



Un Experimento de Enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del Pensamiento Algebraico propuestos por Radford

Camila Nieto Castro 1327614-3469

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS TECNOLOGIAS Y CULTURAS
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SEDE MELÉNDEZ, VALLE DEL CAUCA
2022



Un Experimento de Enseñanza basado en la Proporcionalidad Directa Simple, para la construcción de significado de los elementos del Pensamiento Algebraico propuestos por Radford

Camila Nieto Castro

Facultad de Educación y Pedagogía

1327614

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Directora

Mg. Mónica Correa Ángel

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SEDE MELÉNDEZ, VALLE DEL CAUCA

2022

Con amor,

*A Dios por permitirme vivir y gozar de salud
para culminar una de las etapas más importantes de mi vida.*

*A la Universidad del Valle, por ser el alma máter
que caracterizó mi pensamiento crítico y el amor por mi labor.*

*A mi esposo, por ser la luz en mi oscuridad,
cuando sentí que no podía más.*

*A mi madre y a mi hermana por su amor, apoyo y sacrificio,
por ser el motor que me impulsa día a día
para seguir adelante, por ser ejemplo
de perseverancia y amor.*

*A todos los que hicieron parte de este sueño,
profesores, compañeros, amigos y familiares.*

¡Gracias!

RESUMEN

El desarrollo del pensamiento algebraico tiene gran relevancia en la actividad matemática de un estudiante en la escolaridad, debido a que gracias a este logra el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas que son útiles y necesarias para el desenvolvimiento en situaciones que se presentan en la vida cotidiana. Sin embargo, diferentes investigaciones han mostrado las dificultades que los estudiantes tienen en el proceso de aprendizaje para concebir elementos propios del álgebra en la Educación Básica Secundaria. Estos asuntos motivaron a que en este trabajo de investigación se propusiera la caracterización del pensamiento algebraico a partir del reconocimiento de los elementos propuestos por Radford (2003, 2006), mediante el análisis de las producciones escritas de un grupo de estudiantes de octavo grado en un Experimento de Enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple.

El análisis de las producciones escritas de los estudiantes a partir de la propuesta implementada dejó como evidencia que la proporcionalidad aporta en gran medida al reconocimiento de la indeterminancia, la analiticidad y la designación de objetos en relación con el uso del lenguaje alfanumérico o expresiones en lenguaje natural, estableciendo así la construcción del pensamiento algebraico.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, proporcionalidad, Experimentos de Enseñanza, álgebra, indeterminancia, analiticidad, designación de objetos.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
Capítulo I. Aspectos generales del trabajo de investigación	3
1.1 Presentación del problema de investigación	3
1.2 Formulación del problema: pregunta de investigación	10
1.3 Objetivos	11
1.3.1 Objetivo general	11
1.3.2 Objetivos específicos	11
1.4 Justificación	12
1.5 Contextualización de la población de estudio	17
Capítulo II. Una experiencia de un Experimento de Enseñanza: Marco de referencia conceptual y marco de referencia metodológico	20
2.1 Marco de referencia conceptual	20
2.1.1 Una perspectiva curricular sobre la introducción al álgebra: pensamiento variacional y proporcionalidad	21
2.1.2 Una perspectiva sobre el álgebra y la proporcionalidad en la escuela	24
2.1.3 Una perspectiva sobre el pensamiento algebraico según Radford	30
2.2 Marco de referencia metodológico: Los Experimentos de Enseñanza: un caso de la Investigación Basada en Diseño (IBD)	31
2.2.1 Aspectos generales de los Experimentos de Enseñanza	32
2.2.2 Fase de preparación del Experimento de Enseñanza	34
2.2.3 Fase de Experimentación	39
2.2.4 Fase de análisis retrospectivo de datos	39
Capítulo III. Experimentación	41
3.1 Situación 1: Diseño, implementación, análisis y refinamiento	42
3.1.1 Implementación de la Situación 1	44

3.1.2	Análisis local situación 1: Identificación de estrategias de solución -----	44
3.1.2.1	Estrategia 1: Identificación de magnitud en la proporcionalidad directa	45
3.1.2.2	Estrategia 2: Identificación del comportamiento de las magnitudes ----	47
3.1.3	Refinamiento situación 1 -----	50
3.2	Situación 2: Diseño, implementación, análisis y refinamiento -----	51
3.2.1	Implementación de la Situación 2 -----	52
3.2.2	Análisis local Situación 2: Identificación de estrategias de solución-----	53
3.2.2.1	Estrategia 1: Uso de la proporcionalidad -----	53
3.2.2.2	Estrategia 2: identificación de la incógnita-----	56
3.2.3	Refinamiento situación 2 -----	60
3.3	Situación 3: Diseño, implementación y análisis-----	61
3.3.1	Implementación de la Situación 3 -----	62
3.3.2	Análisis local-----	63
3.3.2.1	Estrategia de solución: Reconocimiento de la proporcionalidad directa -	63
	Capítulo IV. Análisis retrospectivo de los datos-----	68
4.1	Elementos del pensamiento algebraico en los procesos de escritura de los estudiantes -----	68
4.2	Análisis Retrospectivo de los datos: La proporcionalidad en la construcción del pensamiento algebraico -----	76
4.3	Resultados de la investigación-----	81
	BIBLIOGRAFÍA -----	86
	ANEXOS -----	90

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Conjetura del Experimento de Enseñanza y sus dimensiones -----	37
Tabla 2. Estándares Básicos de Competencias tenidos en cuenta para la investigación-	38
Tabla 3. Intencionalidad de preguntas Situación 2 -----	52
Tabla 4. Intencionalidad de preguntas Situación 3 -----	61
Tabla 5. Discusión grupo 2 sobre situación 3 -----	64
Tabla 6. Discusión grupo 1 situación 3-----	65
Tabla 7. Discusión de grupo 3 indicando por qué no utilizaron regla de tres -----	66
Tabla 8. Rejilla sobre lo analizado con relación a los Elementos del Pensamiento Algebraico según Radford-----	79

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Fases de un Experimento de Enseñanza. Tomado de Correa, M (2017) p. 30	34
Figura 2. Relación del marco de referencia con el diseño de las situaciones -----	39
Figura 3. Relación de estrategias según las producciones escritas de los estudiantes con las preguntas-----	69
Figura 4. Esquema de estrategias de solución según los elementos del Pensamiento Algebraico -----	73

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Producción escrita de un estudiante en la solución de la Situación 1 ----	45
Ilustración 2. Proceso de escritura de una estudiante por medio de tabulación en la solución de la Situación 1-----	46
Ilustración 3. Fragmento transcripción Situación 1. Relaciones entre magnitudes en palabras de los estudiantes-----	47
Ilustración 4. Explicación de comportamientos de las magnitudes -----	48
Ilustración 5. Fragmento de transcripción de la Situación 1, donde los estudiantes expresan el comportamiento de las magnitudes -----	49
Ilustración 6. Solución estudiante pregunta 2-----	54
Ilustración 7. Estrategia por tabulación entre relaciones de magnitudes -----	55

Ilustración 8. Reconocimiento de la letra como incógnita -----	56
Ilustración 9. Error de proceso de solución de estudiante -----	58
Ilustración 10. Argumento de estudiante en identificación de la incógnita -----	58
Ilustración 11. Reconocimiento del uso de la proporcionalidad directa -----	59
Ilustración 12. Uso de regla de tres sobre discusión en la Situación 3 -----	64
Ilustración 13. Uso de la regla de tres del grupo 1 -----	65
Ilustración 14. Uso de aproximación numérica a partir de un número decimal -----	67
Ilustración 15. Uso de la regla de tres -----	70
Ilustración 16. Aproximación numérica -----	70
Ilustración 17. Reconocimiento de letra n -----	71
Ilustración 18. Producto entre valores -----	72
Ilustración 19. Estrategias unificadas -----	72
Ilustración 20. -----	77
Ilustración 21. Producción escrita estudiantes Situación 2 -----	78
Ilustración 22. Producción escrita estudiante Situación 3 -----	78

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inscribe en la línea de investigación en Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos del programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Este trabajo tiene como premisa fundamental el estudio de las condiciones y posibilidades que se encuentran en el proceso de enseñanza en la construcción del pensamiento algebraico, a partir del diseño y de la implementación de situaciones enmarcadas bajo la proporcionalidad y orientadas metodológicamente por medio de los Experimentos de Enseñanza, para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico.

Con esta investigación se pretende aportar una reflexión a los futuros docentes -o a los que ya ejerzan la labor docente- con relación a la enseñanza del álgebra a partir de los resultados de la propuesta de enseñanza desarrollada en este trabajo. Con el fin de lograr lo planteado se destacan diversos momentos que constituyen la importancia y el desarrollo de este, tales como, la *identificación y planteamiento de la problemática* contextualizada en el campo de la educación matemática con relación al pensamiento algebraico, la pertinencia de la *metodología* utilizada para la objetividad de esta investigación que se apoya en el *marco de referencia teórico* el cual instaaura elementos importantes para la metodología escogida: los Experimentos de Enseñanza, la *implementación del diseño* y finalmente el *análisis* de las consideraciones que establecen los *resultados y conclusiones* de la investigación.

Por lo anteriormente descrito, este trabajo de investigación se realiza con el fin de implementarlo con estudiantes de octavo grado de la Educación Básica Secundaria de una institución educativa ubicada en la ciudad de Cali, a partir del desarrollo de tres situaciones de

enseñanza divididas en actividades que generen en los estudiantes la capacidad de incorporar procesos propios de la actividad matemática como la resolución de problemas, la modelación y la justificación de estrategias de solución que incorporen elementos de la proporcionalidad que movilicen la introducción al pensamiento algebraico.

Para presentar lo desarrollado en la investigación, este trabajo se organiza en cuatro capítulos, tal como se sigue. En el primer capítulo se muestran los **aspectos generales** que estructuran la problemática general del trabajo, esto es la presentación y formulación del problema de investigación, los objetivos propuestos, la justificación y la contextualización del trabajo investigativo, con respecto a este último aspecto, se precisan las condiciones sociales que se dan para el desarrollo de este trabajo, pues se ven afectadas por la emergencia mundial de salud que se enmarca en la pandemia generada por el virus Covid-19 desde el año 2020.

En el segundo capítulo se presentan dos amplios referentes que fundamentan el objetivo de la investigación: el **marco de referencia conceptual y el marco metodológico**, los cuales se asumen en esta investigación como complementarios debido a la naturaleza de los Experimentos de Enseñanza que ocupan la metodología de este trabajo.

En el tercer capítulo se expone la **fase de experimentación** de las situaciones diseñadas, sus implementaciones, los análisis de cada una de ellas y el refinamiento progresivo, en el cual se recogen elementos para el diseño e implementación de las situaciones siguientes.

Por último, en el cuarto capítulo se presenta el **análisis retrospectivo de los datos** respecto al análisis local de cada una de las situaciones implementadas, en contraste con los objetivos propuestos, además se presentan los resultados de la investigación junto con el planteamiento de una reflexión sobre el proceso de enseñanza de la introducción al álgebra.

Capítulo I. Aspectos generales del trabajo de investigación

Este capítulo realiza la presentación del trabajo de investigación, particularmente pretende dar a conocer los elementos que se tuvo en cuenta para el desarrollo del trabajo investigativo y los objetivos que se proponen en este.

1.1 Presentación del problema de investigación

Los documentos de política pública en Colombia proponen entre varias cuestiones que el proceso de enseñanza favorezca, desarrolle y/o fortalezca cinco pensamientos: numérico, variacional, métrico, espacial y aleatorio con el fin de que los estudiantes sean competentes adquiriendo habilidades a través de procesos generales de las matemáticas.

En particular, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN;2006) asumen el concepto de competencia como “...un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (p. 49), así se puede inferir que el proceso de enseñanza debe enfocarse en aportar y fortalecer habilidades en los estudiantes, para este trabajo en particular, se pretende que este vínculo se dé en relación con el álgebra, dando paso al desarrollo del pensamiento variacional permitiendo visualizar relaciones entre situaciones problema en un contexto escolar y uno real, en la incorporación del fortalecimiento del pensamiento variacional.

Por lo anterior, se quiere destacar el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, el cual tiene como propósito que los estudiantes adquieran habilidades para analizar

de qué manera cambian aumentan, disminuyen, o permanecen constantes fenómenos asociados al cambio y a la variación.

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, el reconocimiento de la variación y la generalización cumplen un papel trascendental en la formación de habilidades y competencias matemáticas, en esta búsqueda el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone referentes curriculares tales como Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN;2006), entre otros; los cuales brindan una línea orientadora sobre los conocimientos elementales que se deben poner en juego en los procesos de enseñanza en la escuela para el desarrollo de competencias matemáticas.

En particular, como uno de los puntos de interés de este trabajo radica en el pensamiento variacional, entonces se entiende que ser competente tiene que ver con la adquisición de habilidades dentro de las cuales se encuentra el reconocimiento de las relaciones entre cantidades a partir de una situación problema en la cual se logren identificar las estrategias de solución en la cual se alcance una visión general.

Es así como los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) destacan la importancia del desarrollo temprano del pensamiento variacional en la escuela

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. (p.51)

Una de las formas de desarrollar el pensamiento variacional es a través del pensamiento numérico mediante la observación de cómo varían los números y la búsqueda de patrones que se repiten, también al establecer relaciones de covariación positiva y de proporcionalidad directa.

Una de las preocupaciones que ha existido en el campo de la educación matemática de manera general es el desarrollo de habilidades y competencias de la actividad matemática en los estudiantes, en el que puedan involucrar los cinco pensamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006), las dificultades que los estudiantes enfrentan hacen que cada vez más se distancie de lo que se propone y estas dificultades se dan regularmente por la enseñanza dividida y la desarticulación de los contenidos a enseñar año tras año. Así mismo sucede con el desarrollo del pensamiento algebraico y la transición de lo aritmético a lo algebraico.

Con respecto a lo anterior, Moreno, Mayorga & Guacaneme (2017) dan a conocer su punto de vista en consideración de las relaciones de contenidos que se deben tener en cuenta al momento de construir nuevos conocimientos, lo cual se expone a continuación

En el escenario de la resolución de problemas se le da sentido a las matemáticas, al mostrarlas con “hilos conductores” hacia otros temas dentro de la misma área e inclusive hacia otras disciplinas del conocimiento. El mejorar la comprensión relacional de las matemáticas implica “saber qué hacer y porque”, además de construir el conocimiento matemático de manera significativa (Skemp, 1976). El conocimiento debe ser construido, a partir del contexto que proporcionan las matemáticas escolares, vinculando la realidad del estudiante y dándole sentido. (p.2)

En este sentido dentro de la enseñanza del álgebra existen algunas propuestas que han puesto mayor interés en el para qué se enseña el álgebra, cómo debe ser la manera de introducirla y las concepciones sobre ella, y aunque son varias las respuestas, se tiene como aspecto común la importancia del álgebra como actividad que posibilita el desarrollo del pensamiento algebraico, algunas propuestas realizadas por autores como Butto, C., Delgado, J. (2012) reflejan algunas prácticas para la vinculación de la proporcionalidad con el álgebra, pues reconocen las relaciones numéricas que se dan en situaciones de proporción articuladas con la introducción al

pensamiento algebraico y proponen así un estrecho vínculo entre dos objetos matemáticos: uno conocido y otro por conocer.

Ahora bien, para que los estudiantes tengan un acercamiento al álgebra se han propuesto varias formas para acceder a las habilidades correspondientes a este campo, por lo que investigaciones como las realizadas por Mason (1999), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Kaput (1999; 2000), Butto y Delgado (2012), estudian las posibles rutas de acceso al álgebra en el proceso de enseñanza, lo cual permite una variedad de estrategias, y la incorporación de aspectos procedimentales y teóricos que los estudiantes ya conocen, en este sentido se propone este trabajo con el fin de profundizar y reflexionar sobre una de las posibles entradas al álgebra para el desarrollo de habilidades y competencias del estudiante.

Por lo anterior, en las investigaciones correspondientes a este campo se han identificado diferentes rutas para que los estudiantes puedan tener un acercamiento al álgebra, como se referencia a continuación a partir de los autores Butto & Delgado (2012)

Existen diversas maneras de mirar al álgebra: como un lenguaje, una herramienta, aritmética generalizada o como cultura. Esta forma de entender el pensamiento algebraico y por extensión su iniciación temprana involucra no solamente una mirada a estas perspectivas sino también su factibilidad como una ruta para acceder a las primeras ideas algebraicas.

Algunos autores han investigado sobre las aproximaciones cognitivas que se deben realizar para la iniciación al álgebra, tales autores como Butto & Delgado (2012), Bednarz, Kieran & Lee (1996) han realizado estudios con respecto al acercamiento del álgebra, ellos reconocen cuatro posibles acercamientos como lo citan Butto, Delgado & Bazán (2018) a continuación:

1. La generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
2. La modelización de situaciones matemáticas y de situaciones concretas

3. El estudio de situaciones funcionales
4. A partir de la resolución de problemas y ecuaciones.

Lo anteriormente descrito se sintetiza para los objetivos de este trabajo, particularmente en dos grandes rutas: la primera dirigida a la proporcionalidad y la segunda a la generalización, ambas buscan que el estudiante se pueda relacionar con conceptos ya desarrollados con anterioridad para darle significado a nuevos conocimientos de tipo algebraico, tal como lo mencionan las autoras Butto Zarzar & Rojano Ceballos (2009) a continuación:

De hecho, se proponen dos rutas para acceder al álgebra: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. La elección de la primera (razonamiento proporcional) se basa, en primera instancia, en la familiaridad que los niños tienen con ese contenido matemático en la escuela primaria y específicamente en ese grado escolar (5° año de primaria) aún cuando están en transición del pensamiento aditivo al multiplicativo. Por otra parte, dicho contenido matemático se conecta conceptual e históricamente (Radford op cit 1996) con la idea de variación proporcional, variable en una relación funcional y número general, que lo conduce a la segunda ruta de acceso (los procesos de generalización). En esta parte, se trata de que los niños aprendan a percibir patrones y sean capaces de expresar y escribir el patrón mediante actividades que involucran el razonamiento acerca de patrones en gráficas, patrones numéricos y figuras, entre otras actividades. En esta ruta, se espera que los niños puedan detectar similitudes, diferencias, recurrencias, así como generalizar operaciones aritméticas partiendo de casos particulares. (p. 4)

De acuerdo con lo citado anteriormente, es importante destacar que la proporcionalidad se caracteriza por ir estrechamente vinculada con contenidos matemáticos de la educación básica primaria, debido a que su naturaleza se fundamenta principalmente en las estructuras multiplicativas y además se asume como una de las bases conceptuales para la caracterización y desarrollo de la actividad matemática del estudiante.

Generalmente, la multiplicación se enseña en la escuela como una suma reiterada del mismo sumando o como una relación terciaria, sin considerar concepciones propias de la multiplicación que limitan el aprendizaje de los estudiantes para comprensiones de contenidos matemáticos posteriores, por esto es oportuno expresar que la importancia de la multiplicación

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

radica principalmente en las relaciones de propiedades, tipos de problemas y el sentido que se identifica a partir de una situación problema desde los primeros años de escolaridad.

Las dificultades que se generan en el aprendizaje de la multiplicación vienen relacionadas con los procesos aritméticos propios que se enseñan en la escuela, debido a que no sólo es reconocer las operaciones y los algoritmos relacionados con ellos sino también en lo que corresponde a las cantidades mismas como lo menciona Schwartz (1988) (citado por Vasco, Obando & Arboleda, 2014)

Aritmética de las cantidades: reconocimiento de que los procesos aritméticos estudiados en la escuela, aditivos o multiplicativos no sólo requieren operar sobre los números que representan las medidas, sino sobre las cantidades mismas y las magnitudes a las que pertenecen (construcción de diferentes tipos de magnitud); ello exige consideraciones tanto cognitivas como didácticas para la enseñanza y el aprendizaje (Schwartz, 1988).

Adicionalmente, los estudiantes no diferencian la utilización de las estructuras multiplicativas y aditivas en situaciones proporcionales siendo elemental la comprensión idónea de estas para un buen desarrollo de conceptos en el paso a la proporcionalidad, tal como lo mencionan a continuación Fernández & Llinares (2010)

Un hecho que muestra las dificultades de los estudiantes en desarrollar este cambio cualitativo es la dificultad en diferenciar situaciones de estructura multiplicativa de situaciones con estructura aditiva puesta de manifiesto por el uso de métodos aditivos erróneos para resolver situaciones proporcionales (Hart, 1981; Tourniaire y Pulos, 1985) y, al mismo tiempo, por el uso de métodos multiplicativos erróneos para resolver situaciones aditivas (Fernández y Llinares, 2009; Fernández, Llinares y Valls, 2008; Fernández, et al 2009). La diferencia entre estos dos tipos de situaciones y el comportamiento de los estudiantes al intentar resolverlas constituyen un contexto idóneo para el estudio del proceso de construcción del significado de razón como un aspecto característico de la transición al pensamiento multiplicativo. (p.12)

Debido a esto, se limita frecuentemente el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes relacionadas con la generalización matemática en situaciones de modelación, pues no identifican la distinción en el uso de conceptos tales como número general, variable e incógnita ni la comprensión sobre las operaciones algebraicas pues no reconocen fácilmente que los

resultados no serán con cantidades conocidas o que el resultado equivale a alguna operación suspendida -operaciones indicadas- (Butto & Delgado, 2012).

Por un lado, la proporcionalidad se asume como un concepto que permite el estudio de la variación y el cambio, además de conceptualizar aspectos numéricos que conllevan a la variación pues brinda la facilidad de relacionar dos o más variables -correlación- que conlleva a visualizar la relación con lo aritmético y la relación con el concepto de función. Por otro lado, es importante destacar que, para efectos de este trabajo de investigación, se precisa el pensamiento algebraico y su caracterización como lo cita Radford (2011) “el pensamiento algebraico se considera que está basado en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas co-variacionales desarrolladas culturalmente y usarlos para tratar con cuestiones de términos lejanos o no especificados” (p. 23)

Así, se entiende que un estudiante que desarrolle pensamiento algebraico debe ser competente en la comprensión de situaciones de su entorno (cultura) en las que se vea retado a usar y entender términos desconocidos o generales a partir de un patrón identificado.

El pensamiento variacional permite posicionar a la proporcionalidad como el hilo conductor que los estudiantes usan para desarrollar conocimientos propios del álgebra enmarcados en elementos propuestos por Radford (2006)– *visto desde la perspectiva de este trabajo* – pues permite precisar el comportamiento de magnitudes en situaciones matemáticas las cuales logran identificar, a partir de la proporcionalidad – *directa en este caso*–, una manera general de expresar el patrón identificado en alguna situación de la vida cotidiana en la que se vea retado matemáticamente.

En relación con el pensamiento algebraico, Radford (2011) indica que tiene tres elementos que lo caracterizan: el sentido de la indeterminación, la analiticidad y la designación simbólica. El sentido de la indeterminancia se asume con objetos matemáticos básicos, como lo son las incógnitas, variables y parámetros; la analiticidad es la forma en la que se trabaja con los objetos que hacen parte de la indeterminancia, se reconocen las operaciones como forma de tratamiento de los objetos indeterminados, y finalmente la designación simbólica, la cual es la manera específica de nombrar los objetos indeterminados.

Finalmente, con el fin de sistematizar lo planteado en este trabajo de investigación, se reconocen los Experimentos de Enseñanza como una estrategia metodológica que permite a la investigación vincular lo desarrollado en los párrafos anteriores, pues brinda la posibilidad de la experimentación de un fenómeno particular de enseñanza, permite prácticas reales y en el transcurso de la experimentación se acogen las necesidades de la población en la cual se aplica, y brinda la oportunidad de caracterizar dificultades, fortalezas y mejoras a las situaciones, para arrojar resultados imparciales según los objetivos de la investigación.

1.2 Formulación del problema: pregunta de investigación

En este apartado se presenta la pregunta que orienta esta investigación, la cual tiene en cuenta los elementos señalados anteriormente para una propuesta de introducción al álgebra, en la que se posibilite la construcción de un significado inicial del álgebra haciendo uso de la proporcionalidad en una situación de enseñanza, en el marco metodológico del diseño de investigación a través de los Experimentos de Enseñanza.

¿Cómo a partir de las producciones escritas de los estudiantes de grado octavo, en un Experimento de Enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, se pueden reconocer la construcción de significado de los elementos propios del pensamiento algebraico?

La propuesta que se plantea en este trabajo investigativo se relaciona con algunos contenidos matemáticos propuestos para grado séptimo y octavo: la proporcionalidad directa simple -en el contexto de una constructora de un proyecto de vivienda- y el lenguaje algebraico, el cual se entiende como las expresiones utilizadas en la comunicación de ideas en procesos matemáticos que expresan el desarrollo del pensamiento algebraico bien sea de manera verbal, gestual o el uso de simbolismos alfanuméricos.

