

COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE ÍNDICES DE CAPACIDAD MULTIVARIADOS A TRAVÉS DE LA SIMULACIÓN DE PROCESOS

TRABAJO DE GRADO

Para obtener al título de
ESTADÍSTICO

presenta

Nataly Jaramillo Padredin
Yoldy Yasbleidy Benavides Caicedo

Jaime Mosquera Restrepo
Director de Trabajo de Grado

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Estadística
Septiembre de 2012

Índice

Introducción	7
1. Planteamiento del Problema	9
2. Objetivos	11
2.1. Objetivo General	11
2.2. Objetivos Específicos	11
3. Justificación	12
4. Antecedentes	13
5. Marco Teórico	15
5.1. Control Estadístico de Procesos	15
5.2. Análisis de Capacidad de Procesos	15
5.3. Análisis de Capacidad Multivariante	16
5.4. Índices de Capacidad de Procesos	16
5.4.1. Índices de Capacidad Univariados:	17
5.4.2. Índices de Capacidad Multivariados	17
5.4.2.1. Índice EC_{pk}	18
5.4.2.2. Índice de Capacidad MC_{pm}	19
5.4.2.3. Vector de Capacidad de Procesos Multivariados (VCPM)	21
5.4.2.4. Nuevo Vector de Capacidad de Procesos Multivariados(NVCPM)	24
5.4.2.5. Índice de Capacidad MCP	26
5.4.2.6. Índice de Capacidad MCPC	28
6. Metodología	29
6.1. Generación de procesos	29
6.2. Caracterización de los procesos	32
6.3. Simulación para la estandarización del número de Componentes Principales de los Índices de Capacidad MCP y MCPC	37
6.4. Evaluación de los Índices Multivariados	37
7. Resultados	41

7.1. Desempeño de los Índices de Capacidad en Procesos Normales y No Normales con dos variables	41
7.1.1. Índices de Capacidad en Procesos Normales de dos variables	41
7.1.2. Índices de Capacidad de Procesos No Normales de dos variables	46
7.2. Índices de Capacidad de Procesos Normales y No Normales Con Tres Variables	52
7.2.1. Índices de Capacidad de Procesos Normales de tres variables	52
7.2.2. Índices de Capacidad de Procesos No Normales con Tres Variables . . .	57
7.3. Comparación del desempeño de los Índices de Capacidad Multivariados	62
7.4. Resultados de Diagnóstico de Capacidad para los diferentes escenarios	69
7.5. Procesos con distribución no Normal	70
7.5.1. Cambios en Centramiento	70
7.5.1.1. Correlación nula	70
7.5.1.2. Correlación débil	70
7.5.1.3. Correlación media	70
7.5.1.4. Correlación fuerte	70
7.5.2. Cambios en Variabilidad	70
7.5.2.1. . Correlación nula	70
7.5.2.2. Correlación débil.	71
7.5.2.3. Correlación Media	71
7.5.2.4. Correlación fuerte	71
8. Conclusiones y Recomendaciones	72
8.1. Conclusiones por índice evaluado	72
8.1.1. Índice de Capacidad MCPM	72
8.1.2. Índice de Capacidad ECPK	72
8.1.3. Vector de Capacidad de Procesos Multivariados VCPM	72
8.1.4. Nuevo Vector de Capacidad de Procesos Multivariados NVCPM	73
8.1.5. Índice de Capacidad MCP y MCPC	73
8.2. Conclusiones generales	74
9. Bibliografía	75

Índice de figuras

1.	Región de tolerancia modificada para el cálculo del índice MCpm	20
2.	Procesos Normales Base de 2 variables con diferentes niveles de correlación . . .	36
3.	Procesos no Normales Base de 2 variables con diferentes niveles de correlación .	36
4.	Gráficos de Boxplot y %DC ideales	40
5.	Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil	42
6.	Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte	43
7.	Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Nula y Débil	44
8.	Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Media y Fuerte	45
9.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil	47
10.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte	48
11.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Nula y Débil	49
12.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Media y Fuerte	50
13.	Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil	52
14.	Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte	53
15.	Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Nula y Débil	54
16.	Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Media y Fuerte	55
17.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil	57
18.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte	58
19.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil	59

20.	Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte	60
21.	Diagnóstico de Capacidad para Procesos Normales de dos variables	63
22.	Diagnóstico de Capacidad para Procesos No Normales de dos variables	64
23.	Diagnóstico de Capacidad para Procesos Normales de tres variables	65
24.	Diagnóstico de Capacidad para Procesos No Normales de tres variables	66

Índice de Tablas

1.	Índices de Capacidad asociados a la variación dentro de los grupos	17
2.	Índices de Capacidad asociados a la varianza entre grupos	18
3.	Criterio de decisión del índice MCpm	21
4.	Criterios de decisión del NVCPM	26
5.	Escenarios para simulacion de procesos capaces	33
6.	Escenarios para simulación para procesos alterados	33
7.	Límites de Especificación para procesos de 2 variables bajo normalidad	34
8.	Límites de Especificación para procesos de 3 variables bajo normalidad	34
9.	Límites de Especificación para procesos de 2 variables bajo no normales	35
10.	Límites de Especificación para procesos de 3 variables bajo no normalidad	35
11.	Alteraciones en Centramiento y Variabilidad	36
12.	Componentes Principales para Índices MCP y MCPC	37

Introducción

El Control Estadístico de Procesos (CEP) es una herramienta muy importante y valiosa, dado a que contribuye en el control continuo de la variabilidad de las características de calidad de los productos. Este generalmente es usado en la industrias para controlar una sola característica de calidad considerada como la más importante y necesaria de controlar. Este tipo de control es el llamado Control Estadístico de Procesos Univariados (CEPU) que tiene dentro de sus ventajas la facilidad de implementación y análisis dado que solo se involucra una variable de control. Sin embargo este análisis ignora la relación existente entre las características de calidad involucradas en el producto, lo cual influye sobre la posibilidad de obtener resultados erróneos que no representan con total veracidad la calidad del producto.

Las herramientas estadísticas del CEPU son los Gráficos de Control y el Análisis de Capacidad de Proceso. El Análisis de Capacidad cuantifica la variabilidad del proceso y la contrasta con las especificaciones requeridas para el producto. Las técnicas para determinar la capacidad son de dos tipos: Gráficas (Histogramas, Gráficos de Probabilidad, entre otros) o Analíticas (Índices de Capacidad de Procesos).

Los índices de capacidad de procesos tradicionales como: C_p , C_{pk} , C_{pu} y C_{pl} o los propuestos por Bothe (1997), Kotz and Johnson (1993), Kotz and Lovelace (1998), Kotz and Johnson (2000) y Cheng (1991), entre otros, en un principio analizan una sola variable como se mencionó anteriormente. Sin embargo, realmente los procesos vinculan más de una característica de calidad que con estos eran ignoradas. Para verificar con mayor precisión la capacidad de los procesos, es necesario tener en cuenta la información de un conjunto de variables que presentan una estructura de asociación y que acercan los resultados más a la realidad de los procesos. Teniendo en cuenta lo anterior, se han definido los Índices de Capacidad de Procesos Multivariados que involucran dos o más variables del proceso y tienen en cuenta la correlación entre ellas.

En los últimos años se han presentando propuestas sobre Índices de Capacidad Multivariados pero hasta el momento no se ha llegado a un acuerdo claro sobre el mejor índice . En el presente trabajo se evaluará el desempeño de índices multivariados en procesos simulados con cambios en su distribución y parámetros (centramiento, variabilidad y correlación), los niveles de correlación son Nula, Débil, Media y Fuerte.

Los índices evaluados son el Método ECPK propuesto por Braun (2001), el Índice MCPM propuesto por Taam, Subbarah y Liddy (1993), los Índices MCP y MCPC propuesto por Wang y Du (2000), el Vector de Capacidad de Procesos Multivariados (VCPM) propuesto

por Shahriari, Hubele and Lawrence (1995) y el Nuevo Vector de Capacidad de Procesos Multivariados (NVCPM) propuesto por Shariahri y Abdollahzadeh (2009).

Esta investigación se enfocará en realizar un Análisis de la Capacidad de Procesos Multivariantes utilizando los índices de Capacidad de Procesos Multivariados, los cuales ayudarán a indicar cuándo un proceso tiene la habilidad de cumplir con las características y especificaciones que se han establecido previamente, esto con el fin de comparar el comportamiento de dichos índices y finalmente, definir cuál es el mejor índice para cada escenario planteado.

La metodología estadística utilizada se basa en la simulación de procesos multivariados, que tienen diferentes características con respecto al centramiento, variabilidad y niveles de correlación. A estos se les realiza un Análisis de Capacidad Multivariado con los Índices de Capacidad propuestos, los cuales cuantificarán la habilidad que tienen dichos procesos para cumplir las especificaciones determinadas por los clientes o el mercado. Previamente, los procesos generados se identifican como procesos capaces o no capaces por medio de una regla fundamental de Calidad (Seis Sigma) que determina que sólo hasta 0,027% de los datos de un proceso estarán por fuera de los límites de especificación que se han generado para 2 y 3 variables. Por último, se realiza una comparación del desempeño de cada uno de los índices y se determinará el mejor para cada uno de los procesos simulados por medio de un indicador llamado Porcentaje de Diagnóstico de Capacidad (%DC), que ayudará a juzgar si los índices son lo suficientemente buenos como para ser utilizados con cierta seguridad por parte de los Coordinadores de Calidad en las industrias.

1. Planteamiento del Problema

La calidad en el contexto industrial es un valioso elemento estratégico que incrementa la competitividad, la productividad y la fidelización de los clientes garantizando un espacio del producto en el mercado. La conservación de la misma por tanto ha sido un tema de gran importancia desde décadas atrás, por lo cual se han implementado diversas técnicas estadísticas que con un número limitado de mediciones logran verificar y asegurar la calidad de los productos.

La aplicación de la Estadística al control de calidad, tiene como objeto evaluar la variabilidad existente en cualquier tipo de proceso a través de herramientas como los gráficos de control, que indican cuándo las variaciones de un proceso rebasan el límite aceptable por el azar. Otra de las muchas herramientas dedicadas al control estadístico de procesos es el Análisis de Capacidad, desarrollado con el propósito de estudiar el comportamiento de un proceso en relación a unas especificaciones, establecidas por los clientes o el mercado para definir las características que se quieren en un producto. Los índices de capacidad son estimaciones numéricas de cuán capaz es el proceso, es decir, a qué nivel se cumple con las especificaciones. Los índices de capacidad univariados, es decir, aquellos asociados a procesos con una característica de calidad, se clasifican dependiendo de su tipo de variación, a corto plazo C_p , C_{pk} , C_{pu} , y C_{pl} ; y a largo plazo P_p , P_{pk} , P_{pu} , y P_{pl} . Estos estadísticos son muy útiles y fáciles de calcular permitiendo comparar distintos procesos, pero no son lo suficientemente eficaces cuando se presentan más de una característica de calidad a controlar, porque se ignora la relación existente con las demás variables del proceso.

Las mediciones multivariadas traen consigo la dificultad de incluir más variables, pero es necesario si se quiere obtener resultados más realistas. Dicha situación requiere que las variables sean evaluadas de manera conjunta para determinar la capacidad global del proceso. Inicialmente este análisis se realizaba con una sola característica de calidad pues no se contaba con una metodología que relacionara más de una variable de manera práctica, ocasionando el incremento de la posibilidad de error en el diagnóstico motivado por la omisión de la estructura de correlación. Debido al auge que han tenido en los últimos años las herramientas multivariadas, autores como Cheng et. al (1991), Taam et. al (1993), Chen (1994), Shahriari et. al (1995), Bothe (1997), Wang y Du (2000), Braun (2001), Castagliola y Garcia (2005), Shahriari y Abdollahzadeh (2009), entre otros, han propuesto diferentes índices multivariados a través de diversas estrategias como las probabilísticas, geométricas o mezclas entre ellas, para mejorar los resultados.

Cada uno de estos autores realiza su propuesta, algunos bajo el cumplimiento de condiciones de multinormalidad sobre las variables críticas y otros un poco más flexibles respecto a este

supuesto. Al realizar su propuesta estos autores presentan algunas evaluaciones del desempeño de sus índices, bajo escenarios de procesos muy limitados, algunos sobre casos puntuales específicos, otros sobre simulaciones restringidas a condiciones de normalidad y ausencia de correlación, otros tiene en cuenta la correlación, pero sobre una estructura de correlación predefinida, lo cual limita la comparacion y eleccion de un índice.

Actualmente, los procesos de producción presentan diversas características, en cuanto a la asociación de sus variables y el cumplimiento de la multinormalidad (con mayor frecuencia se encuentran variables criticas con comportamiento no normal). Esta diversidad limita el ejercicio de selección del índice de capacidad de mejor desempeño para la condición particular de un proceso. De esta manera el presente proyecto plantea la evaluación de diferentes índices de capacidad de procesos multivariados, bajo la simulación de diferentes condiciones de proceso, en los cuales se manipulan condiciones de variabilidad, centramiento, correlación y cumplimiento de la distribución normal con el objetivo definir una guía que facilite a los coordinadores de calidad determinar la capacidad de los procesos.

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Comparar el desempeño de los Índices de Capacidad Multivariados planteados bajo procesos de producción simulados.

2.2. Objetivos Específicos

- Evaluar la eficiencia de los Índices de Capacidad Multivariados planteados en procesos con diferentes características, nivel de correlación, cambios en centramiento y variabilidad.
- Identificar el mejor Índice de Capacidad Multivariado de los planteados para cada uno de los procesos característicos simulados.
- Concertar lineamientos con respecto a los Índices de Capacidad Multivariados que puedan usar las industrias en sus procesos.

3. Justificación

Después de los gráficos de control, el análisis de capacidad de proceso puede considerarse como la técnica de mayor aplicación en la verificación del cumplimiento de las condiciones pactadas de calidad. Este análisis se realiza sobre la selección de un conjunto de unidades muestrales cuya medición de calidad se contrasta con las especificaciones pactadas, con el objetivo de valorar qué tan capaz es el proceso de dar cumplimiento a las exigencias. Como se puede observar, este es un procedimiento de diagnóstico en el que incurre la incertidumbre y la aleatoriedad, de manera que siempre será posible la presencia de errores de diagnóstico, tales como Error Tipo I, diagnosticar ausencia de capacidad sobre un proceso capaz, o Error Tipo II, declarar capacidad en un proceso que carece de la misma.

Al momento de realizar esta clase de análisis los controladores de calidad deberán seleccionar la herramienta estadística que presente el mejor desempeño en su diagnóstico, minimizando las probabilidades de error, para lo cual disponen de una gran cantidad de alternativas, específicamente en el campo multivariante. Sin embargo, no existe un criterio que apoye y valide esta selección, dado que cada una de las propuestas puede presentar eficiencias distintas, bajo diversos escenarios. De esta manera los resultados obtenidos en el presente proyecto pueden llegar a convertirse en el criterio de selección de la herramienta indicada.

Como resultado se obtendrá una guía que informará sobre el desempeño de los diferentes índices propuestos en cada uno de los escenarios desarrollados. Esto indudablemente ayudará a las industrias dada la importancia que tiene para ellas conocer la capacidad de sus procesos, porque les permite predecir qué tanto se cumplen las tolerancias especificadas, apoyará a los diseñadores en la selección y modificación de los procesos, vigilará y monitoreará continuamente el estado de los mismos para reducir su variabilidad y finalmente, genere ganancias en dinero y tiempo.

Este trabajo permitirá que la implementación de estos índices sea más frecuente y efectiva, para facilitar la manera en que se determina la capacidad de los procesos a los controladores de calidad, ya que tendrán el conocimiento previo de cuál es el mejor Índice de Capacidad Multivariado para procesos que tienen distintas características.

4. Antecedentes

A continuación se citan algunos trabajos sobre el estudio de Índices de Capacidad Univariados y Multivariados en procesos simulados y reales:

- **Castagliola y Garcia (2005):** Proponen dos nuevos índices de capacidad de procesos BCp y BCpk dedicados específicamente para el caso de dos características de calidad, asumiendo una distribución normal bivariada y una región de tolerancia rectangular.

Para determinar la eficiencia de los índices de Capacidad propuestos se comparan con los verdaderos valores de capacidad de los procesos y con los resultados obtenidos con los índices definidos por Taam et al.(1993), Pal (1999), Wang y Chen (1998), Wang y Du (2000), Shahriari et al. (1995), Chen (1994) y Bothe (1999) en ejemplos con datos simulados y reales de la industria mundial. Esta comparación se realiza para tres tipos de escenarios: (1) Procesos capaces, (2) Procesos intrínsecamente capaces, es decir, poca variabilidad pero descentrado y (3) Procesos no capaces. Al final, resultó que con el índice BCp los resultados fueron muy similares a los obtenidos por Chen (1994), Wang y Du (2000) y Shahriari et al. (1995). Con el índice Bcpk se obtuvieron resultados muy similares con el índice propuesto por Bothe (1999). Para los ejemplos que se simularon, los índices propuestos BCp y BCpk mostraron mayor robustez en comparación con los otros métodos cuando hay alta correlación.

- **Martínez (2007):** Realiza una evaluación comparativa de los los índices de capacidad multivariados: Vector multivariado de capacidad propuesto por Shahriari, Hubele y Lawrence (1995); Índice multivariado de capacidad MCpm propuesto por Taam, Subbaiah y Liddy (1993) y el Índice multivariado de capacidad MCp propuesto por Chen (1994) sobre procesos de producción simulados.

La simulación de los procesos se realizó en el software R con una Distribución Normal Multivariada y con parámetros iniciales tomados de Jackson (1995) y García (2004), definiendo una matriz de medias y matriz de varianzas-covarianzas para cada caso. A cada proceso, se evaluó el control de los procesos implementando el gráfico de control T_2 de Hotelling y posteriormente, se procedió a calcular los tres índices de capacidad mencionados anteriormente en los procesos ya planteados en dos condiciones extremas": (1) Condiciones ideales para simular procesos "seguramente capaces", haciendo que el vector de medias muestral este muy cercano al vector objetivo y controlando la variación con el fin de que la región de tolerancia se defina de tal forma que contenga a la región del proceso. (2) Condiciones para generar "procesos no capaces" haciendo un cambio en el centramiento e inflando la varianza.

Con las condiciones mencionadas, se obtuvo que el índice MCp fue el que obtuvo un mayor nivel de confianza en la simulación de procesos. El Vector multivariado de capacidad

resultó ser el más sensible con respecto a la posición del vector de medias del proceso, ya que se alcanzó la mayor potencia cuando se afectaba el centramiento. Cuando se modifica la variación de los procesos se obtienen resultados muy similares para los tres índices. Además de que los resultados no se ven afectados cuando se afecta el número de variables involucradas en el proceso.

En este trabajo, se limita en gran medida la variabilidad que pueden presentar los procesos, ya que sólo se realiza un cambio en centramiento y variabilidad como parte de la condiciones planteadas. Además, presenta parámetros iniciales que son tomados de ejemplos, lo cual hace que tengan en cierta medida restricciones para realizar generalizaciones hacia problemas reales en la industria.

- **Zahid y Sultana (2008):** Presentan cinco diferentes índices de capacidad multivariados: Índice MCpm propuesto por Taam et al. (1993), Índice MCp propuesto por Chen (1994), Vector de Capacidad Multivariado propuesto por Shahriari et al. (1995), el Índice Ecpc propuesto por Braun (2001) y el índice BCpk propuesto por Castagliola y García (2005) con el fin de medir y comparar la capacidad de un proceso de fabricación de vajillas de cerámica. Se tomaron dos características de calidad de un proceso de Shinepukur Ceramic Industry y se calcularon estadísticas de control, se comprobó por medio de pruebas la normalidad de los datos, se realizaron gráficos de capacidad y se calcularon cada uno de los índices elegidos.

Los cinco métodos de estimación muestran diferentes valores de capacidad del proceso. Entre ellos, el método de Castagliola muestra mayor coherencia en su resultado de acuerdo con lo expuesto por la gerencia y tiene una tasa de rechazo cercana a lo exigido por la compañía, seguido por el de Chen, Taam, Shahriari y Braun respectivamente para el caso del proceso de fabricación de vajillas en cerámica.

- **Shahriari y Abdollahzadeh (2009):** Realizan un resumen de los más importantes índices de capacidad univariados y multivariados que existen en la literatura. Adicionalmente, se presenta una propuesta de un nuevo índice de capacidad multivariado llamado Nuevo Vector de Capacidad de Procesos Multivariados (NMCPMV), que es una leve modificación del anteriormente propuesto por Taam et al. (1993).

Para demostrar el desempeño y la efectividad del NMCPMV se realizaron dos ejemplos, en el primero se consideraron seis procesos simulados con dos características de calidad cada uno y se consideró una distribución normal bivariada. En el segundo ejemplo, se analiza el índice de capacidad multivariado de Chen y se toman datos reales de un proceso normal bivariado. Los resultados obtenidos en los dos ejemplos indicaron que el NMPCV es una mejor herramienta para calcular la capacidad de los procesos, cuando la correlación de las características de calidad es grande y/o el proceso es capaz para algunas características de calidad y es incapaz para otras, ya que brinda mayor confianza especialmente cuando se compara con el índice de Chen.

5. Marco Teórico

El Marco Teórico que fundamenta esta investigación brindará al lector una idea más clara sobre las técnicas estadísticas utilizadas para el desarrollo de la metodología propuesta, desde la base qué es el Control Estadístico de Procesos, hasta la exposición de cada uno de los Índices de Capacidad de Procesos Multivariados a los que se les evaluará su desempeño en el presente proyecto.

5.1. Control Estadístico de Procesos

El Control Estadístico de Procesos es un conjunto de herramientas estadísticas que se utilizan para conocer el comportamiento de un proceso y así tomar acciones correctivas que permitan eliminar la causas principales de su variabilidad.

Una de las ideas fundamentales de la fabricación es que nunca se producen dos objetos totalmente iguales. Un proceso productivo está sujeto a la influencia de muchos factores, de los cuales algunos no pueden ser controlados, es por esto que las causas de variabilidad se clasifican en aleatorias o no aleatorias, ya que pueden ser asignadas o no a un factor que influye en el proceso. Las causas aleatorias son naturales y cuyos efectos individuales son muy pequeños y por consiguientes difíciles de controlar y eliminar. Por el contrario, las causas no aleatorias son aquellas que actúan en determinados momentos pero que producen una gran variabilidad y sus efectos pueden eliminarse al controlar o eliminar la causa. Cuando en un proceso solo actúan causas aleatorias, se dice que el proceso está bajo control y cuando las causas son no aleatorias, el proceso está fuera de control.

Para determinar si un proceso se encuentra bajo control existen diversas técnicas estadísticas como con los Gráficos de Control tanto univariados (Shewhart) como multivariados (MCUSUM, MEWMA, entre otros.)

5.2. Análisis de Capacidad de Procesos

El Análisis de Capacidad de procesos cuantifica la habilidad que tiene un proceso de producir artículos que satisfagan las características que han sido preestablecidas. El proceso debe tener la condición de una distribución de probabilidad que tenga forma, centro (media) y dispersión (desviación estándar) especificados.

