

DINÁMICA COSMOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR CON ACOPLAMIENTOS DE TIPO NO MÍNIMO Y DE GAUSS-BONNET

DIEGO FERNANDO JIMÉNEZ TORRES



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS-FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2017

DINÁMICA COSMOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR CON ACOPLAMIENTOS DE TIPO NO MÍNIMO Y DE GAUSS-BONNET

DIEGO FERNANDO JIMÉNEZ TORRES

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PRESENTADO AL PROGRAMA ACADÉMICO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS-FÍSICA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS-FÍSICA

DIRECTOR
LUIS NORBERTO GRANDA VELÁSQUEZ, PH.D.
DOCTOR EN FÍSICA



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS-FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2017

Título del trabajo

Dinámica cosmológica del campo escalar con acoplamientos de tipo no mínimo y de Gauss-Bonnet

Resumen: El gran suceso observacional, contrario a toda expectativa, de que la expansión actual del universo es acelerada, ha abierto uno de los problemas más enigmáticos y profundos de la física. La extraña aceleración ha sido atribuida a algo que genéricamente se ha denominado energía oscura. Una línea de trabajo que ha buscado resolver el problema está basada en las teorías de campo escalar-tensorial, las cuales emplean un campo escalar acoplado no mínimamente con la geometría. En este trabajo se estudian soluciones de energía oscura para un modelo de campo escalar con acoplamientos de tipo no mínimo (NMC) y de Gauss-Bonnet (GB). Las ecuaciones de campo de dicho modelo se calculan bajo la hipótesis de un universo isótropo, homogéneo y espacialmente plano. Con estas ecuaciones se desarrolla un mecanismo de reconstrucción que permite obtener el potencial y el acoplamiento GB para cualquier escenario cosmológico. En particular, se reconstruye explícitamente el modelo para varios escenarios cosmológicos de expansión acelerada, tales como las soluciones del tipo quintaesencia, phantom, De Sitter y Little Rip. Posteriormente se estudia el modelo en ausencia de potencial, obteniéndose soluciones de tiempo tardío que pueden ser ajustadas apropiadamente para describir escenarios con fase de quintaesencia y phantom e incluso es posible encontrar restricciones paramétricas que permiten describir transiciones entre ambas fases. Se demuestra que estas soluciones presentan un comportamiento acorde a las cotas existentes en la ecuación de estado de energía oscura. Por último se estudia el sistema autónomo del modelo con acoplamientos tipo ley de potencias y exponencial. En ambos casos se obtienen puntos críticos estables que describen escenarios asintóticos importantes de energía oscura, entre los que se incluyen quintaesencia, phantom y De Sitter. Todas las soluciones obtenidas cubren una gran variedad de escenarios de energía oscura que son consistentes con los rangos observacionales provenientes de diferentes fuentes como Planck, WMAP entre otras.

Palabras clave: Acoplamiento no mínimo (NMC), Acoplamiento Gauss-Bonnet (GB), Energía oscura

Índice general

Índice general	II
Introducción	IV
1. Fundamentos	1
1.1. Modelo estándar de la cosmología	1
1.2. Evidencia observacional de la energía oscura	5
1.2.1. Corrimiento al rojo	5
1.2.2. Distancia de luminosidad	5
1.2.3. Supernovas de tipo Ia y la aceleración del universo	7
2. Acoplamientos no mínimo y de Gauss-Bonnet	9
2.1. El modelo	10
2.2. Mecanismo de reconstrucción	12
2.2.1. Solución tipo ley de potencias en fase de quintaesencia	14
2.2.2. Solución tipo ley de potencias en fase phantom	15
2.2.3. Solución de De Sitter	16
2.2.4. Solución Little Rip	17
2.2.5. Solución con fases de quintaesencia y phantom	18
3. Modelo en ausencia de potencial. Soluciones exactas	19
3.1. Límite de futuro lejano ($x \gg 1$)	21
3.2. Restricción $2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\xi\lambda - 48g_2 = 0$	21
3.3. Solución general	23
4. Análisis del sistema autónomo	26
4.1. Introducción a la teoría de sistemas autónomos	26

4.2. Ecuaciones del sistema autónomo, puntos críticos y estabilidad de las soluciones	28
4.2.1. Sistema autónomo correspondiente a un modelo con $V(\phi) \propto \phi^n$, $h(\phi) \propto \phi^N$ y $\eta(\phi) \propto \phi^m$	29
4.2.2. Sistema autónomo correspondiente a el modelo exponencial	34
5. Conclusiones	38
A. Conceptos basicos de geometría	40
B. Identidades adicionales del tensor de curvatura	42
C. Cálculo de los tensores $T_{\mu\nu}^{GB}$ y $T_{\mu\nu}^{NMC}$	46
Bibliografía	51

Introducción

La cosmología es el estudio del universo en su conjunto, en el que se incluyen teorías sobre su origen, su evolución, su estructura a gran escala y su futuro. El contexto teórico de la cosmología moderna es la Teoría de la Relatividad General, cuya descripción de la gravitación se formula a partir de una densidad lagrangiana que contiene la curvatura escalar como componente geométrica y una fuente asociada a la presencia de materia. De hecho, la relatividad general es considerada como la teoría de gravitación con más aceptación hoy en día.

Sin embargo, el descubrimiento de una disminución inesperada en el brillo proveniente de supernovas del tipo Ia [1, 2, 3] ha abierto uno de los problemas más importantes de la cosmología moderna. Estas observaciones han sido interpretadas como evidencia sólida de que la expansión actual del universo es acelerada por algo que genéricamente se ha denominado energía oscura. De hecho, los datos han mostrado que el universo está compuesto de un 4 % de materia bariónica, un 26 % de materia oscura y un 70 % de energía oscura [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Así pues, actualmente el universo se expande aceleradamente y con abundancia de un contenido de materia y energía que aún se desconoce.

Entre las diversas alternativas para explicar la aceleración del universo, se encuentra el modelo Λ CDM [9], el cual introduce la energía oscura como una nueva componente con densidad de energía constante denominada comunmente como constante cosmológica (Λ). Si bien el modelo Λ CDM goza de un gran éxito gracias a la precisión increíble con que las observaciones más recientes se han llevado a cabo, la teoría cuántica de campos predice un valor de Λ que llega a ser 120 órdenes de magnitud mayor que el valor observado, lo que constituye uno de los enigmas que desafía a cosmólogos y físicos en general y se le ha dado el status de problema de la constante cosmológica [10, 11]. Otra forma de introducir la energía oscura es a través del campo escalar de quintaesencia [12, 13, 14], para el cual se utiliza un potencial escalar escogido para lograr el efecto de presión negativa que le permita tomar el papel de energía oscura. No obstante, la quintaesencia requiere el ajuste de condiciones iniciales muy críticas para dar cuenta de los valores actuales de energía oscura. Además, se necesitan potenciales extremadamente planos [15, 16, 17, 18], los cuales son difíciles de encontrar en física de partículas, y esto plantea un problema de naturalidad para la cosmología de la quintaesencia.

Paralelamente, existe una variante que ha despertado mucho interés: La evidencia de la expansión acelerada puede ser la primera señal de un entendimiento incompleto de la propia interacción gravitatoria, más que el resultado de la presencia de alguna forma de materia o energía oscura. Modificar la relatividad general de Einstein puede llevarse a cabo a través de las teorías de gravedad modificada [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25], las cuales

se han propuesto como una alternativa muy promisorio para explicar la energía oscura. Sin embargo, existe una controversia sobre cuales propuestas satisfacen cotas existentes en el régimen de campos gravitatorios débiles o superan los llamados tests de sistema solar [26, 27]. Entre las diferentes clases de gravedad modificada se encuentra la de Gauss-Bonnet (GB), la cual es inspirada en teoría de cuerdas y puede superar dichos tests [28, 29, 30, 31]. Teniendo en cuenta que el término GB es un invariante topológico en cuatro dimensiones [32], su presencia en el lagrangiano debe estar acoplada a un campo escalar¹ que le permita contribuir a la dinámica cosmológica. Este acoplamiento con el campo escalar ha sido propuesto como fuente de energía oscura en numerosos estudios, en los cuales se han analizado aspectos como la expansión acelerada tipo ley de potencias [33, 34], estabilidad de soluciones de energía oscura [35], ecuaciones de estado variables en el tiempo [36], existencia de fases de quintaesencia y phantom [37] y mecanismos para evadir singularidades en diferentes límites asintóticos [38, 39].

Otro de los acoplamientos que ha sido ampliamente utilizado para dar cuenta de la expansión acelerada tanto en épocas tempranas como tardías es el acoplamiento no mínimo de la forma $\xi R\phi^2$ [40, 41], siendo ξ un parámetro adimensional y ϕ el campo escalar. El papel de este acople en el problema de la energía oscura ha sido estudiado en diferentes trabajos, en los cuales se analiza restricciones de ξ por test de sistema solar [42], existencia y estabilidad de soluciones Scaling [43, 44], atractores asintóticos de De Sitter [45], comportamientos phantom y súper aceleración [46, 47, 48, 49], aspectos perturbativos e incidencia sobre el CMB [50, 51], restricciones observacionales [52, 53] y el problema de coincidencia [54].

En el presente trabajo se estudian las soluciones de tiempo tardío de un modelo escalar-tensorial que contiene el acoplamiento no mínimo y el acople al invariante de Gauss-Bonnet. Este documento se ha estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se introducirán algunos elementos de la cosmología estándar y se presentará la evidencia observacional de la energía oscura. En la segunda parte se explicará el modelo correspondiente y se obtendrán las ecuaciones de reconstrucción, las cuales serán aplicadas a escenarios cosmológicos compatibles con la fenomenología de la energía oscura. La dinámica cosmológica se estudia a través de las ecuaciones de Friedmann modificadas en el formalismo de este modelo. En el tercer capítulo se obtendrán soluciones exactas en ausencia de potencial y se encontrarán restricciones paramétricas de tal manera que dichas soluciones describan un comportamiento acorde a los datos observaciones. En el último capítulo se estudiará el sistema autónomo de modelos correspondientes a acoplamientos tipo ley de potencias y exponencial. Finalmente, con base en los resultados obtenidos se escribieron algunas conclusiones.

¹Otra posibilidad consiste en que la presencia del invariante Gauss Bonnet en la acción sea no lineal.

CAPÍTULO 1

Fundamentos

1.1. Modelo estándar de la cosmología

La cosmología es la ciencia que estudia el origen y la evolución del universo como un todo. El modelo de la cosmología estándar está construido sobre el marco de la teoría de la relatividad general, cuya descripción de la gravitación viene dada por las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.2)$$

es el tensor de Einstein, κ^2 es la constante gravitacional de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico correspondiente y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía impulso asociado a la presencia de materia. Asumiendo que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala, la métrica (conocida como la métrica FRW) puede escribirse como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y k es una constante que determina la curvatura espacial del universo. Esta constante puede tomar los valores de 0, 1 ó -1 para espacios de geometría plana, cerrada y abierta respectivamente. Existe un gran número de evidencia experimental que sugiere que el universo es espacialmente plano [8, 10, 55]. En vista de ello, a lo largo de este trabajo se supondrá que $k = 0$.

La hipótesis de homogeneidad e isotropía permite además escribir el tensor energía impulso en la forma de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

donde u_μ es la cuadrivelocidad comóvil del fluido con densidad de energía ρ y presión P . Reemplazando (1.3) y (1.4) en las ecuaciones de Einstein se obtienen las ecuaciones de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3P) \quad (1.5)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho \quad (1.6)$$

donde $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble. Combinando las ecuaciones (1.5) y (1.6), puede escribirse la ecuación de conservación:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.7)$$

Para determinar completamente la dinámica del factor de escala es necesario conocer una relación entre la presión P y la densidad de energía ρ . La forma más usual es considerar una ecuación de estado de la forma:

$$P = w\rho, \quad (1.8)$$

siendo w un parámetro característico de cada fluido. En este caso, las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.7) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(1 + 3w)\rho \quad (1.9)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho \quad (1.10)$$

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + w) = 0 \quad (1.11)$$

La ecuación (1.9) establece que una expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$) solo ocurre para fluidos con $w < -1/3$. Combinando las ecuaciones (1.9) y (1.10) podemos escribir el parámetro de estado de la siguiente forma:

$$w = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (1.12)$$

Esta expresión nos permite calcular el parámetro de estado a partir de una expresión general de la función de Hubble. Si el parámetro de estado es constante, entonces las ecuaciones (1.10) y (1.11) pueden resolverse de manera explícita. En efecto, al integrar estas ecuaciones, se obtiene que:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

En esta solución, el factor de escala tiene un comportamiento que se le conoce como Power Law (ley de potencias). En general, estas soluciones se caracterizan por un factor de escala de la forma $a \propto t^p$, donde p es un parámetro mayor que cero. Como $H = \dot{a}/a$, la función de Hubble correspondiente es $H = p/t$.

A continuación se describen algunas soluciones correspondientes a diferentes clases de fluido (ver [10, 56])

- Materia no relativista (polvo). Este tipo de materia tiene una energía cinética despreciable y, por tanto, su densidad de energía ρ_m será la correspondiente a la de su masa en reposo. Además, la presión que ejerce será despreciable, y podemos considerar $P_m = 0$. Con esto se tiene que:

$$w = 0 \quad a \propto t^{2/3} \quad \rho \propto a^{-3}$$

- Materia relativista (fotones). De la mecánica estadística se conoce que $P_r = \rho_r/3$, donde P_r y ρ_r designan, respectivamente, a la presión y la densidad de energía relativistas. Por lo tanto, se tiene que

$$w = 1/3 \quad a \propto t^{1/2} \quad \rho \propto a^{-4}$$

- Constante cosmológica (Λ): El modelo de constante cosmológica corresponde a un fluido con presión negativa y densidad de energía Λ/κ . Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, la constante cosmológica puede ser interpretada como la densidad de energía del vacío. Por lo tanto, tenemos un fluido caracterizado por $w = -1$ y $\rho_\Lambda = \Lambda/\kappa$. Luego,

$$a = e^{H_\Lambda t} \quad \text{donde} \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

- quintaesencia. Con esta denominación se designan ecuaciones de estado del tipo (1.8) con $-1 < w < -1/3$. Sin embargo, en este caso en general, w no necesariamente es constante sino que puede variar con el tiempo t .
- Energía fantasma (phantom). Dicha energía puede ser modelada como un fluido hipotético con parámetro de estado $w < -1$. Estos modelos fantasmas tienen la curiosa propiedad de que al ser $w < -1$ la densidad de energía de tal fluido crece con la expansión del universo en vez de diluirse, prediciendo en un tiempo finito (t_s) la existencia de un Big Rip del espacio-tiempo. Una forma sencilla de describir un fluido fantasma es utilizando una solución Power Law de la forma $a \propto (t_s - t)^{-p}$ donde $p > 0$. De esta manera se tiene que:

$$H = \frac{p}{t_s - t} \quad w = -1 - \frac{2}{3p}$$

Obsérvese que los primeros dos fluidos producen expansión desacelerada, mientras que los últimos tres fluidos producen expansión acelerada. Una situación más general se presenta cuando hay una mezcla de varios tipos de fluido. En este caso, la densidad de energía total está dada por

$$\rho = \sum_i \rho_i \tag{1.13}$$

donde las densidades de energía ρ_i satisfacen:

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + P_i) = 0 \tag{1.14}$$

siendo w_i el parámetro de estado correspondiente al i -ésimo fluido. Si w_i es constante, entonces

$$\rho_i = \rho_{i0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_i)} \quad (1.15)$$

y

$$\rho = \sum_i \rho_{i0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_i)} \quad (1.16)$$

donde a_0 y ρ_{i0} son constantes de integración. Sustituyendo (1.16) en (1.10) se obtiene la siguiente expresión:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \sum_i \rho_{i0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_i)} \quad (1.17)$$

De aquí en adelante el subíndice (0) se utilizará para indicar que las magnitudes están evaluadas en la época actual (t_0). Así, las constantes a_0 y ρ_{i0} corresponderán a $a(t_0)$ y $\rho_i(t_0)$, respectivamente. Con el fin de establecer un nexo más próximo entre las funciones que aparecen en los modelos cosmológicos y las observaciones, conviene introducir los siguientes parámetros:

- la densidad crítica (ρ_c)

$$\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa^2} \quad (1.18)$$

- el parámetro de densidad (Ω_i)

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} = \frac{\kappa^2 \rho_i}{3H^2} \quad (1.19)$$

En virtud de estos parámetros, la expresión (1.17) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$H = H_0 \sqrt{\sum_i \Omega_{i0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w_i)}} \quad (1.20)$$

donde H_0 corresponde al valor actual del parámetro de Hubble ($H_0 = 70 \pm 10 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [8]). Como se verá más adelante, esta expresión servirá para analizar las contribuciones de energía de las diferentes especies de materia en el universo.

1.2. Evidencia observacional de la energía oscura

Para describir la evidencia observacional de la energía oscura es necesario introducir algunos elementos básicos de cosmometría.

1.2.1. Corrimiento al rojo

Un parámetro empleado habitualmente en cosmometría es el redshift (z) [10, 57, 56], el cual representa el cambio en la longitud de onda de un fotón debido a la expansión del universo. Es decir,

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a} \quad (1.21)$$

donde λ_0 es la longitud de onda observada en el tiempo t_0 y λ es la longitud de onda emitida en un tiempo $t < t_0$. El redshift es muy importante ya que es accesible observacionalmente. Mediante observaciones espectroscópicas de objetos distantes es posible comparar las longitudes de onda observadas para líneas conocidas y compararlas con las longitudes de onda de laboratorio, obteniendo así su redshift.

