EXPLORACION DE LA GEOMETRIA DE LA ESTIMACION EN UN MODELO DE REGRESION CON VARIABLES INSTRUMENTALES

ROBERTO BEHAR GUTIÉRREZ, MC.[1]
JOSÉ FRANCISCO BURGUETE H., PHD.[2]
FERNANDO BRAMBILA PAZ, PHD.[3]

RESUMEN

En el modelo de regresión ortodoxo en el cual las variables predictoras son no aleatorias y los errores aleatorios son independientes e idénticamente distribuidos, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios para los parámetros del modelo posee excelentes propiedades, como consistencia e insesgamiento, además es el mejor estimador lineal insesgado.

Sin embargo, cuando las variables predictoras son aleatorias y además correlacionadas con los errores aleatorios, los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios pueden perder propiedades muy deseables como la consistencia.

En la investigación que se presenta se pretende explorar la geometría de métodos como el de variables instrumentales que pretende resolver algunas de las limitaciones planteadas para método de mínimos cuadrados ordinarios.

[1] Profesor Titular, Departamento de Producción e Investigación de Operaciones, Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle. Cali-Colombia.
[2] Profesor Investigador Titular. Universidad de las Américas. Puebla-México.
[3] Profesor Investigador Titular. Departamento de Matemática - Universidad Nacional Autónoma de México.

INTRODUCCION

LA IMPORTANCIA de la construcción de una geometría alrededor de un problema estadístico, radica en que con base en ella puedan lograrse niveles más elevados de abstracción y por lo tanto de generalización de algunos conceptos; por otro lado puede proporcionar elementos para la mejor comprensión de una situación estadística e inclusive puede facilitar el planteamiento de un problema, colocando para su solución toda la herramienta geómetrica, axiomáticamente consistente.

Sobre la geometría del método de mínimos cuadrados ordinarios asociado con el modelo de regresión ortodoxo se ha escrito bastante aunque en nuestro medio no se ha divulgado lo suficiente. Menor difusión ha tenido la geometría asociada con el método de mínimos cuadrados generalizados.

El tratamiento del modelo de regresión con variables predictoras aleatorias, ha sido patrimonio de la econometría, donde se ha dado su mayor aplicación. La intensidad de este fenómeno es tal que para estudiar el modelo de regresión con predictores aleatorios correlacionados con el error, casi seguramente debe recurrirse a los textos de econometría, los cuales, como es lógico, desarrollan el problema alrededor de la temática económica, en ocasiones no muy accesible a los no versados en dicho campo.

Se pretende en este artículo dar las pautas para el tratamiento de los problemas mencionados, planteados en un contexto estadístico e investigar algunos elementos básicos de la geometría asociada con ellos.

Se darán algunos conceptos generales sobre geometría, que luego serán aplicados evolutivamente a las diferentes situaciones en que se presenta el modelo de regresión, como ya se ha mencionado.

CONCEPTOS GENERALES SOBRE GEOMETRIA

El objeto de trabajo de la geometría son los vectores entendidos como elementos de un conjunto en el cual se han definido dos operaciones: "suma (+)" y "producto por un escalar (α)", las cuales deben cumplir ciertas propiedades. A dicho conjunto, digamos V, con sus dos operaciones mencionadas se le conoce como espacio vectorial y se representará por [V, +, α].

Donde la operación "+" es cerrada en V, conmutativa, asociativa; además en V existe un elemento neutro con respecto a la operación suma (+). Por otro lado la operación producto por un escalar, es tal que: $K \times V \rightarrow V$, además para cualquier v_1, v_2 que pertenezcan a V se cumple que si $d \in K$ (campo), entonces:

$$\alpha \; v_1 \in V,\; \alpha(dv_1) = (\alpha d)v_1,\; \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$$

y

$$(d+\alpha)v_1 = dv_1 + \alpha v_1.$$

Debe notarse que los elementos de V no son necesariamente arreglos ordenados como los puntos de R^p. La forma como está definido el espacio vectorial [V, +, α] da cabida a una clase muy amplia de vectores, como podrían ser el espacio de las matrices de orden mxn, con la suma ordinaria entre matrices y $\alpha \in R$; también podría pensarse en el conjunto de funciones reales continuas de valor real, con la suma definida como: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto por escalar $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, el cual constituye un espacio vectorial, una matriz de orden mxn, en el primer caso o una función continua en el segundo caso.

Sin embargo, conceptos como ángulos entre vectores, ortogonalidad, etc. no pueden definirse con base en las operaciones de suma (+) y producto por un escalar, siendo necesario definir una nueva operación que va a enriquecer las propiedades del espacio vectorial; dicha operación se conoce como producto interno.

El producto interno es una función:

$<,>: V \times V \rightarrow C$, tal que: si $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha \in C$

entonces: $\overline{\langle v_1, v_2 \rangle} = \langle v_2, v_1 \rangle$ donde la raya denota el conjugado. Además: $<v_1+v_2, v_3> = <v_1, v_3> + <v_2, v_3>$, $<\alpha v_1, v_2> = \alpha <v_1, v_2>$; $<v_1, v_1> \geq 0$ y por último $<v_1, v_1> = 0 \iff v_1 = 0$.

