

Tres elementos de la complejidad y su relación con el azar

Orden y desorden, contingencia, emergencia.
Sus implicaciones en la modelación estadística.

Gabriel Conde Arango

Profesor asistente, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística. Univalle.

RESUMEN

Hay que reconocer un establecimiento en la ciencia, el cual guía y determina su propio desarrollo. Explícita o implícitamente se admiten los conceptos y su práctica queda determinada por esta aceptación. Sin embargo cualquier desarrollo visto en este marco será limitado. Pero además, el mismo sistema científico y de conocimiento provee los medios para que surjan nuevas maneras de advertir y buscar otros caminos. El azar es un concepto que no está por fuera de tal estructura. Se espera entonces que la teoría y la práctica que involucra el azar, por un lado esté limitada por tal organización, pero hay tensiones que generan elementos "liberadores" que permiten una visión más allá de cualquier establecimiento. Lo aleatorio (que aquí es sinónimo de azar) ha tenido y tiene una interpretación, teórica o intuitiva, que más o menos es aceptada por la comunidad científica. Sin embargo en las dos últimas décadas se han manifestado corrientes de pensamiento que cuestionan o por lo menos muestran una percepción diferente a la interpretación actualmente generalizada de azar. Haremos una aproximación a dichas corrientes.

Palabras Clave: Aleatoriedad, azar, complejidad, caos, orden, desorden, inestabilidad, emergencia, contingencia, sistema dinámico, modelación matemática.

Cuando se piensa en el desarrollo o avance de una disciplina científica como la matemática o la estadística, uno se pregunta ¿de donde pueden surgir y cómo surgen las nuevas ideas que alimentan dicho desarrollo?. ¿Cómo es posible que se encuentren nuevos caminos, si lo que nos muestran nuestros profesores es algo tan acabado y tan sólido?. Para introducir el tema y a manera de ejemplo pensemos en interrogantes tales como: ¿Es factible que cambie la forma actual de construir modelos estadísticos? ¿Realmente es el azar lo que pensamos que es?. ¿Qué papel ha jugado el azar y su concepción en el avance de la ciencia? Las respuestas a estos interrogantes pueden llegar a ser muy complicadas en razón de su carácter y es evidente que estarán ligadas a la disciplina en particular conjuntamente con su propio desarrollo histórico. Dentro de este pequeño ensayo podremos tocar, sólo con cierta profundidad, algunos elementos que pueden ayudar a responder, en parte, estas preguntas y claro está! surgirán cuestionamientos que ojalá guíen otros derroteros que seguramente conformarán a su vez conjuntos de ideas para el futuro.

Un "lugar donde podemos buscar" alguna fuente de ideas es el de las propias concepciones que soportan una disciplina. Un ejemplo para ilustrar: un arquitecto diseña una obra de acuerdo a su propia concepción cultural sobre el espacio (incluyendo intereses, costos, conceptos como el de optimización y otros). Si su concepción de espacio cambia, seguramente cambiará su manera de diseñar. El diseño en ingeniería corresponde a los conceptos que se manejen en la época del diseño y que influyen notoriamente en el diseñador. Los puentes de la edad media son bien diferentes a los puentes actuales. Las construcciones del siglo XII en Europa son diferentes a las construcciones del siglo XII en América, corresponden a sociedades diferentes, con intereses y modos de vida diferentes.

Se puede argumentar que este lugar (el de las concepciones que soportan una disciplina) no es algo exclusivo de la propia ciencia (en particular de la estadística o la matemática) y que necesariamente colinda o se intercepta con

la filosofía. Tal argumento no serviría más que para fundamentar la validez y la legitimidad de una posible investigación y de todo su posterior desarrollo y nos ubicaríamos en la discusión acerca de la relación entre filosofía y ciencia y sus diferentes papeles.

Un concepto fundamental en estadística es el concepto de aleatoriedad o azar (Es bueno recalcar que aquí se tratarán como sinónimos). Todo usuario de la estadística en la ciencia o en la tecnología y el propio estadístico debe tener una concepción intuitiva o elaborada de la aleatoriedad. Sus actos estadísticos, su práctica, dependerán mucho de cómo dicho personaje entienda lo aleatorio. Lo que hemos llamado "pensamiento estadístico" Behar (2000) en un individuo, comporta en parte, su visión y su accionar en el mundo.