1.3 Objetivos

En relación con la problemática de este trabajo investigativo se plantean los siguientes objetivos:

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar el pensamiento algebraico, a partir del reconocimiento de los elementos propuestos por Radford (2006), a través del análisis de las producciones escritas de los estudiantes de octavo grado en un Experimento de Enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar los aspectos necesarios para el diseño de situaciones de enseñanza centradas en el pensamiento algebraico a través de la proporcionalidad como concepto movilizador.
- Categorizar las producciones escritas de los estudiantes de grado octavo en relación con la conjetura que se propone en el Experimento de Enseñanza.
- Establecer vínculos entre las categorías y los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford a partir del diseño propuesto.

1.4 Justificación

Este trabajo propone como eje central el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de grado octavo, a partir de una ruta o vínculo conceptual que los estudiantes hayan conocido en su vida escolar, en particular, la proporcionalidad.

Por lo tanto, los elementos que se exponen a continuación permiten realizar un recorrido sobre las apreciaciones, que según la mirada de autores como Radford (2001) y Vergel (2018), acerca de qué constituye el pensamiento algebraico y la importancia del pensamiento variacional visto como eje transversal del pensamiento matemático; además de las dificultades identificadas en investigaciones realizadas por autores como Butto, Delgado y Bazán (2018), sobre la transición de la aritmética al álgebra, los cuales fundamentan la pertinencia e importancia de este trabajo de investigación.

En el estudio del pensamiento algebraico se han realizado muchas investigaciones por diferentes autores como Rojas & Vergel (2018), Vergel (2015), Radford (2001, 2006, 2011), Usiskin (1988) en las que expresan la importancia de desarrollar este pensamiento en los estudiantes tanto en sus primeros años de escolaridad como en los adolescentes entre 13 a 15 años que están en el grado octavo. Sin embargo, los resultados que actualmente presentan las pruebas estandarizadas nacionales como las pruebas Saber 11, internacionales como las pruebas TIMM'S¹ muestran que las habilidades y competencias relacionadas con la actividad matemática y en particular con el pensamiento algebraico en los estudiantes, día a día es más limitado y angustioso.

¹ El Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias, sus siglas en inglés TIMM'S es una evaluación internacional de conocimientos de matemáticas y ciencias de los estudiantes que cursan los grados cuarto y octavo de todo el mundo.

Ahora bien, el pensamiento algebraico según Radford citado por Rojas & Vergel (2018) se entiende como “un sistema de procesos corporizados de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente” (p. 196) así el autor establece una relación estrecha entre el pensamiento y la cultura, y en concordancia con él Vergel y Rojas (2018) expresan la capacidad que tiene el ser humano para realizar y analizar procesos en los que se vean comprometidos números conocidos y no conocidos:

El saber algebraico es una síntesis evolutiva (sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa) y culturalmente codificada (como patrones de acción) de hacer y reflexionar en términos analíticos (i.e., la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido que comporta procesos de deducción) sobre números indeterminados y conocidos (p.3)

Por lo anterior, se explicita la relación con el pensamiento variacional en este proceso de análisis y reflexión que surge a partir del pensamiento algebraico, pues este primer pensamiento aporta al desenvolvimiento de los estudiantes en situaciones retadoras que los conlleven a razonar, refutar y analizar características propias de un contexto en el cual se evidencien procesos algebraicos. De esta manera, es importante reconocer la manera en la que se percibe el pensamiento variacional en relación con los compendios curriculares que el Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) propone.

El pensamiento variacional es uno de los tópicos de mayor relevancia en los documentos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional como los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias (2006), pues estos establecen la importancia que cumple el desarrollo de destrezas vinculadas a la variación y el cambio con respecto a fortalecer o forjar el pensamiento algebraico.

Rojas & Vergel (2018) mencionan que “el Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) propone nuevos elementos teóricos y metodológicos con el propósito de actualizar la

estructura curricular de la educación matemática en nuestro país” (p. 23), es por esto que reconocen en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) elementos como la incorporación de los diferentes pensamientos en la actividad matemática y destaca la importancia que tiene en el aula de clase el desarrollo de procesos propios del pensamiento matemático: la modelación, la comunicación, la resolución de problemas, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos en contextos significativos para los estudiantes.

En este orden de ideas, el pensamiento variacional permite producir de manera analítica y reflexiva relaciones que se puedan dar en fenómenos de cambio y de variación, teniendo en cuenta el comportamiento de cantidades conocidas y desconocidas con el fin de establecer vínculos entre ellas y dar soluciones en contextos retadores de la vida cotidiana, y en relación con el pensamiento algebraico, permite fortalecer las relaciones de análisis y deducción que se puedan dar en situaciones de variación y de cambio, como el estudio de patrones y procesos de generalización que se pueden establecer a partir de un contexto significativo para el estudiante.

Así mismo, se indica que el pensamiento algebraico se debe desarrollar desde los primeros años de escolaridad para favorecer el pensamiento variacional (Vergel, 2018), pues aporta elementos básicos pero fundamentales en el pensamiento matemático de un niño. De igual manera, es importante reconocer que la iniciación al álgebra debe darse poco a poco, para que la transición de la aritmética al álgebra se establezca de forma coherente y secuencial con los conceptos.

Por ejemplo, las prácticas de enseñanza asociadas al álgebra se pueden considerar como un aspecto que genera dificultades en el proceso de aprendizaje, puesto que se minimiza la importancia que se tiene sobre factores exógenos al estudiante en particular, por esto, es

adecuado observar y analizar las prácticas de enseñanza del álgebra, para efectos de interés de este trabajo, la manera en cómo se introduce en el aula de clase.

Es común reconocer que los estudiantes tienen como dificultad frecuente ver el álgebra como una ampliación de la aritmética, la cual se les hace difícil identificar que no realizan tratamientos con valores numéricos sino con valores indeterminados, que normalmente lo asumen como un proceso más, nutriendo así una carencia de significado de los elementos que constituyen el álgebra, frente a esto autores como Butto, Delgado & Bazán (2018) afirman que,

la transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares (Butto Zarzar & Delgado Fernández, 2012, pág. 20); sin embargo, una dificultad que la mayoría de los estudiantes presentan al iniciarse en el estudio del álgebra, consiste en que ésta ha sido vista como una transición lineal, es decir, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal. Esto se debe, en parte, a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de fuentes de significados limitadas: usualmente, se toma como base el dominio numérico, dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, por ejemplo, las ideas geométricas. (p. 27)

Así, las ideas y formas de enseñar el álgebra van ligadas directamente con las concepciones propias del docente, y de su manera de introducir el campo del álgebra en los estudiantes limitándose por lo general al pensamiento numérico, sin posibilitar el desarrollo de habilidades que articulen ambos pensamientos, tanto el variacional como el numérico, pues no se toman como referencia conceptos desarrollados anteriormente; además el dominio de competencias matemáticas que pueden utilizar para la comprensión correcta del álgebra, es por esto que se han estudiado varias rutas de acceso al álgebra, para ampliar las perspectivas de enseñanza con respecto a este tópico.

Entre las rutas de acceso al álgebra, autores como Butto y Delgado (2012), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Kaput (1999; 2000) (citados por Butto y Delgado 2018) han reconocido algunas rutas y enfoques de acercamiento al álgebra de manera inicial, que proponen desde

diferentes perspectivas, por ejemplo, una de ellas es introducir el álgebra desde edades tempranas en virtud de las variaciones que pueden tener en la enseñanza de esta.

Ahora bien, Butto & Delgado (2012) realizaron un acotamiento de las rutas que se habían estudiado y resumen las propuestas anteriores en dos grandes rutas: proporcionalidad y procesos de generalización, por este motivo se dota de sentido la escogencia de la proporcionalidad como concepto movilizador para el acercamiento al álgebra.

Como se ha dicho anteriormente, existen varias propuestas que relacionan el pensamiento algebraico como un campo que se debe fortalecer, sin embargo este trabajo se acoge a la propuesta de Radford (2006) porque permite comprender aspectos en que los estudiantes movilizan su pensamiento y su comprensión frente a lo indeterminado, permitiendo a su vez explorar cómo operan las cantidades desconocidas para finalmente reconocer la manera de representar una situación en la que interviene este tipo de cantidades. Es importante resaltar que, mediante esta propuesta, es fundamental las intervenciones del estudiante, pues constituye la naturaleza del pensamiento algebraico.

Es así como las intervenciones del estudiante que expresan mediante lenguaje natural en el transcurso de las clases y las producciones escritas se consideran fundamentales para este trabajo porque es la manera en que se evidencia la comprensión de los estudiantes con las situaciones propuestas, para dotar de sentido el desarrollo y apropiación de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford (2006).

Además de lo anterior, el desarrollo de este trabajo es importante puesto que reconoce y propone que la práctica en el aula de clase debe estar dirigida al desarrollo de actividades y procesos propios de la actividad matemática tales como la modelación, la justificación, la

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

exploración, entre otras, que les permitan a los estudiantes ser socialmente competentes fortaleciendo el pensamiento de la actividad matemática, desde la perspectiva del pensamiento algebraico presentando una propuesta de enseñanza mediante un diseño de situaciones mediados por los Experimentos de Enseñanza.

Es por esto, que se relaciona como metodología de este trabajo los Experimentos de Enseñanza, la cual permite prácticas de aula reales que se enfatizan en las necesidades del estudiante a través de la experimentación de situaciones las cuales mantienen en constante refinamiento para brindar la oportunidad de caracterizar dificultades, fortalezas y mejoras a las situaciones de acuerdo con los resultados que se generan mediante intervenciones orales o escritas de la población estudiada.

1.5 Contextualización de la población de estudio

A continuación, se presenta la caracterización de la población a la cual va a estar dirigida la aplicación del diseño a través de los Experimentos de Enseñanza, la institución que acompaña los procesos académicos de los estudiantes, la relación de su Proyecto Educativo Institucional (PEI) con la realización de este trabajo y algunas particularidades sociales y de salud presentadas en Colombia y el mundo durante la ejecución de este trabajo.

Inicialmente, la población a la cual se dirige el diseño de las situaciones a través de los Experimentos de Enseñanza son adolescentes que cursan octavo grado de la Educación Básica Secundaria, la institución educativa que acoge al equipo investigador para llevar a cabo la investigación pertenece a los Colegios que tiene a cargo la Arquidiócesis de Cali, particularmente el Colegio Parroquial Santiago Apóstol abre sus puertas para el reconocimiento de su institución y pone a disposición los estudiantes que serán participantes activos de este trabajo.

El Colegio Parroquial Santiago Apóstol es un colegio que brinda a los estudiantes modalidades técnicas adicionales de las asignaturas que conforman el currículo escolar, tales modalidades son electricidad, diseño gráfico y contabilidad. El equipo investigador se comunica con el profesor que orienta la modalidad de contabilidad, y le expresa su necesidad e interés con los estudiantes, el cual recomienda el uso de cantidades reales en contextos cotidianos, pues los estudiantes logran la atención cuando se presentan situaciones en las que se ven retados por contextos reales, lo que es de gran interés y apoyo para los objetivos de este trabajo.

El Proyecto Educativo Institucional (PEI) del Colegio Parroquial Santiago Apóstol cuenta con algunos aspectos educativos vinculados en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el nivel de grado octavo en relación con el pensamiento algebraico, que se tomaron en cuenta para el diseño de las situaciones que conforman el Experimento de Enseñanza.

En primer lugar, el PEI menciona que se debe desarrollar competencias en los estudiantes para que sean socialmente competitivos y posean habilidades matemáticas que sean útiles en contextos reales, es por esto que se piensan las situaciones en relación con contextos cotidianos que causen interés, en segundo lugar, se menciona que uno de los pensamientos que más retos tiene de acuerdo con la actividad matemática misma en este nivel es el pensamiento algebraico, por ello el Proyecto sintetiza la importancia de tal pensamiento como la implicación de representar, analizar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en contextos cotidianos que se necesite de la matemática, fomentando el trabajo colaborativo entre estudiantes de tal manera que se vean enfrentados a situaciones cotidianas y del entorno que les resulten familiares.

Por lo anterior, los entornos sociales que se piensan para las situaciones van enmarcados hacia la organización de paseos y los costos de materiales que pueden darse en la construcción de un proyecto de vivienda.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Es importante precisar que para la implementación del Experimento de Enseñanza y la búsqueda de los estudiantes que desean hacer parte de este proceso, se presentan dificultades para el desarrollo habitual en las aulas de clase, pues Colombia y el mundo entero se ve afectado por la pandemia del Covid-19, lo cual imposibilita la experimentación de manera presencial, debido a que el Ministerio de Salud del país decide que todo el sector educativo se acoja a la modalidad de estudio virtual y de alternancia, por ende este trabajo es desarrollado en estas modalidades.

Capítulo II. Una experiencia de un Experimento de Enseñanza: Marco de referencia conceptual y marco de referencia metodológico

Para efectos de este trabajo, es importante indicar que de acuerdo con lo que expresan los Experimentos de Enseñanza, es necesario tener en cuenta las diferentes teorías que fundamentan las particularidades de esta investigación, debido a que precisa un aspecto fundamental en el diseño de las situaciones que se llevarán a cabo en el Experimento de Enseñanza.

Así, los Experimentos de Enseñanza abren una gran perspectiva en cuanto a la pertinencia de la investigación, pues permiten interactuar con varios elementos importantes que hacen necesaria la explicitación del marco de referencia, para así poder definir la trayectoria de aprendizaje que se traza en relación con los objetivos propuestos en este trabajo. Por consiguiente, la organización de este capítulo responde en primer lugar a la presentación del marco de referencia y luego da lugar a la descripción de las particularidades de la investigación en las fases que componen un Experimento de Enseñanza.

2.1 Marco de referencia conceptual

A continuación, se presentan los referentes teóricos que se han tenido en cuenta para el desarrollo del presente trabajo, los cuales se fundamentan en una perspectiva curricular y una perspectiva en relación con el álgebra y la proporcionalidad, sin dejar de lado lo que propone Radford (2006) en relación con el pensamiento algebraico, lo cual es un aspecto teórico primordial para el análisis de las situaciones.

Es importante señalar que la relación del marco de referencia en la metodología de este trabajo se inscribe como factor determinante en la fase de preparación del Experimento de

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Enseñanza, pues brinda la posibilidad de ofrecer elementos teóricos que prevalezcan el diseño de las situaciones a implementar. Ver Figura 1

2.1.1 Una perspectiva curricular sobre la introducción al álgebra: pensamiento variacional y proporcionalidad

Las perspectivas curriculares en Colombia se caracterizan por brindar disposiciones que fundamentan el proceso de enseñanza en el contexto escolar, desde la básica primaria hasta el último año de la Educación Media, es así como los elementos que se destacan en los documentos curriculares nacionales logran trazar una orientación a los docentes y a las instituciones educativas del país. Por consiguiente, se darán acotaciones importantes sobre el pensamiento variacional aterrizado en el concepto matemático que moviliza este trabajo hacia la introducción al álgebra a través de un Experimento de Enseñanza.

- ***Orientaciones pedagógicas nacionales: Ministerio de Educación Nacional***

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el transcurso de los años ha propuesto diferentes documentos pedagógicos y curriculares para la enseñanza de las matemáticas, entre los cuales se encuentran los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (MEN, 2006) y otros que pretenden actualizar los anteriores documentos en años más recientes; con los cuales busca que los profesores promuevan en sus procesos de enseñanza los componentes y habilidades que la actividad matemática necesita. Cabe resaltar que se precisa promover el pensamiento algebraico en la escuela, pues se identifica la necesidad de mejorar los desempeños académicos de los estudiantes de educación secundaria, pues generalmente enfrentan una serie de dificultades por la transición lineal que se tiene del trabajo numérico hacia el trabajo algebraico (símbolos numéricos y alfanuméricos, variación, etc.).

Los documentos referenciados anteriormente proponen algunas orientaciones que buscan que se implementen en la enseñanza los cinco pensamientos de la actividad matemática: numérico, variacional, espacial, métrico y aleatorio. Al tiempo, se propone que se tengan en cuenta los procesos generales: formulación, tratamiento y resolución de problemas; la modelación; la comunicación; el razonamiento; y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos como también la importancia de los contextos.

Por lo tanto, para el desarrollo de este trabajo es fundamental precisar las relaciones que se dan entre el pensamiento numérico, el pensamiento variacional y la modelación para efectos del diseño que se propone implementar para favorecer la iniciación del pensamiento algebraico en los estudiantes de grado octavo enmarcado en la proporcionalidad.

El pensamiento variacional, se concibe como “el que permite ver el reconocimiento, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, gráficos o algebraicos” (MEN, 2006, p. 66). Asimismo, este pensamiento busca promover que los estudiantes puedan realizar un tratamiento matemático de variación y cambio en contextos reales, también que logren desarrollar procedimientos y conceptos que les dé paso a analizar, organizar y modelar matemáticamente diferentes situaciones: problemas de la vida cotidiana, de las propiedades matemáticas y de la ciencia misma.

Es pertinente aclarar que, aunque la variación se vincula con los diferentes tipos de pensamientos y se representa por sistemas algebraicos y analíticos, particularmente necesita de conceptos y procedimientos propios de los sistemas numéricos, geométricos, de medidas y de datos, pues se pueden representar de manera variacional, además la operacionalidad de cantidades que se relacionan en un contexto que conlleve proporcionalidad se deben tener en

cuenta propiedades y estructuras numéricas para alcanzar lo propuesto, es por ello que debido a la naturaleza del Experimento de Enseñanza que se va a desarrollar en este trabajo, se centra la atención en la relación anteriormente descrita.

Con respecto a lo anterior, se destaca la estructura multiplicativa como uno de los conceptos matemáticos más importantes para que los estudiantes logren potenciar las relaciones entre números (en situaciones significativas donde se toman como cantidades) ya que relacionan no solamente las operaciones aritméticas básicas como lo son la multiplicación y la división sino también la variación, proporción, razón, función, entre otros. Así, este trabajo toma también como aspecto importante el papel que cumplen las estructuras multiplicativas pues se relacionan directamente con la proporcionalidad, concepto movilizador para el estudio de la motivación de este trabajo.

Particularmente, la proporcionalidad relaciona el pensamiento numérico con situaciones contexto en las cuales el estudiante puede determinar incógnitas en la solución de un problema, y darles un tratamiento numérico dentro del cual puedan entender el valor de la incógnita como un número que no se conoce pero que se puede simbolizar o especificar por medio de un lenguaje algebraico, sin que el estudiante lo realice de una manera explícita y formal. Este trabajo se enfocará en el desarrollo de la proporcionalidad directa simple para llevar al estudiante a fortalecer habilidades y acercarse al pensamiento algebraico.

Teniendo en cuenta lo expuesto en párrafos anteriores se puede establecer que los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) dan a conocer que el pensamiento variacional se relaciona directamente con el álgebra. Así pues, proponen algunas actividades con respecto a conceptos matemáticos que orientan el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, como por

ejemplo la utilización de regularidades (o también llamados patrones) y procesos de generalización.

2.1.2 Una perspectiva sobre el álgebra y la proporcionalidad en la escuela

En el siguiente apartado se considerará lo que se ha concebido como álgebra y su papel actual en la educación matemática, enfocando la mirada en el papel que cumple la proporcionalidad en la introducción del álgebra en la escuela.

El álgebra en la escuela ha sido un tópico de estudio de varias investigaciones, y en ese proceso de investigación sobre la introducción del álgebra se han señalado cuatro enfoques: la generalización, la resolución de problemas, modelación y la perspectiva funcional. (Bednarz, 47 Kieran & Lee, 1996). Estos enfoques han sido compartidos por varios autores para que progresivamente se alimenten los procesos de enseñanza del álgebra en la escuela, los cuales han sido estudiados y analizados para enriquecerla.

El primero, un enfoque de la introducción al álgebra a partir de la generalización de patrones geométricos y numéricos permite desarrollar la visualización y el reconocimiento de propiedades y relaciones, sin embargo, se presenta como dificultad que no se logre identificar ningún patrón; esto debido que la identificación de patrones está asociada a lo que se observe y los conocimientos que se tenga sobre lo que se observa, por ende, es subjetivo, teniendo así una limitación.

El segundo, un enfoque de la introducción al álgebra mediante la resolución de problemas se nutre a través de la caracterización de un problema y los métodos de solución que los estudiantes puedan identificar para realizarlo, sin embargo, se ha cuestionado esto porque para

solucionar un problema se puede tener varios significados subjetivos para hacerlo, lo cual no se asume que sea solucionado mediante álgebra.

El tercero, un enfoque de la modelación se realiza a través de las relaciones entre las variables de un problema, representándolas a través de un lenguaje simbólico, de manera que se muestre lo que indica el problema mediante un patrón creado por el estudiante a través de propiedades y relaciones, como lo expresa Correa (2017) en su propuesta de investigación sobre el significado de las expresiones algebraicas a partir del discurso

se pretende encontrar un “modelo” que dé cuenta de las relaciones entre las variables, por lo que es necesario pasar por dos fases: formulación y validación. En la primera, se establecen las variables y relaciones a partir de la observación y/o experimentación, y en la segunda, se pone a prueba el modelo construido” (p.48) (Correa, 2017).

Finalmente, se encuentra el enfoque de la perspectiva funcional, la cual explica las relaciones entre las cantidades que estén vinculadas en un contexto, siendo importante el concepto de variable, pues se usan para describir las cantidades que cambian y permite la correspondencia como función que se utiliza para describir el comportamiento que relacionan las cantidades, por lo tanto, la perspectiva funcional estudia los cambios que se producen en los valores que toma una variable.

Teniendo en cuenta los diferentes elementos y concepciones que en este trabajo se han mencionado, se remite directa o indirectamente lo qué es el álgebra, su naturaleza y sus procesos, aspectos con los que se puede deducir la comprensión de los estudiantes en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Radford (2006) ha caracterizado el pensamiento algebraico con tres elementos: el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica – para efectos de este trabajo se asumen como pieza fundamental para el análisis de resultados; así este autor asume que el pensamiento algebraico es una forma de reflexionar matemáticamente a partir de los tres elementos, que permiten evidenciar a través de las producciones escritas de los estudiantes en la solución de una situación problema.

Es importante resaltar que en algunas de las investigaciones realizadas por Radford (2006, 2008, 2010^a, 2010b, 2013) se encuentran reflexiones asociados al estudio del pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótica-cultural, pues el autor pone su interés en la caracterización del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes que no han tenido acercamientos al simbolismo alfanumérico – mediante el uso de letras y números –.

De este modo, se resalta que la manipulación y uso de símbolos y letras es sólo una pequeña parte de lo que el álgebra caracteriza, como lo afirman Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N, (1999), por lo tanto, el pensamiento algebraico no se limita a la manipulación de letras o símbolos matemáticos, sino a la capacidad de comprender e identificar la indeterminación de una forma analítica para que así se logre entender que la utilización de símbolos es sólo una forma de expresar lo no conocido, indeterminado.

Es importante mencionar que existen varias características del pensamiento matemático, entre ellas se destaca uno de los procesos de la actividad matemática en relación con la resolución de problemas, de tal manera resulta coherente enseñar matemáticas desde la experiencia o el conocimiento informal que los estudiantes tienen en su vida cotidiana, sea familiar, escolar o social.

La proporcionalidad es uno de los conceptos que mejor se acopla a este tipo de actividad propia de las matemáticas debido a que se desenvuelve en términos prácticos para la explicación y la comprensión de elementos matemáticos relativos a la proporcionalidad entre magnitudes, como lo son la razón, proporción, magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales, entre otros, los cuales para el interés de este trabajo se enfatizará en la proporcionalidad directa simple.

Existen varias investigaciones que muestran los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad con diferentes conceptos a lo largo del tiempo, tal como lo precisan Obando, Vasco y Arboleda (2013) de la siguiente manera:

en algunos casos se presenta el concepto de razón englobando el de tasa o rata y el de proporción (Lesh, Post, & Behr, 1988), mientras que en otros, razón, tasa, rata y proporción son presentados como conceptos distintos (Vergnaud, 1988); mientras unos autores muestran razones como entidades distintas de las relaciones parte-todo y los operadores (Nesher, 1988), otros critican esta separación pues bajo ciertas condiciones una razón tiene que ser interpretada como una relación parte-todo o un operador (Lamon, 2007); hay propuestas que ponen la fuerza en una aproximación a las razones desde la perspectiva del tratamiento de las magnitudes y las cantidades llamadas intensivas y extensivas por Schwartz (1988), y hay otras que lo hacen apelando a la caracterización de diferentes formas de razonamiento (Kieren, 1988); algunos trabajos muestran que razones y proporciones tienen un vínculo estrecho con los procesos de variación –en una especie de relaciones funcionales (Behr, Harel, & Post, 1992), mientras que otros se enfocan más en lo relativo a la solución de problemas –fundamentalmente, problemas de cuarta proporcional (Kaput & West, 1994).

Para efectos de este trabajo, se entenderá como razón a aquella relación entre dos números finitos que estén en dos sistemas de cantidades, es decir, es una forma de cuantificación de la relación por cociente entre dos cantidades, y no como un cociente entre dos números (Vasco, 2013) y la proporción como la relación de equivalencia entre dos razones, teniendo en cuenta que como la razón es una relación por cociente entre dos cantidades, los estudiantes posiblemente lo pueden ver como fracciones equivalentes, de tal manera que se puede entender

así siempre y cuando se garantice que dichas fracciones se refieren a la misma cantidad de magnitud.