De esta manera en el espacio R^n, de las n-uplas con la suma definida componente a componente y con $\alpha \in R$, una definición válida de producto interno es:

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \,,$$

donde x_i, y_i son la i-ésima componente de **x, y** respectivamente. Análogamente en el caso del espacio de variables aleatorias (caso particular del espacio de funciones) una definición válida de producto interior es $<x,y> = E(xy)$ donde E(.) es el operador: valor esperado.

Puede probarse que: $0 \leq <v_1, v_2>^2 \leq <v_1, v_1> \cdot <v_2, v_2>$ de donde surge la definición de coseno del ángulo entre vectores como:

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\left[\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle\right]^{1/2}}$$

ahora, si definimos que dos vectores son ortogonales cuando $\cos\theta = 0$, es decir cuando $<v_1, v_2> = 0$, entonces tendríamos que el caso del espacio vectorial $[R_n, +, \alpha]$, que puede representar el espacio de las realizaciones de una muestra aleatoria de tamaño **n**, la ortogonalidad entre dos vectores **x**, **y** se da cuando $\sum x_i y_i = 0$.
En el espacio de variables aleatorias definidas anteriormente la ortogonalidad entre las variables aleatorias x, y se da cuando E (xy) = 0, nótese que si una de las variables está centrada (tiene media cero), si ellas son incorrelacionadas se cumple que: E [xy] = E [x] E [y] = 0, es decir que incorrelación implica ortogonalidad.

EL MODELO DE REGRESION CLASICO: (y, Xß, α^2 I)

y = X**ß** + $\in$, donde X es una matriz no aleatoria, $\in \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 I)$. Se supone que X es de rango completo. Nótese que $E[X\in] = X'E[\in] = 0$, lo cual significa que los vectores en X son ortogonales con $\in$, lo cual hace que el estimador $\hat{\beta}$ tal que $X\hat{\beta}$ es la proyección ortogonal de **y** sobre el espacio de las columnas de X, C(X), es el mejor estimador lineal insesgado.

Además si se supone que $\lim_{n\to\infty} \frac{X'X}{n} = Q$ finita y no singular, entonces $\hat{\beta}$ es un estimador consistente para **ß**. Si se entiende $E[X'\in] = 0$ como que la posición promedio entre X y realizaciones de $\in$ es ortogonal, a la línea que representa dicha posición se le llamará "linea del error", como se muestra en la Figura 1.

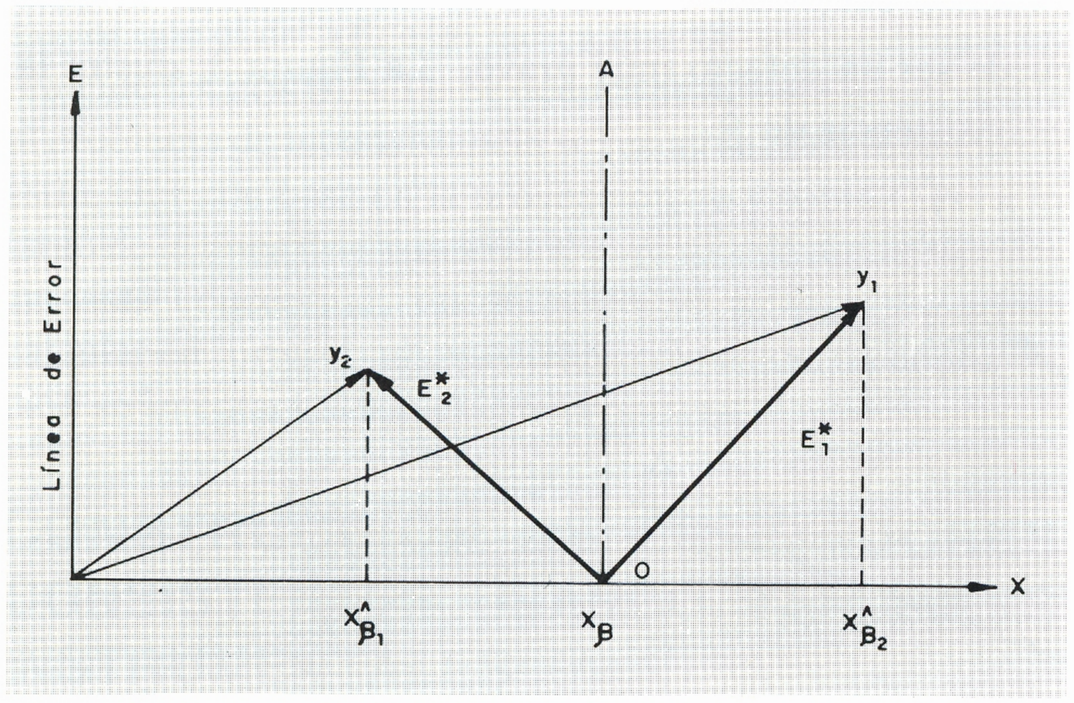


Figura 1. Interpretación del insesgamiento del estimador de mínimos cuadrados.