Esto nos remite a observar cómo se ha desarrollado o cómo se ha entendido la aleatoriedad en el avance de la ciencia, por lo menos en los últimos dos siglos. Sin embargo, preferiblemente haremos una sinopsis desde un punto de vista actual y consideraremos el panorama propuesto por P. M. Jacovkis (1995), donde se dan por lo menos cuatro interpretaciones o visiones asociadas al azar, a saber: el azar desde la falta de información, el azar desde lo complejo, el azar como falta de estabilidad y el azar intrínseco o esencial.

La concepción actual más generalizada acerca de la naturaleza del azar es la que da cuenta de su existencia apoyándose en la falta de información por parte del observador, acerca de un fenómeno particular probablemente simple como la decisión entre dos opciones o posibilidades de las cuales no se tiene la información necesaria para determinar una de ellas, por ejemplo, determinar si un objeto o una persona está en la habitación A o en la habitación B, sin que un determinado observador las conozca. Tal observador tendrá, seguramente, que tratar de asignar probabilidades tiene sus bemoles. ¿Que significa asignar probabilidades?. En teoría de probabilidades se utiliza una función muy especial para ello. Pero para una persona del común ¿como opera dicha asignación y que significado tiene?. Leamos lo que nos dice Ian Hacking (1995) "Por un lado es estadística y

le concierne las leyes estocásticas de los procesos aleatorios. Por otra, es epistemológica, dedicada a estimar grados razonables de creencia en proposiciones bastante carentes de un trasfondo estadístico." De todas maneras esto no nos despoja de un instrumento intuitivo para concebir lo impredecible y tomar una decisión. La falta de información obliga al observador a considerar la situación desde una perspectiva aleatoria.

Para la ciencia clásica un fenómeno está o puede ser controlado si lo podemos esquematizar mediante la relación causa - efecto y mejor aún si esa representación es expresada matemáticamente en términos de ecuaciones o funciones. En esta misma medida decimos que el fenómeno es "ordenado". Un esquema como este se formó y se fortaleció en el ámbito de la ciencia apoyada por la propia concepción clásica y con mayor acento después de la construcción newtoniana como modelo de la naturaleza. Sin embargo tal situación llevaría a algunas sin-salidas de las cuales hay que resaltar los trabajos de L. Boltzman en el siglo XIX. Boltzman hace un tratamiento estadístico de los sistemas físicos con un gran número de partículas y propone conceptos complementarios como el de entropía para abordar el conocimiento del estado de un sistema determinado.

Los conceptos newtonianos habían generado una concepción de universo físico cerrado dominado por leyes determinísticas, de aquí que el conocimiento "extremo" de la situación y la velocidad de "todos" los componentes del Universo unificaría la naturaleza en el sentido de poder predecir cualquier estado futuro. Sabemos que esto es imposible por la cantidad de información requerida para el "manejo" de tal sistema. De la misma manera, aquí volvemos al planteamiento de la "ignorancia" o falta de información, pero estamos en otra categoría u otro nivel de naturaleza diferente a la expresada en el ejemplo dos párrafos atrás, por cuanto tenemos un "sistema complejo" tanto en número como en cualidad, el Universo. Muchos son los sistemas (físicos, sociales, naturales, etc.) los cuales tendremos que "mirar" desde este punto de

vista, lo cual nos lleva a la necesidad de simplificar su tratamiento reduciendo o dejando a un lado variables y relaciones entre ellas. Los efectos de tal omisión o su no consideración nos lleva a "abrir una bolsa", por lo general una variable aleatoria, en la cual "vertemos" toda la información que un modelo de este calibre, no puede proporcionar. Según tal línea de pensar, es este el componente aleatorio. La falta de control sobre todas las variables del fenómeno conllevaría a que el fenómeno tenga un comportamiento aleatorio.

Miremos, sin embargo, que lo aleatorio no es un concepto tan acabado como lo podría sugerir lo anterior. Matalón (2001) haciendo referencia al azar escribe:

"De modo más o menos explícito, todos los teóricos admiten que el cálculo de probabilidades formaliza algo que en cierto sentido existe en todas partes, las divergencias se refieren a la naturaleza de ese algo".

Como sugiere Matalón en esta cita, la naturaleza del azar es problemática y a pesar de ello el cálculo de probabilidades lo esquematiza y provee métodos para su tratamiento matemático y su aplicación. Recuerdo alguna vez haberle escuchado a León San Juan la expresión "no hay nada más determinístico que un buen curso de probabilidad". Sin embargo, como deberíamos esperar, no es un concepto acabado. Leamos ahora a P. M. Jacovkis (1995):

"Además de influir profundamente en disciplinas como la matemática, las ciencias naturales y las ingenierías, la computación proporciona nuevos elementos para analizar el concepto de azar y su vieja y complicada relación con el determinismo".