Cabe resaltar la importancia de la razón con relación al diseño de las situaciones que se desarrollan en el Experimento de Enseñanza, pues es aquella relación que permite al estudiante identificar la naturaleza de las cantidades que las ocupan, permitiendo determinar las posibles proporciones que se puedan vincular a una razón, y así mismo, pueden establecer la relación de proporción ante la indeterminancia en alguno de los sistemas de cantidades, teniendo un nuevo reto que se asume como la exploración de estrategias operacionales para conocer el valor indeterminado.

Por un lado, la razón cumple diferentes tipos de funciones en relación con las cantidades involucradas en la situación. Vasco, Obando y Arboleda (2013) identifican cuatro funciones básicas: la razón como relator, como operador, como correlator, o como transformador, estas funciones no son estáticas, sino que, en una situación dada, la función de la razón cambia continuamente de una función a otra según el tipo de problema que se vaya presentando en la situación.

Este trabajo se enfatiza en el tipo de razón como operador y transformador, el primero se presenta cuando dada una cantidad y la razón de esta cantidad con otra cantidad desconocida, la razón se aplica como operador sobre la cantidad conocida para calcular la cantidad desconocida; y el segundo, se da especialmente en el comportamiento entre sistemas de cantidades que se correlacionan linealmente (relación entre dos variables que aumentan o disminuyen recíprocamente).

Por otro lado, la constante de proporción es aquel valor numérico que arroja el cociente de la razón; en el caso de la proporcionalidad directa, la constante de proporcionalidad cuantifica la condición de regularidad a partir de las cantidades implicadas, es decir que expresa la relación entre una unidad de una de las magnitudes y la correspondiente cantidad de la otra magnitud. (Sallán et, 2009). En el caso de que la condición de regularidad esté cuantificada, la constante de proporcionalidad se puede obtener de forma explícita, pero si no está cuantificada se puede expresar utilizando una denominación específica de dicha condición de regularidad.

El comportamiento entre magnitudes permite que el estudiante pueda establecer cómo se movilizan las cantidades y su relación. El comportamiento entre magnitudes directamente proporcionales permite definir una razón en toda la situación problema, de tal manera que esa razón expresa la medida de la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de la otra magnitud, a diferencia de las magnitudes inversamente proporcionales que no permiten definir una razón, pero si es posible definir una constante de proporcionalidad. En particular, para este trabajo se tendrá en cuenta las magnitudes directamente proporcionales.

Es importante resaltar que cada uno de los conceptos que se espera que los estudiantes conozcan, es por el nivel de escolaridad que se encuentran según el grado de interés (octavo) para este trabajo, sin embargo, no se limita a que el estudiante recuerde formalmente cada uno de los conceptos, mejor, la manera intuitiva y lógica como pueden comprender con base a la proporcionalidad y el comportamiento entre magnitudes en situaciones contexto.

2.1.3 Una perspectiva sobre el pensamiento algebraico según Radford

Como se ha expuesto anteriormente, este trabajo investigativo asume lo que el autor Radford (2006) propone en relación con el pensamiento algebraico, por ende, en este apartado se caracterizan los elementos que lo determinan.

Se asume que el álgebra no se reduce a utilización de símbolos y letras exclusivamente para afirmar que se ha aprendido álgebra, sino más bien que la forma de pensar y reflexionar algebraicamente permite que se logre tener competencias las cuales permiten tener un desenvolvimiento en relación con una situación problema que se pueda abarcar o afrontar en la vida cotidiana, así se precisa que las formas de generalización que propone Radford en sus estudios investigativos (2001, 2003) que se sustenta en la teoría de objetivación (Radford, 2014) lo que permite entender que “el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” (Radford, 2006, p. 113).

Es así como el *sentido* que se pueda lograr que el estudiante tome en el aprendizaje de un objeto matemático, es el consecuente de un real aprendizaje y no una lección de una clase, la cual utilizará exclusivamente para enfrentar una prueba o mejor, aplicarla en su vida cotidiana.

Ahora bien, el pensamiento algebraico se caracteriza por tener tres elementos, los cuales a continuación se intentan describir:

- 1. Indeterminancia**, objetos no conocidos que se permiten designar como las variables, los parámetros y la incógnita
- 2. Analiticidad**, da cuenta de la posibilidad de “operar” aquellos valores indeterminados con otros ya conocidos

3. Designación de objetos, es el reconocimiento de cantidades involucradas en una situación específica; dicho reconocimiento se puede dar a través del lenguaje alfanumérico y lenguaje natural, en ocasiones acompañado por gestos que precisan las ideas expresadas.

Este trabajo investigativo se centra en la identificación de aquellos elementos constitutivos que hacen parte del pensamiento algebraico: indeterminancia, analiticidad y designación de objetos, tal como lo ha propuesto Radford (2003, 2006) mediante la solución de situaciones en el marco de los Experimentos de Enseñanza.

2.2 Marco de referencia metodológico: Los Experimentos de Enseñanza: un caso de la Investigación Basada en Diseño (IBD)

La metodología que ocupa este trabajo está inmersa en la Investigación Basada en Diseño (IBD), de la que se entiende como un tipo de investigación orientada hacia la innovación escolar, de acuerdo con algún problema detectado a través de la práctica educativa y diferentes procesos de investigación que puedan incidir ante el problema.

Es así como este trabajo acoge la Investigación Basada en Diseño, de acuerdo con el problema identificado en el primer capítulo. Este modelo investigativo se puede aplicar teniendo en cuenta las necesidades de cada investigación, para efectos de este trabajo se desarrollará mediante los Experimentos de Enseñanza, pues son muy útiles en el estudio de fenómenos educativos dentro del aula de clase porque permite tener un recorrido experimental y no limita lo que se observa en los procesos de cada uno de los estudiantes, sino que se adecúa a las necesidades que el estudiante muestra en contraste con la conjetura y los objetivos del experimento.

2.2.1 Aspectos generales de los Experimentos de Enseñanza

Los Experimentos de Enseñanza es la metodología con la que se pretende categorizar los procesos de escritura realizados de acuerdo con la comprensión de los estudiantes en la solución de las situaciones, a través de la observación obtenida en la experimentación de situaciones de aprendizaje en relación con un concepto matemático, el cual se relaciona con la iniciación al álgebra mediante la proporcionalidad.

Una de las características principales que Cobb (2000) señala con respecto a los Experimentos de Enseñanza es la postura del investigador, puesto que se modifica el papel del profesor al hacerlo participe de la investigación, siendo parte activa en el diseño, implementación, análisis y refinamientos que sean necesarios.

Los Experimentos de enseñanza logran que el investigador genere conjeturas durante el desarrollo de la investigación, ya sea en general o en cada una de las fases del experimento, siendo en ocasiones necesario reformular o refinar las conjeturas teniendo en cuenta los datos recolectados. Según Cobb (2000) para la ejecución de los Experimentos de Enseñanza se reconocen 3 grandes fases: *la preparación del experimento, la experimentación para promover el aprendizaje en los estudiantes, y la ejecución del análisis de los datos obtenidos de la observación en el aula.*

Asimismo, los Experimentos de Enseñanza se caracterizan por proporcionar una oportunidad para desarrollar conocimiento a través de varias situaciones de enseñanza de manera cíclica entre situación-reflexión. Como parte de este ciclo, el investigador aplica unas situaciones diseñadas con el equipo investigador, incorpora una conjetura que acompaña el objetivo del estudio, traza una trayectoria de aprendizaje, implementa cada situación y se analiza en relación

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

con los objetivos, conjetura y trayectoria propuesta, para así generar reflexiones y modificaciones en relación con la naturaleza e interés de la investigación.

La metodología de los Experimentos de Enseñanza está organizada por dos grandes elementos cíclicos: el primero se realiza con relación al diseño y la puesta en acto de las situaciones diseñadas y el segundo con respecto a los análisis, divididos en análisis locales y el análisis retrospectivo, pues permite devolver la mirada hacia lo que se ha implementado y recogido como resultados, para así distinguir el progreso de lo que se quiere investigar y poder refinar aspectos que encaminen la investigación en relación con los objetivos. De esta manera es importante describir cada uno de los componentes de cada fase.

La interpretación de las aplicaciones a las situaciones por parte del investigador permite analizar algunos aspectos de lo que se determina como conjetura, dando como resultado la modificación de lo que se formuló inicialmente. De modo que, este ciclo es esencial en los Experimentos de Enseñanza, pues permite identificar aspectos de interés sobre cómo aprenden los estudiantes, el proceso de enseñanza que se está implementando, el papel que cumple socialmente la investigación, entre otros. En general, se espera que todos los participantes del experimento construyan aprendizajes (Molina *et al.*, 2011).

De manera sintetizada, se presenta el siguiente diagrama con relación a las fases de los Experimentos de Enseñanza, que seguidamente serán descritas.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

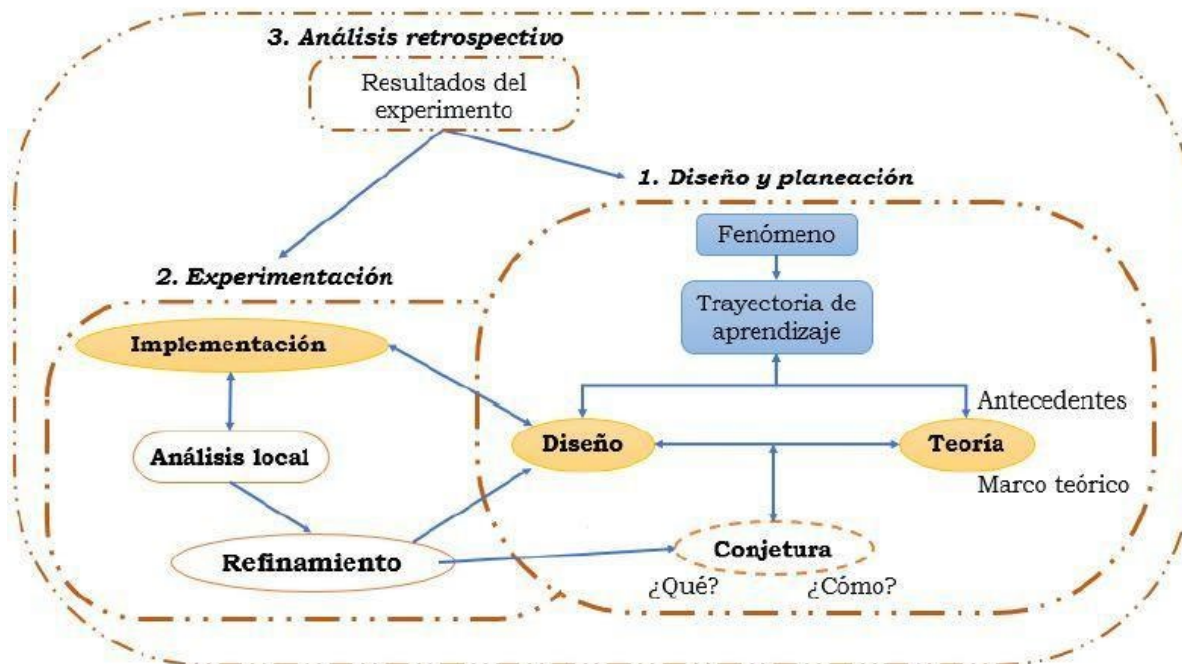


Figura 1. Fases de un Experimento de Enseñanza. Tomado de Correa, M (2017) p. 30

En el diagrama se logra evidenciar las diferentes relaciones entre los componentes de los Experimentos de Enseñanza entre fases y cada uno de los elementos vinculados con cada fase, y a su vez la manera cíclica que cada fase cumple y se articula desde el inicio hasta el final del Experimento de Enseñanza.

2.2.2 Fase de preparación del Experimento de Enseñanza

En esta fase, se realiza lo primordial de la investigación como base para el desarrollo continuo del experimento, por esto se establecen los elementos fundamentales que se consideren en el experimento, es decir en esta fase se define el problema de investigación relacionado con el fenómeno, el diseño y los elementos de análisis sobre los que se desarrolla el experimento.

En particular, es importante precisar que el diseño se entiende como todos aquellos elementos que constituyen la situación de enseñanza y no sólo como el conjunto de tareas propuesto para dicha situación, por lo que en el Diseño se establece una trayectoria de aprendizaje, que incluye aspectos como las metas para los estudiantes, diseño y planeación de las

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

situaciones; la formulación de la conjetura; el marco de referencia que apoya la creación de las situaciones y los análisis. Cabe resaltar que en esta fase del experimento se piensa, se genera la idea y todo lo relacionado con respecto a la planeación y diseño de la situación.

❖ *Problema de investigación, fenómeno y propósito de la investigación*

La propuesta que se desarrolla en esta investigación se enmarca en la construcción de una propuesta de enseñanza para la introducción al álgebra mediante la proporcionalidad, que se analiza para reconocer la utilidad de esta propuesta en el aprendizaje de los estudiantes. Además, es importante destacar que se busca con esta investigación reconocer elementos para que se genere una reflexión de acuerdo con las prácticas de enseñanza del álgebra en la escuela.

❖ *Trayectoria de aprendizaje*

Es fundamental comprender el lugar que ocupa la Trayectoria de aprendizaje, la cual intenta describir las progresiones en el aprendizaje y puede proporcionar la base de conocimiento para la toma de decisiones de quién realiza el experimento, sobre cuándo, qué y cómo enseñar. La trayectoria de aprendizaje implica una conjetura sobre el orden y la naturaleza del crecimiento de la comprensión matemática que se previsualiza bajo el objetivo de la investigación, además sobre el tipo de actividades que podrían apoyar la transición paso a paso hacia los objetivos y las metas pretendidas en este trabajo, permitiendo la modificación según los resultados que en la aplicación se exijan.

❖ *Meta de aprendizaje*

En los Experimentos de Enseñanza se consideran las metas como aquello que se quiere alcanzar con los estudiantes con la puesta en práctica del diseño. Las metas se proponen con base

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

en elementos teóricos que más adelante permiten ajustes según el desarrollo del experimento.

Así, se proponen dos metas de aprendizaje, mencionadas a continuación:

1. Levantar un experimento piloto para la investigación: Explorar y conocer los conocimientos previos de los estudiantes con respecto a la proporcionalidad.
2. Lograr que los estudiantes reconozcan y distingan la necesidad de utilizar a partir del contexto utilizado en el diseño, el simbolismo alfanumérico o representaciones gráficas (ícono, trazo, entre otros) ante una situación que les permita trabajar con cantidades desconocidas.

❖ **Conjetura**

Uno de los elementos fundamentales de los Experimentos de Enseñanza es la conjetura, la cual se entiende como aquella proposición que da cuenta de los supuestos que se traza el investigador con respecto a lo que se propone a investigar apoyado en los objetivos. Tal proposición no significa que se quiera probar, sino que representa la determinación de las condiciones que deben tener las situaciones propuestas para posibilitar el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, entre ellos los procesos que se espera que ellos realicen, las intervenciones del docente, entre otros.

La conjetura es susceptible de cambios en la investigación durante la experimentación y en ella se incluyen dos dimensiones. Una de ellas es la *dimensión de contenido*, en la cual se expresa qué contenido matemático se va a movilizar dentro de la actividad matemática que realizan los estudiantes, lo cual hace que delimite las situaciones propuestas y su sentido; la otra es la *dimensión pedagógica*, en la cual se encuentra la relación del contenido matemático y el cómo enseñarlo, conduciendo además a reconocer qué se va a observar y analizar en el Experimento de enseñanza y definir las condiciones que debe tener el diseño para apoyar la

situación de enseñanza. Se presenta a continuación la conjetura del Experimento de Enseñanza que orienta este trabajo investigativo:

Conjetura	
La proporcionalidad brinda una articulación en la actividad matemática de los estudiantes con relación a las cantidades desconocidas de una situación problema movilizándolos hacia el pensamiento algebraico, mediante las relaciones que se pueden encontrar en las magnitudes, enmarcado en el contexto de precios para la mejora de un proyecto de vivienda.	
Dimensión de contenido <i>Contenido matemático movilizador</i>	La proporcionalidad
Dimensión pedagógica <i>Relación del contenido matemático con el propósito del Experimento de Enseñanza.</i>	Articulación de la proporcionalidad en la actividad matemática para la movilización hacia el pensamiento algebraico mediante la caracterización de los elementos propios de este pensamiento.

Tabla 1. Conjetura del Experimento de Enseñanza y sus dimensiones

Se precisa que la dimensión de contenido se da en este trabajo con priorización al concepto de proporcionalidad, el cual incide en la aproximación al pensamiento algebraico en los estudiantes de grado octavo. Y por su parte, la dimensión pedagógica se establece en relación con la vinculación de la dimensión de contenido y su manera de utilizarse para lograr los objetivos de esta investigación.

- **El diseño de las situaciones en relación con el marco de referencia**

El diseño de las situaciones que conforman el Experimento de Enseñanza dispone de varios elementos teóricos importantes del marco de referencia para la fase de preparación del experimento, pues a partir de ellos se busca lograr los objetivos propuestos de la investigación.

Los elementos que se vieron involucrados para el diseño de las situaciones se enfatiza en tres aspectos importantes: en primer lugar, ***los conocimientos esperados que tengan los estudiantes***, pues de acuerdo con los documentos curriculares nacionales referenciados, se

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

estableció la importancia de la coherencia y pertinencia de iniciar un concepto matemático sin desligarse de uno conocido, para ello es fundamental realizar un experimento piloto el cual determine las condiciones básicas que tienen los estudiantes para poder realizar el diseño de las siguientes situaciones, es así como el equipo investigador se apoya en los Estándares Básicos de Competencias (2006).

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS (2006, MEN)	
Nivel de 6° a 7°	Nivel de 8° a 9°
En este nivel, se espera que los estudiantes tengan en su conocimiento los siguientes estándares relacionados con la proporcionalidad. - <i>Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).</i> - <i>Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.</i>	Se busca que los estudiantes lleguen de acuerdo con lo que ya conocen sobre la proporcionalidad, a una aproximación intuitiva del uso del lenguaje algebraico para modelar una situación en contexto a través de información sobre un proyecto de vivienda. - <i>Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.</i>

Tabla 2. Estándares Básicos de Competencias tenidos en cuenta para la investigación

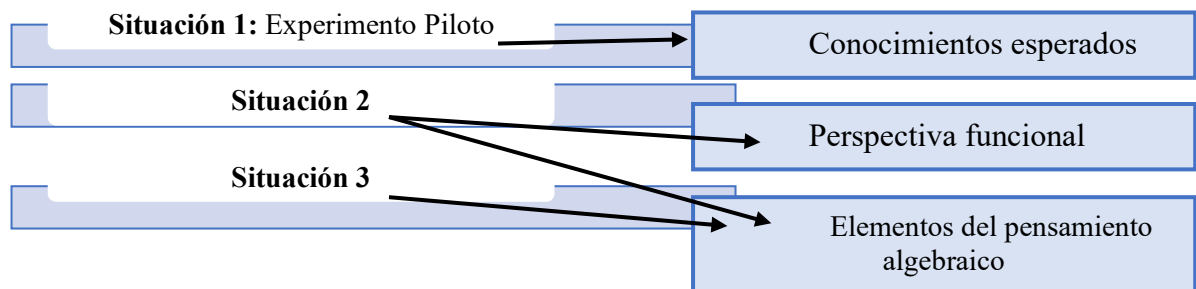
La intención por la cual se tienen en cuenta los estándares del nivel 6° a 7° y 8° a 9° se fundamenta en la coherencia que se deben tener en cuenta de manera horizontal en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, sin desligar lo que el estudiante ha desarrollado en el nivel de 6° a 7° sino por el contrario tener como beneficio las habilidades adquiridas con relación al concepto de proporcionalidad.

En segundo lugar, *la perspectiva funcional de la introducción al álgebra*, pues este enfoque permite realizar el diseño de la situación siguiente al experimento piloto debido a que la situación le permita al estudiante encontrar una explicación de la relación entre las cantidades que se ponen en juego en un contexto problema, además de posibilitar el estudio de los valores

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

que puede tomar una variable en una situación y por último, **los tres elementos que caracterizan el pensamiento algebraico**, pues estos elementos son importantes tenerlos en cuenta para identificar el avance del desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

Figura 2. Relación del marco de referencia con el diseño de las situaciones



2.2.3 Fase de Experimentación

En la segunda fase se encuentra la experimentación, la cual permite implementar el diseño de la situación realizada por el equipo investigador y así observar las acciones por parte de los estudiantes. Es importante tener en cuenta que, en esta fase, cada situación implementada cuenta con un análisis local, determinando así los posibles cambios de la siguiente situación, al considerar las acciones que se preveían ante la implementación, y realizar refinamientos a la conjetura establecida.

Por lo tanto, la fase 1 y la fase 2 permiten realizar un análisis permanente en virtud de aportar en la reflexión según las acciones recogidas durante la observación a los estudiantes analizados con respecto a la situación de diseño enmarcada en el pensamiento algebraico y su relación con el razonamiento algebraico, tomándolo como una ruta de acceso al álgebra.

2.2.4 Fase de análisis retrospectivo de datos

Finalmente, en los Experimentos de Enseñanza se encuentra la última fase que consiste en un estudio detallado de todos los análisis locales que durante el experimento estuvieron a la

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

luz de la observación, acompañado de las retroalimentaciones que se puedan generar por la investigadora de acuerdo con los resultados locales ante la implementación de cada situación.

Así, se tienen en cuenta en una primera instancia las retroalimentaciones que se generan con base en los resultados obtenidos, identificando estrategias utilizadas por estudiantes, caracterizaciones del pensamiento algebraico vinculado con el uso de la proporcionalidad, entre otras variables que se puedan generar, luego se analizan los datos obtenidos con respecto a los refinamientos que se dieron en el desarrollo de las situaciones con respecto a la conjetura planteada al inicio del experimento.

Finalmente, se presenta el informe final del análisis retrospectivo que se realiza en esta fase y se permite responder algunos interrogantes sobre la conjetura del Experimento de Enseñanza contextualizado en los objetivos de la investigación planteados con anterioridad.

Capítulo III. Experimentación

Ahora bien, en este capítulo se extenderá a precisar lo que tuvo lugar a la implementación de cada una de las situaciones del Experimento de Enseñanza, sus generalidades y los análisis locales de cada situación. Es importante resaltar que de acuerdo con los resultados de cada análisis local se logran extraer elementos para el diseño de las siguientes situaciones, y adicionalmente si se considera necesario el refinamiento de la conjetura inicial.

Es también importante mencionar que el Colegio Parroquial Santiago Apóstol cuenta en el momento de la experimentación con aproximadamente 950 estudiantes entre básica primaria, secundaria y media. En el momento cuenta con tres grupos de estudiantes en octavo grado, en promedio con 38 estudiantes cada uno, sin embargo, según disposiciones de directivos, dispusieron para la experimentación el grupo 8°2, que cuenta con 36 estudiantes, para ello el equipo investigador encuesta a las familias para la autorización de la participación de los estudiantes en el desarrollo del trabajo investigativo. La encuesta se realizó por medio de comunicación telefónica, pues así lo requirió el rector de la institución junto con el docente director de grupo encargado.

En la experimentación, se realizan momentos exclusivamente virtuales como se menciona en el capítulo 1 (Ver Contextualización), donde los estudiantes no fueron participativos frecuentemente, es por ello por lo que se recogen 7 evidencias de procesos de estudiantes de 26 estudiantes que regularmente acompañaban la clase virtual, además de registros de video autorizados por los padres de familia y la institución por medio de la plataforma Google Meet y registros transcritos por el equipo investigador.

3.1 Situación 1: Diseño, implementación, análisis y refinamiento

Por necesidades particulares de este trabajo de investigación -expresados en el capítulo anterior (Ver Capítulo 2) se abre el espacio para la propuesta de la primera situación del Experimento de Enseñanza el cual consiste en el levantamiento de un Experimento Piloto. El Experimento Piloto se realiza con el fin de identificar en los estudiantes los conocimientos previos que tienen hasta el momento, contextualizarlos de acuerdo con la situación problema y de los resultados del análisis local de esta situación extraer elementos necesarios para el diseño de la situación 2.

Particularmente, con el desarrollo de esta situación se espera que el estudiante utilice sus conocimientos en relación con la proporcionalidad directa simple, para el reconocimiento de los elementos necesarios de lo que se pretende analizar en el Experimento de Enseñanza, por esto se infiere que el estudiante pueda:

- Reconocer una magnitud como valor medible en una situación problema asociada con la proporcionalidad directa.
- Identificar situaciones problemáticas sobre magnitudes directamente proporcionales
- Aplicar estrategias de solución en situaciones problema argumentando sus respuestas.
- Caracterizar conceptos y propiedades correspondientes a las magnitudes directamente proporcionales.

El Experimento Piloto, se designa como la Situación 1, y permite contextualizar a la investigadora sobre los conocimientos iniciales de los estudiantes y, a su vez, hacer una reflexión sobre el propósito del Experimento de Enseñanza para determinar así el punto de partida y encaminar la investigación hacia el objetivo propuesto. Los estándares relacionados a trabajar mediante esta situación son:

- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

Es importante precisar que, de acuerdo con los resultados de este experimento piloto, la conjetura se analiza en relación con la identificación de diferentes maneras que encuentran los estudiantes para la solución lo que se propone dando paso a analizar aspectos fundamentales en el reconocimiento de relaciones matemáticas con el entorno social, por lo que puede ser probable el refinamiento de acuerdo con tales resultados.