Cuando se realiza un estudio de Capacidad de Procesos, por lo general se miden los parámetros funcionales del producto, no los del proceso. Sería realmente valioso que el analista pueda

observar directamente el proceso y además analizar y controlar la manera en que se obtienen los datos.

Es importante tener en cuenta que para realizar un Análisis de Capacidad de Procesos se tengan en cuenta ciertos supuestos:

- El proceso a analizar debe estar bajo control estadístico, es decir, sin la influencia de fuerzas externas o cambios repentinos, ya que si esto no se cumple la media y/o la desviación estándar del proceso no son estables y en consecuencia, la variabilidad será mayor que la natural y la capacidad se infravalorará, por lo tanto no es adecuado realizar un estudio de la capacidad.
- Se deben recoger suficientes datos para garantizar que estos sean representativos del proceso y a las condiciones actuales y futuras del mismo.
- Es conveniente que los datos analizados provengan de una distribución normal multivariada, ya que de otra se deberá utilizar otro índice que no necesite el supuesto de normalidad.

5.3. Análisis de Capacidad Multivariante

Cuando se quiere saber si un proceso productivo que involucra varias variables es capaz o no de responder con las especificaciones preestablecidas, se implementa un Análisis de Capacidad Multivariante. Este incluye la posible correlación existente entre las variables del proceso, permitiendo así vincular todas las variables para obtener una mayor precisión con respecto a la realidad.

La herramienta que se tiene para realizar el Análisis de Capacidad Multivariante son los Índices de Capacidad de procesos.

5.4. Índices de Capacidad de Procesos

La forma en la que se cuantifica la habilidad de que un proceso cumpla con las especificaciones es por medio de los Índices de Capacidad, que comparan la variabilidad permitida en el diseño del producto, teniendo en cuenta los límites de tolerancia que se han determinado para el proceso y las características de calidad establecidas.

Cuando en un proceso de una variable se quiere verificar que cumple con las especificaciones, los índices de capacidad que se deben utilizar son los univariados. Si por el contrario, se desea controlar dos o más variables de interés, se debe usar los índices de capacidad multivariados.

5.4.1. Índices de Capacidad Univariados:

Se realizan cuando se quiere medir o cuantificar una variable de interés que corresponde a una característica de calidad de un producto, la cual es importante analizar para saber si los productos están siendo fabricados están cumpliendo con las expectativas impuestas por el cliente o por el mismo productor.

Entre estos índices se encuentran aquellos basados en el modelo normal. Para este caso, se calcula tanto la variación entre grupos como la variación dentro de los grupos.

Los índices asociados a la variación dentro de los grupos son: C_p, C_{Pk}, C_{pu} y C_{pl} , entre otros. Los índices asociados a la variación entre grupos son: P_P, P_{Pk}, P_{pu} y P_{pl} , entre otros. Se mostrará un resumen de las fórmulas de estos índices por medio de las tablas 1 y 2:

TABLA 1: Índices de Capacidad asociados a la variación dentro de los grupos

Índice	Fórmula	Especificaciones
C_p	$\frac{LSE-LEI}{6\sigma_C}$	Compara los límites naturales del proceso con los límites de especificación
C_{pu}	$\frac{LES-\mu}{3\sigma_C}$	Solo especificación superior
C_{pl}	$\frac{\mu-LEI}{3\sigma_C}$	Solo especificación inferior
C_{pk}	$\min(C_{pu}, C_{pl})$	Considera el centramiento del proceso y toma como límite de especificación el más próximo al promedio del proceso
σ_C es la variación intra grupos.		

5.4.2. Índices de Capacidad Multivariados

Actualmente se han propuesto un sin número de Índices de Capacidad de Procesos para el caso multivariado. Algunos de estos índices son:

TABLA 2: Índices de Capacidad asociados a la varianza entre grupos

Índice	Fórmula	Especificaciones
P_p	$\frac{LSE-LEI}{6\sigma_p}$	Se define como la razón entre los límites de especificación con la tolerancia total del proceso
P_{pl}	$\frac{\mu-LIS}{3\sigma_p}$	Para un límite de especificación inferior
P_{pu}	$\frac{LES-\mu}{3\sigma_p}$	Para un límite de especificación superior
P_{pk}	$\min(P_{pu}, P_{pl})$	
σ_p es la variación entre grupos.		

5.4.2.1. Índice EC_{pk} :

Este índice fue propuesto por Lorenz Braun (2001), el cual hace parte integral de un enfoque global de la visualización del control de calidad multivariado. En este método la tolerancia rectangular es reemplazada por un tolerancia elípsoidal, considerando la independencia de dos características de calidad. La región de tolerancia elípsoidal o el volumen de una tolerancia (hiper-) elípsoidal es:

$$Vol_{Tol} = |\sum|^{1/2} * (\chi_{m,0.9973}^2 \pi)^{m/2} [\Gamma(m/2 + 1)]^{-1} \quad (1)$$

Donde m corresponde al número de características de calidad, Γ es la función gamma y $\chi^2(m, 0.9973)$ es el percentil 0,9973 de la distribución χ^2 con v grados de libertad. $\sum$ es la matriz de varianzas y covarianzas de las características de calidad, las cuales se ajustan con una probabilidad de 99,73 % en la región de tolerancia rectangular (hiper-cubo). La matriz de varianzas se calcula utilizando la matriz de correlación de las características de calidad R .

La capacidad de un proceso elípsoidal básico EC_p compara 99,73 % de la concentración elipsoidal (región del proceso elípsoidal) de un vector $Y = (Y_1, \dots, Y_v)$ de características de calidad con la tolerancia elipsoidal (región de tolerancia elípsoidal).

El índice EC_p está definido como:

$$EC_p = \left(\frac{Vol.Tol}{Vol.Proc} \right)^{1/v} = \prod_{j=1}^v (C_{p,j})^{1/j} \quad (2)$$

Donde, $C_{p,j}$ corresponde a las capacidades de los procesos univariados de las v características de calidad. La capacidad del proceso elípsoidal no es influenciada por la estructura de dependencia de las características de calidad. Por otra parte, la desviación entre el vector de valores esperados muestrales $\bar{M}^T = (M_1, \dots, M_v)$ y el vector de valores esperados poblaciones $\bar{\mu}^T = (\mu_1, \dots, \mu_v)$ debe considerar la estructura de dependencia de las características de calidad.

El factor de corrección de la capacidad del proceso elíptico K_E y la capacidad de proceso elípsoidal corregida es:

$$K_E = \sqrt{\frac{(\bar{\mu} - \bar{M})^T (\Sigma)^{-1} (\bar{\mu} - \bar{M})}{\chi_{v,0,9973}^2}} \quad (3)$$

El índice queda expresado como:

$$EC_{pk} = EC_p(1 - K_E) \quad (4)$$

El numerador en la ecuación K_E corresponde a una ecuación elípsoidal. El denominador es el percentil 0,9973 de la distribución χ^2 con v grados de libertad. Si el vector de valores esperados está situado fuera de la región de tolerancia, el EC_{pk} se vuelve negativo. Por tanto, el EC_p y el EC_{pk} deben ser interpretados igualmente que los índices de capacidad univariados C_p y C_{pk} .

Criterio de decisión: Si el índice EC_{pk} es mayor a 1, se considera que el proceso es capaz.

5.4.2.2. Índice de Capacidad MC_{pm} :

Índice propuesto por Taam, Subbaiah y Liddy en 1993, este método propone un índice de capacidad multivariado que se define como un cociente entre dos volúmenes:

$$MC_{pm} = \frac{Vol.R_1}{Vol.R_2} \quad (5)$$

donde R_1 es la región de tolerancia modificada y R_2 es la región del proceso al 99,73 % de confianza. Se debe cumplir el supuesto de que los datos del proceso deben ser normales multivariantes.

La región de tolerancia modificada que dibuja el método se define como el elipsoide de mayor tamaño comprendido dentro de la región de tolerancia original, como se puede observar (Figura ??):

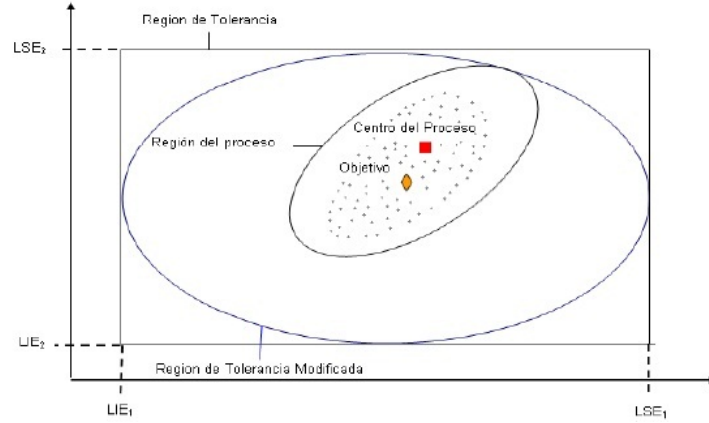


FIGURA 1: Región de tolerancia modificada para el cálculo del índice MCpm

La estimación del índice MC_{pm} está dada por:

$$MC_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\hat{D}} \quad (6)$$

Donde,

$$\hat{C}_p = \frac{Volumen(Region\ Tolerancia)}{Volumen(Region\ Control\ 99,73\ \%)} = \frac{\prod_{i=1}^v (LSE_i - LIE_i)}{|S|^{1/2} (\pi * K)^{v/2} [\Gamma(v/2 + 1)]^{-1}} \quad (7)$$

$$\hat{D} = [1 + \frac{n}{n+1} (\vec{X} - \vec{\mu})^T S_{-1} (\vec{X} - \vec{\mu})]^{1/2} \quad (8)$$

K representa al percentil 0,0027 de una distribución χ^2 con v grados de libertad, $|S|$ es el determinante de la matriz de varianzas-covarianzas estimada por los datos y n es el número de datos. Cuando el vector de la media del proceso es igual al vector objetivo, y el índice es 1, el 99,73 % de los valores del proceso se encuentran dentro de la región de tolerancia modificada.

El numerador $\hat{C}_p$ cuantifica la variabilidad de la región del proceso comparada con la región de especificación y se interpreta de manera análoga al índice de capacidad univariado, esto es, si este valor es mayor a uno indica que el proceso tiene una menor variabilidad comparada con la establecida en la región de tolerancia, bajo cierto nivel de confianza, lo cual es indicio de buena capacidad; el denominador $\hat{D}$ es la medida de proximidad entre la media del proceso y el vector objetivo, como criterio de decisión se tiene que si $1/\hat{D}$, es cercano a 1 los dos vectores son cercanos, lo cual se traduce en buena capacidad del proceso.

Criterio de decisión:

TABLA 3: Criterio de decisión del índice MCpm

$\hat{C}_p > 1$	$0 < 1/\hat{D} < 1$
El proceso tiene una menor variación a la establecida en la región de tolerancia.	Mide el grado de cercanía entre el vector promedio del proceso y el vector objetivo establecido; un valor cercano a 1 indica que estos dos vectores son cercanos.

Si el índice MC_{pm} es mayor a 1, se considera que el proceso es capaz.

5.4.2.3. Vector de Capacidad de Procesos Multivariados (VCPM) :

Este índice fue propuesto por Shahriari, Hubele and Lawrence en 1995, basado en la idea original de Hubele, Shahriari y Cheng en 1991. Este vector consiste en tres componentes, dos de ellas usan el supuesto de que los datos del procesos provienen de una distribución normal multivariada con región del proceso elípsoidal. La tercera componente es basada en un región de tolerancia geométrica en relación con las especificaciones.

Las tres componentes se definen como:

$$[C_{pm}, PV, LI]$$

Primera Componente: Cpm

Esta primer componente del vector es la razón entre dos áreas o volúmenes, análoga al utilizado en el índice univariado Cp. El numerador es el área (bivariado) o volumen (multiva-

riado) definido por la región de aceptación. El denominador es el área o volumen de la región del proceso modificada. Esta componente es definida como:

$$C_{pm} = \left(\frac{vol.regin.tolerancia}{vol.proceso.modificada} \right)^{1/v} \quad (9)$$

donde, v es el número de variables (dimensiones) en el proceso.

El método forma una región del proceso modificada dibujando el rectángulo más pequeño alrededor de la elipse. Los bordes del rectángulo son definidos como los límites inferiores del proceso y los límites superiores del proceso (LCI_i y LCS_i respectivamente, donde $i = 1, 2, \dots, v$) y son determinados por resolver el sistema de ecuaciones de la primera derivada, con respecto a cada x_i , de la forma cuadrática:

$$(\vec{X} - \vec{\mu})^T \Sigma (\vec{X} - \vec{\mu}) = \chi_{v,\alpha}^2 \quad (10)$$

Cuando los datos del proceso provienen de una distribución normal multivariada, la distribución del estadístico sigue una distribución chi-cuadrado χ^2 . Las dos soluciones para la ecuación anterior, nos proporciona los límites inferior y superior:

$$LCS_i = \mu_i + \sqrt{\frac{\chi_{v,\alpha}^2 * det(\Sigma_i^{-1})}{det(\Sigma^{-1})}} \quad (11)$$

$$LCI_i = \mu_i - \sqrt{\frac{\chi_{v,\alpha}^2 * det(\Sigma_i^{-1})}{det(\Sigma^{-1})}} \quad (12)$$

donde, $i = 1, 2, \dots, v$, $\chi_{v,\alpha}^2$ es el percentil $100 * (\alpha) \%$ de una distribución chi-cuadrado con v grados de libertad, y el $det(\sigma_i^{-1})$ es el determinante de σ_i^{-1} eliminando la i -ésima fila y columna.

Reemplazando por los límites correspondientes, el índice queda expresado como:

$$C_{pm} = \left[\frac{\prod_{i=1}^v (LSE_i - LIE_i)}{\prod_{i=1}^v (LSC_i - LIC_i)} \right] \quad (13)$$

y finalmente, reemplazando los límites de control, se obtiene:

$$Cpm = \left[\frac{\prod_{i=1}^v (LSE_i - LIE_i)}{\prod_{i=1}^v \left(\sqrt{\frac{\chi_{v,\alpha}^2 * \det(\Sigma_i^{-1})}{\det(\Sigma^{-1})}} \right)} \right] \quad (14)$$

Un valor del índice mayor que 1 traduce que el proceso tienen menor variación que la región formada por los límites de especificación, lo cual indica que el proceso es capaz.

Segunda Componente: PV

La segunda componente del vector es basada en el supuesto de que el valor central de las especificaciones y el valor central del proceso son iguales. Por lo cual, se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \vec{\mu} = \vec{\mu}_0$$

$$H_1 : \vec{\mu} \neq \vec{\mu}_0$$

La componente PV está definida como:

$$PV = P(T^2 > T_{obs}^2) \quad (15)$$

$$PV = P\left(T^2 > \frac{v(n-1)}{n-v} F_{v,n-v}\right) \quad (16)$$

donde, $F_{v,n-v}$ es la distribución F de Snedecor con v y $n - v$ grados de libertad.

Cuando PV es cercano a cero, el centro del proceso observado no es cercano al centro de la región formada por los límites de especificación. Si se desea evaluar la capacidad del proceso con respecto a esta componente, se debe proporcionar un nivel de significancia α . Si $PV > \alpha$, esta componente indicaría que el proceso es capaz, con respecto a la localización de su centro.

Tercera Componente: LI

La tercera componente del vector compara la localización de la región del proceso modificada y la región de tolerancia.

$$LI = \text{Min} \left(\frac{LSE_i - LIE_i}{|LSC_i - LIE_i|}, \frac{LSE_i - LIE_i}{|LIC_i - LSE_i|}; i = 1, 2, \dots, v \right) \quad (17)$$

$$LI = \begin{cases} 1, & \text{la región del proceso modificada esta contenida en la región de tolerancia.} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

5.4.2.4. Nuevo Vector de Capacidad de Procesos Multivariados(NVCPM) Este índice de capacidad fue propuesto por Shahriari y Abdollahzadeh en 2009. Este consta de un vector con tres componentes:

$$NVCPM = [NMCpm, PV, LI] \quad (18)$$

Primer componente:NMCpm

Esta componente es una modificación realizada al índice de capacidad MCpm de Taam (1993), ya que en este se ignoró la estructura de varianzas-covarianzas en la región de tolerancia modificada, dejando por fuera la estructura de correlación y subestimando el índice MCpm.

En esta componente se modifico la región de tolerancia haciendola más grande y centrándola en la media objetivo con sus ejes paralelos a los ejes del proceso elipsoidal y manteniendola contenida en la región de tolerancia.

La nueva región de tolerancia elipsoidal está definida como:

$$(\vec{X} - \vec{\mu})^T (k\Sigma)^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu}) \leq c^2 \quad (19)$$

o

$$(\vec{X} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu}) \leq kc^2 = c'^2 \quad (20)$$

donde, k , c y c' son constantes.

La constante c' puede ser definida usando el procedimiento de Shahriari (1995) o Hardle y Simar (2007):

$$c' = \min(c_1, c_2, \dots, c_v) \quad (21)$$

$$c' = \min \left[\min \left(\frac{LCS_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}}, \frac{\mu_i - LCI_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \right), i = 1, 2, \dots, v \right] \quad (22)$$

σ_{ii} es la varianza de la i -ésima característica de calidad. Está es un elemento de la diagonal de la matriz de varianzas-covarianzas localizado en la fila i y columna i .

El volumen de la región de tolerancia elipsoidal es:

$$Vol(RegtoleranciaM) = \frac{2}{v} \Pi^{\frac{v}{2}} \Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \left| \sum \right|^{\frac{1}{2}} c'^v \quad (23)$$

Finalmente, el Nuevo Índice de Capacidad de Procesos Multivariados NMCpm se define entonces como la región de tolerancia elipsoidal modificada (R_1) y la region del proceso (R_2).

$$NMCpm = \left(\frac{Vol(R_1)}{Vol(R_2)} \right)^{\frac{1}{v}} \times D \quad (24)$$

$$NMCpm = \left(\frac{2(Pi^{v/2})/v\Gamma(v/2)|\Sigma|^{1/2}(c')^2}{2(Pi)^{v/2}/v\Gamma(v/2)|\Sigma|^{1/2}(x^2(0.05, v))^{v/2}} \right)^{1/v} \times D \quad (25)$$

$$NMCpm = \frac{c'}{\sqrt{\chi_{0.0027, v}^2}} \times D \quad (26)$$

El índice $\widehat{NMCpm}$ es estimado como:

$$NMCpm = \frac{c'}{\sqrt{\chi_{0.0027, v}^2}} \times \widehat{D} \quad (27)$$

donde,

$$\widehat{c'} = \min \left(\frac{LCS_i - \mu_i}{\sqrt{s_{ii}}}, i = 1, 2, \dots, v \right) \quad (28)$$

donde, s_{ii} es el elemento diagonal de la matriz de varianza-covarianza localizado en la fila i y columna i estimando σ_{ii} , $\frac{c'}{\sqrt{\chi(0,0027,v)}}$ que mide la variabilidad del proceso y D mide la desviación del centro del proceso desde la media objetivo. Este es definido como:

$$D = [1 + \vec{X} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu})]^{-1/2} \quad (29)$$

y su estimación es:

$$\hat{D} = \left[1 + \frac{n}{n+1} (\vec{X} - \vec{\mu})^T S^{-1} (\vec{X} - \vec{\mu}) \right]^{-1/2} \quad (30)$$

Las restantes dos componentes, se definen igual que en el Vector de Capacidad de Procesos Multivaridos de Taam et al. (1993).

En la siguiente tabla se presentan los criterios de decisión de cada una de las componentes del vector.

TABLA 4: Criterios de decisión del NVCPM

$\hat{C}_{pm} > 1$	$PV > 0.05$	$LI > 1$
El volumen de la región de tolerancia es superior al volumen conformado por la región de control.	El centro del proceso es cercano al valor central de la región de tolerancia.	La región del proceso modificada está comprendida dentro de la región de tolerancia.

5.4.2.5. Índice de Capacidad MCP :

Índice de Capacidad propuesto por Wang y Du en 2000 para procesos que siguen una distribución normal multivariante. Está basado en la técnica de Análisis de Componentes Principales (ACP), que es un método estadístico para el análisis de datos multivariados que se puede utilizar para reducir el conjunto de datos que se trate.

Este método transforma el número de variables originales de medición en un conjunto de funciones lineales no correlacionadas. Sus objetivos generales son la reducción de datos para facilitar los cálculos y las interpretaciones.

El Análisis de Componentes Principales (ACP) asume que X es una matriz de datos $m \times n$, donde m es el número de características de calidad y n presenta el número total de mediciones

realizadas al proceso. $\bar{X}$ representa la media muestral de las observaciones, que es un m -vector, S , es una matriz simétrica no singular de $m \times m$, que representa la matriz de varianzas-covarianzas de las observaciones y los límites de especificación LES y LEI son m -vectores.

Adicionalmente, la descomposición espectral puede usarse para obtener $D = U^T S U$, donde D es una matriz diagonal. La diagonal de los elementos de D , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son los valores propios de S y las columnas de U , $u_1, u_2, \dots, u_m$ son los vectores propios de S . Por lo tanto, la i -ésima componente principal (PC_i) es:

$$PC_i = u_i^T x, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (31)$$

donde x son vectores $m \times 1$ de las observaciones en las variables originales. Los límites de especificación de PC_{is} son:

$$LES_{PC_i} = u_i^T LES \quad (32)$$

$$LEI_{pci} = u_i^T LEI \quad (33)$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$.

En consecuencia, las nuevas variables (componentes principales) son mutuamente independientes y se distribuyen normalmente. Para la elección del número de componentes principales se aplica el concepto de tomar las componentes que recogen el 80 – 90 % de la variabilidad.

La capacidad estimada de los datos multivariantes con este índice puede ser simplemente determinada por la siguiente ecuación:

$$MCP = \left(\prod_{i=1}^m \hat{C}_{p;PC_i} \right)^{1/m} \quad (34)$$

donde $\hat{C}P; PC_i = (LES_{PC_i} - LEI_{PC_i}) / 6S_{PC_i}^2$ representa la estimación de la medida univariada del proceso para la i -ésima componente principal y $S_{PC_i}^2$ es la varianza las componentes principales, es decir, las raíces cuadradas de los valores propios de la matriz de varianzas-covarianzas.

Criterio de decisión: Si el índice MCP es mayor a 1, se considera que el proceso es capaz.

5.4.2.6. Índice de Capacidad MCPC :

Este índice también fue propuesto por Wang y Du en el 2000 y se basa al igual que el índice MCp (para procesos normales) en el Análisis de Componentes Principales (ACP) y no tiene el supuesto de normalidad. Por lo tanto, la capacidad estimada para este tipo de datos puede ser determinada simplemente por la siguiente ecuación:

$$M\hat{C}PC = \left(\prod_{i=1}^m \hat{C}_{pc;PCi} \right)^{1/m} \quad (35)$$

donde $\hat{C}_{pc;PCi} = (LES_{PCi} - LEI_{PCi})/6\sqrt{\pi/2\bar{c}}$ representa la estimación de la medida univariada de procesos no normales para la i -ésima componente principal y $\bar{c}$ se define como:

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\| PCi_j - \frac{LES_{PCi} + LEI_{PCi}}{2} \right\| \quad (36)$$

Criterio de decisión: Si el índice $MCPC$ es mayor a 1, se considera que el proceso es capaz.