Desde hace 20 o 25 años vienen surgiendo nuevas ideas que de alguna forma cuestionan o se interrogan acerca de una visión del azar como mera falta de información. Encontramos, como propone el siguiente texto de Prigogine (1997), no solo en la literatura especializada de las matemáticas sino también en la de otros

campos como el de la economía, la física y la sociología. Mirar por ejemplo en (2), (6), (10), (11) y (12), referencias donde se perciben otras concepciones del azar como consecuencia de replanteamientos en la forma de "ver" algunos fenómenos o hechos, asociados a su vez, a términos que remiten a ideas como las de las leyes de la termodinámica, la irreversibilidad o simetrías temporales (en física), algunos tipos de reacciones químicas, fenómenos meteorológicos y geológicos, series económicas temporales, muchos fenómenos de la vida, así como sucesos en la propia estructura abstracta de los sistemas como son los concernientes a la autoorganización y a la emergencia de propiedades en un sistema de acuerdo a sus relaciones internas. I. Prigogine (1997) insinúa otro punto de vista:

"... la dinámica obliga a concebir la posibilidad de procesos inversos que, destruyendo las correlaciones, tornan menos simétrica la distribución de las velocidades (de las muchas partículas) ... Empezamos a concebir cómo la irreversibilidad puede aparecer en el nivel estadístico. Se trata de construir una dinámica de correlaciones y no una dinámica de las trayectorias. ... También es posible preguntarse por qué es necesario partir de las distribuciones de probabilidad. Después de todo describen el comportamiento de conjuntos, de haces de trayectorias. ¿Acaso utilizamos los conjuntos debido a nuestra ignorancia o existe, como ya fue sugerido, una razón más profunda?"

Esta otra visión la asociamos a por lo menos dos esquemas de desarrollo que se presentan hoy en día de una manera muy prolifera en los medios científico y tecnológico, los cuales P. M. Jacovkis (1995) delimita con las expresiones "azar como falta de estabilidad" y "azar intrínseco o esencial".

Consideremos un sistema dinámico (evoluciona con el tiempo) y supongamos que en él podemos reconocer algunas características importantes como por ejemplo:

- Se pueden delimitar las trayectorias con relaciones matemáticas bien determinadas. Estas relaciones son de tipo no-lineal.

- El sistema o parte de él es sensible a las condiciones iniciales, lo que significa que dadas dos posiciones o estados, así sean muy próximos entre sí, con el transcurrir de la dinámica podrán generar órbitas tan separadas que sería imposible su determinación porque nos veremos limitados por los "bordes" de nuestro conocimiento en términos de la precisión de los estados iniciales.
- Dos partes del sistema serán necesariamente "visitadas" por la dinámica en cualquier par de instantes diferentes.

La inestabilidad está referida esencialmente a la imposibilidad o a la pérdida del poder de predicción asociado a la sensibilidad tan alta del sistema a pequeños cambios en un estado inicial determinado. En otras palabras un pequeño cambio en una variable, pongamos por caso de x_0 a $x_0 + \Delta x$, produce cambios tan grandes en las trayectorias, después de cierto tiempo t , que es imposible para un observador, hacer una determinación de los estados del sistema a pesar de tener algoritmos o relaciones matemáticas perfectamente determinadas para hacerlo. El aumento² Δx_n es del orden $\Delta x_n \sim e^{hn} \Delta x_0$. Esta propiedad es básica en los sistemas que se denominan caóticos. Se dice que un sistema tiene comportamiento caótico si interactúan en forma combinada tres ingredientes: un elemento de regularidad, otro de impredecibilidad, más la imposibilidad de descomposición, los cuales se asocian respectivamente a los tres supuestos listados en el párrafo anterior. La tensión producida por estos tres ingredientes produciría en un sistema, el llamado comportamiento caótico determinístico.