El gráfico puede interpretarse de la siguiente manera: Considérese el modelo **y** = x**ß** + $\in$ en donde las variables x, e y están centradas (por eso no aparece ßo). Este modelo genera **y** a partir de la suma de una constante **x**ß más un error aleatorio. Así puede darse el caso en que se genere **y**, a partir de la realización $\in_1$*, dando la estimación $x\hat{\beta}_1$, pero como la posición promedia debe ser la línea OA, entonces una realización $\in_2$* producirá $\mathbf{y}_2$, el cual generará la estimación $X\hat{\beta}_2$ de tal manera que la posición promedia de los $X\hat{\beta}$ es Xß, mostrándose así de una manera intuitiva el insesgamiento.

Debe notarse que:

$\|\in\|^2 = \langle \in, \in \rangle = E[\in^2] = V \in = \sigma^2$, lo cual significa que los errores $\in$ se mueven en un círculo de radio σ.

EL MODELO DE REGRESION CON ERRORES CORRELACIONADOS: (Y, Xß, Σ)

Se conservan los supuestos del modelo clásico, excepto que ahora $\in \sim (0, \Sigma)$ donde Σ es no negativa definida. En este caso, a pesar de que el estimador de mínimos cuadrados ordinarios es insesgado en esta nueva situación, él pierde sus propiedades óptimas. Antes de plantear la construcción de un nuevo estimador que recupere las propiedades de optimalidad, se recordarán algunos conceptos que se requerirán. Si V, W son dos subespacios de R^n, la suma se define como: $V + W = \{\mathbf{y}/\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z};\ \mathbf{x} \in V;\ \mathbf{z} \in \mathbf{W}\}$. Ahora, si V y W son disjuntos y además $V + W = R^n$, entonces todo $\mathbf{y} \in R^n$ puede descomponerse en forma única en un vector **x** en V y un vector **z** en W. Así **y** = **x** + **z**. De esta manera puede definirse una función que asocie a cada **y**, su correspondiente **x** en V, es decir:

$$R^n \xrightarrow{P} V \quad \text{de tal forma que } \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$$
$$\mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}$$

análogamente: $R^n \xrightarrow{Q} W$, es decir: $\mathbf{z} = Q\mathbf{y}$
$\mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{z}$

con base en estas ideas se define **x** como la proyección de **y** sobre V a lo largo de W. Similarmente **z** es la proyección de **y** sobre W a lo largo de V. P y Q se llaman los proyectores respectivos. Puede probarse que P es el proyector sobre V a lo largo de W si y solo si:

i) P**x** = **x**, para todo x ∈ V; ii) P**z** =0 para todo **z** ∈ W

Este resultado es muy importante pues constituye una caracterización del proyector.

Volviendo al punto de construir un estimador para **ß** en el modelo (**y**, X**ß**, Σ) que sea insesgado y que tenga propiedades óptimas, resulta que si se plantea el problema de encontrar la matriz P, tal que el estimador lineal **Py** sea insesgado para **Xß**, resulta la restricción PX = X.
Si la condición de optimalidad se plantea en términos de minimizar la traza de V [**Py**], sujeto a la restricción PX = X, al aplicar multiplicadores de Lagrange se puede obtener una nueva restricción para P, que es PΣ X^1 = 0, donde X^1 es la matriz de rango máximo tal que X'X^1 = 0.

Recordando la caracterización de proyectores, se tiene que si PX = X y PΣ X^1 = 0 entonces P es el proyector sobre C(X) a lo largo del espacio C (Σ X^1), que se denotará como $P_{x.\Sigma x^1}$. El significado geométrico se ilustra en la Figura 2. Al estimador $\hat{\beta}$, generado con base en el proyector $P_{x.\Sigma x^1}$, se le conoce como estimador de mínimos cuadrados generalizados.

MODELO DE REGRESION CON PREDICTORES ALEATORIOS

Considérese el modelo **y** = X**ß** + ∈, con ∈ ~(**0**, σ^2I) pero ahora X es aleatoria. Así que E [X∈] = E {E[X∈/X]} = E [XE [∈/X]], de donde se deduce que E [X∈] = 0, cuando E [∈/X] = 0, lo cual se logra cuando x y ∈ están incorrelacionadas, en este caso el estimador de mínimos cuadrados ordinarios conserva sus propiedades. Los problemas empiezan cuando E [∈] ≠ 0, lo cual puede verse de la siguiente manera: el estimador de mínimos cuadrados $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'.(X\beta + \in) = \beta + (X'X)^{-1} X' \in$ el cual puede escribirse como:

$$\hat{\beta} = \beta + \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \cdot \frac{X' \in}{n}$$

si se toma límite en probabilidad se obtiene:

$$plim\ \hat{\beta} = \beta + plim \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} . plim \frac{X' \in}{n}$$

Si se supone que $\text{plim}\left(\frac{X'X}{n}\right) = Q$ no singular, entonces

$\text{plim} \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} = Q^{-1}$, lo cual implica que el estimador de mínimos cuadrados ordinarios es consistente sólo si $\text{plim} \frac{X' \in}{n} = 0$, es decir si X y **y** son asintomáticamente incorrelacionados.

Sin embargo, cuando $\text{plim} \frac{X' \in}{n} \neq 0$ el estimador de mínimos cuadrados ordinarios es inconsistente, lo cual puede ser un defecto muy grave. La Figura 3, ilustra la inconsistencia de $\hat{\beta}$.