1.2.2. Distancia de luminosidad

Un aspecto fundamental en el modelo estándar de la cosmología se refiere a la medición de distancias. De hecho, existen varias maneras de medir distancias en el universo en expansión. Una de las formas más útiles de estimar una distancia es a través de la luminosidad de un objeto estelar. La distancia de luminosidad es definida por la relación (ver [10, 14, 57, 56]):

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F} \quad (1.22)$$

donde L es la luminosidad absoluta de la fuente luminosa y F es el flujo de energía radiante (J/s m^2) que llega a un detector ubicado en la tierra. Con el propósito de estudiar los efectos observacionales de la expansión del universo, considérese una fuente luminosa situada en la coordenada r_s y un observador ubicado en el origen de coordenadas. Supóngase además que la fuente emite un frente de radiación en el instante t_1 , el cual es detectado por el observador en el instante t_0 . En el momento de la observación, es decir en el instante t_0 , el área de la esfera sobre la cual se distribuye la energía radiante está dada por

$$A = 4\pi r_s^2 a^2(t_0) \quad (1.23)$$

La expansión del universo produce dos efectos que atenúan el flujo de energía detectado por el observador [57]. El primer efecto está relacionado con el corrimiento al rojo (un factor $1 + z$), y el segundo es debido a la dilatación del tiempo (otro factor $1 + z$). Este último factor significa que la tasa a la cual llegan los fotones a la esfera es menor que la tasa a la cual éstos dejan la fuente. El flujo radiante medido es, entonces:

$$F = \frac{L}{(1 + z)^2 A} = \frac{L}{4\pi r_s^2 a^2(t_0)(1 + z)^2} \quad (1.24)$$

Combinando las ecuaciones (1.22) y (1.24) se obtiene la siguiente expresión:

$$d_L = a(t_0)r_s(1+z) \quad (1.25)$$

Dado que la luz viaja a lo largo de una geodésica nula ($ds = 0$), entonces la métrica (1.3) relaciona las coordenada radial y temporal a través de la siguiente ecuación

$$-dt^2 + a^2(t)dr^2 = 0 \quad (1.26)$$

donde se ha supuesto por simplicidad que $d\theta = 0$ y $d\phi = 0$. Al integrar la ecuación (1.26) entre el instante de emisión (t_1) y el instante de observación (t_0), se obtiene

$$r_s = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.27)$$

Esta integral puede reescribirse si se tiene en cuenta que

$$1+z = \frac{a_0}{a} \Rightarrow \dot{z} = -H(1+z)$$

De esta manera, la ecuación (1.27) queda de la siguiente forma:

$$r_s = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1.28)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (1.25) se tiene que

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1.29)$$

Teniendo en cuenta (1.20) y (1.21), el parámetro de Hubble puede ser expresado de la siguiente forma

$$H = H_0 \sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w_i)}} \quad (1.30)$$

Con esta expresión, la ecuación (1.29) queda así:

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z')^{3(1+w_i)}}} \quad (1.31)$$

Por lo tanto, es posible determinar Ω_{i0} midiendo la distancia de luminosidad (d_L) en función del corrimiento al rojo (z). Como se verá a continuación, la ecuación (1.31) juega un papel muy importante en el estudio de la evidencia observacional de la energía oscura.

1.2.3. Supernovas de tipo Ia y la aceleración del universo

Las supernovas del tipo Ia tienen una gran importancia para la cosmología: nos permiten medir grandes distancias a través del universo [14]. Estas explosiones estelares se producen en sistemas binarios de estrellas masivas, y cuando ello sucede la luminosidad de la estrella que explota parece ser siempre la misma en todos estos eventos convirtiéndolas en candelas patrones. La enorme utilidad de las supernovas reside en el hecho de ser capaces de rivalizar en brillo con el conjunto de estrellas de su galaxia de origen.

En astronomía suele emplearse el termino *magnitud* para referirse al brillo de una fuente luminosa. En particular, la magnitud aparente (m) y la magnitud absoluta (M) son medidas logarítmicas del flujo y la luminosidad, respectivamente. Estas magnitudes están relacionadas con la distancia de luminosidad d_L a través de la siguiente relación (ver [58]):

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (1.32)$$

Una forma usual de expresar distancias en astronomía es través del módulo de distancia μ [3], el cual se define como la diferencia entre la magnitud aparente m y la magnitud absoluta M . Esto significa que:

$$\mu = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (1.33)$$

A puertas del siglo XXI, dos grupos de trabajo liderados por Saul Perlmutter [1] y Adam Riess [2] midieron y analizaron las distancias de luminosidad de varias supernovas del tipo Ia para diferentes valores de corrimiento al rojo z . Al graficar estas mediciones en un diagrama de Hubble se encuentra un panorama como el que se muestra en la Fig. 1.1. En dicha figura se ilustran algunos datos experimentales de μ vs z junto a algunas curvas teóricas obtenidas a partir de la ecuación (1.31). Los datos experimentales son tomados de [3].

Al comparar los datos observacionales con las curvas teóricas se encuentra que dichas observaciones no pueden ser ajustadas con modelos cosmológicos que solo contemplen la existencia de átomos y materia oscura. Sin embargo, al agregar una contribución del estilo de una constante cosmológica, los datos pueden ser perfectamente ajustados. En la Figura 1.1 la curva que mejor ajusta es la línea verde, que corresponde a un modelo cosmológico con $\Omega_m = 0,24$ y $\Omega_\Lambda = 0,76$, siendo Ω_m la contribución a la densidad total por parte de los átomos y de materia oscura y Ω_Λ la proporción correspondiente a una constante cosmológica. Este fue el resultado sorprendente al que llegaron los grupos de Perlmutter y Riess en 1998 [1, 2]. La consecuencia del agregado de este nuevo parámetro cosmológico Ω_Λ es que el universo presente estaría en una fase de expansión acelerada.

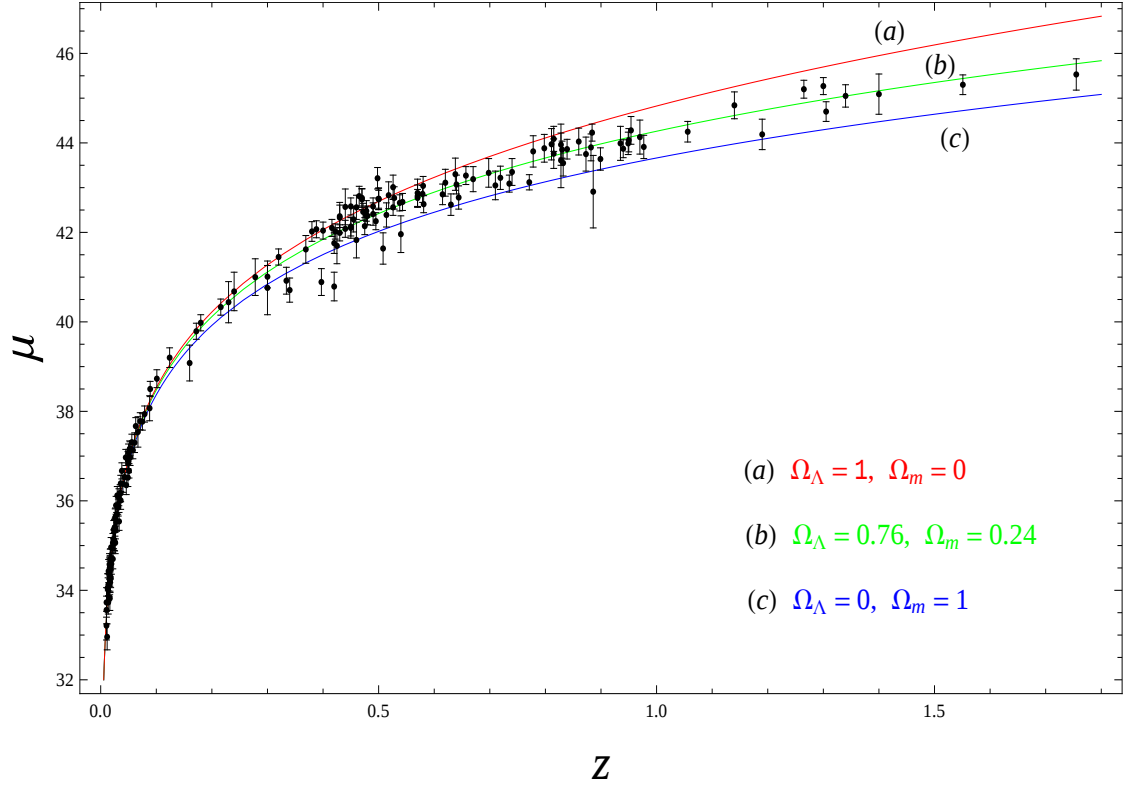


FIGURA 1.1. Datos observacionales de μ vs z [3]. Las tres curvas corresponden a modelos teóricos con (a) $\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 1$, (b) $\Omega_m = 0.24, \Omega_\Lambda = 0.76$ y (c) $\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$.

Así pues, nos encontramos en un universo que se expande aceleradamente y con abundancia de un contenido de energía que aun desconocemos. Aunque hoy en día se maneja el modelo Λ CDM (constante cosmológica + materia oscura fría), se tienen sin embargo indicios que nos llevan a desechar la constante cosmológica. Entre estos indicios se encuentra el problema de la constante cosmológica [11], el cual se refiere a la abrumadora discrepancia entre el valor teórico y el valor observacional de Λ .

Es por estos problemas que se han propuesto teorías alternativas para explicar la expansión acelerada del universo. Una de ellas es considerar teorías de gravedad modificada, las cuales proponen modificar las leyes enmarcadas en las ecuaciones de Einstein. En el siguiente capítulo estudiaremos un modelo de gravedad modificada que se plantea a través de un campo escalar acoplado no mínimamente con la curvatura.

CAPÍTULO 2

Acoplamientos no minimo y de Gauss-Bonnet

Como se mencionó anteriormente, las mediciones de los flujos de energía provenientes de supernovas la muestran que el universo atraviesa actualmente una etapa de expansión acelerada [1, 2, 3]. En los últimos 11 años desde este descubrimiento, muchos modelos teóricos han sido desarrollados para tratar de describir la verdadera naturaleza de la energía oscura. Entre estos modelos se encuentran las teorías de gravedad modificada, las cuales intentan explicar la aceleración del universo a partir de distintas modificaciones (o generalizaciones) de las ecuaciones de Einstein.

El punto de partida fundamental de las teorías de gravedad modificada consisten entonces en los lagrangianos que describen la interacción gravitacional. Por ejemplo, la relatividad general utiliza la densidad lagrangiana más sencilla para la gravedad:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa^2} R \quad (2.1)$$

Esta densidad lagrangiana puede ser generalizada a través de la adición de términos cuadráticos del tensor de Riemann (R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, etc). Sin embargo, este tipo de generalizaciones puede producir ciertas inestabilidades que son inaceptables en la física actual, como por ejemplo que el gravitón sea un estado con norma negativa [59]. Otro problema de las modificaciones cuadráticas de la gravedad es la aparición de derivadas de cuarto orden en la métrica, lo cual introduce más grados de libertad en comparación con la relatividad general. Estas dificultades pueden subsanarse al considerar el invariante cuadrático Gauss-Bonnet [37, 60, 61]:

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.2)$$

Aunque este término es un invariante topológico (derivada total), su presencia afecta la dinámica cosmológica cuando es acoplado a un campo escalar, ya que no es eliminado con el proceso variacional y contribuye con derivadas de segundo orden a las ecuaciones de campo. Por lo tanto, este acoplamiento será incorporado en la acción a través de un término de la forma $\eta(\phi)\mathcal{G}$, donde $\eta(\phi)$ es una función del campo escalar. Generalmente este término es estudiado en el marco de las teorías escalar-tensorial, las cuales describen la gravedad a partir de un campo escalar (ϕ) y un campo tensorial ($g_{\mu\nu}$).

Por otra parte, uno de los acoplamientos más populares en la literatura es el acople de la forma $\xi R\phi^2$, el cual ha sido propuesto en numerosos modelos tanto inflacionarios como de energía oscura. Este acoplamiento surge en forma natural en el proceso de cuantización sobre el espacio-tiempo curvo [62, 63]. De hecho, cuando se toman en cuenta correcciones cuánticas del campo escalar mínimamente acoplado, se producen términos divergentes, los cuales son eliminados exactamente por la contribución de un término de la forma $\xi R\phi^2$. Por tanto, este acoplamiento no mínimo es necesario para ajustar la renormalización por sustracción de contratérminos. Cabe mencionar que este tipo de acoplamiento también aparece en teorías de gravedad multidimensional y en el límite de bajas energías en teoría de cuerdas [64, 65].

A continuación se describirá explícitamente el modelo escalar-tensorial con acoplamientos no mínimo y de Gauss-Bonnet.

2.1. El modelo

Como punto de partida, considérese la acción que contiene los dos acoplamientos mencionados anteriormente

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{2} \xi R\phi^2 - \eta(\phi) \mathcal{G} \right] \quad (2.3)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar. Esta acción se puede descomponer de la siguiente manera:

$$S = S_H + S_\phi + S_{GB} + S_{NMC} \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} S_H &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} \right) \\ S_\phi &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \\ S_{GB} &= - \int d^4x \sqrt{-g} \eta(\phi) \mathcal{G} \\ S_{NMC} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) R \end{aligned}$$

Tomando la variación de la acción (2.3) con respecto a la métrica, se obtiene una expresión general de la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{GB} + T_{\mu\nu}^{NMC} \right) \quad (2.5)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \quad T_{\mu\nu}^{GB} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{GB}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad T_{\mu\nu}^{NMC} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NMC}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Las expresiones explícitas de estos tensores son:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{GB} = & -4 \left([\nabla_\mu \nabla_\nu \eta(\phi)] R - g_{\mu\nu} [\nabla_\rho \nabla^\rho \eta(\phi)] R - 2[\nabla^\rho \nabla_\mu \eta(\phi)] R_{\nu\rho} - 2[\nabla^\rho \nabla_\nu \eta(\phi)] R_{\mu\rho} \right. \\ & \left. + 2[\nabla_\rho \nabla^\rho \eta(\phi)] R_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} [\nabla^\rho \nabla^\sigma \eta(\phi)] R_{\rho\sigma} - 2[\nabla^\rho \nabla^\sigma \eta(\phi)] R_{\mu\rho\nu\sigma} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$T_{\mu\nu}^{NMC} = \xi g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi^2] - \xi [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2] + \xi \phi^2 G_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Por otro lado, la variación de la acción (2.3) con respecto al campo escalar da como resultado la siguiente ecuación de movimiento para ϕ :

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} (\partial^\mu \phi)] + \frac{dV}{d\phi} + \xi R \phi + \frac{d\eta}{d\phi} \mathcal{G} = 0 \quad (2.9)$$

Ahora supongamos que la métrica es de la forma (1.3) y el campo escalar depende únicamente del tiempo. Bajo esta suposición, la ecuación de campo (2.5) produce únicamente dos ecuaciones independientes, las cuales pueden ser calculadas con las componentes (00) y (11) [66, 67]. Dichas componentes generan el siguiente par de ecuaciones

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_{DE} \quad (2.10)$$

y

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 P_{DE} \quad (2.11)$$

donde ρ_{DE} es densidad de energía efectiva del campo escalar con presión efectiva P_{DE} . Estas cantidades efectivas tiene la forma:

$$\rho_{DE} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + 6\xi H \dot{\phi} \phi + 3\xi H^2 \phi^2 + 24H^3 \frac{d\eta}{d\phi} \dot{\phi} \quad (2.12)$$

y

$$\begin{aligned} P_{DE} = & \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - 2\xi \left(\dot{\phi}^2 + \phi \ddot{\phi} \right) - 4\xi H \phi \dot{\phi} \\ & - \xi \left(2\dot{H} + 3H^2 \right) \phi^2 - 8H^2 \frac{d\eta}{d\phi} \ddot{\phi} - 8H^2 \frac{d^2\eta}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 \\ & - 16H\dot{H} \frac{d\eta}{d\phi} \dot{\phi} - 16H^3 \frac{d\eta}{d\phi} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Además, la ecuación de movimiento (2.9) toma la siguiente forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + 6\xi(2H^2 + \dot{H})\phi + 24H^2(H^2 + \dot{H})\frac{d\eta}{d\phi} = 0 \quad (2.14)$$

Como se verá a continuación, las ecuaciones (2.10) y (2.11) pueden manipularse para obtener expresiones que permiten la reconstrucción del modelo en cualquier escenario cosmológico. Es importante aclarar que el conjunto de ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.14) no forma un sistema de ecuaciones independientes. De hecho, es posible demostrar que la ecuación (2.14) puede obtenerse a partir de las ecuaciones (2.10) y (2.11). Por esta razón solo se debe considerar dos de estas tres ecuaciones.

