En LC es inmediato a partir de la valuación $w_v \not\models p$. En S4: sea cualquier proposición simple p y el modelo de Kripke $\mathfrak{K} = \langle W, R, e \rangle$ tal que $W = \{w_1, w_2\}$ y e tal que $w_1, w_2 \notin e(p)$. Como $w_1 \not\models p, \mathfrak{K} \not\models p$, por tanto, $p \notin \text{Teo}_{\text{S4}}$.
 - b) Cuando $\alpha = \beta \wedge \gamma$. En LC, $w_v \models \beta \wedge \gamma$ sii $w_v \models \beta$ y $w_v \models \gamma$. En S4, $w \models \beta \wedge \gamma$ sii $w \models \beta$ y $w \models \gamma$.
 - c) Cuando $\alpha = \beta \vee \gamma$. En LC, $w_v \models \beta \vee \gamma$ sii $w_v \models \beta$ o $w_v \models \gamma$. En S4, $w \models \beta \vee \gamma$ sii $w \models \beta$ o $w \models \gamma$.
 - d) Cuando $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$. En LC, $w_v \models \beta \rightarrow \gamma$ sii $w_v \not\models \beta$ o $w_v \models \gamma$. En S4, $w \models \beta \rightarrow \gamma$ sii $w \not\models \beta$ o $w \models \gamma$.
 - e) Cuando $\alpha = \neg\beta$. En LC, $w_v \models \neg\beta$ sii $w_v \not\models \beta$. En S4, $w \models \neg\beta$ sii $w \not\models \beta$.
 - f) Dado que tienen las mismas condiciones, $w_v \models \alpha$ sii $w \models \alpha$
5. $\alpha \in \text{Teo}_{\text{S4}}$ sii $\forall w_v, w_v \models \alpha$ (de 2c y 4f)
6. $\alpha \in \text{Teo}_{\text{S4}}$ sii $\alpha \in \text{Teo}_{\text{LC}}$ (de 5 y 3b)
7. $\psi \in \text{Teo}_{\text{S4}}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\text{LC}}$
8. Si $\forall \psi, \psi \in \mathfrak{S}_{\text{S4}} \cap \mathfrak{S}_{\text{LC}}$, entonces $\psi \in \text{Teo}_{\text{S4}}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{\text{LC}}$ (De 1 a 7)

9. $\forall \psi \in \text{Teo}_{S4} - \text{Teo}_{LC}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{S4} - \mathfrak{S}_{LC}$ (por Teorema 2.2) ■

Teorema 2.16. $S4$ es una lógica extendida.

Demostración

1. $\mathfrak{S}_{LC} \subset \mathfrak{S}_{S4}$, y $\mathfrak{S}_{LC} \neq \mathfrak{S}_{S4}$ (Teorema 2.13)
2. $\text{Teo}_{LC} \subset \text{Teo}_{S4}$ y $\forall \psi \in \text{Teo}_{S4} - \text{Teo}_{LC}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{S4} - \mathfrak{S}_{LC}$ (Teorema 2.14, 2.15)
3. $S4$ es una extensión de LC (por Definición 2.1)
4. $S4$ es una lógica extendida (por Definición 2.4) ■

2.5.3 La lógica intuicionista H

Teorema 2.17. $\mathfrak{S}_{LC} = \mathfrak{S}_H$

Demostración. Todas las reglas de formación de $f.b.f$ de LC son reglas de formación de $f.b.f$ de H . ■

Teorema 2.18. $p \vee \neg p \notin \text{Teo}_H$

Demostración

- Considérese el modelo de Kripke $\mathfrak{K}: \langle W, R, e \rangle$ donde $W = \{w_1, w_2\}$; $w_1 R w_1$, $w_1 R w_2$, $w_2 R w_2$; y e es tal que: $w_1 \notin e(p)$ y $w_2 \notin e(\neg p)$
- a) $w_1 \not\models p$ puesto que $w_1 R w_1$ y $w_1 \notin e(p)$
 - b) $w_1 \not\models \neg p$ puesto que $w_1 R w_2$ y $w_2 \notin e(\neg p)$
 - c) $w_1 \not\models p \vee \neg p$ por a) y b)
 - d) $\mathfrak{K} \not\models p \vee \neg p$ por c)
 - e) $\not\models_H p \vee \neg p$ por d)
 - f) $\not\models_H p \vee \neg p$ por metateorema de completitud de H ■

Teorema 2.19. $\text{Teo}_{LC} \neq \text{Teo}_H$

Demostración. $p \vee \neg p$ no es teorema de H , pero sí lo es de LC . ■

Teorema 2.20. H es una lógica divergente.

Demostración

1. $\mathfrak{S}_{LC} = \mathfrak{S}_H$ y $\text{Teo}_{LC} \neq \text{Teo}_H$ (Teoremas 2.17 y 2.19)
2. H es una divergencia de LC (por Definición 2.2)
3. H es una lógica divergente (por Definición 2.5) ■

2.6 Modificaciones al criterio

En la literatura lógico-filosófica latinoamericana he encontrado dos interesantes escritos de la filósofa argentina Gladys Palau en los que se realizan dos pequeños cambios en la distinción entre lógicas divergentes y lógicas extendidas de Susan Haack. En PALAU 1990: 55-56, Palau extiende el

criterio de Haack al formular una nueva forma de divergencia: la divergencia entre sistemas suplementarios de LC. Mientras en PALAU 2002: 34-37 se reformula el criterio de Haack añadiendo una nueva posibilidad junto con la *divergencia* y la *extensión*: la *variación*.

Para el primer caso Palau realiza una nueva definición:

[$\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son extensiones de la LC divergentes entre si] la clase de *f.b.f* de $\mathbb{L}_1$ [$\mathbb{L}_1$] es distinta de la clase de *f.b.f* de $\mathbb{L}_2$ [$\mathbb{L}_2$]; pero la intersección de *f.b.f* de $\mathbb{L}_1$ con *f.b.f* de $\mathbb{L}_2$ es al menos, el conjunto de *f.b.f* de LC; el conjunto de T/I [teoremas/inferencias válidas] de $\mathbb{L}_1$ es distinto del conjunto de T/I de $\mathbb{L}_2$, pero la intersección del conjunto T/I de $\mathbb{L}_1$ con el conjunto T/I de $\mathbb{L}_2$ es al menos, el conjunto T/I de LC (PALAU 1990: 55).

Empero, considero que esta adición a las definiciones del criterio de Haack es redundante. Las definiciones 2.1 a 2.6 permiten dar cuenta de estos dos sistemas al establecer la relación de extensión de cada uno de ellos con la LC y la relación de divergencia entre ellos mismos. No obstante, no desconozco que Palau emplea esta caracterización para introducir en el criterio de Haack el caso de la rivalidad, ya no entre un sistema divergente y la LC, sino entre sistemas suplementarios de LC.

La segunda modificación importante que realiza Palau (Cfr. PALAU 2002: 36) es la adición de un caso que no incluye Haack en su primera clasificación, la *variante* o *formulación alternativa* de un mismo sistema. No obstante, antes de la formulación de Palau, Haack ya había definido, en HAACK 1978: 21, dos nuevas relaciones entre sistemas lógicos que daban cuenta de la relación que trata de definir Palau. Así pues, de alguna forma se puede afirmar que Haack contempla la relación que luego adicionara Palau, llamándola *formulación alternativa* (*alternative formulation*) (Cfr. HAACK 1978: 21):

Definición 2.8. $\mathbb{L}_1$ es una formulación alternativa de $\mathbb{L}_2$ en sentido restringido sii tras haber establecido “la tolerancia para diferencias de notación (e.g. reemplazando ‘&’ por ‘.’) y de constantes primitivas (e.g. reemplazando ‘p & q’ por ‘ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ’)” (HAACK 1978: 21)⁵⁷, se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones⁵⁸: 1) $Ax_{\mathbb{L}_1} = Ax_{\mathbb{L}_2}$, o 2) $RVal_{\mathbb{L}_1} = RVal_{\mathbb{L}_2}$.

Definición 2.9. $\mathbb{L}_1$ es una formulación alternativa de $\mathbb{L}_2$ en sentido amplio sii tras haber establecido “la tolerancia para diferencias de notación y de constantes primitivas” (HAACK

⁵⁷ En el original: “The narrower sense: L_1 and L_2 are alternative formulations of the same system if they have the same axioms and/or rules of inference once allowance has been made for differences of notation (e.g. replacing ‘&’ by ‘.’) and of primitive constants (e.g. replacing ‘p & q’ by ‘ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ’).”

⁵⁸ $Ax_{\mathbb{L}_i}$ es el conjunto de Axiomas de $\mathbb{L}_i$. $RVal_{\mathbb{L}_i}$ es el conjunto de Reglas de inferencia válidas de $\mathbb{L}_i$, donde $RVal_{\mathbb{L}_i} \subset Val_{\mathbb{L}_i}$. En una presentación de una base deductiva tipo Gentzen, el sistema $\mathbb{L}_i$ queda caracterizada a partir de $RVal_{\mathbb{L}_i}$

1978: 21)⁵⁹, se cumplen las dos siguientes condiciones: 1) $\text{Teo}_{\mathbb{L}_1} = \text{Teo}_{\mathbb{L}_2}$ y 2) $\text{Val}_{\mathbb{L}_1} = \text{Val}_{\mathbb{L}_2}$.

Con estas nuevas definiciones Haack puede dar cuenta por fin de axiomatizaciones alternativas de un mismo sistema. Sea como sea, esto en poco ayuda, a mi entender, a diferenciar sistemas rivales de suplementarios, o a clasificar los diferentes sistemas lógicos no-clásicos. Empero, sí ayuda a eliminar de la lista de lógicas no-clásicas a sistemas que fácilmente son identificables como diferentes de la LC tan sólo en apariencia (*i.e.* axiomatizaciones alternativas de la LC como la presentada en los PRELIMINARES CONCEPTUALES y la axiomatización de Hilbert en EPSTEIN 2001: 308-309).

2.7 Las dificultades

Para lograr proteger su propuesta de posibles ataques, Haack pasa a desvirtuar argumentos que podrían desligar a la divergencia de la rivalidad. En resumen, los ataques contra su propuesta comprenderían la queja de que un sistema lógico puede ser divergente sin ser una lógica rival a partir de, básicamente, dos argumentos: el argumento de la dependencia teórica del significado, y el argumento de la traducción. Contra el primero Haack alega especialmente la inexactitud del concepto de significado en el caso de las constantes lógicas. Contra el segundo, Haack sólo ataca el argumento en la formulación de Quine en QUINE 1970: 141-143⁶⁰.

Empero, bajo el acápite de “Variedades de divergencia” (Cfr. HAACK 1996: 21-24) Haack plasma las dificultades para su criterio que trae la existencia de traducciones bastante satisfactorias entre algunas lógicas y el posible cambio de significado de las constantes. En esta sección Haack reconoce implícitamente que su criterio no es suficiente para dar cuenta de la rivalidad de lógicas; interesantemente, no parece haber ningún reconocimiento explícito de esto. A mi parecer, las concesiones que proporciona Haack aquí constituyen un reconocimiento de su fracaso y una aprobación a los argumentos del *cambio de significado* y de *la traducción* con leves variaciones.

En uno de los casos, Haack aceptaría la posibilidad de que la divergencia pueda implicar un cambio de significado, y que dicho cambio de significado en algunos casos implique la falta de rivalidad. En el otro caso, ella aceptaría la posibilidad de que algunas lógicas divergentes posean traducciones que las conviertan en sistemas equivalentes o en sistemas suplementarios; y por tanto, no rivales. En últimas, Haack acepta que la divergencia (que establece su criterio) no es una condición suficiente para establecer la rivalidad de una lógica con la LC; e igualmente, que la extensión no es una condición necesaria para establecer qué sistemas son suplementos de la LC. Revisemos cuáles fueron las concesiones de Haack.

⁵⁹ En el original: “The broader sense: L_1 and L_2 are alternative formulations of the same system if they have the same theorems and valid inferences once allowance has been made for differences of notation and of primitive constants.”

⁶⁰ Para más información Cfr. HAACK 1996: 8-21.

Haack identifica tres variedades de divergencia. En su formulación se abre la puerta a la observación anterior:

(A) [...] que todos los teoremas de la Lógica divergente, L_D , pueden ser traducidos a teoremas de la lógica clásica, L_C [LC], y viceversa [...]. [Se puede concluir], muy plausiblemente, que L_D debería ser considerada sólo como una variante notacional de L_C [...].

(B) que [...] [es] imposible traducir todo lo que el Lógico divergente afirma a algo que el lógico clásico asentaría y todo lo que el Lógico divergente disiente en algo que el lógico clásico disentaría también. [...] Entonces, L_D es, si no un rival, al menos un suplemento, y no solamente una variante notacional sin interés de L_C [...].