Así pues diremos que el marco general donde surge la inestabilidad es el de los sistemas dinámicos, además, un sistema determinístico muy simple puede generar com-

portamientos inestables que normalmente asimilamos como aleatorios (o que parecen aleatorios). Esto plantea una paradoja para la concepción del azar ya que por un lado se reconoce lo determinístico y contrariamente o por separado, se reconoce lo aleatorio. A su vez esto se refleja, por ejemplo, en la manera como planteamos y arreglamos los modelos estadísticos separando los dos elementos en componentes o variables. No obstante, si estamos dispuestos a reconocer que pequeñas incertidumbres se agrandan de tal manera que los movimientos se tornan impredecibles a largo plazo, entonces deberemos también estar dispuestos a reconocer que determinismo y aleatoriedad son dos categorías que pueden coexistir entremezcladas en el devenir de un sistema dinámico simple y que posiblemente no son más que diferentes niveles de una misma cualidad.

Son muchos los ejemplos en diferentes áreas del conocimiento con los que es posible ilustrar tal coexistencia entremezclada en los sistemas dinámicos simples. Aciaremos sin embargo que no se hace referencia aquí, a cualquier mezcla, es posible que una buena analogía sea aquella que aparece entre números racionales e irracionales para formar el Continuo Real, en otras palabras, si estamos en presencia de cierta dinámica especial, en ella habrán o aparecerán ocasionalmente comportamientos o trayectorias erráticas junto a (tan cerca como se quiera) otros a los cuales podremos asociar un patrón definido. El término "simple" se refiere a un sistema de pocos elementos con una o varias relaciones de realimentación que producen en el sistema comportamientos complicados donde pueden eventualmente, observarse estabilidades o inestabilidades totalmente impredecibles, que se comportan con una tremenda sensibilidad a cambios en los parámetros o en los valores iniciales de las variables del sistema.

Es posible entonces que esta condición de entrelazamiento del azar y del orden se deba tener en cuenta cuando se construye un modelo, lo cual implicaría probablemente, incluir un componente dentro del modelo que no tenga ni el carácter aleatorio ni el carácter determinístico. Esto podría resolverse adicio-

² Aproximadamente dos puntos iniciales cercanos separados por una distancia Δx_0 divergen, en el tiempo el uno del otro en $\Delta x_n \sim \Delta x_0 e^{hn}$, donde h es un coeficiente llamado exponente de Lyapunov y n es el tiempo o el número de iteraciones del sistema. Es así como, un exponente de Lyapunov positivo $h > 0$ indica caos. Ver E. Ott (1993).

nando un componente caótico en el modelo. Habría empero, una tarea importante a resolver y es la construcción de la teoría matemática (de estimación si se quiere por el momento) para el empleo de esta clase de componente.

Desde el otro punto de vista planteado por Jacovkis, la existencia intrínseca del azar se concibe como una propiedad constructiva del mundo real que sería el resultado de la transposición o tránsito al mundo macroscópico de los fenómenos microscópicos, es decir la aleatoriedad como producto de la transición de información desde lo infinitamente pequeño hacia las escalas que dominamos en nuestro quehacer diario como seres humanos. Si se piensa en las siguientes palabras de Ilya Prigogine (1997): "La naturaleza realiza las estructuras más delicadas y complejas en los fenómenos irreversibles y lejos del equilibrio", se concluye que tales sistemas, son un requerimiento vital en la naturaleza.

Consideremos otros elementos que nos pueden ayudar a la comprensión de tal propuesta, miremos por ejemplo la siguiente propiedad del espacio (por lo menos de R^n):

"F. P. Ramsey demostró que era imposible el desorden completo. Toda colección grande de números, puntos u objetos contiene por necesidad, configuraciones regulares." Graham R. L. y Spencer J. H. (1990).

Así por ejemplo: Si en un plano consideramos 5 puntos sin que 3 de ellos estén alineados, 4 de ellos formarán siempre un cuadrilátero convexo.

Es extraordinario e importante saber que cualquier conjunto de cinco puntos en un plano ya configuran una estructura más o menos organizada (por lo menos se reconoce un patrón en ella) cual es la del cuadrilátero convexo. En últimas en algo se mitiga la duda cuando se encuentran proposiciones como la de Ramsey y saber que en cualquier escenario por más complicado o complejo que parezca encontramos patrones que implican, si se quiere, cierto orden.

Hay dos visiones importantes que consideran el azar como algo fundamental en la naturaleza y determinan dos escuelas que han

trabajado por separado el tema. Una está liderada por autores tales como C. Langton, S. Kaffman del MIT, que en mucha literatura científica se ve desde la perspectiva "vida al borde del caos" dando a entender que comportamientos muy complejos (como la vida) surgen en ciertas zonas de los sistemas que se identifican con el "Estrecho régimen en el que los sistemas mantienen un comportamiento que no cae ni en la repetición permanente ni tampoco se disuelve en la plena turbulencia" Waldrop (1992).