6. Metodología

A continuación, se presentará la metodología para este trabajo, en primer lugar se explican los escenarios planteados a utilizar y se parte de algunos escenarios específicos llamados Bases, que son aquellos que no tienen ninguna modificación, el tipo de distribución que se simula son asimétricas y simétricas, debido a que no en todos los casos reales los procesos tienen una distribución normal, así que se plantea una forma de generar procesos que no cumplen con esta condición. El número de variables que se toman son 2 y 3, porque corresponde al número de variables que más se utilizan en la práctica. Si se tiene en cuenta más de una variable es necesario definir el nivel de relación existente entre ellas por medio de las matrices de correlación, con cuatro diferentes niveles que se determinan como nula, débil, media y fuerte. Por último, se explica la manera en la que evalúan los índices, mediante un criterio que determina el diagnóstico de capacidad. Las especificaciones de lo mencionado anteriormente se presentan a continuación:

6.1. Generación de procesos

La generación de los procesos se realiza por medio de Simulación, ya que permite reproducir procesos reales con parámetros de centramiento y variabilidad a elección de los investigadores. Teniendo en cuenta lo anterior, se simulan procesos multivariados con dos y tres características de calidad bajo dos distribuciones: Distribución Normal Multivariada y Distribución Asimétrica Multivariada.

Los procesos bajo una distribución **Normal Multivariada** se generan utilizando la función *mvrnorm* de la librería *MASS* del software estadístico R con los parámetros antes propuestos.

Los procesos bajo una Distribución **Asimétrica Multivariada**, se generan de acuerdo con el modelo propuesto por Lenis & Ospina, 2010 debido a que es una propuesta que se encuentra en los antecedentes encontrados para este proyecto. El modelo que consiste en:

1. Generar una variable X_1 con distribución gamma
2. Generar una variable X_2 con una combinación lineal de X_1 más una perturbación aleatoria ϵ con distribución exponencial.
3. Generar una variable X_3 con una combinación lineal de X_1 y X_2 , adicionando una perturbación aleatoria w con distribución exponencial.

Matemáticamente, el modelo se vería expresado de la siguiente forma:

$$X_1 \tag{37}$$

$$X_2 = aX_1 + \epsilon \tag{38}$$

$$X_3 = bX_1 + cX_2 + w \tag{39}$$

La variable X_1 es generada de forma independiente a través de una distribución gamma con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ en función de la media y la varianza ($\mu_{x1} = 1, \sigma_{x1}^2 = 1$) de forma que los parámetros se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{\mu_{X_1}^2}{\sigma_{X_1}^2} \quad \beta = \frac{\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}^2} \tag{40}$$

De esta manera, se tiene para $\mu_{X_1} = \sigma_{X_1}^2 = 1$, para parámetros de forma $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. La variable X_2 está en función de la variable X_1 por un coeficiente a que configura el nivel de correlación. La perturbación aleatoria ϵ sigue una distribución exponencial con parámetro $\theta = 1$. De igual forma la variable X_3 está en función de X_1 y X_2 por los coeficientes b y c respectivamente, los cuales configuran el nivel de correlación. La perturbación aleatoria w también sigue una distribución exponencial con $\theta = 1$. De esta forma se tiene que $\mu_{X_1} = \mu_{X_\epsilon} = \mu_{X_w} = 1$ y $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_\epsilon} = \sigma_{X_w} = 1$. Debido a que las variables aleatorias X_1 , ϵ y w son cada una generadas de forma independiente, se tiene que $Cov(X_1, \epsilon) = Cov(X_1, w) = Cov(\epsilon, w) = 0$.

Teniendo definidas cada una de las variables y sus respectivas distribuciones se prosigue a estandarizarlas. Estas variables estandarizadas conformaron las variables de nuestros procesos bajo control sin normalidad. Para esto se necesita las medias y las varianzas de las variables X_2 y X_3 que son:

$$E(X_1) = 1 \tag{41}$$

$$E(X_2) = a + 1 \tag{42}$$

$$E(X_3) = b + c(a + 1) + 1 \tag{43}$$

$$V(X_1) = 1 \quad (44)$$

$$V(X_2) = a^2 + 1 \quad (45)$$

$$V(X_3) = b^2 * + (c * a)^2 + c^2 + 1 \quad (46)$$

Cada una de las variables se estandariza de la siguiente forma:

$$Z_i = \frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{Var(X_i)}} \quad (47)$$

Entonces, ahora se obtiene las variables Z_1, Z_2, Z_3 que conforman los datos bajo control sin normalidad, cuyo vector de medias es $\vec{\mu} = [0, 0, 0]$ y su matriz de varianzas y covarianzas esta dada por:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & \frac{\frac{ac+b}{\sqrt{(ac+b)^2+c^2+1}}}{\frac{c(a^2+1)+ab}{\sqrt{(c(a^2+1)+ab)^2+a^2+b^2+1}}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 1 & \frac{\frac{ac+b}{\sqrt{(ac+b)^2+c^2+1}}}{\frac{c(a^2+1)+ab}{\sqrt{(c(a^2+1)+ab)^2+a^2+b^2+1}}} \\ \frac{\frac{ac+b}{\sqrt{(ac+b)^2+c^2+1}}}{\frac{c(a^2+1)+ab}{\sqrt{(c(a^2+1)+ab)^2+a^2+b^2+1}}} & \frac{c(a^2+1)+ab}{\sqrt{(c(a^2+1)+ab)^2+a^2+b^2+1}} & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

De esta forma se garantiza que las variables son generadas de forma estandarizada, además de la relación de las variables por medio de los coeficientes a, b y c , para determinar los valores de estos coeficientes dependen del nivel de correlación especificado, por medio de cálculos matemáticos se despejan las constantes. Se debe tener en cuenta que debido a la estandarización la matriz de correlaciones y la matriz de varianzas y covarianzas es la misma.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Con la anterior matriz se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\rho_{12} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \rho_{13} = \frac{ac+b}{\sqrt{(ac+b)^2+c^2+1}} \rho_{23} = \frac{c(a^2+1)+ab}{\sqrt{(c(a^2+1)+ab)^2+a^2+b^2+1}} \quad (49)$$

Despejando la primera ecuación correspondiente a un nivel de correlación, se obtiene el primer coeficiente y con ese valor encontrado se despeja la segunda ecuación y así se despejan los coeficientes de acuerdo al nivel de correlación que se desea.

La forma en la que se cambia el centramiento y la variabilidad en el caso de tener una distribución asimétrica, en el caso de k se suma la primera variable X_1 cuando ya se encuentra estandarizada, pero debido a la forma en la que se produjo la distribución asimétrica la suma de este valor k para la primera variable k afectará a las demás variables porque son combinaciones lineales de las demás, pero este punto no afecta al objetivo de obtener una distribución asimétrica, en el caso de la variabilidad λ todas las variables se ven afectadas por el mismo motivo anterior, lo que se hace en este caso es cambiar el valor de la varianza de la distribución gamma de la primera variable.

6.2. Caracterización de los procesos

En primer lugar, se tienen los procesos Base que corresponden a los cuatro niveles de correlación bajo dos tipos de distribución (Normal y No Normal), a partir de estos se empiezan a cambiar los procesos en sus diferentes parámetros de centramiento y variabilidad.

Para determinar los niveles de asociación o correlación que se emplean en la generación de los procesos, se utiliza el criterio del determinante de la matriz de varianzas-covarianzas, donde un determinante de valor bajo indica una alta correlación entre las variables y un determinante de alto valor, indica una baja correlación entre ellas, por tanto se define que si el determinante se encuentra entre 0,70 a 0,90, la correlación es débil, valores entre 0,30 a 0,69 la correlación es media, valores entre 0 a 0,29 la correlación es fuerte. Para este proyecto se tendrán en cuenta estos cuatro niveles de correlación, tanto para los procesos de dos variables como de tres variables. Las matrices de varianzas-covarianzas encontradas, se muestran en la (Tabla 5).

En la Tabla 6, se puede observar que está involucrado el parámetro λ que corresponde a cambios en la variabilidad, este (λ) sólo se encuentra en la primera variable dentro de la matriz de varianzas-covarianzas en cada uno de los diferentes niveles de correlación. Por otro lado, se tiene el parámetro k que corresponde a los cambios en centramiento que sólo se involucra en la primera variable.

Se definen los procesos capaces y no capaces, teniendo como criterio de capacidad el Porcentaje de Defectuosos (Pd). Siendo capaces aquellos procesos que tienen un $Pd \leq 0,027\%$ y como no capaces, los que tienen $Pd > 0,027\%$, este valor corresponde a la regla de calidad 6σ , que consiste en que un proceso solo permite un porcentaje de defectuosos de $0,027\%$, de acuerdo con los límites de especificación que son el criterio que el mercado o los clientes estipulan para aceptar determinado producto.

TABLA 5: Escenarios para simulacion de procesos capaces

Parámetro	2 Variables			
Σ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.70 \\ 0.70 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.90 \\ 0.90 & 1 \end{pmatrix}$
$\det(\lambda = 1)$	1	0.94	0.51	0.19
Nivel de Correlación	Nula	Débil	Media	Fuerte
Parámetro	3 Variables			
Σ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.26 \\ 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.26 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.48 \\ 0.50 & 1 & 0.50 \\ 0.48 & 0.50 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.88 & 0.86 \\ 0.88 & 1 & 0.85 \\ 0.86 & 0.85 & 1 \end{pmatrix}$
$\det(\lambda = 1)$	1	0.84	0.51	0.05
Nivel de Correlación	Nula	Débil	Media	Fuerte

TABLA 6: Escenarios para simulación para procesos alterados

Parámetro	2 Variables			
Σ	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0.70 \\ 0.70 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0.90 \\ 0.90 & 1 \end{pmatrix}$
Nivel de Correlación	Nula	Débil	Media	Fuerte
Parámetro	3 Variables			
Σ	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0.25 & 0.26 \\ 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.26 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0.50 & 0.48 \\ 0.50 & 1 & 0.50 \\ 0.48 & 0.50 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0.88 & 0.86 \\ 0.88 & 1 & 0.85 \\ 0.86 & 0.85 & 1 \end{pmatrix}$
Nivel de Correlación	Nula	Débil	Media	Fuerte

La función *pmvnorm* de la librería *mvtnorm* del software R, que calcula la función de distribución normal multivariante para límites arbitrarios y matrices de correlación con un vector de medias ($\mu = (0, 0)$) y una matriz de varianzas-covarianzas Σ de ceros con una diagonal de unos, esta función arroja un resultado que corresponde al porcentaje de defectuosos Pd , que es un porcentaje de puntos por fuera de los límites de especificación utilizando como herramienta para determinar la capacidad de los procesos normales. Esta función es utilizada para dos puntos importantes: encontrar los límites de especificación adecuados para cada uno de los niveles de correlación y determinar los procesos capaces solo bajo normalidad. Para definir los límites de especificación (LE) esta función tiene como parámetros los límites arbitrarios, de los cuales se parte para comenzar a variar los límites hasta que el resultado de esta función arroje el valor Pd cercano a 0.027 %.

En la Tabla 7 se encuentran los límites de especificación, que son los resultados obtenidos con la función para los diferentes niveles de correlación en el caso de dos variables y en la Tabla 8 cuando se tienen procesos de tres variables. (LEI= Límites de especificacion inferior y LES=Límite de especificación superior) para el caso de una distribución simétrica.

TABLA 7: Límites de Especificación para procesos de 2 variables bajo normalidad

Niveles de Correlación	LEI	LES
Nula	-3.20	3.20
Débil	-3.20	3.20
Media	-3.18	3.18
Fuerte	-3.13	3.13

TABLA 8: Límites de Especificación para procesos de 3 variables bajo normalidad

Niveles de Correlación	LEI	LES
Nula	-3.3189	3.3189
Débil	-3.3171	3.3171
Media	-3.3162	3.3162
Fuerte	-3.2324	3.2324

Los límites de especificación para una distribución Asimétrica se realiza por medio de la generación de este tipo de números para procesos con dos y tres variables, por medio de un código que cuenta el número de veces en el que cada uno de los puntos se salen de los límites impuestos previamente, según los gráficos de estos puntos y como en el caso de una distribución simétrica se empieza a variar estos límites hasta obtener un porcentaje menor al 0.027% de los puntos se salen de estos límites. En la (Tabla 9) se encuentran los límites de especificación para procesos de dos variables y en la (Tabla 10) para el caso de tres variables dependiendo de los niveles de correlación.

Las alteraciones de los parámetros para afectar los procesos se realizan por separado para detectar con mayor facilidad la influencia que estos tienen en sus resultados. En la (Tabla 11) se encuentra el parámetro k y los respectivos valores que toma para alterar el centramiento y el valor de λ está fijo en 1. Además, se encuentra el parámetro λ correspondiente a los valores que toma para alterar la variabilidad y k es fijo con un valor de $k = 0$.

TABLA 9: Límites de Especificación para procesos de 2 variables bajo no normales

Niveles de Correlación	LEI	LES
Nula	-1	5.2
Débil	-1.4	4.9
Media	-1.7	4.9
Fuerte	-1.7	4.9

TABLA 10: Límites de Especificación para procesos de 3 variables bajo no normalidad

Niveles de Correlación	LEI	LES
Nula	- 1	6
Débil	-2	5
Media	-2	6
Fuerte	-2	6

Como ya se ha mencionado anteriormente las alteraciones en los parámetros de centramiento y variabilidad, se aplican individualmente para cada uno de los niveles de correlación, esto con el fin de observar con mayor facilidad las consecuencias que se obtienen al hacer cada alteración. Lo anterior, aplica tanto para procesos con distribución normal multivariada como para procesos con distribución asimétrica multivariada.

En la Figura 2, se observa el comportamiento de 1000 procesos simulados con una Distribución Normal Multivariada y en la Figura 3 se observa el comportamiento de 1000 procesos simulados con una Distribución No Normal Multivariada, afectados por los niveles de correlación Nula, Débil, Medio y Fuerte.

TABLA 11: Alteraciones en Centramiento y Variabilidad

Parametros	Alteraciones
Cambios en centramiento k	0,0.1,0.2,0.3,0.4,...,2
Cambios en varibilidad λ	0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,...,2

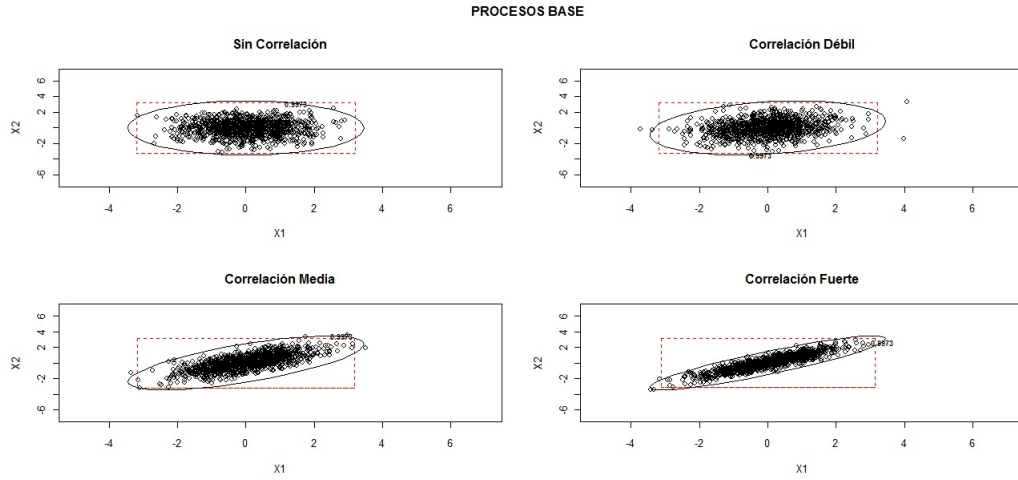


FIGURA 2: Procesos Normales Base de 2 variables con diferentes niveles de correlación

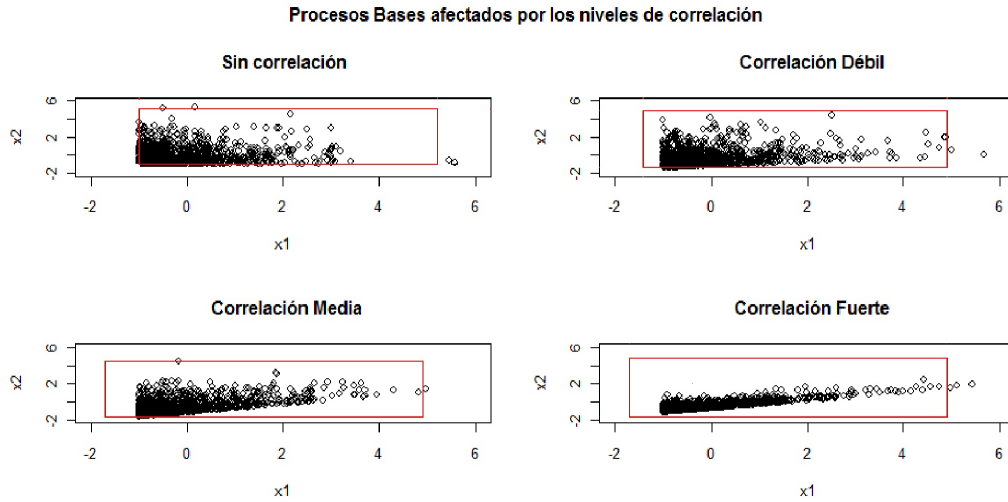


FIGURA 3: Procesos no Normales Base de 2 variables con diferentes niveles de correlación

6.3. Simulación para la estandarización del número de Componentes Principales de los Índices de Capacidad MCP y MCPC

Para la implementación de los índices MCP y MCPC es necesario aplicar la técnica multivariada de Análisis de Componentes Principales, la cual requiere que sean asignadas un número de componentes para realizar sus respectivos cálculos.

Para determinar el número de componente a usar, se aplica el criterio de escoger aquellas que recogen la mayoría de la variabilidad (más 80 %), como estos índices deben simularse en muchas oportunidades y no se tiene una función en el software R que elija automáticamente en cada simulación el número adecuado de componentes con este criterio, se procedió a realizar una simulación que permitiera conocer previamente el número de componentes principales a elegir.

En la simulación se realizaron 1000 Análisis de Componentes Principales (CP) con procesos normales multivariados y se contó el número de componentes que se eligieron de acuerdo con el criterio de variabilidad para cada una de las veces. Los resultados obtenidos se encuentran relacionados en la (Tabla 12):

TABLA 12: Componentes Principales para Índices MCP y MCPC

	Sin Correlación	Correlación Débil	Correlación Media	Correlación Fuerte
2 variables	2 CP	2 CP	1 CP	1 CP
3 variables	3 CP	2 CP	2 CP	1 CP

6.4. Evaluación de los Índices Multivariados

Como medida de comparación del desempeño de los índices propuestos se realiza un conteo del número de veces en que el índice obtuvo valores superiores a uno, en cada uno de los cambios que se realizan en centramiento y variabilidad, debido a que los procesos simulados conllevarán a procesos no capaces como se presentó anteriormente los resultados de los índices deberán ser menores a uno. Esto con el fin de obtener un valor que se denomina Porcentaje de Diagnóstico de Capacidad (%DC) para cada uno de los índices.

Esto se llevará a cabo generando 1000 veces procesos de tamaño $n = 50$ con ciertas características de centramiento, variabilidad y correlación, que se irán modificando para crear los

diferentes escenarios a evaluar. Inicialmente, la evaluación se empieza modificando la media (k) en las diferentes alteraciones mostradas en la Tabla 11), dejando la varianza de la primera variable del proceso fija con un valor ($\lambda = 1$) para cada nivel de correlación, iniciando el nivel nulo, luego débil y así sucesivamente hasta el nivel fuerte. El mismo procedimiento debe realizarse para variabilidad (λ) donde los cambios a aplicar son mostrados también en la Tabla 11, en este caso, la media debe quedar fija en ($k=0$) en la primera variable del proceso para cada uno de los 4 niveles de correlación manejados (Nulo, Débil, Media y Fuerte). Estas repeticiones de procesos se realizan para cuantificar el porcentaje de diagnóstico de capacidad que tienen los diferentes índices, sí el valor que arroja el índice es igual o superior a 1 se suman y a partir de esto se calcula el porcentaje correspondiente. Lo ideal es que este porcentaje sea grande en los procesos capaces y muy pequeño en procesos no capaces.

El Porcentaje de Diagnóstico de Capacidad ($\%DC$) alcanzado por cada índice. El ($\%DC$) se define como:

$$\%DC_i = \frac{\sum_{j=1}^N I(IC_{ij} \geq 1)}{N} \quad (50)$$

Donde, IC= Índice de Capacidad, N= 1000 Número de veces en el que simula un proceso, $i = 1, \dots, 6$ número de índices evaluados y $j = 1, \dots, N$ corresponde al numero de simulaciones.

La representación gráfica de los resultados obtenidos, se dividen en dos tipos de gráficos: Boxplot, por medio de estos se observa la variabilidad de los valores de los índices en cada uno de los cambios de los parámetros (centramiento y variabilidad) y los cambios en el nivel de correlación. En la Figura 4, se encuentran en la parte superior los Boxplots realizados para un índice que tiene un desempeño ideal, con un nivel correlación. Como se observa en el boxplot para cambios en el centramiento, la primera caja es la única que se encuentra por encima de la línea, debido que este en este caso es el unico proceso capaz ($k=0$). Para el caso de cambios en variabilidad, las primeras cuatro cajas que van de 0.25 a 1, estan por encima de la linea, porque son estos los cambios donde los procesos aun conservan capacidad. Como todos los índices tienen como criterio para definir capacidad que el valor que tome el índice sea igual o mayor a 1, se ha establecido en todas las gráficas una línea horizontal de color rojo para definir esta como un límite de capacidad.