La Situación 1, definida como el experimento piloto, se compone de dos actividades que pretenden dar lugar al reconocimiento por parte de los estudiantes de los elementos teóricos para poder realizar el cálculo de cantidades en un contexto cercano con su entorno. Cabe resaltar que los estudiantes con los cuales se realiza la implementación están en una modalidad virtual debido a la contingencia sanitaria que presenta globalmente el país y particularmente la ciudad con respecto al virus Covid-19.

3.1.1 Implementación de la Situación 1

La aplicación de la situación 1 tuvo lugar en una sesión de clase, en un bloque de dos horas clase, cada una de 45 minutos, a través de la plataforma Google Meet apoyada en el tablero digital de Microsoft OneNote, el cual permite la organización de las evidencias de cada uno de los estudiantes. Se aplicó la situación 1 al grupo 8°-2 con una totalidad de 14 estudiantes activos en clase, se toman 7 evidencias individuales de los procesos y respuestas de los estudiantes como objeto de análisis para este trabajo, la cual dará apertura a la Situación 2.

Se tomaron registros de audio y video por medio de la herramienta grabación de la plataforma Google Meet, con la respectiva autorización de los padres (previamente) y estudiantes (en el momento de la clase), con el fin de analizar sus justificaciones orales de acuerdo con las discusiones generadas durante la sesión de clase. Cada una de estas grabaciones fueron revisadas, y con base en esta revisión se establecieron los momentos fundamentales y que, por tanto, debían ser transcritos como parte de las herramientas de análisis. (Ver **Anexo 2**)

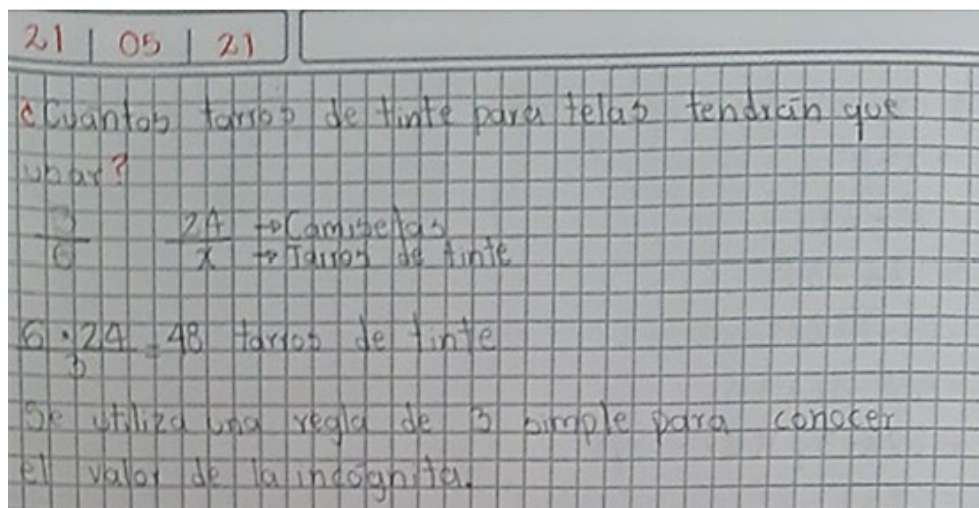
3.1.2 Análisis local situación 1: Identificación de estrategias de solución

En este apartado se presenta la primera parte del análisis local. En este se da cuenta de los resultados que arrojó la implementación de la Situación 1, en relación con las diferentes estrategias de solución utilizadas por los estudiantes en la identificación de cantidades, magnitudes y su comportamiento. Además, se presentan los elementos que fueron necesarios para el diseño de la Situación 2 con la cual continúa el trabajo en la clase de matemáticas del grado 8° del colegio. Se espera dar cuenta entonces de las relaciones que hay entre el trabajo que se lleva a cabo en las clases y el Experimento de Enseñanza propuesto.

3.1.2.1 Estrategia 1: Identificación de magnitud en la proporcionalidad directa

Mediante la aplicación y el desarrollo por parte de los estudiantes de la Situación 1, se pudo observar que la contextualización de actividades, permiten que los estudiantes establezcan las relaciones que se dan entre las magnitudes descritas. Uno de los propósitos de la Situación 1 refiere que el estudiante sea capaz en un primer momento de reconocer magnitudes y asociarla con la proporcionalidad directa en una situación problema, lo cual se observa en la siguiente ilustración del proceso realizado por uno de los estudiantes de la pregunta 1:

Ilustración 1. Producción escrita de un estudiante en la solución de la Situación 1



El estudiante logra reconocer que de acuerdo con los datos que le brinda la situación problema se relacionan de acuerdo a su magnitud, como se puede ver en la ilustración el estudiante usa la regla de tres simple para poder conocer el valor de la incógnita, el cual se puede analizar tal afirmación desde dos puntos de vista importante para este trabajo de investigación; primero, el uso intuitivo de la proporcionalidad en su solución es claro, pues su estrategia es relacionar las magnitudes del problema para hallar el número de tarros de tinte que el problema le presenta; segundo, el uso de la palabra incógnita y designar la letra “x” en reemplazo a los tarros de tinte vislumbra la necesidad de que él estudiante entienda que lo que no tiene conocido

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

puede reconocerlo de una manera matemática, el cual le permita llegar a la solución del problema.

Ahora bien, se obtuvo otro tipo de solución haciendo uso de las magnitudes para responder la misma pregunta, la cual no la hace inválida porque permite tener una apreciación del pensamiento del estudiante, como a continuación se presenta:

Ilustración 2. Proceso de escritura de una estudiante por medio de tabulación en la solución de la Situación 1

Handwritten student work on grid paper. At the top left, there is a red header "21-05-21". Below it, a table is written with two columns: "TP" and "C". The table contains the following pairs of numbers:

TP	C
6	3
12	6
18	9
24	12
30	18
36	21
42	24

To the right of the table, there is a handwritten note in black ink: "El se necesitan 42 tarros de pintura para pintar 24 camisetas". Below this note, there is a red handwritten note: "Nivel el certés 8-2".

La estudiante reconoce la relación de las magnitudes, y realiza un proceso parecido a la tabulación teniendo en cuenta la proporción entre las magnitudes relacionadas, infiriendo que de acuerdo con el número de camisetas se precisa el número de tarros de tinte, el cual mediante la adición intenta dar respuesta a su interrogante, el cual erradamente presenta su solución, pues precede un error en la adición de las camisetas al sumar $12+6$ y no $12+3$ como lo estaba resolviendo inicialmente. Sin embargo, la estudiante reconoce la relación entre magnitudes, más no establece el tipo de comportamiento que siguen las magnitudes -directamente proporcionales-.

3.1.2.2 Estrategia 2: Identificación del comportamiento de las magnitudes

En cuanto al comportamiento de las magnitudes que se relacionan en la última pregunta de la situación, se evidenció que algunos estudiantes reconocen la relación de las magnitudes existentes entre precio y cantidad de estudiantes, como lo expresan en un momento de la clase y se ilustra en un fragmento de la transcripción, mostrada a continuación:

Ilustración 3. Fragmento transcripción Situación 1. Relaciones entre magnitudes en palabras de los estudiantes

P: Muy bien, varias personas ya enviaron la foto, y muchos lo realizaron por medio de la proporcionalidad, muy bien, ahora vamos con la siguiente situación, leamos e interpretemos los datos que hay en ella *La profesora lee y va explicando la situación 2* Vamos entonces a mirar nuestros interrogantes, ¿cuáles son las magnitudes que se emplean en el problema? Entonces deben pensar y recordar qué es una magnitud la siguiente es, ¿qué comportamiento está tomando la magnitud en relación con la cantidad de personas por grupo? Piénsenlo y ya lo discutimos (Se dan 10 minutos)

P: Listo chicos, cuéntenme

E6: Profe yo quiero participar

P: Listo, dale

E6: Pues profe, las magnitudes según tengo entendido son las que se pueden medir, ¿no? Por ejemplo, pues no sé creería que los metros, ¿cierto?

P: No sé, ¿qué dicen los compañeros?

E6: Ay profe, no sea así

E4: Si profe, también los precios y eso

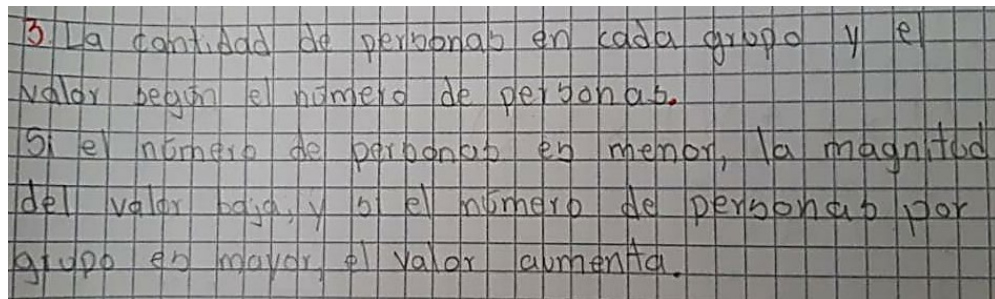
E6: Si, por eso ahí para responder esa primera (refiriéndose a la pregunta) pues profe son todos los precios que dice ahí disque valor, pues creo, mi humilde opinión

En ese momento el estudiante 6 (E6) define en sus palabras lo que es una magnitud acompañándola de un ejemplo, el cual busca verificación de la docente, la cual no le remite ninguna afirmación, sino que remite la pregunta a sus compañeros, de tal manera que el estudiante 4 (E4) empieza a aterrizar la pregunta ante la situación trabajada y afirma *si profe, también los precios y eso* del cual el estudiante (E6) afirma que para responder la pregunta de cuáles son las magnitudes relacionadas, se deben relacionar los precios que hay en la situación.

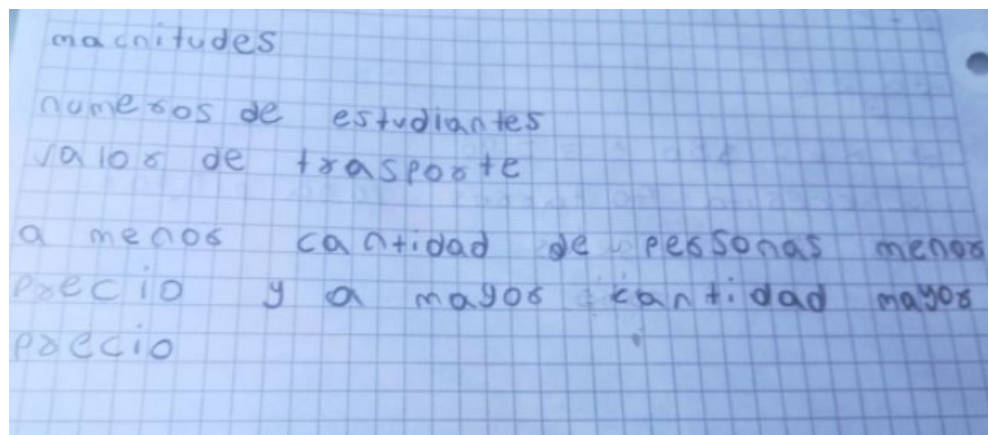
Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Ahora, en los apuntes de algunos estudiantes se pudo extraer la siguiente explicación de las preguntas *¿qué magnitudes hay?*, y *¿qué comportamiento tienen las magnitudes que se relacionan en la situación?*, a continuación, se presenta en las siguientes ilustraciones.

Ilustración 4. Explicación de comportamientos de las magnitudes



3. La cantidad de personas en cada grupo y el valor según el número de personas.
Si el número de personas es menor, la magnitud del valor baja, y si el número de personas por grupo es mayor, el valor aumenta.



magnitudes
números de estudiantes
valor de transporte
a menos cantidad de personas menos
precio y a mayor cantidad mayor
precio

De lo anterior, los estudiantes logran identificar que se encuentra una relación de acuerdo con las magnitudes del contexto, en la que corresponde a que si la cantidad de personas aumenta varía el valor del precio, por lo tanto, pueden reconocer la dependencia entre magnitudes, pero también da cuenta que si una magnitud aumenta la otra magnitud también lo hace, de lo que se infiere que los estudiantes conocen e interpretan la dependencia entre variables y su comportamiento.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

A continuación, se presenta un fragmento de cierre, con relación a lo que algunos compañeros expresaron sobre el comportamiento de las magnitudes que se utilizaron en la situación 1:

Ilustración 5. Fragmento de transcripción de la Situación 1, donde los estudiantes expresan el comportamiento de las magnitudes

E7: Pues profe ahí dice el comportamiento de la magnitud, pero también dice que tiene que ver con la cantidad de personas, entonces yo pienso que pues según eso, hay más baratos y caros y eso como que depende mucho de qué tantos hay y si es turno de noche o de día

E4: ¿Turno? Noooo, pues el horario

E7: Por eso, es lo mismo

P: Jajaja, igual te entendimos, ¿pero entonces eso qué comportamiento sería?

E7: Pues Mmmm, profe lo que le dije

E5: Profe, pues si hay más personas va a ser más caro y si hay menos pues va a costar menos

E3: Profe si mal no estoy, se llama directamente proporcional porque a medida que uno sube el otro también

P: Uno y el otro, pero ¿qué es eso de uno y el otro?

E3: Bueno pues, la magnitud y la cantidad

P: ¿Y qué depende de qué?

E1: Pues la magnitud de la cantidad porque ... el precio depende de la cantidad que vayan, creo

En el momento que el estudiante refiere que *el precio depende de la cantidad* se infiere que el estudiante relaciona las dos magnitudes de acuerdo con la información del contexto, afirmando que el comportamiento de una de ellas aumenta con respecto a la otra, así la docente realiza la pregunta *¿pero entonces eso qué comportamiento sería?*, la cual varios estudiantes tratan de explicar que las magnitudes están vinculadas mediante una relación directamente proporcional, como lo indica el estudiante 5 (E5) *profe, pues si hay más personas va a ser más caro y si hay menos pues va a costar menos* y seguidamente confirma el estudiante 3 (E3) diciendo *Profe si mal no estoy, se llama directamente proporcional porque a medida que uno sube el otro también*.

Así pues, la situación 1 permitió contextualizar a los estudiantes sobre la proporcionalidad y las relaciones que se pueden integrar de acuerdo con el contexto, adicionalmente los estudiantes pudieron identificar los comportamientos de las magnitudes de acuerdo con lo que se explicitan en la situación de las camisetas.

3.1.3 Refinamiento situación 1

Teniendo en cuenta el análisis local de la Situación 1, podemos afirmar con respecto a lo que se esperaba con el desarrollo de esta que:

1. Se esperaba que el estudiante pudiese lograr varios indicadores que permiten medir la caracterización de la proporcionalidad directa (Ver Levantamiento del experimento piloto: Situación 1), de acuerdo con los cuatro indicadores propuestos, se alcanzaron tres de ellos pues en el indicador que referencia la aplicación de propiedades y conceptos propios de la proporcionalidad directa, no se dio como se esperaba, pues los estudiantes no tienen claridad sobre ellos, como por ejemplo el comportamiento directamente proporcional, definición de proporción, regla de tres simple para resolución de problemas en contexto. Por ello, se tiene en cuenta este tipo de necesidad que los estudiantes tienen para el diseño de las siguientes situaciones.

2. La conjetura inicial de acuerdo con este primer análisis de la Situación 1 no se modifica, pues no se considera que con relación a los resultados de esta situación no se permita lograr lo propuesto en concordancia con el Experimento de Enseñanza. Los estudiantes reconocen la proporcionalidad de forma intuitiva y en sus procesos de escritura se logra evidenciar las relaciones de dependencia entre variables y su análisis dependiendo del comportamiento.

3. El diseño de la Situación 2 se plantea con relación al contexto de un proyecto de vivienda con precios reales de acuerdo con una necesidad de una familia que la adquiere, se busca particularmente que el estudiante prevalezca la estrategia de solución del problema e identifique la variable que se pone en cuestión, adicionalmente de lograr caracterizar el tipo de magnitud empleada y la identificación de la incógnita como número desconocido.

Como se mencionó anteriormente, los estudiantes no logran identificar por sí solos varios conceptos que se esperaban tuvieran claros, por lo cual la docente logra por medio del acompañamiento en las actividades brindarles la designación conceptual de lo que ellos intuitivamente conocen.

3.2 Situación 2: Diseño, implementación, análisis y refinamiento

De acuerdo con los resultados arrojados en la implementación de la Situación 1, la cual estuvo enmarcada en un Experimento Piloto, que buscaba conocer el estado de los estudiantes en relación con el contenido matemático movilizador que este trabajo ocupa -en particular, la proporcionalidad directa- el cual permite el diseño de la Situación 2 enmarcado en una situación de la cotidianidad con el uso de valores reales relacionado con el contexto. (Ver **Anexo 3**)

La Situación 2 pretende que el estudiante a partir de una situación problema pueda buscar estrategias de solución apoyadas en la proporcionalidad, y establezca la relación que existe entre las cantidades que están en juego, adicionalmente que reconozca el concepto de incógnita cuando no se genera un número conocido, permitiéndole expresar por medio de diferentes formas de expresiones -no necesariamente debe designar el objeto no conocido con una letra- lo que expresa el problema.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Así, se espera que el estudiante pueda reconocer el contexto en el cual se ve inmerso el problema, interactuando con lo que se conoce como la mejora de una vivienda que entrega una constructora local. Teniendo en cuenta que los estudiantes para el éxito de la situación deben tener conocimientos previos como el área de una figura rectangular, el área de un cuadrado y las magnitudes para así enrutar la actividad hacia la justificación del uso de la proporcionalidad para darle solución a la situación.

En un momento previo al diseño de la Situación 2, los estudiantes están trabajando en clase el concepto de área y de perímetro, por lo que en el diseño de esta situación se retoman. La Situación 2 se divide en cinco preguntas las cuales se diseñan con el fin de:

DISEÑO DE PREGUNTAS ORIENTADORAS DE LA SITUACIÓN 2		
Pregunta	Responde a	Conceptos que moviliza
1, 2	Aplicar como método de solución conceptos relacionados con la proporcionalidad teniendo en cuenta las magnitudes relacionadas.	Proporcionalidad Magnitud
1, 2, 3, 4 y 5	Justificar el uso de la proporcionalidad directa en el contexto de la situación	Comportamiento directamente proporcional
5	Reconocer el uso de la regla de tres simple, identificando la variable como incógnita para la solución de las actividades propuestas en la situación infiriendo así el comportamiento de las magnitudes.	Regla de tres simple Concepto de incógnita
4 y 5	Utilizar métodos de solución a las preguntas de la situación logrando justificar el método utilizado	Métodos de solución sin estimar

Tabla 3. Intencionalidad de preguntas Situación 2

3.2.1 Implementación de la Situación 2

En el momento de la implementación de la Situación 2 se tuvo el encuentro de clase virtual, por lo descrito en apartados anteriores sobre la emergencia de salud que en el momento se encontraba el país. En un bloque de dos horas clase, de 45 minutos por hora de clase, se realizó la implementación de esta situación.

Se tuvieron conectados 16 estudiantes en la clase, de los cuales 6 estudiantes estuvieron participando activamente. Se realizó grabación de clase con autorización previa de padres y de los estudiantes en el momento de la clase, por medio de la plataforma Google Meet, posteriormente se realiza la transcripción del video identificando los fragmentos destacados e importantes para el desarrollo de este trabajo. (Ver **Anexo 4**).

3.2.2 Análisis local Situación 2: Identificación de estrategias de solución

En este apartado se presenta el análisis local de la situación 2. En este se da cuenta de los resultados que arrojó la implementación de la Situación 2, en relación con la búsqueda de estrategias de solución apoyadas en la proporcionalidad y la identificación de un número no conocido, el cual simbolizan como una incógnita intuitivamente, es decir sin tener que usar necesariamente una letra, y por tanto hacen uso de diferentes expresiones para referirse a estas. Finalmente, se presentan los elementos que fueron necesarios para el diseño de la Situación 3 y el refinamiento de la conjetura si es necesario.

3.2.2.1 Estrategia 1: Uso de la proporcionalidad

En la implementación de la situación, por la modalidad virtual, se decide realizar la interacción con los estudiantes de manera simultánea, por medio de preguntas orientadoras y retroalimentaciones de acuerdo con lo que plantean los estudiantes con relación al contexto de la situación. Así, se inicia la lectura por parte de los estudiantes, pues la profesora motiva la participación de los estudiantes por medio de la plataforma, de este modo se inicia con las precisiones sobre el área de una forma rectangular, pues los estudiantes identifican que el plano de la casa tiene forma de rectángulo.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Posteriormente, la profesora indica que tienen un tiempo aproximado de 5 a 8 minutos para la solución solamente de la primera pregunta, y que deben enviar por medio de fotografía la solución de esta, y al compartirla en pantalla explicar qué proceso realiza para encontrar la solución de la pregunta. Así pues, inicia la solución de cada una de las preguntas que se plantean en la Situación 2.

Particularmente, se tiene en cuenta el proceso realizado por una estudiante al enviar su evidencia por medio de una fotografía, y su proceso de escritura para la solución de la pregunta 2, se presenta la siguiente ilustración reflejando lo realizado por la estudiante, lo cual se muestra en la ilustración 7.

Ilustración 6. Solución estudiante pregunta 2

Handwritten student work on grid paper showing calculations for the area of a kitchen and house, and the number of tiles. The work is written in Spanish and includes the following steps:

- AREA DE LA COCINA = $1,8 \text{ m}^2$
- AREA CASA = $48,94 \text{ m}^2$
- $48,94 - 1,8 = 47,14 \text{ m}^2$
- $1 \text{ m}^2 = 12 \text{ BALDOSAS}$
- $47,14 \text{ m}^2 = ? \text{ BALDOSAS}$
- $? = 12 \times (47,14) = 565,68 = 566 \text{ BALDOSAS}$

The student's name, JENNIFER MORENO, is written in the top right corner. The work is decorated with small heart symbols and a drawing of a person at the bottom.

P: Listo Jennifer, te escuchamos

E1: Pues profe yo no puse letra ni nada porque me confundo con un por, entonces le puse el signo de pregunta porque pues no lo conozco, y utilice la regla de tres y eso me dio 566 baldosas, pues aproximándolo

P: Buena estrategia Jennifer, muy bien, ¿la 3?

Se puede evidenciar que la estudiante al realizar este proceso utiliza la regla de tres y es consciente de ello, pues en su explicación así lo expresa, sin embargo, la estudiante en su estrategia de solución está al tanto que utiliza la regla de tres simple para hallar el resultado al

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

interrogante, más no registra explícitamente que está haciendo uso de la proporcionalidad. Es importante resaltar que de acuerdo con el reconocimiento de una estrategia apoyada en la proporcionalidad así la estudiante no menciona su concepto, se vislumbra el uso de uno de los elementos que hacen parte de la proporcionalidad.

Ahora bien, en otro caso particular una estudiante utiliza la tabulación para relacionar las cantidades en cuestión, así la estudiante infiere cuántas cajas necesita de acuerdo con la información que presenta la situación problema. Se presenta a continuación la ilustración de lo realizado por la estudiante.

Ilustración 7. Estrategia por tabulación entre relaciones de magnitudes

Deniela Gómez

Cocina = 22 baldosas $\times$ 4200 = 92400

Resto de la casa = 566 baldosas

1 caja = 288
2 cajas = 576

$1'269600 \times 2 = 2'539.200$
↓
por 2 cajas

$\frac{1'269600}{288} = 4408 \approx 4450$

$566 \times 4450 = 2'518700$
↓
por 566 baldosas

E6: Profe pues yo primero mire cuanto valian la de la cocina para luego, hacer el resto de la casa, y pues dije si en 1 caja caben 288 en 2 caben 576 y pues ya con 2 alcanzan y le saque el precio a eso, pero como dice es el precio de las que necesitan mejor lo hice con las 566 y le saque el precio de esa caja porque no son las mismas, y pues multipliqué por el valor de cada una que es de 4450 y pues ya me dio dos millones quinientos mil setecientos.

Por consiguiente, la estudiante relaciona cada uno de los precios de lo que ya conoce y realiza las operaciones de acuerdo con lo que ha inferido, y logra hallar el valor de las 566 baldosas que pedía el problema, sin embargo, no es consciente de que la estrategia utilizada

responde a la proporcionalidad, pues no necesariamente deben realizar un proceso con regla de tres para evidenciar que el pensamiento que se está desarrollando, está vinculado con la proporcionalidad pues logra establecer la relación de acuerdo al número de baldosas que tiene cada caja.

De manera general, los estudiantes que participaron activamente de la actividad y enviaron sus respuestas con sus respectivos procesos de escritura para el hallazgo de la respuesta correcta lograron identificar elementos de la proporcionalidad como estrategia de solución de las preguntas planteadas en la Situación 2.