2.2. Mecanismo de reconstrucción

Como puede observarse, el carácter no lineal de las ecuaciones cosmológicas (2.10), (2.11) y (2.14) dificulta su integración para un conjunto particular de condiciones iniciales. Sin embargo, es posible plantear el problema inverso: dado un escenario cosmológico, obtener expresiones que permiten obtener el potencial el escalar y el acoplamiento de Gauss-Bonnet (reconstrucción del modelo) [34, 67]. Para empezar, nótese que al eliminar el potencial de las ecuaciones (2.10) y (2.11) se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} 2\kappa^2\xi H\phi\dot{\phi} + 8\kappa^2H^3\frac{d\eta}{d\phi}\dot{\phi} + \kappa^2\dot{\phi}^2 - 2\kappa^2\xi\dot{\phi}^2 - 8\kappa^2H^2\frac{d^2\eta}{d\phi^2}\dot{\phi}^2 - 2\kappa^2\xi\phi\ddot{\phi} - 8\kappa^2H^2\frac{d\eta}{d\phi}\ddot{\phi} = \\ - 2\dot{H} + 2\kappa^2\xi\phi^2\dot{H} + 16\kappa^2H\dot{H}\frac{d\eta}{d\phi}\dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \frac{d\eta}{d\phi}\dot{\phi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2\eta}{d\phi^2}\dot{\phi}^2 + \frac{d\eta}{d\phi}\ddot{\phi} \end{aligned}$$

es posible escribir la ecuación (2.15) de la siguiente forma:

$$\xi H\phi\dot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \xi\dot{\phi}^2 - \xi\phi\ddot{\phi} + \frac{\dot{H}}{\kappa^2} - \xi\phi^2\dot{H} = 4 \left[H^2\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2H\dot{H}\frac{d\eta}{dt} - H^3\frac{d\eta}{dt} \right] \quad (2.16)$$

Si además se tiene en cuenta que:

$$a\frac{d}{dt} \left[\frac{H^2}{a} \frac{d\eta}{dt} \right] = H^2\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2H\dot{H}\frac{d\eta}{dt} - H^3\frac{d\eta}{dt}$$

entonces la ecuación (2.16) puede escribirse como

$$\xi H \phi \dot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \xi \dot{\phi}^2 - \xi \phi \ddot{\phi} + \frac{\dot{H}}{\kappa^2} - \xi \phi^2 \dot{H} = 4a \frac{d}{dt} \left[\frac{H^2}{a} \frac{d\eta}{dt} \right] \quad (2.17)$$

Para simplificar la escritura se define la siguiente función:

$$R(t) = \xi H \phi \dot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \xi \dot{\phi}^2 - \xi \phi \ddot{\phi} + \frac{\dot{H}}{\kappa^2} - \xi \phi^2 \dot{H} \quad (2.18)$$

Con esto, la ecuación (2.17) se puede escribir de la siguiente manera

$$R(t) = 4a \frac{d}{dt} \left[\frac{H^2}{a} \frac{d\eta}{dt} \right] \quad (2.19)$$

Integrando la expresión anterior, se obtiene:

$$\eta(t) = \frac{1}{4} \int dt_1 \frac{a(t_1)}{H^2(t_1)} \int^{t_1} dt_2 \frac{R(t_2)}{a(t_2)} \quad (2.20)$$

Para calcular el potencial, nótese que la ecuación (2.10) se puede escribir de la siguiente forma:

$$V(t) = S(t) - 24H^3 \frac{d\eta}{dt} \quad (2.21)$$

siendo $S(t)$ una función de la forma:

$$S(t) = \frac{3}{\kappa^2} H^2 - 3\xi H^2 \phi^2 - 6\xi H \phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$$

Reemplazando la expresión (2.20) en la ecuación (2.21) se obtiene:

$$V(t) = S(t) - 6H(t)a(t) \int^{t_1} dt_1 \frac{R(t_1)}{a(t_1)} \quad (2.22)$$

Con el propósito de obtener expresiones de η y V en función del campo escalar, se introducen dos nuevas funciones, f y g , definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t &= f(\phi) \\ H &= g'(t) \end{aligned}$$

Incorporando estas funciones en las ecuaciones (2.20) y (2.22), se obtiene:

$$\eta(\phi) = \frac{1}{4} \int^{\phi} d\phi_1 f'(\phi_1) \frac{e^{g(f(\phi_1))}}{[g'(f(\phi_1))]^2} \int^{\phi_1} d\phi_2 f'(\phi_2) e^{-g(f(\phi_2))} R(f(\phi_2)) \quad (2.23)$$

$$V(\phi) = S(f(\phi)) - 6g'(f(\phi))e^{g(f(\phi))} \int_{\phi_1}^{\phi} d\phi_1 f'(\phi_1) e^{-g(f(\phi_1))} R(f(\phi_1)) \quad (2.24)$$

Estas ecuaciones permiten la reconstruir el modelo a partir de las funciones f y g . Téngase en cuenta que estas funciones tienen incorporada la dinámica de la expansión del universo, ya que están directamente relacionadas con la función de Hubble y el campo escalar. A continuación se reconstruirá el modelo para varias soluciones cosmológicas de tiempo tardío.

2.2.1. Solución tipo ley de potencias en fase de quintaesencia

Esta solución puede ser implementada asumiendo que:

$$f(\phi) = t_0 e^{\phi/\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = p \ln \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

donde ϕ_0 , t_0 y p son constantes positivas. Usando la definición de f y g se obtiene que la función de Hubble y el campo escalar están dados por:

$$H = \frac{p}{t} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 \ln \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

Nótese que esta solución describe fase de quintaesencia para $p > 1$. Incorporando las funciones f y g en las ecuaciones (2.23) y (2.24) se obtiene la siguiente reconstrucción

$$\eta(\phi) = e^{2\phi/\phi_0} (a_+^0 + a_+^1 \phi + a_+^2 \phi^2) \quad (2.25)$$

$$V(\phi) = e^{-2\phi/\phi_0} (b_+^0 + b_+^1 \phi + b_+^2 \phi^2) \quad (2.26)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{\pm}^0 &= \frac{t_0^2}{8p(p \pm 1)\kappa^2} - \frac{t_0^2(\pm(1 - \xi) + p(2 \pm p(1 - 3\xi)))\phi_0^2}{16p^2(p \pm 1)^3}, \\ a_{\pm}^1 &= -\frac{(-1 \mp 3p)t_0^2\xi\phi_0}{8p^2(p \pm 1)^2}, & a_{\pm}^2 &= -\frac{t_0^2\xi}{8p(p \pm 1)}, \\ b_{\pm}^0 &= \frac{3p^2(p \mp 1)}{(p \pm 1)t_0^2\kappa^2} + \frac{(\mp 1 + p(3 + p(\pm 9 + 5p \pm 24\xi)))\phi_0^2}{2(p \pm 1)^3 t_0^2}, \\ b_{\pm}^1 &= \frac{12p^2\xi\phi_0}{(p \pm 1)^2 t_0^2}, & b_{\pm}^2 &= -\frac{3p^2(p \mp 1)\xi}{(p \pm 1)t_0^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nótese que el efecto del prefactor polinomial en el potencial es introducir un mínimo local, el cual puede ser ajustado a través de los parámetros ξ , p , ϕ_0 y t_0 . Una característica de este potencial es que presenta un comportamiento run-away (es decir, $V \rightarrow 0$ cuando $\phi \rightarrow \infty$), el cual es importante en la fenomenología de la energía oscura ya que refleja

el comportamiento Scaling del modelo. En general, la forma de este potencial corresponde a la de Albrecht-Skordis [68, 69], la cual aparece en forma natural en la teoría M y produce escenarios interesantes de quintaesencia consistentes con rangos observacionales.

Otra forma de realizar la reconstrucción para soluciones de quintaesencia es asumiendo un comportamiento lineal del campo escalar como función del tiempo. En otras palabras, es posible asumir la siguiente escogencia de las funciones f y g :

$$f(\phi) = t_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = p \ln \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

Esto conlleva a las siguientes expresiones para η y ϕ :

$$\eta(\phi) = \left(\frac{t_0^2}{8p(p+1)\kappa^2\phi_0^2} \right) \phi^2 - \left(\frac{t_0^2(1+(4p-2)\xi)}{32(p-1)p^2\phi_0^2} \right) \phi^4 \quad (2.28)$$

$$V(\phi) = \left(\frac{3(p-1)p^2\phi_0^2}{(p+1)t_0^2\kappa^2} \right) \frac{1}{\phi^2} + \left(\frac{(1+p(5-6(p-3)p\xi))\phi_0^2}{2(p+1)t_0^2} \right) \quad (2.29)$$

Nótese que cuando $\phi \rightarrow \infty$, el potencial es aproximadamente plano y converge a un valor mínimo diferente de cero. Cabe mencionar que los potenciales con valor mínimo aparecen en el contexto de la teoría de supergravedad y han sido propuestos para modelar la energía oscura en fase de quintaesencia [70].

2.2.2. Solución tipo ley de potencias en fase phantom

Aunque este tipo de solución está dentro del rango de datos observacionales¹, este escenario cosmológico conlleva a una singularidad Big-Rip en tiempo finito. Dicha solución se puede incorporar en las funciones f y g de la siguiente manera:

$$f(\phi) = t_s - t_0 e^{\phi/\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = -p \ln \left(\frac{t_s - t}{t_0} \right)$$

donde ϕ_0 , t_0 , p y t_s son constantes positivas. Esto conduce a:

$$H = \frac{p}{t_s - t} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 \ln \left(\frac{t_s - t}{t_0} \right)$$

Usando la ecuación (1.12) se ve claramente que esta solución presenta comportamiento phantom para cualquier $p > 0$. Reemplazando las funciones f y g en las expresiones (2.23) y (2.24) se obtiene la reconstrucción:

$$\eta(\phi) = e^{2\phi/\phi_0} (a_-^0 + a_-^1 \phi + a_-^2 \phi^2) \quad (2.30)$$

$$V(\phi) = e^{-2\phi/\phi_0} (b_-^0 + b_-^1 \phi + b_-^2 \phi^2) \quad (2.31)$$

¹De acuerdo a las mediciones astrofísicas, la ecuación de estado tiene un valor cercano -1 , sin embargo, las cotas observacionales no descartan ecuaciones de estado en fase phantom ($w_{DE} = -1.02 \pm_{0.19}^{0.13}$) [3].

Al igual que en el caso de quintasencia, el potencial obtenido con la solución phantom tiene un comportamiento run-away y tiene la forma de Albrech-Skordis. Es importante destacar que esta reconstrucción implica que las soluciones phantom pueden obtenerse sin necesidad de introducir campos escalares fantasmas, lo cual es una característica importante para un modelo viable de energía oscura.

Otra manera de reconstruir el modelo en el escenario phantom es asumiendo que el campo escalar decrece linealmente con el tiempo. Esto se puede implementar con las siguientes funciones:

$$f(\phi) = t_s - t_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = -p \ln \left(\frac{t_s - t}{t_0} \right)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en las ecuaciones (2.23) y (2.24), se obtiene:

$$\eta(\phi) = \left(\frac{t_0^2}{8p(p-1)\kappa^2\phi_0^2} \right) \phi^2 - \left(\frac{t_0^2(1 - (4p+2)\xi)}{32(p+1)p^2\phi_0^2} \right) \phi^4 \quad (2.32)$$

$$V(\phi) = \left(\frac{3(p+1)p^2\phi_0^2}{(p-1)t_0^2\kappa^2} \right) \frac{1}{\phi^2} - \left(\frac{(1 + p(-5 + 6(p+3)p\xi))\phi_0^2}{2(p+1)t_0^2} \right) \quad (2.33)$$

Nótese que la reconstrucción en los casos de quintaesencia y phantom solo difieren en los coeficientes constantes, implicando restricciones paramétricas adicionales en el modelo. Como se enfatizó anteriormente, la obtención de soluciones phantom sin introducir campos fantasmas constituye una característica atractiva para un modelo viable de energía oscura.

2.2.3. Solución de De Sitter

A continuación se mostrara que la solución de De Sitter (constante cosmológica) puede satisfacer las ecuaciones cosmológicas del modelo. Para esto se asume lo siguiente:

$$f(\phi) = t_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = H_0 t$$

donde t_0 , ϕ_0 y H_0 son parámetros positivos. Esto conlleva a:

$$H = H_0 \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 \frac{t}{t_0}$$

Debido a que H es constante, el parámetro de estado es igual a -1 , lo cual corresponde efectivamente a la solución de De Sitter. Reemplazando las correspondientes funciones f y g en (2.23) y (2.24) se obtiene:

$$\eta(\phi) = - \left(\frac{\phi_0}{8H_0^3 t_0} \right) \phi - \left(\frac{\xi}{8H_0^2} \right) \phi^2$$

$$V(\phi) = \left(\frac{3H_0^2}{\kappa^2} + \frac{5\phi_0^2}{2t_0^2} \right) - (3H_0^2 \xi) \phi^2$$

Esta reconstrucción muestra que es posible obtener soluciones de De Sitter para un modelo en el cual el potencial y el acople GB sean funciones cuadráticas del campo escalar. Otra forma de incorporar la solución de De Sitter es a través de las siguientes funciones:

$$f(\phi) = -t_0 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \quad \text{y} \quad g(t) = H_0 t$$

Esto conlleva a las siguientes expresiones para η y V :

$$\eta(\phi) = \left(\frac{(1 - 2(2 + H_0 t_0)\xi)}{16H_0^2(2 + H_0 t_0)} \right) \phi^2$$

$$V(\phi) = \left(\frac{3H_0^2}{\kappa^2} \right) + \left(-\frac{1}{2t_0^2} + \frac{3H_0}{t_0(2 + H_0 t_0)} - 3H_0^2 \xi \right) \phi^2$$

2.2.4. Solución Little Rip

Los modelos Little Rip [71, 72] proporcionan una evolución para la expansión del universo que interpola entre la expansión asintótica de De Sitter y modelos con singularidades Big Rip. Aunque estas soluciones se caracterizan por tener un parámetro de estado por debajo de -1 , la función de Hubble en estos escenarios cosmológicos no presenta singularidades en tiempo finito. Físicamente, en estas soluciones Little Rip ni el factor de escala ni la densidad de energía llegan a infinito en tiempo finito, pero, sin embargo, tarde o temprano dan lugar a la desintegración de toda estructura en un tiempo finito. Para empezar la reconstrucción del modelo con esta solución, se asumirá que:

$$f(\phi) = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \quad \text{y} \quad g(t) = \left(\frac{H_0}{h} \right) e^{ht}$$

siendo H_0 , ϕ_0 y h parámetros constantes. Lo anterior implica que:

$$H = H_0 e^{ht} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 e^{ht}$$

Nótese que la función de Hubble no posee singularidades y el parámetro de estado correspondiente esta por debajo de -1 . Reemplazando las funciones en las ecuaciones de reconstrucción, se obtiene

$$\eta(\phi) = \left(\frac{\phi_0^2}{8H_0^2 \kappa^2} + \frac{h^2(1 - 4\xi)\phi_0^4}{16H_0^4} \right) \frac{1}{\phi^2} + \left(\frac{h(1 - 4\xi)\phi_0^3}{8H_0^3} \right) \frac{1}{\phi}$$

$$V(\phi) = c_1 \phi + c_2 \phi^2 + c_3 \phi^3 + c_4 \phi^4$$

donde los coeficientes del potencial están dados por:

$$c_1 = \frac{6hH_0}{\kappa^2 \phi_0} + \frac{3h^3(1 - 4\xi)\phi_0}{H_0}, \quad c_2 = h^2 \left(\frac{5}{2} - 12\xi \right) + \frac{3H_0^2}{\kappa^2 \phi_0^2}, \quad c_3 = -\frac{6hH_0 \xi}{\phi_0}, \quad c_4 = -\frac{3H_0^2 \xi}{\phi_0^2}$$

2.2.5. Solución con fases de quintaesencia y phantom

Un escenario cosmológico que evoluciona desde la fase de quintaesencia hacia la fase phantom puede ser incorporado en las siguientes funciones [23, 34]:

$$f(\phi) = t_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = p \ln \left(\frac{t}{t_s - t} \right)$$

De aqui que

$$H = p \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_s - t} \right) \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\phi_0}{t_0} t$$

Nótese que para tiempos $t < t_s/2$ el universo se encuentra en una fase de quintaesencia, mientras que para tiempos $t > t_s/2$ se encuentra dominado por energía oscura phantom. En $t = t_s$, el universo finalmente culmina en una singularidad tipo Big-Rip. En general, el proceso de reconstrucción para un valor arbitrario de p genera funciones hipergeometricas demasiados largas. Por lo tanto, la reconstrucción se limita al caso especial $p = 2$, donde las expresiones para η y V están dadas por:

$$\begin{aligned} \eta(\phi) = & - \frac{t_0^2 \phi^2}{9600 t_s^2 \kappa^2 \phi_0^4} \left[50 t_0^2 \kappa^2 (-1 + 2\xi) \phi^4 - 8 t_0 t_s \phi (-50 + 3\kappa^2 (1 + 4\xi) \phi^2) \phi_0 \right. \\ & \left. + 25 t_s^2 (-8 + 3\kappa^2 (1 + 6\xi) \phi^2) \phi_0^2 + 120 t_0 t_s \kappa^2 (1 + 4\xi) \phi^3 \phi_0 \ln \phi \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} V(\phi) = & \frac{\phi_0^2}{2 t_0^2 \kappa^2 \phi^2 (t_s \phi_0 - t_0 \phi)^3} \left[t_0^3 \kappa^2 \phi^5 - 15 t_0^2 t_s \kappa^2 \phi^4 \phi_0 + 3 t_0 t_s^2 \phi (8 + \kappa^2 (1 + 24\xi) \phi^2) \phi_0^2 \right. \\ & \left. + t_s^3 (8 + \kappa^2 (11 + 24\xi) \phi^2) \phi_0^3 + 24 t_0 t_s^2 \kappa^2 (1 + 4\xi) \phi^3 \phi_0^2 \ln \phi \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nótese que aunque el acoplamiento GB es finito para toda ϕ , el potencial tiende a infinito cuando $\phi \rightarrow \frac{\phi_0}{t_0} t_s$

CAPÍTULO 3

Modelo en ausencia de potencial. Soluciones exactas

En el capítulo anterior se pone de manifiesto la gran variedad de escenarios cosmológicos que pueden ser generados a partir de diversas formas funcionales del potencial y el acoplamiento GB. Ahora se analizará el modelo en ausencia de potencial y se estudiarán las implicaciones cosmológicas de los acoplamientos en las soluciones de tiempo de tardío. Para empezar, nótese que al hacer $V = 0$ en las ecuaciones (2.10) y (2.14), se obtiene:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 3\xi H (2\phi \dot{\phi} + H \phi^2) + 24H^3 \frac{d\eta}{d\phi} \dot{\phi} \right] \quad (3.1)$$

$$\ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} + 6\xi(2H^2 + \dot{H})\phi + 24H^2(H^2 + \dot{H}) \frac{d\eta}{d\phi} = 0 \quad (3.2)$$

Es fácil probar que la solución de De Sitter satisface las ecuaciones anteriores. En efecto, al asumir que la función de Hubble y el campo escalar son constantes ($H = H_\Lambda$ y $\phi = \phi_\Lambda$), las expresiones (3.1) y (3.2) conllevan a:

$$\begin{aligned} \phi_\Lambda^2 &= \frac{1}{\kappa^2 \xi} \\ \xi \phi_\Lambda + 2H_\Lambda^2 \eta'(\phi_\Lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que, efectivamente, la expansión asintótica de De Sitter es compatible con el modelo en ausencia de potencial. Volviendo a las ecuaciones (3.1) y (3.2), nótese que al cambiar la variable temporal por el número de e-folding ($x = \ln a$), se obtiene

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2} H^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 3\xi H^2 \left(2\phi \frac{d\phi}{dx} + \phi^2 \right) + 24H^4 \frac{d\eta}{dx} \right] \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left(H^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) + 6H^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 6\xi \left(4H^2 + \frac{dH^2}{dx} \right) \phi \frac{d\phi}{dx} + 24H^2 \left(2H^2 + \frac{dH^2}{dx} \right) \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (3.4)$$

Con el propósito de integrar estas ecuaciones, se asumirá la siguiente expresión para el acoplamiento GB [67]:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{H^2} (g_1 + g_2 \phi^2) \quad (3.5)$$

siendo g_1 y g_2 constantes. Usando esta expresión, las ecuaciones (3.3) y (3.4) pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 12\xi \phi \frac{d\phi}{dx} + 6(\xi + 8g_2) \phi^2 + 48g_1 - \frac{6}{\kappa^2} = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 6 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 24\xi \phi \frac{d\phi}{dx} + 48(g_1 + g_2 \phi^2) \right] H^2 \\ & + \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 6\xi \phi \frac{d\phi}{dx} + 24(g_1 + g_2 \phi^2) \right] \frac{dH^2}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nótese que al hacer $g_1 = \frac{1}{8\kappa^2}$ los últimos términos en la ecuación (3.6) desaparecen. De esta manera, dicha ecuación queda reducida a

$$\frac{d\phi}{dx} = \left(-6\xi \pm \sqrt{6\xi(6\xi - 1) - 48g_2} \right) \phi$$

cuya solución es

$$\phi = \phi_0 e^{-\lambda x}, \quad \lambda = 6\xi \pm \sqrt{6\xi(6\xi - 1) - 48g_2} \quad (3.8)$$

Reemplazando esta solución en la expresión (3.7) se obtiene la siguiente ecuación para la función de Hubble

$$\left(\lambda^2 - 6\xi\lambda + 24g_2 + \frac{3}{\kappa^2 \phi_0^2} e^{2\lambda x} \right) \frac{dH^2}{dx} - 2 \left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 12\xi\lambda - 24g_2 - \frac{3}{\kappa^2 \phi_0^2} e^{2\lambda x} \right) H^2 = 0 \quad (3.9)$$

Una vez resuelta esta ecuación, el parámetro de estado correspondiente se puede calcular reescribiendo la expresión (1.12) en términos del número de e-folding

$$w = -1 - \frac{1}{3H^2} \frac{dH^2}{dx} \quad (3.10)$$

Antes de presentar la solución general de ecuación (3.9), se estudiarán algunos límites y restricciones que facilitan la integración de dicha ecuación.