(C) que un sistema [...] [emplea] un conjunto de conectivas que difieren en significado de las de la lógica clásica, mientras carece de medios para expresar las conectivas clásicas. Tal sistema no sería ni sencillamente un rival, ni sencillamente un suplemento de la lógica clásica (HAACK 1996: 22)⁶¹.

Con (C) Haack reconoce la existencia de cambios de significado que invaliden a la rivalidad. Con (A) y (B) ella reconoce la posibilidad de traducciones que eliminen también a la rivalidad. Así pues, tendríamos tres posibles formas de divergencia: a) lógicas divergentes que equivalen a la LC, b) lógicas divergentes que no equivalen a la LC pero que no tienen un cambio de significado, y c) lógicas divergentes que no equivalen a la LC pero que tienen cambio de significado. Más aun, la segunda forma se podría dividir en dos más: b1) lógicas divergentes que presentan una traducción como extensiones de la LC, y b2) lógicas divergentes que realmente son rivales de la LC. Como vemos, se destruye la supuesta estrecha relación entre los conceptos de *lógica divergente* y *lógica rival* que se había establecido al inicio, y que tanto defendió Haack en varias secciones de su trabajo. Como reconoce Haack, no toda lógica divergente es necesariamente una lógica rival. Efectivamente, dejando de lado el problema del cambio de significado, la posibilidad de traducir una lógica a otra complica demasiado la empresa de identificar y caracterizar el grupo de las lógicas rivales. Ahora tenemos la opción de que la lógica que incluso se presenta formalmente como divergente a partir de las definiciones de Haack, sea, vía traducción, ya una lógica equivalente a la LC, ya un simple suplemento de esta.

⁶¹ En el original: "(A) [...] that all theorems of the Deviant logic, L_D , can be translated into theorems of classical logic, L_C , and vice versa [...]. [One can conclude], very plausibly, that L_D should be regarded as only a notational variant of L_C [...].

(B) that it [...] [is] impossible to translate everything which the Deviant logician asserts into something to which the classical logician would assent and everything from which the Deviant logician dissents into something from which the classical logician would dissent [...]. Then L_D is, if not a rival, at least a supplement, and not merely an uninteresting notational variant, of L_C [...].

(C) that a system [...] [employs] a set of connectives differing in meaning from those of classical logic, while lacking the means to express classical connectives. Such a system would be neither straightforwardly a rival, not straightforwardly a supplement, of classical logic."

2.8 De la divergencia a la rivalidad

Como quedó claro con la sección *variedades de divergencia* (HAACK 1996: 21-24), Haack tiene problemas para establecer un vínculo directo entre las distinciones divergencia-extensión y rival-suplemento. A pesar de que el criterio de clasificación de la que hablamos fue formulado por Haack, en su obra no se encuentran casi aplicaciones explícitas de este. La aplicación más detallada que se encuentra en la obra de Haack es la revisión de H en HAACK 1996: 95-97 y HAACK 1978: 216-220. Revisemos las dificultades que ella encuentra.

Haack llama explícitamente a H bajo el título de *lógica divergente* (Cfr. HAACK 1978: 216), por lo que reconoce, en principio, el cumplimiento de la definición de divergencia en el caso de H. No obstante, como queda registrado en HAACK 1996 y 1978, la existencia de traducciones pone en duda la rivalidad de H. Ignorando las desacertadas observaciones de HAACK 1996: 97 sobre la traducción entre H y S4⁶², es claro en HAACK 1978: 219 que nuestra autora le concede bastante importancia, e incluso *naturalidad* a dicha traducción. Revisémosla (Cfr. HAACK 1996: 97; HAACK 1978: 219; EPSTEIN 2001: 288):

* es una función inyectiva *: $\mathfrak{S}_H \rightarrow \mathfrak{S}_{S4}$ tal que

$$\begin{aligned} * (p) &= \Box p \\ * (\neg A) &= \Box \neg * (A) \\ * (A \vee B) &= * (A) \vee * (B) \\ * (A \wedge B) &= * (A) \wedge * (B) \\ * (A \rightarrow B) &= \Box (* (A) \rightarrow * (B)) \end{aligned}$$

Esta traducción es una función inyectiva que toma las fórmulas de H (a la izquierda) y las traduce como fórmulas al interior de S4 (a la derecha). Lo interesante de esto es que tras la traducción, no sólo todos los teoremas de H resultan teoremas de S4, sino que además todas las relaciones de deducibilidad entre las fórmulas de H se mantienen entre sus traducciones al interior de S4 (Cfr. EPSTEIN 2001: 393-395).

En HAACK 1996 se subvaloran las *consideraciones sobre el significado* debido a las desacertadas observaciones sobre esta traducción en HAACK 1996: 97. Esto es, se subvalora la posibilidad de que las conectivas intuicionistas posean un significado diferente al de las clásicas —por lo que sería inadecuado tomar una fórmula que no acepte un determinado sistema como la misma que afirma el otro sistema sólo por su igualdad tipográfica—. No obstante, en HAACK 1978 esta autora rectifica su posición tras considerar la traducción entre H y S4 de una mejor manera:

⁶²En HAACK 1996: 97 se hace una afirmación errada: “Esta traducción [entre H y S4] tampoco preserva todas las relaciones de deducibilidad” (Cfr. WOODS 1977:652). De hecho, en EPSTEIN 2001: 394-395 se puede encontrar una demostración de la preservación de las relaciones de deducibilidad en la traducción entre H y S4.

[..] [Ahora] uno puede ver que la pregunta de si una lógica no-clásica realmente tiene ‘el mismo vocabulario’ que la lógica clásica no es simple, como (quizás) parecía (HAACK 1978: 219)⁶³.

Con base en dicha traducción, se podría afirmar que, si bien H no es equivalente a S4, sí es completamente caracterizable al interior de esta última. S4 sería, entonces, un suplemento de H al adicionar lenguaje no modal. De esta forma, como S4 es una extensión y un suplemento de la LC, H no criticaría realmente a esta última, sino que afirmaría y negaría fórmulas *inafirmables* al interior de la LC, en tanto sería algo así como una lógica estrictamente modal. Sin entrar a criticar las definiciones de *lógica divergente* y *lógica extendida*, es claro que H cae en la categoría c) de divergencia: sus conectivas cambian de significado, sin poder expresar el significado de las conectivas clásicas. Esto es claro cuando vemos que tras la traducción H resulta siendo un fragmento exclusivamente modal de S4. El intuicionista al usar H cambia el significado no sólo de los conectivos, sino de lo que es afirmar una proposición⁶⁴. Estamos ahora en frente de un ejemplo que sugiere que la divergencia no implica necesariamente la rivalidad: los enunciados que no acepta H no serían enunciados que afirma la LC en tanto, a pesar de su igualdad tipográfica, no serían los mismos enunciados⁶⁵.

En este punto es interesante el fracaso del objetivo de la distinción entre lógicas divergentes y lógicas extendidas; incluso de forma independiente de los problemas de Haack para dar cuenta de H. Que una lógica obedezca a la definición de lógica divergente no garantiza que sea una lógica rival. No obstante, *parece* sostenerse sin problemas la distinción de Haack, ya no como criterio para distinguir los sistemas rivales de los suplementarios, sino como una clasificación por sí misma de las lógicas no clásicas. Las definiciones de Haack son, entonces, un criterio de clasificación de las lógicas no-clásicas; las clasifica en lógicas divergentes, extendidas y cuasi-divergentes.

2.9 Conclusión

El criterio de clasificación de lógicas no-clásicas que establece Susan Haack en el primer capítulo de su libro HAACK 1974 es un intento para encontrar un factor completamente formal para comprobar qué sistemas lógicos no-clásicos son realmente rivales o suplementos de la LC. No obstante, como vimos —y como la misma Haack reconoce— su clasificación tiene problemas como criterio para establecer qué sistemas son realmente rivales, e incluso, qué sistemas son realmente suplementarios. Dichos problemas nacen de la existencia de traducciones entre diferentes

⁶³ En el original: “But now one can see that the question, whether a non-classical logic really has ‘the same vocabulary’ as classical logic, is not so simple as it (perhaps) seemed.”

⁶⁴ Así, por ejemplo, según el intuicionismo, algo es afirmable si y sólo si se ha demostrado $\alpha \vee \neg\alpha$ es afirmable si y sólo si se ha demostrado α o se ha demostrado $\neg\alpha$.

⁶⁵ De hecho, no considero que no haya rivalidad entre los intuicionistas y los lógicos y matemáticos clásicos. El desacuerdo entre estas dos escuelas no es un desacuerdo de teoremas. Es un desacuerdo en un punto mucho más profundo, ubicado en la definición de lo que es una proposición verdadera. Pero esta diferencia no es parte de los sistemas lógicos resultantes, sino que se encuentra en la base filosófica —externa a ellos— que los sustenta. Contrario a la empresa de Haack, la rivalidad más que un asunto formal, lo considero un asunto filosófico; *i.e.*, un asunto de interpretación.

sistemas lógicos que sugieren la posibilidad de *poner de acuerdo* a las diferentes lógicas. La rivalidad es, entonces, cuestión sólo de tomar erróneamente las fórmulas de un determinado sistema como si fueran las mismas de otro sistema. Esto, dado que determinada fórmula de determinado sistema no tendría que significar lo mismo que otra fórmula en otro determinado sistema sólo por poseer los mismos símbolos tipográficos.

No obstante, aunque el criterio de clasificación de Haack no sea adecuado para su propósito inicial, sigue siendo un criterio de clasificación. De hecho, como dije antes, es el criterio de clasificación de lógicas no clásicas más conocido en el medio filosófico. Recordemos que este criterio clasifica a las lógicas no clásicas en lógicas divergentes y lógicas extendidas (además de lógicas cuasi-divergentes), quedando cada una de estas categorías claramente definidas a fin de establecer qué sistemas hacen parte de cada categoría. Pero aún más, tomando como lógica base a cualquier otro sistema, se puede clasificar a los demás sistemas como divergencias o extensiones de este. Encontramos entonces un criterio de clasificación que si bien no parece servir para lo que fue ideado, sigue siendo un criterio válido que genera una clasificación que merece ser tomada en serio. En este caso, es muy dicente que Haack afirme que “[una de las ideas más importantes que presentó en HAACK 1974 sea su] articulación de la distinción entre lógicas divergentes y extendidas” (HAACK & BO 2003)⁶⁶.

⁶⁶ En el original: “Chen Bo: [...] What do you think were the most important ideas presented in this book [HAACK 1974]?”

Susan Haack: I would say: my articulation of the distinction between deviant and extended logics [...].”

3. INGENUIDAD TIPOGRÁFICA: SEGUNDA REVISIÓN DE LA CLASIFICACIÓN DE LÓGICAS NO-CLÁSICAS DE SUSAN HAACK

Como quedó claro en el capítulo anterior, más allá de su propósito inicial, la propuesta de Haack puede defenderse como un criterio de clasificación válido para los diferentes sistemas no-clásicos. Esto, en tanto las definiciones de divergencia y extensión son bastante precisas, y en nada se ven afectadas por no poder dar cuenta de los sistemas rivales y suplementarios. En este último capítulo pretendo realizar una segunda revisión a la clasificación de Haack, no para repasar la invalidez del paso de la divergencia a la rivalidad, sino para revisar a la clasificación en sí. En últimas, concluiré que —si bien el criterio de clasificación de Haack es defendible independientemente de su propósito inicial— al revisar este criterio más a fondo, es patente que peca de lo que llamaré *ingenuidad tipográfica*. Así pues, es posible encontrar sistemas lógicos que se *burlan* de ella, puesto que son caracterizables como una *lógica divergente* y como una *lógica extendida*.

Para lograr mi propósito voy a desarrollar dos secciones, una dedicada a las traducciones entre sistemas lógicos, y otra dedicada a la revisión de un sistema lógico que se puede proponer como violación a la clasificación de Susan Haack. En la primera sección pretendo revisar el concepto de traducción entre lógicas y sus implicaciones para la clasificación de Haack, ampliando las observaciones hechas hacia el final del capítulo anterior. En la segunda sección reviso el sistema lógico paraconsistente J_3 , el cual se puede proponer como una clara violación de la clasificación de nuestra filósofa inglesa.