3.2.2.2 Estrategia 2: identificación de la incógnita

Ahora bien, en el siguiente aspecto que evidencia la caracterización de lo propuesto por la Situación 2 se distinguieron varios factores que muestran la identificación de un número como incógnita. Cabe resaltar que, de acuerdo con los resultados de la implementación, se pudo precisar que los estudiantes tenían conocimientos previos sobre el concepto de incógnita, por ello se ilustra a continuación varios procesos de escritura y de argumentación para la solución de los interrogantes de la problemática.

Ilustración 8. Reconocimiento de la letra como incógnita

P: Pero sabemos que, al multiplicar la altura por nuestra base, nos da ¿Cuánto?

E2: cuarenta y ocho coma noventa y cuatro

P: Muy bien, falta los metros cuadrados, ojo, pero bueno, listo, entonces cómo hacemos para poder poner un número que no conocemos, ¿qué dicen ustedes?

E3: Pues... con una incógnita, ¿no?

P: ¿Bueno y cómo simbolizamos entonces esa incógnita?

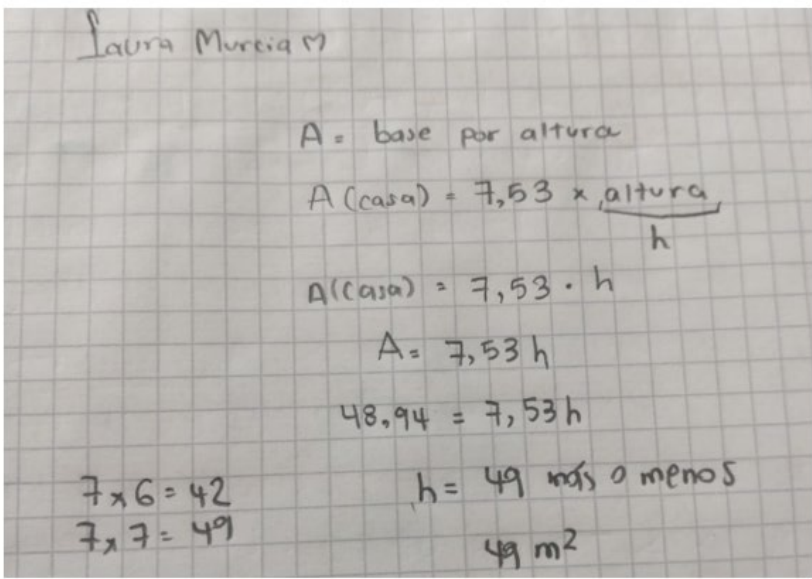
E4: Profe utilizamos una letra

En la Ilustración 8 se puede identificar que en relación con lo mencionado por la docente para que se pueda reconocer cómo los estudiantes piensan representar un número desconocido en el problema, un estudiante expresa que ese número no conocido se puede representar por medio de una incógnita, de lo cual la profesora no pierde la oportunidad de preguntarle cómo se representa lo dicho por el estudiante, a lo que el estudiante menciona con seguridad el uso de una letra.

Por otro lado, se tiene lo realizado por una estudiante en el proceso que lleva a cabo para responder la pregunta 2 (Ver *Ilustración 7. Solución estudiante pregunta 2*), en el que expresa que no usará letras para representar la incógnita pues se tiende a confundir con el signo de la multiplicación - “me confundo con un por” - en cambio, usa el signo de interrogación para representar que hay un número que no conoce y debe hallar, lo cual utiliza una regla de tres para poder realizar lo correspondiente. Es así como se evidencia que los estudiantes identifican un número no conocido como una incógnita, y además reconocen que el uso de una letra, símbolo, signo u otro tipo de designación no afecta la comprensión de que es un número el cual cumple propiedades y estructuras.

Es importante resaltar que, no todos los estudiantes pudieron relacionar este tipo de aspectos en la actividad, se tuvo algunos procesos en los cuales los estudiantes cometieron algunos errores en su proceso de escritura, como se ilustra a continuación.

Ilustración 9. Error de proceso de solución de estudiante



The image shows a student's handwritten work on a grid background. At the top, the name 'Laura Murcia M' is written. Below it, the student defines 'A = base por altura'. Then, they write the formula $A(\text{casa}) = 7,53 \times \frac{\text{altura}}{h}$. This is followed by $A(\text{casa}) = 7,53 \cdot h$ and $A = 7,53 h$. The next line is $48,94 = 7,53 h$. To the left, there are two multiplication facts: $7 \times 6 = 42$ and $7 \times 7 = 49$. To the right, the student concludes with $h = 49 \text{ más o menos}$ and 49 m^2 .

E3: Profe pues es que preguntan qué cuánto vale el otro lado de toda la casa para el área, y pues yo más o menos calculé porque es que con decimales no sabía, entonces empecé a probar que número multiplicado por 7 daba cerca al 48 y pues encontré que el 7, y pues.... ay profe me equivoqué, tenía que poner era el 7 no el 49, no jajaja, pero ahí es 7 más o menos 7 metros cuadrados

En este caso particular, la estudiante realiza por medio de multiplicaciones buscando un valor que le arroje lo que el contexto le invita, pues el área la expresa de manera que entre la multiplicación de la base y la altura obtenga el resultado que le facilita el contexto, lo que se espera que realice por medio de la proporcionalidad y el planteamiento de una expresión algebraica, en su explicación del ejercicio se da cuenta del error y la profesora retroalimenta lo realizado por la estudiante por medio de preguntas indagando el proceso desarrollado.

Ilustración 10. Argumento de estudiante en identificación de la incógnita

P: Jaja a ver, miremos, empezaste a ensayar números para que te diera cerca, eso está bien, pero que tal la constructora diciendo a un cliente es que más o menos, no, no se puede, hay una forma de hacerlo, ya les muestro, pero antes eso que dice h, ¿qué es?

E3: Profe la altura, porque pues esa es la que no se conoce entonces para variar yo le puse h, cualquier letra sirve, ¿no?

P: Ah ok, tu h es la incógnita, pero y ¿por qué dices que serían siete metros cuadrados?

E2: Profe, debería ser sólo metros porque el área es que debe ser en cuadrado y al multiplicar m por m pues da m cuadrado, creo yo

Es así como la estudiante al cometer el error conceptual sobre la medida de uno de los lados del plano de la casa infiere en su proceso que cuando escribe h hace referencia a la altura que relaciona con el lado que no se conoce de la casa, por ende, se entiende que la estudiante reconoce el papel de la incógnita, pero no del contexto propuesto y además no reconoce la naturaleza de la medición en metros cuadrados.

En la sesión de la clase, la profesora pregunta a los estudiantes a modo de cierre sobre los conceptos trabajados en la actividad del día, de lo cual los estudiantes reconocen las unidades de longitud -metros y metros cuadrados-, la relación entre las cantidades como magnitudes -precios de baldosas por número de cajas- y vinculan el área del plano de la casa con las baldosas que se requieren, esto se muestra en la siguiente ilustración.

Ilustración 11. Reconocimiento del uso de la proporcionalidad directa

E3: Pues profe entonces el área de la casa con la cantidad de baldosas
P: ¿Y qué comportamiento tenían?
E4: Profe, entre más área más baldosas y más caro también jajaja
P: Exacto, muy bien, y ¿quién recuerda cómo se llama ese comportamiento?
E3: Directamente proporcional, ¿no?
P: Si muchachos, si una magnitud aumenta, la otra también aumentará, muy bien, bueno muchachos, se nos acabó el tiempo, los felicito a los que participaron, muchas gracias por la clase

De este modo, un estudiante al expresar la relación del área con la cantidad de baldosas la profesora realiza una pregunta orientadora sobre el comportamiento de esta relación, a lo que el estudiante manifiesta que si más grande es el área pues más baldosas debe usar, y agrega que el valor para cubrir el área también será más costoso, de lo que concluye expresando que el comportamiento matemático que tienen estas relaciones es directamente proporcional.

3.2.3 Refinamiento situación 2

El análisis local de la situación 2 permitió establecer algunos elementos que son significativos para tener en cuenta en relación con el diseño de la Situación 3, que se describen a continuación:

1. El uso del contexto de los proyectos de vivienda fue un aspecto a resaltar pues se pudo evidenciar que los estudiantes logran vincular fácilmente una respuesta ante una problemática que intervengan las matemáticas si se le hace cercano el contexto, así el diseño de la situación 3 se enmarca en el mismo contexto del proyecto de vivienda, pero desde una perspectiva más amplia, en este caso a nivel de la constructora que tiene a cargo los proyectos.
2. Es importante destacar que, de acuerdo con el marco de referencia de este trabajo investigativo, se retoma lo expresado anteriormente sobre la relación de la Situación 3 con los elementos del pensamiento algebraico propuesto por Radford. Es así como el diseño debe permitir que los estudiantes en sus métodos de solución a partir de la proporcionalidad puedan implícita o explícitamente evidenciar alguno o todos los elementos que el autor propone.
3. Los precios que ya son conocidos por los estudiantes en la Situación 2, no se verán afectados, para así ir en coherencia con lo desarrollado en esa situación. Se realizarán algunas precisiones sobre datos que el diseño exija.
4. La conjetura inicial del experimento no presenta modificaciones para la implementación de la Situación 3, pues no se altera según el objetivo de la investigación con relación a los resultados de lo que hasta el momento se ha encontrado en las implementaciones de las situaciones 1 y 2. Ver conjetura.

3.3 Situación 3: Diseño, implementación y análisis

La Situación 3 -Ver Anexo 5- presenta una continuación relacionada con la situación 2, la cual recoge un contexto más amplio con respecto a una constructora que decide realizar la entrega de un proyecto de vivienda con la cubierta del piso con baldosas de dos tipos, según lo prefiera el cliente. El contexto se logra diseñar teniendo en cuenta los elementos mencionados en el apartado anterior con relación a la implementación de la Situación 2 y el referente teórico sobre los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico creando las preguntas orientadoras que se realizaron con base en los siguientes aspectos:

Intencionalidad de preguntas orientadoras de la situación 3		
Pregunta	Responde a	Conceptos que moviliza
1, 2, 3 y 4	El reconocimiento de la proporcionalidad como estrategia de solución de un problema en contexto, que le permita al estudiante pensar sobre las relaciones que se pueden presentar a partir de una necesidad -el valor desconocido del excedente en el pago del apartamento del proyecto de vivienda-.	Proporcionalidad Valor desconocido
4 y 5	La identificación de la indeterminancia en relación con las cantidades de cajas y metros cuadrados de baldosa necesarias para cubrir el piso de los apartamentos que el contexto brinda -el concepto de área del piso con relación a las cajas y su capacidad en m^2 - de acuerdo con el área de los apartamentos del proyecto de vivienda.	Área Magnitudes
1, 2, 3	Relacionar en los procesos de escritura que desarrollen los estudiantes, la analiticidad de acuerdo con los valores no conocidos y conocidos.	Valores no conocidos y conocidos
5	La vinculación de las cantidades relacionadas en el contexto -conocidas y no conocidas- expresadas mediante una expresión formal o -no formal- donde evidencie la designación de objetos.	Lenguaje algebraico expresado en diferentes formas

Tabla 4. Intencionalidad de preguntas Situación 3

A partir de los elementos anteriores tenidos en cuenta para el diseño de la situación, se espera que el estudiante pueda desarrollar por medio de la proporcionalidad directa como concepto movilizador hacia el acercamiento al álgebra permitiendo identificar en la investigación la

caracterización según los procesos de escritura realizados por los estudiantes en relación con los elementos que describe Radford (2003, 2006) en su definición de pensamiento algebraico.

3.3.1 Implementación de la Situación 3

Las condiciones de la implementación de esta situación se distinguen con algunas particularidades en relación con las anteriores, pues la educación en Colombia entra en una nueva etapa con base en la pandemia que surge en el marco del desarrollo de este trabajo, las cuales se explicitan a continuación:

- El Ministerio de Educación Nacional decide implementar en las instituciones educativas nacionales la *alternancia educativa*² como medida transitoria ante la emergencia de salud.
- El Colegio Parroquial Santiago Apóstol atiende la orientación del MEN e inicia la formalización de la alternancia educativa en sus instalaciones, teniendo como aforo inicial por aula de clase una cantidad máxima de 13 estudiantes.

Teniendo en cuenta las precisiones anteriores, la implementación de la Situación 3 se da en el marco de la alternancia educativa, por ende, los estudiantes que participan de esta actividad son aquellos que por autorización de sus padres asisten presencialmente al colegio garantizando las medidas de bioseguridad que la emergencia de salud atiende. En particular, ingresan en alternancia del grado 8°-2 sólo ocho estudiantes de los cuales seis participaron activamente en la implementación de las situaciones 1 y 2.

² La alternancia educativa es la opción de continuar la prestación del servicio mediante la combinación de estrategias de trabajo académico en casa con encuentros presenciales en los establecimientos educativos durante la situación de emergencia sanitaria declarada por la pandemia del covid-19. Tomado de: https://www.mineduacion.gov.co/1759/w3-article-403001.html?_noredirect=1

En el desarrollo de esta Situación 3 no se permite las actividades grupales mayor a dos personas como directriz del rector en ese momento, por lo cual se dividen los estudiantes en parejas formando así 4 grupos, se precisa a los estudiantes que el espacio de clase será grabado a través del celular de la investigadora y se tomarán registros fotográficos de los procesos y argumentos plasmados para la realización de esta. El bloque de clase en el cual se implementó la situación fue de 2 horas clase, 45 minutos cada hora, de la que se realiza la transcripción correspondiente al registro de audio que se genera en el desarrollo de la actividad, tomando los fragmentos más importantes como recurso de análisis de la investigación. Ver Anexo 6

3.3.2 Análisis local

De acuerdo con lo experimentado en esta situación se pudo evidenciar algunos aspectos importantes con relación a lo que se esperaba por los estudiantes en el desarrollo de las preguntas que componen esta última situación. Para este análisis es necesario traer a colación los aspectos que se resaltaron en las generalidades del diseño de la Situación 3 y el referente teórico sobre el pensamiento algebraico y sus elementos. Para ello este análisis se divide en dos factores fundamentales: El *reconocimiento de la proporcionalidad* como estrategia de solución y *los elementos del pensamiento algebraico* enmarcados en los procesos de escritura ante la resolución de cada una de las preguntas.

3.3.2.1 Estrategia de solución: Reconocimiento de la proporcionalidad directa

En la búsqueda de estrategias de solución ante las primeras preguntas se encontraron varios tipos de estrategias que no se restringen sólo en la proporcionalidad, no obstante, se particulariza los casos en los que la utilizaron en primer lugar, para luego especificar otro método identificado. En los grupos de trabajo se permitía la interacción con la docente con respecto a

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

dudas y discusiones que podían generarse en torno al contexto, por ende, la docente recorrió cada uno de los grupos evidenciando las discusiones que se pudieron generar en ellas.

Es así como el grupo 2, refleja en la discusión con la profesora la utilización de la regla de tres para hallar la cantidad de cajas y metros cuadrados que necesitan para cubrir la superficie del suelo de la casa, como lo ilustra el siguiente fragmento:

Profesora	Estudiante 2	Estudiante 3
Hola, y ustedes ¿cómo van?	Pues profe intentando ya hacer la primera	
Muéstrenme	Mire profe (muestra lo que han realizado)	
Pero pues explíquenme porque y entonces jaja		Jaja profe yo le explico, nosotras hicimos una regla de tres, para poder saber la cantidad de material digámoslo así que se necesitaba porque es que una caja tiene $24m^2$ y la casa tiene 48,94 entonces pues yo lo puse así (<i>señala lo que realizaron en el papel</i>)

Tabla 5. Discusión grupo 2 sobre situación 3

Handwritten mathematical work on grid paper showing a rule of three calculation for boxes and area. The work is organized into several lines of calculations:

- Line 1: $(1) \text{ Caja } (24m^2) = 1.197.600$
- Line 2: $1m^2 = 53.000$
- Line 3: $24m^2 = 1 \text{ Caja}$
- Line 4: $48,94m^2 = x$
- Line 5: $= \frac{48,94 \times 1}{24} = 2,03 \text{ cajas}$
- Line 6: $1 \text{ Caja} = 24m^2$
- Line 7: $0,03 \text{ Caja} = x$
- Line 8: $= \frac{0,03 \times 24m^2}{1} = 0,72 = 0,72m^2 \text{ se aproxima a } 1, \text{ entonces es igual a } 1m^2$
- Line 9: $1.197.600 \times 6 + 3 \times 53.000 = 7.344.600 \rightarrow \text{Valor del excedente}$
- Line 10: $\downarrow$
- Line 11: $\text{cajas para 3 apartamentos } 2 \times 3 = 6$

Ilustración 12. Uso de regla de tres sobre discusión en la Situación 3

En lo que la estudiante refiere oralmente y plasma en el proceso de escritura se evidencia que el grupo 2 relaciona la regla de tres como proceso mediador en la estrategia de solución a la pregunta número 1, pues para poder llegar al valor del excedente que debe cancelar el cliente, las

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

estudiantes deciden saber en primera medida, cuánto es el *material* que debería comprar la constructora para la entrega en las condiciones deseadas de un sólo apartamento.

En el grupo 1, también hacen uso de la regla de tres para saber las cajas que se deben comprar, en este caso hacen en tres ocasiones regla de tres planteando oralmente y por medio de justificación escrita, así:

Tabla 6. Discusión grupo 1 situación 3

P: Y ¿cómo les termino de ir con la primera?		E5: Ah bien profe, hicimos regla de tres con el 0,94 para saber las cajas y eso nos dio 0,03 cajas y pues nos dio lo mismo si lo hacemos completo, vea profe
P: Entiendo	E1: Y eso pues lo aproximamos a 1 y después pusimos los precios y hallamos primero el de una casa y luego lo multiplicamos por 3	

En la siguiente ilustración se evidencia el proceso correspondiente a la discusión anterior.

1. Area $48,94 \text{ m}^2$

• Para $48,94 \text{ m}^2$ necesitamos $2,04$ cajas

$1 \text{ caja} = 24 \text{ m}^2$
 $X = 48,94 \text{ m}^2$

$48,94 \text{ m}^2 = 24$
 $48,94 \text{ m}^2 = X$
 24

$2,04 = X$

• Se necesita $2 \text{ cajas} + 1 \text{ m}^2$

$= 2(149.600) + 1(53.000)$
 $= 299.200 + 53.000$
 $= 352.200$

R// El expediente para 33.4600 con la tarifa tipo (149.600) para 3 apartamentos.

Ilustración 13. Uso de la regla de tres del grupo 1

Ahora bien, en el grupo 3 no hace uso de la regla de tres para la pregunta 1, sin embargo, desarrollan un pensamiento matemático teniendo en cuenta la información que les brinda el

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

contexto, el uso de operaciones básicas, el concepto de número decimal y la aproximación numérica. En el siguiente fragmento se ilustra lo anterior:

Tabla 7. Discusión de grupo 3 indicando por qué no utilizaron regla de tres

Grupo 3		
Profesora	Estudiante 4	Estudiante 7
P: Hola muchachones, ¿cómo van?	E4: Pues profe ahí más o menos (muestran a la profesora lo que han realizado)	
P: Cuéntenme	E4: Si profe, entonces pues normal reemplazamos lo que vale la caja por 3 y luego lo que vale el metro cuadrado también por 3 y sumamos eso, ahí está la respuesta, ¿así quedó bien?	E7: Profe pues nosotros no hicimos regla de tres, sino que pues 2 cajas alcanzan para 48 metros cuadrados y lo que sobra que es 0,94 pues aproximadamente es un metro cuadrado, entonces se necesita 2 cajas y un metro cuadrado para poder saber lo que no conocíamos ahí
P: No lo sé, pues ustedes son los que deben decirme si tiene sentido haberlo pensado así		E7: Si profe, pues yo me pongo como en los zapatos de un cliente y pues imagino que es mi caso y así me queda más fácil pensarlo y resolverlo
P: Es una buena estrategia	E4: Además profe es fácil porque pues le dicen a uno como tal algo que uno sabe que existe	

Como se logra entrever en expresiones como “*nosotros no hicimos regla de tres, sino que pues 2 cajas alcanzar para 48 metros cuadrados y lo que sobra es 0,94 pues aproximadamente es un metro cuadrado*” el uso de las operaciones básicas, bien sea la adición, al sumar dos veces 24 o multiplicar 24 por 2, para deducir que dos cajas alcanzan para 48 metros cuadrados de los que tiene el área total del apartamento, y el buen uso del concepto de decimal, pues entienden que si el área es 48,94 tiene una parte decimal y otra parte entera, de la que concluyen que como los 48 metros cuadrados ya lo interpretaron pues les faltaría 0,94 metros cuadrados, los cuales aproximan a las unidades de medida brindadas por el contexto, que en este caso sería 1m^2 .

Ilustración 14. Uso de aproximación numérica a partir de un número decimal

Handwritten work on grid paper:

1. $24 \text{ m}^2 \rightarrow 1 \text{ caja}$
 $48 \text{ m}^2 \rightarrow 2 \text{ cajas}$

$2 \text{ cajas y } 1 \text{ m}^2$

$2.3 \times 1197600 = 2754480$
 $1.3 \times 53.000 = 68900$

El excedente es de 2754480

Al realizar este tipo de proceso no significa que los estudiantes no tengan idea sobre la proporcionalidad como estrategia de solución, pues en el momento que logran relacionar que una caja tiene 24 m^2 y que necesitan saber cuántas deben comprar para el área total del apartamento, para luego establecer mentalmente la equivalencia de 1 caja igual a 24 m^2 , se identifica el uso del concepto de proporción para la interpretación de relaciones entre la magnitud bidimensional (área) y de cantidad (caja).

De esta manera se finaliza el presente capítulo y se da paso al último, el cual presenta el análisis retrospectivo de los datos, los resultados de la investigación y algunas reflexiones que se generan en relación con lo desarrollado en el presente trabajo.

Capítulo IV. Análisis retrospectivo de los datos

Según lo que se ha expresado en el capítulo anterior es fundamental para los Experimentos de Enseñanza el análisis retrospectivo de los datos que se recogieron en la fase de experimentación, pues se recoge de una manera detallada los aspectos principales que se pudieron observar en las situaciones y que permiten realizar los análisis locales de cada una de las situaciones diseñadas para así brindar conclusiones y reflejar resultados acordes a la investigación según lo experimentado.

4.1 Elementos del pensamiento algebraico en los procesos de escritura de los estudiantes

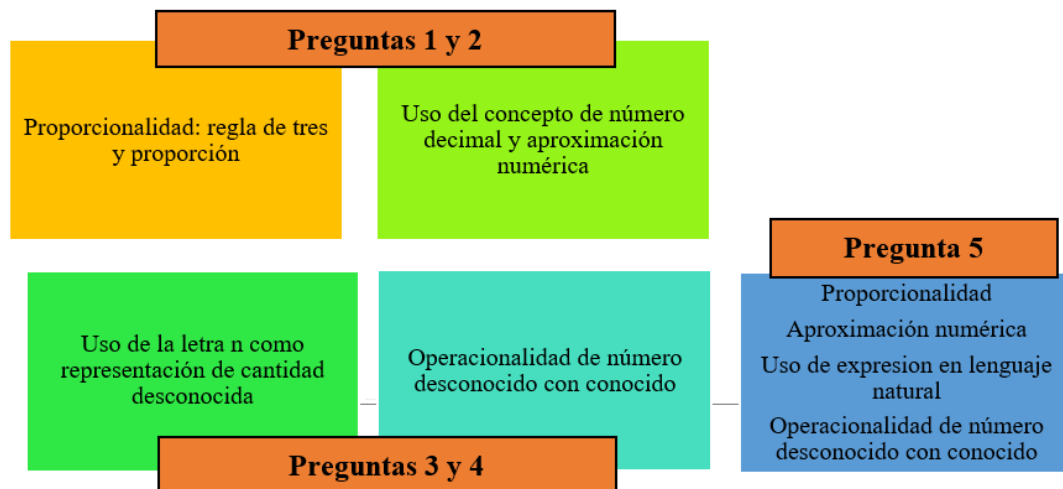
Para este aspecto del análisis local de la situación en cuestión, la investigación se apoya en el marco de referencia que ocupa este trabajo, en particular la caracterización de la indeterminancia, la analiticidad y la designación de objetos en relación con los procesos de escritura de los estudiantes, definidos como los elementos del pensamiento algebraico según lo propone Radford (2003, 2006).

De este modo, se presentan algunas precisiones teóricas sobre los elementos mencionados para lograr categorizar cada uno de los procesos de los estudiantes en el desarrollo de las preguntas de la situación. Para efectos de este trabajo, como primer elemento que permite desarrollar el pensamiento algebraico se encuentra la *indeterminancia*, la cual permite comprender que la relación de cantidades y magnitudes no sólo se pueden representar por números conocidos, sino que se pueden designar con expresiones que las representen según su naturaleza.

Como segundo elemento, se encuentra la *analiticidad* la cual permite el reconocimiento sobre la operacionalidad entre objetos indeterminados y conocidos, y como último elemento, se tiene a la *designación de objetos* que posibilita mediante una expresión matemática -sea por

medio de un lenguaje alfanumérico o un lenguaje natural- el reconocimiento de cantidades involucradas en una situación. Cabe resaltar que para efectos de este trabajo se estudian las *estrategias de solución que evidencian elementos del pensamiento algebraico*. Por consiguiente, las estrategias que se utilizaron para realizar cada una de las preguntas se categorizaron como lo muestra la siguiente ilustración.