El otro tipo de gráficos a utilizar son los de Diagnóstico de Capacidad que son una representación grafica de la *Formula 50*, en la Figura 4 se encuentran en la parte inferior dos gráficos que corresponden al tipo de cambio realizado (*Centramiento y variabilidad*). Para cambios en el centramiento k . Se espera que el porcentaje que arrojen todos los índices en $k = 0$ sea alto porque este proceso ha sido definido como capaz, de ahí en adelante todos los valores que tome k deben ser juzgados como procesos no capaces, así que el porcentaje debe ser bajo y

la línea de %DC que se traza debe decaer rápidamente a cero. En el caso de los cambios en variabilidad (λ), la línea que se traza para cada porcentaje en todos los índices debe de ser alta hasta que $\lambda \geq 1$ debido a que hasta este cambio los procesos se definen como capaces y despues de ($\lambda=1$) la linea %DC debe descender rápidamente porque los procesos son no capaces. A continuación se observan ejemplos de situaciones ideales de los gráficos anteriormente mencionados, mostrándo como debería ser el comportamiento de los índices:

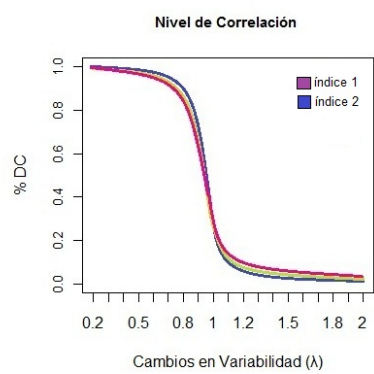
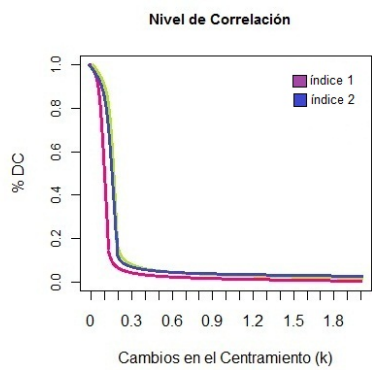
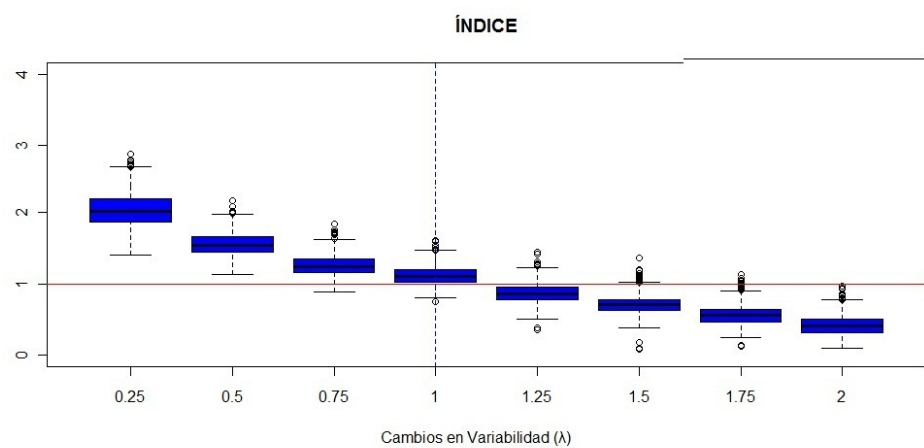
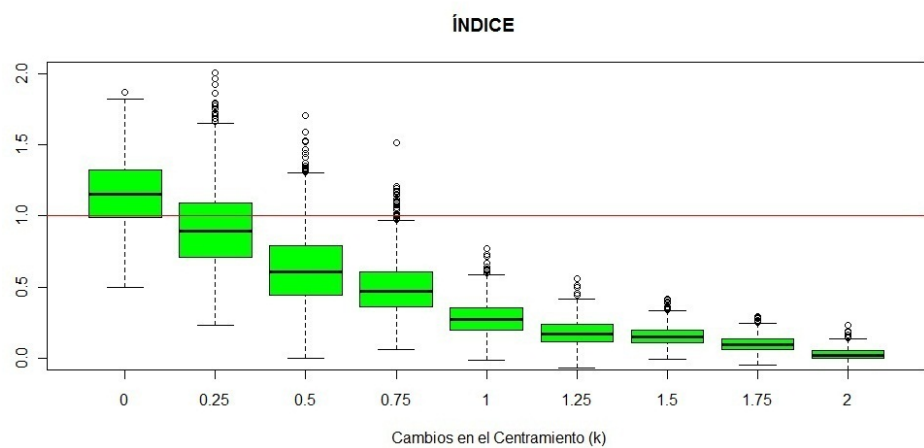


FIGURA 4: Gráficos de Boxplot y %DC ideales

7. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos del cálculo de los Índices de Capacidad Multivariados planteados en la metodología para los diferentes procesos simulados de dos y tres variables con distribución multivariada normal y no normal, cambios en centramiento, variabilidad y niveles de correlación. Es importante aclarar que las diferentes alteraciones tanto de centramiento y variabilidad se aplicaron sólo a la primera variable de cada proceso denominada X_1 , con el propósito de detectar con mayor facilidad el efecto que las alteraciones traen a los resultados.

7.1. Desempeño de los Índices de Capacidad en Procesos Normales y No Normales con dos variables

7.1.1. Índices de Capacidad en Procesos Normales de dos variables

Los procesos implementados en estos índices se generaron bajo una Distribución Normal Multivariada realizando cambios en Centramiento (k), Variabilidad λ y Niveles de Correlación (Nula, Débil, Media y Fuerte). Los resultados obtenidos se presentan a continuación:

Cambios en Centramiento:

En la Figura 5 se observa que ninguno de los índices detecta de manera contundente la capacidad de los procesos capaces, ya que el índice MCPM que es el que tiene mejor diagnóstico presenta valores muy bajos subestimando la capacidad de algunos de los procesos capaces y cometiendo Error Tipo I, al considerar no capacidad en procesos capaces. Para los demás índices el diagnóstico es aun peor, ya que los índices CPM, NMCPM y MCP tienen un comportamiento constante donde no son afectados por ninguno de los cambios y siempre diagnostican no capacidad cometiendo nuevamente Error Tipo I en procesos capaces.

En la Figura 6 se puede observar que el único índice que detecta capacidad correctamente para este tipo de escenario es el índice MCPM, detección que va mejorando con el aumento del nivel de correlación porque diagnostica con mayor precisión la capacidad de los procesos. Esta situación trae consigo la sobrestimación de capacidad (Error Tipo II) para los procesos no capaces cuando los cambios son pequeños. Los índices CPM, NMCPM y MCP tienen un comportamiento constante con valores por debajo de cero que no detectan capacidad en ninguno de los cambios. Finalmente, los índices ECPK, MCPC aunque presentan algún tipo de tendencia decreciente que es la esperada, estos no presentan un buen comportamiento al no detectar la capacidad de los procesos adecuadamente.

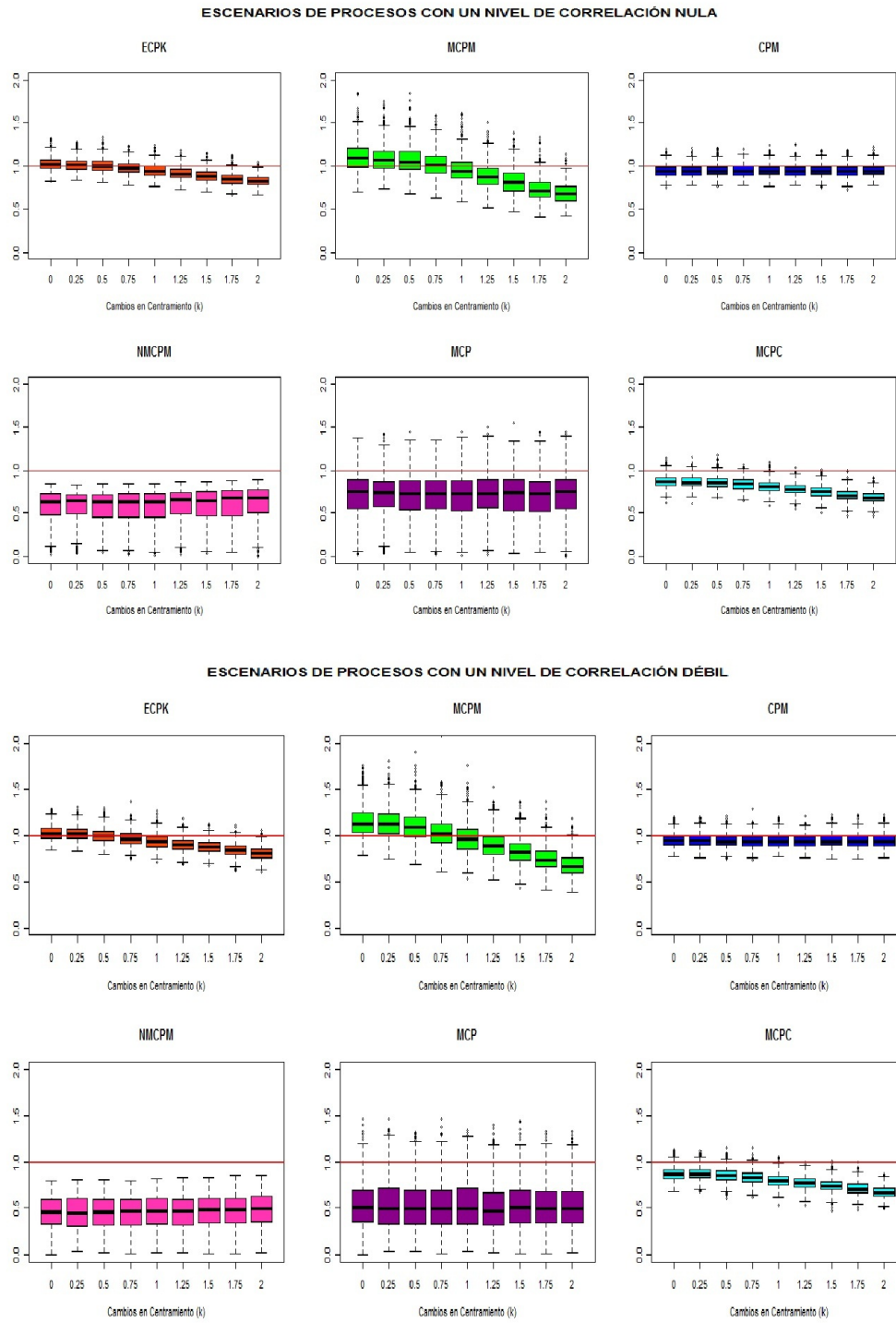
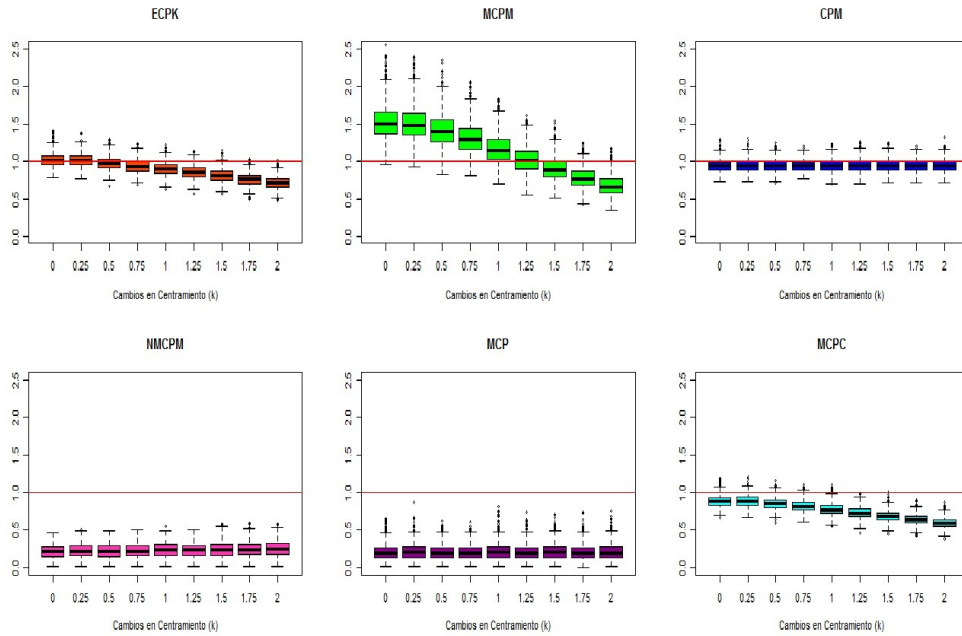


FIGURA 5: Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil

ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN MEDIA



ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN FUERTE

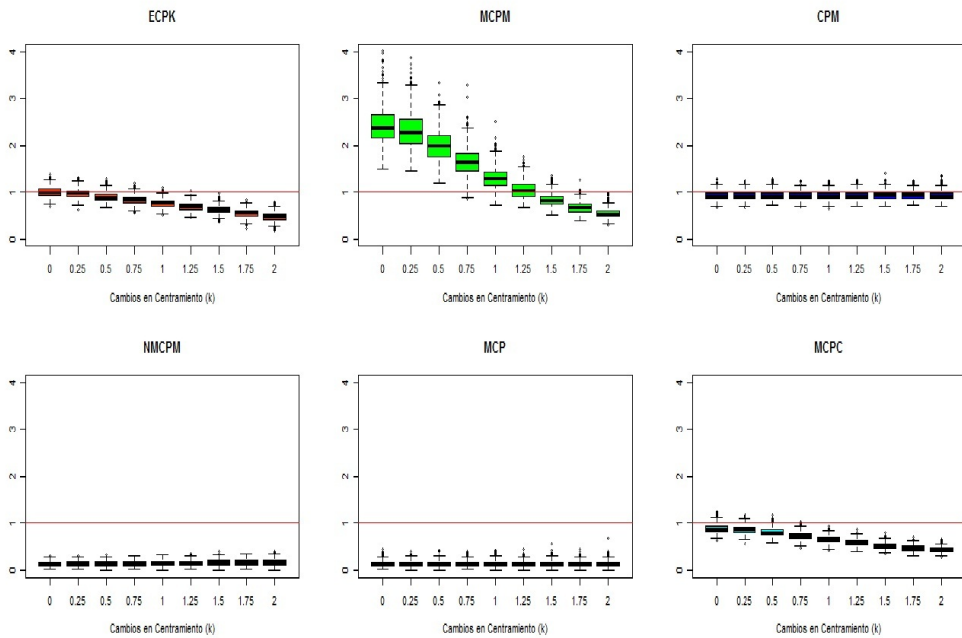
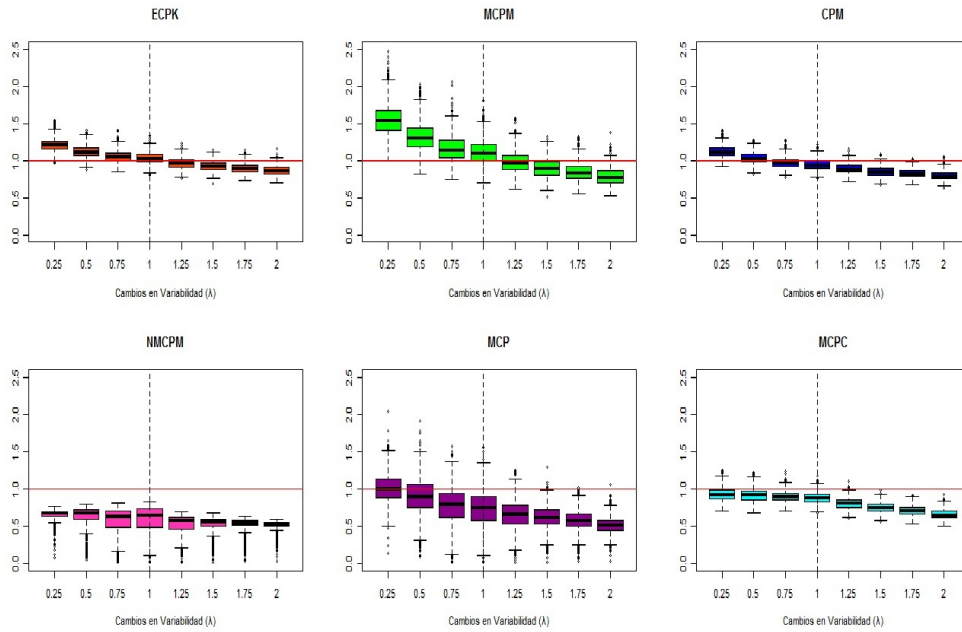


FIGURA 6: Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte

ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN NULA



ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN DÉBIL

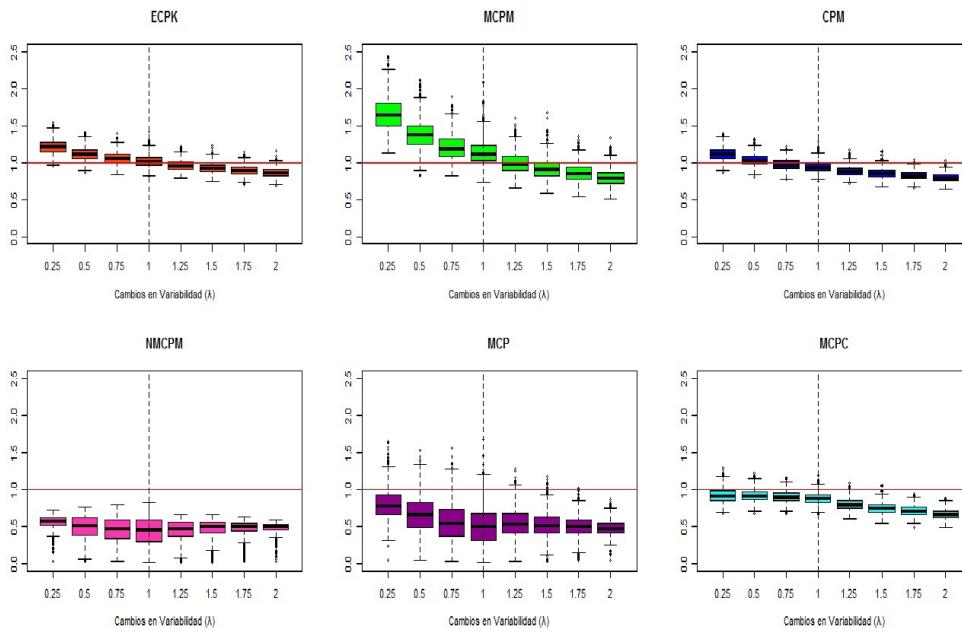


FIGURA 7: Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Nula y Débil

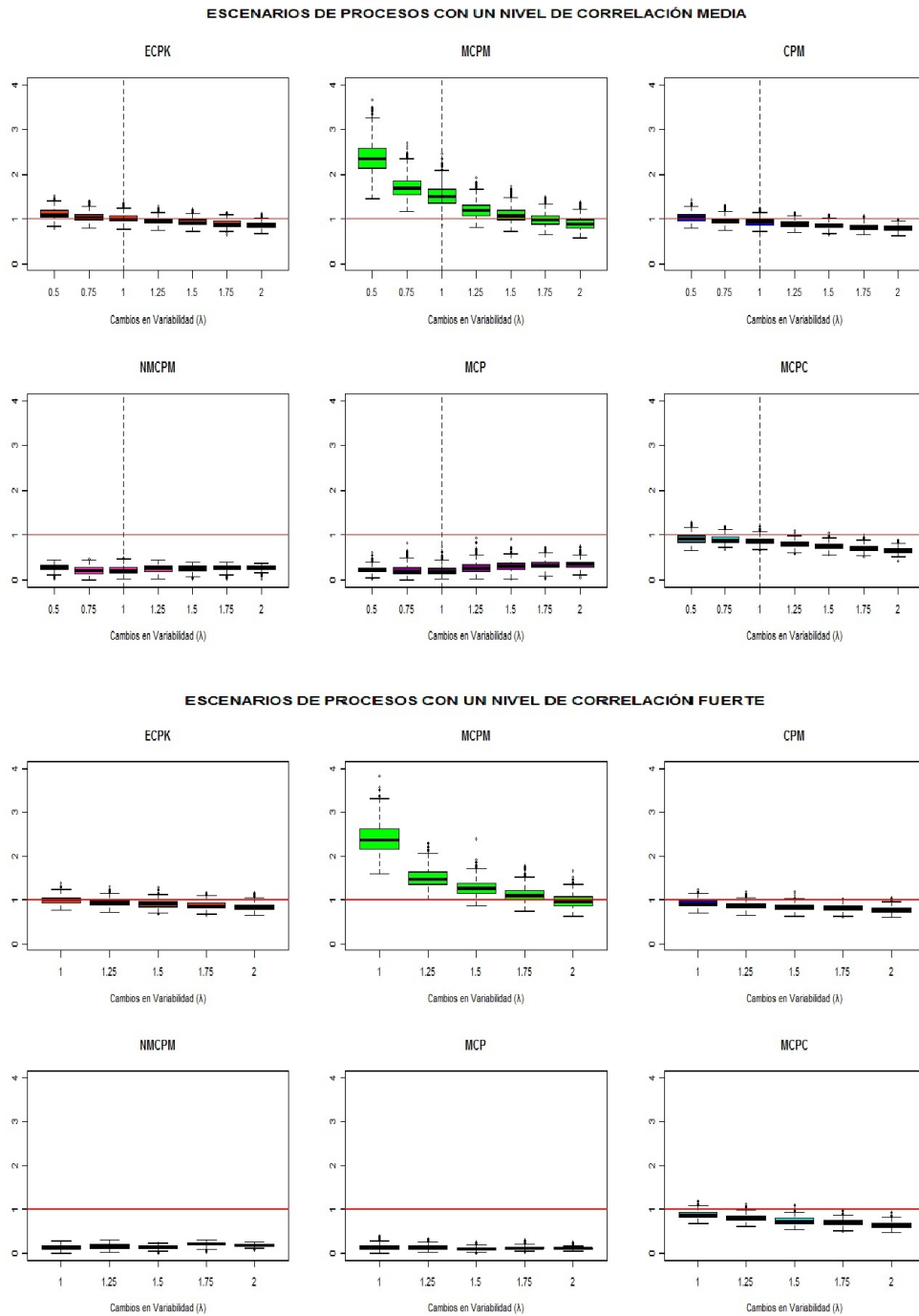


FIGURA 8: Comportamiento de los índices en procesos normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Media y Fuerte

Cambios en Variabilidad:

En la Figura 7 se presenta el mismo comportamiento que para el caso de cambios en centramiento, donde el mejor índice es el MCPM con un acertado diagnóstico de la capacidad de los procesos, el cual mejora al aumentar el nivel de correlación. Esta mejora también viene acompañada de un error, ya que para cambios pequeños después de $\lambda = 1$ el índice no alcanza a detectar que los procesos son no capaces. Los índices ECPK y CPM presentan en cambios pequeños un buen comportamiento al detectar la capacidad, pero no son lo suficientemente contundentes ya que presentan valores muy bajos y cometen el error de diagnosticar algunos de los procesos capaces como no capaces (Error Tipo I), por lo tanto, no son muy confiables para la toma de decisiones. Los demás índices no tienen un buen desempeño porque no detectan apropiadamente la capacidad que tienen los procesos.

En la Figura 8 se observa que el índice con mejor desempeño al diagnosticar capacidad es el MCPM, ya que tienen una tendencia decreciente desde el cambio en variabilidad $\lambda = 0.25$ a $\lambda = 1.0$ con valores por encima de 1.0, que es el comportamiento esperado. Cuando el nivel de correlación aumenta, el índice aunque sigue presentando diagnósticos de capacidad correcta, también va enmascarando algunos procesos no capaces, sobre todo aquellos que tienen cambios muy pequeños a partir del $\lambda = 1.0$. Los demás índices presentan en general un comportamiento constante o una tendencia casi constante al no verse significativamente afectados por los cambios en la variabilidad, además de no detectar correctamente la capacidad de los procesos.