3.1. Limite de futuro lejano ($x \gg 1$)

En este límite, algunos términos de la ecuación (3.9) se pueden despreciar dependiendo del signo del parámetro λ . Por ejemplo, si $\lambda > 0$, las constantes se vuelven despreciables comparadas con el término exponencial y la solución de la ecuación se reduce a

$$H^2 = H_0^2 e^{-2x}$$

siendo H_0 una constante de integración. El parámetro de estado para esta solución es $w = -1/3$, el cual corresponde a la división entre la expansión desacelerada y acelerada. Nótese que aunque el parámetro de estado en la presente época es cercano a -1 , en el futuro lejano este parámetro será $-1/3$. Por otro lado, nótese que al asumir $\lambda < 0$, los términos exponenciales en (3.9) se vuelven despreciables y la solución se reduce a

$$H^2 = H_0^2 \exp \left(\frac{2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\xi\lambda - 48g_2}{\lambda^2 - 6\xi\lambda + 24g_2} x \right)$$

cuyo parámetro de estado es

$$w = -1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\xi\lambda - 48g_2}{\lambda^2 - 6\xi\lambda + 24g_2} \right) \quad (3.11)$$

Por lo tanto, dependiendo de los valores de ξ y g_2 , el parámetro de estado tiende asintóticamente a la constante cosmológica si $2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\xi\lambda - 48g_2 = 0$, o puede caer debajo de la línea phantom si el segundo término de la ecuación (3.11) es negativo. En resumen, en esta sección se pone de manifiesto que el modelo en ausencia de potencial puede describir escenarios asintóticos en fases de quintaesencia y phantom.

3.2. Restricción $2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\xi\lambda - 48g_2 = 0$

Una forma de simplificar la ecuación (3.9) es considerando la siguiente restricción:

$$2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\xi\lambda - 48g_2 = 0 \quad (3.12)$$

la cual permite obtener la siguiente solución para la función de Hubble:

$$H^2 = h_0^2 \left[\kappa^2 \phi_0^2 (\lambda^2 - 6\xi\lambda + 24g_2) + 3e^{2\lambda x} \right]^{-1/\lambda} \quad (3.13)$$

donde h_0^2 es una constante de integración. El parámetro de estado correspondiente está dado por:

$$w = -1 + \frac{2e^{2\lambda x}}{\kappa^2 \phi_0^2 (\lambda^2 - 6\xi\lambda + 24g_2) + 3e^{2\lambda x}} \quad (3.14)$$

Asumiendo que en la época actual ($x = 0$) el parámetro de estado toma el valor w_0 , la ecuación 3.14 conlleva a la siguiente relación:

$$\kappa^2 \phi_0^2 (\lambda^2 - 6\xi\lambda + 24g_2) = -\frac{3w_0 + 1}{w_0 + 1} \quad (3.15)$$

Usando las ecuaciones (3.8) y (3.12) es posible escribir la relación anterior de la siguiente forma:

$$\frac{2\lambda^3 - 2\lambda^2}{2\lambda + 1} = -\frac{1}{\kappa^2 \phi_0^2} \frac{3w_0 + 1}{w_0 + 1} \quad (3.16)$$

De esta relación se ve que cuando w_0 está en fase de quintaesencia, entonces $\lambda > 1$ o $\lambda < -1/2$. Además, nótese que si $w_0 < -1$ o $w_0 > -1/3$, entonces la constante λ está en el intervalo $-1/2 < \lambda < 1$. Aunque en este último intervalo el parámetro estado toma valores por debajo de la línea phantom, la función de Hubble no está bien definida y por lo tanto la solución (3.13) no describe energía oscura en fase phantom. El comportamiento del parámetro de estado actual con respecto a las condiciones iniciales del campo escalar se ilustra en la figura (3.1), en la cual se trazan curvas w_0 vs $\kappa\phi_0$ para varios valores de λ dentro del rango permitido en quintaesencia.

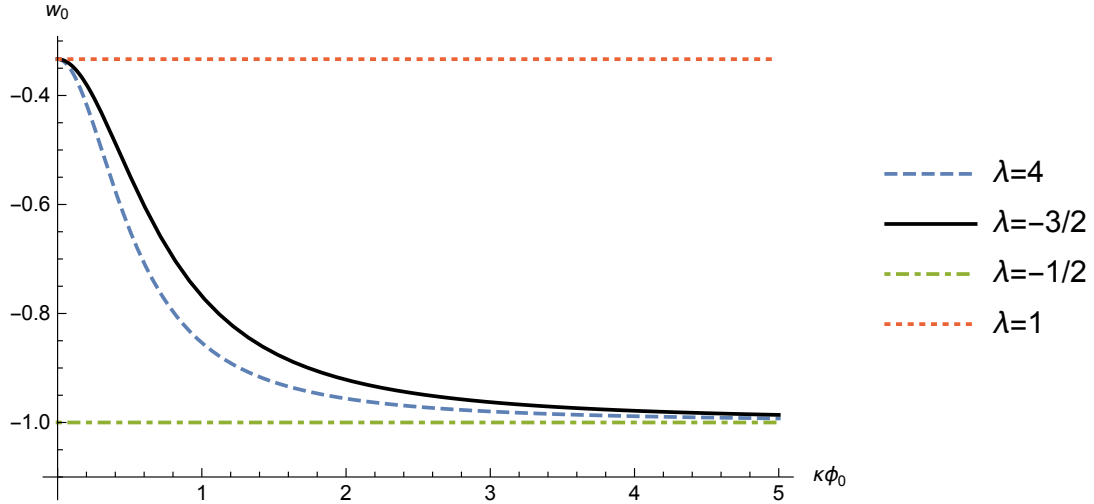


FIGURA 3.1. Condiciones iniciales del parámetro de estado actual como función $\kappa\phi_0$ para varios valores de λ . Las líneas horizontales corresponden a $w_0 = -1/3$ en $\lambda = 1$ y a la solución de De Sitter $w_\Lambda = -1$ en $\lambda = -1/2$, las cuales son independientes del valor inicial $\kappa\phi_0$. Para que w_0 este en el rango de quintaesencia los valores permitidos de λ son $\lambda > 1$ o $\lambda < -1/2$.

De la figura anterior se ve que para $\kappa\phi_0 \gtrsim 2$, el parámetro w_0 está dentro del rango de los datos observacionales. Con esta restricción se puede obtener un valor adecuado de λ que permite definir un comportamiento de w acorde a las observaciones astrofísicas. En la figura (3.2) se muestra la evolución del parámetro de estado como función del corrimiento al rojo para condiciones iniciales tomadas de la figura (3.1). Nótese que para $\lambda = 2.3, 3$ el parámetro de estado permanece cerca de -1 , incluso en épocas tempranas ($z \gg 2$). En general para $\lambda > 0$ el parámetro de estado evoluciona desde -1 en el pasado hasta $-1/3$ en el futuro tardío, mientras que para $\lambda < 0$ ocurre justamente lo opuesto. Todas las curvas presentan un comportamiento apropiado para la quintaesencia tanto en el pasado cercano como en la presente época.

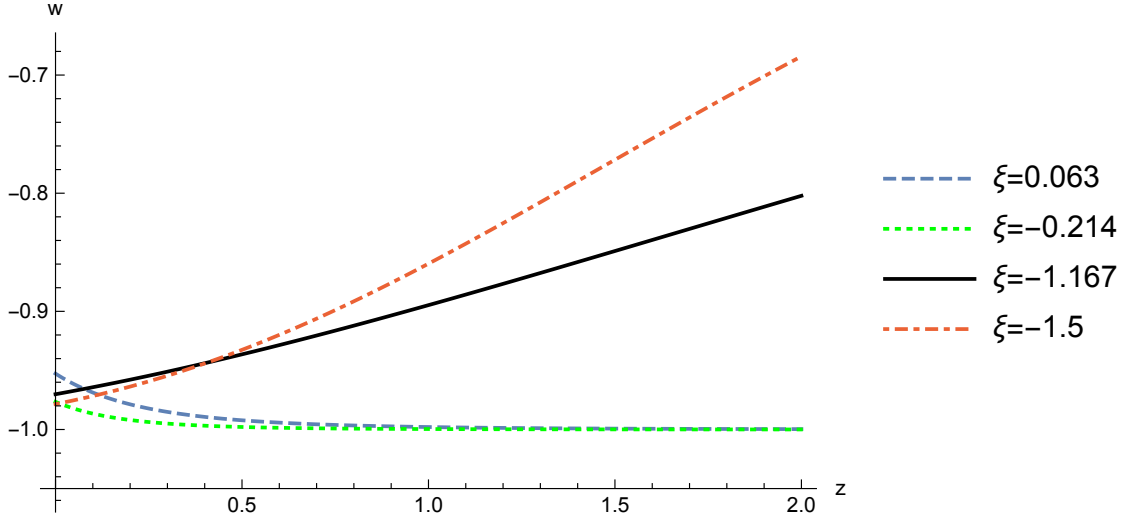


FIGURA 3.2. Evolución del parámetro de estado de energía oscura w como función de z para $\xi = 0.063, -0.214, -1.167, -1.5$, lo cual corresponde a $\lambda = 2.3, 3, -1, -1.5$ y a $w_0 = -0.95, -0.98, -0.97, -0.98$, respectivamente. La condición inicial del campo escalar es $\kappa\phi_0 = 4$. Aunque los valores en la época actual de w son muy similares, la energía oscura evoluciona hacia diferentes escenarios dependiendo del valor de ξ .

3.3. Solución general

Ahora se considera el caso general de la ecuación (3.9), cuya solución es

$$H^2 = h_0^2 e^{-\frac{\gamma}{\beta}x} \left[\kappa^2 \phi_0^2 \beta + 3e^{2\lambda x} \right]^{-\frac{2\beta-\gamma}{2\beta\lambda}} \quad (3.17)$$

donde h_0^2 es una constante de integración y

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda^2 - 6\xi\lambda + 24g_2, \\ \gamma &= -2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 24\xi\lambda + 48g_2 \end{aligned}$$

El parámetro de estado para esta solución está dado por

$$w = -1 + \frac{\gamma(\kappa\phi_0)^2 + 6e^{2x\lambda}}{3\beta(\kappa\phi_0)^2 + 9e^{2x\lambda}} \quad (3.18)$$

cuyos límites asintóticos dependen del signo de λ y son determinados de la siguiente forma:

$$\text{para } \lambda > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} w = -1 + \frac{\gamma}{3\beta} \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w = -\frac{1}{3},$$

mientras que

$$\text{para } \lambda < 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} w = -\frac{1}{3} \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w = -1 + \frac{\gamma}{3\beta},$$

Nótese que estos límites no dependen de la condición inicial del campo escalar. Además se ve que la solución puede contener fase phantom si uno de los parámetros, β o γ , es negativo. Se analizará cada caso por separado. Si $\beta < 0$ y $\gamma > 0$ entonces el primer factor dependiente de x en (3.17) se incrementa exponencialmente, mientras la potencia del segundo factor es negativa, lo cual conlleva a una singularidad Big Rip en algún momento donde $\beta(\kappa\phi_0)^2 = -3e^{2x\lambda}$. Este tipo de singularidades pueden ser evitadas al considerar el caso $\beta > 0$ y $\gamma < 0$. Asumiendo estas desigualdades, el segundo factor de (3.17) es siempre positivo independientemente del signo de la potencia, conllevando a una solución que siempre es finita y tiene la ventaja de describir un escenario phantom. Para ilustrar el comportamiento de la solución (3.17), en la figura (3.3) se grafica el parámetro de estado como función del corrimiento al rojo para algunos valores de los parámetros. Se puede ver que estas graficas se ajustan muy bien al comportamiento observado de la energía oscura. Nótese que para la curvas con $\lambda = 1/8, 1/16$, la expansión debida a la energía oscura atraviesa actualmente una transición desde la fase de phantom hacia la fase de quintaesencia, mientras que para $\lambda = -1/8, -1/16$ las curvas muestran una transición entre estas fases pero en sentido contrario.

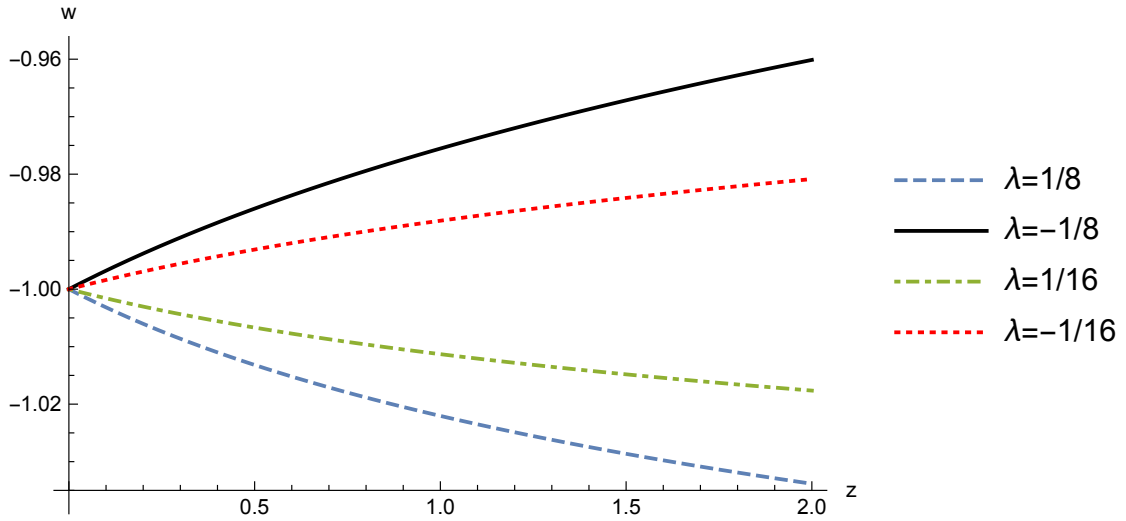


FIGURA 3.3. Comportamiento del parámetro de estado de energía oscura w en función del corrimiento al rojo. La condición inicial del campo escalar es $\kappa\phi_0 = 2$, el valor de w en la época actual es -1 y el parámetro g_2 es 0.28 . Para $\lambda = 1/8, -1/8, 1/16, -1/16$ se obtiene que los valores correspondientes del parámetro de acoplamiento son $\xi = 5, -5, -10, -10$.

También hay la posibilidad de obtener un comportamiento adecuado de la energía oscura para valores pequeños de la constante de acoplamiento ξ como se ilustra en las figuras (3.4) y (3.5), en las cuales se muestran soluciones cuyo parámetro de estado tiene un valor cuasiconstante o tiene una pendiente cuasiconstante en un intervalo grande de z . El parámetro de estado muestra una evolución muy pequeña en un amplio intervalo de z , y su desviación del valor cuasiconstante ocurre cerca de la época presente. De hecho, el modelo puede simular un comportamiento muy similar a la constante cosmológica hasta la época reciente.