Figura 3. Relación de estrategias según las producciones escritas de los estudiantes con las preguntas



A continuación, se presentan los procesos de escritura de los estudiantes que responden a cada una de las estrategias anteriormente suscitadas

- **Proporcionalidad: regla de tres y proporción**

Los estudiantes al enfrentarse a las situaciones se apoyan en la proporcionalidad directa, concepto por el cual movilizan la estrategia para encontrar la solución. Adicionalmente, ante el uso de la regla de tres y relacionar las proporciones de acuerdo con el contexto de la situación, se puede establecer que los estudiantes tienen un conocimiento significativo en el uso de conceptos vistos anteriormente, al poder implementarlo en situaciones diseñadas en relación con contextos de la vida cotidiana.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Ilustración 15. Uso de la regla de tres

Solución

1. $18,74 \text{ m}^2 \Rightarrow \text{Área total}$
 Caja $(24 \text{ m}^2) = 1'197,600$
 $1 \text{ m}^2 = 53,000$

$24 \text{ m}^2 = 1 \text{ caja}$
 $48,94 \text{ m}^2 = x$
 $24x = 48,94$
 $x = \frac{48,94}{24}$
 $x = 2,03 \text{ Cajas}$

Necesitamos 2 cajas
 $+ 2$
 $0,03$
 $2,03$

$1 \text{ caja} = 24 \text{ m}^2$
 $0,03 \text{ Cajas} = x$

$1'197,600 \Rightarrow 1 \text{ caja}$
 $x \Rightarrow 2 \text{ cajas}$
 $x = 2'395,200$

$(2'395,200 + 53,000) \cdot 3$
 $\Rightarrow 7'344,600$

1. Área $48,94 \text{ m}^2$
 • Para $48,94 \text{ m}^2$ necesito $2,03$ cajas

$1 \text{ caja} = 24 \text{ m}^2$
 $x = 48,94 \text{ m}^2$
 $1 \text{ caja} = 24 \text{ m}^2$
 $0,04 = x$

$48,94 \text{ m}^2 = 24$
 $48,94 \text{ m}^2 = x$
 24

$x = 24(0,04)$
 $x = 0,96 \text{ m}^2 \approx 1 \text{ m}^2$

$2,04 = x$ • Se necesita 2 cajas + 1 m^2

$= 2(1'197,600) + 1(53,000)$
 $= 2'395,200 + 53,000$
 $= 2'448,200 \times 3 = 7'344,600$

R/ El excedente para $7'344,600$
 con la balanza tipo (111111) para
 3 apartamentos.

- **Uso del concepto de número decimal y aproximación numérica**

Se evidencia en los siguientes procesos realizados por los estudiantes que utilizan sus saberes previos relacionados con los números decimales y la aproximación numérica, debido a las necesidades que tengan de acuerdo con el contexto, como se observa en la siguiente ilustración:

Ilustración 16. Aproximación numérica

1. $24 \text{ m}^2 \rightarrow 1 \text{ caja}$
 $48 \text{ m}^2 \rightarrow 2 \text{ cajas}$

$2 \text{ cajas y } 1 \text{ m}^2$

$2,3 \times 1197600 = 2755600$
 $1,3 \times 53.000 = 68900$

El excedente es de 2344600

Es 1 m^2 porque $0,94$ lo aproximamos
 a 1 porque es cercano a 1 además
 no le quedó faltando el 48 para com-
 pletar el área total.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

- **Uso de la letra n como representación de cantidad desconocida**

Cuando se enfrentan a cantidades no conocidas, algunos estudiantes lograron relacionar las letras como tal cantidad, es por esto por lo que se resalta este tipo de estrategia para dar a entender la solución que el estudiante pensaba, en el cual establece la manera en que puede obtener el costo del excedente de cada apartamento, sin necesidad de obtener el número explícito.

Ilustración 17. Reconocimiento de letra n

3. Area = $48,94 \text{ m}^2$ $20195 + 1 \text{ m}^2$

$$= 2(1197.600) + 1(53.000)$$
$$= 2395200 + 53.000$$
$$= 2448200 \cdot n = \text{Costo del apartamento excedente}$$

↓
apartamentos entregados

- **Operacionalidad de número desconocido con conocido**

De acuerdo con lo indicado en la estrategia anterior, algunos estudiantes logran vincular los números conocidos con los desconocidos mediante una operación, sin dejar de lado que se usan las letras como la representación de dicho número que aún no se conoce, pero que al conocerlo basta con reemplazar en la expresión que el estudiante halla.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Ilustración 18. Producto entre valores

③ $2n(1'107'600) + n(53.000) = \text{precio del excedente.}$
 Creemos que es así porque por uno son 2 cajas de baldosa y un metro de la misma.

④ $(2'539'200 + 53.000) \cdot n$
 $= 2'594'200n$

- **Unificación de estrategias en un solo proceso:** Proporcionalidad, aproximación numérica, uso de expresión en lenguaje natural, operacionalidad de número desconocido con conocido.

En algunos casos particulares, se logra evidenciar el uso de todas las estrategias identificadas a lo largo de la experimentación en la Situación 3, en el que se puede reconocer que, por medio del lenguaje natural y escrito, los estudiantes expresan en un lenguaje matemático -no formal- lo que la situación misma exige.

Ilustración 19. Estrategias unificadas

⑤ $\frac{48.94}{25} = 23.94$

$1 \text{ caja} = 24 \text{ m}^2$
 $x = 25 \text{ m}^2$

$x = \frac{25}{24} = 1,04$ y el $0,04 \approx 1 \text{ m}^2$

$25 \text{ m}^2 = \text{rustica} \rightarrow 1 \text{ caja} + 1 \text{ m}$
 $23.94 = \text{Clasica} \rightarrow 1 \text{ caja}$

$1'269'600 + 53.000$ rustica
 $1'197'600$ Clasica

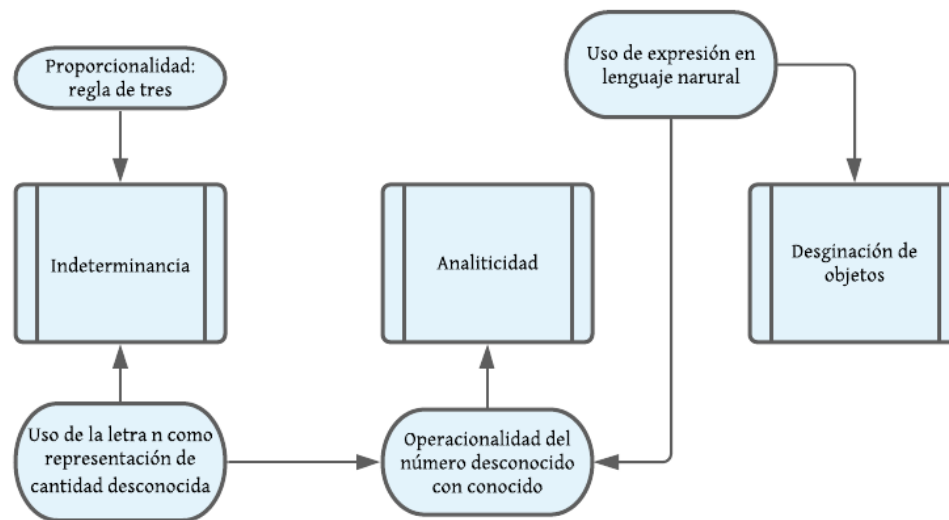
x = 25	Rustica	Clasica

$(1'324.600 + 1'197'600) \times \text{cantidad de cliente}$
 $\downarrow$
 $= \text{Valor (Precio)}$

$1 \text{ caja} = 1'368'600$

Las estrategias que los estudiantes desarrollaron según sus puntos de vista y conocimientos previos abren una correspondencia conceptual con la proporcionalidad en términos de magnitud-dependencia-proporción-comportamiento y los elementos del pensamiento algebraico según Radford (2006), es así como los procesos de los estudiantes responden a varias estrategias en las cuales se presentan en el siguiente esquema contrastados con los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico según Radford, para posteriormente describir sus relaciones.

Figura 4. Esquema de estrategias de solución según los elementos del Pensamiento Algebraico



Para efectos de la caracterización de los elementos se compilaron todas las estrategias utilizadas en cuatro categorías: proporcionalidad: regla de tres, uso de la letra n como representación de cantidad desconocida, operacionalidad del número desconocido con conocido y el uso de expresión en lenguaje natural, por lo que se describen a continuación cada una de ellas con relación a los elementos del pensamiento algebraico según Radford (2003, 2006).

➤ **Indeterminancia**

▪ **Proporcionalidad: regla de tres**

En el uso de esta estrategia, los estudiantes identifican una incógnita la cual le dan un tratamiento operatorio para poder hallarla haciendo uso de la regla de tres, cabe resaltar que corresponden lo que ya conocían sobre la proporcionalidad para relacionar el concepto de incógnita, y así hallar la cantidad de cajas y los metros cuadrados necesarios para cubrir el suelo del apartamento. En el momento que realizan el planteamiento de la regla de tres, reconocen que el valor denotado como “ x ” es el valor que se desconoce y que designan como incógnita.

Es por lo anterior que se ubica esta estrategia como el reconocimiento de la indeterminancia en el desarrollo de la Situación 3, pues los estudiantes usan representaciones literales como la x para indicar la incógnita que ellos consideran necesaria hallar para dar solución a las preguntas 1 y 2.

▪ **Uso de la letra n como representación de cantidad desconocida**

Adicionalmente, en el desarrollo de las preguntas 3 y 4 los estudiantes toman como referencia lo presentado en el contexto como la letra n para identificar que es un valor que estará cambiando en relación con las ventas de la constructora en el proyecto de vivienda relacionado en la Situación 3, sin embargo, en unos casos los estudiantes se les dificulta identificar tal letra como ese número que no se conoce pero que se utiliza para representarlo, pues erradamente pensaban que esa letra debían hallar un número tal como lo hacían con la incógnita. Así mismo, se encontraron grupos de trabajo que identificaron la n cómo ese número cualquiera que depende de las ventas de los apartamentos.

➤ ***Analiticidad***

▪ ***Operacionalidad del número desconocido con el conocido***

En la pregunta 3 y 4 los estudiantes vinculan por medio de una multiplicación el número desconocido de las ventas de los apartamentos -o clientes- que algunos reconocen como n y posibilitan la expresión que les permite conocer el valor del excedente de acuerdo con las ventas que realice la constructora, obteniendo expresiones como las que se relacionan en la **Tabla 6**.

Para que este proceso se dé es importante reconocer tres factores que fueron parte fundamental de esto:

1. La simbolización previa en la contextualización del problema al denotar la letra n en las preguntas 3 y 4
2. La estrategia *Uso de la letra n como representación de cantidad desconocida* fue clave para que los estudiantes relacionarán la operación que conlleva a la expresión que permite llegar a lo que la pregunta requería.
3. Se reconoce que los estudiantes tenían conocimientos previos sobre el significado de las letras en contextos matemáticos, pues en discusiones generadas con la docente en su recorrido por los grupos, algunos estudiantes expresaron que en clases anteriores con el docente titular habían trabajado con letras como número general.

➤ ***Designación de objetos***

▪ ***Uso de expresión en lenguaje natural***

En relación con la designación de objetos, se encuentra que un grupo de estudiantes realizan una expresión en la cual no tienen en cuenta la n como representación del valor

desconocido, pero enuncian como equivalencia la expresión “cantidad de clientes” para representar ese valor desconocido.

Se debe tener en cuenta que, para la designación de objetos, según Radford (2003, 2006) no es estrictamente necesario el uso del simbolismo alfanumérico pues de acuerdo con lo expresado por un estudiante en lenguaje natural también se puede evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico. Cabe resaltar que el objetivo de este trabajo se enmarca en la aproximación al álgebra – pensamiento algebraico– a través de una situación que implique la proporcionalidad, es por ello por lo que no se realiza una profundización en los elementos que por naturaleza tiene el álgebra como su formalidad. En este momento de la caracterización del elemento de designación de objetos, se puede relacionar la estrategia de operacionalidad entre números desconocidos y conocidos que realizaron los estudiantes pues se encuentra una vinculación secuencial entre las preguntas que se diseñaron en la Situación 3.

4.2 Análisis Retrospectivo de los datos: La proporcionalidad en la construcción del pensamiento algebraico

Se ha mencionado en lo que va del desarrollo de este trabajo que hay una coherencia entre un concepto matemático a otro, es por esto que se ha investigado en múltiples ocasiones sobre las rutas que se pueden optar para introducir el álgebra escolar, es por esto que a partir de las situaciones diseñadas en el marco del uso de la proporcionalidad, la implementación de ellas y los análisis locales realizados a cada una de las situaciones con respecto a las relaciones entre cantidades, la perspectiva funcional que se encuentran en ellas y los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico, se genera el análisis retrospectivo del Experimento de Enseñanza.

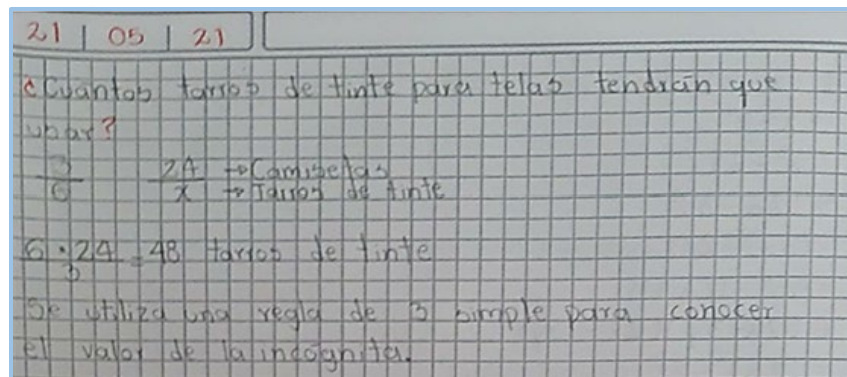
El análisis retrospectivo de este experimento será mediado por los procesos de escritura de los estudiantes vinculados con los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico y el

aporte de la proporcionalidad, los cuales se destacan a partir de lo que se ha desarrollado a lo largo del trabajo, y que permite deducir los resultados y conclusiones con relación a los objetivos iniciales, la conjetura establecida y una reflexión sobre lo implementado y hallado en esta investigación presentados en el próximo capítulo.

Ahora bien, los estudiantes en las tres situaciones diseñadas tuvieron en común la proporcionalidad como concepto movilizador que les ayudó a solucionar cada una de las actividades, es importante resaltar que de acuerdo a lo vivido en la implementación, las situaciones 1 y 2 fueron aplicadas en una modalidad virtual y la Situación 3 fue aplicada en modalidad de alternancia, sin embargo, el grupo de estudiantes que inicialmente estuvo participando se mantuvo hasta la última situación diseñada, por ello no se tuvo que contextualizar la Situación 3.

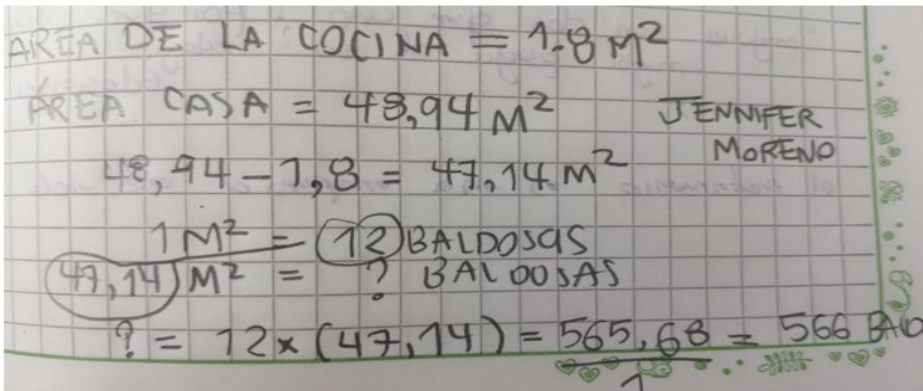
En los procesos de escritura de los estudiantes en todas las situaciones se evidencia el uso de la proporcionalidad, particularmente la proporcionalidad directa, pues el uso de la regla de tres tuvo la mayor protagonización en relación con las soluciones desarrolladas por las estudiantes, como muestra las siguientes ilustraciones relacionando procesos de escritura en la solución de todas las situaciones

Ilustración 20. Producción escrita estudiante Situación 1.



Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Ilustración 21. Producción escrita estudiantes Situación 2



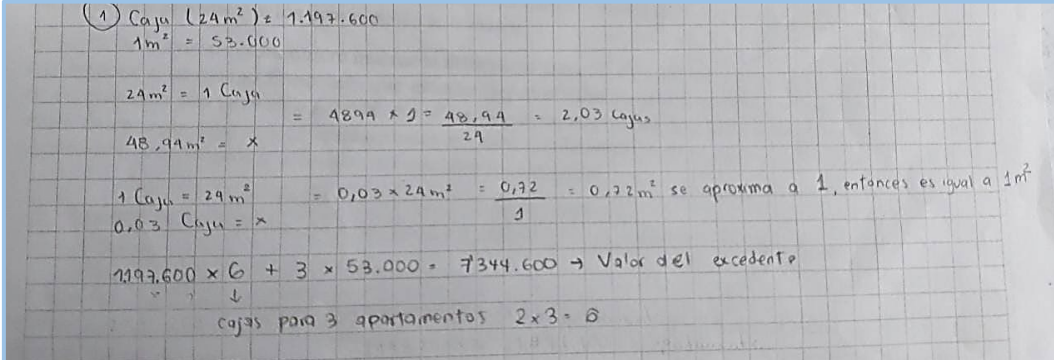
$\text{ÁREA DE LA COCINA} = 1,8 \text{ m}^2$
 $\text{ÁREA CASA} = 48,94 \text{ m}^2$ JENNIFER MORENO
 $48,94 - 1,8 = 47,14 \text{ m}^2$
 $1 \text{ m}^2 = 12 \text{ BALDOSAS}$
 $(47,14) \text{ m}^2 = ? \text{ BALDOSAS}$
 $? = 12 \times (47,14) = 565,68 = 566 \text{ BALDOSAS}$

P: Listo Jennifer, te escuchamos

E1: Pues profe yo no puse letra ni nada porque me confundo con un por, entonces le puse el signo de pregunta porque pues no lo conozco, y utilice la regla de tres y eso me dio 566 baldosas, pues aproximándolo

P: Buena estrategia Jennifer, muy bien, ¿la 3?

Ilustración 22. Producción escrita estudiante Situación 3



$(1) \text{ Caja } (24 \text{ m}^2) \pm 1.197.600$
 $1 \text{ m}^2 = 53.000$
 $24 \text{ m}^2 = 1 \text{ Caja}$
 $48,94 \text{ m}^2 = x$
 $1 \text{ Caja} = 24 \text{ m}^2$
 $0,03 \text{ Caja} = x$
 $1.197.600 \times 6 + 3 \times 53.000 = 7.344.600 \rightarrow \text{Valor del excedente}$
 $\downarrow$
 $\text{cajas para 3 apartamentos } 2 \times 3 = 6$

Teniendo en cuenta lo anterior, se relacionan los elementos que caracteriza el pensamiento algebraico según Radford (2003, 2006) según los resultados de las tres situaciones enmarcados en los procesos de escritura de los estudiantes, para ello se establece la siguiente rejilla con los aspectos fundamentales analizados y sintetizados según lo implementado.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Tabla 8. Rejilla sobre lo analizado con relación a los Elementos del Pensamiento Algebraico según Radford

La proporcionalidad en la construcción del Pensamiento algebraico					
Situación	Estrategias utilizadas por los estudiantes	Elementos del Pensamiento Algebraico			Evidencia procedimental
		Indeterminancia	Analiticidad	Designación	
Experimento Piloto: S1	Identificación de cantidad, magnitud y comportamientos implementando la proporcionalidad directa	En la regla de tres, algunos los estudiantes en esta situación determinaban y reconocían la x como una incógnita que debían hallar según el contexto. ¹	NO	NO	Regla de tres, relaciones de cantidades y magnitudes (cantidad de personas, precio)
S2: Proyecto de vivienda	Identificación de un número como incógnita	Los estudiantes utilizaban varias representaciones para reconocer un número como incógnita.	NO	Los estudiantes expresaban por medio de ideas y conversaciones con sus compañeros sobre el proceso matemático ante la incógnita.	Uso de símbolo de interrogación, letras como x, h
S3: La constructora	Reconocimiento de la proporcionalidad como estrategia de solución	Por el uso de la regla de tres	NO	Los estudiantes lograron establecer de manera individual relaciones entre la proporcionalidad permitiendo el pensamiento algebraico.	Cantidades relacionadas, caja, m^2
	Uso de la letra n como representación de cantidad desconocida	En esta situación los estudiantes utilizan la letra n identificándola como un número que desconocen	SI		Uso de la letra n como valor que puede cambiar dependiendo de las ventas
	Operacionalidad con número desconocido con conocido	SI	Los estudiantes relacionan mediante la multiplicación la representación de la incógnita con un valor conocido		Mediante la multiplicación relacionan la letra o expresión con el valor del precio conocido
	Uso de expresión en lenguaje natural	SI	SI		Algunos estudiantes expresan por medio del lenguaje natural como “cantidad de clientes” lo que se recomendaba como “n” y es válido.

En relación con la rejilla anterior, se establecen los siguientes aspectos en relación con la conjetura inicial que se trazó en el Experimento de Enseñanza, la cual es *“La proporcionalidad brinda una articulación en la actividad matemática de los estudiantes con relación a las cantidades desconocidas de una situación problema movilizándolos hacia el pensamiento algebraico, mediante las relaciones que se pueden encontrar en las magnitudes, enmarcado en el contexto de precios para la mejora de un proyecto de vivienda”*

- La proporcionalidad brinda varios aportes positivos referentes a la aproximación al álgebra, particularmente en el significado que los estudiantes relacionen con las cantidades indeterminadas, pues facilita -en gran parte- la visualización del valor fijo que no es conocido, designando tal valor no conocido como incógnita permitiendo a los estudiantes vincular una representación no formal o formal de acuerdo como se oriente en el aula de clase.
- Se debe reconocer que los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico permiten la identificación de factores que se dan en las expresiones verbales de los estudiantes mediante sus conversaciones e interacciones, pues la designación de objetos posibilita y ubica el lenguaje natural para permitir que los estudiantes expresen una etiqueta a partir del pensamiento matemático que se origina en la transición hacia el álgebra.
- El contexto de las situaciones diseñadas permitió que los estudiantes vinculen aspectos de la vida cotidiana pues se evidenció en expresiones como *“es que yo me pongo en los zapatos de la situación y es más fácil poder encontrar una solución”* o *“es que es más fácil así porque uno sabe que está haciendo cosas que existen”* logrando establecer un aporte significativo en la implementación y propósito del Experimento.
- A pesar de que la cantidad de estudiantes que intervienen en el Experimento es muy poco, los análisis de los resultados permiten vislumbrar unas reflexiones que en el capítulo final se considerarán.

4.3 Resultados de la investigación

A continuación, se verán reflejadas las conclusiones y algunas reflexiones que se generan a partir de los objetivos del trabajo de investigación en trazabilidad con los resultados de los análisis locales de cada situación implementada y el análisis retrospectivo que permitió la metodología de este trabajo por medio de los *Experimentos de Enseñanza*.

Es importante traer a colación los aspectos que se relacionaron en el análisis retrospectivo en relación con la conjetura trazada al inicio del experimento, para poder evaluar el alcance de los objetivos que se propusieron en este trabajo investigativo. Por consiguiente, es pertinente tener en cuenta que el objetivo general que ha motivado esta investigación gira entorno al desarrollo del pensamiento algebraico a través de la proporcionalidad en estudiantes de octavo grado por medio de un Experimento de Enseñanza en el Colegio Parroquial Santiago Apóstol ubicado en la ciudad de Cali.

Es por lo anterior que, a partir de los resultados de la investigación se precisa que en la mayoría de los estudiantes que fueron partícipes del experimento se logró identificar los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico que Radford propone, particularmente en la situación 3, pues las situaciones anteriores tuvieron una intencionalidad gradual respaldada en la proporcionalidad en cuanto a la aproximación al álgebra permitiendo una transición en el manejo de cantidades indeterminadas y la representación de ellas, por medio de un lenguaje alfanumérico o lenguaje natural.

Adicionalmente, se pudo establecer que mediante las producciones escritas de los estudiantes se lograron relacionar con cada uno de los elementos que componen el pensamiento algebraico, según el referente teórico que se presentó en este trabajo, estableciendo en el análisis

retrospectivo cada una de las estrategias utilizadas por los estudiantes contrastándolas con tales elementos.

Con respecto a la conjetura y las producciones escritas de los estudiantes, permitió que la designación de un objeto algebraicamente se pueda realizar a través del lenguaje natural, sin embargo, en los procesos de los estudiantes se infiere lo realizado como ese pensamiento que genera el estudiante en relación con el significado que encuentra en esa expresión o representación literal.

