



Reconocimiento de los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión por medio de una trayectoria hipotética de aprendizaje

Yorley Sánchez Torres

Universidad del Valle – Santiago de Cali

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

2021



Reconocimiento de los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión por medio de una trayectoria hipotética de aprendizaje

Yorley Sánchez Torres – 1127817

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Matemáticas y Física

Director:

Jimmy Alexander Uribe Carreño

Universidad del Valle – Santiago de Cali

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

2021



Programa Académico   Licenciatura en Matemáticas y Física  

Fecha

Código del programa:   3487  

Resolución del programa:                     

| Día | Mes | Año  |
|-----|-----|------|
| 5   | 11  | 2021 |

| Título del Trabajo o Proyecto de Grado                                                                                                                                                                                                              |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Reconocimiento de los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión por medio de una trayectoria hipotética de aprendizaje                                                                 |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Se trata de:                                                                                                                                                                                                                                        |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Proyecto <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                                                   |                                     | Informe Final <input checked="" type="checkbox"/> |                                                                                                |                                     |
| Director                                                                                                                                                                                                                                            |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Jimmy Alexander Uribe Carreño                                                                                                                                                                                                                       |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Nombre del Primer Evaluador                                                                                                                                                                                                                         |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Jorge Enrique Galeano Cano                                                                                                                                                                                                                          |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Nombre del Segundo Evaluador                                                                                                                                                                                                                        |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Estudiantes                                                                                                                                                                                                                                         |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Nombres y Apellidos                                                                                                                                                                                                                                 | Código                              | Plan                                              | E-mail                                                                                         | Télefonos de contacto               |
| Yorley Sánchez Torres                                                                                                                                                                                                                               | 1127817                             | 3487                                              | <a href="mailto:yorley.sanchez@correounivalle.edu.co">yorley.sanchez@correounivalle.edu.co</a> | 3172625135                          |
|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Evaluación                                                                                                                                                                                                                                          |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Aprobado                                                                                                                                                                                                                                            | <input checked="" type="checkbox"/> | Meritorio                                         | <input type="checkbox"/>                                                                       | Laureado <input type="checkbox"/>   |
| Aprobado con recomendaciones                                                                                                                                                                                                                        | <input type="checkbox"/>            | No Aprobado                                       | <input type="checkbox"/>                                                                       | Incompleto <input type="checkbox"/> |
| En el caso de ser <b>Aprobado con recomendaciones</b> (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:                                                                                  |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Director del Trabajo o Proyecto de Grado <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                   |                                     | Primer Evaluador <input type="checkbox"/>         | Segundo Evaluador <input type="checkbox"/>                                                     |                                     |
| En el caso de que el Informe Final se considere <b>Incompleto</b> (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa                       |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente). |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Firmas                                                                                                                                                                                                                                              |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                     |                                                   |                                                                                                |                                     |
| Director del Trabajo o Proyecto de Grado                                                                                                                                                                                                            | Primer Evaluador                    | Segundo Evaluador                                 |                                                                                                |                                     |

## **Resumen**

El presente informe final corresponde al desarrollo de un trabajo de grado donde se pretendió reconocer los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión.

Para la recolección de información se realizaron 4 sesiones de clases en la institución, cada una de dos horas, con un diseño de trayectoria hipotética de aprendizaje tomada de Amador(2015), rejillas de observación y diálogos puntuales con los estudiantes; estas herramientas junto con la implementación de una metodología de investigación descriptiva de tipo cualitativa permitió la recolección de todo lo necesario para el reconocimiento de los errores lenguaje algebraico empleado por los estudiantes.

Dicha investigación se desarrolló en 3 momentos principales : La generalización y caracterización de la investigación que es donde se realiza una observación y el dialogo con los estudiantes, en segunda instancia el uso de los instrumentos de recolección de datos que corresponde a la realización de las rejillas de observación y la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje, y finalizando el análisis.

El grupo mostró predisposición al hablar del lenguaje algebraico y de las matemáticas, sin embargo, al realizar la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje se mostraron participativos y activos. Para el test final donde se reconocieron los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes del grado 8°, se evidencian satisfactoriamente pocos desaciertos y varios errores.