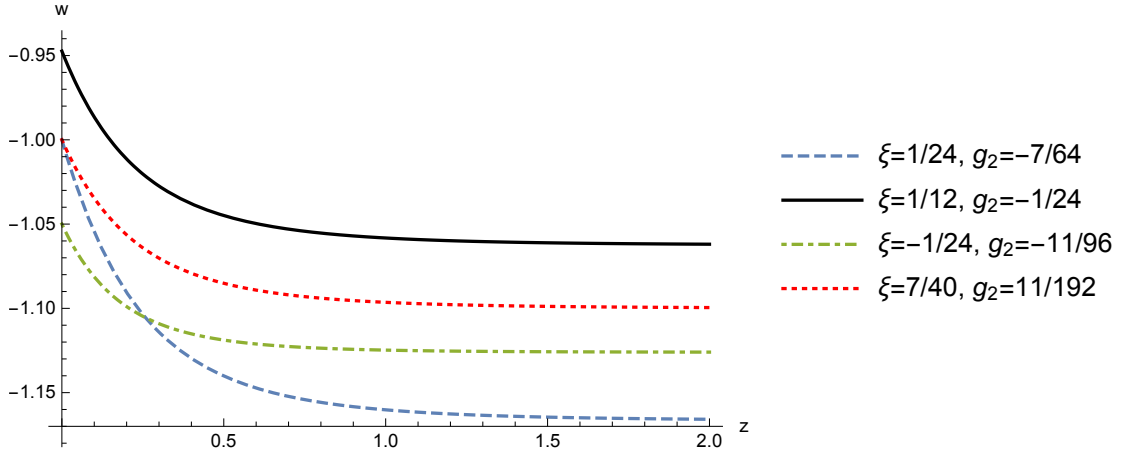


FIGURA 3.4. Parámetro de estado de energía oscura w en función del corrimiento al rojo para valores pequeños del parámetro ξ . En todas las gráficas se toma $\lambda > 0$ y $\kappa\phi_0 = 2$. Las curvas muestran una evolución que va desde la fase de phantom en el pasado hacia la fase de quintaesencia en el futuro. Nótese que el parámetro de estado actual w_0 en todas las curvas es muy similar a -1 .

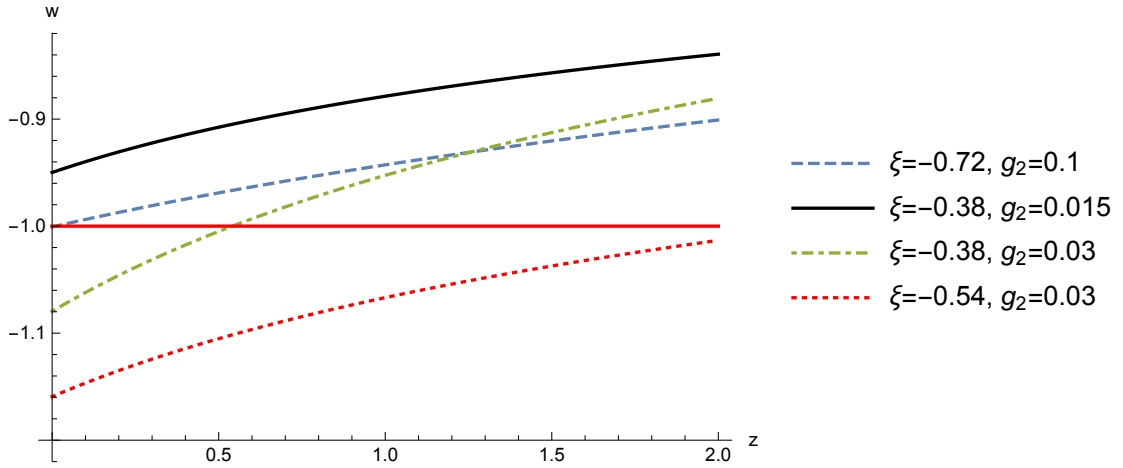


FIGURA 3.5. Parámetro de estado de energía oscura w en función del corrimiento al rojo para $\lambda > 0$. En todos los casos, la condición inicial del campo escalar es $\kappa\phi_0 = 4$. Aunque las curvas cubren diferentes comportamientos del parámetro de estado, todas están dentro del rango aceptable de las observaciones astrofísicas. Nótese las transiciones desde fase de quintaesencia hacia la fase phantom. La línea horizontal corresponde a la constante cosmológica.

CAPÍTULO 4

Análisis del sistema autónomo

En los capítulos anteriores se encontraron una gran variedad de soluciones de energía oscura que son consistentes con las restricciones observacionales. Sin embargo, no es suficiente solo con saber que el modelo admite una solución acelerada, también hay que caracterizar el comportamiento del modelo alrededor de esta solución. Para realizar este tipo de caracterización, existe una herramienta matemática conocida como teoría de sistemas autónomos [73, 74, 75], la cual permite estudiar el comportamiento asintótico de soluciones críticas de interés cosmológico. Por esta razón, primero daremos a conocer algunos conceptos básicos de esta teoría.

4.1. Introducción a la teoría de sistemas autónomos

Un sistema autónomo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma (ver [75]):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Este sistema se puede escribir de una manera más compacta si utilizamos la siguiente notación vectorial

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

De esta manera, el sistema (4.1) se puede escribir de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

Un sistema autónomo, ya sea bidimensional o tridimensional, puede ser visualizado a través de un diagrama conocido como mapa de fase. Por lo general, un mapa de fase esquematiza el comportamiento del campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a lo largo de sus curvas integrales (llamadas también trayectorias u orbitas).

Existen ciertas soluciones particulares de la ecuación (4.2) que son muy importantes dinámicamente. Un ejemplo de ellas son los puntos críticos ($\mathbf{x}_c$), los cuales son definidos como los ceros de la función $\mathbf{F}$. Es decir, el sistema dinámico (4.2) tiene un punto crítico en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ si y solo si $\mathbf{F}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{0}$. Como $\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{0}$, los puntos críticos también reciben el nombre de puntos estacionarios o puntos equilibrio.

Antes de caracterizar el comportamiento del sistema dinámico alrededor de un punto crítico, definamos primero la matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$:

$$J(\mathbf{x}) = D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Supongamos que J_c es la matriz Jacobiana evaluada en el punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$. Diremos que $\mathbf{x}_c$ es hiperbólico cuando las partes reales de todos los autovalores de J_c son diferentes de cero, en caso contrario diremos que $\mathbf{x}_c$ es no hiperbólico.

Los puntos críticos poseen una característica muy importante: pueden ser atractores. La idea intuitiva es la siguiente: cuando muchas orbitas diferentes convergen a un punto del espacio de fases se habla de atracción hacia ese punto. Los atractores dan información sobre el comportamiento asintótico del sistema. De manera más precisa: un punto crítico $\mathbf{x}_c$ se llama atractor si existe una vecindad $\Omega_C \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{x}_c$ tal que $\mathbf{x}(t=0) \in \Omega_C$ implica que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_c$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Otra característica importante de un punto crítico es su estabilidad, cuyo concepto surge al preguntar si las soluciones próximas al punto crítico permanecerán cerca de él. Dicho de manera más formal: un punto crítico $\mathbf{x}_c$ es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}(t=0) - \mathbf{x}_c\| < \delta$ entonces $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\| < \varepsilon$ para todo $t > 0$.

Una forma de determinar la estabilidad asintótica de un punto crítico es a través del criterio de Hartman-Grobman [74], el cual plantea el uso de la matriz Jacobiana J_c para analizar la estabilidad. Dicho de manera más precisa, el signo de los autovalores de J_c pueden ser usados para sacar conclusiones sobre la estabilidad del punto crítico. A continuación, escribiremos el teorema que da soporte a dicho criterio.

Teorema. *Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ es un punto crítico del sistema autónomo (4.2). Supongamos además que los valores propios J_c son $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Entonces,*

- $\mathbf{x}_c$ es asintóticamente estable si todos los autovalores de J_c tiene parte real negativa.
- $\mathbf{x}_c$ es inestable si uno o más autovalores de J_c tiene parte real positiva.

Nótese que este teorema no da ningún criterio de estabilidad cuando la parte real de todos los autovalores es menor o *igual* que cero. Por esta razón, en estos casos solo se puede hablar de una estabilidad de tipo *marginal*.

4.2. Ecuaciones del sistema autónomo, puntos críticos y estabilidad de las soluciones

Para estudiar la dinámica cosmológica desde la perspectiva de los sistemas autónomos, considérese inicialmente un modelo generalizado descrito por la siguiente acción [76, 64, 65]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\phi) R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - \eta(\phi) G + \mathcal{L}_m \right] \quad (4.3)$$

donde $F(\phi)$ es una función del campo escalar que puede ser asociada a una constante de gravitación efectiva, $\kappa_{eff}^2 = F(\phi)^{-1}$, y $\mathcal{L}_m$ corresponde al lagrangiano de un fluido perfecto con densidad de energía ρ_m y presión P_m . Nótese que el modelo (2.3) se obtiene cuando $F(\phi) = \frac{1}{\kappa^2} - \xi\phi^2$.

Asumiendo la métrica (1.3) y un campo escalar espacialmente homogéneo, la variación de la acción (4.3) conlleva a las siguientes ecuaciones:

$$3H^2 (F - 8H\dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V - 3H\dot{F} + \rho_m \quad (4.4)$$

$$2\dot{H} (F - 8H\dot{\eta}) = -\dot{\phi}^2 - \ddot{F} + H\dot{F} + 8H^2\ddot{\eta} - 8H^3\dot{\eta} - (1 + w_m)\rho_m \quad (4.5)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} - 3 \left(2H^2 + \dot{H} \right) \frac{dF}{d\phi} + 24H^2 \left(H^2 + \dot{H} \right) \frac{d\eta}{d\phi} = 0 \quad (4.6)$$

donde se ha supuesto que la componente de materia tiene un parámetro de estado constante w_m^1 , es decir, $P_m = w_m \rho_m$. Ahora, considérese las siguientes variables adimensionales [76, 77]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\dot{\phi}^2}{6H^2 F}, & y &= \frac{V}{3H^2 F}, & f &= \frac{\dot{F}}{HF}, \\ g &= \frac{8H\dot{\eta}}{F}, & \Omega_m &= \frac{\rho_m}{3H^2 F}, & \varepsilon &= \frac{\dot{H}}{H^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Con esto, las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6) pueden reescribirse de la siguiente forma:

¹A lo largo de este capítulo se asumirá que $0 \leq w_m \leq 1$

$$x + y - f + g + \Omega_m = 1$$

$$2\varepsilon(1 - g) = -6x - (f' + \varepsilon f + f^2) + f + (g' - \varepsilon g + gf) - g - 3(1 + w_m)\Omega_m \quad (4.8)$$

$$3(x' + 2x\varepsilon + xf) + 18x + 3(y' + 2y\varepsilon + yf) - 3f(2 + \varepsilon) + 3g(1 + \varepsilon) = 0$$

donde las variables primadas denotan diferenciación con respecto a la variable e-folding. Para cuantificar la dominancia del campo escalar, es posible definir un parámetro de densidad efectivo de la forma $\Omega_\phi = x + y - f + g$, el cual está relacionado con Ω_m a través de la ecuación $\Omega_\phi + \Omega_m = 1$. Cabe mencionar que el sistema anterior requiere un conjunto adicional de ecuaciones, las cuales pueden ser obtenidas al asumir una forma específica del potencial y de los acoplamientos.

Sin pérdida de generalidad se puede reescribir la función $F(\phi)$ de la forma $F(\phi) = \frac{1}{\kappa^2} - h(\phi)$, donde $h(\phi)$ es una función del campo escalar. Como se mencionó anteriormente, al especificar la forma funcional de las funciones $h(\phi)$, $V(\phi)$ y $\eta(\phi)$ es posible obtener ecuaciones adicionales, las cuales permiten completar el sistema (4.8) y escribir el sistema autónomo correspondiente. A continuación se estudiara un modelo en el que dichas funciones son proporcionales a una potencia del campo escalar.

4.2.1. Sistema autónomo correspondiente a un modelo con $V(\phi) \propto \phi^n$, $h(\phi) \propto \phi^N$ y $\eta(\phi) \propto \phi^m$

Para empezar, considérese los siguientes parámetros adimensionales [76, 77]:

$$b = \phi \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{dF}{d\phi} \right) \right], \quad c = \phi \frac{d \ln V}{d\phi}, \quad d = \phi \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{d\eta}{d\phi} \right) \right], \quad \Gamma = \phi \frac{d \ln F}{d\phi} \quad (4.9)$$

Nótese que para un modelo cuyas funciones $V(\phi)$, $h(\phi)$ y $\eta(\phi)$ son proporcionales a una potencia del campo escalar, los parámetros b , c y d toman valores constantes. En otras palabras, si $V(\phi) \propto \phi^n$, $h(\phi) \propto \phi^N$ y $\eta(\phi) \propto \phi^m$, entonces $b = N - 1$, $c = n$ y $d = m - 1$. Teniendo en cuenta esto, es posible obtener el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{c}{\Gamma} f y - 2y\varepsilon - yf \\ f' &= \frac{b}{\Gamma} f^2 + \frac{1}{2} f \frac{x'}{x} - \frac{1}{2} f^2 \\ g' &= \frac{d}{\Gamma} g f + \frac{1}{2} g \frac{x'}{x} + 2\varepsilon g - \frac{1}{2} g f \\ \Gamma' &= b f + f - \Gamma f \end{aligned} \quad (4.10)$$

Las expresiones obtenidas en (4.8) y (4.10) forman un sistema completo de ecuaciones, las cuales conllevan al siguiente sistema autónomo:

$$\begin{aligned}
x' &= -\frac{cfy + \Gamma(g + 6x + f(-2 + x - \varepsilon) + g\varepsilon + 2x\varepsilon)}{\Gamma} \\
y' &= \frac{c}{\Gamma}fy - 2y\varepsilon - yf \\
f' &= -\frac{f(-2bf x + cfy + \Gamma(g + 6x + f(-2 + 2x - \varepsilon) + g\varepsilon + 2x\varepsilon))}{2\Gamma x} \\
g' &= -\frac{g(-2df x + cfy + \Gamma(g + 2f(-1 + x) + 6x + (-f + g - 2x)\varepsilon))}{2\Gamma x} \\
\Gamma' &= f - \Gamma f + bf
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde el parámetro slow-roll, ε , está dado por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{\Gamma((f - g)^2 - 4(-1 + g)x)} \left[f \left(-2bf x + 2dgx + c(f - g)y \right) + \Gamma \left(-2f^2 + 3fg - g^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(3 - f + g + 3(1 + f - g)w_m)x + 6(-1 + w_m)x^2 + 6(1 + w_m)xy \right) \right] \tag{4.12}
\end{aligned}$$

En vista de que este sistema de ecuaciones tiene la forma característica de un sistema autónomo, el análisis de estabilidad lineal puede ser aplicado directamente a (4.11) para estudiar el comportamiento asintótico de los puntos críticos. En las tablas (4.1) y (4.2) se muestran algunos puntos críticos y sus correspondientes autovalores. Las otras cantidades que aparecen en la tabla (4.1) son parámetros que permiten dar una interpretación cosmológica al correspondiente punto crítico, por ejemplo, el parámetro de estado efectivo es calculado a través de las ecuaciones (1.12) y (4.12), mientras que el parámetro de densidad se obtiene con la relación $\Omega_\phi = x + y - f + g$.

TABLA 4.1. Puntos críticos y algunos parámetros cosmológicos

	x	y	f	g	Γ	w_{eff}	Ω_ϕ
A1	1	0	0	0	$1 + b$	1	1
A2	0	0	0	1	Γ	$-1/3$	1
A3	$-\frac{1}{5}$	0	0	$6/5$	$1 + b$	-1	1
A4	0	0	-1	0	$1 + b$	$1/3$	1
A5	0	$\frac{5+5b-c}{1+b+c}$	$\frac{4+4b-2c}{1+b+c}$	0	$1 + b$	$\frac{(b+1)(b+1-9c)+2c^2}{3(1+b)(1+b+c)}$	1
A6	0	0	$\frac{2(1+b)}{2+b+d}$	$\frac{4+3b+d}{2+b+d}$	$1 + b$	$-1 - \frac{2(b-d)}{3(2+b+d)}$	1
A7	0	0	$1 - 3w_m$	0	$1 + b$	$1/3$	$-1 + 3w_m$
A8	0	$\frac{(b+1)(\sigma+c(1-3w_m))}{2c^2}$	$-\frac{\sigma}{c}$	0	$1 + b$	$\frac{cw_m - (1+b)(w_m+1)}{c}$	$\frac{(b+1)(\sigma+c(7+3w_m))}{2c^2}$
A9	0	0	$\frac{\sigma}{d-2b-1}$	$\frac{\sigma\delta}{\mu(d-2b-1)}$	$1 + b$	$-1 + \frac{(b-d)(1+w_m)}{1+2b-d}$	$\frac{2\sigma}{\mu}$

TABLA 4.2. Autovalores correspondientes a los puntos críticos

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
A1	-6	6	0	0	$3(1 - w_m)$
A2	4	2	2	0	$-1 - 3w_m$
A3	0	0	0	-3	$-3(1 + w_m)$
A4	$\frac{b-1}{b+1}$	1	$\frac{5+5b-c}{1+b}$	$-\frac{4+3b+d}{1+b}$	$2 - 3w_m$
A5	$\frac{2(1-b)(2+2b-c)}{(1+b)(1+b+c)}$	$\frac{2(c-2-2b)}{1+b+c}$	$\frac{c-5-5b}{1+b}$	$\frac{2(2+2b-c)(c+d-1-2b)}{(1+b)(1+b+c)}$	$\frac{3(1+b)^2(1+w_m)+(7c+3cw_m)(b+1)-2c^2}{(-1-b)(1+b+c)}$
A6	$-\frac{2(4+3b+d)}{2+b+d}$	$-\frac{2(1+b)}{2+b+d}$	$\frac{2(1-b)}{2+b+d}$	$-\frac{2(1+2b-c-d)}{2+b+d}$	$\frac{-8-7b-d-6w_m-3bw_m-3dw_m}{2+b+d}$
A7	$\frac{(b-1)(3w_m-1)}{1+b}$	$3w_m - 2$	$3w_m - 1$	$\frac{-4-5b+d+3bw_m-3dw_m}{1+b}$	$\frac{3+3b+c+3w_m+3bw_m-3cw_m}{1+b}$

Con el propósito de simplificar escritura en las tablas anteriores, los puntos críticos **A8** y **A9** fueron escritos de la siguiente forma:

$$\mathbf{A8} : \left(0, \frac{(b+1)(\sigma + c(1 - 3w_m))}{2c^2}, -\frac{\sigma}{c}, 0, 1+b \right)$$

$$\mathbf{A9} : \left(0, 0, \frac{\sigma}{d - 2b - 1}, \frac{\sigma\delta}{\mu(d - 2b - 1)}, 1+b \right)$$

donde

$$\sigma = 3(1+b)(1+w_m)$$

$$\delta = -4 + d(1 - 3w_m) + b(-5 + 3w_m)$$

$$\mu = -2 + b(-1 + 3w_m) - d(1 + 3w_m)$$

Cabe mencionar que los autovalores correspondientes a estos puntos críticos no aparecen en la tabla (4.2) debido a que tienen expresiones demasiado largas y no conducen a escenarios de evolución de tiempo tardío interesantes. A continuación se analizará cada punto crítico y se discutirán sus implicaciones cosmológicas.