3.1 Traducción

Las traducciones son funciones que *proyectan* un sistema lógico en otro. Es decir, son funciones que permiten expresar *lo expresable* en un determinado sistema al interior de otro sistema. Pero, ¿qué es *lo expresable* de un sistema que se formula al interior de otro gracias a las funciones de traducción? En EPSTEIN 2001: 375 encontramos por lo menos dos propuestas: la *teoremicidad* (*theoremhood*) y la *validez* (*validity*). La *teoremicidad* es la propiedad que posee un sistema lógico de permitir la derivación de sus respectivos teoremas. Así las cosas, una traducción de $\mathbb{L}_1$ en $\mathbb{L}_2$ que preserve a la *teoremicidad* es una función inyectiva (*mapping*) $*$: $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ que otorga a todas las *f.b.f* de $\mathbb{L}_1$ una *imagen*, y solamente una, en las *f.b.f* de $\mathbb{L}_2$, tal que

$$\vdash_{\mathbb{L}_1} \alpha \text{ si y solo si } \vdash_{\mathbb{L}_2} *(\alpha)$$

Por otro lado, la *validez* es la propiedad que posee un sistema lógico de permitir la validez de sus respectivas tautologías. De esta forma, una traducción de $\mathbb{L}_1$ en $\mathbb{L}_2$ que preserve a la *validez* es una función que otorga a las *f.b.f* de $\mathbb{L}_1$ una *imagen*, y solamente una, en las *f.b.f* de $\mathbb{L}_2$, tal que

$$\models_{\mathbb{L}_1} \alpha \text{ sii } \models_{\mathbb{L}_2} *(\alpha)$$

Para los casos de lógicas que poseen metateoremas de validez y completitud, una traducción que preserve la *teoremicidad* también conserva la *validez*.

No obstante, como bien apunta Epstein, siempre es posible proyectar un conjunto contable en otro conjunto (Cfr. EPSTEIN 2001: 375). De esta forma, una función que permita proyectar todos los teoremas o fórmulas válidas de una lógica en otra no parece ser lo que se quiere decir con el concepto de traducción, puesto que, si fuese así, la noción de traducción sería trivial. Siguiendo a Epstein, una traducción, más allá de preservar la *teoremicidad* y la *validez*, debe preservar la relación de consecuencia o la relación de derivación, relaciones identificables gracias a los teoremas de completitud y validez. Este requerimiento es bastante natural al tener en cuenta que los sistemas lógicos antes de ser conjuntos de fórmulas, son bases deductivas interpretadas (como fue expuesto en los preliminares conceptuales). De esta forma, teniendo en cuenta que “consideramos a las lógicas como relaciones de consecuencia semánticas o sintácticas, [...] lo que debe ser preservado por una traducción es la relación de consecuencia” (EPSTEIN 2001: 375). Así las cosas:

Definición 3.1. Una función $*$: $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ es una traducción de $\mathbb{L}_1$ en $\mathbb{L}_2$ si y sólo si $\forall \Gamma \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$ y $\forall \varphi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1}$, se cumple que

$$\Gamma \models_{\mathbb{L}_1} \varphi \text{ sii } *(\Gamma) \models_{\mathbb{L}_2} *(\varphi).$$

Donde $\forall *(\Gamma)$ y $\forall *(\varphi)$, sucede que $*(\Gamma) \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ y $*(\varphi) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$ (Cfr. EPSTEIN 2001: 376).

Esta definición de traducción se encuentra presentada a partir de la relación semántica de consecuencia $\models$, pero también podría presentarse a partir de la relación sintáctica de derivación $\vdash$. Ahora bien, esta definición se acerca mucho más a lo que antes he llamado “expresar *lo expresable* en un determinado sistema lógico al interior de otro sistema lógico” en tanto una lógica, además de ser un conjunto de teoremas, es una base deductiva. Esto es uno de mis presupuestos al definir a los sistemas lógicos en la introducción como la tripleta $\mathbb{L} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{L}, e \rangle$ donde $\mathcal{S}$ representa a la base deductiva compuesta por la dupla $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, en donde es posible, gracias a los metateoremas de validez, reemplazar a $\vdash$ por $\models$. De esta forma, una función que sólo preserve a la *teoremicidad* o a la *validez*, sin preservar la relación de consecuencia, no preserva la mayor parte de lo que es un sistema lógico. Por otro lado, una traducción que preserve la relación de consecuencia, preserva necesariamente la *teoremicidad* y la *validez*, en tanto los teoremas y fórmulas válidas son consecuencias lógicas de los axiomas de la lógica respectiva.

Teorema 3.1. Para $*$: $\mathfrak{S}_{\mathbb{L}_1} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{L}_2}$, si se cumple $\Gamma \models_{\mathbb{L}_1} \varphi \text{ sii } *(\Gamma) \models_{\mathbb{L}_2} *(\varphi)$, se cumple $\models_{\mathbb{L}_1} A \text{ sii } \models_{\mathbb{L}_2} *(A)$.

Demostración. Inmediata a partir del caso en que $\Gamma = \emptyset$ ■

3.1.1 Ejemplos de traducciones

3.1.1.1 La traducción de H en S4

Dos ejemplos de traducciones entre lógicas son la ya referida traducción entre la lógica intuicionista H y la modal S4, y la traducción de la LC al interior de la lógica multivaluada $\mathbb{L}_3$. En el primer caso, como se dijo en el capítulo anterior, $*$ es una función inyectiva $*$: $\mathfrak{S}_H \rightarrow \mathfrak{S}_{S4}$ tal que

$$\begin{aligned} * (p) &= \Box p \\ * (\neg A) &= \Box \neg * (A) \\ * (A \vee B) &= * (A) \vee * (B) \\ * (A \wedge B) &= * (A) \wedge * (B) \\ * (A \rightarrow B) &= \Box (* (A) \rightarrow * (B)) \end{aligned}$$

A la izquierda se encuentran las fórmulas de H afectadas por la función, y a la derecha, las fórmulas de S4 que son imagen de las de H.

Teorema 3.2. La función $*$ es tal que $\Gamma \vdash_H \varphi$ sii $* (\Gamma) \vdash_{S4} * (\varphi)$

Demostración. Se encuentra en EPSTEIN 2001: 289 ■

Teorema 3.3. La función $*$ es una traducción de H al interior de S4:

$$\Gamma \models_H \varphi \text{ sii } * (\Gamma) \models_{S4} * (\varphi)$$

Demostración.

1. La función $*$ es tal que $\Gamma \vdash_H \varphi$ sii $* (\Gamma) \vdash_{S4} * (\varphi)$ (Teorema 3.2)

2. La función $*$ es tal que $\Gamma \models_H \varphi$ sii $* (\Gamma) \models_{S4} * (\varphi)$ (por Teorema de validez de H y S4) ■

Veamos un caso de aplicación de esta traducción. Como se vio en el primer capítulo, $\alpha \vee \neg \alpha$ no es una fórmula válida de H, de forma que su imagen en S4 no debe ser una fórmula válida de S4.

Teorema 3.4. $* (\alpha \vee \neg \alpha)$ no es una fórmula válida de S4

Demostración.

$$\begin{aligned} * (\alpha \vee \neg \alpha) &= * (\alpha) \vee * (\neg \alpha) \\ &= \Box \alpha \vee \Box \neg * (\alpha) \\ &= \Box \alpha \vee \Box \neg \Box \alpha \end{aligned}$$

Ahora bien, considérese un modelo de Kripke para S4 $\mathfrak{K}_{S4} = \langle W, R, e \rangle$ donde $W = \{w_1, w_2, w_3\}$; $w_1 R w_1, w_1 R w_2, w_1 R w_3, w_2 R w_2, w_2 R w_3, w_3 R w_3$ y $w_3 R w_1$; y e es tal que w_1 y $w_3 \in e(\alpha)$ y $w_2 \notin e(\alpha)$

a) $w_1 \models \alpha$ puesto que $w_1 \in e(\alpha)$

b) $w_3 \models \alpha$ puesto que $w_3 \in e(\alpha)$

c) $w_3 \models \Box \alpha$ puesto que $w_3 R w_3, w_3 R w_1, w_1 \models \alpha$ y $w_3 \models \alpha$

d) $w_3 \not\models \neg \Box \alpha$ puesto que $w_3 \models \Box \alpha$

- e) $w_2 \models \neg\alpha$ puesto que $w_2 \notin e(\alpha)$
- f) $w_2 \not\models \alpha$ puesto que $w_2 \models \neg\alpha$
- g) $w_2 \not\models \Box\alpha$ puesto que $w_2 R w_2$ y $w_2 \not\models \alpha$
- h) $w_2 \models \neg\Box\alpha$ puesto que $w_2 \not\models \Box\alpha$
- i) $w_2 \not\models \Box\neg\Box\alpha$ puesto que $w_2 R w_3$ y $w_3 \not\models \neg\Box\alpha$
- j) $w_2 \not\models \Box\alpha \vee \Box\neg\Box\alpha$ puesto que $w_2 \not\models \Box\alpha$ y $w_2 \not\models \Box\neg\Box\alpha$
- k) $\mathfrak{K}_{S_4} \not\models \Box\alpha \vee \Box\neg\Box\alpha$ puesto que $w_2 \not\models \Box\alpha \vee \Box\neg\Box\alpha$
- l) $\not\models_{S_4} \Box\alpha \vee \Box\neg\Box\alpha$ puesto que $\mathfrak{K}_{S_4} \not\models \Box\alpha \vee \Box\neg\Box\alpha$ ■

3.1.1.2 La traducción de la LC en $\mathfrak{L}_3$

En lo relacionado al segundo ejemplo, la traducción de la LC al interior de $\mathfrak{L}_3$, es menester primero hacer algunos apuntes. Además de los conectivos de $\mathfrak{L}_3$ ya expuestos en el primer capítulo, son definibles otros tantos conectivos. Uno de ellos, el condicional de Monteiro ($\rightarrow$), se encuentra en la base de la traducción entre LC y $\mathfrak{L}_3$ (Cfr. EPSTEIN 2001: 321-323 y GÓMEZ 2006: 37-42).

Definición 3.2. $\alpha \rightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Y se caracteriza por la siguiente tabla

$\alpha \rightarrow \beta$	β	1	$\frac{1}{2}$	0
α				
1		1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$		1	1	1
0		1	1	1

Este condicional tiene la particularidad de, a diferencia del condicional básico de $\mathfrak{L}_3$ y en concordancia con el condicional material de LC, $v(\alpha \rightarrow \beta) \neq 1$ sii $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) \neq 1$.

Ahora bien, la traducción de la LC al interior de $\mathfrak{L}_3$ es la función $*$: $\mathfrak{L}_{LC} \rightarrow \mathfrak{L}_{\mathfrak{L}_3}$ tal que:

$$\begin{aligned}
 * (p) &= p \\
 * (\alpha \rightarrow \beta) &= * (\alpha) \rightarrow * (\beta) \\
 * (\neg\alpha) &= * (\alpha) \rightarrow \neg(* (\alpha) \rightarrow * (\beta))
 \end{aligned}$$

A la izquierda se encuentran las fórmulas de la LC afectadas por la función, y a la derecha las fórmulas de $\mathfrak{L}_3$ que son imagen de las de la LC. La traducción de los demás conectores de la LC se puede obtener por la definición de estos a partir de la implicación material y la negación clásicas.

Teorema 3.5. La función $*$ es una traducción de LC al interior de $\mathfrak{L}_3$:

$$\Gamma \models_{LC} \varphi \text{ sii } * (\Gamma) \models_{\mathfrak{L}_3} * (\varphi)$$

Demostración. Se encuentra en EPSTEIN 2001: 322 ■

Ahora bien, veamos un caso en el que se aplique esta traducción. Como se puede revisar fácilmente, la llamada ley de Peirce $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ no es válida en $\mathfrak{L}_3$ ⁶⁷. No obstante, tras una correcta traducción, esta se convierte en una fórmula completamente válida de esta lógica multivaluada.

Teorema 3.6. $* ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ es una fórmula válida de $\mathfrak{L}_3$.

Demostración.

$$\begin{aligned} * ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha &= * ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow * (\alpha) \\ &= (* (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow * (\alpha)) \rightarrow * (\alpha) \\ &= ((* (\alpha) \rightarrow * (\beta)) \rightarrow * (\alpha)) \rightarrow * (\alpha) \\ &= ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Ahora bien,

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$	$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	0	1	0	1

Esto es, $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ es una fórmula válida de $\mathfrak{L}_3$. ■

Una lista de traducciones y funciones que proyecten una lógica en otra puede encontrarse en EPSTEIN 2001: 377-381.