Esto nos lleva a concluir que la trayectoria hipotética de aprendizaje como una herramienta para la enseñanza de las matemáticas, y en este caso para la enseñanza del lenguaje algebraico es un aporte valioso. Este puede ayudar a una mejor comprensión por parte de los alumnos, y a una mejor planeación de clase por parte de los docentes, teniendo en cuenta siempre la necesidad constante de reestructuración y reinención de nuestra labor docente.

**Palabras clave:** Trayectoria hipotética, lenguaje algebraico, errores, investigación descriptiva.

## **Abstract**

This final report presents a research Project that intended to recognize errors in algebraic language as used by students of 8° grade from Liceo Campestre La Misión.

To gather information four sessions were conducted in the institution, each of those with a duration of two hours. The design for the sessions used a hypothetical learning trajectory as proposed by Amador (2015), observation grids and specific dialogue with students; this tools implemented with a qualitative descriptive research methodology allowed the gathering of all information needed for the recognition of errors in the algebraic language used by students.

The investigation was done in three main moments: The generalization and characterization of the research that is where an observation and dialogue with the students is carried out, in the second instance the use of the data collection instruments that correspond to the realization of the observation grids and the application of the hypothetical learning trajectory, and lastly, the analysis.

Students showed a shy disposition when speaking about algebraic language and mathematics in general, however, throughout the application of the hypothetical learning trajectory they became more participant and active. In the final test, where the errors in algebraic language used by students were recognized, few mistakes and several errors were evidenced.

This leads to the conclusion that the hypothetical learning trajectory as a tool for the teaching of mathematics, specifically for teaching of algebraic language, is a valuable contribution. Since it can help to a better understanding from the students, and to better

class planning by teachers. While at the same time, bearing in mind the constant need of reinvention of a teacher's work.

**Keywords:** Hypothetical trajectory, algebraic language, errors, descriptive research.

# Contenido

|       |                                                                                       |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....                                                       | 12 |
| 1.1   | OBJETIVOS .....                                                                       | 15 |
| 1.1.1 | OBJETIVO GENERAL.....                                                                 | 15 |
| 1.1.2 | OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....                                                           | 15 |
| 2     | ANTECEDENTES .....                                                                    | 16 |
| 3     | JUSTIFICACIÓN.....                                                                    | 21 |
| 4     | MARCO TEÓRICO .....                                                                   | 24 |
| 4.1   | LA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE. ....                                        | 25 |
| 4.2   | EL LENGUAJE ALGEBRAICO: CONCEPCIONES Y PERSPECTIVAS .....                             | 28 |
| 4.2.1 | ERRORES .....                                                                         | 30 |
| 5     | METODOLOGÍA.....                                                                      | 34 |
| 5.1   | GENERALIDADES DE LA INVESTIGACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN Y LA MUESTRA..... | 35 |
| 5.1.1 | CARACTERÍSTICAS DEL LICEO CAMPESTRE LA MISIÓN Y EL GRADO OCTAVO.....                  | 37 |
| 5.2   | INTRUMENTOS Y FORMA DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.....                                | 39 |
| 5.2.1 | ETAPA 1 : DIALOGO Y OBSERVACIÓN. ....                                                 | 40 |
| 5.2.2 | ETAPA 2: APLICACIÓN DE LA TRAYECTORIA HIPOTETICA DE APRENDIZAJE Y TEST FINAL.....     | 44 |
| 6     | ANÁLISIS.....                                                                         | 49 |
| 6.1   | RESULTADOS CONTEXTUALES .....                                                         | 50 |
| 6.2   | IDENTIFICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE ERRORES .....                                     | 53 |
| 7     | CONCLUSIONES.....                                                                     | 64 |
| 8     | REFERENCIAS .....                                                                     | 67 |
| 9     | ANEXOS .....                                                                          | 70 |
| 9.1   | ANEXO A .....                                                                         | 70 |
| 9.2   | ANEXO B .....                                                                         | 71 |
| 9.3   | ANEXO C .....                                                                         | 72 |
| 9.4   | ANEXO D .....                                                                         | 73 |
| 9.5   | ANEXO E .....                                                                         | 74 |
| 9.6   | ANEXO F .....                                                                         | 75 |
| 9.7   | ANEXO G.....                                                                          | 86 |
| 9.8   | ANEXO H .....                                                                         | 87 |

