

Representabilidad finita en espacios de funciones medibles

Patricia Gómez Palacio
Universidad EAFIT

Recibido Ago. 2, 2006 Aceptado Oct. 26, 2006

Abstract

This paper continues the study of finite representability in spaces of measurable functions, which began in Gómez et al. (2001). In particular, we are interested in Köthe spaces, because of their importance in the characterization of some operator ideals, (see Gómez et al. 2004). Some properties of natural norm Δ , defined by Chaney for specific tensor product, are used in the proofs of the results.

Keywords: Köthe spaces, local theory, tensor norms

MSC(2000): Primary: 46B07, 46A32

Resumen

Este artículo continúa el estudio sobre la representabilidad finita en espacios de funciones medibles, iniciado en Gómez et al. (2001). En particular, nos interesamos en los espacios de Köthe, por su importancia en la caracterización de determinados ideales de operadores, (ver Gómez et al. 2004). En la obtención de los resultados se usan algunas propiedades de la norma natural Δ definida por Chaney para un determinado producto tensorial.

Palabras y frases claves: Espacios de Köthe, teoría local, norma tensorial.

1 Introducción

Los resultados que presentaremos se enmarcan dentro de la teoría local en espacios de Banach, teoría que estudia determinadas propiedades de espacios de Banach en términos o a través de sus subespacios de dimensión finita. Dichos resultados fueron obtenidos dentro de una investigación relacionada con normas tensoriales e ideales de operadores, en cuyos resultados finales se pone de manifiesto la importancia de la teoría local en el estudio de estas cuestiones, importancia que quedó oculta en la teoría clásica a causa de las buenas propiedades de los espacios entonces implicados, a saber, ℓ_p y $L_p(\mu)$. Ver [5].

Dos instrumentos esenciales de la teoría local son la representabilidad finita y la construcción de ultraproductos, conceptos aparentemente distintos pero que están estrechamente ligados, de acuerdo con un resultado de Dacunha-Castelle y Krivine, siendo estos quienes introducen la construcción de ultraproductos de espacios de Banach, basados en la construcción de ultraproductos de la teoría de modelos. Trabajos recientes como el de S. Heinrich [7] y Haydon, Levy y Raynaud [6], dejan ver las enormes posibilidades que estos dos instrumentos tiene en el estudio de los retículos de Banach.

En particular nos interesamos en la representabilidad finita en espacios de funciones de Köthe escalares $\mathcal{K}(\mu)$, con estructura de retículo de Banach, y vectoriales $\mathcal{K}(\mu, X)$, cuyas definiciones precisamos más adelante. Ampliar el conocimiento

sobre la geometría de los espacios de Köthe, nos ha permitido interpretar las funciones del espacio $\mathcal{K}(\mu, X)$, como elementos del producto tensorial $\mathcal{K}(\mu) \hat{\otimes}_\Delta X$ donde aparecen separadamente el correspondiente espacio escalar de funciones de Köthe $\mathcal{K}(\mu)$ y el espacio de Banach X .

La notación y las definiciones que utilizaremos son las comúnmente aceptadas, pero puntualizamos algunas de éstas. Por $(H, \|\cdot\|_H)$ denotamos un retículo de Banach, esto es un retículo normado, el cual es completo respecto a la norma y tiene la propiedad de que $\|x\| \leq \|y\|$ siempre que $|x| \leq |y|$.

Las definiciones en la teoría de normas tensoriales e ideales de operadores que utilizaremos son tomadas del libro de Defant-Floret [3]. Dado un par de espacios de Banach E y F y una norma tensorial α , $E \otimes_\alpha F$ representa el espacio $E \otimes F$ dotado de la topología α -normada. La complección de $E \otimes_\alpha F$ es denotada por $E \hat{\otimes}_\alpha F$ y la norma de $z \in E \otimes F$ por $\alpha(z; E \otimes F)$ o $\alpha(z)$ si no hay lugar a confusión. Toda norma tensorial α es razonable, es decir, $\forall x \in E, \forall y \in F \quad \|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \|y\|$, $\forall x' \in E', \forall y' \in F' \quad x' \otimes y' \in (E' \otimes_\alpha F')$ y $\|x' \otimes y'\|_\alpha = \|x'\| \|y'\|$, y satisface la propiedad métrica de los operadores, esto es, dada cualquier cuádrupla de espacios normados $E_i, F_i, i = 1, 2$, y cualquier par de operadores $A_i \in \mathcal{L}(E_i, F_i)$, se tiene que $A_1 \otimes A_2 \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_\alpha E_2, F_1 \otimes_\alpha F_2)$, con $\|A_1 \otimes A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medida, denotamos por $L_0(\mu)$ el espacio de clases de equivalencia, módulo la igualdad μ -a.e., de funciones de valor real μ -medibles, dotado con la topología de la convergencia local en medida. Dado un espacio de Banach X , el espacio de todas las clases de equivalencia de funciones μ -medibles con valores en X lo denotamos $L_0(\mu, X)$. Por un espacio de funciones de Köthe $\mathcal{K}(\mu)$ sobre (Ω, Σ, μ) entendemos un ideal denso en orden de $L_0(\mu)$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{K}(\mu)}$ que hace de éste un retículo de Banach (si $f \in L_0(\mu)$ y $g \in \mathcal{K}(\mu)$ $|f| \leq |g|$, entonces $f \in \mathcal{K}(\mu)$ con $\|f\|_{\mathcal{K}(\mu)} \leq \|g\|_{\mathcal{K}(\mu)}$). Similarmente, $\mathcal{K}(\mu, X) = \{f \in L_0(\mu, X) : \|f(\cdot)\|_X \in \mathcal{K}(\mu)\}$ dotado con la norma $\|f\|_{\mathcal{K}(\mu, X)} = \|\|f(\cdot)\|_X\|_{\mathcal{K}(\mu)}$.