⁶⁷ Considérese la valuación $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ y $v(\beta) = 0$. $v(((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) = \rightarrow (v((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha), v(\alpha)) = \rightarrow (\rightarrow (v(\alpha \rightarrow \beta), v(\alpha)), v(\alpha)) = \rightarrow (\rightarrow (\rightarrow (v(\alpha), v(\beta)), v(\alpha)), v(\alpha)) = \rightarrow (\rightarrow (\rightarrow (\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2}), \frac{1}{2}) = \rightarrow (\rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{2}) = \rightarrow (1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ■

3.1.2 Ingenuidad tipográfica

Después de toda esta exposición, es hora de volver a considerar el criterio de clasificación de lógicas no clásicas de Susan Haack. En el capítulo anterior vimos que el fenómeno de las traducciones hace que Haack reconozca que el propósito inicial de su criterio de clasificación —*i. e.* lograr un criterio de distinción entre lógicas rivales y suplementarias más allá del factor que llamé *social*— no se logró. No obstante, he querido tratar un poco más este fenómeno, a fin de ilustrar cómo una lógica puede dar cuenta de otra gracias a funciones que proyectan la una en la otra. Quiero dejar en claro que mi escogencia de la traducción de *translation* —término usado por Epstein para referirse a lo definido en Definición 3.1— como *traducción* (y no como *traslación*, como se traduce algunas veces) es una apuesta por la idea de que las lógicas, bajo esta clase de funciones, efectivamente pueden ser proyectadas *totalmente* al interior de otras lógicas de una forma análoga a como un idioma puede ser proyectado al interior de otro idioma.

Pero, ¿qué dice esto sobre la clasificación de Haack más allá de lo actualmente expuesto? Si bien las traducciones no constituyen un reto directo contra el criterio de Haack, sí ponen en duda su relevancia. El caso es que, si la divergencia y la extensión son cuestión sólo de apariencia, esta clasificación no sería más que una distinción basada en ingenuidad tipográfica. Lo que sostengo es que esta distinción se encuentra basada en un error, el error de creer ingenuamente que, sólo por la igualdad tipográfica de las *f.b.f* de dos sistemas lógicos, las discordancias entre los conjuntos de teoremas o inferencias válidas implica una divergencia o desviación uno del otro. Este caso guardaría semejanza con el de quien ingenuamente entiende como “improvisar” al verbo inglés “improve”.

Ahora bien, si despojamos a la clasificación de Haack de todas las consideraciones sobre rivalidades entre sistemas lógicos, y la dejamos como una clasificación meramente tipográfica, no veo cómo podría ésta tener alguna utilidad más allá de la que podría prestar una clasificación que distinga entre sistemas expresados en $\mathcal{L} = \langle \neg, \& \rangle$ y sistemas expresados en $\mathcal{L} = \langle \neg, \wedge \rangle$. El gran aporte de Haack a la filosofía de la lógica no pasaría de ser más que una curiosidad técnica. Ahora bien, la existencia de traducciones como las arriba tratadas sugiere esta conclusión.

3.2 Violación de la clasificación

Dejando de lado el tema de las traducciones, se han presentado contra el criterio de clasificación de Susan Haack ejemplos de sistemas lógicos que parecen no encajar en la clasificación resultante. Un ejemplo de estas propuestas se encuentra en Woods 1977: 654, donde Woods refiere la lógica relevante R_+ , la cual incluye todos los teoremas de la LC cuando esta última se presenta en $\mathcal{L} = \langle \neg, \wedge, \vee \rangle$. No obstante, aunque coincidan el conjunto de teoremas de la LC con un subconjunto de teoremas de R_+ , esta última no presenta como inferencia válida al silogismo disyuntivo. Este es un caso en el que no queda clara la clasificación que darían las definiciones de Haack a un determinado sistema, en tanto $\text{Teo}_{LC} \subset \text{Teo}_{R_+}$, pero $\text{Val}_{LC} \not\subset \text{Val}_{R_+}$. Recordemos que las definiciones de Haack son formuladas tanto a partir del conjunto de teoremas (Teo) como a partir

del conjunto de inferencias válidas (Val), siendo suficiente, para catalogar a un sistema como extensión o divergencia, apelar a uno sólo de estos dos conjuntos. Ahora bien, si se toman las definiciones que da Haack a partir de Teo, R+ cumple fácilmente con los requisitos para ser una extensión de la LC; no obstante, si se toma dicha definición a partir de Val, R+ resulta siendo claramente una lógica divergente.

En esta sección pretendo, antes que presentar algún sistema ya referido como contraejemplo a la clasificación de Haack, presentar un ejemplo de un sistema lógico que yo mismo he observado que no permite una tipificación adecuada al interior de la clasificación. La defensa que doy a dicho contraejemplo podría expandirse, concluyendo que cada sistema de la familia de sistemas lógicos de la cual hace parte el que presento es a su vez un contraejemplo. Con esto pretendo mostrar que, aunque haya concluido que la clasificación de Haack es *defendible* independientemente de su fracaso en su objetivo inicial, fracasa también en su pretensión de clasificar las lógicas no-clásicas debido a su ya sugerido excesivo énfasis tipográfico.

3.2.1 Lógica Paraconsistente J_3

J_3 es una lógica paraconsistente creada por D'Ottaviano y Da Costa, y presentada por primera vez en D'OTTAVIANO & DA COSTA 1970. Como todas las lógicas de su familia, J_3 tiene la particularidad de soportar contradicciones en las teorías formalizadas en su interior sin trivializarlas. Es decir, en J_3 de una contradicción cualquiera $\alpha \wedge \neg\alpha$ no se sigue cualquier proposición β ; lo que sí sucede en LC por medio de la regla —obviamente no válida en J_3 — conocida como regla del Pseudo-Escoto o regla de Cornubia $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$. Para una presentación más bien técnica de este sistema refiero al Anexo A.

J_3 es, además de una lógica paraconsistente, también una lógica multivaluada —más exactamente, trivaluada—. Su matriz semántica puede presentarse como $M = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, D, \bar{D}, \neg, \wedge, \diamond \rangle$ donde $D = \{\frac{1}{2}, 1\}$, $\bar{D} = \{0\}$ y $\neg, \vee, \diamond$ se caracterizan por las siguientes tablas (Cfr. D'OTTAVIANO 1982: 1):

$\alpha \wedge \beta$	β				α	$\neg \alpha$	α	$\Diamond \alpha$
α		1	$\frac{1}{2}$	0				
1		1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0		0	0	0	0	1	0	0

Además, se puede definir $\Box\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \diamond \neg\alpha$

$$\alpha \vee \beta \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

$$\alpha \rightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} \neg \diamond \alpha \vee \beta$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\odot \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\Diamond \alpha \wedge \neg \alpha)$$

Esta matriz es bastante particular debido a que su conjunto de valores designados no se compone únicamente del valor 1, sino que incluye además al valor $\frac{1}{2}$. Dicho valor puede interpretarse filosóficamente, según sus creadores, de la siguiente forma

En la fase preliminar de la elaboración de una teoría (matemática, física, etc.), pueden aparecer contradicciones que, en la formulación definitiva, son eliminadas; 0, 1 y $\frac{1}{2}$ son los valores de verdad, donde 0 representa lo “falso”, 1 lo “verdadero” y $\frac{1}{2}$ el valor provisional de una proposición A tal que A y $\neg A$ son tesis de la teoría en consideración en su formulación provisional; en la forma definitiva de la teoría, el valor $\frac{1}{2}$ se reducirá, al menos en principio, a 0 ó a 1. (D’OTTAVIANO & DA COSTA 1970: 1351)⁶⁸

Una de las axiomatizaciones presentadas para J_3 es la siguiente (Cfr. EPSTEIN 2001: 362):

- $A_1. \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- $A_2. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- $A_3. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\beta \wedge \alpha) \rightarrow \gamma)$
- $A_4. \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
- $A_5. (\alpha \wedge \neg \alpha \wedge \odot \alpha) \rightarrow \beta$
- $A_6. ((\neg \alpha \wedge \odot \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- $A_7. \neg \neg \alpha \leftrightarrow \alpha$
- $A_8. \odot \alpha \leftrightarrow \odot \neg \alpha$
- $A_9. \neg \Diamond \alpha \leftrightarrow (\neg \alpha \wedge \odot \alpha)$
- $A_{10}. \odot(\Diamond \alpha)$
- $A_{11}. ((\alpha \wedge \beta) \wedge \odot(\alpha \wedge \beta)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \odot \alpha) \wedge (\beta \wedge \odot \beta))$

$$\text{Regla de inferencia} \quad \text{MP:} \quad \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Dejando de lado estas consideraciones, me dispongo a demostrar que J_3 puede clasificarse como una divergencia —más exactamente como una cuasi-divergencia— y como una extensión de la LC, hecho que pone de manifiesto la inadecuación de la clasificación de Haack.

3.2.1.1 J_3 como lógica cuasi-divergente

En D’OTTAVIANO 1982, D’Ottaviano, uno de los creadores de J_3 afirma que

⁶⁸ En el original: “dans la phase préliminaire de l’élaboration d’une théorie (mathématique, physique, etc.), peuvent apparaître des contradictions qui, dans la formulation définitive, sont éliminées; 0, 1 et $\frac{1}{2}$ sont les valeurs de vérité, où 0 représente le «faux», 1 le «vrai» et $\frac{1}{2}$ la valeur provisoire d’une proposition A, telle que A et $\neg A$ sont des thèses de la théorie en considération dans sa formulation provisoire; dans la forme définitive de la théorie, la valeur $\frac{1}{2}$ se réduira, au moins en principe, à 0 ou à 1.”

No son válidos en [la matriz de J_3] M, entre otros, los esquemas siguientes:

$$\begin{array}{ll}
\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) & (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \\
\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta) & (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \\
\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) & (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha) \\
\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) & (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \\
(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta & (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \\
(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\beta & (\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)) \leftrightarrow \alpha \\
(\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \rightarrow \beta & (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \\
(\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\beta & (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta \\
(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha) &
\end{array}$$

(D'OTTAVIANO 1982:4)⁶⁹

A continuación demuestro la invalidez en J_3 de la primera fórmula de la columna de la izquierda.

Teorema 3.7. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ no es teorema de J_3 , $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \notin \text{Teo}_{J_3}$

Demostración. Considérese la valuación $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ y $v(\beta) = 0$

1. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) = \neg \diamond \neg\alpha \vee (\neg \diamond \alpha \vee \beta)$
2. $v(\neg \diamond \neg\alpha \vee (\neg \diamond \alpha \vee \beta)) = v(v(\neg \diamond \neg\alpha), v(\neg \diamond \alpha \vee \beta))$
 $= v(\neg \diamond \neg v(\alpha), v(v(\neg \diamond \alpha), v(\beta))) = v(\neg \diamond \neg v(\alpha), v(\neg \diamond v(\alpha), v(\beta)))$
 $= v(\neg \diamond \neg(\frac{1}{2}), v(\neg \diamond (\frac{1}{2}), 0)) = v(\neg \diamond (\frac{1}{2}), v(\neg(1), 0))$
 $= v(\neg(1), v(0, 0)) = v(0, 0) = 0$
3. $\not\models \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
4. Ahora, por teorema de completitud de J_3 , se cumple que $\not\models \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$; esto es, $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \notin \text{Teo}_{J_3}$ ■

Teorema 3.8. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ es teorema de J_3 , $\Box\alpha \rightarrow \alpha \in \text{Teo}_{J_3}$

Demostración.

⁶⁹ En el original: “Não são válidos em M, entre outros, os esquemas abaixo:...”

α	$\Box \alpha$	$\Box \alpha \rightarrow \alpha$
1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1
0	0	1

La anterior tabla demuestra que $\models \Box \alpha \rightarrow \alpha$. Ahora, por teorema de completitud de J_3 , $\vdash \Box \alpha \rightarrow \alpha$; esto es, $\Box \alpha \rightarrow \alpha$ es teorema de J_3 ■

Teorema 3.9. $\mathfrak{S}_{LC} \subset \mathfrak{S}_{J_3}$ y $\mathfrak{S}_{LC} \neq \mathfrak{S}_{J_3}$

Demostración. Igual a la Demostración del Teorema 2.10, con las modificaciones pertinentes. ■

Teorema 3.10. $\text{Teo}_{LC} \neq \text{Teo}_{J_3}$ t. q. $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{J_3} - \mathfrak{S}_{LC}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{J_3}$; y $\exists \psi \in \mathfrak{S}_{LC} \cap \mathfrak{S}_{J_3}$ para la cual $\psi \in \text{Teo}_{LC} - \text{Teo}_{J_3}$

Demostración

1. Como ' $\Box$ ' no es símbolo de LC, $\Box \alpha \rightarrow \alpha \in \mathfrak{S}_{J_3} - \mathfrak{S}_{LC}$
2. $\Box \alpha \rightarrow \alpha \in \text{Teo}_{J_3}$ (por Teorema 3.8)
3. $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \in \mathfrak{S}_{LC} \cap \mathfrak{S}_{J_3}$
4. $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \notin \text{Teo}_{J_3}$ (por Teorema 3.7)
5. $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \in \text{Teo}_{LC}$
6. $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \in \text{Teo}_{LC} - \text{Teo}_{J_3}$ (de 4 y 5) ■

Teorema 3.11. J_3 es una lógica cuasi-divergente.