## Índice de Figuras

|                                                                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1. Listado de errores tomada de la tesis de maestría de María Victoria Amador (2015)                                | 33 |
| Figura 2. Lista de preguntas guías para conocer la postura de los estudiantes frente al área de matemáticas y álgebra..... | 40 |
| Figura 3. Rejilla de observación proceso de enseñanza y aprendizaje .....                                                  | 41 |
| Figura 4. Rejilla de observación interacción entre estudiantes .....                                                       | 42 |
| Figura 5. Aplicación del momento 1 de la trayectoria .....                                                                 | 45 |
| Figura 6. Colección de errores en el punto a del test final .....                                                          | 54 |
| Figura 7. Colección de errores en el punto b del test final .....                                                          | 54 |
| Figura 8. Colección de errores en el punto c del test final.....                                                           | 54 |
| Figura 9. Colección de errores en el punto d del test final .....                                                          | 55 |
| Figura 10. Colección de errores en el punto e del test final .....                                                         | 55 |
| Figura 11. Colección de errores en el punto f del test final .....                                                         | 55 |
| Figura 12. Colección de errores en el punto g del test final .....                                                         | 56 |
| Figura 13. Colección de errores en el punto h del test final .....                                                         | 56 |
| Figura 14. Colección de errores en el punto i del test final.....                                                          | 56 |
| Figura 15. Colección de errores en el punto j del test final.....                                                          | 57 |
| Figura 16. Colección de errores en el punto k del test final.....                                                          | 57 |
| Figura 17. Colección de errores en el punto l del test final.....                                                          | 57 |
| Figura 18. Colección de errores en el punto m del test final .....                                                         | 58 |
| Figura 19. Colección de errores en el punto n del test final .....                                                         | 58 |

## Índice de gráficas

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Gráfica 1. Aciertos y desaciertos en cada punto del test final después de la trayectoria hipotética de aprendizaje..... | 59 |
| Gráfica 2. Reconocimiento de errores a partir de la aplicación del test final .....                                     | 60 |

## INTRODUCCIÓN

Las condiciones de la educación del siglo XXI convocan a detenerse un poco en los asuntos que conciernen con el uso del lenguaje algebraico de los estudiantes. Se ha pensado que los inicios a dicho lenguaje son la base para la comprensión de asuntos más complejos en el área de matemáticas. El lograr tener buenas descripciones de las situaciones de la vida diaria en términos del lenguaje algebraico permitirá sacar un mayor provecho a las matemáticas, desarrollando nuevas destrezas como el razonamiento, la abstracción y las competencias matemáticas (Amador, 2015)

El presente trabajo final se preocupó entonces, por reconocer los errores cometidos por los estudiantes de grado 8º a partir de su iniciación en el uso del lenguaje algebraico, usando como herramienta principal la aplicación de una trayectoria hipotética de aprendizaje, que corresponde a unas actividades estructuradas y secuenciadas, este diseño ya realizado por Amador (2015) en su tesis de maestría “una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores” responde a las necesidades del aprendizaje del lenguaje algebraico y los intereses de la investigación.

En este informe final se encuentra el planteamiento del problema con los objetivos respectivos que movilizaron el trabajo, como las preocupaciones personales y profesionales, lo que se propuso y se pretendió alcanzar; adicionalmente se presentan los antecedentes definidos desde las observaciones y las tensiones que emergieron de investigaciones y/o otros puntos de vista; la justificación de la investigación, donde se

abordó el qué, cómo y porqué de la temática a investigar; El marco teórico, donde se expone la teoría que fundamentará esta investigación, en este caso, el lenguaje algebraico y la trayectoria hipotética de aprendizaje ; la metodología donde se explica la forma de abordaje de la investigación, procesos y herramientas mediante los cuales se realizó la investigación; el análisis, donde se presenta la información hallada a partir de las diferentes herramientas utilizadas, este análisis se realiza desde lo contextual y desde la identificación de errores y por último se encuentran las conclusiones, las referencias bibliográficas y los anexos.