Sea H un retículo de Banach y X un espacio de Banach. La norma natural en $H \otimes X$ debida a Chaney [1], la denotamos por $\Delta(z)$ y se define por

$$\Delta(z) := \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X h_i \right\|_H : z = \sum_{i=1}^n h_i \otimes x_i, h_i \geq 0 \right\}.$$

Se puede ver que si $z \in H \hat{\otimes}_\Delta X$, entonces z tiene al menos una representación $z = \sum_{i=1}^\infty h_i \otimes x_i$ tal que $h_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(h_i)_{i=1}^\infty$ es incondicionalmente sumable en H y $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un acotado en X . Además $\Delta(z) = \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^\infty \|x_i\|_X h_i \right\|_H \right\}$, donde el ínfimo está tomado en el conjunto de todas las representaciones de z que satisfacen las condiciones anteriores.

En general, Δ no satisface la propiedad métrica de los operadores, y por consiguiente no es necesariamente una norma tensorial, ver [3], 7.5. Lo anterior tiene respuesta positiva en el siguiente sentido: si H_1 y H_2 son retículos de Banach, X_1 y X_2 son espacios de Banach, $S : H_1 \rightarrow H_2$ es un operador positivo y $T : X_1 \rightarrow X_2$ es un operador cualquiera, entonces $S \otimes T : H_1 \otimes_{\Delta_{H_1}} X_1 \rightarrow H_2 \otimes_{\Delta_{H_2}} X_2$ es lineal

y continua; y si además S y T son isometrías, entonces $S \otimes T$ es también una isometría. La prueba del último caso puede consultarse en [10], proposición 4.3.

En particular, para $\mathcal{K}(\mu)$ un espacio de Köthe de funciones reales y X un espacio de Banach, si $\mathcal{K}(\mu)$ es σ -orden continuo, entonces $\mathcal{T}(\mu, X)$, el espacio vectorial de las funciones simples con valores en X , es denso en $\mathcal{K}(\mu, X)$, entonces $\mathcal{K}(\mu) \otimes X$ es denso en $\mathcal{K}(\mu, X)$, y por consiguiente la aplicación canónica $\mathcal{K}(\mu) \otimes X \rightarrow \mathcal{K}(\mu, X)$ tal que $f \otimes x \rightarrow f(\cdot)x$ define una isometría $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_{\Delta} X \rightarrow \mathcal{K}(\mu, X)$, la cual es sobreyectiva si $\mathcal{K}(\mu)$ es orden continuo, de acuerdo con un resultado de Lévin en [8]

Como un caso particular tenemos los espacios de Lebesgue-Bochner $L_p(\mu, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, de los cuales se sabe además que, por ser $L_p(\mu)$ orden continuo para $1 \leq p < \infty$, entonces $L_p(\mu) \widehat{\otimes}_{\Delta} X = L_p(\mu, X)$ isométricamente.

2 Elementos de la teoría local

Definición 2.1. Sea D un conjunto. Un filtro $\mathcal{F}$ en D es una familia no vacía de subconjuntos de D tal que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$. Y si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Dada $\mathbf{B}$, una familia de subconjuntos de un conjunto M , la cual satisface que $\emptyset \notin \mathbf{B}$ y la intersección de dos conjuntos de $\mathbf{B}$ contiene un conjunto de $\mathbf{B}$, siempre podemos construir un filtro $\mathcal{F}$ sobre M , el cual está formado por todos los conjuntos de M que contienen algún elemento de $\mathbf{B}$. $\mathbf{B}$ se denomina una base de filtro.

Se dice que un filtro $\mathcal{F}_1$ domina a otro filtro $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. A un filtro maximal $\mathcal{U}$ según esa relación de orden se le llama un ultrafiltro. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es trivial si existe $d_0 \in D$ tal que $A \in \mathcal{U} \iff d_0 \in A$.

La siguiente observación tiene como propósito fijar la notación de una clase especial de base de filtro y ultrafiltro, que usaremos en la siguiente sección.

Observación 2.2.