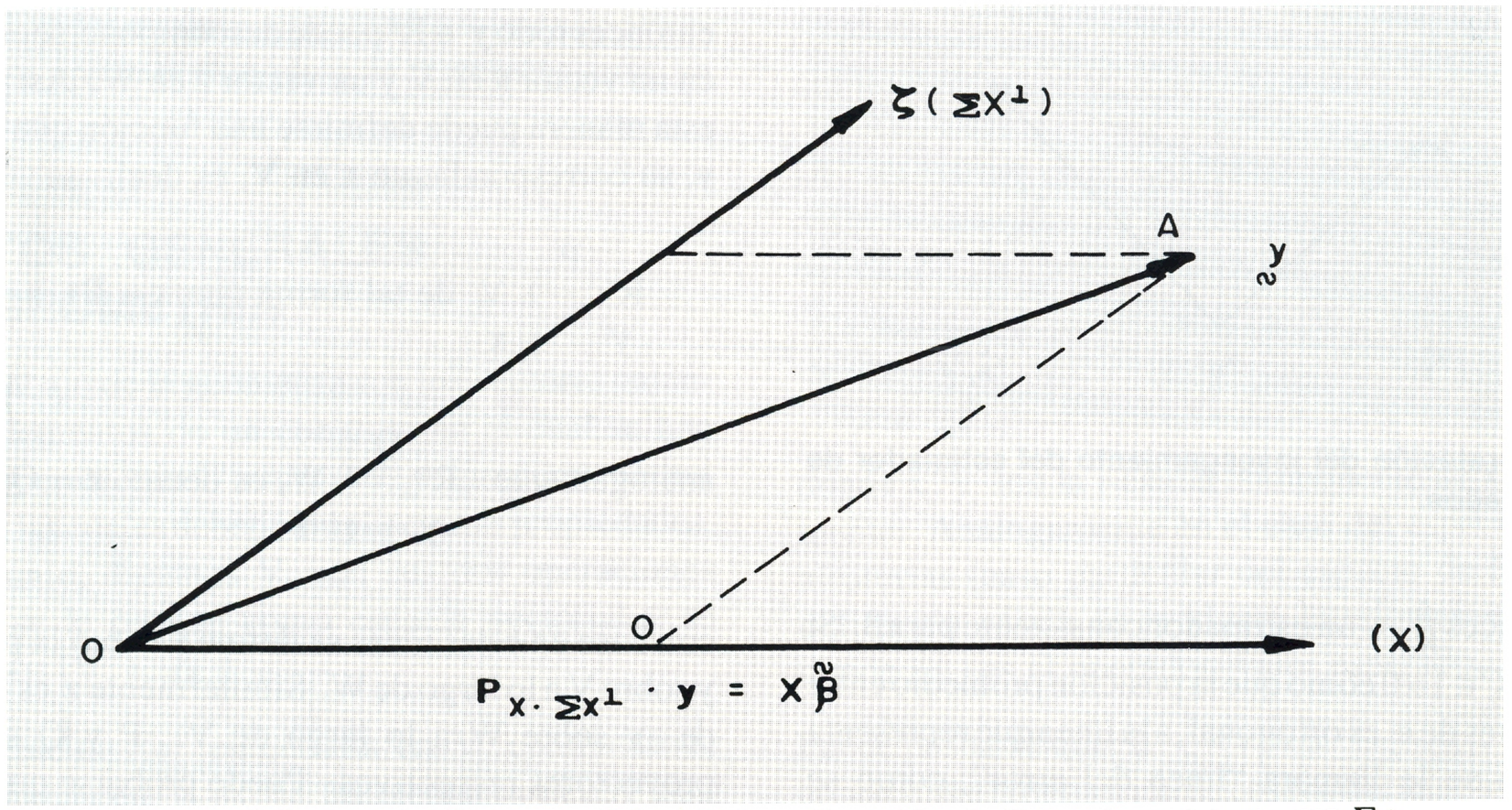


Figura 2. Interpretación geométrica de la estimación de ß en el modelo (y, Xß, Σ).