Todos estos capítulos conforman de manera fundamental esta investigación, guiándonos así al cumplimiento del objetivo principal, el reconocimiento de los errores cometidos por los estudiantes de grado octavo del colegio Liceo Campestre la Misión.

# 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la sociedad actual es necesario reconocer la importancia de las matemáticas, no solo por la sociedad altamente tecnificada en la que nos encontramos o por la necesidad de contar, enumerar, interpretar, relacionar, entre otras acciones, sino porque brinda una base para la comprensión de la realidad que nos rodea (Saelices y Gámez, 2016). Tener buenos conocimientos matemáticos permite un desempeño propositivo y crítico en la vida social, cultural, económica y política, así como la interpretación de información necesaria para la preparación, discusión y toma de decisiones en los diferentes contextos de la realidad. (MEN, 2006).

En Colombia, gran cantidad de la población posee falencias en el marco de la formación del área de matemáticas (Badano y Dodera, 1999; Bolea, Bosch, Gascón y 2001; Corica, 2007; Gascón, Bosch, Bolea y 2001; Miguez, 2004; Otero, Fanaro y Elichiribehety, 2001; citados en Sepúlveda, Opazo, Díaz-Levicoy,, Jara, Sáez, & Guerrero 2016); esto podría deberse principalmente a la variedad de oportunidades educativas que atraviesan ciertos sectores, al conflicto armado, casos extremos de pobreza o desinterés por parte de la población misma. La revista el Espectador en una publicación del 21 de febrero de 2018 pone en evidencia que más de la mitad de la población colombiana no termina la educación secundaria, y que en promedio solo llegan a cursar hasta el grado 7º de bachillerato (Redacción vivir, 2018, p.6). Lo anterior da cuenta de las múltiples dificultades que los ciudadanos en Colombia pueden enfrentar con su formación educativa básica.

A pesar de que la cobertura educativa en Colombia se ha acrecentado tanto en primaria como en secundaria, dicho incremento no se ha visto reflejado en un fortalecimiento en la calidad de la educación, ya que, las distintas evaluaciones nacionales e internacionales no muestran cambios significativos en los resultados de los estudiantes.

Específicamente en el área de matemáticas no se muestran grandes cambios, puesto que, en los diferentes informes de las pruebas nacionales e internacionales como lo son las pruebas saber 11°, pruebas saber 3°, 5°, 9° y las pruebas PISA, aplicadas entre los años 2012 a 2017 el desempeño en el área no fue el mejor. El cambio más significativo se evidenció en la prueba SABER 11° aplicada para el 2016 en el calendario B, con una mejora del 7% , para el calendario A solo se logró mejorar en un 1% comparado con los años anteriores; respecto a la prueba SABER 3°, 5°, 9° , se evidenció que los estudiantes que se ubicaban en los niveles superiores iban descendiendo a medida que pasaban de grado de escolaridad (OCDE , 2016), (Icfes, 2017), (Icfes, 2018).

Todos estos resultados muestran que existen grandes diferencias entre el currículo propuesto en las escuelas colombianas, el currículo desarrollado en el aula de clase y lo logrado por los estudiantes (Daro, Mosher, & Corcoran, 2011) (Jiménez, & Pinzón, 1998).

Entonces, en el caso del álgebra particularmente, que maneja un lenguaje propio de las matemáticas se evidencian muchas dificultades por parte de los estudiantes. Esta situación puede radicar en la complejidad de la visualización de los conceptos en un contexto cercano a su realidad, el no poder desarrollar modelos matemáticos

eficientes, no adquirir habilidades de razonamiento o de formulación de situaciones problemas, ni desarrollar competencias matemáticas (Saelices y Gámez, 2016).

A pesar de que muchos docentes se esfuerzan por enseñar álgebra, se ha puesto en manifiesto por varias comunidades de docentes, que es una de las áreas que les causa más dificultad a los estudiantes (Castro, 2012), esto ha generado múltiples cuestionamientos no solo en el cuerpo docente, sino también en el investigativo.