1. Sea $(D, \leq)$ un conjunto dirigido. Para $d_0 \in D$ fijo, hacemos $R(d_0) = \{d \in D : d_0 \leq d\}$, y entonces $\mathcal{R} := \{R(d) : d \in D\}$ es una base de filtro de subconjuntos de D . De acuerdo al lema de Zorn, existe un ultrafiltro en D que contiene a $\mathcal{R}$. Un ultrafiltro con esta propiedad lo denotaremos por $\mathcal{U}_D$.
2. De forma similar, si $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son conjuntos dirigidos, consideramos en $A \times B$ el orden natural en el producto, es decir, $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \leq_A a_2$ y $b_1 \leq_B b_2$. Es claro que $(A \times B, \leq)$ es un conjunto dirigido, y por tanto denotamos por $\mathcal{U}_{A \times B}$ el ultrafiltro en $A \times B$ obtenido por un procedimiento similar al del literal 1.

Definición 2.3. Sea $\{A_d : d \in D\}$ una familia arbitraria de conjuntos, y supongamos que tenemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de subconjuntos del conjunto de índices D . En

el producto cartesiano $\prod_{d \in D} A_d$, definimos la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$:

$$(x_d)_{d \in D} \mathcal{R} (y_d)_{d \in D} \Leftrightarrow \{d \in D : x_d = y_d\} \in \mathcal{U}$$

Al correspondiente conjunto cociente $\prod_{d \in D} A_d / \mathcal{R}$ se le denomina *ultraproducto de la familia de conjuntos $\{A_d : d \in D\}$ respecto del ultrafiltro $\mathcal{U}$* , y suele denotarse $(\prod_{d \in D} A_d)_{\mathcal{U}}$, o simplemente $(A_d)_{\mathcal{U}}$.

En el caso especial, cuando todos los A_d son iguales a un conjunto A , entonces su ultraproducto $(A_d)_{\mathcal{U}}$ se denomina la *ultrapotencia de A con respecto a $\mathcal{U}$* .

En el caso particular de familias $\{B_d : d \in D\}$ en las que B_d es un espacio de Banach para todo $d \in D$ el ultraproducto como conjuntos no produce necesariamente un espacio de Banach. Dacunha-Castelle y Krivine [2] introducen una modificación de la construcción de ultraproductos a fin de obtener en este caso un espacio de Banach como resultado. Para ello es necesario introducir el concepto de límite sobre un ultrafiltro.

Sea X un espacio topológico y $(x_d)_{d \in D}$ una familia de elementos de X indexada por D . Diremos que (x_d) converge a $x \in X$ sobre $\mathcal{U}$ y escribimos $\lim_{\mathcal{U}} x_d = x$ si para toda vecindad N de x , el conjunto $\{d \in D : x_d \in N\} \in \mathcal{U}$. En particular se tiene que si X es un espacio de Hausdorff entonces el límite sobre $\mathcal{U}$ de una familia (x_d) si existe es único. Más aún, si X es Hausdorff compacto, entonces para toda familia $(x_d)_{d \in D} \subset X$ existe (y es único) un elemento $x \in X$ tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_d = x$.

Definición 2.4. Sean $\{B_d : d \in D\}$ una familia de espacios de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de subconjuntos de D . En el espacio de Banach $\ell_{\infty}(B_d, D)$, de todas las $(x_d)_{d \in D}$ tales que $\|(x_d)\| := \sup_{d \in D} \|x_d\| < \infty$, definimos la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}_B$:

$$(x_d)_{d \in D} \mathcal{R}_B (y_d)_{d \in D} \Leftrightarrow \lim_{\mathcal{U}} \|x_d - y_d\|_{B_d} = 0$$

Se denomina *ultraproducto de la familia de espacios de Banach $\{B_d : d \in D\}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$* , al espacio cociente $\ell_{\infty}(B_d, D) / \mathcal{R}_B$, dotado con la topología de la norma canónica en el cociente

A este espacio, que resulta ser de Banach, se le denota también $(B_d)_{\mathcal{U}}$, a sus elementos por $(x_d)_{\mathcal{U}}$, y $\|(x_d)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_d\|_{B_d}$. Al igual que con las familias de conjuntos, si $B_d = B$ para todo $d \in D$, entonces $(B)_{\mathcal{U}}$ es una ultrapotencia de B .

En la construcción del ultraproducto de una familia de espacios de Banach es posible preservar algunas estructuras comunes a los elementos de la familia. Dentro de las estructuras que gozan de esta propiedad está la estructura de retículo, de acuerdo con un resultado de S. Heinrich (ver Proposición 3.2 de [7]). Otras estructuras que también permanecen estables bajo la construcción de ultraproductos son las de espacios M-abstractos y de espacios L_p -abstractos.

Los conceptos básicos de la teoría de representabilidad finita son tomados de [7] y [6].

Definición 2.5. *Un espacio (retículo) de Banach X decimos que es (reticular) finitamente representable en una familia de espacios (retículos) de Banach $\{X_i : i \in I\}$ si para todo subespacio (subretículo) de dimensión finita M de X y para todo $\varepsilon > 0$ existe $i \in I$ y un subespacio (subretículo) de dimensión finita N de X_i y un isomorfismo (isomorfismo de retículos) $J : M \rightarrow N$ tal que $\|J\|\|J^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$.*

Si para todo $i \in I$, el espacio (retículo) X_i es un subespacio (subretículo) de un espacio (retículo) de Banach Y , entonces se dice que X es (reticular) finitamente representable en Y .