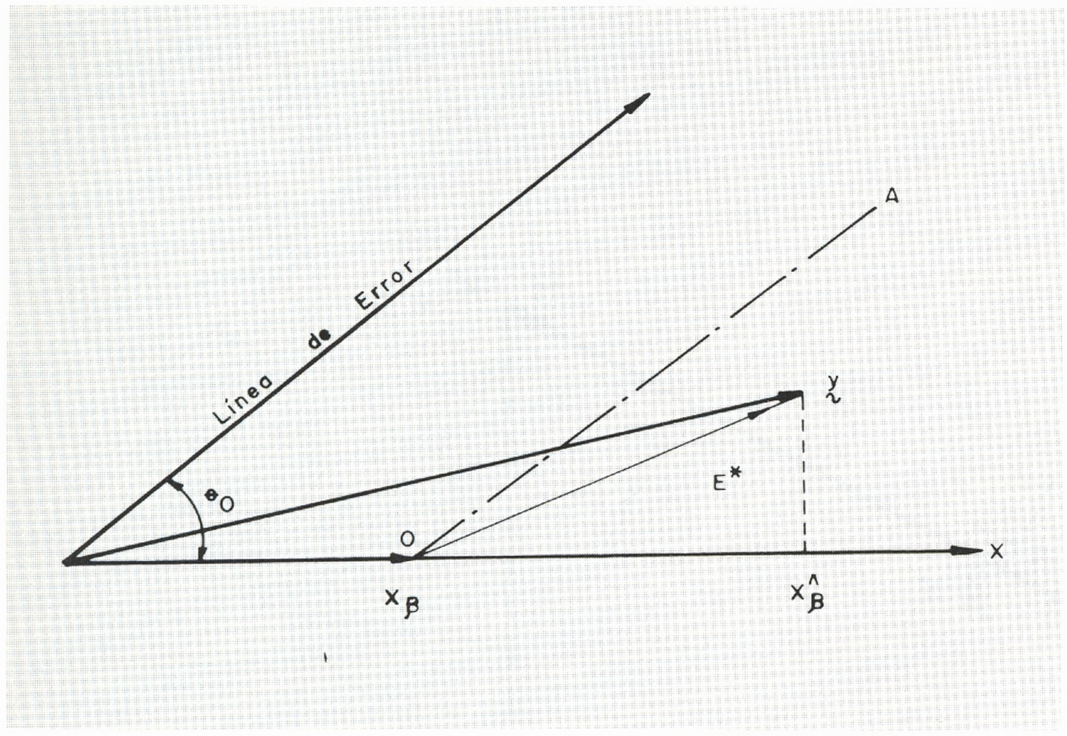


Figura 3. Ilustración geométrica de la inconsistencia de ß, cuando $plim\ \frac{X'\in}{n} \neq 0$

Para el correcto entendimiento de esta gráfica, debe tenerse en cuenta que la situación mostrada se da para un valor de n, grande.

Si $plim\frac{x'\in}{n} = E\ x'\in\ = \langle x,\in\rangle \neq 0$ entonces:

$\cos\theta = \cos\theta_0 \neq 0$ lo cual explica la posición relativa de x y la línea del error. Nótese que en promedio la posición del error trasladado a continuación de x**ß**, debe estar en la línea O A, lo cual significa que en promedio el vector **y** tiene la dirección de la línea O A, de donde se desprende que el promedio de las proyecciones ortogonales de **y** sobre **x** es mayor que el de **xß**; esto indica que $\mathbf{x}\hat{\beta}$ sobreestima a **xß** (cuando $0 < \cos\theta_0 < 1$). Se deduce de manera intuitiva que el problema de inconsistencia se resuelve construyendo un estimador con base en la proyección de **y** sobre C (x) a lo largo de la línea de error, lo cual es plausible desde el punto de vista conceptual, sin embargo no se ve claro cómo calcular en forma explícita dicha proyección. A continuación se intentará resolver este problema.

CONSTRUCCION DE ESTIMADORES CONSISTENTES USANDO VARIABLES INSTRUMENTALES

Supóngase que se está trabajando con todas las variables centradas (con el propósito de ignorar ßo). Además supóngase que la matriz X consta de n observaciones sobre k variables aleatorias, en el modelo $\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \in$.

Si se logra encontrar k variables $Z_1, Z_2,..., Z_k$, linealmente independientes las cuales se observan a los n individuos, generándose así la matriz $Z = [\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2},..., \mathbf{Z_k}]$, tal que: $plim\ \frac{Z'\in}{n} = 0$, es decir que las variables **Z** son asintóticamente incorrelacionadas con el error $\in$; lo cual significa que cuando n es muy grande el espacio $\in$ del error es ortogonal con el espacio C(Z). Algebraicamente puede procederse, premultiplicando por Z' ambos lados del modelo: $\frac{Z'y}{n} = \frac{Z'X}{n}\beta + \frac{Z'\in}{n}$, después de dividir por n.

Al sacar límite en probabilidad se obtiene:

$$plim\frac{Z'y}{n} = \left(plim\frac{Z'X}{n}\right)\beta + plim\frac{Z'\in}{n}$$

si se asume que

$plim\frac{Z'X}{n} = \Sigma_{zx}$ y que $plim\frac{Z'y}{n} = \Sigma_{zy}$, de donde surge en forma natural un estimador consistente para **ß**, como

$$\tilde{\beta} = \left(\frac{Z'X}{n}\right)^{-1}\ \frac{(Z'Y)}{n} = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

A este estimador se le llama estimador de variables instrumentales, y al conjunto de variables $Z_1, Z_2,..., Z_k$ se les llama variables instrumentales o instrumentos.

En forma más general, el modelo puede incluir algún conjunto de variables no aleatorias o no correlacionadas con el error, así $\mathbf{y} = X\mathbf{ß} + W\boldsymbol{\alpha} + \in$, donde $W = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2,..., \mathbf{W}_m]$ tal que $plim\ \frac{W'\in}{n} = 0$. Si hacemos T = [X W] y $\delta' = (ß, \alpha)$, el modelo puede escribirse como: $\mathbf{y} = T\delta + \in$, debe ahora encontrarse una matriz Z de orden n x(k+m) de variables instrumentales, tal que $plim\ \frac{Z'\in}{n} = 0$ y que $plim\ \frac{Z'T}{n} = \Sigma_{zt}$ exista y sea no singular, así

$\tilde{\delta}_{vi} = (Z'T)^{-1}(Z'Y)$. Es importante notar que las variables en la matriz W pueden usarse como variables instrumentales, de tal manera que sólo se requerirá adicionalmente de una matriz $Z_1 = [\mathbf{Z}_1 ... \mathbf{Z}_k]$ de variables instrumentales y así $Z = [W: Z_1]$.