A1: (1, 0, 0, 0, 1 + b) con autovalores

$$[-6, 6, 0, 0, 3(1 - w_m)]$$

Este punto es dominado por la energía cinética del campo escalar y conduce a la ecuación de estado característica de la materia Stiff. Nótese que los autovalores implican que este punto crítico es inestable.

A2: $(0, 0, 0, 1, \Gamma)$ con autovalores

$$[4, 2, 2, 0, -1 - 3w_m]$$

Este punto es dominado por el acoplamiento GB y posee una ecuación de estado $w_{eff} = -1/3$, la cual corresponde a la división entre la expansión desacelerada y acelerada. De los autovalores se concluye que este punto crítico es un punto de silla.

A3: $(-1/5, 0, 0, 6/5, 1 + b)$ con autovalores

$$[0, 0, 0, -3, -3(1 + w_m)]$$

Este punto corresponde a una solución de De Sitter ($w_{eff} = -1$) con dominancia del campo escalar ($\Omega_\phi = 1$). Debido a la presencia de autovalores menores o iguales a cero, la estabilidad de este punto crítico es de tipo marginal.

A4: $(0, 0, -1, 0, 1 + b)$ con autovalores

$$\left[\frac{b-1}{b+1}, 1, \frac{5+5b-c}{b+1}, -\frac{4+3b+d}{b+1}, 2-3w_m \right]$$

En este punto crítico, cuyo parámetro de estado corresponde a radiación ($w_{eff} = 1/3$), tanto el potencial como el acoplamiento son despreciables comparados con el acoplamiento no mínimo. Nótese que este punto es de silla para ciertos valores de los parámetros b , c y d , por ejemplo, si $-1 < b < 1$, $c > 5(1+b)$ y $d > -4 - 3b$, se obtienen autovalores positivos y negativos, reflejando efectivamente el comportamiento de silla. Debido a esto, este punto podría representar una fase transitoria de un universo dominado por radiación.

A5: $\left(0, \frac{5+5b-c}{1+b+c}, \frac{4+4b-2c}{1+b+c}, 0, 1+b\right)$ con autovalores :

$$\left[\frac{2(1-b)(2+2b-c)}{(1+b)(1+b+c)}, \frac{2(c-2-2b)}{1+b+c}, \frac{c-5-5b}{1+b}, \frac{2(2+2b-c)(c+d-1-2b)}{(1+b)(1+b+c)}, \frac{3(1+b)^2(1+w_m) + (7c+3cw_m)(b+1) - 2c^2}{(-1-b)(1+b+c)} \right]$$

En este punto crítico, cuya ecuación de estado depende de los parámetros b y c , el potencial y el acoplamiento mínimo son dominantes en comparación con el termino GB. El caso $c = 1 + b$ conduce a una solución de De Sitter, cuya estabilidad se obtiene con $b > 1$ y $d < b$ o $b < -1$ y $d > b$. Nótese que para el acoplamiento no mínimo estándar ($b = 1$), la solución de De Sitter es marginalmente estable cuando $b > d$. También es posible considerar ecuaciones de estado cuyos valores sean cercanos a -1 y estén dentro del rango de las observaciones astrofísicas, por ejemplo, tomando $b = 4$, $c = 4$ y $d = 1$ se obtiene una solución de quintaesencia estable con una ecuación de estado dada por $w_{eff} = -0,91$, mientras que al tomar $b = 2$, $c = 4$ y $d = 0$, la solución corresponde a una fase phantom estable con $w_{eff} = -1,06$. Por lo tanto, este punto tiene características viables para la descripción de escenarios cosmológicos de tiempo tardío.

A6: $(0, 0, \frac{2(1+b)}{2+b+d}, \frac{4+3b+d}{2+b+d}, 1+b)$ con autovalores :

$$\left[-\frac{2(4+3b+d)}{2+b+d}, -\frac{2(1+b)}{2+b+d}, \frac{2(1-b)}{2+b+d}, \frac{-8-7b-d-6w_m-3bw_m-3dw_m}{2+b+d}, \right. \\ \left. -\frac{2(1+2b-c-d)}{2+b+d} \right]$$

Este punto crítico conduce a una ecuación de estado que depende de los parámetros b y d y refleja el efecto combinado de los acoplamientos no mínimo y de GB. Haciendo $b = d$, la ecuación de estado conduce al límite de De Sitter y el punto crítico es un atractor cuando $b > 1$ y $c < 1+b$ o $b < -1$ y $c > 1+b$. En el caso $b = 1$, el cual corresponde al acoplamiento no mínimo estándar, el límite de De Sitter conduce a un punto marginalmente estable si se cumple la desigualdad $c < 2$. En general, la condición de estabilidad del punto fijo en fase de quintaesencia se satisface cuando

$$\left\{ \begin{array}{l} b < -1, \\ c > 1+b, \\ 1+2b-c < d < b \end{array} \right\} \quad o \quad \left\{ \begin{array}{l} b > 1, \\ c < 1+b, \\ b < d < 1+2b-c \end{array} \right\},$$

mientras que la condición de estabilidad del punto crítico en fase phantom se satisface con

$$\left\{ \begin{array}{l} b < -1, \\ 3+3b < c < 1+b, \\ 1+2b-c < d < -2-b \end{array} \right\} \quad o \quad \left\{ \begin{array}{l} b < 1, \\ c > 1+b, \\ b < d < -2-b \end{array} \right\} \quad o \quad \left\{ \begin{array}{l} b > 1, \\ c < 1+b, \\ -2-b < d < b \end{array} \right\} \\ o \quad \left\{ \begin{array}{l} b > 1, \\ 1+b < c < 3+3b, \\ -2-b < d < 1+2b-c \end{array} \right\}$$

Nótese que al hacer $b = 3$, $d = 2$ y $0 \leq c \leq 4$, el punto crítico es estable y la ecuación de estado corresponde a fase phantom ($w_{eff} = -1,095$), mientras que al tomar $b = 3$, $d = 4$ y $0 \leq c \leq 2$, se obtiene un punto fijo estable en fase de quintaesencia ($w_{eff} = -0,93$).

A7: $(0, 0, 1-3w_m, 0, 1+b)$ con autovalores :

$$\left[\frac{(b-1)(3w_m-1)}{1+b}, 3w_m-2, 3w_m-1, \frac{3+3b+c+3w_m+3bw_m-3cw_m}{1+b}, \right. \\ \left. \frac{-4-5b+d+3bw_m-3dw_m}{1+b} \right]$$

Este punto crítico conduce a $w_{eff} = 1/3$, $\Omega_\phi = -1 + 3w_m$ y $\Omega_\phi = 2 - 3w_m$, lo que implica que existe contribución tanto de la materia como del acoplamiento no mínimo. La positividad de los parámetros de densidad Ω_ϕ y Ω_m imponen la restricción $1/3 \leq w_m \leq 2/3$, la cual excluye a la materia no relativista ($w_m = 0$). En el caso $w_m = 1/3$, el punto fijo corresponde a una solución Scaling y el universo es conducido a través de una era dominada por radiación con $\Omega_\phi = 0$ y $\Omega_m = 1$. Debido a que esta solución Scaling corresponde a un punto fijo de silla, el sistema puede representar una fase transitoria de dominancia de radiación.

A8 y A9: Como se mencionó anteriormente, estos puntos no conllevan a soluciones de energía oscura físicamente aceptables. Esto se debe a que al tomar una ecuación de estado dentro del rango observacional, los parámetros de densidad no satisfacen la restricción física $0 \leq \Omega_\phi \leq 1$. Por ejemplo, para una ecuación de estado correspondiente al límite de De Sitter, los parámetros de densidad toman valores por fuera de la región de interés físico.

4.2.2. Sistema autónomo correspondiente a el modelo exponencial

Ahora se estudiara el caso en el que $V(\phi)$, $h(\phi)$ y $\eta(\phi)$ son funciones exponenciales. Este tipo de modelos surgen de forma natural como límites efectivos de teorías fundamentales tales como supergravedad y teoría de cuerdas [64, 65]. A diferencia del modelo visto en la subsección anterior, los parámetros b , c , d y Γ se definen de la siguiente forma [76]:

$$b = \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{dF}{d\phi} \right) \right], \quad c = \frac{d \ln V}{d\phi}, \quad d = \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{d\eta}{d\phi} \right) \right], \quad \Gamma = \frac{d \ln F}{d\phi} \quad (4.13)$$

Nótese que el campo escalar no aparece explícitamente en estas expresiones. Asumiendo que los parámetros b , c y d son constantes, las funciones del modelo son tipo exponencial. En otras palabras, si $V(\phi) \propto e^{l\phi}$, $h(\phi) \propto e^{m\phi}$ y $\eta(\phi) \propto e^{n\phi}$, entonces $b = l$, $c = m$ y $d = n$. Teniendo en cuenta esto, es posible obtener el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{c}{\Gamma} f y - 2y\varepsilon - yf \\ f' &= \frac{b}{\Gamma} f^2 + \frac{1}{2} f \frac{x'}{x} - \frac{1}{2} f^2 \\ g' &= \frac{d}{\Gamma} g f + \frac{1}{2} g \frac{x'}{x} + 2\varepsilon g - \frac{1}{2} g f \\ \Gamma' &= b f - \Gamma f \end{aligned} \quad (4.14)$$

Al comparar estas ecuaciones con (4.10) se nota que solamente la última ecuación cambia. Esto implica que el sistema autónomo de este modelo se obtiene solamente al cambiar la última ecuación de (4.11) por

$$\Gamma' = b f - \Gamma f$$

En las tablas (4.3) y (4.4) se muestran los puntos críticos y los autovalores del sistema autónomo correspondiente al modelo exponencial. Además se muestran los parámetros efectivos que reflejan las características cosmológicas de las soluciones.

TABLA 4.3. Puntos críticos y algunos parámetros cosmológicos para el modelo exponencial

	x	y	f	g	Γ	w_{eff}	Ω_ϕ
B1	1	0	0	0	b	1	1
B2	0	0	0	1	Γ	$-1/3$	1
B3	$-\frac{1}{5}$	0	0	$6/5$	b	-1	1
B4	0	0	-1	0	b	$1/3$	1
B5	0	$\frac{5b-c}{b+c}$	$\frac{4b-2c}{b+c}$	0	b	$-1 + \frac{2(b-c)(2b-c)}{3b(b+c)}$	1
B6	0	0	$\frac{2b}{b+d}$	$\frac{3b+d}{b+d}$	b	$-1 + \frac{2(b-d)}{3(b+d)}$	1
B7	0	0	$1 - 3w_m$	0	b	$1/3$	$-1 + 3w_m$
B8	0	$\frac{b(\tilde{\sigma}+c(1-3w_m))}{2c^2}$	$-\frac{\tilde{\sigma}}{c}$	0	b	$-1 - \frac{(b-c)(1+w_m)}{c}$	$\frac{b(\tilde{\sigma}+c(7+3w_m))}{2c^2}$
B9	0	0	$\frac{\tilde{\sigma}}{d-2b}$	$\frac{\tilde{\sigma}\tilde{\delta}}{\tilde{\mu}(d-2b)}$	b	$-1 + \frac{(b-d)(1+w_m)}{2b-d}$	$\frac{2\tilde{\sigma}}{\tilde{\mu}}$

TABLA 4.4. Autovalores correspondientes a los puntos críticos del modelo exponencial

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
B1	-6	6	0	0	$3(1 - w_m)$
B2	4	2	2	0	$-1 - 3w_m$
B3	0	0	0	-3	$-3(1 + w_m)$
B4	$\frac{b-1}{b+1}$	1	$\frac{5+5b-c}{1+b}$	$-\frac{4+3b+d}{1+b}$	$2 - 3w_m$
B5	$\frac{2(c-2b)}{b+c}$	$\frac{2(c-2b)}{b+c}$	$\frac{c-5b}{b}$	$\frac{2(2b-c)(c+d-2b)}{b(b+c)}$	$\frac{-3b^2-7bc+2c^2-3b^2w_m-3bcw_m}{b(b+c)}$
B6	$-\frac{2(3b+d)}{b+d}$	$-\frac{2b}{b+d}$	$-\frac{2b}{b+d}$	$\frac{2(c+d-2b)}{b+d}$	$\frac{-7b-d-3bw_m-3dw_m}{b+d}$
B7	$3w_m - 1$	$3w_m - 2$	$3w_m - 1$	$\frac{-5b+d+3bw_m-3dw_m}{b}$	$\frac{3b+c+3bw_m-3cw_m}{b}$

Con el propósito de simplificar la escritura en las tablas anteriores, se definieron las siguientes cantidades:

$$\tilde{\sigma} = 3b(1 + w_m)$$

$$\tilde{\delta} = d(1 - 3w_m) + b(-5 + 3w_m)$$

$$\tilde{\mu} = b(-1 + 3w_m) - d(1 + 3w_m)$$

Al comparar respectivamente los puntos **B1**, **B2**, **B3** y **B4** con los puntos **A1**, **A2**, **A3** y **A4**, se nota que tienen las mismas propiedades de estabilidad y conducen a los mismos valores de Ω_ϕ y w_{eff} . En lo que sigue se discutirá las principales características del resto de puntos que aparecen en las tablas anteriores.

B5: $\left(0, \frac{5b-c}{b+c}, \frac{4b-2c}{b+c}, 0, b\right)$ con autovalores :

$$\left[\frac{2(c-2b)}{b+c}, \frac{c-5b}{b}, \frac{2(2b-c)(c+d-2b)}{b(b+c)}, \frac{-3b^2(1+w_m) - (7c+3cw_m)b + 2c^2}{b(b+c)} \right]$$

En este punto crítico, la dominancia del potencial y del acoplamiento no mínimo conduce a una ecuación de estado dependiente de los parámetros b y c . Nótese que la solución Scaling, $w_{eff} = w_m$, se obtiene al tomar

$$c = \frac{1}{4} \left[9b + 3bw_m - b\sqrt{73 + 78w_m + 9w_m^2} \right]$$

Este tipo de solución conduce a un escenario cosmológico en donde la densidad de energía del campo escalar tiene un comportamiento similar a la densidad de energía del fluido perfecto (radiación o materia pulverulenta). De los autovalores se deduce que dicha solución Scaling corresponde a un atractor si se satisface las siguientes desigualdades: $b < 0$ y $d > \frac{1}{4} [-b - 3bw_m - b\sqrt{73 + 78w_m + 9w_m^2}]$ o $b > 0$ y $d < \frac{1}{4} [-b - 3bw_m + b\sqrt{73 + 78w_m + 9w_m^2}]$. Por otro lado, también es posible obtener estabilidad de soluciones de energía oscura, por ejemplo, la solución de quintaesencia es estable si $b < 0$, $b \leq c \leq (3 + \sqrt{10})b$ y $d > 2b - c$ o $b > 0$, $(3 + \sqrt{10})b \leq c \leq b$ y $d < 2b - c$, mientras que la solución phantom es estable si $b < 0$, $2b < c \leq b$ y $d > 2b - c$ o $b > 0$, $b \leq c < 2b$ y $d < 2b - c$. Nótese que al hacer $c = b$ se obtiene la solución de De Sitter, la cual es estable para $d < b$. Debido a que los parámetros b y c son reales, la ecuación de estado puede ser tan cercana a -1 como sea necesario, convirtiendo al punto crítico en un escenario cosmológico muy interesante para la descripción de la expansión acelerada.

B6: $\left(0, 0, \frac{2b}{b+d}, \frac{3b+d}{b+d}, b\right)$ con autovalores :

$$\left[-\frac{2(3b+d)}{b+d}, -\frac{2b}{b+d}, \frac{2(c+d-2b)}{b+d}, \frac{-7b-d-3bw_m-3dw_m}{b+d} \right]$$

Este punto crítico, dominado por los acoplamientos no mínimo y de GB, conduce a una ecuación de estado dependiente de los parámetros b y d . El comportamiento Scaling tiene lugar cuando el parámetro d toma la forma:

$$d = -\frac{5b + 3w_m}{1 + 3w_m}$$

De los autovalores se ve que esta solución Scaling corresponde a un punto de silla, lo cual puede representar una fase transitoria donde la densidades de energía del campo escalar y del fluido perfecto tienen comportamientos similares. Para $d = b$, el sistema alcanza un punto crítico de De Sitter, el cual es estable si $c < b$. También es posible encontrar

soluciones de energía oscura estables con ecuación de estado por encima o por debajo de -1 , por ejemplo, el punto fijo de quintaesencia es estable si $b < 0$, $c > b$ y $2b - c < d < b$ o $b > 0$, $c < b$ y $b < d < 2b - c$, mientras que el punto crítico phantom es estable si $b < 0$, $3b < c \leq b$ y $2b - c < d < -b$ o $b < 0$, $c > b$ y $b < d < -b$ o $b > 0$, $c < b$ y $-b < d < b$ o $b > 0$, $b < c \leq 3b$ y $-b < d < 2b - c$. Por lo tanto, es posible obtener rangos de estabilidad para soluciones con ecuación de estado lo suficientemente cerca de -1 , haciendo que el punto crítico sea de interés en la descripción de la expansión acelerada en tiempo tardío.