Así, los resultados de la investigación permiten precisar las siguientes conclusiones:

1. La proporcionalidad brinda un movimiento de transición gradual en el paso de la aritmética al álgebra, pues a partir de elementos propios de ella como la perspectiva funcional, las relaciones entre magnitudes, comportamientos de variables, entre otros, logran aportar positivamente a la actividad matemática, infiriendo así la importancia que se puede dar a este concepto matemático sin desligarse de las orientaciones pedagógicas y curriculares que el MEN propone.
2. En particular, la regla de tres no se asume como un elemento matemático que permite exclusivamente el hallazgo de una incógnita sino también como aquel que posibilita al estudiante encontrar relaciones entre cantidades y magnitudes las cuales puede establecer como equivalencias para conocer una nueva cantidad en situaciones problema contextualizadas.
3. El pensamiento algebraico se puede introducir a partir de situaciones contextuales sencillas que le permita al estudiante pensar matemáticamente adquiriendo habilidades y competencias propias del campo para su desenvolvimiento en la vida cotidiana.

4. El contexto que se presenta en una situación problema en el aula de clase representa positivamente los propósitos que se quieran alcanzar, así mismo la interacción con los estudiantes a partir de espacios de discusión con sus pares y docentes.
5. El pensamiento variacional es un tema de interés con relación a la ausencia de habilidades matemáticas que actualmente se encuentran en una gran parte de los estudiantes, el cual debe ser atendido pues son considerados como eje fundamental hacia la sociedad cuando terminan su vida académica. Es importante que se fortalezca a partir de las consideraciones e investigaciones que ya se han estudiado, sin caer en los tradicionales errores en el proceso de enseñanza que determinan las dificultades más notables y profundas en el proceso de aprendizaje.
6. El pensamiento matemático se fortalece a través de situaciones retadoras en las cuales los estudiantes puedan identificar familiaridad y asuman el problema como propio, a su vez es importante resaltar que los estudiantes deben tener bases conceptuales sólidas de los conocimientos anteriores para así poder introducir de manera positiva lo que corresponda al pensamiento algebraico, es por esto que se remite la importancia de las actividades vinculadas con estos conocimientos para el aporte y fortalecimiento de las habilidades matemáticas.

A continuación, se presentan algunas reflexiones en el qué hacer pedagógico con relación al pensamiento matemático y el pensamiento algebraico en las aulas de clase.

- Es necesario que el campo del álgebra sea trabajado desde los primeros años de escolaridad, precisando que la naturaleza propia del álgebra remite a las particularidades de ciertos grados, sin embargo el pensamiento algebraico se puede enfatizar de acuerdo a los niveles de pensamiento del niño, adolescente o

adulto a partir de patrones icónicos, generalización de patrones, y en los primeros años de la Básica Secundaria usar la proporcionalidad como concepto movilizador hacia el fortalecimiento del pensamiento algebraico.

- El pensamiento algebraico, es importante desarrollarlo inicialmente en concordancia con situaciones significativas que doten de sentido la utilización de símbolos o letras para que el estudiante alcance un nivel de abstracción que le permita desempeñar posteriormente la actividad algebraica propia del campo.
- El pensamiento matemático se caracteriza por las habilidades y competencias que una persona pueda desarrollar y aplicar en situaciones que lo ameriten, sin embargo se piensa frecuentemente que aquel persona que lo desarrolle es aquella que desea ejecutar su vida laboral en relación al campo exclusivo de las matemáticas, y se debe extinguir esa idea debido a que en el ámbito escolar se originan dificultades actitudinales que los estudiantes priorizan y no se presta atención a que socialmente se discrimina la posibilidad de enriquecer el pensamiento como sujeto social.
- Se debe dejar de pensar que generalmente el álgebra debe ser tarea de la Básica Secundaria pues de esta manera no se presenta la relación matemática propuesta desde las orientaciones pedagógicas propuestas por el MEN ni con investigaciones realizadas por diversos autores como Radford (2006), Rojas y Vergel (2018) que favorecen el pensamiento matemático.

Finalmente, como aporte personal en la construcción de este trabajo que se enmarca en la experiencia investigativa vivida, aportó en gran medida al crecimiento personal y profesional de acuerdo con la labor docente, pues en las vivencias en un aula de clase, se enfrentan varios

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

factores que no son propiamente curriculares, los cuales se pueden tomar como herramienta para que los estudiantes a partir de contextos reales se puedan considerar como situaciones problema, útiles para las sesiones de clase, además se pudo analizar que el manejo del docente en todo el campo conceptual debe estar muy bien fundamentado para que de esa manera no se caiga en las tradicionales limitaciones en relación con lo abstracto y las potencialidades de un contenido matemático tan poderoso e importante como lo es la proporcionalidad, su análisis y su utilidad.

BIBLIOGRAFÍA

Aké, L., Gonzato, M., Wilhelmi, M., & Godino, J. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la docencia. En Aproximaciones al álgebra. pps. 3-12. Springer, Dordrecht.

Butto, C. & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. En: Educación Matemática, vol. 22, núm, 3, pp. 55-86. Distrito Federal, México: Grupo Santillana.

Butto, C., Delgado, J. (2012). Rutas hacia el álgebra. Actividades en Excel y Logo. UPN, CONACYT, México, Horizontes Educativos, 2012. 1-140

Butto Zarzar, M. C., Delgado Fernández, J., & Bazán Ramírez, A. (2018). Procesos de generalización: Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en educación básica. Horizontes Pedagógicos issn-l:0123-8264, 21 (2), 25-36.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75-94). Jaén: SEIEM

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En: Handbook of research Design in mathematics and science education, Cap. 12 (pp. 307 – 326). N jersey: Lawrence Erlbaum.

Fernández, C.; & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educativos*, 15(1), 11-22.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Godino, J. D., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.

Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. (2009). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Colección digital Eudoxus*, (11).

MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional

Ministerio de Educación Nacional. (s.f.). Alternancia Educativa.

https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-403001.html?_noredirec

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.

Moreno, R., Mayorga, R., & Guacaneme, E. A. (2017). Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad como relaciones de comparación.

Obando, Gilberto, Vasco, Carlos Eduardo, & Arboleda, Luis Carlos. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(1), 59-81.

Obando, Gilberto; Vasco, Carlos E.; Arboleda, Luis Carlos (2013). *Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica*. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 979-988). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalizations in algebra. *PME Conference*, 4, 4.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking & Learning*, 5, 1, 37-70.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En: Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter (Vol. 1, pp. 2-21).

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. En: Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st, 2009, Lyon France © INRP

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Rojas, Pedro Javier; Vergel, Rodolfo (2018). *Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula*. RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3(1), pp. 19-30

Saldarriaga-Zambrano, P. J., Bravo-Cedeño, G. D. R., & Looz-Rivadeneira, M. R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Dominio de las Ciencias*, 2(3 Especial), 127-137.

Sallán, J. M. G., & Vizcarra, R. E. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma Rev. Sobre Enseñanza Aprendiz. Las Matemáticas*, 62, 35-48.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En: The ideas of algebra, K-12 (NCTM YEARBOOK 1988, pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización.

ZARZAR, C. M. B., & CEBALLOS, M. T. R. (2009). Pensamiento Algebraico Temprano.

ANEXOS

Anexo 1.

Situación 1: Experimento Piloto

Lee las siguientes situaciones y responde según corresponda:

El regalo de las camisetas

Los estudiantes de octavo han decidido regalar camisetas tinturadas para los 24 chicos del curso. Calcularon que necesitaran usar 6 tarros de igual cantidad de tinte para telas cada 3 camisetas. ¿Cuántos tarros de tinte para telas tendrán que usar?

El profesor les pidió que tinturarán más camisetas, para estudiantes de otro octavo. ¿Cuántos tarros de pintura deberá comprar cada curso si en ellos hay 12, 18 y 30 chicos, respectivamente?

El transporte de la excursión

Ahora, como ya tienen camisetas tinturadas, quieren irse de excursión para lucirlas. Para esto, planean algunos costos, uno de ellos es el transporte, por eso han cotizado con una empresa de transporte turístico los siguientes precios según el horario del viaje:

¿Cuáles son las magnitudes que se emplean en el problema? ¿Qué comportamiento está tomando la magnitud en relación con la cantidad de personas por grupo?

Anexo 2

Transcripción de la Situación 1

Transcripción Clase: Aplicación Situación 1			
Convenciones	P: Profesora	E1: Estudiante 1	E2: Estudiante 2
	E3: Estudiante 3	E4: Estudiante 4	E5: Estudiante 5
	*momento de clase con intervenciones de video		

P: Buenos días, chicos, hoy vamos a realizar una actividad en la que vamos a retarnos y mirar cómo estamos para resolver un problema de la vida cotidiana. Empecemos, vamos a realizar la lectura de nuestras situaciones entre todos, ¿quién me ayuda con la lectura?

E1: Yo profe

P: Listo, dale

E1: *Estudiante empieza la lectura, el regalo de las camisetas*

P: Ok, gracias, entonces miremos qué nos están diciendo y cómo lo resolverían ustedes para así me envíen cómo lo realizaron por WhatsApp para poder presentarlo aquí y veamos entre todos nuestra solución

P: A ver, entonces el contexto, empecemos identificando qué me indica la situación, por ejemplo, que son estudiantes de grado octavo los cuales son muy propositivos en organizar actividades extracurriculares, por ende, quieren vender camisetas, entonces empecemos con la información ¿Cuántos estudiantes hay en el octavo?

E1: 24 profe

P: Muy bien, son 24, ahora dicen que calcularon que necesitan usar 6 tarros de tinte cada 3 camisetas, ¿entonces esos 6 tarros para cuantas camisetas me alcanzan?

E2: Para 3 camisetas profe

P: Bien, entonces cada 3 camisetas necesitamos 6 tarros de tinte, por tanto, vamos a tratar de responder la primera pregunta, ¿cuántos tarros de tinte tienen que usar?

E2: Profe, entonces sería para los 24 del curso, ¿cierto?

P: Pues, díganme ustedes, ¿cuántos hay?

E1: Si profe, los 24

P: Exacto, entonces eso es lo primero que tienen que pensarse, ¿cómo lo harían? Piénsenlo, lo realizan y me envían el registro, para que todos lo miremos (se da un tiempo de 10 minutos)

E3: Profe, ya te lo envíe

P: Listo, entonces empecemos con Cata, ¿cómo lo hiciste?

E3: Profe pues... yo lo que hice fue utilizar la regla de 3 simple para conocer el valor de la incógnita que pues en este ejercicio, nos preguntan por cuantos tarros de tinte necesitan

P: Bien Cata, eso miramos en tu ejercicio (la profesora comparte la pantalla para todo el grupo de lo enviado por la estudiante Catalina), pero entonces aquí Catalina me dice que el primer número son las camisetas y que la incógnita es el número de tarros que necesita, y la incógnita catalina lo registra con una "x" y ella realiza todo ese proceso por medio de la proporcionalidad, como ella lo dijo lo hizo utilizando la regla de tres simple que ustedes ya conocen y pues efectivamente al realizar los procesos de 6 por 24 dividido entre 3 es igual a 48 tarros, miren que esa es una forma, muy bien catalina, pero miremos ahora una solución diferente que nos comparte Nicole, ella lo que hace es tabular la información, cuéntenos Nicole

E4: Umm pues profe lo que yo hice fue mirar si el problema me dice que 3 camisetas necesitan 6 tarros de tinte, pues yo coloque las camisetas a un lado que puse ahí como C y los tarros de tinte al otro lado que dice ahí TP y empecé a sumar con eso, por ejemplo, para 3 camisetas son 6 tarros, para 6 serian 12, para 9 serian 18, o sea así como duplicando todo

P: Bien Nicole, pero entonces creo que en tu solución hay un error, ¿cuál es?

E4: Si profe, después del 12 era 15, me equivoqué

P: Ok Nicole, si porque el resultado como vemos es 48, ojo ahí con la suma, pero está bien, listo, ahora me llegó otra solución, ¿quién fue? No tiene nombre en la foto

E5: Profe soy yo, Erick

P: A ver, Erick como lo hiciste

E5: Profe, pues lo primero que hice fue averiguar digámoslo así, ellos producían 3 camisas y ellos utilizaban 6 tarros de pintura, ¿no? Entonces son 24 estudiantes, entonces lo primero que hice fue buscar en la tabla del 3 que daba 24 y pues fue 8 porque 8 por 3 es 24 después de eso pues caí en la conclusión fue porque son 6 tarros de pintura por cada 3 camisas entonces relacioné el 6 por 8 y así me dio 48 y ya profe

P: Ok Erick, ese es otro mecanismo, hay varias formas por el cual uno puede realizar un problema, me llegaron más fotos, pero en realidad para toda la clase que está son muy pocos, ojo con la participación, listo entonces realicemos la siguiente pregunta, ¿cuántos tarros de tinte necesitan con diferentes números de estudiantes de los otros octavos? 5 minuticos para eso, está bien, manos a la obra

P: Muy bien, varias personas ya enviaron la foto, y muchos lo realizaron por medio de la proporcionalidad, muy bien, ahora vamos con la siguiente situación, leamos e interpretemos los datos que hay en ella *La profesora lee y va explicando la situación 2* Vamos entonces a mirar nuestros interrogantes, ¿cuáles son las magnitudes que se emplean en el problema? Entonces deben pensar y recordar qué es una magnitud la siguiente es, ¿qué comportamiento está tomando la magnitud en relación con la cantidad de personas por grupo? Piénsenlo y ya lo discutimos (Se dan 10 minutos)

P: Listo chicos, cuéntenme

E6: Profe yo quiero participar

P: Listo, dale

E6: Pues profe, las magnitudes según tengo entendido son las que se pueden medir, ¿no? Por ejemplo, pues no sé creería que los metros, ¿cierto?

P: No sé, ¿qué dicen los compañeros?

E6: Ay profe, no sea así

E4: Si profe, también los precios y eso

E6: Si, por eso ahí para responder esa primera (refiriéndose a la pregunta) pues profe son todos los precios que dice ahí disque valor, pues creo, mi humilde opinión

E3 y E6: Jajaja bien chistosa, jajajajaja

P: Bueno, chicos por favor, cierren los micrófonos, pero si, está bien

E7: ¿Profe puedo decir yo la última?

P: Claro, dime

E7: Pues profe ahí dice el comportamiento de la magnitud, pero también dice que tiene que ver con la cantidad de personas, entonces yo pienso que pues según eso, hay más baratos y caros y eso como que depende mucho de qué tantos hay y si es turno de noche o de día

E4: ¿Turno? Noooo, pues el horario

E7: Por eso, es lo mismo

P: Jajaja, igual te entendimos, ¿pero entonces eso qué comportamiento sería?

E7: Pues Mmmm, profe lo que le dije

E5: Profe, pues si hay más personas va a ser más caro y si hay menos pues va a costar menos

E3: Profe si mal no estoy, se llama directamente proporcional porque a medida que uno sube el otro también

P: Uno y el otro, pero ¿qué es eso de uno y el otro?

E3: Bueno pues, la magnitud y la cantidad

P: ¿Y qué depende de qué?

E1: Pues la magnitud de la cantidad porque ... el precio depende de la cantidad que vayan, creo

P: Bien, es muy importante saber identificar todo lo que el problema nos trae a colación, no es sólo responder por responder, pero muy bien... Bueno, eso es todo por hoy. Gracias por la clase muchachos.

E2, E3 y varios estudiantes: Chao profe, gracias

Anexo 3

Situación 2: Proyecto de vivienda

La familia Méndez Ruiz ha adquirido la compra de una casa pequeña mediante la constructora “Versalles”, la casa se entrega a la familia en obra gris, y deciden cotizar en primer momento el costo de las baldosas que deben comprar para cubrir la superficie del suelo.

A continuación, se muestra el plano de la casa adquirida por la familia Méndez Ruiz, la cual tiene $48,94 \text{ m}^2$.



Además, se sabe que el área de la cocina mide $1,8 \text{ m}^2$. Se ha cotizado el valor de las baldosas en los siguientes precios

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Baldosa escogida para la cocina por la familia Méndez Ruiz

Diamante
Baldosa Granito Mármol Payande Negro
30x30cm Caja X 24m2
Modelo 649 | Código 483108
★★★★★ 0.0 (0)
\$1.197.600 CAJA

Baldosa escogida para el resto de la casa por la familia Méndez Ruiz

Diamante
Piso Baldosa Rosado Huila Fondo Cafe
30x30cm Caja X 24m2
Modelo 649 | Código 483113
★★★★★ 0.0 (0)
\$1.269.600 CAJA

RESOLVAMOS

1. La constructora le indica a la familia Méndez Ruiz que la cocina tiene un área de 1.8 m^2
¿Cuántas baldosas de las que cotizaron necesitan para cubrir el piso de la cocina?
2. ¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir el resto del piso de la casa?
3. Si sólo deben comprar pocas baldosas para cubrir el área de la cocina, ¿cuánto deben pagar por cada una teniendo en cuenta el precio de la caja?
4. ¿Cuánto le cuesta a la familia Méndez Ruiz la compra de las baldosas para el piso de su casa?
5. ¿Cuáles son las medidas del plano para que el área total se cumpla, si su lado más largo mide $7,53 \text{ m}$? ¿Qué magnitudes se relacionan en la situación? ¿Qué comportamiento tienen las magnitudes relacionadas?

Anexo 4

Transcripción Clase: Aplicación Situación 2			
Convenciones	P: Profesora	E1: Estudiante 1 Jennifer	E2: Estudiante 2 Botina
	E3: Estudiante 3 Murcia	E4: Estudiante 4 Betancourt	E5: Estudiante 5 Puerta
	E6: Gómez	*momento de clase con intervenciones de video	

P: Buenos días, chicos, espero se encuentren muy bien, ¿ya preparados para cerrar el año?

E1: Pues si profe, ojalá todos nítidos

P: Si, eso espero, bueno entonces, vamos a iniciar, ¿ya ven pantalla?

E2: Si profe

**Inicia la oración de inicio de jornada, se dinamiza con video en clase virtual*

P: Iniciaremos con el llamado a lista chicos, por favor estén atentos (la profesora inicia el llamado a lista de todos los estudiantes del grado 8°1)

P: Bueno chicos, vamos a iniciar nuestra clase del día de hoy, como saben estamos finalizando año escolar y vamos a ver nuestra clase, teniendo en cuenta esas competencias y habilidades que hemos desarrollado hasta el momento, pero antes por favor me dicen si ven pantalla

E2: Profe, compartió un momentico y ya no se ve

P: Listo, y ¿ahora?

E1: Si profe, ya

P: Vamos a preparar nuestros útiles, lápiz y papel, cuaderno, todos los elementos necesarios para que iniciemos clase, ¿ya están preparaditos con todos sus elementos? ¿Listo, ya? Vamos a ver entonces qué dice nuestra actividad del día de hoy, a ver, vamos a ayudarnos a leer, ¿cómo se llama esa primera diapositiva que ven en pantalla?

E2: Analicemos situaciones

P: Listo, entonces empecemos, ¿quién me ayuda con la lectura?

E1: Yo, profe (La estudiante inicia la lectura)

La familia Méndez Ruiz ha adquirido la compra de una casa pequeña mediante la constructora “Versalles”, la casa se entrega a la familia en obra gris, y deciden cotizar en un primer momento el costo de las baldosas que deben comprar para cubrir la superficie del suelo.

P: Listo, entonces en ese parrafito ¿qué entendimos? ¿Qué nos están diciendo?

E2: Que la familia Méndez Ruiz compró una casa sin baldosas

P: Ujum, ¿qué entendemos con qué se entrega una casa en obra gris?

E2: Que la entregan tal cual como la construyen profe, es decir que no le hacen ningún arreglo ni le echan pintura ni nada así

P: Exacto, la entregan repellada, sin suelo, alguna vez ustedes han llegado a ir a una de esas casas que entregan así, normalmente Cali está lleno de eso, ¿alguna vez que sus papás hayan ido a comprar una casa o estén averiguando, nunca han ido? ¿Alguien que tenga la experiencia?

E3: Si profe

P: Entonces cuando uno va allá, le muestran la casa súper arreglada, estucada y súper bonita, pero eso no significa que así te la van a entregar, a ti te la entregan en obra gris, sin estuco, sin repellar, sin el baño como tal, sino sólo la construcción sólo del baño, entonces ¿qué es lo que quieren hacer la familia Méndez Ruiz a no más se la entregan?

E3: Comprar el piso

P: Exacto, entonces vamos a mirar que más nos dice nuestra situación, ¿quién quiere seguir leyendo? (espera un momento) No todos a la vez, a ver quién lee

E4: Profe, yo

P: Dale

E4: El estudiante inicia la lectura

P: A ver primera pregunta, cuándo decimos el área, ¿qué es lo que es el área? ¿Lo de adentro o el contorno?

E1, E2, E3: Lo de adentro profe

P: Muy bien, lo de adentro, entonces vamos a mirar cómo es el plano y vamos a ver qué es lo que nos dice allí, entonces miren ahí está el plano de la casa, ¿cuál sería el área total de lo que nos muestran en el plano?

E2: Cuarenta y ocho coma noventa y cuatro metros cuadrados

P: Muy bien, y ¿por qué serán metros cuadrados? ¿por qué no metros? ¿Por qué deben ser metros cuadrados? ¿Quién recuerda por qué?

E3: Algo multiplicado por 2

E2: Profe, porque el plano es cuadrado, o bueno, como cuadrado

P: Exacto, es rectangular, y ¿cómo se halla el área de un cuadrado o un rectángulo?

E5: base por altura

P: Muy bien, entonces ¿qué más información nos arroja el plano?

E2: Profe, pues yo veo ahí que cada lado es de uno coma ocho

P: Cada lado, ¿segura? Pero miren que arriba hay otro número entonces ese número ¿qué significa?

E6: Es la base de todos los lados, ¿no?

P: A ver, les hago una pregunta, ¿el plano es cuadrado?

E3: Si

P: ¿Qué propiedad tiene un cuadrado?

E3: Cuatro lados

E4: Iguales

P: Exacto, muy bien

E3: Entonces es un semicadrado

P: Cómo así que un semicadrado, cuál es ese, que ni yo lo conozco, ¿cómo se llama la figura que parece un cuadrado?

E4: Rectángulo

P: Exacto, un rectángulo, ya sabemos un lado de ese rectángulo, pero el otro no nos lo están dando, o ¿sí? ¿Ustedes que dicen? ¿Será que el otro lado, también mide lo mismo? Si yo quisiera expresar el área de ese plano, ¿cómo sería?

E4: Profe, mide cuarenta y ocho noventa y cuatro metros al cuadrado

P: Si, espérenme, yo comparto toda la pantalla para poder escribir lo que ustedes me quieren decir, listo, ¿ya ven ahí?

E3: Si profe

P: Listo, ¿cómo es que saco el área entonces?

E4: base por altura, entonces como es un rectángulo se puede hacer así

P: Ahora, ¿el número 4,53 qué sería?

E3: la base profe

P: Lo podemos tomar como la base, listo, entonces sería mi b , entonces la altura no la conocemos, ¿cierto que no?

E2: No

P: Pero sabemos que, al multiplicar la altura por nuestra base, nos da ¿Cuánto?

E2: cuarenta y ocho coma noventa y cuatro

P: Muy bien, falta los metros cuadrados, ojo, pero bueno, listo, entonces cómo hacemos para poder poner un número que no conocemos, ¿qué dicen ustedes?

E3: Pues... con una incógnita, ¿no?

P: ¿Bueno y cómo simbolizamos entonces esa incógnita?

E4: Profe utilizamos una letra

P: ¿Cuál ponemos?

E4: Una y puede ser profe

P: ¿Y ahora cómo hacemos para poder poner que estamos hablando es de una multiplicación?

E3: Pues profe, con un puntico

E6: Pero cuando hay incógnita junto a un número, no es necesario poner ningún signo porque se entiende que es una multiplicación

P: Muy bien, listo, o sea que eso que tenemos ahí sería la expresión que me sirve para hallar el área, ahora, ¿qué otra información podemos extraer?

E6: Profe el área de la cocina

P: ¿Y cuánto mide?

E1: Uno coma ocho metros cuadrados

P: Entonces qué sabemos sobre eso, ¿cómo hallaron ese número de área?

E2: Pues profe, la base por altura da uno coma ocho metros cuadrados

E1: Yo profe, (la estudiante empieza la lectura)

P: ¿Listo, qué información podemos sacar de ahí?

E4: Profe, pues... el tamaño de las baldosas mide 24 metros cuadrados

P: ¿Y es de una baldosa?

E1: Profe, yo creo que es la cantidad de baldosas que vienen en la caja, es decir cuánto espacio puede ocupar esas baldosas de la caja, o sea una caja tiene unas baldosas entonces es como el área que puede ocupar

P: Ok, bien Botina, la pregunta es ¿qué significa cuando nos dicen en la pregunta que se ha cotizado el valor de las baldosas 30x30 en la caja de 12 por metro cuadrado?

E4: 30X30 es lo que mide una sola baldosa profe, ¿no?

P: Y si la baldosa tiene esas medidas, ¿qué figura tiene la baldosa?