7.1.2. Índices de Capacidad de Procesos No Normales de dos variables

Cambios en Centramiento:

En la Figura 9, se puede apreciar que los índices MCPM y MCPC son los únicos que presentan un porcentaje mas alto en los cambios en centramiento pequeños menores a uno , por el contrario los demás índices no presentan ningún comportamiento en estos cambios son los índices MCP y CPM , los índices ECPK y NMCPM toman valores mayores a uno en los primeros cambios en centramiento pero en porcentajes muy bajos, así que estos índices no son suficientes para determinar la capacidad de los procesos en los primeros cambios en centramiento.

En la Figura 10, Con respecto al nivel de correlación medio, los índices MCPM y MCPC tiene un mejor desempeño, debido que aumentan el número de veces en que toman valores superiores a uno en cambios pequeños en centramiento, cometiendo de esta forma el error tipo II, considerando un proceso capaz cuando no lo es. El índice MCP y CPM no se ven afectados por cambios en centramiento pero si en el aumento de los niveles de correlación, los valores que toman estos índices aumentan en la misma proporción para todos los cambios. Con un nivel de correlación fuerte el único índice que aumenta el número de veces en que arroja un resultado superior a uno es el MCPM.

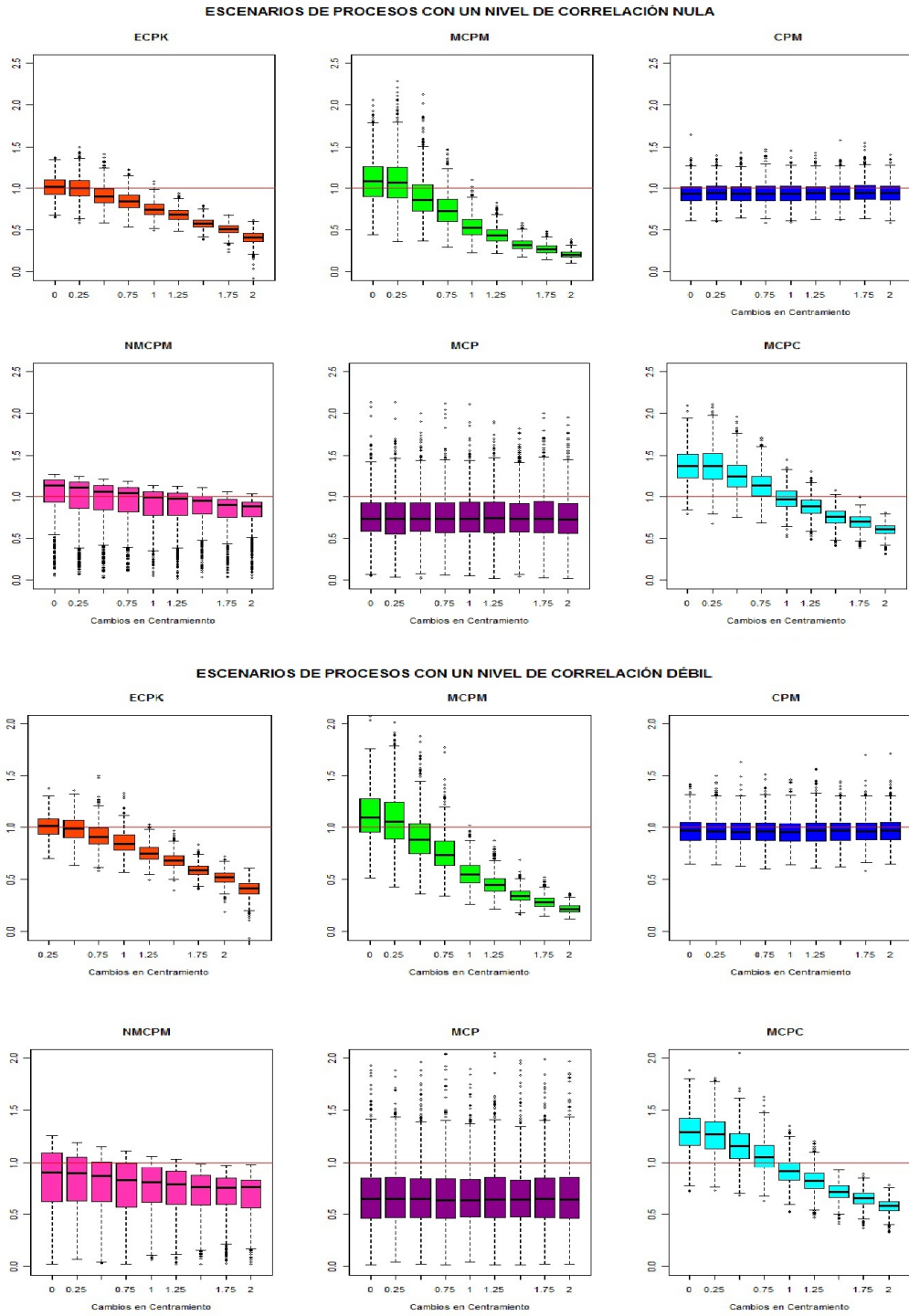


FIGURA 9: Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil

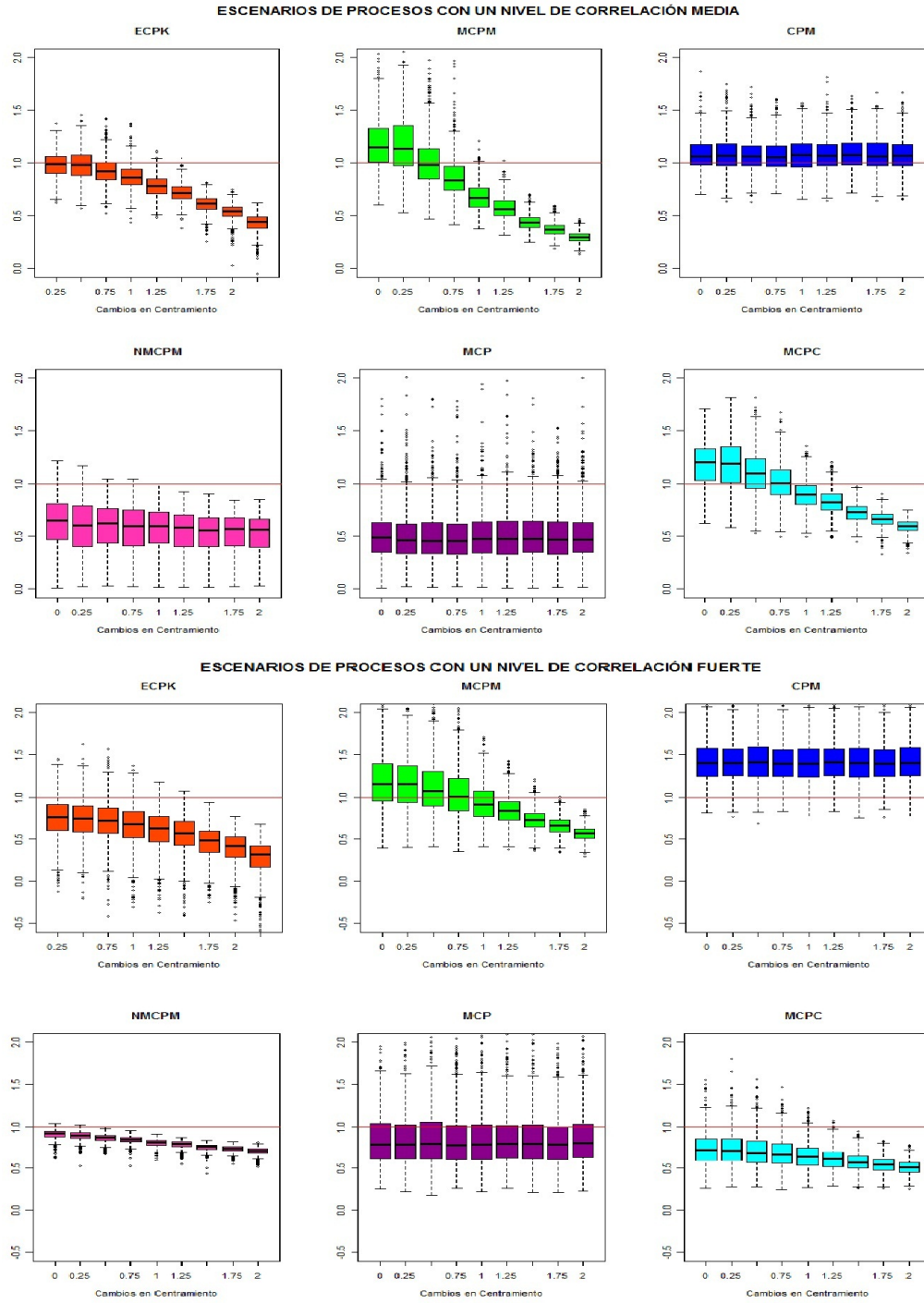


FIGURA 10: Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte

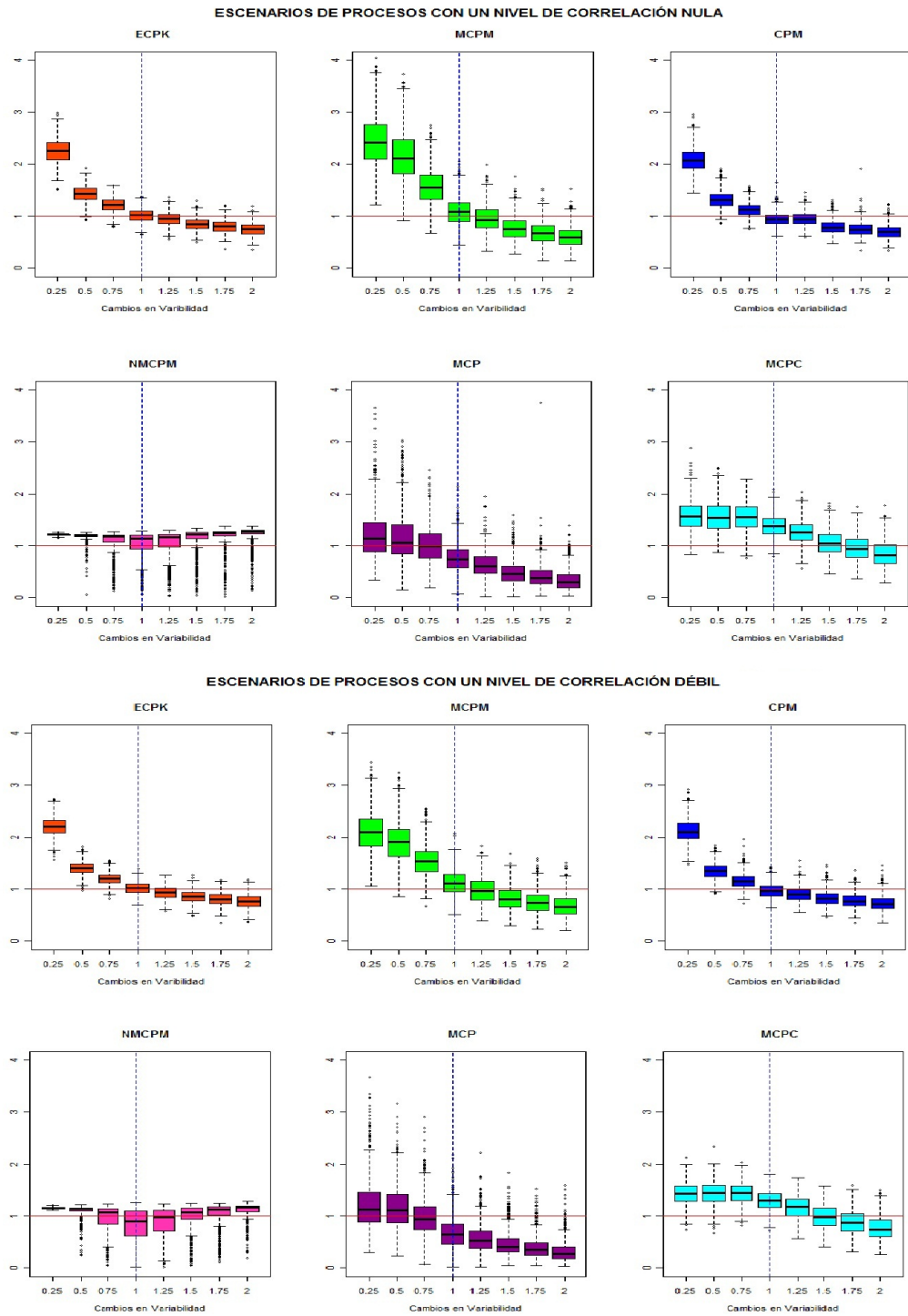


FIGURA 11: Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Nula y Débil

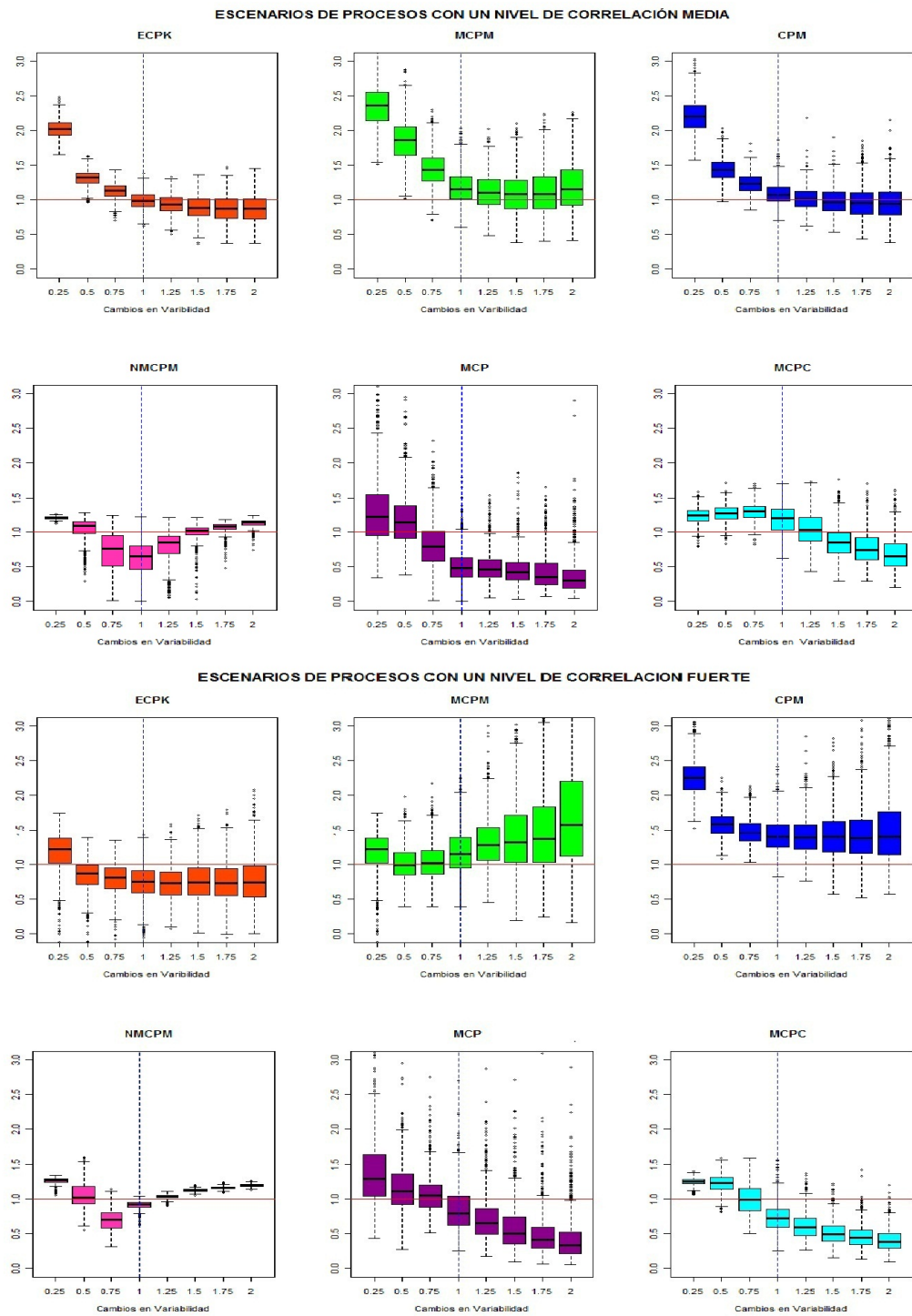


FIGURA 12: Comportamiento de los índices en procesos no normales de dos variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Media y Fuerte

Cambios en Variabilidad:

En la Figura 11 se destacan los mismos índices al igual que en caso donde el parámetro que cambia es el centramiento. Los índices MCPM y MCPC tienen un comportamiento adecuado debido que en los cambios pequeños de variabilidad e incluso donde $\lambda = 1$, el número de veces que estos índices toman valores mayores a uno es alto, puede que haya otros índices que se comporten bien en cambios pequeños de variabilidad pero en $\lambda = 1$ no tienen un resultado favorable porque desde este punto empiezan a detectar no capacidad. Con el aumento en el nivel de correlación estos índices siguen detectando capacidad pero también empiezan a detectar procesos no capaces como capaces que es un error supremamente grave en la práctica, por las consecuencias que puede llevar al tomar malas decisiones. En el caso de una correlación Débil se destacan los índices MCPM y MCPC, pero la falencia que tiene estos índices se encuentra en los primeros cambios después de $\lambda = 1$, debido a que hay un porcentaje alto que no se espera tener por ser estos procesos no capaces.

En la Figura 12, El nivel de correlación Media solo los índices ECPK y MCPC tienen un comportamiento aceptable, en caso del índice ECPK, no comete ninguno de los tipos de errores, pero en los procesos en el que $\lambda = 1$ el porcentaje no es muy alto como se espera por ser un proceso capaz y el índice MCPC presenta la misma falencia que en los niveles de correlación Nulo y Débil. Para el caso de un nivel de correlación Fuerte ningún índice es aceptable, los índices MCPM, CPM y NMCPM empiezan a cometer error tipo II al determinar procesos capaces cuando no lo son, el índice MCPM tiene este comportamiento debido a que en su estructura esta involucrada el determinante de la matriz de varianzas y covarianzas, la alteración en la variabilidad del proceso hacen que la correlación deje de ser tan fuerte así que su determinante aumente a la vez que se aumenta el valor de los cambios en variabilidad, esto aumenta el valor $\hat{C}_p$ y como el denominador d es siempre el mismo valor, el índice MCPM obtiene valores superiores a uno cuando los cambios en variabilidad son mayores a uno. El comportamiento del índice CPM solo se ve afectado en el nivel de correlación fuerte porque en este nivel este índice obtiene valores más altos en todos los cambios de variabilidad, es por esto que en cambios de variabilidad superiores a uno las cajas se salen de la línea trazada horizontalmente, pero solo se debe a que este índice se ve realmente muy afectado por el nivel de correlación fuerte. El índice NMCPM es diferente a los demás índices porque este no se ve afectado tan fuertemente por los niveles de correlación por el contrario se ve afectado por las alteraciones máximas y mínimas que se realizan en los cambios de variabilidad, en estos cambios el índice obtiene valores altos, en el caso de los cambios superiores a uno el índice determina que los procesos son capaces, cometiendo error tipo I en todos los niveles de correlación. Los demás índices (ECPK, MCP y MCPC) no detectan capacidad en los primeros cambios en variabilidad o no lo hacen cuando el cambio realizado en variabilidad es uno, lo que determina que no detectan un correcto diagnóstico en todos los procesos capaces.

7.2. Índices de Capacidad de Procesos Normales y No Normales Con Tres Variables

7.2.1. Índices de Capacidad de Procesos Normales de tres variables

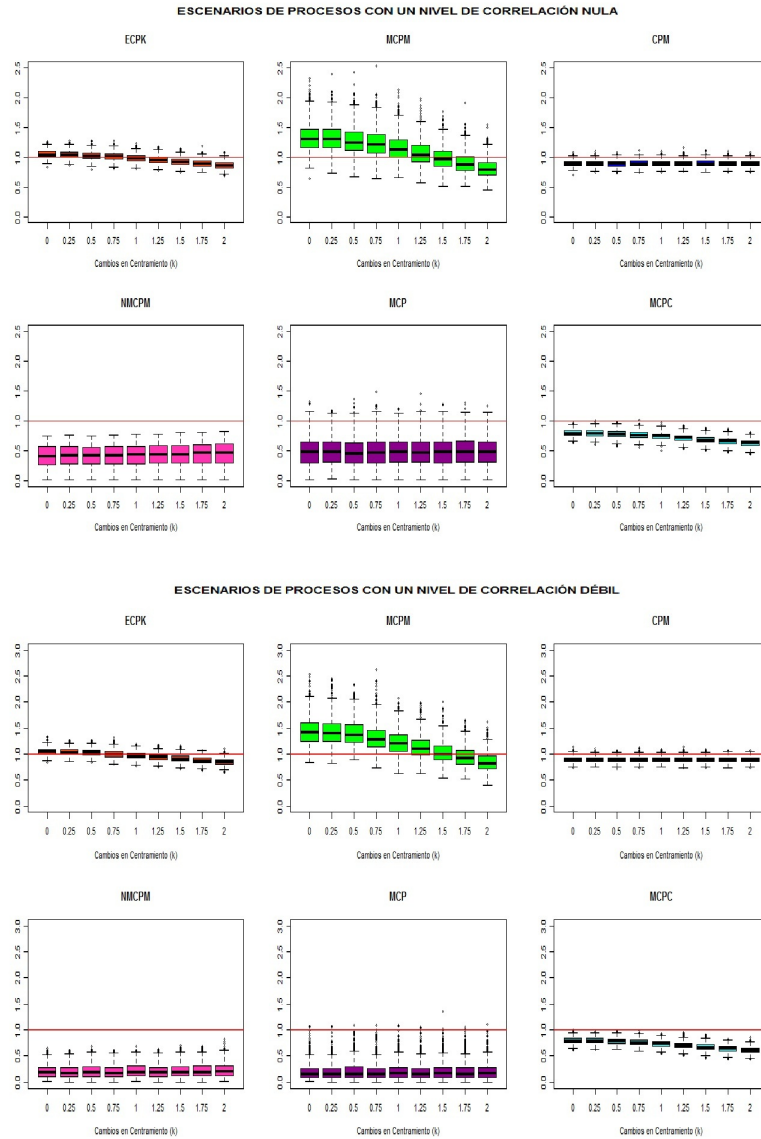
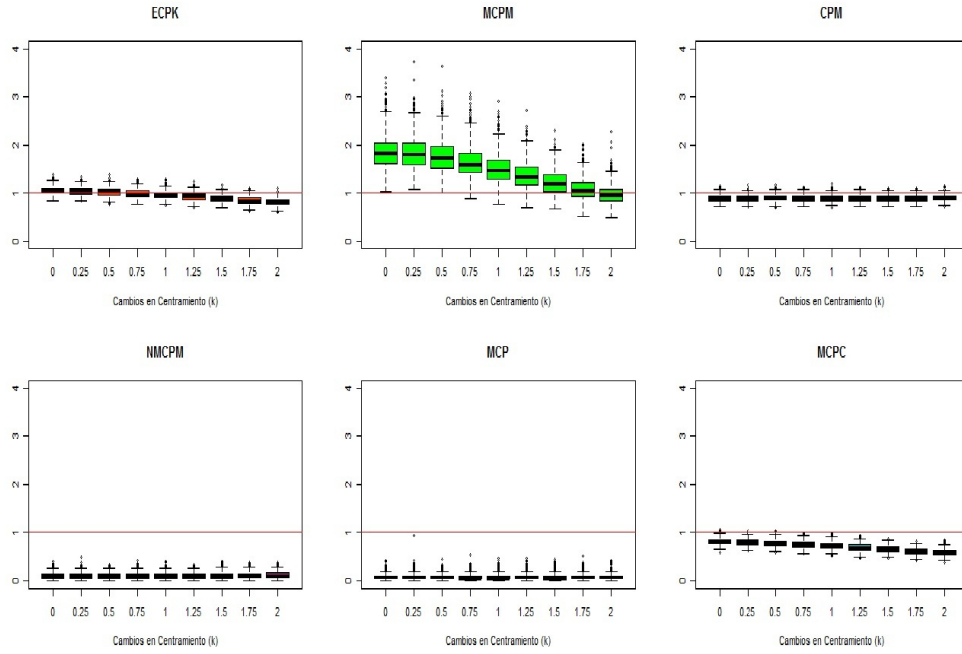