La otra corriente está en relación a la expresión "sistemas alejados del equilibrio" y es liderada fundamentalmente desde Europa por I. Prigogine. Su propuesta conlleva a fijar una distancia en los sistemas dinámicos considerados, para ello planteamos las siguientes relaciones o equivalencias: por equilibrio termodinámico entenderemos el estado del sistema en el cual se presenta máxima entropía. En estados cercanos al equilibrio consideraremos la producción o cambio de entropía muy pequeña (mínima) y si un sistema abierto mantiene grandes intercambios de energía o materia con su entorno o exterior decimos que el sistema está lejos del equilibrio. Encontramos innumerables ejemplos en la naturaleza, desde la turbulencia en los fluidos hasta el propio surgimiento de la vida pasando por la explosión de hermosas formas en las tundras o en los corales, en los cuales vemos reflejadas y resuenan las siguientes palabras de I. Prigogine (1997).

"...a partir de cierta distancia, de cierto alejamiento del equilibrio el orden emerge. Traspasado un umbral, no solo se destruyen sistemas, sino que también aparecen estructuraciones, emergen sistemas nuevos."

Aunque es un paso bastante ambicioso pretender asimilar el no-equilibrio con el azar, por lo menos sí están relacionados en que un fenómeno o sistema en estado de no-equilibrio deberá producir información cuantitativamente y cualitativamente aleatoria o estocástica, la que seguramente deberá ser "tratada" estadísticamente.

Con la aceptación de esta visión resulta que

el azar no solo es fundamental en la naturaleza sino que sería esencial para el surgimiento de formas superiores y seguramente éstas con su gran diversidad (dos flores no son exactamente iguales) sugieren configuraciones que dejan "ver" en el trasfondo patrones de gran belleza y un "orden" que quizá hacen que la flor tenga su naturaleza propia, además del reconocimiento de las diferentes categorías en el "trayecto" entre determinismo y azar.

Así pues tenemos que lo aleatorio junto a la coexistencia del orden y el desorden parecen ser fundamentales en la naturaleza y no será la falta de información lo que producirá un comportamiento aleatorio. Pensemos más bien que el azar es una propiedad inherente a la naturaleza.

Fenómenos con estas características son comunes en la naturaleza o mejor, dichas características son propias de la naturaleza y por tanto, siendo consistentes con lo planteado inicialmente, no debemos ignorar su conexión con la esencia y la "práctica" del azar, pero con renovada visión, en la acción de modelar la realidad. O sea que definitivamente esto nos debe cuestionar para, por lo menos, llegar a interrogantes que muevan nuestro interior hacia la participación en la construcción del desarrollo de la estadística. Es en este tránsito o umbral donde es menester ubicarnos con nuestros conocimientos (matemáticos si se quiere) y en particular la modelación matemática, con el objetivo de reconfigurar bajo nuevas premisas conceptuales, el saber y su posible aplicación.

A partir de aquí quisiera resaltar la conexión con dos principios más, los cuales estarían íntimamente relacionados con la discusión sobre la naturaleza del azar, son ellos lo contingente y lo emergente. Una aproximación a lo contingente la podemos hacer pensando en aquellos hechos que se presentan muy casualmente pero que a la vez son "muy raros", son únicos, se presentan una sola vez siendo entonces irrepetibles. No es un extremo pensar en que cada suceso del devenir de la realidad es un hecho contingente, más aún S. J. Gould (1999) lo plantea en relación con la evolución:

"El espectáculo de la evolución sería una serie de acontecimientos, asombrosamente improbables, suficientemente perceptibles cuando son observados en retrospectiva y sujetos a explicación rigurosa, pero absolutamente impredecibles y relativamente irrepetibles."

Este planteamiento se puede generalizar no solo a la evolución de las especies sino a la evolución de cualquier sistema dinámico caótico (como un ecosistema o un modelo teórico) con la improbabilidad de cada estado del sistema dada por su gran sensibilidad (recordemos que pequeños cambios, grandes resultados) adicionando la emergencia de propiedades en su propia dinámica. La emergencia es un atributo de los sistemas complejos alejados del equilibrio y se refiere al surgimiento de propiedades dentro del sistema en medio de la dinámica.