Nótese que en el modelo ortodoxo $y = X\mathbf{ß} + \in$. , en donde X es no aleatoria, la propia matriz X contiene variables instrumentales, por tanto el estimador de variables instrumentales es: $\tilde{\mathbf{ß}}_{vi} = (X'X)^{-1}\ X'\mathbf{y}$, el cual coincide con el estimador de M.C.O.

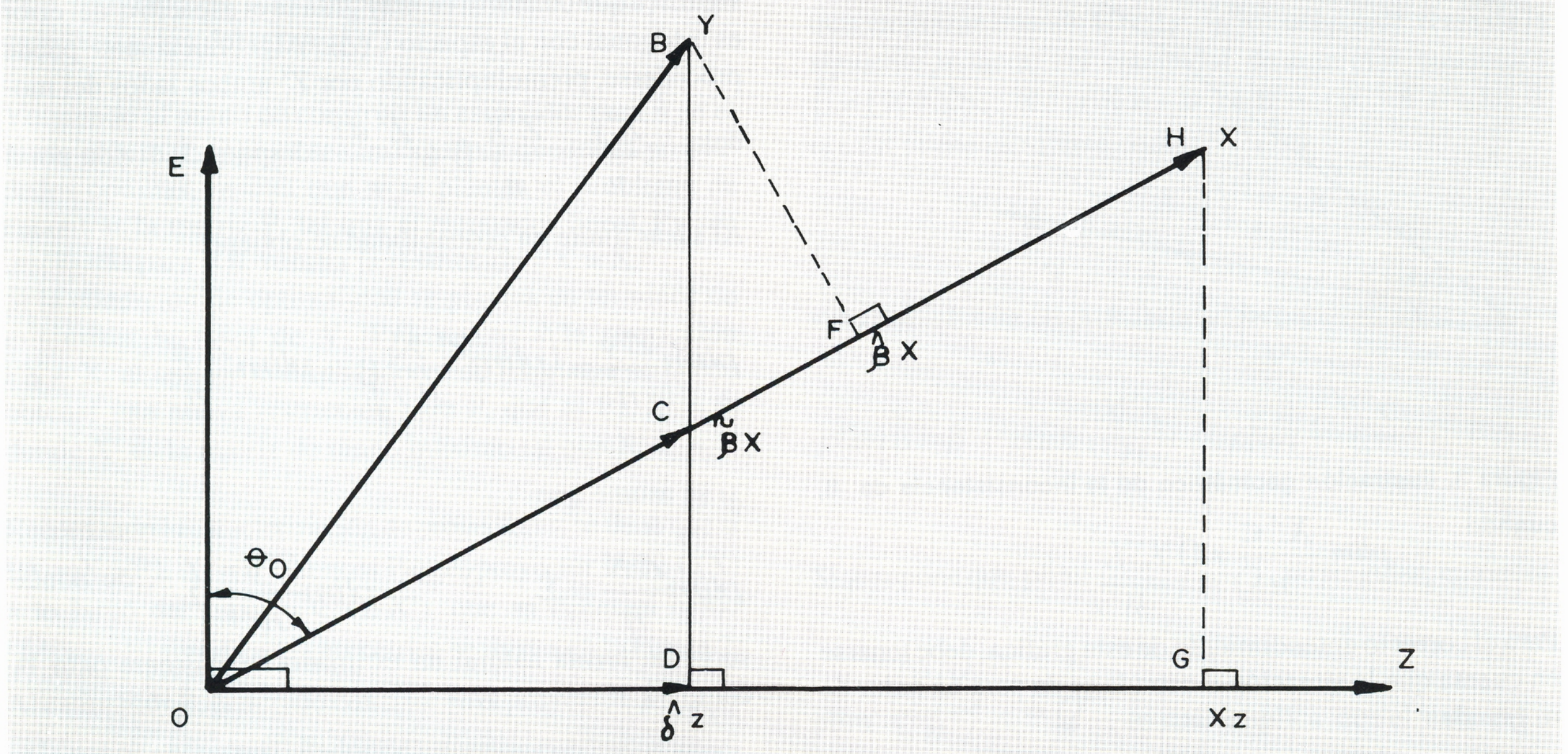


Figura 4. Interpretación gométrica de la estimación por variables instrumentales en el modelo $\mathbf{y} = \mathbf{x}\beta + \in$:

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA ESTIMACION POR VARIABLES INSTRUMENALES

Considérese inicialmente el modelo con un solo regresor aleatorio: $\mathbf{y} = \mathbf{x}\beta + \in$, donde $E[\in] = 0$, $E[x\in] \neq 0$

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\in$, se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, \in \rangle}{\|x\|\|\in\|} = \frac{E(x\in)}{\|x\|\|\in\|}$$

por lo tanto si $E(x\in) = a \neq 0$, entonces: $\cos\theta_o \neq 0$, lo cual indica la posición de no ortogonalidad entre $\mathbf{x}$ y $\in$, como se ilustra en la Figura 4.