FIGURA 13: Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil

ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN MEDIA



ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN FUERTE

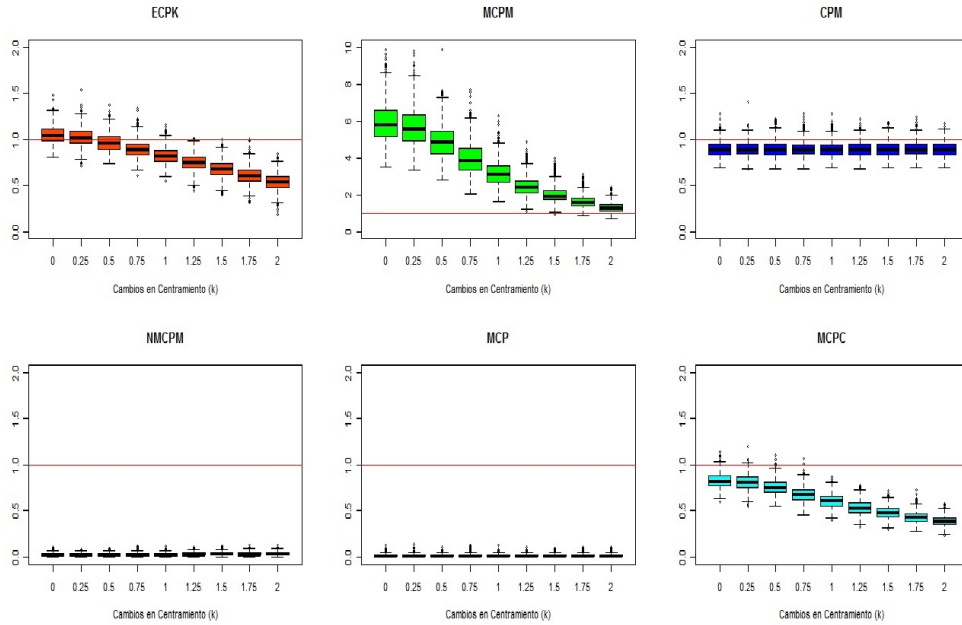
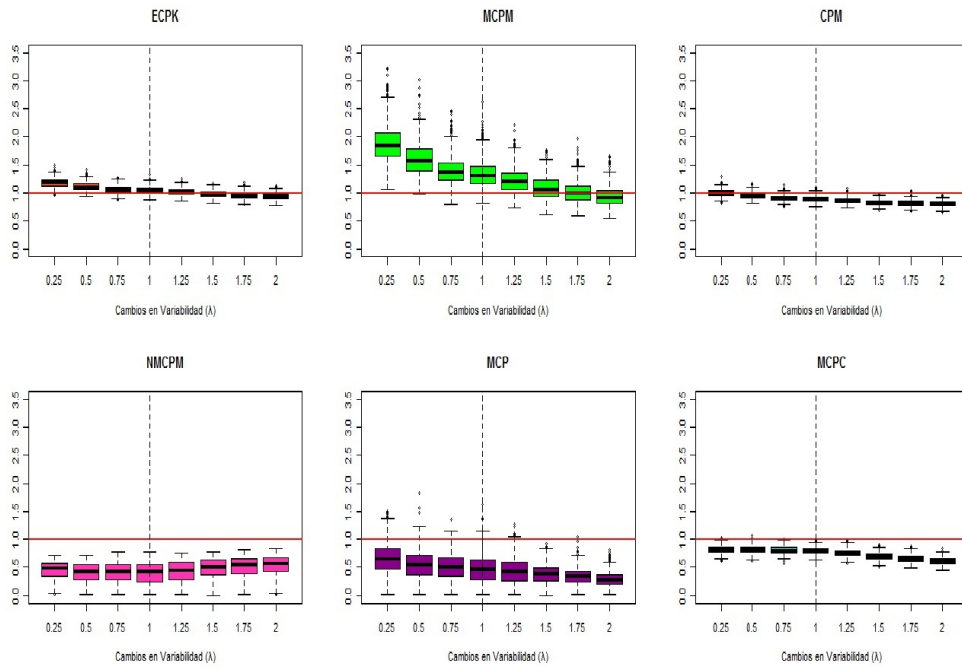


FIGURA 14: Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte

ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN NULA



ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN DÉBIL

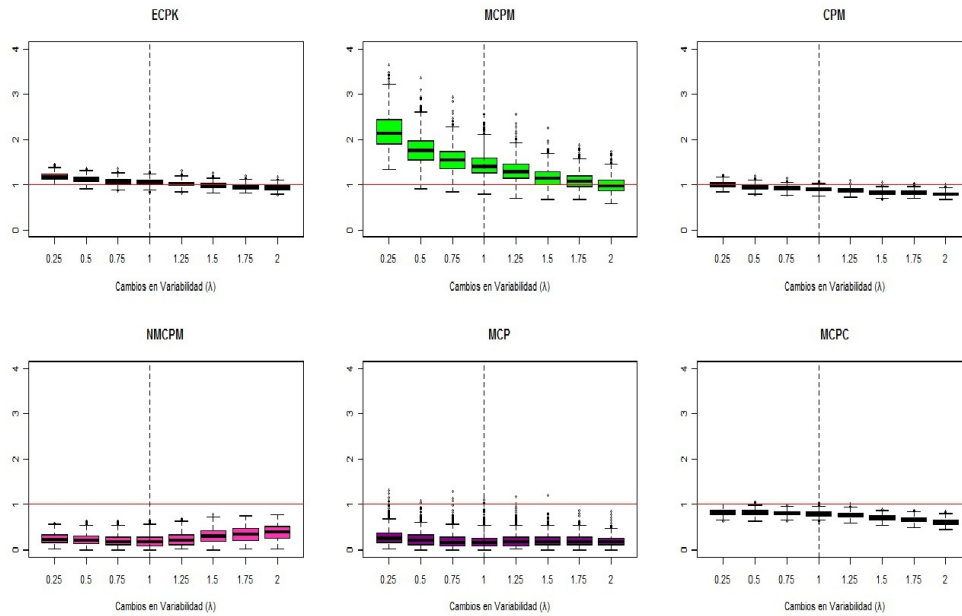
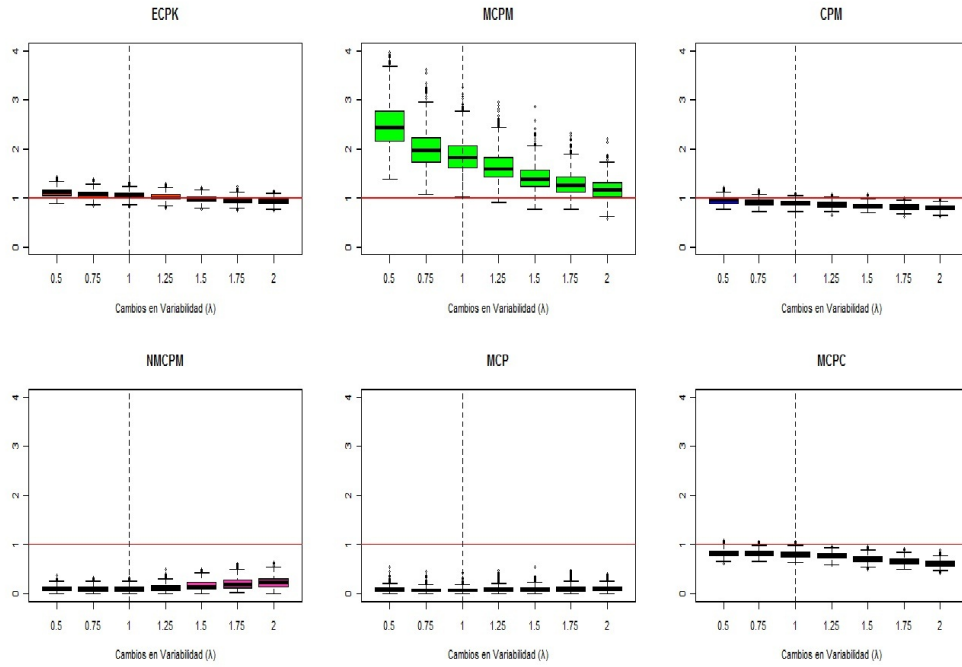


FIGURA 15: Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Nula y Débil

ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN MEDIA



ESCENARIOS DE PROCESOS CON UN NIVEL DE CORRELACIÓN FUERTE

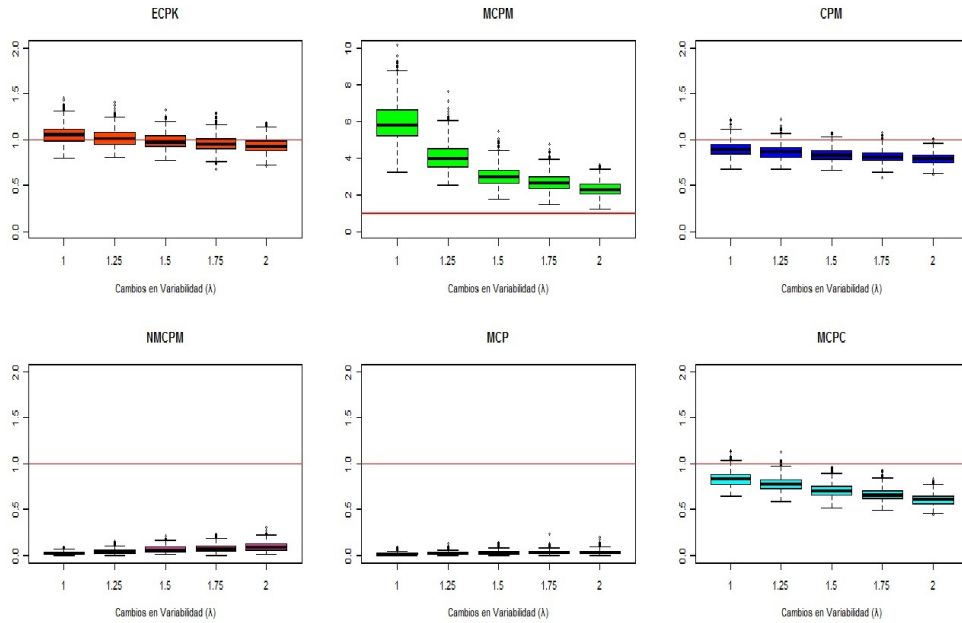


FIGURA 16: Comportamiento de los índices en procesos normales de tres variables con cambios en Variabilidad y con Correlación Media y Fuerte

Cambios en Centramiento:

El desempeño de los índices en estos cambios, se presenta en la Figura 13 la cual permite observar que el único índice que detecta correctamente la capacidad de los procesos es el índice MCPM, el cual mejora con el aumento del nivel de correlación. Pero también presenta un problema para los cambios pequeños, ya que sobreestima la capacidad de estos procesos que son no capaces. Los índices CPM, NMCPM y MCP presentan comportamientos constantes donde no se ve ningún tipo de alteración cuando se aplican cambios en el centramiento, lo cual permite determinar que estos índices no son buenos para detectar capacidad de procesos. Los índices restantes aunque presentan una tendencia decreciente, la mayoría de sus valores se encuentran por debajo de 1.0 diagnosticando de manera equivocada la capacidad cometiendo Error Tipo I.

En la Figura 14, se presentan resultados similares para el índice MCPM pero encubriendo aún más la no capacidad de algunos procesos, cometiendo Error Tipo II. Los índices CPM, NMCPM y MCP siguen presentando comportamiento constantes donde se no ven influenciados con los diferentes cambios en centramiento, detectando en todos los casos de manera incorrecta la capacidad de los procesos. Los restantes índices aunque presenta alguna tendencia no diagnostican de manera apropiada la capacidad de los procesos.

Cambios en Variabilidad:

En la Figura 15 se presenta que nuevamente el índice MCPM tienen mejor diagnóstico de capacidad y una tendencia decreciente esperada, pero muestra falencias al detectar no capacidad en cambios pequeños después de $\lambda = 1$. Los índices restantes presentan algún tipo de tendencia pero no con valores por encima de 1.0, lo cual evidencia su mal desempeño al detectar la capacidad de los procesos.

Para el caso de correlación media y fuerte, en la Figura 16 se presenta que el índice MCPM es de nuevo el único que detecta adecuadamente la capacidad en procesos capaces pero sigue teniendo serios problemas al detectar no capacidad, debido a que a mayor nivel de correlación su diagnóstico comienza a ser cada vez más incorrecto cometiendo Error Tipo II, lo cual es considerado el error más grave en la práctica al clasificar un proceso como capaz cuando la realidad no está cumpliendo con las especificaciones. El restante de índices de capacidad no tienen un buen desempeño al incurrir en Error Tipo I, donde diagnostica no capacidad cuando los procesos son capaces.