Un espacio de Banach E es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espacio, $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq \lambda < \infty$, si para todo subespacio finito dimensional P de E existe un subespacio finito dimensional Q de E que contiene a P tal que la distancia de Banach-Mazur $d(Q, \ell_p^{\dim(Q)}) < \lambda$.

Si E es un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ -espacio para todo $\lambda > 1$, entonces es finitamente representable en ℓ_p . En particular, el espacio $L_p(\mu)$ es finitamente representable en ℓ_p . Más aún, de [9] capítulo 6§17, teorema 7, un espacio de Banach es finitamente representable en ℓ_p si y sólo si es isométrico a un subespacio de algún $L_p(\mu)$.

Ultraproductos y representabilidad finita están conectados en el siguiente sentido. Un espacio de Banach X es (reticular) finitamente representable en una familia de espacios (retículos) $\{X_i : i \in I\}$ si y sólo si existe un subconjunto $J \subset I$ y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre J tal que X es isométrico a un subespacio (subretículo) de $(X_j)_{\mathcal{U}}$, ver [6].

Del principio de reflexividad local, el bidual X'' de un espacio de Banach X es finitamente representable en X . La versión para retículos de Conroy y Moore prueba que el bidual E'' de un retículo de Banach E es reticular finitamente representable en E .

Observación 2.6.

1. Sea X un espacio de Banach. $FIN(X) = \{N_\delta : \delta \in \Lambda_X\}$ es la familia de todos los subespacios de dimensión finita de X . $(\Lambda_X, \leq)$ es un conjunto dirigido respecto a la inclusión, es decir, $\delta_1 \leq \delta_2$ si y sólo si $N_{\delta_1} \subset N_{\delta_2}$, y por tanto, $\mathcal{U}_{\Lambda_X}$ representa el ultrafiltro obtenido según la observación 2.2(1). Entonces, X es isométrico a un subespacio de $(N_\delta)_{\mathcal{U}_{\Lambda_X}}$ bajo la aplicación $T : X \rightarrow (N_\delta)_{\mathcal{U}_{\Lambda_X}}$ definida por $T(x) = (x_\delta)_{\mathcal{U}_{\Lambda_X}}$ con $x_\delta = x$ si $x \in N_\delta$, y $x_\delta = 0$ si $x \notin N_\delta$, para todo $x \in X$, la cual es una isometría inyectiva.
2. Sea X un espacio de Banach y sea $\mathcal{H} = \{H_j : j \in \mathcal{J}\}$ una familia de subespacios de dimensión finita de X , tal que el conjunto de índices $(\mathcal{J}, \leq)$ es dirigido con el orden $i \leq j$ si y sólo si $H_i \subset H_j$ y con la envolvente lineal H de $\cup_{j \in \mathcal{J}} H_j$ densa en X . Entonces, la aplicación isométrica $T : H \rightarrow (H_j)_{\mathcal{J}}$ definida de forma natural por $T(x) = (x_j)_{\mathcal{J}}$ con $x_j = x$ si $x \in H_j$, y $x_j = 0$ si $x \notin H_j$ para todo $x \in H$, puede extenderse a X , y por tanto X es isométrico a un subespacio de $(H_j)_{\mathcal{J}}$.

Corolario 2.7. *Sea λ un espacio de Banach de sucesiones regular. Entonces λ es finitamente representable en $\{\lambda^n : n \in \mathbb{N}\}$ la familia de secciones de λ .*

Demostración. Si denotamos por K la envolvente lineal de $\cup_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n$; tenemos que K es un subespacio denso de λ y por consiguiente el resultado es inmediato a partir de la observación 2.6(2). $\square$

La estructura de los subespacios de dimensión finita y de los subretículos de dimensión finita en retículos de Banach puede presentar diferencias importantes. El subespacio generado por una familia finita de elementos disjuntos es también un subretículo finito dimensional, pero eso no sucede en general. Por ejemplo en $C[0, 1]$, el subretículo generado por las funciones $f(x) = 1$ y $g(x) = x$, con $x \in [0, 1]$ es denso en $C[0, 1]$. El siguiente lema de Haydon, Levy y Raynaud, asegura sin embargo que en los retículos orden completos podemos disponer de un gran número de subretículos de dimensión finita, más aún, que subespacios y subretículos de dimensión finita “están próximos”.

Lema 2.8. *(Lema 4.4 de [6]). Sea E un retículo de Banach orden completo y sea $N_\delta \in FIN(E)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un subretículo de Banach de dimensión finita $NL_{(\delta, \varepsilon)}$ de E y un operador $A_{(\delta, \varepsilon)} : N_\delta \rightarrow NL_{(\delta, \varepsilon)}$ tal que para todo $x \in N_\delta$, $\|A_{(\delta, \varepsilon)}(x) - x\| \leq \varepsilon \|x\|$.*