Según Wagner y Parker, (citado en Castro, 2012):

*“Las dificultades y obstáculos del aprendizaje del álgebra pueden ser clasificados en tres tipos: aquellas que son intrínsecas al objeto, estas se deben a la misma naturaleza del álgebra (lenguaje, reglas y sus elementos), por otro lado las que son inherentes al propio sujeto, debidas a la complejidad de abstracción y generalización (enfocándose en las acciones de abstracción del estudiante y viendo el álgebra como el lenguaje general de la matemática) y por último aquellas que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza” (p.5)*

Debido a que la problemática es amplia y extensa este informe final se preocupó por indagar los errores respecto a la iniciación en el álgebra escolar, cometidos por un grupo seleccionado de estudiantes en una institución del departamento del Valle del Cauca, para lo cual se formuló la siguiente pregunta problematizadora:

***¿Cómo a través de una trayectoria hipotética de aprendizaje se reconocen los errores frecuentes del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión?***

## **1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1 OBJETIVO GENERAL**

Reconocer los errores frecuentes del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión.

### **1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Identificar los errores en el lenguaje algebraico en la introducción al algebra escolar.
- Caracterizar los errores identificados cometidos por los estudiantes del grado 8°

## 2 ANTECEDENTES

En este apartado se ponen en evidencia las posturas, investigaciones, pensamientos y documentos que sirvieron como referencia para orientar la intención de la investigación. Su contribución fue lograr delimitar a investigación a través de bases sólidas en argumentación, se resalta el aporte fundamental de los documentos *“dificultades en el aprendizaje del algebra escolar”* de Castro (2012) y *“una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en el análisis de errores”* de Amador (2016); el primero de estos por presentar una mirada amplia al estado del arte en lo referente al aprendizaje del algebra, y el segundo por presentar la trayectoria hipotética de aprendizaje que fue implementada en la presente investigación.

En el interior del documento se encuentran las posturas de: Castro, Parker y Wagner, Malara y Navarra, Radford, Booth, Manson y Wilder que corresponden a un solo enfoque de abordaje; y luego se encuentra las propuestas de Usiskin, Kieran y por ultimo Drijvers y Hendrikus que establecen como propuestas de tres o cuatro enfoques desde los cuales se debe abordar la enseñanza del algebra escolar; se enfatiza cual es la importancia de estos antecedentes para la investigación

Diversas investigaciones se han realizado referentes a las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra en general, enfocadas en diferentes aspectos como los elementos que lo componen, las reglas que la rigen, problemas de abstracción y generalización del sujeto y otras a las posibles causas del problema, entre los cuales estarían el tipo de enseñanza y el papel del docente en este proceso

(Castro, 2012) (Parker y Wagner, 1993). Para la comprensión del objeto de estudio, es necesario pasar por las posturas más relevantes que ayudaron a fundamentar el interés de la investigación.

Desde la perspectiva de Malara y Navarra (2001) en su investigación, se afirma que:

*“El aprendizaje del álgebra presenta una crisis creciente y establecen dicha crisis en los métodos de enseñanza tradicionales, ya que estos no consideran factores importantes como: la transición del lenguaje natural a un lenguaje formal, la simbolización, la generalización, los problemas psicológicos, sociales, y la forma obsoleta de los docentes enseñar, proponen que se debe hacer una aproximación desde niveles bajos de escolaridad, desarrollando con anterioridad el pensamiento algebraico, evitando así posibles dificultades y obstáculos con el área” (p.24).*

Una opinión similar presenta Radford (2012, citado en castro 2012) quien expresa en su estudio que

*“La enseñanza del álgebra no es una progresión lenta de aprendizaje como instrumento u objeto del pensamiento, por el contrario, se enseña el álgebra como simplificación y mecanismos manipulativos enfatizados en el cálculo, perdiendo características propias del álgebra como el lenguaje, el razonamiento y los pronósticos mediante la construcción de hipótesis” (p.15).*

Estos antecedentes postulan que las metodologías empleadas para la enseñanza del álgebra al guardar relación con un enfoque tradicional, fragmentan los procesos de enseñanza y aprendizaje, con resultados poco significativos y que incrementan las falencias que cometen los estudiantes, por lo tanto, es necesario brindar herramientas y estrategias que contribuyan positivamente a los procesos de enseñanza y aprendizaje que puedan ser de gran provecho para los alumnos.