La línea O E define la posición relativa del espacio de los errores con respecto a $\mathbf{x}$, en el límite este ángulo es θ_0. La línea punteada BF marca la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{x}$, determinando el estimador de mínimos cuadrados ordinarios. La línea BC marca la proyección (OC) de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{x}$ a lo largo de OE, es decir, a lo largo del espacio ortogonal a $\mathbf{Z}$, la cual representa la estimación por variables instrumentales. Para el ejemplo de un solo regresor, con base en la semejanza de los triángulos COD y HOG, resulta que $\|\tilde{\beta}\| = |(Z'x)^{-1}(Z'y)|$ y puede probarse que el signo correcto de β hace que $\tilde{\beta} = (Z'x)^{-1}(Z'y)$ el cual coincide con la expresión del estimador de variables instrumentales. Así este estimador es la proyección sobre $\mathbf{x}$ a lo largo del espacio del error.

Regresando al modelo con regresores aleatorios, $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \in$, se está proponiendo la descomposición de $\mathbf{y} \in E_n$, en un elemento de C(X) y un elemento del espacio del error. Supóngase que las columnas de una matriz E son una base para el espacio del error $\in$.

Ahora si Z es una matriz correspondiente a k variables instrumentales, entonces $plim \frac{Z' \in}{n} = 0$, lo cual significa que en el límite, una base para el espacio es Z^1, es decir, la matriz de rango máximo tal que $Z'Z^1 = 0$. Así $r(Z^1) = n-k$, es decir que el espacio del error es $C(Z^1)$. La situación se ilustra en la Fig. 5.

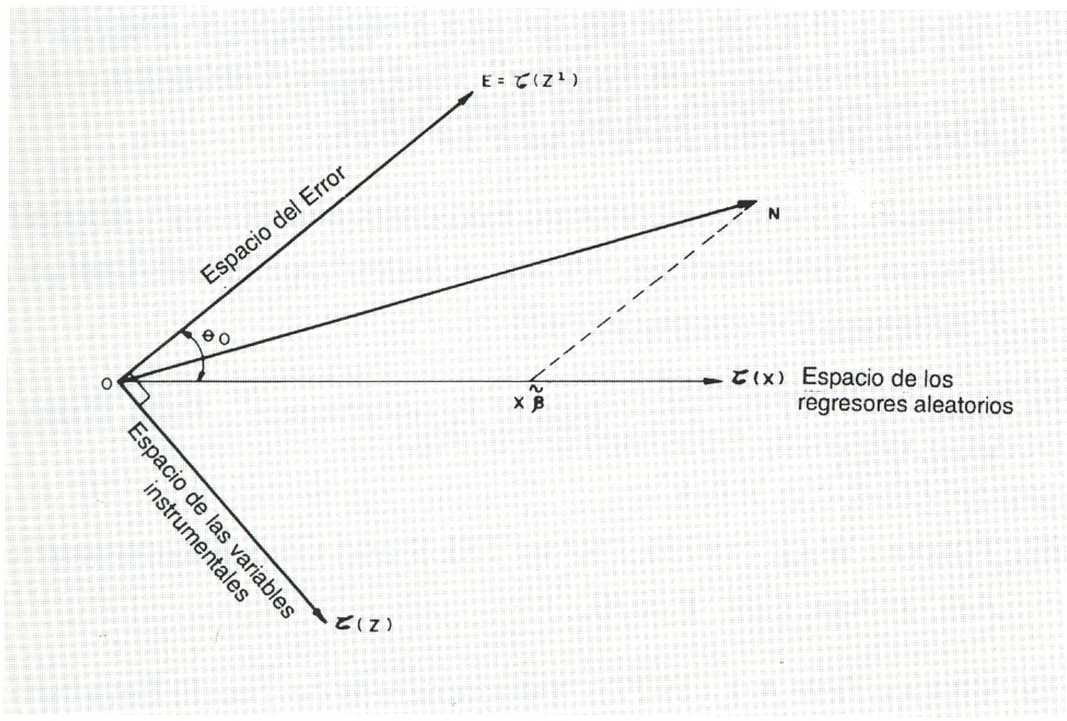


Figura 5. Ilustración de los espacios vectoriales que intervienen en el método de estimación por variables instrumentales.

Así la predicción, usando Z como matriz de variables instrumentales se realiza mediante el proyector $P_{x.z}^{1} = X(Z'X)^{-1}Z'$, el cual produce estimaciones consistentes de **ß**. Puede notarse en la figura 5 que entre "más cerca" se encuentren los espacios C(Z) y C(X) más se aproxima $P_{x.z}^{1}$ al proyector asociado al de mínimos cuadrados ordinarios, lo cual es muy plausible ♦

BIBLIOGRAFIA

1. AFRIAT S.A. (1958). "Ortogonal and Oblique proyectors and the caracteristics of pairs of vector spaces". Departament of Mathematics the Hebrew University Jesuralem. Camb. Philos. 53,4 pp. 800-816.

2. BASMANN R.L. (1962). "Letter to Editor". Econométrica 30: 824-826. Octubre 1962.

3. BASMANNN R.L. (1957). "A generalized classical Method of Linear Estimation of coeficients instructural Equations". Econométrica; 25, pp. 77-83.

4. BEHAR G., ROBERTO. (1987). "Consideraciones sobre el planteamiento de un Modelo de Regresión. Ponencia presentada al I Congreso Mexicano de Control de Calidad e Informática. Xalapa, Veracruz, México. 23-25, febrero de 1987.