Observación 2.9. *Para un retículo de Banach orden completo E , denotamos $\Gamma_E = \{\gamma = (\delta, 1/n) : \delta \in \Lambda_E, n \in \mathbb{N}\}$, y $LFIN(E) = \{NL_\gamma : \gamma \in \Gamma_E\}$ donde cada subretículo finito dimensional $NL_\gamma \in LFIN(E)$ con $\gamma = (\delta, 1/n)$ se ha obtenido a partir de un subespacio finito dimensional N_δ aplicando el lema anterior con $\varepsilon = 1/n$. Consideremos en Γ_E el siguiente orden: si $\gamma_i = (\delta_i, 1/n_i)$, $i = 1, 2$, decimos que $\gamma_1 \leq \gamma_2$ si y sólo si $N_{\delta_1} \subset N_{\delta_2}$ y $n_1 \leq n_2$. Denotamos por $\mathcal{U}_{\Gamma_E}$ el ultrafiltro en Γ_E obtenido de acuerdo con el resultado de la observación 2.2(1).*

Proposición 2.10. *Sea E un retículo de Banach orden completo. Entonces E es isométrico a un subretículo de $(NL_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}$.*

Demostración. Continuando con la notación utilizada hasta ahora, denotemos por $\mathcal{M} = \{M_\gamma \in FIN(E) : \gamma \in \Gamma_E\}$ donde si $\gamma = (\delta, 1/n)$ entonces M_γ es la envolvente lineal de $N_\delta \cup NL_{(\delta, 1/n)}$.

Sea $T : E \rightarrow (M_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}$ la isometría natural, tal que para todo $x \in E$, $T(x) = (x_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}} \in (M_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}$ con $x_\gamma = x$ si $x \in M_\gamma$, y $x_\gamma = 0$ si $x \notin M_\gamma$, y además $\|x\|_E = \|(x_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}\|_{(M_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}}$.

Ahora bien, si $x \in E$, entonces existe $\delta \in \Lambda_E$ tal que $x \in N_\delta$ en cuyo caso $\|A_\gamma(x) - x_\gamma\| \leq \frac{1}{n} \|x\|$ y por tanto $\|(A_\gamma(x) - x_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}\|_{(M_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}} = 0$, de donde podemos concluir que

$$\|x\|_E = \|(A_\gamma(x))_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}\|_{(M_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}} = \|(A_\gamma(x))_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}\|_{(NL_\gamma)_{\mathcal{U}_{\Gamma_E}}}.$$

$\square$

3 Representabilidad finita en espacios de Köthe de funciones medibles

Para los resultados que presentaremos sobre representabilidad finita en espacios de Köthe tendremos en cuenta la notación hasta ahora utilizada pero adicionalmente tenemos las siguientes convenciones. Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ) , por $\mathcal{T}$ representamos el conjunto de todas las funciones simples reales con soporte de medida finito. $\mathcal{S}_\mu = \{S_t : t \in I_\mu\}$ es la familia de todos los subespacios S_t de funciones simples reales generados por un conjunto finito y disjunto dos a dos de funciones características de $\mathcal{T}$. Como antes, denotamos por $\mathcal{U}_{I_\mu}$ el ultrafiltro en I_μ obtenido usando la observación 2.2(1); lo que es posible, ya que I_μ es un conjunto de índices dirigido con el orden dado por la inclusión, es decir $t_1 \leq t_2$ si y sólo si $S_{t_1} \subset S_{t_2}$. Finalmente, por $\mathcal{K}(\mu)$ entenderemos un espacio de Köthe de funciones reales medibles, orden continuo, en cuyo caso, sabemos que $\mathcal{K}(\mu, E) = \mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta E$.

El primer resultado que presentamos hace referencia, de forma muy general, a la representabilidad finita en algunos espacios de funciones medibles.

Teorema 3.1. *Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ) , sea X un espacio (retículo) de Banach de funciones medibles tal que el conjunto $\mathcal{T}$, es un subconjunto denso de X . Entonces X es isométrico (retículo isométrico) a un subespacio (subretículo) de $(S_t)_{\mathcal{U}_{I_\mu}}$.*

Demostración. En efecto, definimos $T : \mathcal{T} \rightarrow (S_t)_{\mathcal{U}_{I_\mu}}$ tal que para todo $x \in \mathcal{T}$, $T(x) = (x_t)_{\mathcal{U}_{I_\mu}}$ con $x_t = x$ si $x \in S_t$, y $x_t = 0$ si $x \notin S_t$. T es una aplicación isométrica positiva, y entonces se puede extender a X . En consecuencia X es isométrico (retículo isométrico) a un subespacio (subretículo) de $(S_t)_{\mathcal{U}_{I_\mu}}$. $\square$

Con la hipótesis de 3.1, X es (reticularmente) finitamente representable en $\mathcal{S}_\mu = \{S_t : t \in I_\mu\}$.

En particular todo espacio de Köthe real de funciones medibles $\mathcal{K}(\mu)$ es (reticularmente) finitamente representable en $\mathcal{S}_\mu = \{S_t : t \in I_\mu\}$.

En algunos casos existe un espacio de Banach de sucesiones λ_X tal que todo S_t es isométrico (retículo isométrico) a algún λ_X^m , $m \in \mathbb{N}$, y entonces X es (reticularmente) finitamente representable en λ_X . Por ejemplo, si $X = L_p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$, entonces $\lambda_X = \ell_p$ como lo veremos en la siguiente observación.