7.2.2. Índices de Capacidad de Procesos No Normales con Tres Variables

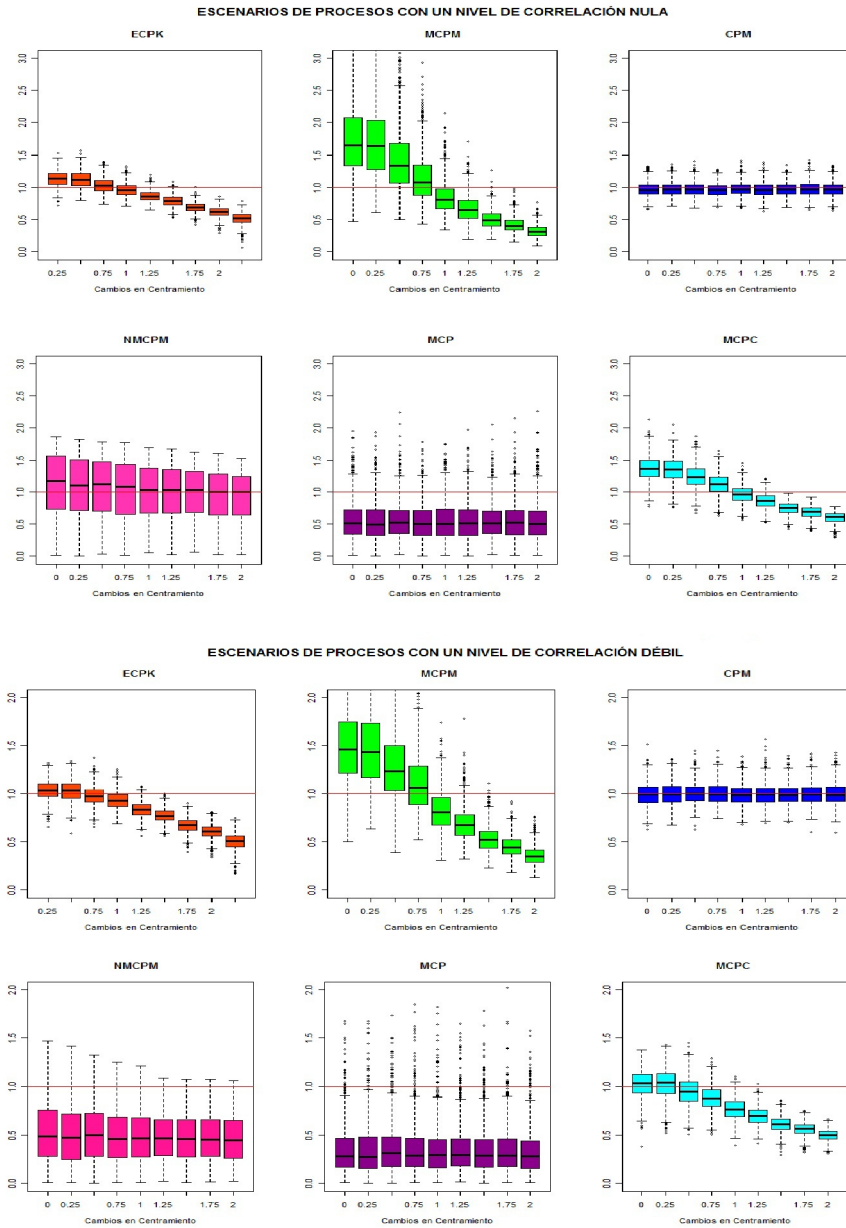


FIGURA 17: Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil

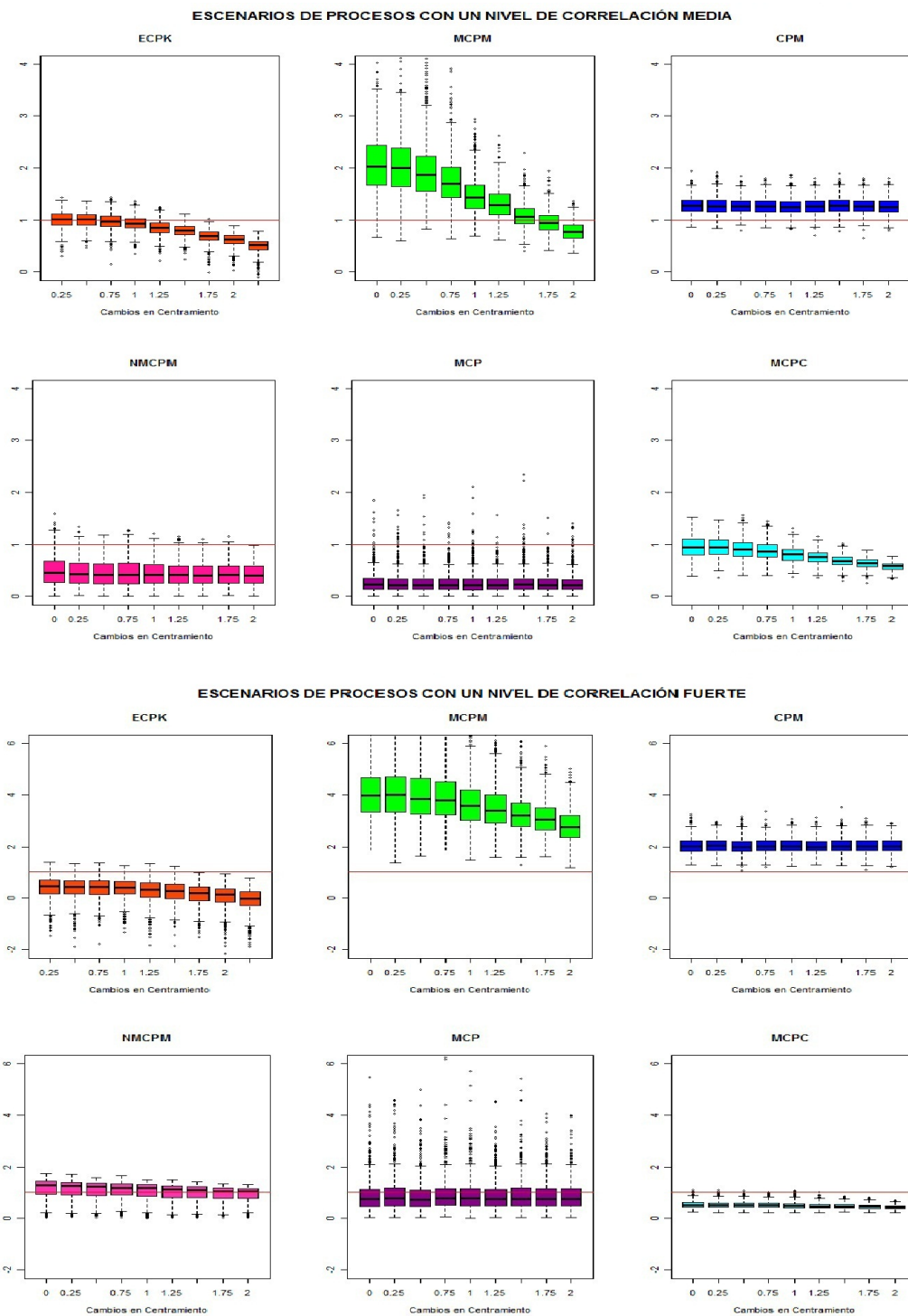


FIGURA 18: Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte

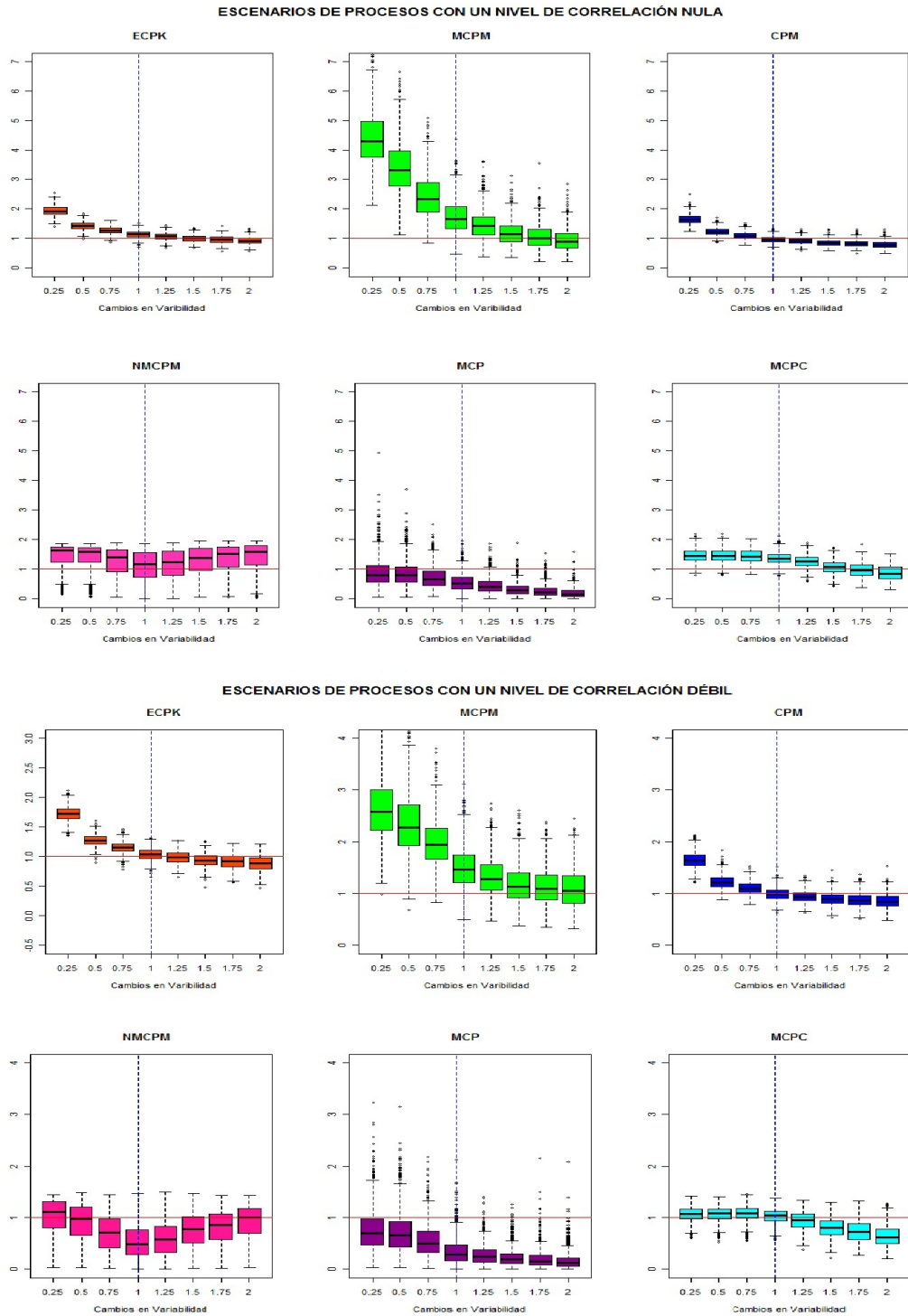


FIGURA 19: Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Nula y Débil

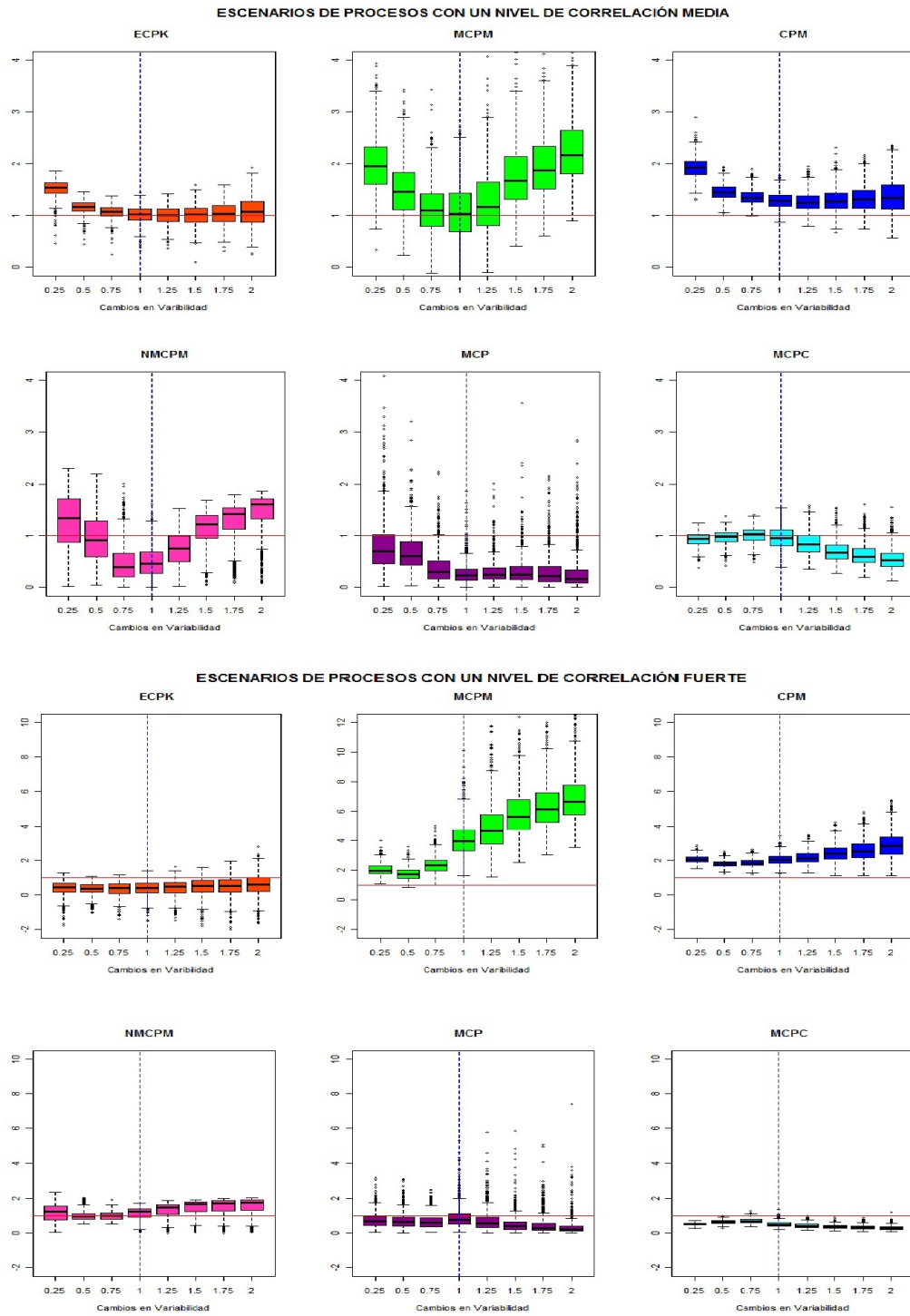


FIGURA 20: Comportamiento de los índices en procesos no normales de tres variables con cambios en Centramiento y con Correlación Media y Fuerte

Cambios en Centramiento:

En la Figura 17, Se observa que los índices CPM, NMCPM y MCP no se ven afectados por cambios en el centramiento, pero si se percibe un cambios en los resultados cuando cambia el nivel de correlación, el índice CPM aumenta sus valores y los demás sus valores disminuyen. Los índices (ECPK, MCPM y MCPC) si se ven afectados por los cambios en centramiento y tiene el comportamiento adecuado al tomar valores superiores a uno en los primeros cambios en centramiento, solo tiene una falencia al no poder diagnosticar correctamente los procesos cuando los cambios que se realizan en centramiento son muy pequeños menores a uno, pero a partir de este punto toman valores inferiores a uno que es el comportamiento que se espera observar. En la Figura 18, los resultados obtenidos con niveles de correlación más altos cambian drásticamente, los índices que tienen un buen desempeño en los niveles de correlación nulo y dedil, ahora diagnostican incorrectamente la capacidad de los procesos, en el caso de ECPK y MCPC los valores que toman estos índices disminuyen y el índice MCPM aumenta sus valores cometiendo así el error tipo I , determinado un proceso como capaz cuando no lo es. Los demás índices (CPM, NMCPM y MCP) siguen teniendo el mismo comportamiento constante en todos los niveles de correlación.

Cambios en Variabilidad:

En la Figura 19, Los mismos índices que al ser afectados en centramiento tuvieron un buen diagnostico de capacidad en el caso de cambios en variabilidad (ECPK, MCPM y MCPC) con un nivel de correlación nula diagnostican correctamente la capacidad en los primeros cambios en variabilidad pero tiene falencias para diagnosticar correctamente en los primeros cambios que se realizan después de $\lambda = 1$, pero después de $\lambda = 1.5$ si realizan un correcto diagnostico, los demás índices no diagnostican correctamente los proceso capaces. Cuando los índices son afectados por un nivel de correlación débil solo los índices ECPK y MCPC siguen teniendo el mismo comportamiento que tiene cuando son afectados por un nivel de correlación nula, el índice CPM con un nivel de correlación más alto diagnostica mucho mejor la capacidad de los procesos, los índices (MCPM, NMCPM y MCP) no tienen un comportamiento adecuado para detectar correctamente la capacidad, el índice MCPM obtiene valores mas altos comparado con un nivel de correlación nula, de esta forma detecta correctamente los procesos capaces, pero en cambios superiores a uno como los resultados que obtiene el índice son también altos determina que estos procesos también son capaces cuando no lo son. En la Figura 20, Los índices para los niveles de correlación medio no tienen un buen desempeño para diagnosticar capacidad, en el caso de ECPK y MCPC los valores que toman los índices cuando están siendo afectados por los cambios en variabilidad disminuyen permitiendo que diagnostiquen incorrectamente los procesos capaces. Por otro lado los índices MCPM y CPM toman valores mas altos en los

procesos que están siendo afectados por un cambio en la variabilidad superior a uno, por lo tanto no diagnostican correctamente los procesos no capaces cometiendo gravemente el error tipo I, como se menciona en caso de procesos de dos variables el índice NMCPM se ve afectado por los niveles de correlación altos porque en su estructura esta involucrado el determinante de la matriz de varianza y covarianza, por lo tanto al aumentar los el valor del cambio en variabilidad el nivel de correlación disminuye y aumenta el determinante de este, así que los valores que toma el índice también aumenta proporcionalmente con el aumento en los cambios en variabilidad. El índice NMCPM tiene el mismo comportamiento que en los procesos de dos variables, este índice no se ve afectado por los niveles de correlación sino por los valores extremos con los que se altera la variabilidad, esto se debe a los resultados que resultan de c' que involucran los límites de control y estos afectan el valor que toma el índice en los cambios mínimos y máximos en variabilidad

7.3. Comparación del desempeño de los Índices de Capacidad Multivariados

Como medida de comparación entre los índices de Capacidad Multivariados propuestos, se utiliza el Porcentaje de Diagnóstico de Capacidad (%DC) que consiste en el porcentaje de procesos que los índices diagnostican como capaces, es decir, que cumplen con los límites de especificación que se han establecido en la Metodología (Tablas 7 y 8) para luego, contrastarlos con el comportamiento de los diferentes índices en cada escenario. Esta comparación se realiza con el fin de identificar el mejor índice para los diferentes escenarios de proceso y así, generar una guía que permita al controlador de calidad la selección del índice más adecuado para las características de su proceso. El índice con mejor desempeño será aquel que pueda determinar correctamente si un proceso es o no capaz de acuerdo con los cambios en centramiento, variabilidad, nivel de correlación y distribución asociada.

A continuación se presentan los Porcentajes de Diagnóstico de Capacidad (%DC) para cada uno de los procesos simulados de dos y tres variables bajo las distribuciones normal y no normal:

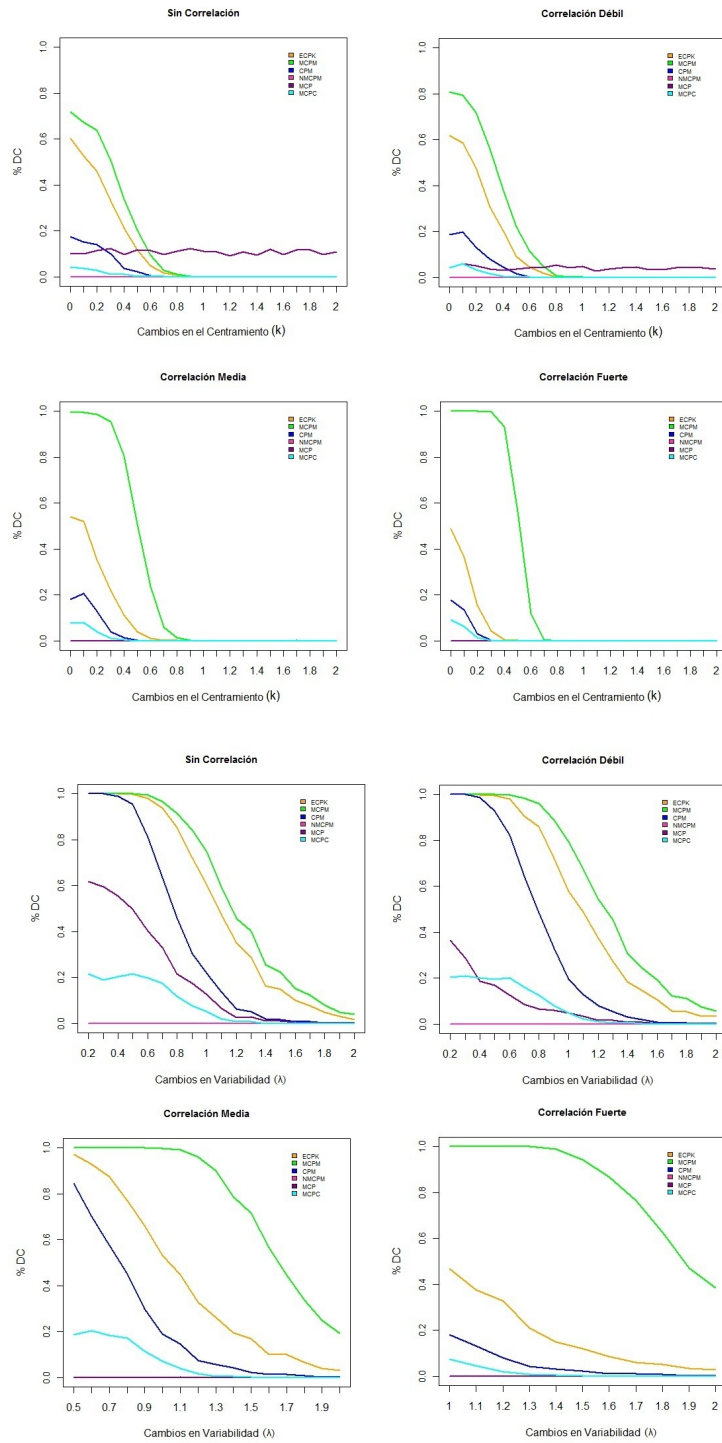


FIGURA 21: Diagnóstico de Capacidad para Procesos Normales de dos variables

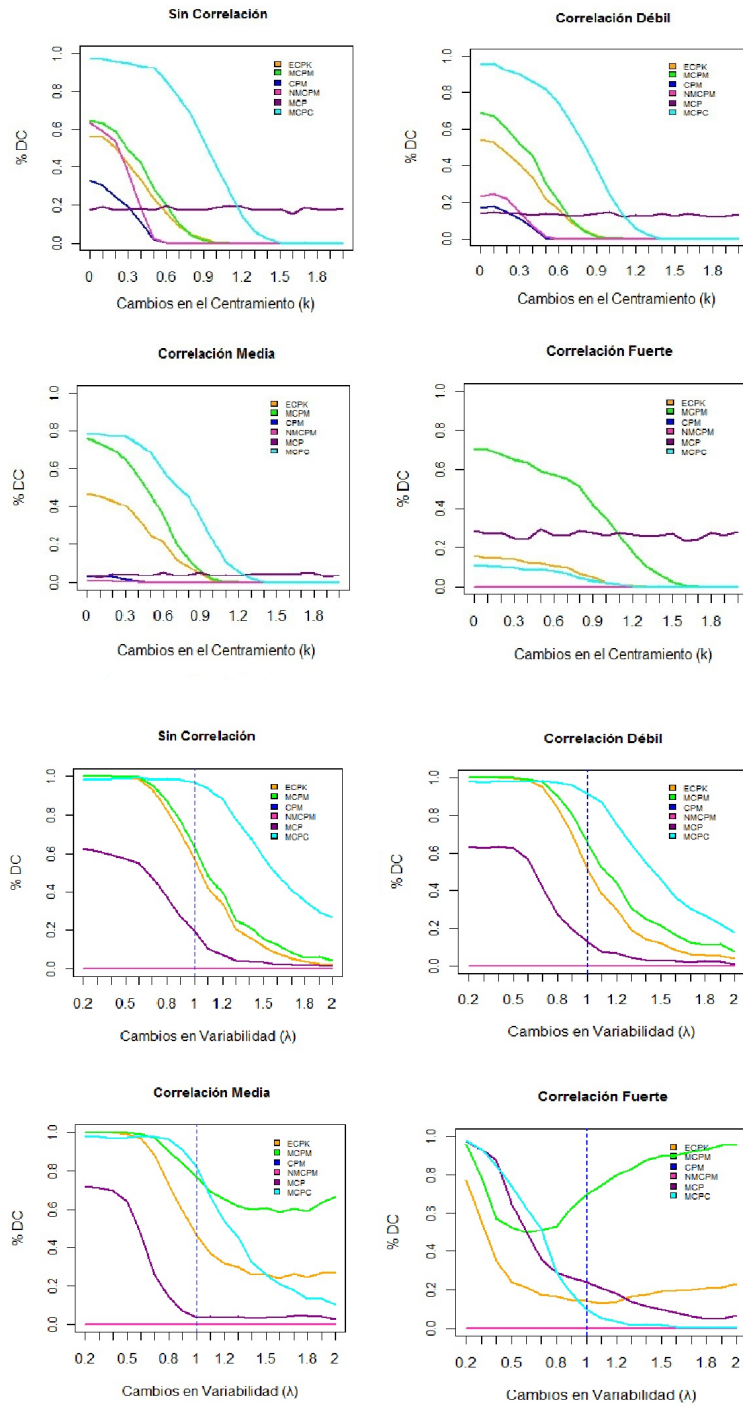


FIGURA 22: Diagnóstico de Capacidad para Procesos No Normales de dos variables

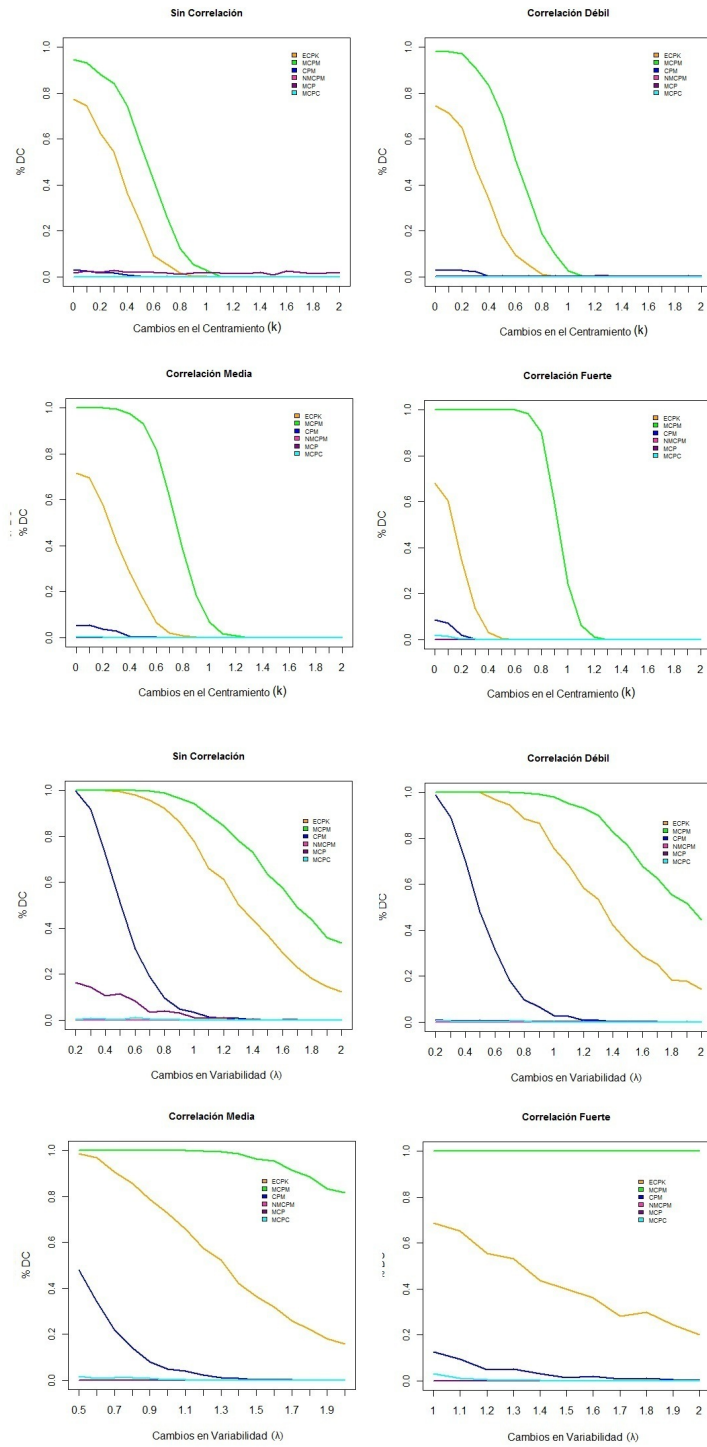


FIGURA 23: Diagnóstico de Capacidad para Procesos Normales de tres variables

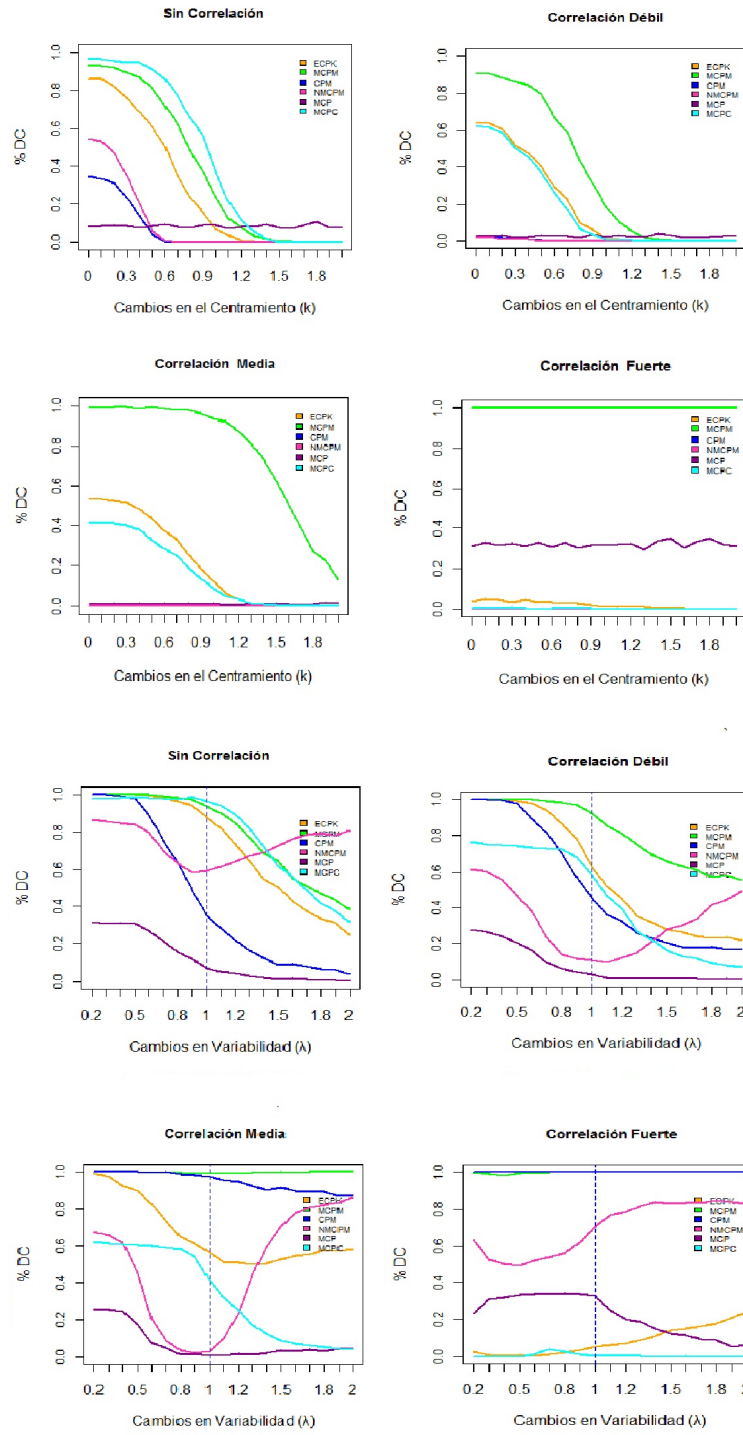


FIGURA 24: Diagnóstico de Capacidad para Procesos No Normales de tres variables

En las Figuras 21, 22, 23 y 24, se presenta el Porcentaje de Diagnóstico de Capacidad (%DC) de los índices ECPK, MCPM, VCPM, NVCPM, MCP y MCPC en procesos de dos y tres variables bajo las distribuciones Normal Multivariada y No Normal Multivariada en los cuatro niveles de correlación propuestos. En ellas se puede observar que en la mayoría de los casos, el (%DC) en los índices presentará una tendencia decreciente con el aumento de los cambios tanto en centramiento como en variabilidad y en el restante de casos, se observan valores constantes que muestran que los índices asociados a ellos no son afectados por los cambios realizados a la variable X_1 de los procesos.