B7: $(0, 0, 1 - 3w_m, 0, b)$ con autovalores

$$\left[3w_m - 1, 3w_m - 2, \frac{-5b + d + 3bw_m - 3dw_m}{b}, \frac{3b + c + 3bw_m - 3cw_m}{b} \right]$$

Al comparar este punto con **A7** se nota que tienen características similares, por ejemplo, los parámetros de densidad y la ecuación de estado son iguales en ambos puntos. Esto implica que también se debe imponer la restricción $1/3 \leq w_m \leq 2/3$, la cual garantiza la positividad de los parámetros de densidad. Si el fluido perfecto corresponde a radiación, entonces el punto crítico conlleva a una solución Scaling y el universo es dominado por radiación. En cuanto a la estabilidad, este punto Scaling es de silla, lo que puede representar una fase transitoria de dominancia de radiación.

B8 y **B9:** Al igual que **A8** y **A9**, estos puntos carecen de interpretación física debido a que las restricciones $0 \leq \Omega_\phi \leq 1$ y $0 \leq \Omega_m \leq 1$ son incompatibles con las cotas existentes sobre la ecuación de estado en la presente época.

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado un modelo de campo escalar con acoplamientos no mínimo y de Gauss Bonnet [67, 76]. Dicho modelo fue implementado a través de la acción (2.3), la cual involucraba dos funciones desconocidas: $\eta(\phi)$, $V(\phi)$. Las ecuaciones de campo correspondientes a dicha acción fueron calculadas bajo la suposición de una métrica FRW y un campo escalar espacialmente homogéneo. Con estas ecuaciones se implementó un mecanismo de reconstrucción que permitió determinar las funciones $\eta(\phi)$ y $V(\phi)$ para cualquier escenario cosmológico dado. Se mostró ejemplos explícitos de reconstrucción para soluciones tipo ley de potencias, donde se obtuvo potenciales de la forma Albrecht Skordis. Este tipo de potenciales surge en el límite de bajas energías en teoría multidimensionales y presentan características atractivas para la descripción de cosmologías de tiempo tardío [68, 69]. El hecho de haber obtenido el potencial a partir de la reconstrucción con soluciones tipo ley de potencias, implica que el modelo con (2.25) y (2.26) produce soluciones Scaling, las cuales juegan un papel importante en escenarios de quintaesencia. El modelo también se reconstruyó para una solución Little Rip donde la función de Hubble se incrementa exponencialmente con el tiempo y el potencial escalar obtenido es un polinomio de cuarto grado. Un escenario tipo quintom también fue implementado en el mecanismo de reconstrucción, obteniéndose el acoplamiento GB (2.34) y el potencial escalar (2.35). Cabe resaltar que los escenarios phantom son obtenidos sin necesidad de introducir campo fantasmas, lo cual es una característica importante para un modelo viable de energía oscura [67].

Por otro lado, en el modelo en ausencia de potencial se mostró que al restringir apropiadamente el acoplamiento GB, se obtiene soluciones exactas que describen apropiadamente la expansión acelerada del universo. Algunas de estas soluciones se obtuvo bajo la restricción (3.12), dando lugar a un comportamiento tipo quintaesencia controlado por la condición inicial ϕ_0 y el acoplamiento no mínimo ξ . En la figura (3.2) se mostró la evolución de los parámetros de estado correspondientes a dichas soluciones, algunas de las cuales se asemejaron mucho a la constante cosmológica. Para el caso general se demostró que el modelo permite la evolución de energía oscura phantom sin hacer frente al Big Rip o a cualquier otra singularidad. Se encontró que la ecuación de estado tiene comportamientos asintóticos diferentes que dependen de los parámetros del modelo, los cuales se pueden restringir para obtener una consistencia con los datos observacionales. Por ejemplo, soluciones con $\lambda = 1/8, 1/16$ describieron un universo con

parámetro $w_0 = -1$ que experimenta una transición desde la fase phantom hacia la fase de quintaesencia. Pero al cambiar de signo, es decir, tomando $\lambda = -1/8, -1/16$ la transición va en dirección opuesta, donde el universo culmina en la fase phantom. De la ecuación (3.18) deduce que el parámetro de estado actual depende del producto $\gamma(\kappa\phi_0)^2$: si $\gamma(\kappa\phi_0)^2 > -6$ entonces $w_0 > -1$ (fase de quintaesencia), si $\gamma(\kappa\phi_0)^2 < -6$ entonces $w_0 < -1$ (fase phantom) y si $\gamma(\kappa\phi_0)^2 = -6$, entonces $w_0 = -1$ (constante cosmológica). El caso ilustrado en la figura (3.3) corresponde al caso $\gamma(\kappa\phi_0)^2 = -6$, en donde se mostró que la energía oscura puede atravesar la barrera de la constante cosmológica desde las fases de quintaesencia y phantom. El modelo también proporcionó una descripción apropiada de la energía oscura para valores pequeños de la constante de acoplamiento ξ , como se mostró en las figuras (3.4) y (3.4), las cuales describieron escenarios con fase phantom, con transiciones desde fase phantom hacia quintaesencia y con transiciones desde fase de quintaesencia hacia phantom [67].

En la última parte se consideró el estudio del sistema autónomo del modelo (4.3), cuya acción tenía incorporada una versión generalizada del acoplamiento no mínimo [76]. Para esto fue fundamental definir las variables dinámicas de la forma (4.7), cuyas expresiones combinan estratégicamente los diferentes acoplamientos del modelo. Al asumir que el potencial y los acoplamientos son proporcionales a potencias enteras del campo escalar, la dinámica fue llevada a un sistema autónomo, cuyos puntos críticos reflejaron algunas soluciones de interés cosmológico. Por ejemplo, se demostró que al restringir adecuadamente los parámetros enteros b, c , y d , los puntos **A5** y **A6** conduce a soluciones estables de energía oscura en fases de quintaesencia, De Sitter y phantom, convirtiendo a dichos puntos en escenarios cosmológicos viables para describir la expansión acelerada. Otro punto crítico interesante es el punto **A7**, el cual contiene una solución Scaling de radiación con $w_{eff} = w_m = 1/3$. Al tener un comportamiento de silla, este punto puede representar una fase transitoria de dominancia de radiación. Por otro lado, el modelo exponencial también produjo puntos críticos interesante, entre los cuales se destacan los puntos **B5** y **B6**, cuyos autovalores permiten obtener estabilidad de soluciones de energía oscura. Debido a que en este modelo los parámetros b, c y d pueden tomar valores reales, dichos puntos tienen la ventaja de que la ecuación de estado puede ajustarse a valores lo suficientemente cercanos a -1 , mostrando que el modelo exponencial también proporciona alternativas viables para describir escenarios de expansión acelerada.

Todos los resultados mencionados anteriormente cubren una gran variedad de escenarios de energía oscura que son consistentes con el rango de mediciones astrofísicas. Esto permite concluir que la combinación de los acoplamientos no mínimo y de GB proporcionan una buena explicación de la dinámica del universo en tiempo tardío, y puede desempeñar un papel importante en revelar la naturaleza de la energía oscura [67, 76].

APÉNDICE A

Conceptos basicos de geometría

En relatividad general, el elemento infinitesimal de línea es descrito por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.1})$$

donde $g_{\mu\nu}(x)$ es el tensor métrico. La derivada covariante de un campo vectorial V^μ es definida como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (\text{A.2})$$

donde la conexión $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ es escogida de tal manera que la combinación $\nabla_\mu V^\nu$ se transforme como un tensor. En general, la derivada covariante de un tensor de rango arbitrario puede calcularse a través de la siguiente formula

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = & \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ & + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Es posible escojer una conexión sin torsión ($\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu$) que sea compatible con la métrica ($\nabla_\sigma \Gamma_{\mu\lambda}^\nu = 0$). Se puede mostrar que dicha conexión es única y está dada por la formula de Christoffel [57]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.4})$$

En el espacio plano de Minkowski podemos ver claramente que la conexión (A.4) se anula. Por lo tanto, en un espacio plano, las derivadas covariantes se reducen a derivadas ordinarias. Ahora, en un espacio curvo, la curvatura puede verse como una medida de la no conmutatividad de la derivada covariante. Esto es

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\beta]V^\rho = R_{\alpha\sigma\beta}^\rho V^\alpha \quad (\text{A.5})$$

donde $R_{\alpha\sigma\beta}^{\rho}$ es el tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\alpha\sigma\beta}^{\rho} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\rho}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda} \quad (\text{A.6})$$

En general, el conmutador $[\nabla_{\rho}, \nabla_{\sigma}]$ puede ser aplicado sobre un tensor de rango arbitrario. Con algo de algebra se puede mostrar que

$$\begin{aligned} [\nabla_{\rho}, \nabla_{\sigma}]T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = & R_{\lambda\rho\sigma}^{\mu_1}T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + R_{\lambda\rho\sigma}^{\mu_2}T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ & - R_{\nu_1\rho\sigma}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - R_{\nu_2\rho\sigma}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Una forma usual de expresar el tensor de curvatura es mediante una representación completamente covariante: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}$. Teniendo en cuenta esto podemos escribir las siguientes propiedades del tensor de curvatura

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (\text{A.9})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.10})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Para terminar, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R se definen de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = R_{\nu\mu} \quad (\text{A.13})$$

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (\text{A.14})$$

Es importante anotar que la simetría del tensor de Ricci surge como consecuencia de las propiedades del tensor de curvatura. También vale la pena mencionar que dichas propiedades permiten demostrar que $R_{\lambda\mu\nu}^{\lambda} = 0$ y $R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda} = -R_{\mu\nu}$

APÉNDICE B

Identidades adicionales del tensor de curvatura

En este apéndice demostraremos otras identidades asociadas con el tensor curvatura. Como se verá más adelante, estas identidades nos permitirán simplificar los cálculos del tensor energía impulso. A continuación listamos dichas identidades:

$$\nabla^\rho R_{\rho\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\sigma\nu} - \nabla_\nu R_{\sigma\mu} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu R \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\sigma\rho} = \frac{1}{2} \square R \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\mu\rho\nu\sigma} = \nabla^\rho \nabla_\rho R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu R + R_{\gamma\mu\lambda\nu} R^{\lambda\gamma} - R_{\gamma\mu} R_\nu^\gamma \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla^\rho \nabla_\mu R_{\rho\nu} + \nabla^\rho \nabla_\nu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu R + \nabla_\nu \nabla_\mu R) - 2R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + 2R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda \quad (\text{B.5})$$

Demostración de las identidades (B.1), (B.2) y (B.3)

Primero que todo, nótese que la identidad (A.12) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\nabla_\lambda R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + \nabla_\gamma R_{\beta\delta\lambda}^\alpha + \nabla_\delta R_{\beta\lambda\gamma}^\alpha = 0 \quad (\text{B.6})$$

Contrayendo los índices α y γ se tiene que

$$\begin{aligned} & \nabla_\lambda R_{\beta\delta} + \nabla_\alpha R_{\beta\delta\lambda}^\alpha - \nabla_\delta R_{\beta\lambda} = 0 \\ \Rightarrow & \nabla_\alpha R_{\beta\delta\lambda}^\alpha = \nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta} \\ \Rightarrow & \nabla^\alpha R_{\alpha\beta\delta\lambda} = \nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De esta manera queda demostrada la identidad (B.1). Para demostrar la identidad (B.2), partamos de la ecuación (B.7):

$$\begin{aligned}
& \nabla^\alpha R_{\alpha\beta\delta\lambda} = \nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta} \\
\Rightarrow & g^{\beta\delta} \nabla^\alpha R_{\alpha\beta\delta\lambda} = g^{\beta\delta} (\nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta}) \\
\Rightarrow & -\nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \nabla^\beta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R \\
\Rightarrow & 2\nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \nabla_\lambda R \\
\Rightarrow & \nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \nabla_\lambda R
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Con esto queda demostrada la identidad (B.2). Ahora, la identidad (B.3) puede obtenerse al aplicar el operador ∇^λ a ambos lados de la ecuación (B.8). En efecto

$$\begin{aligned}
& \nabla^\lambda \nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \nabla^\lambda \nabla_\lambda R \\
\Rightarrow & \nabla^\lambda \nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \square R
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Demostracion de la identidad (B.4)

Primero escribamos la identidad (A.12)

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\lambda} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = 0 \tag{B.10}$$

Contrayendo esta expresión con $g^{\delta\lambda}$ nos da

$$\begin{aligned}
& g^{\delta\lambda} (\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\lambda} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\lambda\gamma}) = 0 \\
\Rightarrow & \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g^{\delta\lambda} \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\lambda} + \nabla^\lambda R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = 0 \\
\Rightarrow & \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma (g^{\delta\lambda} R_{\alpha\beta\delta\lambda}) + \nabla^\lambda R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Como $g^{\delta\lambda} R_{\alpha\beta\delta\lambda} = 0$ y $R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = R_{\lambda\gamma\alpha\beta}$, entonces

$$\nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla^\lambda R_{\lambda\gamma\alpha\beta} = 0$$

Aplicando el operador ∇^β a ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla^\beta \nabla^\lambda R_{\lambda\gamma\alpha\beta} = 0 \tag{B.11}$$

De la identidad (B.1) se ve que $\nabla^\lambda R_{\lambda\gamma\alpha\beta} = \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} - \nabla_\beta R_{\gamma\alpha}$. Luego, la ecuación (B.11) puede escribirse de la siguiente manera

$$\nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla^\beta \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} - \nabla^\beta \nabla_\beta R_{\gamma\alpha} = 0 \tag{B.12}$$

Ahora, reescribamos el termino $\nabla^\beta \nabla_\alpha R_{\gamma\beta}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\nabla^\beta \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} &= g^{\beta\phi} \nabla_\phi \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} = g^{\beta\phi} (\nabla_\phi \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\phi R_{\gamma\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\phi R_{\gamma\beta}) \\
&= g^{\beta\phi} ([\nabla_\phi, \nabla_\alpha] R_{\gamma\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\phi R_{\gamma\beta}) \\
&= g^{\beta\phi} ([\nabla_\phi, \nabla_\alpha] R_{\gamma\beta}) + \nabla_\alpha \nabla^\beta R_{\gamma\beta} \\
&= g^{\beta\phi} \left(-R_{\gamma\phi\alpha}^\eta R_{\eta\beta} - R_{\beta\phi\alpha}^\eta R_{\gamma\eta} \right) + \nabla_\alpha \nabla^\beta R_{\gamma\beta} \\
&= -R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} + R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa + \nabla_\alpha \nabla^\beta R_{\gamma\beta} \\
&= -R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} + R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\gamma R
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Con esto podemos escribir la ecuación (B.12) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&\nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} + R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\gamma R - \nabla^\beta \nabla_\beta R_{\gamma\alpha} = 0 \\
\Rightarrow \nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \nabla^\beta \nabla_\beta R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\gamma R + R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} - R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa
\end{aligned}$$

Esto demuestra la validez de la identidad (B.4)

Demostración de la identidad (B.5)

Para empezar, consideremos la identidad (B.1):

$$\nabla^\sigma R_{\sigma\phi\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\phi\nu} - \nabla_\nu R_{\phi\mu}$$

Aplicando el operador ∇^ϕ a ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\phi\mu\nu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} \tag{B.14}$$

Por otro lado, escribamos la identidad (A.11) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&R_{\sigma\phi\mu\nu} + R_{\sigma\mu\nu\phi} + R_{\sigma\nu\phi\mu} = 0 \\
\Rightarrow R_{\sigma\phi\mu\nu} &= -R_{\sigma\mu\nu\phi} - R_{\sigma\nu\phi\mu}
\end{aligned}$$

Con esto, la ecuación (B.14) queda así

$$-\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\mu\nu\phi} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\nu\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} \tag{B.15}$$

Por conveniencia, expresaremos el termino $-\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu}$ como $-2\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu}$. De esta manera, la ecuación (B.15) queda así

$$-\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\mu\nu\phi} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\nu\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - 2\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} \tag{B.16}$$

En virtud de (B.1) se tiene $\nabla^\sigma R_{\sigma\mu\nu\phi} = \nabla_\nu R_{\mu\phi} - \nabla_\phi R_{\mu\nu}$. Luego

$$-\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\mu\phi} + \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\nu\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - 2\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu}$$

Agrupando términos y teniendo en cuenta que $R_{\sigma\nu\phi\mu} = R_{\mu\phi\nu\sigma}$, obtenemos

$$\nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\mu\phi\nu\sigma} \quad (\text{B.17})$$

Ahora, de las ecuaciones (B.13) y (B.5) se deduce que

$$\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} = -R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu R$$

y

$$\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\mu\phi\nu\sigma} = \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu R + R_{\lambda\nu\gamma\mu} R^{\gamma\lambda} - R_{\lambda\mu} R_\nu^\lambda$$

Con esto, la ecuación (B.17) puede ser expresada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} &= -R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu R + \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} \\ &\quad - \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu R - R_{\lambda\nu\gamma\mu} R^{\gamma\lambda} + R_{\lambda\mu} R_\nu^\lambda \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $R_{\lambda\mu} R_\nu^\lambda = R_\mu^\lambda R_{\lambda\nu}$ y $R_{\lambda\nu\gamma\mu} R^{\gamma\lambda} = R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda}$, se obtiene

$$\nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} = -2R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + 2R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu R + \nabla_\nu \nabla_\mu R)$$

Esto resultado demuestra la identidad (B.5).

APÉNDICE C

Cálculo de los tensores $T_{\mu\nu}^{GB}$ y $T_{\mu\nu}^{NMC}$

En este apéndice calcularemos los tensores $T_{\mu\nu}^{GB}$ y $T_{\mu\nu}^{NMC}$:

$$T_{\mu\nu}^{GB} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{GB}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad T_{\mu\nu}^{NMC} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NMC}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Antes de empezar, escribamos la variación de algunas cantidades que dependen de la métrica.