Observación 3.2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Consideremos una familia $\{A_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ de subconjuntos de Ω disjuntos dos a dos. Si S_t es la envolvente lineal de $\{\chi_{A_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$, entonces S_t es un subretículo de dimensión finita de $L_p(\mu)$. Definimos una aplicación $P_t : S_t \rightarrow \ell_p^n$ por*

$$P_t \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \right) := \left(a_i (\mu(A_i))^{1/p} \right)_{i=1}^n$$

P_t es una aplicación isométrica positiva, ya que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \right\|_{L_p} &= \left(\sum_{j=1}^n \int_{A_j} \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \right)^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n (a_j)^p \mu(A_j) \right)^{1/p} = \left\| \left(a_j (\mu(A_j))^{1/p} \right)_{j=1}^n \right\|_{\ell_p} \end{aligned}$$

Se sigue entonces $L_p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$ es (reticularmente) finitamente representable en $\{\ell_p^n : n \in \mathbb{N}\}$ y por consiguiente en ℓ_p .

Los resultados obtenidos sobre representabilidad finita, tanto en espacios de Banach como en retículos, los presentamos a continuación, junto con sus corolarios. Empezando con los resultados en términos de espacios de Banach.

Teorema 3.3. *Sea X un espacio de Banach. Consideramos la familia*

$$\mathcal{G} = \{G_{(t,\delta)} : (t,\delta) \in I_\mu \times \Lambda_X\}$$

tal que $G_{(t,\delta)} = S_t \otimes_\Delta N_\delta$ con $S_t \in \mathcal{S}_\mu$ y $N_\delta \in FIN(X)$. Entonces $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$ es isométrico a un subespacio de $(G_{(t,\delta)})_{\mathcal{U}_{I_\mu \times \Lambda_X}}$.

Demostración. Es claro que para todo $(t,\delta) \in I_\mu \times \Lambda_X$, $G_{(t,\delta)}$ es un subespacio de dimensión finita de $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$ y que el conjunto de índices $I_\mu \times \Lambda_X$, en la familia $\{G_{(t,\delta)} : (t,\delta) \in I_\mu \times \Lambda_X\}$, es dirigido con respecto al orden natural en el producto; y entonces, denotamos por $\mathcal{U}_{I_\mu \times \Lambda_X}$ el ultrafiltro obtenido utilizando el resultado de la observación 2.2(2).

De acuerdo con la observación 2.6 (2), basta ver que la envolvente lineal de $\cup_{(t,\delta) \in I_\mu \times \Lambda_X} G_{(t,\delta)}$ es densa en $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$.

En efecto, como $\mathcal{K}(\mu)$ es orden continuo, entonces $\mathcal{T}(\mu, X)$ es denso en $\mathcal{K}(\mu, X) = \mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$; luego, para todo $f \in \mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$, existe $\{F_{f,n}\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathcal{T}(\mu, X)$ tal que $f = \lim_n F_{f,n}$.

Si $F_{f,n} = \sum_{i=1}^{k(f,n)} \chi_{A_{f,n,i}} \otimes x_{f,n,i}$ tal que los conjuntos $\{A_{f,n,i} : i = 1, \dots, k(f,n)\}$ son disjuntos dos a dos, entonces si para todo $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $S_{f,n}$ y $N_{f,n}$ a los espacios generados por $\{\chi_{A_{f,n,i}} : i = 1, \dots, k(f,n)\}$ y $\{x_{f,n,i} : i = 1, \dots, k(f,n)\}$ respectivamente, es claro que $S_{f,n} \in \mathcal{S}_\mu$ y que $N_{f,n} \in FIN(X)$. Por tanto, al hacer $G_{\delta_{f,n}} = S_{f,n} \otimes_\Delta N_{f,n}$ se tiene que $F_{f,n} \in G_{\delta_{f,n}} \in \mathcal{G}$, y en consecuencia el resultado esperado es inmediato. $\square$

Corolario 3.4. *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{K}(\mu)$ reticularmente finitamente representable en un retículo de Banach H . Entonces $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$ es finitamente representable en $H \widehat{\otimes}_\Delta X$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $S_t \in \mathcal{S}_\mu$, $t \in I_\mu$, existen H_t , un subretículo de dimensión finita de H y $R : S_t \rightarrow H_t$ un isomorfismo de retículos tal que $\|R\|\|R^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$. Por tanto si $I_{N_{\delta(t)}}$ es la identidad en $N_{\delta(t)}$ para $N_{\delta(t)} \in \text{FIN}(X)$, la aplicación $R \otimes_\Delta I_{N_{\delta(t)}} : S_t \otimes_\Delta N_{\delta(t)} \rightarrow H_t \otimes_\Delta N_{\delta(t)}$ es un isomorfismo; y entonces, $G_{(t,\delta)} = S_t \otimes_\Delta N_{\delta(t)}$, es isomorfo al subespacio de dimensión finita $H_t \otimes_\Delta N_{\delta(t)}$ de $H \widehat{\otimes}_\Delta X$, con lo cual el resultado es inmediato a partir del teorema 3.3. $\square$