Demostración

1. J_3 es una cuasi-divergencia de LC (por Teoremas 3.9 y 3.10, y Definición 2.3)
2. J_3 es una lógica cuasi-divergente (por Definición 2.6) ■

3.2.1.2 J_3 como lógica extendida

A pesar de lo desarrollado en la sección anterior, también es posible presentar a este sistema como una extensión de la LC. De hecho, Epstein presenta la siguiente axiomatización de J_3 en $\mathcal{L} = \langle \neg, \rightarrow, \wedge, \sim \rangle$ (Cfr. EPSTEIN 2001: 365-366):

- Ax0. Todos los teoremas de LC en $\mathcal{L} = \langle \neg, \rightarrow, \wedge \rangle$ donde $(\neg/\sim)$
- Ax1. $\neg \neg \alpha \leftrightarrow \alpha$
- Ax2. $(\neg \sim \alpha \wedge \sim \alpha) \rightarrow \sim \neg \alpha$
- Ax3. $\sim \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\sim \neg \alpha \wedge \sim \neg \beta)$
- Ax4. $\sim \alpha \rightarrow \sim \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
- Ax5. $(\beta \wedge \sim \neg \beta) \rightarrow \sim \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
- Ax6. $((\alpha \wedge \beta) \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

Regla de inferencia $\text{MP: } \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha}$

Esta axiomatización devela una de las mayores curiosidades de J_3 —y en general de todas las lógicas paraconsistentes—, la existencia de dos *negaciones* diferentes: la negación básica, débil o paraconsistente $\neg$, y la negación fuerte o clásica $\sim$. Esta última presenta en J_3 la siguiente tabla:

α	$\sim \alpha$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

Para esta negación queda claro que si v_{J_3} es una valuación de fórmulas de J_3 , y v_{LC} es una valuación de fórmulas de la LC, se cumple que $v_{J_3}(\sim \alpha) = 1$ o $\frac{1}{2}$ sii $v_{LC}(\neg \alpha) = 1$; esto es, $v_{J_3}(\sim \alpha) \in D$ sii $v_{LC}(\neg \alpha) = 1$. Dicho de otra forma, la negación fuerte $\sim$ se comporta como la negación de la LC.

Teorema 3.12. $\text{Teo}_{LC} \subset \text{Teo}_{J_3}$ y $\text{Teo}_{LC} \neq \text{Teo}_{J_3}$

Demostración.

1. Todos los teoremas de LC son teoremas de J_3 (Por Ax0 de J_3)
2. $\Box \alpha \rightarrow \alpha$ es teorema de J_3 (por Teorema 3.8)
3. Dado que $\Box \alpha \rightarrow \alpha \notin \mathfrak{S}_{LC}$, entonces $\Box \alpha \rightarrow \alpha$ no es teorema de LC
4. Por lo tanto, todos los teoremas de LC son teoremas de J_3 , pero no todos los teoremas de J_3 son teoremas de LC ■

Teorema 3.13. $\forall \psi \in \text{Teo}_{J_3} - \text{Teo}_{LC}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{J_3} - \mathfrak{S}_{LC}$

Demostración.

1. Considérese a J_3 con $\mathfrak{S}_{J_3}$ restringido a $\mathfrak{S}_{J_3} \cap \mathfrak{S}_{LC\sim}$ donde $\mathfrak{S}_{LC\sim} = \mathfrak{S}_{LC}(\neg/\sim)$ y $\text{Teo}_{LC\sim} = \text{Teo}_{LC}(\neg/\sim)$. Si v_{J_3} es una valuación de fórmulas de J_3 , y v_{LC} es una valuación de fórmulas de LC, se prueba fácilmente por extensión de α que $v_{J_3}(\alpha) = 1$ o $\frac{1}{2}$ sii $v_{LC}(\alpha) = 1$; esto es, $v_{J_3}(\alpha) \in D$ sii $v_{LC}(\alpha) = 1$. Por lo tanto, si $\forall \psi, \psi \in \mathfrak{S}_{J_3} \cap \mathfrak{S}_{LC\sim}$, se cumple que $\psi \in \text{Teo}_{J_3}$ sii $\psi \in \text{Teo}_{LC\sim}$. Por último, por el Teorema 2.2, $\forall \psi \in \text{Teo}_{J_3} - \text{Teo}_{LC\sim}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{J_3} - \mathfrak{S}_{LC\sim}$ ■

En la anterior demostración, $\mathfrak{S}_{LC\sim}$ es $\mathfrak{S}_{LC}$ como lo presenté en la introducción, reemplazando el símbolo tipográfico $\neg$ por $\sim$. Ambos símbolos representan al mismo operador lógico en la LC; por lo que, más allá de la tipografía, $\mathfrak{S}_{LC} = \mathfrak{S}_{LC\sim}$.

Teorema 3.14. J_3 es una lógica extendida.

Demostración

1. $\mathfrak{S}_{LC} \subset \mathfrak{S}_{J_3}$ y $\mathfrak{S}_{LC} \neq \mathfrak{S}_{J_3}$ (por Teorema 3.9)
2. $\text{Teo}_{LC} \subset \text{Teo}_{J_3}$ y $\text{Teo}_{LC} \neq \text{Teo}_{J_3}$ (por Teorema 3.12)
3. $\forall \psi \in \text{Teo}_{J_3} - \text{Teo}_{LC}$ se cumple que $\psi \in \mathfrak{S}_{J_3} - \mathfrak{S}_{LC}$ (por Teorema 3.13)
4. J_3 es una extensión de LC (por Definición 2.1)
5. J_3 es una lógica extendida (por Definición 2.4) ■

3.2.1.3 J_3 como violación a la clasificación de Haack

Teniendo en cuenta los Teoremas 3.11 y 3.14, queda claro que J_3 puede caracterizarse, según las consideraciones de Haack expresadas en las Definiciones 2.1 a 2.6, como una lógica extendida y como una lógica divergente. Pero ¿cuál es el problema? ¿No puede ser el caso que un mismo sistema lógico sea caracterizado por más de uno de los grupos definidos por Haack? Revisemos esta posibilidad.

Teorema 3.15. J_3 es una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida

Demostración. Conjunción de Teorema 3.11 y 3.14 ■

Teorema 3.16. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida

Demostración

1. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (Teorema 2.7)
2. $\mathbb{L}_1$ es una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida (hipótesis)
3. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$, y $\mathbb{L}_2 = LC$ (por Definición 2.2 y 2.4)
4. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (de 3)
6. $\mathbb{L}_1$ es una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$, y no sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una cuasi-divergencia y una extensión de $\mathbb{L}_2$ (de 1 y 4) $\rightarrow \leftarrow$ ■

Teorema 3.17. No sucede que J_3 sea una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida.

Demostración

1. No sucede que $\mathbb{L}_1$ sea una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida (Teorema 3.16)
2. No sucede que J_3 sea una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida (Instanciación de 1) ■

Teorema 3.18. J_3 es una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida, y no sucede que J_3 sea una lógica cuasi-divergente y una lógica extendida $\rightarrow \leftarrow$.

Demostración. Conjunción de Teorema 3.15 y 3.17 ■

Ahora es posible ver que la clasificación realizada a partir de las definiciones de Haack se muestra como contradictoria cuando se aplica al sistema J_3 . Dicho de otra forma, J_3 es un claro contraejemplo a la clasificación de Haack.

Como en la primera sección de este capítulo, ahora también diagnostico lo que he llamado ingenuidad tipográfica de la clasificación de Haack. El excesivo énfasis de las definiciones de Haack en el conjunto de teoremas (Teo) y el conjunto de f.b.f ($\mathfrak{S}$) para dar cuenta de la divergencia y la extensión permite que un sistema como J_3 —que contiene dos tipos de negación— pueda caracterizarse como lógica divergente y como lógica extendida. Si revisamos las demostraciones de los teoremas 3.7 a 3.14, vemos que lo que permite que se presente la *curiosa* clasificación de J_3 es precisamente que este sistema posee una negación que permite la violación de varios teoremas clásicos, mientras posee otra negación para la cual valen todos los teoremas clásicos. Así, por ejemplo, al tiempo que $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ no es teorema de J_3 , $\sim\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ sí lo es. Lo que en la LC es una distinción meramente tipográfica entre el signo $\neg$ y el signo $\sim$, en el sistema de D'Ottaviano y Da Costa es una verdadera distinción entre operadores lógicos diferentes.

Ahora bien, ¿cuál de las dos negaciones de J_3 *debería* compararse con la negación clásica al momento de realizar la clasificación de este sistema? Evidentemente tanto la negación básica ($\neg$) como la negación fuerte ($\sim$) son negaciones en J_3 y ambas pueden entenderse como formas de lo que el lógico de J_3 quiere decir al negar una proposición. De esta misma forma, no existe ninguna razón para preferir a alguna de estas dos negaciones, entendiéndola como *la* negación de J_3 y, por tanto, *la* negación que se compara con la negación clásica a la hora de aplicar las definiciones de Haack. Esta falencia en el criterio de clasificación de lógicas no-clásicas de Haack se vuelve extremadamente preocupante al considerar que, por lo menos en teoría, siempre es posible definir al interior de los diferentes sistemas lógicos, operadores de comportamiento clásico que convivan con los operadores básicos de dichos sistemas. Así, por ejemplo, es posible definir al interior del sistema $\mathfrak{L}_3$ de Łukasiewicz un operador especial de negación $\sim_{\mathfrak{L}_3}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \Diamond \alpha$ cuyo comportamiento es idéntico a la negación de la LC si se interpreta a $\frac{1}{2}$ como un valor antidesignado; este operador junto con el condicional de Monteiro parecen rescatar el comportamiento de la negación e implicación clásicas, de donde podría sugerirse la posibilidad de rescatar todos los operadores clásicos al interior de $\mathfrak{L}_3$, e incluso, de cualquier lógica no-clásica.

3.3 Conclusión

A lo largo de este capítulo he presentado dos argumentos que apuntan a lo que considero es el mayor error de la clasificación de lógicas no-clásicas de Susan Haack, su excesivo énfasis en la tipografía. En la primera sección enfatizo en las observaciones hechas al final del capítulo anterior, de forma que reviso el concepto de *traducción (translation)* entre lógicas. Dicha revisión me permite reafirmar el fracaso de la clasificación de Haack como medio para distinguir a las lógicas rivales de las lógicas suplementarias. No obstante, también me permite caracterizar a la

clasificación resultante del criterio de Haack como una clasificación que se queda en lo tipográfico al confundir, por la igualdad tipográfica, los teoremas que una lógica acepta con los que otra no.

En la segunda sección mostré el sistema paraconsistente J_3 como un contraejemplo a la clasificación de Haack. Esto es, mostré que J_3 es capaz de violar la clasificación resultante del criterio propuesto por esta filósofa inglesa, al punto de hacerla contradictoria y —dado que se encuentra formulada a partir de teoría de conjuntos y lógica clásicas— trivial. Curiosamente, esta trivialización de la clasificación de Haack la obtengo con la ayuda de una lógica paraconsistente. Ahora bien, esta segunda sección, al igual que la primera me lleva a concluir que la clasificación de Haack hace un excesivo énfasis en la tipografía. Efectivamente, los problemas que causa J_3 en la clasificación que nos ocupa provienen de la existencia de dos tipos diferentes de negación, ambos comparables con la negación de la LC a la hora de aplicar las definiciones de Haack. Es decir, que a la hora de aplicar dichas definiciones no es claro si se debe tomar a la negación básica o a la negación fuerte de J_3 como el operador correspondiente a la negación de la LC para establecer si todos los teoremas con negación de la LC son o no teoremas de J_3 . De hecho, sustentado en que ambos operadores son, en efecto, negaciones del sistema de D'Ottaviano y Da Costa, sostengo que ambas negaciones *corresponden* a la negación de la LC para establecer si todos los teoremas clásicos con negación son teoremas de J_3 . Esto es, paradójicamente, teoremas clásicos como $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ son y no son teoremas de J_3 . Es decir, la forma implicativa del pseudo-escoto no es teorema de J_3 si se formula con la negación básica o débil de dicho sistema, pero sí es teorema de J_3 si se formula con la negación fuerte. Así las cosas, sólo por cambiar el signo tipográfico $\neg$ por $\sim$ en la presentación de la LC, J_3 deja de ser una lógica divergente —o más exactamente una lógica cuasi-divergente—, y pasa a ser una lógica extendida.