Para el caso de los procesos normales con dos variables tanto para cambios en centramiento como en variabilidad (Figura 21), se observa que el índice MCPM es el que presenta un mejor diagnóstico de capacidad, ya que para los procesos capaces tiene el mayor %DC en comparación con los demás índices, mostrando así que detecta apropiadamente la capacidad de los procesos como van aplicándose las alteraciones, esta detección mejora aún más cuando los niveles de correlación van aumentando. El índice ECPK tiene %DC mucho menores que los resultantes en el índice MCPM aunque conservan la misma tendencia decreciente, la cual para este índices va empeorando con el nivel de correlación al incurrir en Error Tipo I, al determinar procesos capaces como no capaces. Los índices restantes CPM, NMCPM, MCP y MCPC para cambios en centramiento presentan un mal desempeño al detectar capacidad con mucha menos fuerza, ya que la detecta en procesos capaces con bajos %DC empeorándolos con el aumento del centramiento (k) y clasificando procesos capaces como no capaces (Error Tipo I).

Para el caso de la variabilidad (λ), el índice CPM es el que presenta un mejor desempeño que decae con el aumento de los niveles de correlación. El índice MCPM sobreestima la capacidad de los procesos no capaces con el aumento de la correlación cometiendo Error Tipo 2. Los restantes índices definitivamente no son buenos para considerarlos índices decisorios de capacidad, ya que su diagnóstico en todos los cambios no es bueno por detectar capacidad donde no la hay y viceversa.

En los procesos no normales de dos variables, el diagnóstico de capacidad se muestra En la Figura 22 El índice MCPM es el único que tuvo un resultado mas acorde con lo que se busca, porque los resultados obtenidos muestran un porcentaje alto para determinar los procesos capaces cuando los cambios en centramiento son pequeños y partir de cambios superior a uno, el porcentaje de veces en el que índice toma valores mayores a uno disminuye drásticamente, esto se presenta en niveles de correlación nula y débil, por otro lado los demás índices pueden diagnosticar correctamente los procesos no capaces cuando el cambio en centramiento es superior a uno. Para niveles de correlación medio y fuerte el único índice que no se ve afectado es el MCPM que aproximadamente entre el 70 %y 80 % de las veces diagnostica correctamente un proceso capaz que es el primer punto de los gráficos con cambios en centramiento, solo con cambios pequeños en centramiento no diagnostica correctamente los procesos no capaces pero partir de $K=1$ diagnostica correctamente la capacidad de estos procesos. El desempeño de los

índices para cambios en variabilidad presenta un resultado importante, ninguno de los índices presenta un diagnostico correcto cuando están afectados por un nivel de correlación Media y fuerte debido a que los índices cometen errores tipo I y II, diagnosticado proceso capaces como no capaces o procesos no capaces como capaces, El índice MCPM como se observo en las graficas de Boxplot en niveles de correlación media y fuerte obtiene valores altos en proceso no capaces, esto se presenta de nuevo en las graficas de diagnostico de capacidad, la linea que es trazada por esta índice no desciende como los demas sino que por lo contrario asciende. Para los demás niveles de correlación (Nula y Débil) el índice MCPC es el que mejor diagnostica los procesos capaces, pero tiene falencias para diagnosticar los procesos no capaces cuando están afectados por los primeros cambios de variabilidad después de ($\lambda = 1$). Los índices ECPK y MCPM diagnostican correctamente los procesos con cambios pequeños en variabilidad pero cuando (λ) es igual a uno, solo aproximadamente el 50 % de la veces lo diagnostica como un procesos capaz, que es un porcentaje muy pequeño en el que se estaría cometiendo error tipo II al diagnosticar un proceso como no capaz y no ser así.

Si se observa la Figura 23, se encuentran los %DC para los índices calculados en proceso normales de tres variables, donde se evidencia el buen comportamiento al diagnosticar capacidad del índice MCPM en el caso de los cambios en centramiento, pero su gran falencia al sobreestimar la capacidad en cambios pequeño del centramiento en procesos no capaces. También, el índice ECPK reacciona a los cambios detectando correctamente capacidad pero con bajos %DCs, empeorando aun más su diagnóstico al aumentar el nivel de correlación. Los restantes índices no detectan capacidad, al presentar %DCs con valores cercanos a cero y constantes en todos los diferentes cambios de centramiento y niveles de correlación.

En el caso de los cambios en variabilidad, los índices en procesos normales de tres variables tienen un comportamiento que empeora con el aumento de la correlación, hasta el punto de dar por capaces procesos que no lo son (Error Tipo II). El índice CPM es el que presenta el mejor comportamiento hasta el nivel débil de correlación, ya que después este sobreestima la capacidad de los procesos (Error Tipo I). Los índices NMCPM, MCP y MCPC no se ven influenciados por los diferentes cambios y presentan resultados constantes cercanos a cero, donde no aportan nada como índices al determinar correctamente la capacidad de un proceso.

Los resultados de los procesos no normales de tres variables se muestran en la Figura 24), los índices MCPC, NMCPM y ECPK se destacan por diagnosticar correctamente la capacidad de los proceso cuando son afectados por los cambios en centramiento y con un nivel de correlación nula, solo tiene falencias para diagnosticar correctamente cuando estos cambios en centramiento son pequeños menores a una unidad. Los índices MCPC y ECPK deterioran su diagnostico con el aumento de los niveles de correlación, hasta tal punto que no diagnostica correctamente un proceso capaz cuando es afectado por un nivel de correlación fuerte, cometiendo de esta forma error tipo II. El índice MCPM obtiene un mayor porcentaje de Diagnostico de capacidad en los cambios más grandes en centramiento, pero con el aumento de los niveles de correla-

ción aumenta su diagnóstico de capacidad, por lo tanto con un nivel de correlación fuerte no diagnostica correctamente los procesos no capaces. Los demás índices tienen un porcentaje de Diagnóstico de capacidad muy bajo en todos los cambios en centramiento, lo que quiere decir que diagnostican correctamente los procesos no capaces, pero es importante que diagnostiquen correctamente todos los procesos no solo los no capaces. Los índices MCPC, MCPM y ECPK tienen un correcto diagnóstico cuando tienen un nivel de correlación nula y los cambios en variabilidad son menores o iguales a 1, lo ideal es que a partir de ese punto el porcentaje de diagnóstico sea cero, pero estos índices no lo hacen, empiezan a disminuir el porcentaje de diagnóstico pero no tan drásticamente como se espera, en los cambios pequeños de variabilidad después del punto 1 hay un porcentaje alto de cometer error tipo I al diagnosticar incorrectamente los procesos no capaces. Los demás índices (NMCPM, CPM y MCP) no tienen un correcto diagnóstico en los primeros cambios de variabilidad menores a uno, entre estos índices se encuentran, los índices CPM y MCP que tienen un correcto diagnóstico a partir de cambios mayores a una unidad pero cometen error tipo II al diagnosticar incorrectamente los procesos capaces y el índice NMCPM por el contrario tiene un alto porcentaje de Diagnóstico de capacidad en los procesos que tienen alteraciones superiores a una unidad, así que este índice comete gravemente error tipo I. Con el aumento en los niveles de correlación el índice MCPC y ECPK deteriora su porcentaje de diagnóstico cuando los cambios en variabilidad son menores a uno y en el caso que los cambios son superiores a uno, el índice MCPC mejora el diagnóstico y el índice ECPK obtiene un porcentaje de diagnóstico alto y por ende un alto porcentaje de cometer error tipo I y se observa que en la parte inferior derecha de la figura que este índice diagnostica incorrectamente los procesos no capaces. Los índices MCPM y CPM se ven muy afectados por el aumento en los niveles de correlación en especial en un nivel fuerte porque no tienen un correcto diagnóstico en los procesos con cambios en variabilidad superiores a uno, así que comete error tipo I al determinar procesos no capaces como capaces. Los índices MCP y NMCPM no tienen un diagnóstico correcto en ninguno de los niveles de correlación por el comportamiento extraño que tienen en los cambios en variabilidad, cometiendo error tipo I y II.

7.4. Resultados de Diagnóstico de Capacidad para los diferentes escenarios

Como parte de la guía a entregar como resultado en este proyecto, se describen los resultados más importantes para cada uno de los escenarios planteados destacando los índices que mejor detectan la capacidad de los diferentes procesos.

7.5. Procesos con distribución no Normal

7.5.1. Cambios en Centramiento

7.5.1.1. Correlación nula El índice MCPC para el caso de dos y tres variables diagnostica correctamente la capacidad de los procesos cuando los cambios en centramiento son grandes, solo tiene la falencia de no diagnosticar correctamente cuando los cambios en centramiento son pequeños menos a uno. En el caso de tener procesos con tres variables los índices ECPK y MCPM presentan el mismo comportamiento anterior.

7.5.1.2. Correlación débil El índice MCPC tiene un correcto diagnostico cuando los procesos de dos variables están afectados por cambios superiores a uno, pero presenta la falencia de no poder diagnosticar correctamente la capacidad de los procesos cuando los cambios son pequeños inferiores a uno. El índice MCPM tiene un correcto diagnostico cuando los procesos son de tres variables y los cambios de centramiento son superiores a uno, solo presenta la falencia de no poder diagnosticar correctamente los procesos para cambios pequeños en centramiento

7.5.1.3. Correlación media El índice MCPC para el caso de dos variables sigue presentando el mismo comportamiento de Diagnostico que en los anteriores niveles de correlación En el caso de tener procesos con tres variables, no hay ningún índice que se pueda recomendar porque si algún índice diagnostica correctamente un procesos capaz no diagnostica correctamente los procesos no capaces y viceversa.

7.5.1.4. Correlación fuerte Para el caso de dos y tres variables no hay un solo índice q pueda diagnosticar la capacidad de todos los proceso, debido a que todos los índices se ven realmente muy afectados por el este nivel de correlación.

7.5.2. Cambios en Variabilidad

7.5.2.1. . Correlación nula El índice MCPC tiene un diagnostico de capacidad correcto para el caso de dos variables, pero solo tiene falencias cuando los cambios en variabilidad son pequeños después de una unidad. Los índices ECPK y MCPM también tienen un desempeño bueno asi que también se pueden recomendar para utilizar en este caso. El índice CPM diagnostica correctamente los procesos de tres variables con cambios pequeños y grandes de variabilidad la falencia solo se presenta en los valores intermedio pero sin embargo es un índice que se comporta muy bien.

7.5.2.2. Correlación débil. El índice MCPC tiene un buen desempeño en los procesos de dos variables, para los primeros cambios menores a uno en variabilidad, pero los índices ECPK y MCPM tienen un buen desempeño para cambios grandes y pequeños de variabilidad, así que estos índices son adecuados para utilizar en este nivel. El desempeño de los índices para procesos de tres variables no es muy bueno porque no hay un solo índice que diagnostique correctamente los procesos en todos los cambios en variabilidad.

7.5.2.3. Correlación Media Con este nivel de correlación el desempeño de los índices se ven afectados, el índice para el caso de procesos de dos variables que tiene un comportamiento aceptable es MCPC para ser utilizado bajo estas condiciones de proceso. Para el caso de tres variables, el desempeño de los índices ha disminuido drásticamente, el índice MCPC se puede utilizar pero con precaución cuando se crea que el cambio en variabilidad sea pequeño complementando usando el índice CPM que sí tiene un buen desempeño en los procesos capaces.

7.5.2.4. Correlación fuerte El desempeño de los índices para procesos con dos variables solo se destacan dos índices CPM y MCPC, así que lo ideal sería poder calcular los dos para tomar la mejor decisión para un proceso en particular. En los procesos con tres variables no se recomienda utilizar ninguno de los índices, porque con este nivel los índices se ven demasiado afectados cometiendo errores tipo I y II.

8. Conclusiones y Recomendaciones

8.1. Conclusiones por índice evaluado

8.1.1. Índice de Capacidad MCPM

Este índice es el que presenta mejores resultados al diagnosticar capacidad, tanto en procesos de dos y tres variables con cambios en centramiento y variabilidad mostrando altos %DC para $k = 0$ y $\lambda \leq 1$ donde los procesos se consideran como capaces, pero el Diagnóstico de este índice viene acompañado de la ocurrencia del Error Tipo II, ya que en cambios pequeños su diagnóstico falla y comienza a definir procesos no capaces como capaces. Por lo anterior, este índice no es recomendado para diagnosticar capacidad en procesos normales.

Para los procesos no normales el índice MCPM se destaca para el caso de dos variables bajo un nivel de correlación Fuerte con cambios en centramiento y en caso de cambios en variabilidad solo con niveles de correlación nula y débil. En el caso de procesos con tres variables, solo tiene un correcto diagnóstico de capacidad en procesos con cambios en centramiento y variabilidad para niveles de correlación nula y débil.

8.1.2. Índice de Capacidad ECPK

Seguido del Índice MCPM, este es el que presenta mejores resultados al detectar capacidad en los diferentes escenarios propuestos aunque con %DC más bajos que podrían considerarse poco contundentes para verificar la capacidad detectada, pero al igual que el diagnóstico del índice MCPM el diagnóstico del índice ECPK obtiene Error Tipo II, al dar como procesos capaces aquellos que no lo son. Por lo anterior, este índice no es recomendado para diagnosticar capacidad en procesos normales.

En procesos no normales, el índice ECPK solo tiene un correcto diagnóstico de capacidad para procesos de dos variables con cambios en variabilidad y sólo para niveles de correlación nula y débil.

8.1.3. Vector de Capacidad de Procesos Multivariados VCPM

El diagnóstico de este índice para en cambios centramiento no es bueno, ya que toma una tendencia constante donde se muestra que no es afectado con estos cambios.

El VCPM en procesos no normales de tres variables tiene un correcto diagnostico solo cuando los procesos son afectados por cambios en variabilidad y los niveles de correlación son nula y débil, por otra lado hay que tener en cuenta los cambios pequeños de variabilidad después de una unidad.

8.1.4. Nuevo Vector de Capacidad de Procesos Multivariados NVCPM

Este vector definitivamente no es un buen índice, ya que no presenta un buen desempeño al detectar capacidad en los diferentes escenarios. En todos los casos, tiene %DC de cero sin verse afectada por los diferentes cambios en distribución, centramiento, variabilidad y nivel de correlación. Esto puede deberse a la exigencia que trae consigo por tener tres criterios de evaluación para definir capacidad.

El NVCPM en procesos no normales no tiene un diagnóstico correcto en ningunos de los cambios en centramiento o variabilidad, presenta un comportamiento no satisfactorio.

8.1.5. Índice de Capacidad MCP y MCPC

Los resultados obtenidos con estos índices muestran %DC muy bajos y constantes en todos los casos, mostrando que este es un método con baja eficiencia para diagnosticar correctamente la capacidad de procesos, así tengan la ventaja de no tener como supuesto la distribución normal.

En general los resultados observados, permiten concluir que los índices no se ven afectados cuando en los procesos intervienen un mayor número variables o características de calidad, en este caso, 2 y 3 variables.

El índice MCP en procesos con distribución no normal de dos variables presente un correcto diagnóstico de capacidad cuando los procesos son afectados en variabilidad con niveles de correlación nula y débil. Para procesos con tres variables este índice no presenta un diagnostico aceptable.

El índice MCPC, es el uno de estos índices que no tiene el supuesto de tener procesos con una distribución normal, el diagnóstico de capacidad de este índice es correctos en procesos de dos variables con cambios en centramiento en niveles de correlación nula y débil, en el caso de cambios en variabilidad tiene un mejor diagnóstico cuando el nivel de correlación es fuerte en los demás niveles de correlación no es del todo incorrecto pero podrán presentarse falencias en los cambios de variabilidad mayores a uno. En procesos con tres variables el mejor diagnostico de este índice se presenta en cambios en centramiento con un nivel nula de correlación.

8.2. Conclusiones generales

- ★ El desempeño de los índices es fuertemente afectado por la distribución de los procesos.
- ★ Todos los índices se ven afectados por los cambios en los niveles de correlación, especialmente en el nivel de correlación Fuerte.
- ★ La mayoría de los índices que presentan un buen desempeño en procesos de 2 variables comenten Error Tipo II.
- ★ En procesos normales de 3 variables, el índice CPM tiene un buen comportamiento pero comete Error Tipo I.
- ★ El índice MCPM es el que tiene más correctos diagnósticos de capacidad tanto para procesos normales como no normales.
- ★ El índice MCPC (sin supuesto de normalidad) presenta un buen diagnóstico para procesos bivariados no normales con correlación nula y débil sólo para las alteraciones centramiento y para alteraciones en variabilidad, los niveles de correlación son media y fuerte.
- ★ El índice CPM es el único índice que tiene un buen desempeño para procesos de tres variables con cambios en variabilidad y niveles bajos de correlación.
- ★ El resultado obtenido por el índice MCPM es mucho mejor comparado con los resultados obtenidos en los antecedentes.
- ★ Los resultados obtenidos por el VCPM, más precisamente en su componente CPM, no presentan los mismos resultados por Martinez en el 2007, debido a que este índice tiene un correcto diagnóstico para cambios en variabilidad y no en cambios centramiento como lo indica el trabajo mencionado.

9. Bibliografía

1. Bothe, D. R. (1997). Measuring Process Capability. New York:McGraw-Hill.
2. Braun, L. (2001), New Methods in Multivariate Statistical Process Control (MSPC). Diskussionsbeiträge des Fachgebietes Unternehmensforschung, pp. 1-12.
3. Castagliola P. y Garcia, J. (2005), Capability Indices Dedicated to the Two Quality Characteristics Case. Journal Quality Technology and Quantitative Management, Volumen 2, No. 2, 201 p.
4. Chen, H. (1994), A Multivariate Process Capability Index over a Rectangular Solid Tolerance Zone, Statistica Sinica, No. 4, 749p.
5. Cheng, C. S., Hubele, N. F., Shahriari, H. (1991). A bivariate process capability vector. In: Keats, J. B., Montgomery, D. C., Eds. Statistical Process Control in Manufacturing, New York: Marcel Dekker, 299-310.
6. Flury, M. y Barbiero, C. (2001). Aplicación de Técnicas de Control Multivariado en Procesos Industriales. Sextas Jornadas Investigaciones en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística".
7. Flury, M. y Barbiero, C. (2002). Control Estadístico de Procesos Multivariados. Esquemas de Muestreo para Gráficos T^2 de Hotelling. Séptimas Jornadas Investigaciones en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística.
8. García, T., Vásquez, M. y García, J. (2004). Efectos sobre la calidad del papel higiénico cuando se producen outliers multivariantes no detectables por los gráficos de control univariantes. Revista Ingeniería UC. Vol. 11, No 2, 67-77.
9. Genz, A. (2009), Función pmvnorm del software R. Department of Mathematics, Washington State University.
10. Kotz, S., Johnson, NL. (1993). Process Capability Indices. London: Chapman and Hall.
11. Kotz, S., Lovelace, C. (1998). Process capability indices in theory and practice. Arnold (London and New York).
12. Kotz, S., Johnson, NL. (2000). Continuous Multivariate Distributions, Models and Applications. John Wiley y Sons, 5/05/2000 - 752 páginas.
13. Miwa, A., J. Hayter y Kuriki, S. (2003). La evaluación de los generales no centrados probabilidades ortante. Journal of the Royal Statistical Society , Ser. B, 65, 223-234.
14. Jackson. (1995). A multivariate process capability vector. 4th Conferencia de investigación en procedimientos para la ingeniería industrial. Pág. 307

15. Juran, J.M., Gryna, F. y Bingham, R. (1987). Manual de control de la calidad. Segunda Edición. Ed. Reverte.
16. Lenis, D., Ospina, J. (2010). Comporación de la potencia en la Ddetección de se;ales fuera de control de álgunos gráficos de control multivariado. Tesis de grado Estadística, Universidad del Valle.
17. Martinez, A. (2007). Evaluación comparativa de índices multivariados para el análisis de capacidad mediante la simulación de procesos. Tesis de grado Estadística, Universidad del Valle.
18. Montgomery, D. (2004). Control Estadístico de la Calidad. Tercera edición. Ed. Limusa Wiley.
19. Mosquera, J., Olaya, J. y Escobar, R. (2007). Aplicación del Control Estadístico Multi-variante en un proceso de extrusión de película plástica. Scientia et Technica Ano XII, No. 37. Universidad Tecnológica de Pereira.
20. Ripley, BD. (1987). Simulación estocástica (función mvrnorm). Wiley. Página 98.
21. Shahriari, H., Hubele, N. F., Lawrence, F. P. (1995). A multivariate process capability vector. Proceeding of the 4th Industrial Engineering Research Conference, Institute of Industrial Engineers, 304-309.
22. Shahriari, H., Abdollahzadeh, M. (2009). A New Multivariate Process Capability Vector. Journal Quality Engineering, Volumen 21, 290 p.
23. Taam, W., Subbiah, P. and W.Liddy, J. (1993). A Note on Multivariate Capability Indices, Journal of Applied Statistics, 20(3), 339p.
24. Wang, F.K., Du, T.C.T. (2000). Using principal component analysis in process performance for multivariate data. Journal International od Management Science OMEGA. Volumen 28, 185-194 p.
25. Zaid, A., Sultana A. (2008). Assessment and Comparison of Multivariate Process Capability. Journal of Mechanical Engineering, vol. ME39, No. 1. Transaction of the Mech. Eng. Div., The Institution of Engineers, Bangladesh.