Corolario 3.5. *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{K}(\mu)$ es reticularmente finitamente representable en un espacio de Banach de sucesiones regular λ . Entonces $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$ es finitamente representable en $\{\lambda^n \otimes_\Delta N : n \in \mathbb{N}, N \in \text{FIN}(X)\}$.*

Demostración. Sabemos que λ es reticularmente finitamente representable en $\{\lambda^n : n \in \mathbb{N}\}$. Con lo cual, dado $\varepsilon > 0$ para todo $t \in I_\mu$, $S_t \in \mathcal{S}_\mu$, existen un subespacio de dimensión finita V de λ^n , para algún $n \in \mathbb{N}$, y un isomorfismo de retículos $R : S_t \rightarrow V$ tal que $\|R\|\|R^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$. Y entonces, por un razonamiento similar al utilizado en la prueba del corolario 3.4, el resultado es inmediato. $\square$

Corolario 3.6. *Sea X un espacio de Banach el cual es finitamente representable en una familia $\{Y_\beta : \beta \in B\}$ de espacios de Banach, sea $\mathcal{K}(\mu)$ reticularmente finitamente representable en un retículo de Banach H . Entonces $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta X$ es finitamente representable en la familia $\{H \widehat{\otimes}_\Delta Y_\beta : \beta \in B\}$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ para todo $S_t \in \mathcal{S}_\mu$, $t \in I_\mu$, existen H_t un subretículo de dimensión finita de H y $R : S_t \rightarrow H_t$ un isomorfismo de retículos tal que $\|R\|\|R^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon/4$. Y también, para $N \in \text{FIN}(X)$ existen un subespacio de dimensión finita V de Y_{β_N} , para algún $\beta_N \in B$, y un isomorfismo $T : N \rightarrow V$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon/4$.

Entonces el operador $R \otimes T : S_t \otimes_\Delta N \rightarrow H_t \otimes_\Delta V$, es un isomorfismo tal que $\|R \otimes T\|\|(R \otimes T)^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$, y en consecuencia el resultado se sigue como en 3.4. $\square$

Los resultados en términos de retículos de Banach.

Teorema 3.7. *Sea E un retículo de Banach orden completo. Sea*

$$\mathcal{GL} = \{G_{(t,\gamma)} : (t,\gamma) \in I_\mu \times \Gamma_E\}$$

tal que $G_{(t,\gamma)} = S_t \otimes_\Delta N L_\gamma$ con $S_t \in \mathcal{S}_\mu$ y $N L_\gamma \in \text{LFIN}(E)$. Entonces $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta E$ es isométrico a un subretículo de $(G_{(t,\gamma)})_{(t,\gamma) \in I_\mu \times \Gamma_E}$.

Demostración. Como el conjunto de índices en la familia $\{G_{(t,\gamma)} : (t,\gamma) \in I_\mu \times \Gamma_E\}$ es dirigido respecto al orden natural en el producto, denotamos por $\mathcal{U}_{I_\mu \times \Gamma_E}$ el ultrafiltro en $I_\mu \times \Gamma_E$.

Por un procedimiento similar al utilizado en el teorema 3.3, sabemos que para todo $f \in \mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_\Delta E$, existe $\{F_{f,n}\}_{n=1}^\infty$, una sucesión de funciones simples,

tal que $f = \lim_n F_{f,n}$. Si $F_{f,n} = \sum_{i=1}^{k(f,n)} \chi_{A_{f,n,i}} \otimes x_{f,n,i}$ tal que los conjuntos $\{A_{f,n,i} : i = 1, \dots, k(f,n)\}$ son disjuntos dos a dos, sean $S_{f,n}$ y $N_{f,n}$ los subespacios de $\mathcal{K}(\mu)$ y E generados por $\{\chi_{A_{f,n,i}} : i = 1, \dots, k(f,n)\}$ y $\{x_{f,n,i} : i = 1, \dots, k(f,n)\}$ respectivamente.

Del lema 2.8, existe un subretículo de Banach de dimensión finita $NL_{f,n}$ de E y un operador lineal $A_{f,n} : N_{f,n} \rightarrow NL_{f,n}$ que satisface que

$$\|A_{f,n}(x) - x\| \leq \frac{1}{n}\|x\| \quad \text{para todo } x \in N_{f,n}$$

Si hacemos $FA_{f,n} = \sum_{i=1}^{k(f,n)} \chi_{A_{f,n,i}} \otimes A_{f,n}(x_{f,n,i})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta(F_{f,n} - FA_{f,n}) &= \left\| \sum_{i=1}^{k(f,n)} \|A_{f,n}(x_{f,n,i}) - x_{f,n,i}\|_E \chi_{A_{f,n,i}} \right\|_{\mathcal{K}(\mu)} \\ &\leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{k(f,n)} \|x_{f,n,i}\|_E \chi_{A_{f,n,i}} \right\|_{\mathcal{K}(\mu)} \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\|F_{f,n} - FA_{f,n}\|_{\mathcal{K}(\mu,E)} \leq \frac{1}{n} \|F_{f,n}\|_{\mathcal{K}(\mu,E)}$$

Se sigue, entonces que $f = \lim_n FA_{f,n}$, con $FA_{f,n} \in S_{f,n} \otimes_{\Delta} NL_{f,n} \in \mathcal{GL}$, y el resultado se sigue como en el teorema 3.3. $\square$

Como consecuencias inmediatas del teorema, tenemos la versión de los corolarios 3.4 y 3.6 al caso en que E es un retículo de Banach orden completo. Los enunciados son como sigue y sus respectivas demostraciones se siguen a partir del teorema y la demostración de 3.4 y 3.6 respectivamente.