E4: Es un cuadrado

P: Muy bien, entonces la baldosa es un cuadrado, ahora ¿cómo así que en la caja de 12 por metro cuadrado?

E2: Profe, que ellas alcanzan a cubrir 12 metros cuadrados del área de la casa

P: No señorita, lean e interpreten bien

E1: ¿Profe que en la caja hay 12 baldosas que forman un metro cuadrado?

P: Por ahí va, hay que mejorar eso, ¿cómo sería?

E1: En un metro cuadrado necesita 12 baldosas

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

P: Exacto, ahora miremos nuestros interrogantes en la situación, por favor intenten realizar la primera pregunta y me envían la foto para que revisemos todos juntos. (se dan 5 minutos para ello)

P: Listo, acá ya hay una respuesta, miremos

P: Entonces, miremos mariana, qué hay aquí

Nombre Mariana Botina
Área de la cocina $\rightarrow$ La tengo
 $1 \text{ m}^2 \rightarrow$ caben 12 baldosas
Cada baldosa mide 30 por 30 centímetros
 $X \rightarrow$ ¿Cuántas baldosas necesito de la cocina?
 $X = 1.8 \times 12$
 $X = 21.6 \rightarrow$ porque le pasa de 5
 $X = 22$
La cocina necesita 22 baldosas

E2: Pues profe, yo mire los datos que tenía y los que no, pues se pone la incógnita, y pues multiplique el área de la cocina con el número de las baldosas y pues me dio 21 coma 6 pero pues como son baldosas le puse que son 22.

P: muy bien Botina, ¿la siguiente pregunta qué tal? ¿Quién ya la hizo?

E1: Profe yo, ya te la envié

P: Ya reviso a ver, y miramos

ÁREA DE LA COCINA $= 1.8 \text{ m}^2$
ÁREA CASA $= 48.94 \text{ m}^2$ JENNIFER MORENO
 $48.94 - 1.8 = 47.14 \text{ m}^2$
 $1 \text{ m}^2 = 12 \text{ BALDOSAS}$
 $47.14 \text{ m}^2 = ? \text{ BALDOSAS}$
 $? = 12 \times (47.14) = 565.68 = 566 \text{ BALDOSAS}$

P: Listo Jennifer, te escuchamos

E1: Pues profe yo no puse letra ni nada porque me confundo con un por, entonces le puse el signo de pregunta porque pues no lo conozco, y utilice la regla de tres y eso me dio 566 baldosas, pues aproximándolo

P: Buena estrategia Jennifer, muy bien, ¿la 3?

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

E4: Profe yo

P: Dale, ya la pongo en pantalla

1 caja mide 24m²
1 m² tiene baldosas 12

$$\frac{24}{1} = \frac{x}{12}$$

$$x = 24 \cdot 12$$

$$x = 288$$

Tiene 288 baldosas la caja

Entonces $\frac{1.192.000}{288} = 4138$ Más o menos 4200 pesos

E4: Profe pues yo nombre la incógnita también con x, pero cuando necesitaba poner la multiplicación usted nos dijo que los paréntesis también servían y pues yo puse así para no perderme, y yo multiplique en cruz el número de baldosas por metro y pues el 24 que tiene la caja para saber cuántas baldosas había y ya luego lo dividí, pues lo que cuesta esa caja con el número de baldosas y pues ya eso me dio 4200

P: Muy bien Brayan, poco a poco debemos utilizar todo lo que hemos hecho para poder seguir contestando las preguntas

E6: Si, profe a mí me pasó así con la que sigue

P: ¿Ya me la enviaste?

E6: Si profe

P: Listo, veamos

Daniela Gómez

Cocina = 22 baldosas $\times$ 4200 = 92400

Resto de la casa = 566 baldosas

1 caja = 288

2 cajas = 576

$1.269.600 \times 2 = 2.539.200$

↓

por 2 cajas

$\frac{1.269.600}{288} = 4408 \approx 4450$

$566 \times 4450 = 2.518.700$

↓

por 566 baldosas

E6: Profe pues yo primero mire cuanto valían la de la cocina para luego, hacer el resto de la casa, y pues dije si en 1 caja caben 288 en 2 caben 576 y pues ya con 2 alcanzan y le saque el

precio a eso, pero como dice es el precio de las que necesitan mejor lo hice con las 566 y le saque el precio de esa caja porque no son las mismas, y pues multipliqué por el valor de cada una que es de 4450 y pues ya me dio dos millones quinientos mil setecientos.

P: Muy bien Daniela, súper bien, debiste hacer varias cosas, muy bien

E3: Yo quiero hacer la última profe

P: Claro, dale

Laura Murcia M

$$A = \text{base por altura}$$
$$A(\text{casa}) = 7,53 \times \text{altura}$$
$$A(\text{casa}) = 7,53 \cdot h$$
$$A = 7,53 h$$
$$48,94 = 7,53 h$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$7 \times 7 = 49$$
$$h = 49 \text{ más o menos}$$
$$49 \text{ m}^2$$

E3: Profe pues es que preguntan qué cuánto vale el otro lado de toda la casa para el área, y pues yo más o menos calculé porque es que con decimales no sabía, entonces empecé a probar que número multiplicado por 7 daba cerca al 48 y pues encontré que el 7, y pues.... ay profe me equivoqué, tenía que poner era el 7 no el 49, no jajaja, pero ahí es 7 más o menos 7 metros cuadrados

P: Jaja a ver, miremos, empezaste a ensayar números para que te diera cerca, eso está bien, pero que tal la constructora diciendo a un cliente es que más o menos, no, no se puede, hay una forma de hacerlo, ya les muestro, pero antes eso que dice h, ¿qué es?

E3: Profe la altura, porque pues esa es la que no se conoce entonces para variar yo le puse h, cualquier letra sirve, ¿no?

P: Ah ok, tu h es la incógnita, pero y ¿por qué dices que serían siete metros cuadrados?

E2: Profe, debería ser sólo metros porque el área es que debe ser en cuadrado y al multiplicar m por m pues da m cuadrado, creo yo

P: Si, lo que quiere decir Botina es que, en la magnitud de los lados del plano de la casa, debe ser sólo metros pues al multiplicarse nos va a dar la forma de cuadrado que es lo que conocemos como el área, el espacio que se forma entre esas dos magnitudes, bien, ahora les muestro, eso que quiso averiguar ensayando Laura, se puede hacer más sencillo por medio de

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

una ecuación, así:



The floor plan shows a rectangular house with a width of 7.53 m and a height of 7.53 m. The rooms include: Patio, Área 1.9m², Cocina, Recámara, Sala, Pasillo, Baño, Comedor, and Patio de Servicio. There is an 'Acceso' (entrance) on the left. Handwritten calculations to the right of the plan show the process of finding the height 'h'.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= b \cdot h \\ \text{Área} &= 7.53 \cdot h \\ 48.94 &= 7.53 \cdot h \\ 48.94 &= 7.53 h \\ \frac{48.94}{7.53} &= h \\ 6.49 &= h \rightarrow \text{La altura mide } 6.49 \text{ m} \end{aligned}$$

Handwritten notes next to the plan include 'h = 6.49' and a question mark '?'.

P: Entonces lo que hacemos es que la incógnita tiene una operación que la relaciona con el número, y como el fin es encontrarla debemos aplicar la operación inversa a ese número para poder hallar la incógnita, entonces ¿cuál es la operación inversa ahí?

E2: La división

P: Bien, entonces el 7,53 divide a 48.94 y el resultado es el valor de la incógnita, que es igual a 6,49, casi el 7 que Laura trató de encontrar, pero la estrategia no está mal, en matemáticas lo conocemos como ensayo y error. Muy bien chicos, ahora ¿cuáles son las magnitudes que están relacionadas en todo lo que vimos hoy?

E3: Profe, el área, metro, precios, cantidades de baldosas, Umm no sé qué más

P: Ok, ¿alguien más?

E1: Pues profe, el precio de las cajas con la cantidad de baldosas

P: Muy bien, ¿y qué más?

E3: Pues profe entonces el área de la casa con la cantidad de baldosas

P: ¿Y qué comportamiento tenían?

E4: Profe, entre más área más baldosas y más caro también jajaja

P: Exacto, muy bien, y ¿quién recuerda cómo se llama ese comportamiento?

E3: Directamente proporcional, ¿no?

P: Si muchachos, si una magnitud aumenta, la otra también aumentará, muy bien, bueno muchachos, se nos acabó el tiempo, los felicito a los que participaron, muchas gracias por la clase

Anexo 5

Situación 3

La constructora “Versalles” diariamente entrega apartamentos o casas que corresponden a proyectos de vivienda. Para la constructora es importante, determinar las cantidades de material que se utilizará de acuerdo con las ventas de cada proyecto, pues debe realizar presupuesto sobre lo que invertirá en su construcción.

Sin embargo, la constructora por proyecto probablemente tiene muchas ventas, y necesita tener un método general el cual le sirva para calcular algunas cantidades de material teniendo en cuenta los precios que los proveedores le ofrecen.

El dueño de la constructora quiere marcar la diferencia entre el resto de las constructoras, por eso propone a su equipo financiero que estudie la posibilidad de entregar los apartamentos de un proyecto con todo el piso cubierto. Para eso el equipo financiero debe establecer el costo de entregar uno o más apartamentos en esas condiciones para así saber cuál es el excedente que debe anexar a los precios iniciales del proyecto.

PROVEEDORES DE BALDOSAS		
TIPO BALDOSA	PRECIO POR m²	PRECIO CAJA x 24 m²
Clásica (30x30)	53.000	1'197.600
Rústica (30x30)	55.000	1'269.600

De acuerdo con la información anterior, los clientes pueden escoger entre dos tipos de baldosa, pero la constructora necesita saber el precio que el cliente debe dar como excedente al precio inicial del apartamento.

Las dimensiones del proyecto escogido son apartamentos con área de construcción de 48,94 m².

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

1. ¿Cuál es el precio del excedente que la constructora recibe si entrega 3 apartamentos los cuales escogen la baldosa tipo clásica?
2. ¿Cuál es el precio del excedente que la constructora recibe si entrega 5 apartamentos los cuales escogen la baldosa tipo rústica?
3. ¿Cuál es el precio del excedente que la constructora recibe si entrega n apartamentos con baldosa clásica?
4. ¿Cuál es el precio del excedente que la constructora recibe si entrega n apartamentos con baldosa rústica?
5. Si n clientes escogen que 25 m² del piso del apartamento lo quiere cubrir con el tipo de baldosa rústico y el resto con el tipo de baldosa clásica, ¿qué expresión matemática ayuda a encontrar el valor deseado.

Anexo 6

Transcripción Situación 3

P: Hola chicos, buenos días

E's: Buenos días profe

P: Espero se encuentren muy bien, el día de hoy vamos a continuar con lo que hemos venido trabajando sobre el proyecto de vivienda, ¿recuerdan?

E1: Si profe, pero eso ya lo habíamos terminado, ¿no?

P: Si, pero hoy tenemos un nuevo reto

E2: Jum profe, otro (expresa de forma impaciente)

P: Jaja si, otro. Pongamos la mejor actitud para que podamos cumplir este reto y podamos aprender algo nuevo hoy. Para eso como somos pocos el día de hoy, vamos a trabajar en parejas. Van a leer lo que trae nuestra actividad del día de hoy y estaré pasando por cada uno de los grupos para ver qué tal van y si es de orientarlos, pues poder hacerlo, ¿de acuerdo?

E's: Si señora

E2: Se siente raro el salón tan vacío es como no sé... no estoy acostumbrada

P: Si, pero poco a poco van a ir llegando sus compañeros, hay que entender que muchos de sus padres están preocupados por su salud

E1: Si profe, mi mamá casi que no me deja venir y más cansona con que siempre me eche alcohol

P: Claro, es de lo más entendible, por cierto, eso me da pie para decirles que deben utilizar el tapabocas bien puesto y si es preferible echarse antibacterial frecuentemente, recuerden que en la entrada hay, ahora sí, organicense para pasarles la hoja

E3: Profe y ¿hay que sacar alguna hoja para resolver?

P: Si, si lo desean, sino en el reverso de la hoja que les voy a pasar (la profesora reparte cada una de las hojas), bueno ahora, qué les parece si leemos juntos el contexto y luego cada pareja discute cómo realizar lo que la situación indica

E4: Si profe, hágale

P: Bueno, yo empiezo y a medida que los voy nombrando ustedes siguen leyendo (la profesora inicia la lectura con apoyo de todos los estudiantes que se encuentran en el espacio)

E2: Profe, pero es que o sea lo que la constructora quiere es saber cómo tal cuanto le sale a ellos la inversión del piso a un apartamento, no?

E3: Para que pueda cobrarles a los clientes si quieren meterle el piso bonito

P: Si señores, así es

E1: Ve profe, pero son las mismas medidas que el de la otra actividad de la familia Ruiz

P: Si, exacto, ven que no es que vaya a ser algo súper extraño, ya conocíamos eso, y además son los mismos precios que les indique que habíamos averiguado sobre las baldosas en un almacén

E2: Ah si verdad

P: Bueno, pero entonces aquí siguen ustedes, lean las preguntas y discutan cómo hacerlas, ya paso

E5: Ve profe ¿qué es excedente?

P: Es como lo que debes pagar de más por algo que compras y que por alguna razón no te lo cobran en el primer momento

E6: Ah si yo si he escuchado a mi mamá hablar de eso con mi papá cuando hacen cuentas del negocio

P: Bueno, manos a la obra

Intervenciones de la maestra a cada grupo de trabajo

En las siguientes tablas se presentan las diferentes intervenciones según el trabajo realizado por cada grupo de trabajo de acuerdo con los procesos y explicaciones que los estudiantes expresaban.

Grupo 1		
Profesora	Estudiante 1	Estudiante 5
P: P: Hola chicos, ¿cómo van?	E1: Pues profe estamos como viendo toda la información que tiene eso, que el área de la casa, los precios y pues como dice la primera pregunta que la baldosa clásica pues estamos viendo cómo hacemos	E5: Es que profe yo no sé, pues creo que primero hay que saber cuántas baldosas se necesitan para cubrir el piso
P: Muéstrenme	E1: No tanto las baldosas, sino el precio	
P: Pero ¿cómo sabrán el precio sino saben el precio unitario?	E1: Profe es que pille, una caja trae para 24 m ² y la casa mide 48,94 m ² entonces pues necesitaría 3 cajas, porque con dos no alcanza faltaría un poquito	
P: ¿Y cómo sabes que es un poquito?		E5: Mmmm profe sobra muy poco del área como ... ah no, faltarían 94
P: ¿94? Entonces necesitarían más de 3 cajas	E1: No profe es que no es 94 es... como es que se llaman... decimales, es como no sé	E5: Ah ya, sería 0,94 lo que falta
P: Ajá y eso son ¿metros cuadrados o cajas?	E1: No profe, son m ² porque eso sale del área de la casa	E5: Ehhh cajas (se muestra confundido)
P: Bien, y bueno todo eso ¿para qué?	E5, E1: Jajajajajajaja verdad y eso pa' que	
P: Piénsenlo bien, ya vuelvo		

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Grupo 2		
Profesora	Estudiante 2	Estudiante 3
P: Hola, y ustedes ¿cómo van?	E2: Pues profe intentando ya hacer la primera	
P: Muéstrenme	E2: Mire profe (muestra lo que han realizado)	
P: Pero pues explíqueme porque y entonces jaja		E3: Jaja profe yo le explico, nosotras hicimos una regla de tres, para poder saber la cantidad de material digámoslo así que se necesitaba porque es que una caja tiene 24m^2 y la casa tiene 48,94 entonces pues yo lo puse así (<i>señala lo que realizaron en el papel</i>)
P: Ajá, pero y ¿por qué la regla de tres?	E2: Pues profe porque hay metros cuadrados y hay cajas con metros cuadrados	
P: ¿Qué? Jaja no entiendo	E2: Es que no sé cómo explicarle profe, vea que la caja de baldosas tiene como un máximo que puede cubrir y eso está en metros cuadrados que es 24, entonces pues para saber el dato que nos falta, que sería cual Eso, entonces eso nos va a decir el número de cajas que necesitamos	E3: Eh pues de las cajas
P: Entiendo, y ¿cuánto les dio?		E3: Ahí está el problema, que no sabemos si nos quedó bien, es que dio 2,03 pero uno como pide 2,03 cajas, no profe eso no se puede
P: Claramente, uno no pide esa cantidad de cajas, pero no significa que esté mal lo que hicieron	E2: ¿No?	
P: No, piensen en las partes que tiene un número decimal		E3: Pues la parte entera y la parte decimal
P: Exacto, lo entero serían el número de cajas normal que uno pide en la tienda y lo decimal, ¿cómo hacemos para saber más o menos cuánto es en metros cuadrados?	E2: Ah ya sé profe, pues sería volver a poner eso decimal y mirar a cuantos metros es igual	
P: ¿Cómo harías eso?	E2: otra regla de tres vea profe así, <i>empieza a plantear la regla de tres</i>	
P: Ah ok, háganlo y me dicen a ver qué tal les fue		

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

Grupo 3		
Profesora	Estudiante 4	Estudiante 7
P: Hola muchachones, ¿cómo van?	E4: Pues profe ahí más o menos (muestran a la profesora lo que han realizado)	
P: Cuéntenme	E4: Si profe, entonces pues normal reemplazamos lo que vale la caja por 3 y luego lo que vale el metro cuadrado también por 3 y sumamos eso, ahí está la respuesta, ¿así quedó bien?	E7: Profe pues nosotros no hicimos regla de tres, sino que pues 2 cajas alcanzan para 48 metros cuadrados y lo que sobra que es 0,94 pues aproximadamente es un metro cuadrado, entonces se necesita 2 cajas y un metro cuadrado para poder saber lo que no conocíamos ahí
P: No lo sé, pues ustedes son los que deben decirme si tiene sentido haberlo pensado así		E7: Si profe, pues yo me pongo como en los zapatos de un cliente y pues imagino que es mi caso y así me queda más fácil pensarlo y resolverlo
P: Es una buena estrategia	E4: Además profe es fácil porque pues le dicen a uno como tal algo que uno sabe que existe	
P: Si, se llama contexto, y efectivamente se utiliza para que se puedan adquirir habilidades matemáticas con la vida cotidiana	E4: ¿Profe, pero entonces así está bien?	
P: Supongo		E7: Jajaja yo sé que si
P: Hagamos la otra entonces y ahora vuelvo		

Grupo 4		
Profesora	Estudiante 6	Estudiante 8
P: Y ustedes chicos, ¿cómo van?		E8: Bien profe, vamos por la tercera
P: Uy, les ha rendido		E8: Pero profe tenemos una pregunta aquí
P: A ver	E6: Es que nos preguntan lo mismo prácticamente, pero con una n	
P: ajá		

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

	E6: Pero o sea que cualquier número que ponga ahí me sirve	E8: Profe cierto que esa n lo que nos quiere decir es como si fuera cualquier número o sea si venden seis, siete, mil, cuatro mil
P: A ver, piensen primero en lo que les preguntan P: Ajá	E6: Pero como hacemos para hallar n, si nos piden el precio	E8: Dice que si tuvieran que entregar n apartamentos entonces cuanto valen E8: Pues se queda así con la n y depende de la situación pues sólo lo escriben ahí y ya
P: Explícame un poco eso	E6: Ah es eso	E8: Profe pues es que cuando hacemos la regla de tres multiplicamos en cruz y pues en ocasiones hay que multiplicar la x con el número y queda así, entonces el profesor nos ha dicho que cuando eso pasa es porque la x es un número como cualquier otro pero como no se conoce entonces se deja así
P: Entonces ¿cómo lo escribirían? P: ¿seguro?		E8: El precio que nos dio en la uno con la n E8: Ah no, el precio de una sola casa con la n
P: Y con la n, es ¿qué operación?	E6: Una multiplicación, porque pareciera que fuera como el 3 en la primera pregunta	
P: Entiendo, háganlo y ahora vengo		

Grupo 1		
Profesora	Estudiante 1	Estudiante 5
P: Volví, ¿cómo van?		E5: Bien profe, ya vamos en la tercera
P: Y ¿cómo les termino de ir con la primera?		E5: Ah bien profe, hicimos regla de tres con el 0,94 para saber las cajas y eso nos dio 0,03 cajas y pues nos dio lo mismo si lo hacíamos completo, vea profe
P: Entiendo	E1: Y eso pues lo aproximamos a 1 y después pusimos los precios y hallamos primero el de una casa y luego lo multiplicamos por 3	
P: Bueno, y la tercera ¿qué?		E5: Bien profe, pues pusimos el precio de una casa con la n que dice la pregunta

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

P: Y esa n entonces ¿qué pitos toca ahí?		E5: Pues es cualquiera
P: ¿Cualquiera? ¿Cualquier casa? ¿Cualquier moto? ¿Cualquier niño?	E1: Cualquier número de casas vendidas por la constructora profe	E5: Jajaja no profe, cualquier casa
P: Ah ok, sigan que ya casi acaban		

Grupo 2		
Profesora	Estudiante 2	Estudiante 3
P: Jaja díganme	E2: Profe menos mal llegó	
P: Ajá	E2: Es que llegamos a la quinta, y tenemos una pregunta porque es que eso dice que una cantidad de clientes quiere una parte en una baldosa y otra parte en otra	
P: ¿Cómo así?	E2: Entonces, lo que falta son 23,94 y entonces dice que cómo hallar eso si varios clientes quieren de las dos para su casa, entonces eso no es un número lo que queda de respuesta, ¿cierto?	E3: No, es que no sabe explicar, lo que dice es que, si queda también con letras, o pues igual son números, pero pues uno los pone como con eso de las letras para poder decir que son números, pero pues que no lo conocemos
P: Umm, pueden acomodar un poco mejor la idea		E3: Si profe, a ver, lo que nos piden ahí es encontrar como la manera para que si por ejemplo 20 clientes quieren ambas baldosas sólo tengan que reemplazar en la letra que pongamos
P: Ah ok, si eso es		E3: Yo sí sé explicar, vio jajaja
P: A ver, entonces ¿cómo lo harían?	E2: Pues profe primero hay que saber cuánto material de una baldosa y cuanto material de la otra, y pues para la de 25 m ² que es la rústica pues se necesitaría 1 caja y 1 metro cuadrado y para la clásica una caja no más porque casi llega a las 24	

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

P: Ok, y entonces, ¿qué más?	E2: Pues buscar los precios y poner las letras creo	
P: ¿cómo?	E2: Pues profe mire (empieza a escribir en la hoja) la rústica cuesta un millón doscientos sesenta y nueve mil seiscientos y el metro cuesta (mira en la hoja) eso que dice ahí entonces si fuera un solo cliente, seria sumar eso más lo de la clásica que es una sola caja	
P: ¿Y cómo expresas eso matemáticamente?		E3: Profe, espere lo pensamos y ya le decimos
P: Listo, ahora vuelvo		

Grupo 3		
Profesora	Estudiante 4	Estudiante 7
P: Mis niños ¿ya casi acaban?	E4: No profe, la última no sabemos	E7: Es que profe, eso es complicado ver letras y números juntos
P: ¿por qué?		
P: ¿Pero por qué?	E4: Es que son dos baldosas y pues vuelve y aparece la n y ahí si no sabemos cómo	
P: ¿Pero y cómo hicieron con la regla de tres?		E7: es diferente profe porque es que en la regla de tres hay que hallar el resultado y es fácil en cambio aquí no se puede hallar
P: Umm, pero ¿cómo ustedes entienden esa n?	E4: que hay un número	
P: Ajá pero ese número qué significa en ese contexto?	E4: Son clientes	
P: Pero relacionen cada una de las cosas que me dicen con la pregunta, porque parecen adivinando chicos, discútanlo y ya vuelvo		

Grupo 4		
Profesora	Estudiante 6	Estudiante 8
P: ¿Ya acabaron muchachos?		E8: Si profe

Un experimento de enseñanza basado en la proporcionalidad directa simple, para la construcción de significado de los elementos del pensamiento algebraico propuestos por Radford

P: ¿Cómo les acabó de ir?		E8: Bien profe, nosotros hicimos la quinta como la entendimos profe pero no usamos letras ni nada de eso
P: No les dije que así lo hicieran P: Jajaja no		E8: Pero profe mire nosotros clasificamos cada uno de los valores de cada baldosa y luego pusimos escritamente, ¿si se dice así? Jajaja E8: Bueno profe, pero me entendió
P: Pues así que qué entendimiento no	E6: Jajajaja profe que escribimos al lado de eso que son la cantidad de clientes	P: Ah ok
P: Entiendo, ¿y eso que escribieron cambia a algo en algún momento?		E8: Si profe, pues depende los clientes que lleguen a comprar casa así con dos baldosas pues se pone ahí y ya
P: ¿Con dos baldosas?	E6: Jajaja con muchas, pero de los dos tipos	
P: Ah ya, eso es otra cosa, bueno chicos cerremos la clase ya		

P: Muchachos (dirigiéndose a todos), se nos acabó el tiempo, es más nos pasamos por casi 8 minutos, me entregan las hojitas por favor (estudiantes entregan) vale chicos, gracias por su participación y la clase, que tengan un bonito día