Booth (1984,citado en Castro, 2012) indica que:

*“la enseñanza se está enfocando de manera errónea, se enseñan un sinnúmero de técnicas de manipulación arbitraria” (p.2)*

Para él, el objetivo principal de la enseñanza del álgebra debería ser el de aprender a representar relaciones generales y procedimientos, permitiéndole al estudiante resolver diferentes tipos de problemas y a partir de estos, desarrollar nuevas relaciones.

Se puede ver entonces, una problemática similar a la expresada por Malara y Navarra y Radford: un enfoque de enseñanza del álgebra errónea y múltiples propuestas para abordar dicho problema, dos direccionadas hacia la enseñanza transitoria del algebra escolar y otra sobre la importancia de enseñar relaciones generales y procedimientos como prioridad.

Manson y Wilder (2005, citado en Castro 2012) por su parte tienen una opinión muy similar a la de Booth sobre cómo se debe abordar el aprendizaje del algebra escolar

*“uno de los caminos correctos para la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar es la generalización, por medio de la cual se puede llegar al aprendizaje del álgebra” (p.9),*

Propuesta que es compartida también en los Estándares Básicos de Competencias (2006) en el Ministerio de educación en Colombia, en estos se especifica que esta generalización debe llevarse a cabo por medio de patrones desde niveles de escolaridad básicos, a fin de que en niveles superiores no cause dificultad alguna.

Otros autores proponen como forma de abordaje tres o cuatro enfoques, Usiskin (1987, citado en Castro 2012) por ejemplo menciona:

*“el álgebra debería trabajarse desde 4 enfoques desde donde se puede desarrollar el aprendizaje del álgebra: la aritmética generalizada, estudio de procedimientos para resolver problemas, estudio de relaciones entre cantidades y estudio de estructuras” (p.3)*

Kieran (1996, citado en Castro 2012) por su parte tiene en cuenta actividades que realizan los estudiantes y propone 3 tipos de tareas: como primera opción de generalizar incluye expresiones de generalización dadas a partir de secuencias o patrones numéricos, ecuaciones con incógnitas que representa la solución a un problema, de segunda opción transformar, que incluye operar directamente con las expresiones polinómicas, resolver ecuaciones y trabajar con ecuaciones equivalentes, y por último tareas globales o de alto nivel haciendo referencia a actividades que usan el álgebra como una herramienta.

Complementando la idea de propuestas de varios enfoques, Drijvers y Hendrikus (2003, citados en Castro 2012) proponen 4 enfoques tales como:

*“El primer enfoque se centra en el álgebra como un medio para resolver problemas. El segundo lo hace en el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables. En tercer lugar, hacen referencia a un enfoque centrado en la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras. Y por último enfoque el lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación” (p.8)*

Vemos que los diferentes enfoques propuestos para abordar la problemática son de manera general muy similares, todos ellos incentivan a cuestionarnos, sobre cuál debe ser la forma más apropiada de enseñar el álgebra escolar, y que esta forma permita un mejor aprendizaje por parte de los estudiantes, cabe resaltar que cada

grupo de estudiantes es diferente, por lo cual todas estas visiones se pueden ver apropiadas según los contextos de la educación.

Todos estos antecedentes muestran la visión de una necesidad de cuestionarnos constantemente sobre la educación, sobre cuál es la forma de evitar ciertas dificultades y como por el contrario fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, este informe final, tuvo en cuenta lo más importante de estas percepciones y las tomó en cuenta para lograr establecer una necesidad específica, en este caso la indagación de los errores en la iniciación al álgebra escolar.

### 3 JUSTIFICACIÓN

La presente investigación, se consolida en primera instancia como requisito para obtener el título de Licenciada en Matemáticas y Física y a partir de intereses personales y profesionales, que permitió pensarse aquellos aspectos que intervienen directamente en el reconocimiento de los errores frecuentes del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado octavo.

En los siguientes párrafos se presentan los motivos por los cuales es necesario fomentar el aprendizaje de las matemáticas; sugerencias desde el Ministerio de Educación Nacional y los lineamientos curriculares sobre cuál sería la forma adecuada de un contexto de aprendizaje y como la educación debe ser pensada desde competencias todo esto a fin de establecer el qué, cómo y por qué de esta investigación.