Corolario 3.8. *Sea E un retículo de Banach orden completo y $\mathcal{K}(\mu)$ es reticularmente finitamente representable en un retículo de Banach H . Entonces $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_{\Delta} E$ es reticularmente finitamente representable en $H \widehat{\otimes}_{\Delta} E$.*

Corolario 3.9. *Sea E un retículo de Banach orden completo el cual es reticularmente finitamente representable en una familia $\{Y_{\beta} : \beta \in B\}$ de retículos de Banach, y $\mathcal{K}(\mu)$ reticularmente finitamente representable en un retículo de Banach H . Entonces $\mathcal{K}(\mu) \widehat{\otimes}_{\Delta} E$ es reticularmente finitamente representable en la familia $\{H \widehat{\otimes}_{\Delta} Y_{\beta} : \beta \in B\}$.*

Observación 3.10. *Sean $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$ $i = 1, 2$ un par de espacios de medida y $1 \leq p, q < \infty$, como un caso particular de los resultados consideramos aquel en que $\mathcal{K}(\mu)$ es un espacio $L_p(\mu_1)$ y E es un espacio (retículo orden completo) $L_q(\mu_2)$. Usando la notación convenida, se sigue de los teoremas 3.7 y 3.3 que $L_p(\mu_1, L_q(\mu_2)) = L_p(\mu_1) \widehat{\otimes}_{\Delta} L_q(\mu_2)$ es (reticularmente) finitamente re- presentable*

en $\{G_{(t_1, t_2)} : (t_1, t_2) \in I_{\mu_1} \times I_{\mu_2}\}$, donde $G_{(t_1, t_2)} = S_{t_1} \otimes_{\Delta} S_{t_2}$ con $S_{t_i} \in \mathcal{S}_{\mu_i}$ para $i = 1, 2$.

Pero por otro lado, la aplicación $P_{(t_1, t_2)} : G_{(t_1, t_2)} \rightarrow \ell_p^n \{\ell_q^m\}$ tal que

$$P_{(t_1, t_2)}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \chi_{A_i} \otimes \chi_{B_j}\right) = ((a_{ij} \mu_1(A_i)^{1/p} \mu_2(B_j)^{1/q})_{j=1}^m)_{i=1}^n$$

es una aplicación isométrica de retículos, con lo cual $L_p(\mu_1, L_q(\mu_2))$ es reticularmente finitamente representable en $\{\ell_p^n \{\ell_q^m\} : n, m \in \mathbb{N}\}$ y por consiguiente en $\ell_p \{\ell_q\}$.

Agradecimientos Trabajo realizado con el apoyo de la Dirección de Investigación y Docencia de la Universidad EAFIT, bajo el proyecto de investigación *Resultados sobre normas tensoriales e ideales de operadores asociados*.

Referencias

- [1] Chaney, J.: Banach lattices of compact maps. Math. Z. 129(1972), pp.1-19.
- [2] Dacunha-Castelle and Krivine, J. L.: Applications des ultraproducts a l'étude des espaces et des algèbres de Banach. Studia Math. 41(1972), pp.315-334.
- [3] Defant, A.-Floret, K.: Tensor norms and operator ideals. North Holland Math. Studies. North Holland. Amsterdam. 1993.
- [4] Gómez, P., López Molina, J.A., Rivera, M.J.: Some applications of the lattice finite representability in spaces of measurable functions. Turk. J. Math. 25(2001), pp.475-490.
- [5] Gómez, P., López Molina, J.A., Rivera, M.J. : Local techniques in the study of operators and tensor norms defined by a sequence space. Rend. Circ. Mat. (Palermo). Serie II, Suppl. 73(2004), pp.229-241.
- [6] Haydon, R., Levy, M., Raynaud, Y.: Randomly normed spaces. Hermann. 1991.
- [7] Heinrich, S.: Ultraproducts in Banach spaces theory. J. Reine Angew. Math. 313(1980), pp.72-104.
- [8] Hensgen, W.: Some properties of the vector-valued Banach ideal space $E(X)$ derived from those of E and X . Colle. Math 43(1)(1992), pp.1-16.
- [9] Lacey, H. Elton.: The isometric theory of classical Banach spaces. Springer-Verlag, 1974.
- [10] Lotz, H.P. : Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices. TAMS 211(1975), pp.85-100.

Dirección del autor

Patricia Gómez Palacio — Universidad EAFIT, Depto. de Ciencias Básicas, A.A.3300
e-mail: pagomez@eafit.edu.co