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \quad (C.1)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (C.2)$$

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \quad (C.3)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^{\alpha\beta} - g_{\mu\beta} \nabla_\alpha \nabla_\nu \delta g^{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha} \nabla_\beta \nabla_\mu \delta g^{\alpha\beta} \right) \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{\alpha\beta\kappa\lambda} = & \frac{1}{2} \left(\nabla_\kappa \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} + \nabla_\lambda \nabla_\alpha \delta g_{\kappa\beta} - \nabla_\kappa \nabla_\alpha \delta g_{\lambda\beta} - \nabla_\lambda \nabla_\beta \delta g_{\kappa\alpha} \right. \\ & \left. + R_{\beta\kappa\lambda}^\gamma \delta g_{\gamma\alpha} - R_{\alpha\kappa\lambda}^\gamma \delta g_{\beta\gamma} \right) \end{aligned} \quad (C.5)$$

Algunas de estas ecuaciones son demostradas en [57], [78] y [79].

Cálculo del tensor $T_{\mu\nu}^{GB}$

Primero que todo recordemos que

$$S_{GB} = - \int d^4x \sqrt{-g} \eta(\phi) \mathcal{G} = - \int d^4x \sqrt{-g} \eta(\phi) \left(R^2 - 4R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + R_{\phi\gamma\kappa\lambda} R^{\phi\gamma\kappa\lambda} \right)$$

Esta expresión se puede escribir de la siguiente manera

$$S_{GB} = S_1 + S_2 + S_3$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= - \int d^4x \sqrt{-g} \eta(\phi) R^2 \\ S_2 &= 4 \int d^4x \sqrt{-g} \eta(\phi) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} \\ S_3 &= - \int d^4x \sqrt{-g} \eta(\phi) R_{\phi\gamma\kappa\lambda} R^{\phi\gamma\kappa\lambda} \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en calcular la variación de S_{GB} respecto a la métrica. Para esto calcularemos las variaciones δS_1 , δS_2 y δS_3 , y luego las sumaremos para obtener la variación total δS_{GB} .

Variación δS_1

Calculemos la variación de la acción S_1 :

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= -\delta \int d^4x \sqrt{-g} \eta R^2 = - \int d^4x [\eta \delta(\sqrt{-g}) R^2 + \eta \sqrt{-g} \delta(R^2)] \\ &= - \int d^4x [\eta \delta(\sqrt{-g}) R^2 + 2\eta \sqrt{-g} R \delta(R)] \end{aligned}$$

Ahora debemos expresar esta variación en términos de variaciones de la métrica. Para esto, reemplacemos (C.2) y (C.3) en la expresión anterior y utilicemos regla de Leibniz para derivadas covariantes:

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \eta R^2 g_{\mu\nu} - 2\eta R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (\eta R) + 2\nabla_\nu \nabla_\mu (\eta R) \right] \delta g^{\mu\nu}$$

En esta última expresión hemos omitido integrales superficie debido a que no contribuyen a las ecuaciones de campo.

Variación δS_2

Calculemos la variación de la acción S_2 :

$$\delta S_2 = 4\delta \int d^4x \sqrt{-g} \eta R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} = 4 \int d^4x [\eta \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + \eta \sqrt{-g} \delta(R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma})]$$

Como $R^{\phi\gamma} = g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho}$, entonces

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= 4 \int d^4x [\eta \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + \eta \sqrt{-g} \delta(g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho} R_{\phi\gamma})] \\ &= 4 \int d^4x [\eta \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + 2\eta \sqrt{-g} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho} R_{\phi\gamma} \delta g^{\phi\sigma} + 2\eta \sqrt{-g} g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\phi\gamma} \delta R_{\sigma\rho}] \end{aligned}$$

Ahora debemos expresar esta variación en términos de variaciones de la métrica. Para esto, reemplacemos (C.2) y (C.4) en la expresión anterior y utilicemos regla de Leibniz para derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} \delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \Big[& -2\eta g_{\mu\nu} R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + 8\eta g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} - 4\nabla^\phi \nabla_\mu (\eta R_{\phi\nu}) \\ & - 4\nabla^\phi \nabla_\nu (\eta R_{\phi\mu}) + 4\nabla^\lambda \nabla_\lambda (\eta R_{\mu\nu}) + 4g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (\eta R_{\phi\gamma}) \Big] \end{aligned}$$

En esta última expresión se ha omitido las integrales de superficie y se han renombrado algunos índices mudos

Variación δS_3

Calculemos la variación de la acción S_3

$$\delta S_3 = -\delta \int d^4x \sqrt{-g} \eta R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda}$$

Esto es lo mismo que

$$\delta S_3 = - \int d^4x \eta \left[\delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + \sqrt{-g} \delta(R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda}) \right]$$

Como $R^{\alpha\beta\kappa\lambda} = g^{\lambda\eta} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi\eta}$, entonces

$$\delta S_3 = - \int d^4x \eta \left[\delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + \sqrt{-g} \delta \left(g^{\lambda\eta} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi\eta} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \right) \right]$$

Con algo de algebra tensorial se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \delta S_3 = - \int d^4x \Big[& \eta \delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + 4\eta \sqrt{-g} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi\eta} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \delta g^{\lambda\eta} \\ & + 2\eta \sqrt{-g} g^{\lambda\eta} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi\eta} \delta R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \Big] \end{aligned}$$

Ahora, reemplacemos (C.2) y (C.5) en la ecuación anterior. La expresión resultante se puede simplificar si se utilizan las propiedades del tensor de curvatura y la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned} \delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \Big[& \frac{1}{2} \eta g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} - 2\eta R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} \\ & + 4\nabla^\sigma \nabla^\phi (\eta R_{\nu\sigma\phi\mu}) \Big] \end{aligned}$$

donde se ha omitido las integrales de superficie y se han renombrado algunos índices mudos

Variación total δS^{GB}

Ahora, calculemos la variación total δS^{GB} . Para esto, sumemos las variaciones δS_1 , δS_2 y δS_3 y tengamos en cuenta que $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\phi\gamma}R^{\phi\gamma} + R_{\alpha\beta\kappa\lambda}R^{\alpha\beta\kappa\lambda}$. Así,

$$\begin{aligned} \delta S^{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} & \left[\frac{1}{2} \eta \mathcal{G} g_{\mu\nu} - 2\eta R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (\eta R) + 2\nabla_\nu \nabla_\mu (\eta R) \right. \\ & + 8\eta g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} - 4\nabla^\phi \nabla_\mu (\eta R_{\phi\nu}) - 4\nabla^\phi \nabla_\nu (\eta R_{\phi\mu}) + 4\nabla^\lambda \nabla_\lambda (\eta R_{\mu\nu}) \\ & \left. + 4g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (\eta R_{\phi\gamma}) - 2\eta R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} + 4\nabla^\sigma \nabla^\phi (\eta R_{\nu\sigma\phi\mu}) \right] \end{aligned}$$

Desarrollando las derivadas y teniendo en cuenta las identidades (B.1) – (B.5), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S^{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} & \left[\frac{1}{2} \eta \mathcal{G} g_{\mu\nu} - 2\eta R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma \eta) R + 2(\nabla_\nu \nabla_\mu \eta) R \right. \\ & + 4\eta R_\mu^\rho R_{\nu\rho} - 4(\nabla^\phi \nabla_\mu \eta) R_{\phi\nu} - 4(\nabla^\phi \nabla_\nu \eta) R_{\phi\mu} + 4(\nabla^\lambda \nabla_\lambda \eta) R_{\mu\nu} \\ & + 4g_{\mu\nu} (\nabla^\phi \nabla^\gamma \eta) R_{\phi\gamma} - 2\eta R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} + 4(\nabla^\sigma \nabla^\phi \eta) R_{\nu\sigma\phi\mu} \\ & \left. + 4\eta R_{\tau\mu\omega\nu} R^{\omega\tau} \right] \end{aligned}$$

De aquí se ve claramente que el tensor $T_{\mu\nu}^{GB}$ es:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{GB} = & -\eta \mathcal{G} g_{\mu\nu} + 4\eta R R_{\mu\nu} + 4g_{\mu\nu} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma \eta) R - 4(\nabla_\nu \nabla_\mu \eta) R - 8\eta R_\mu^\rho R_{\nu\rho} \\ & + 8(\nabla^\phi \nabla_\mu \eta) R_{\phi\nu} + 8(\nabla^\phi \nabla_\nu \eta) R_{\phi\mu} - 8(\nabla^\lambda \nabla_\lambda \eta) R_{\mu\nu} \\ & - 8g_{\mu\nu} (\nabla^\phi \nabla^\gamma \eta) R_{\phi\gamma} + 4\eta R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} - 8(\nabla^\sigma \nabla^\phi \eta) R_{\nu\sigma\phi\mu} \\ & - 8\eta R_{\tau\mu\omega\nu} R^{\omega\tau} \end{aligned}$$

Esta expresión es válida en un espacio-tiempo de dimensiones arbitrarias. En cuatro dimensiones, los términos proporcionales a η (sin derivadas) se cancelan debido a que el invariante $\mathcal{G}$ es una divergencia en cuatro dimensiones. Teniendo en cuenta esto y usando el hecho de que $R_{\nu\sigma\phi\mu} = -R_{\mu\phi\nu\sigma}$, obtenemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{GB} = & -4 \left([\nabla_\nu \nabla_\mu \eta] R - g_{\mu\nu} [\nabla^\sigma \nabla_\sigma \eta] R - 2[\nabla^\phi \nabla_\mu \eta] R_{\phi\nu} - 2[\nabla^\phi \nabla_\nu \eta] R_{\phi\mu} \right. \\ & \left. + 2[\nabla^\lambda \nabla_\lambda \eta] R_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} [\nabla^\phi \nabla^\gamma \eta] R_{\phi\gamma} - 2[\nabla^\sigma \nabla^\phi \eta] R_{\mu\phi\nu\sigma} \right) \end{aligned}$$

Este tensor es totalmente equivalente al dado en (2.7).

Cálculo del tensor $T_{\mu\nu}^{NMC}$

La acción correspondiente al acoplamiento no mínimo es:

$$S_{NMC} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) R$$

La variación de esta acción es:

$$\delta S_{NMC} = \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) R + \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) \delta R \right]$$

Reemplazando las ecuaciones (C.2) y (C.3) en la variación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_{NMC} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

Aplicando dos veces la regla de Leibniz y omitiendo integrales de superficie, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_{NMC} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi^2] \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \xi [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2] \delta g^{\mu\nu} \right) \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (C.6)$$

Teniendo en cuenta que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, la variación anterior se puede reescribir como

$$\delta S_{NMC} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi^2] + \frac{1}{2} \xi [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2] \right) + \left(-\frac{1}{2} \xi \phi^2 \right) G_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}$$

De aquí se deduce que el correspondiente tensor $T_{\mu\nu}^{NMC}$ está dado por

$$T_{\mu\nu}^{NMC} = \xi g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi^2] - \xi [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2] + \xi \phi^2 G_{\mu\nu}$$

Bibliografía

- [1] S. Perlmutter, et al., Nature **391**, 51 (1998).
- [2] A.G. Riess, et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998); Astron. J. **117**, 707 (1999).
- [3] A. G. Riess, et al. Astrophys. J. **607**, 665 (2004).
- [4] M. Kowalski, et. al., Astrophys. J., **686**, p.749 (2008).
- [5] E. Komatsu, et al. (WMAP Collaboration), Astrophys. J. Suppl., 180, (2009) 330.
- [6] W. J. Percival, et al., Mon. Not. R. Astron. Soc., **401** (2010), 2148.
- [7] Planck Collaboration, arXiv:1303.5062.
- [8] Planck Collaboration, arXiv:1303.5076.
- [9] S. M. Carroll, LivingRev. Rel. **4**, 1 (2000). arXiv:astro-ph/0004075.
- [10] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Int. J Mod. Phys. D **15**, 1753-1936 (2006).
- [11] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [12] S. Tsujikawa, arXiv:1004.1493 [astro-ph.CO] (2010).
- [13] R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998).
- [14] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark energy theory and observations*, Cambridge University Press, 2000.
- [15] S. M. Carroll, arXiv:astro-ph/0107571.
- [16] S. M. Carroll, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067 (1998).
- [17] C. F. Kolda, D. H. Lyth, Phys. Lett. B **458**, 197 (1999).
- [18] C. P. Burgess, P. Grenier, D. Hoover, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0403**, 008 (2004).
- [19] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 483, (2002).
- [20] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1969 (2003).
- [21] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68**, 123512 (2003).

-
- [22] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D **70**, 043528 (2004).
- [23] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rep. **505**, 59 (2011).
- [24] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
- [25] S. Tsujikawa, Lect. Notes Phys. **800** (2010).
- [26] S. Nojiri, S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 115-146 (2007).
- [27] T. Chiba, Phys. Lett. B **575**, 1 (2003); A. L. Erickcek, T. L. Smith, M. Kamionkowski, Phys. Rev. D **74**, 121501 (2006); I. Navarro, K. V. Acoleyen, JCAP **0702**, 022 (2006); G. J. Olmo, Phys. Rev. Lett. **95**, 261102 (2005); G. J. Olmo, Phys. Rev. D **72**, 083505 (2005); G. J. Olmo, Phys. Rev. D **75**, 023511 (2006); P. Zhang, Phys. Rev. D **76**, 024007 (2007); W. Hu, I. Sawicki Phys. Rev. D **76**, 064004 (2007).
- [28] M. Gasperini, *Elements of String Cosmology*, Cambridge University Press, 2007.
- [29] L. Amendola, C. Charmousis, S. C. Davis, JCAP **0710**, 004 (2007).
- [30] L. Amendola, C. Charmousis, S. C. Davis, JCAP **0612**, 020 (2006).
- [31] L. Baojiu, J. D. Barrow, D. F. Mota, Phys. Rev. D. **76**, 044027 (2007).
- [32] C. Lanczos, Annals of Mathematics. **39**, 4 (1938).
- [33] L. N. Granda, Mod. Phys. Lett. A **27**, 1250018 (2012).
- [34] S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sami Mod. Phys. Rev. D **74**, 046004 (2006).
- [35] M. Ivanov, A. V. Toporensky, Grav. Cosmol. **18**, 43 (2012).
- [36] G. Cognola, et al.: Phys. Rev. D **75**, 086002 (2007).
- [37] S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sasaki, Phys. Rev. D **71**, 123509 (2005).
- [38] K. Bamba, et al, Eur. Phys. J. C **67**, 295 (2010).
- [39] L. N. Granda, D. F. Jiménez, C. Sanchez, Int. J. Mod. Phys. D **22**, 1350055 (2013).
- [40] V. Faraoni, *Cosmology in scalar-tensor gravity*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [41] Y. Fujii, K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*, Cambridge University Press, 2004.
- [42] T. Chiba, Phys.Rev. D **60**, 083508 (1999).
- [43] J. P. Uzan, Phys. Rev. D **59**, 123510 (1999).
- [44] L. Amendola, Phys. Rev. D **60**, 043501, (1999).
- [45] V. Faraoni, Phys. Rev. D **70**, 044037 (2004).
- [46] V. Faraoni, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 471 (2002).
- [47] E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, Phys. Rev. D **70**, 043539 (2004).

-
- [48] F. C. Carvalho, A. Saa, Phys. Rev. D **70**, 087302 (2004).
 - [49] R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet, A. A. Starobinsky, JCAP **09**, 016 (2006).
 - [50] F. Perrotta, C. Baccigalupi and S. Matarrese, Phys. Rev. D **61**, 023507 (1999).
 - [51] A. Riazuelo and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **62**, 083506 (2000).
 - [52] B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski, A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85**, 2236 (2000).
 - [53] G. Esposito-Farese, D. Polarski, Phys. Rev. D **63**, 063504 (2001).
 - [54] T. Chiba, Phys. Rev. D **64**, 103503 (2001).
 - [55] D. N. Spergel et al. [WMAP Collaboration], arXiv:astro-ph/0603449.
 - [56] J. Cepa. *Cosmologia física*, Ediciones AKAL, 2007.
 - [57] S. Carroll, *Space time and geometry. An introduction to general relativity*, Addison Wesley, 2004.
 - [58] V. Sahni, Lect. Notes Phys. **653**, 141 (2004).
 - [59] A. Felice, M. Hindmarsh, M. Trodden, JCAP **0608**, 005 (2006).
 - [60] I. Quiros, E. Teste, arXiv:1005.2600 [gr-qc].
 - [61] G. Calcagni, S. Tsujikawa, M. Sami, Class. Quant. Grav. **22**, 3977 (2005).
 - [62] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.
 - [63] C. Gianluca, *Classical and Quantum Cosmology*, Springer International Publishing, 2017.
 - [64] J. Hwang, H. Noh, Phys. Rev. D **61**, 043511 (2000).
 - [65] C. Cartier, J. Hwang, E. Copeland, Phys. Rev. D **64**, 103504 (2001).
 - [66] L. N. Granda, Int. J. Theor. Phys.: **51**, 2813 (2012).
 - [67] L. N. Granda, D. F. Jimenez, Phys. Rev. D **90**, 123512 (2014).
 - [68] A. Albrecht, C. Skordis, Phys. Rev. Lett **84**, 2076 (2000).
 - [69] A. Albrecht, C. P. Burgess, C. Skordis, Phys. Rev. D **65**, 123507 (2002).
 - [70] P. Brax, J. Martin, Phys. Lett. B **468**, 40 (1999).
 - [71] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, R. J. Scherrer, Phys. Rev. D **84**, 063003 (2011).
 - [72] I. Brevik, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **84**, 103508 (2011).
 - [73] A. A. Coley, *Dynamical Systems and Cosmology*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
 - [74] S. Sastry, *Nonlinear systems. Analysis, stability and control*, Springer publishers, 1999.

-
- [75] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, 2002.
 - [76] L. N. Granda, D. F. Jimenez, *Dynamical analysis for a scalar-tensor model with Gauss-Bonnet and non-minimal couplings*, Accepted in EPJC, 2017.
 - [77] M. Sami, M. Shahalam, M. Skugoreva, A. Toporensky, Phys. Rev. D **86**, 103532 (2012).
 - [78] B. Andrews, C. Hopper, *The Ricci Flow in Riemannian Geometry*, Springer publishers, 2011.
 - [79] B. Chow, D. Knopft, *The Ricci Flow: An introduction*, American Mathematical Society, 2004.