Podría objetarse que esto es ser poco caritativos con Haack, que la única negación de J_3 que ella reconocería como comparable con la negación clásica sería la negación fuerte, y por tanto, que J_3 sería caracterizable sólo como una extensión de la LC al agregar el nuevo conector llamado *negación débil*. La anterior postura sólo se puede justificar si se acepta que la negación débil o básica no es realmente una negación, sino otro conectivo diferente. No obstante, esto constituye un desconocimiento de las particularidades de J_3 y demás lógicas paraconsistentes. Efectivamente, la negación débil es la negación que en estos sistemas se encarga de expresar lo negativo respecto a las fórmulas que no poseen buen comportamiento. Desconocer su carácter de negación es desconocer la parte negativa de las proposiciones contradictorias y, por tanto, desconocer la empresa misma de la paraconsistencia. De hecho, la negación débil es, en J_3 , un conectivo básico irreducible a la negación fuerte, sin darse el caso contrario. Dicho de otra forma, si bien la negación fuerte de A se puede definir como $\neg A \wedge \odot A$, no hay ninguna forma de definir a la negación débil a partir de la negación fuerte y algún otro conector.

Retomando, la negación débil expresa la negación para proposiciones sin buen comportamiento, mientras la negación fuerte la expresa para proposiciones con buen comportamiento. Si esto es

así, ambas negaciones expresan formas diferentes de la negación. Tomar a la negación fuerte como única representante de la negación en J_3 —es decir, como el único conector comparable a la negación clásica a la hora de comparar dicho sistema con la LC— es desconocer toda una forma de negación, toda una forma de lo que el lógico paraconsistente quiere decir cuando niega un enunciado. Es así que, en aras de ser caritativos con Haack, estaríamos desconociendo por completo lo que es la paraconsistencia. Ahora bien, si los lógicos reconocen actualmente la existencia de varios tipos de negación y otros conectores, no veo por qué estemos obligados a ser caritativos con Haack sacrificando toda una forma de negación paraconsistente. En cambio, si se reconoce ambos operadores como formas de lo que el lógico de J_3 quiere decir al negar una proposición, se tendrá que aceptar que ambos operadores, a la hora de comparar dicho sistema con la LC, podrán ser comparados con la negación clásica en tanto ambos son negaciones.

Al final de toda esta reconstrucción y revisión de la clasificación de lógicas no-clásicas de Susan Haack, es posible ver por qué Palau afirma que “la cantidad de avances en lógica producidos especialmente a partir de los años ochenta del siglo XX, han mostrado que el criterio de clasificación de Haack es insuficiente e inadecuado, ya que quedan muchos sistemas lógicos actuales fuera de su alcance” (PALAU 2002: 34). No obstante, la clasificación de Haack se muestra inadecuada no sólo para las lógicas desarrolladas a partir de la década de 1980: J_3 , por ejemplo, fue formulado hacia 1970. Efectivamente, uno de los textos más antiguos en los que se hace mención a J_3 es D’OTTAVIANO & DA COSTA 1970, lo cual es cuatro años antes de la publicación de HAACK 1974 reimpresa en HAACK 1996.

Ahora bien, he llegado a concluir que el criterio de clasificación de Haack es inadecuado tal como está formulado; pero ¿esto significa que no es posible clasificar a las lógicas no clásicas? La respuesta a esta pregunta no es sencilla y no me atrevo a aventajar una postura. No obstante, sí considero que es posible explorar no sólo una posible clasificación semántica, sino también una clasificación sintáctica como la aquí atacada modificándola para hacer frente al fenómeno de la proliferación de *versiones* diferentes de operadores que en la LC corresponden a sólo uno —i. e. operadores como las diferentes negaciones de las lógicas paraconsistentes o las diferentes implicaciones de las lógicas multivaluadas—. Por otro lado, para responder una pregunta como la anteriormente formulada, también es necesario revisar otras clasificaciones que se encuentran en el panorama de la filosofía de la lógica, como el caso de la clasificación de Miró Quesada y Da Costa expuesta por este último en el libro de 1980, *Esaiio sobre os Fundamentos da Lógica* (Cfr. BOBENRIETH 1996, 435-438). No obstante, eso es trabajo que no corresponde a este escrito.

LÓGICA PARACONSISTENTE: EL CASO DE J_3

Anexo A

Introducción

La Lógica Paraconsistente es una gran familia de sistemas lógicos no clásicos desarrollados principalmente en Brasil, Polonia, Australia y Argentina desde la segunda mitad del siglo pasado; su principal característica es la posibilidad de tratar teorías o conjuntos de fórmulas considerados clásicamente como contradictorios sin caer en la trivialización. Se dice de una teoría que es trivial si toda fórmula de su lenguaje es demostrable. En la lógica clásica (y muchos otros sistemas lógicos), la presencia de cualquier contradicción en una teoría la trivializa debido a los teoremas y regla de inferencia conocidos como pseudo-Escoto; esto es: $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash \beta$. El propósito de las lógicas paraconsistentes es manejar proposiciones como $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ sin que de ella se siga cualquier fórmula. La estrategia para lograr tal cosa es más o menos simple: si se desea permitir contradicciones y no caer en la trivialización, se debe eliminar el principio clásico de pseudo-Escoto. Así pues, encontramos que las lógicas paraconsistentes eliminan siempre tal regla de inferencia.

Sin embargo, las lógicas paraconsistentes no sólo pretenden atrapar el aspecto lógico de los sistemas considerados clásicamente contradictorios; sino que también pretenden atrapar el aspecto lógico de sistemas con un comportamiento clásico (es decir, que no presentan —ni pueden presentar— contradicciones en sentido clásico). A fin de lograrlo, encontramos en estos sistemas lógicos operadores tan curiosos como el de consistencia “ $\odot$ ” y la negación fuerte “ $\sim$ ” que permiten atrapar el carácter consistente de las fórmula y el carácter clásico de la negación, respectivamente. De esto último se sigue otra de las características peculiares de las lógicas paraconsistentes, la existencia de dos formas de negación: la negación débil o paraconsistente “ $\neg$ ” y la negación fuerte “ $\sim$ ”; diferenciándose principalmente en la posibilidad que da la negación débil de formar contradicciones que no son necesariamente insatisfacibles, posibilidad que no permite la negación fuerte. Así pues, tenemos que, en las lógicas paraconsistentes, $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ es satisfacible, mientras $(\alpha \wedge \sim\alpha)$ no lo es.

Históricamente, Newton C. A. Da Costa es considerado como el primer lógico en crear y axiomatizar una lógica paraconsistente. De hecho, creó y axiomatizó toda una gama de lógicas, la jerarquía C_n $1 \leq n \leq \omega$ en su texto *Sistemas formais inconsistentes* de 1963 (Cfr. BOBENRIETH 1996: 186); posteriormente publicó junto con otros lógicos como Ayda I. Arruda varias notas en el *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris* en los que desarrolla variados aspectos de su jerarquía de sistemas lógicos (Cfr. BOBENRIETH 1996:209-216; y DA COSTA, BÉZIAU & BUENO 1998: 101-103). No obstante, antes de la aparición de la jerarquía de Da Costa, el lógico polaco Jaskowski en su texto de 1948 traducido como *Cálculo proposicional para sistemas deductivos contradictorios*

presentó, aunque no axiomatizó, un sistema lógico paraconsistente conocido como lógica discursiva (Cfr. BOBENRIETH 1996: 151-166; DA COSTA, BÉZIAU & BUENO 1998: 99-101; y DA COSTA & LEWIN 1995: 190). Anterior a esto, se encuentran los trabajos del lógico ruso Vasiliev hacia 1925 sobre lo que llamó *lógicas imaginarias* a partir de la silogística aristotélica (Cfr. DA COSTA & LEWIN 1995: 190; y ARRUDA 1990: 10-13). Después de los primeros desarrollos de Da Costa se han formulado y estudiado gran cantidad de sistemas lógicos paraconsistentes, como el cálculo de antinomias de Asenjo —formulado por primera vez en su texto de 1965 *Lógica dialéctica* (Cfr. BOBENRIETH 1996: 216-221)— y el sistema multivaluado J_3 de Da Costa y D’Ottaviano —propuesto en D’OTTAVIANO & DA COSTA 1970 y desarrollado (entre otros) en D’OTTAVIANO 1982, D’OTTAVIANO 1985 y D’OTTAVIANO 1987—.

Ahora bien, como es posible ver, la familia Paraconsistente es un grupo extremadamente extenso de lógicas, por lo que he decidido presentar aquí sólo un representante de este grupo: la lógica J_3 . Este sistema lógico presenta la curiosidad de ser una respuesta explícita al “reto de Jaskowski” consistente en crear un sistema lógico contradictorio que 1) no implique su trivialización, 2) que sea lo suficientemente rico como para permitir inferencias prácticas y 3) que sea intuitivo (Cfr. D’OTTAVIANO & DA COSTA 1970: 1349 y D’OTTAVIANO 1982: iii, 14-15). La siguiente presentación de J_3 sigue la axiomatización presentada en EPSTEIN 2001: 362 y GÓMEZ 2006: 245-259.

1. Sintaxis

$$L: (\neg, \wedge, \diamond, p_0, p_1, \dots, p_n)$$

Definición 1.1. Las siguientes cláusulas determinan el conjunto de fórmulas de J_3 :

1. Todo símbolo o variable atómica p_i es una fórmula de J_3 .
2. Si α es fórmula, entonces:
 - a) $\neg\alpha$ es fórmula de J_3 .
 - b) $\diamond\alpha$ es fórmula de J_3 .
3. Si α y β son fórmulas, entonces $\alpha \wedge \beta$ es fórmula de J_3 .
4. β es fórmula de J_3 sii β se genera mediante aplicaciones finitas de las reglas anteriores.

Es posible definir algunos conectores y operadores más con relación a los ya vistos:

1. $\alpha \vee \beta \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
2. $\alpha \rightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\diamond\alpha \wedge \neg\beta)$
3. $\Box\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \diamond \neg\alpha$
4. $\odot\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\diamond\alpha \wedge \diamond\neg\alpha)$
5. $\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$; es decir: $\neg(\diamond\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\diamond\beta \wedge \neg\alpha)$
6. $\sim\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \diamond \alpha$

2. Axiomática y Deducción para J₃

$$A_1. \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$A_2. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$A_3. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\beta \wedge \alpha) \rightarrow \gamma)$$

$$A_4. \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$$

$$A_5. (\alpha \wedge \neg \alpha \wedge \odot \alpha) \rightarrow \beta$$

$$A_6. ((\neg \alpha \wedge \odot \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$A_7. \neg \neg \alpha \leftrightarrow \alpha$$

$$A_8. \odot \alpha \leftrightarrow \odot \neg \alpha$$

$$A_9. \neg \diamond \alpha \leftrightarrow (\neg \alpha \wedge \odot \alpha)$$

$$A_{10}. \odot(\diamond \alpha)$$

$$A_{11}. ((\alpha \wedge \beta) \wedge \odot(\alpha \wedge \beta)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \odot \alpha) \wedge (\beta \wedge \odot \beta))$$

$$\text{Regla de inferencia: MP. } \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Metateorema 2.2. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ entonces $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Nota: El teorema de la deducción es demostrable en J₃ siguiendo la misma forma de la demostración del teorema de la deducción de LC.

3. Semántica

Universo semántico (V):

$$V = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$$

Valores designados (D):

$$D = \{\frac{1}{2}, 1\}$$

Valores antidesignados ($\bar{D}$):

$$\bar{D} = \{0\}$$

Definición semántica de los operadores:

α	$\neg\alpha$	α	$\Diamond\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	β	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0

α	$\Box\alpha$	$\alpha \rightarrow \beta$	β	1	$\frac{1}{2}$	0	$\alpha \leftrightarrow \beta$	β	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	α	1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	

α	$\sim\alpha$	α	$\odot\alpha$	$\alpha \vee \beta$	β	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0

Definición 3.1. Una fórmula α es satisfacible sii existe al menos una J_3 -valuación v que le asigne a α un valor designado.

$$v \models \alpha \text{ sii } v(\alpha) \in D$$

Definición 3.2. Un conjunto de fórmulas Γ es satisfacible sii existe al menos una J_3 -valuación v que satisfaga a todas y cada una de las fórmulas de Γ .

$$v \models \Gamma \text{ sii para todo } \alpha \in \Gamma; v \models \alpha$$

Definición 3.3. Una fórmula α es tautológica sii cualquier J_3 -valuación satisface a α .

$$\models \alpha \text{ sii para toda } v; v \models \alpha$$

Definición 3.4. Una fórmula α es consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ sii cualquier J_3 -valuación v que satisfaga a Γ satisface también a α .

Nota 3.1. En J_3 existen un Teorema de validez y un Teorema de completitud⁷⁰.

$$\vdash \alpha \text{ sii } \models \alpha$$

Nota 3.2. Del sistema deductivo y la semántica aquí presentados de J_3 se demuestra la no validez de los siguientes teoremas de LC, entre otros.