La cita de S. J. Gould y el planteamiento presentado en su libro "La vida maravillosa" conlleva a tropiezos casi irreconciliables con esquemas como el del método científico o los de la Historia vista como secuencias de hechos encadenados mediante causaciones las cuales serían válidas vistas en retrospectiva como lo sugiere el texto citado. Desde luego que esto remueve incluso concepciones inherentes a la misma experimentación, ningún experimento es repetible, ningún hecho en el devenir de lo real es reproducible. En otras palabras todos los eventos en cada instante son únicos, todo suceso, todo producto, todo evento, todo ser es único, la diversidad es extrema. Por otro lado todo suceso sería extremadamente improbable y esto precisamente lo haría único.

En este contexto hemos hecho una asimilación provisional entre azar y desorden, aunque para muchos autores estas serían dos categorías diferentes, para lo que queremos expresar en este artículo es válida dicha asimilación en aras de una mejor comprensión de las ideas sin que ello nos lleve totalmente fuera del contexto. Con esto tenemos entonces asociados tres categorías fundamentales: el orden (y el desorden), lo contingente y lo emergente, las cuales tendrán que ser tenidas en cuenta si se quieren abordar, mediante

modelos, ciertos fenómenos a los que podemos asociar una "complejidad emergente" y que hemos querido aproximar en este texto desde un plano sistémico admitiendo además su habitual presencia en la naturaleza y en la sociedad.

Se resaltan y se repite por último que de una u otra manera esta visión cuestiona el propio método de la ciencia y ciertos enfoques de la historia, la economía y la física que narran los hechos como encadenamientos o sucesiones que parecen reglas o leyes únicas e invariables en las que cualquier causa dada en cualquier tiempo producirá un efecto determinado ignorando que en todo instante hay latentes infinitas posibilidades para el futuro inmediato del sistema y su determinación dependerá no de una causa sino de un infinito de fuentes las que a su vez se desenvuelven dependiendo hasta de la más minúscula alteración. Es decir, la comprensión del mundo debe hacerse en dirección del reconocimiento de tales posibilidades en cada instante, lo cual deberá ser parte de otra concepción de lo aleatorio que a su vez debe influenciar en las formas de modelar la realidad a través de las matemáticas.

Estas afirmaciones o propuestas configuran nuevas maneras de modelar. Encontramos ya grupos de investigadores desarrollando ideas, explorando e indagando en el tema desde diferentes especialidades como la física, la matemática, la economía, la química y otras.

BIBLIOGRAFÍA

BEHAR ROBERTO (2000) "Estadística Aplicada" Univalle.

GRAHAM R. L. Y SPENCER J. H (1990). "Teoría de Ramsey". Revista Investigación y Ciencia.

HACKING IAN (1995) "El surgimiento de la probabilidad". Editorial Gedisa. Barcelona.

JACOVKIS PABLO M. (1995) "Computación, azar y determinismo". Revista Ciencia Hoy Vol. 5, No 28, 44 - 50.

MATALÓN. (2001) Citado por Batanero Carmen en "Aleatoriedad, Modelización,

Simulación". Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Presentado en la X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza.

OTT EDWARD (1993). "Chaos in Dynamical Systems" Cambridge University Press. Canada.

PRIGOGINE ILYA (1997). "El fin de las certidumbres" Ediciones Taurus, Madrid.

STEPHEN JAY GOULD (1999). "La vida maravillosa". Editorial Crítica, Barcelona.

WALDROP, M. M (1992). "Complexity". Touchstone. New York.

ÁVILA FUENMAYOR F (1999). "Los conceptos de azar y arte en Jorge Wagensberg".

BARNESLEY M (1993). "Fractals Everywhere" Morgan Kaufmann.

BRIGGS J. PEAT F. D (1994). "Espejo y Reflejo, del caos al orden", Editorial Gedisa Barcelona.

CAMBEL A. B (1993). "Applied Chaos Theory. A paradigm for complexity". Academic Press. San Diego California.

ESTEVE SELMA MIGUEL A. (2000) "Biodiversidad, Crisis y Complejidad" <http://www.arrakis.es/~sfrm/materia1.htm>

LEWIN ROGER (1995). "Complejidad. El caos como generador de orden". Editorial Tusquets Barcelona.

UNERMB. <http://aparterei.com/wagensberg.htm>.

WAGENSBERG JORGE (1998). "Ideas para la imaginación impura". Editorial Tusquets Barcelona.