5. BEHAR G., R. (1987). "Sobre la Geometría del Modelo de Regresión con Predictores Aleatorias". Tesis de Grado: CEC-CP. México.

6. BRAMBILA F. y BEHAR R. (1986) "Geometría y Estadística". C.E.C. C.P. Chapingo, México. (Inédito).

7. BRUNDY J. and JORGESON. (1986). "Efficient estimation of simultaneous equations by Instrumental Variables". Review of Economics and Statistics 53, 203-224.

8. CRAGG J. (1966). "On the Sensitivity of Simultaneous equations estimators to the Stochastic Assumptions of the Models". Am. Stat. Ass: March 1966. pp. 136-151.

9. DRYMES P. (1978). "Introductory Econometrics". Springer-Verlar. New York.

10. GINSBERG W. (1971). "Instrumental Variables: some generalizations". Am. Stat. Ass. April 1971.

11. GOLDBERGER and OLKIN (1971). "A minimun distance interpretation". Am. Stat. Ass. April 1971.

12. GRAYBILL F. (1961). "An Introduction to linear Statistical Models". McGraw-Hill. New York.

13. HENDRY D. F. (1976). "The estructure of simultaneous equation estimator". J. of Econometrics, 4. 51-85.

14. HORTON, R.L. (1976). "The General Linear Model". McGraw-Hill. New York.

15. INTRILIGATOR M.C. (1978). "Econometric Models, Techniques and Applications". Prentice Hall. New Jersey.

16. JOHNSTON J. (1972). "Econometric Methods". 2nd. Edition. McGraw-Hill. New York.

17. JUDGE, HILL, GRIFFITH, LUTKEPOHL, LEE. (1982). "The theory and practice of Econometrics". New York: John Wiley & Sons.

18. KELEJIAN H.H. (1974). "Random parameters in a Simultaneous equation frame work: Identification and estimation". Econométrica 42, 517-527.

19. KETELLAPPER R.H. (1981). "Two-stage least square estimation in the simultaneous equation model with errors in the variables". Review of Economics and Statistical, Febrero 1981. pp. 696-701.

20. LAWSON-HANSON (1974). "Solving Least Square Problems". Prentice-Hall. New Jersey.

21. LEAMER E.E. (1975). "A result on the sign of restricted least-squares estimates". Journal of econometrics 3 (1975). 387-390.

22. MARTíNEZ G.A. (1982). "Métodos Econométricos". 2a.Edición. Centro de Estadística y Cálculo, Colegio de Postgraduados. Chapingo, México.

23. McALLER, PAGAN, VISCO. (1986). "A further result on the sign restricted least-square estimates. Jr. of Econometrics 32(1986). 287-290.

24. PAGAN and HALL. (1983). "Residual Analysis". Econometric Review 2(2), 160-254.

25. POLLOCK D.S.G. (1979). "The Algebra of Econometrics". John Wiley and Sons. New York.

26. RAIERSOL, O. (1941). "Confluence Analysis by means of Lag Moments and Other Methods of confluence Analysis". Econométrica, 9. pp. 1-24.

27. RAIERSOL, O. (1945). "Confluence Analysis by means of Instrumental Sets of Variables". Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik, 32 A (4) (119 pages).

28. RAO C.R. (1973). "Linear Statistical Inference and its applications". 2nd. Edition. John Wiley and Sons. New York.

29. SEARLE S.R. (1971). "Linear Models". John Wiley and Sons. New York.

30. SEBER G.A.F. (1977). "Linear Regression Analysis". John Wiley. New York.

31. SCHMIDT P. (1976). "Econometrics". Marcel Dekker. New York.

32. TAKEUCHI, YANAI, MUKHERJEE. (1982). "The Foundations of Multivariate Analysis". John Wiley. New York.

33. THEIL H. (1953). "Repeated Least-Squares Applied to Complete Equation System". The Hague: Central Planning. Bureau. (mimeographed).

34. THEIL H. (1953). "Estimation and Simultaneous Correlation in Complete Equation Systems". The Hague: Central planning Bureau (mimeographed).

35. THEIL H. (1961). "Economic Forecasts and Policy". Second Edition (first editions, 1958). Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

36. THEIL H. (1971). "Principles of Econometrics". John Wiley. New York.

37. TOMEK, W.G. (1973). "R^2 in TSLS and GLS Estimations". Am. J. Agr. Con. P. 670.

38. VILLASEÑOR A.J. (1977). "Fundamentos de Teoría Estadística. Parte I". Mimeo. Centro de Estadística y Cálculo. Colegio de Postgraduados. Chapingo, México.

39. VISCO I. (1978). "On the obtaning the right sign of a coefficient estiate by omitting a variable from the regression. Jr. of Econometrics 7, 115-117.

40. SHITE H. (1982). "Instrumental variables regression with independent observations". Econométrica 50, 483-499.

41. WONNACOTT R., WONNACOTT T. (1979). "Econometrics". John Wiley and Sons. New York.

42. WILKS, S.S. (1962). "Mathematical Statistics". John Wiley and Sons.

43. ZELLNER and THEIL. (1962). "Three stage least square: simultaneous estimation of simultaneous equations". Econométrica Vol. 30. No.1.