- $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \alpha$
- $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow \neg\alpha$
- $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$

Demostración 3.2. Demostración de la no validez del tercer punto de la Nota 3.1, el principio de Pseudo-Escoto.

1. $v(p) = \frac{1}{2}$ y $v(q) = 0$
2. $v(\neg p) = \neg(v(p)) = \neg(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
3. $v(p \wedge \neg p) = \wedge(v(p), v(\neg p)) = \wedge(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
4. $v((p \wedge \neg p) \rightarrow q) = \rightarrow(v(p \wedge \neg p), v(q)) = \rightarrow(\frac{1}{2}, 0) = 0$
5. $v((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \notin D$
6. $\not\models_{J_3} (p \wedge \neg p) \rightarrow q$
7. $\not\models_{J_3} (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$ ■

Para demostrar la invalidez del Pseudo-Escoto en forma de regla de inferencia debemos encontrar una J_3 -valuación que satisfaga a $p \wedge \neg p$ pero no a q . Tal valuación es la misma de la Demostración 3.2; por tanto, partamos del numeral 3 de tal demostración.

Demostración 3.3.

4. $v(p \wedge \neg p) \in D$ y $v(q) \notin D$
5. $(p \wedge \neg p) \not\models q$
6. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \not\models \beta$ ■

Nota 3.3. Es interesante que, a pesar de permitir contradicciones y de tener un tercer valor de verdad, en J_3 sucede que:

⁷⁰ Para una demostración de estos teoremas, ver D'OTTAVIANO 1985 o GÓMEZ 2006: 273-282

- $\models_{J_3} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
- $\models_{J_3} (\alpha \vee \neg\alpha)$

4. Consistencia en la paraconsistencia: $\odot$

El operador de consistencia $\odot$ de J_3 permite controlar clásicamente a una fórmula; *i.e.* $\odot$ expresa que la fórmula a la que afecta es consistente (no permite valuación no clásica). Si se revisa la tabla de verdad para este operador, es posible encontrar que modifica el valor alético de una proposición de forma que sólo es verdadero (1) si el valor de la proposición a la que afecta pertenece a una valuación clásica (*i.e.* 1 ó 0); por tanto, modificará la valuación a falso (0) si la valuación de la fórmula afectada es no clásica (*i.e.* $\frac{1}{2}$). Al introducir el operador $\odot$ decimos que la fórmula tiene un “buen comportamiento”; es decir, un comportamiento clásico.

$$v(\odot\alpha) \in D \text{ sii } v(\alpha) \neq \frac{1}{2}$$

Teorema 4.1. $\models_{J_3} ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) \rightarrow \beta$

1. $v(\alpha) = 1$ o $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ o $v(\alpha) = 0$
 2. Si $v(\alpha) = 1$
 - 2.1. $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = \wedge(v(\alpha), v(\neg\alpha)) = \wedge(v(\alpha), \neg(v(\alpha))) = \wedge(1, \neg(1)) = \wedge(1, 0) = 0$
 - 2.2. $v(\odot\alpha) = \odot(v(\alpha)) = \odot(1) = 1$
 - 2.3. $v((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) = \wedge(v(\alpha \wedge \neg\alpha), v(\odot\alpha)) = \wedge(0, 1) = 0$
 - 2.4. $v(((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) \rightarrow \beta) = 1$, para todo β
 3. Si $v(\alpha) = \frac{1}{2}$
 - 3.1. $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = \wedge(v(\alpha), v(\neg\alpha)) = \wedge(v(\alpha), \neg(v(\alpha))) = \wedge(\frac{1}{2}, \neg(\frac{1}{2})) = \wedge(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
 - 3.2. $v(\odot\alpha) = \odot(v(\alpha)) = \odot(\frac{1}{2}) = 0$
 - 3.3. $v((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) = \wedge(v(\alpha \wedge \neg\alpha), v(\odot\alpha)) = \wedge(\frac{1}{2}, 0) = 0$
 - 3.4. $v(((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) \rightarrow \beta) = 1$, para todo β
 4. Si $v(\alpha) = 0$
 - 4.1. $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = \wedge(v(\alpha), v(\neg\alpha)) = \wedge(v(\alpha), \neg(v(\alpha))) = \wedge(0, \neg(0)) = \wedge(0, 1) = 0$
 - 4.2. $v(\odot\alpha) = \odot(v(\alpha)) = \odot(0) = 1$
 - 4.3. $v((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) = \wedge(v(\alpha \wedge \neg\alpha), v(\odot\alpha)) = \wedge(0, 1) = 0$
 - 4.4. $v(((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) \rightarrow \beta) = 1$, para todo β
5. $v(((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) \rightarrow \beta) \in D$, para toda v . De 2.4, 3.4, 4.4 y 1
6. $\models_{J_3} ((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha) \rightarrow \beta$ ■

Así pues, se ha encontrado una forma de contradicción (en el sentido de no ser satisfecha por ninguna valuación) para J_3 ; y además, se ha encontrado una forma restringida del Pseudo-Escoto.

$$v((\alpha \wedge \neg \alpha) \wedge \odot \alpha) \notin D \text{ para toda } v$$

Ahora, es importante hacer notar que otra forma de contradicción para J_3 , es $\alpha \wedge \sim \alpha$

$$v(\alpha \wedge \sim \alpha) \notin D \text{ para toda } v$$

Demostración 4.1.

1. $v(\alpha) = 1$ o $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ o $v(\alpha) = 0$
2. Si $v(\alpha) = 1$
 - 2.1. $v(\alpha \wedge \sim \alpha) = \wedge(v(\alpha), \sim(v(\alpha))) = \wedge(1, \sim(1)) = \wedge(1, 0) = 0$
3. Si $v(\alpha) = \frac{1}{2}$
 - 3.1. $v(\alpha \wedge \sim \alpha) = \wedge(v(\alpha), \sim(v(\alpha))) = \wedge(\frac{1}{2}, \sim(\frac{1}{2})) = \wedge(\frac{1}{2}, 0) = 0$
4. Si $v(\alpha) = 0$
 - 4.1. $v(\alpha \wedge \sim \alpha) = \wedge(v(\alpha), \sim(v(\alpha))) = \wedge(0, \sim(0)) = \wedge(0, 1) = 0$
5. $v(\alpha \wedge \sim \alpha) \notin D$ para toda v ■

De esta forma, es posible ver que “ $\sim$ ” posee un comportamiento idéntico al de la negación clásica; además, si revisamos su tabla de verdad veremos que transforma los valores designados en antidesignados, mientras a los antidesignados los transforma en el valor designado 1. Así pues, es de destacar que una definición para este operador sea:

$$\sim \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \alpha \wedge \odot \alpha$$

Ahora, basados en las tablas de verdad de las anteriores dos formas de contradicción y de las características semánticas de “ $\leftrightarrow$ ”, tenemos que:

$$\models_{J_3} (\alpha \wedge \sim \alpha) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg \alpha) \wedge \odot \alpha)$$

Demostración 4.2.

1. $v(\alpha \wedge \sim \alpha) = 0$, para toda v
2. $v((\alpha \wedge \neg \alpha) \wedge \odot \alpha) = 0$, para toda v
3. $v((\alpha \wedge \sim \alpha) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg \alpha) \wedge \odot \alpha)) = \leftrightarrow(v(\alpha \wedge \sim \alpha), v((\alpha \wedge \neg \alpha) \wedge \odot \alpha)) = \leftrightarrow(0, 0) = 1$, para toda v
4. $\models_{J_3} (\alpha \wedge \sim \alpha) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg \alpha) \wedge \odot \alpha)$ ■

Proposición 4.1. Para toda α , se tiene que $(\alpha \wedge \neg \alpha \wedge \odot \alpha)$ es una J_3 -contradicción.

Demostración 4.3. Es la mayor parte de la demostración del Teorema 4.1. ■

Definición 4.1. Una fórmula α es contradictoria sii, para toda J_3 -valuación, ninguna satisface a α .

Definición 4.2. Un conjunto de fórmulas Γ es J_3 -consistente sii, sólo se puede demostrar, a partir de Γ , dos de las fórmulas del conjunto $\{\alpha, \neg\alpha, \odot\alpha\}$.

Definición 4.3. Un conjunto de fórmulas Γ es J_3 -inconsistente sii $\Gamma \vdash \beta$, para todo β .

Conclusión

De todo lo visto, es pertinente reiterar en la posibilidad de encontrar contradicciones clásicas que no trivialicen ningún conjunto de fórmulas tanto en J_3 como en otras lógicas paraconsistentes. Es decir, del hecho que en un conjunto de enunciados se dé que $v(\alpha), v(\neg\alpha) \in D$, no se sigue, en estas lógicas, que tal conjunto de enunciados sea contradictorio; esto, en el caso de J_3 debido a que en la valuación $v(\alpha) = \frac{1}{2}$, α y $\neg\alpha$ son verdades simultáneas. Sin embargo, es igualmente importante mostrar que, en sentido estricto, $\alpha \wedge \neg\alpha$ no es una contradicción (en sentido clásico) ni para J_3 , ni para otras lógicas paraconsistentes; por lo que encontramos, en estas lógicas, una resignificación de la contradicción (manteniendo la insatisfacibilidad de las contradicciones) como la presencia de una proposición y su negación mientras sostenemos que tal proposición es consistente $((\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \odot\alpha)$. Por otro lado, de los desarrollos sintácticos y semánticos aquí vistos, es muy interesante que, además de la invalidación del pseudo-Escoto, también se invaliden la reducción al absurdo y el silogismo disyuntivo, entre otros.

Ahora bien, es de destacar que J_3 es una lógica paraconsistente. Esto lo podemos apreciar en el hecho de que permite contradicciones clásicas sin caer en la trivialización; es decir, sin que de ello se siga cualquier otra proposición vía pseudo-Escoto. Para lograrlo, invalida, como vimos, tal regla de inferencia, convirtiéndose en una lógica clásicamente contradictoria pero no trivial, conjunto de características agrupadas bajo el nombre de “no explosividad”.

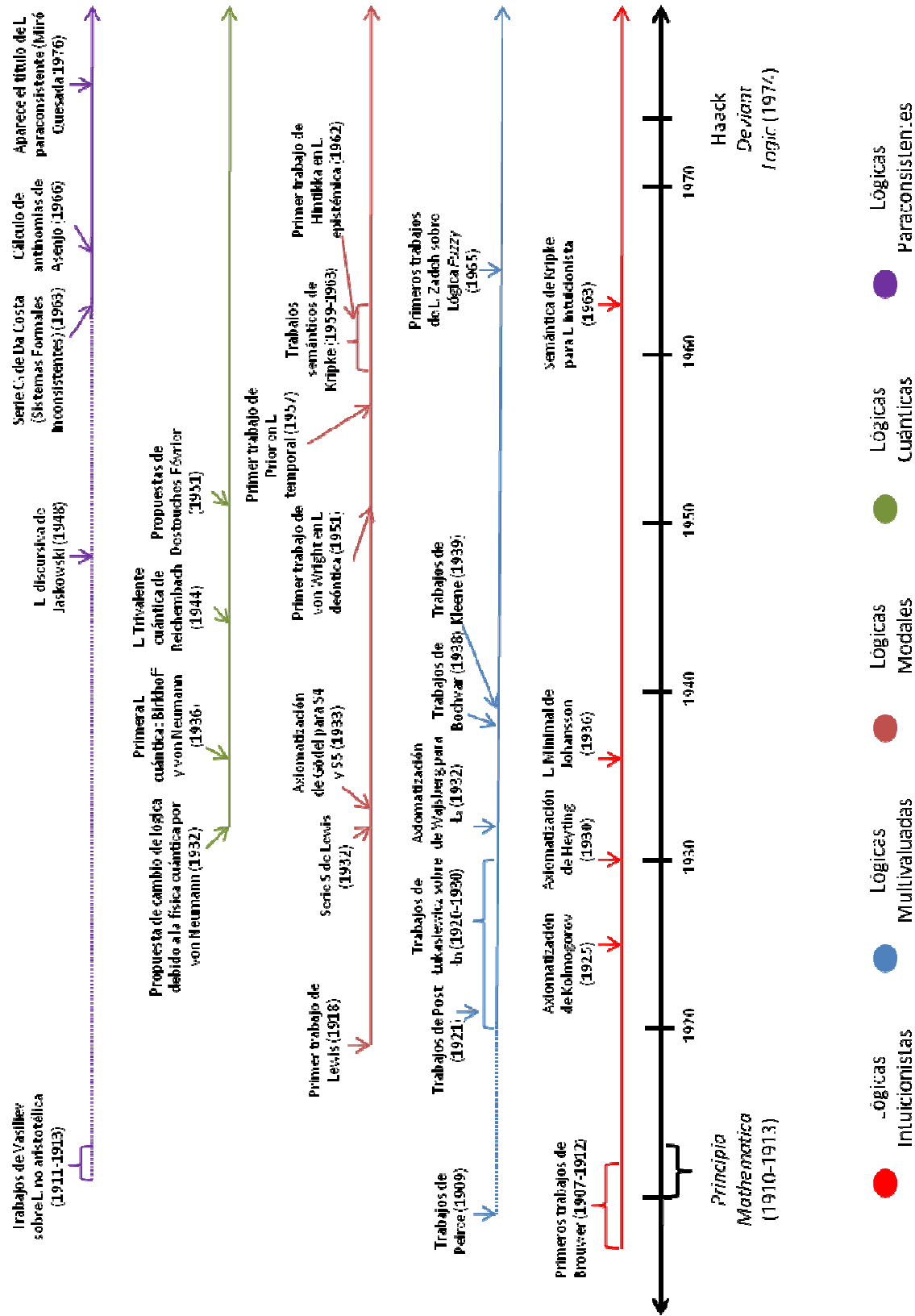
Junto con todo lo anterior, es posible afirmar que los teoremas de la lógica clásica son atrapados por J_3 vía operador de consistencia $\odot$. Como se dijo anteriormente, si de una fórmula digo que es consistente mediante $\odot$, obtengo que para ella valen todas las características de la lógica clásica debido a la reducción del universo semántico a $\{1,0\}$. Esta característica es bastante significativa, pues nos permitiría asegurar que $\vdash_{LC} \alpha$ sii $\vdash_{J_3} \alpha$, si $\odot\alpha$.

LÍNEA DEL TIEMPO

Anexo B

Presento a continuación una línea del tiempo que incluye algunos de los principales desarrollos entre 1910 (año de la publicación de la primera parte de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead) y 1974 (año de la publicación de *Deviant logic* de Susan Haack) sobre lógicas no-clásicas. El fin de este anexo es proporcionar al lector una *imagen* que ilustre la proliferación del trabajo sobre sistemas no-clásicos hasta el momento de la publicación del libro donde Haack formula su criterio de clasificación. Este anexo es principalmente un esquema de los desarrollos presentados en el primer capítulo.

Los diferentes desarrollos los he agrupado por familias de lógicas en el sentido definido en los Preliminares Conceptuales. A cada familia se le ha asignado una línea de un color determinado. No obstante, las diferentes familias de lógicas modales las he reunido en una sola línea. En los casos en que se encuentran secciones punteadas, estas representan momentos en los cuales se han generado desarrollos cercanos a (o incluso significativos para) dicha familia anteriores a los trabajos con los que se considera que se funda esta última.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Obras principales:

HAACK, S.

(1974) *Deviant Logic*. Cambridge University Press: Cambridge. Traducción española: *Lógica Divergente* por GIL BORJABAD, E. (1980). Paraninfo: Madrid.

(1978) *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press: Cambridge

(1996) *Deviant Logic, Fuzzy Logic. Beyond the Formalism*. The University of Chicago Press: Chicago.

HAACK, S. & BO, C.

(2003) *The intellectual journey of an eminent logician-philosopher. An interview with Susan Haack*. Texto on-line descargado el 25 de octubre de 2010: <http://www.as.miami.edu/phi/assets/haack/DrHaackInterview.pdf>

Obras sobre lógicas no clásicas en general:

EPSTEIN, R.

(2001) *Propositional Logics, the semantic foundations of logic*. Wadsworth Thomson Learning: Belmont.

GÓMEZ, R. A.

(2006) *Lógicas no clásicas. Principios y fundamentos*. Fondo Editorial Universidad EAFIT: Medellín.

PALAU, G.

(2002) *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Editorial Gedisa: Barcelona.

PEÑA, L.

(1993) *Introducción a las lógicas no clásicas*. Universidad Nacional Autónoma de México: México.

Obras sobre J_3

DA COSTA N. C. A. & D'OTTAVIANO, I. M. L.

(1970) "Sur un problème de Jaskowski" en *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 270 de 25 mai 1970, Série A, pp. 1349-1353.

D'OTTAVIANO, I. M. L.

(1982) *Sobre uma teoria de modelos trivalente*. Tesis presentada en la Universidade Estadual de Campinas para la obtención del título de Doctor en Matemáticas.

(1985) "The completeness and compactness of a three-valued first-order logic" en *Revista colombiana de matemáticas* vol. XIX, pp. 77-94.

(1987) "Definability and quantifier elimination for J_3 -theories" en *Studia Logica: an international journal for symbolic logic*, vol. 46 No. 1, pp. 37-54.

Obras sobre lógicas paraconsistentes:

ARRUDA, A. I.

(1990) *N. A. Vasiliev e a lógica paraconsistente*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência UNICAMP: Campinas, Brasil.

BOBENRIETH, A.

(1996) *Inconsistencias ¿por qué no?* Colcultura: Bogotá.

DA COSTA, N. C. A.; BÉZIAU, J.-Y. & BUENO, O.

(1998) *Elementos de teoría paraconsistente de conjuntos*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência UNICAMP: Campinas.

DA COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. & BUENO, O.

(2007) "Paraconsistent logics and paraconsistency" en JACQUETE, D. (ed.) *Handbook of the Philosophy of Science: Philosophy of Logic*, pp. 792-911. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

DA COSTA, N. C. A. & LEWIN, R. A.

(1995) "Lógica paraconsistente" en *Enciclopedia iberoamericana de filosofía*, tomo 7: *Lógica*, pp. 185-204. Editorial Trotta: Madrid.

Obras sobre lógicas intuicionistas:

VAN DALEN, D.

(1986) "Intuitionistic Logic" en GABBAY, D & GUENTHNER, F (ed.) *Handbook of Philosophical Logic volume III: Alternatives in Classical Logic*, pp. 225-340. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, Holanda.

Obras sobre lógicas multivaluadas:

GOTTWALD, S.

(2007) "Many valued Logics" en JACQUETE, D. (ed.) *Handbook of the Philosophy of Science: Philosophy of Logic*, pp. 675-722. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

MALINOWSKI, G.

(2007) "Many-valued Logic and its philosophy" en GABBAY, D & WOODS, J (ed.) *Handbook of the History of Logic volume 8: the Many-valued and Nonmonotonic turn in Logic*, pp. 13-94. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

PEÑA, L.

(1995) "Lógicas multivalentes" en ALCHOURRÓN, C., MÉNDEZ, J. & ORAYEN, R. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, tomo 7: Lógica*, pp. 323-350. Editorial Trotta: Madrid.

URQUHART, A.

(1986) "Many-valued Logic" en GABBAY, D & GUENTHNER, F (ed.) *Handbook of Philosophical Logic volume III: Alternatives in Classical Logic*, pp. 71-116. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, Holanda.

Obras sobre lógicas modales aléticas:

BULL, R. & SEGERBERG, K.

(1984) "Basic Modal Logic" en GABBAY, D & GUENTHNER, F (ed.) *Handbook of Philosophical Logic volume II: Extensions of Classical Logic*, pp. 1-88. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, Holanda.

GOLDBLATT, R.

(2006) "Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution" en GABBAY, D & WOODS, J (ed.) *Handbook of the History of Logic volume 7: Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, pp. 1-98. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

ORAYEN, R.

(1995) "Lógica modal" en ALCHOURRÓN, C., MÉNDEZ, J. & ORAYEN, R. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, tomo 7: *Lógica*, pp. 289-322. Editorial Trotta: Madrid.

Obras sobre lógicas modales epistémicas:

FREUND, M.

(1995) "Lógica epistémica" en ALCHOURRÓN, C., MÉNDEZ, J. & ORAYEN, R. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, tomo 7: *Lógica*, pp. 205-214. Editorial Trotta: Madrid.

GOCHET, P. & GRIBOMONT, P.

(2006) "Epistemic Logic" en GABBAY, D & WOODS, J (ed.) *Handbook of the History of Logic volume 7: Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, pp. 99-196. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

Obras sobre lógicas cuánticas:

DALLA CHIARA, M. L.

(1986) "Quantum Logic" en GABBAY, D & GUENTHNER, F (ed.) *Handbook of Philosophical Logic volume III: Alternatives in Classical Logic*, pp. 427-470. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, Holanda.

DALLA CHIARA, M. L. , GIUNTINI R. & RÉDEI M.

(2007) "The History of Quantum Logic" en GABBAY, D & WOODS, J (ed.) *Handbook of the History of Logic volume 8: the Many-valued and Nonmonotonic turn in Logic*, pp. 205-283. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

MARTÍNEZ, S.

(1995) "Lógica cuántica" en ALCHOURRÓN, C., MÉNDEZ, J. & ORAYEN, R. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, tomo 7: *Lógica*, pp. 227-236. Editorial Trotta: Madrid.

Obras sobre lógicas modales deónticas:

ÅQVIST, L.

(1984) "Deontic Logic" en GABBAY, D & GUENTHNER, F (ed.) *Handbook of Philosophical Logic volume II: Extensions of Classical Logic*, pp. 605-714. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, Holanda.

BULYGIN, I.

(1995) "Lógica deóntica" en ALCHOURRÓN, C., MÉNDEZ, J. & ORAYEN, R. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, tomo 7: *Lógica*, pp. 129-142. Editorial Trotta: Madrid.

McNAMARA, P.

(2006) "Deontic Logic" en GABBAY, D & WOODS, J (ed.) *Handbook of the History of Logic volume 7: Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, pp. 197-288. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

Obras sobre lógicas modales temporales:

BURGESS, J.

(1984) "Basic Tense Logic" en GABBAY, D & GUENTHNER, F (ed.) *Handbook of Philosophical Logic volume II: Extensions of Classical Logic*, pp. 89-134. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, Holanda.

ØHRSTRØM, P & HASLE, P.

(2006) "Modern Temporal Logic: the Philosophical Background" en GABBAY, D & WOODS, J (ed.) *Handbook of the History of Logic volume 7: Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, pp. 399-446. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

VÁSQUEZ, M.

(1995) "Lógica temporal" en ALCHOURRÓN, C., MÉNDEZ, J. & ORAYEN, R. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, tomo 7: *Lógica*, pp. 215-226. Editorial Trotta: Madrid.

Otras obras consultadas:

BOCHENSKI, I. M.

(1956) *Formale Logik*. Traducción inglesa: *A History of Formal Logic* por THOMAS, I., segunda edición (1970). Chelsea Publishing Company: Nueva York.

CASTRILLO, P.

(1989) *La estructura de los condicionales: la implicación material y sus alternativas*. Universidad Nacional de Educación a Distancia: Madrid.

COPI I. & COHEN C.

(2007) *Introducción a la Lógica*. Limusa Noriega Editores: México D.F.

DALLA CHIARA, M. L.

(1974) *La logica*. Traducción española: *Lógica* por VALDERAS, J. (1976). Editorial Labor: Barcelona.

DEAÑO, A.

(1974) *Introducción a la lógica formal*. Alianza Editorial: Madrid.

JACQUETE, D.

(2007) JACQUETE, D. (ed.) *Handbook of the Philosophy of Science: Philosophy of Logic*. Elsevier B.V.: Ámsterdam, Holanda.

KNEALE, W. & KNEALE, M.

(1962) *The Development of Logic*. Clarendon Press: Oxford.

LAMBERT, K.

(1978) "Review on Susan Haack, *Deviant Logic: some philosophical issues*" en *The journal of symbolic logic*, Vol 43 No. 2, pp. 377-379.

MANZANO, M. & HUERTAS, A.

(2004) *Lógica para principiantes*. Alianza Editorial: Madrid.

ORTÍZ, G.

(a) *La lógica proposicional*. Notas inéditas de un capítulo para el curso de Lógica Matemática en la Universidad del Valle, Cali.

(b) *Lógica de primer orden*. Notas inéditas de un capítulo para el curso de Lógica Matemática en la Universidad del Valle, Cali.

PALAU, G.

(1990) "Lógicas divergentes y principios lógicos, un análisis crítico de algunas tesis de Susan Haack" en *Revista Latinoamericana de filosofía*, Vol. XVI, No. 1, pp. 47-66.

QUESADA, D.

(1995) "Lógica clásica de primer orden" en ALCHOURRÓN, C., MÉNDEZ, J. & ORAYEN, R. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, tomo 7: Lógica*, pp. 71-104. Editorial Trotta: Madrid.

QUINE, W.V.O.

(1970) *Philosophy of logic*. Traducción española: *Filosofía de la lógica* por SACRISTÁN, M.
(1973). Alianza Editorial: Madrid.

WOODS, J.

(1977) "Critical notice on Susan Haack, *Deviant Logic*" en *Canadian Journal of Philosophy*,
Vol. 7, No. 3, pp. 651-666.