En la actualidad el aprendizaje de las matemáticas es fundamental, permite desenvolvemos en el diario vivir y comprender la complejidad de la realidad en la que vivimos (Saelices y Gámez, 2016, p.3). Su contribución a la educación no se pone en duda, en la cultura y en la sociedad, en aspectos como las artes plásticas, la ingeniería, la arquitectura, la economía y el comercio, en las últimas décadas su conocimiento se ha considerado esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología (MEN, 2006).

En coherencia con lo anterior, desde lo estipulado por el MEN (2006):

*“El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar –no sólo físico, sino ante todo sociocultural– desde donde se construye sentido y significado para las actividades*

*y los contenidos matemáticos, y, por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas” (p.70).*

Esto quiere decir que, las matemáticas en su esencia permiten que exista una conexión con la disciplina y el contexto cotidiano, es decir, con la vida misma.

Asimismo, es importante destacar que el álgebra es una de las ramas más importantes de las matemáticas (Castro, 2012, p.1), permite describir situaciones reales en términos puramente matemáticos, es decir, maneja el lenguaje algebraico, y el tener un buen manejo de este lenguaje favorece la abstracción, el razonamiento y el desarrollo de competencias matemáticas (Saelices y Gámez, 2016); sin embargo, distintas investigaciones que se han preocupado por el aprendizaje del álgebra escolar, han revelado que es esta, una de las áreas que más se les dificulta a los estudiantes en su comprensión y desarrollo.

El fin no es solo saber matemáticas sino también saber hacer, en pocas palabras, formar personas “matemáticamente competentes”; y que sus conocimientos adquiridos durante la escolaridad le permitan entender y desenvolverse en situaciones de la vida real. Por tal razón, desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de competencias, se piensa que la educación en Colombia debe ser pensada desde las competencias, la razón misma por la que en las aulas de clase se forme estudiantes con sentidos prácticos para su vida y para una eficacia y eficiencia en sociedad.

Después de ver este panorama, es necesario que los docentes de secundaria tengan conocimientos sobre cómo aprenden los estudiantes, tener en cuenta los

criterios propuestos por el MEN y disponer de herramientas que ayuden y motiven de manera adecuada en el aprendizaje del álgebra.

En consecuencia, este trabajo tiene como finalidad reconocer los errores frecuentes del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8°; información que se validó partir de un pre dialogo y observaciones directas en el campo de estudio. Claramente, no se pueden dejar de lado aquellos antecedentes investigativos que proporcionan tensiones o aportes a la presente investigación.

Por todo ello, resulta pertinente plantear una investigación que responda a uno de los cuestionamientos que surgieron durante la formación profesional en el área de Matemáticas y Física, que llevaron al interés por una de las necesidades del área de matemáticas que emergen en grado 8°.

## 4 MARCO TEÓRICO

En este apartado se dan a conocer los referentes teóricos claves para el desarrollo de la investigación, este se construyó a partir de las necesidades expuestas en el planteamiento del problema y de la indagación documental, permitiendo tomar postura y establecer líneas transcendentales que direccionaron el trabajo.

El presente marco teórico se encuentra entonces dividido en dos líneas importantes: la primera hace referencia a la herramienta mediante la cual se podrá identificar y caracterizar los errores cometidos por los estudiantes de la institución: la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Amador, 2015) y como segunda línea al concepto de interés a partir del cual se vivenció y estableció la problemática, el lenguaje algebraico (Morales, 2017).

La trayectoria hipotética de aprendizaje se toma como una herramienta mediadora con la cual se logró la identificación y caracterización de los errores cometidos por los estudiantes, esta se encuentra diseñada y estructurada desde la mirada de María Victoria Amador Saelices (2015), y su propuesta coincide con el horizonte que se trazó en esta investigación de acuerdo con la necesidad evidenciada.

Adicionalmente el lenguaje algebraico, específicamente la dificultad en el aprendizaje en su iniciación es tomado como una de las líneas que direccionan esta investigación, esto debido a un interés personal y la identificación de una necesidad vivenciada y registrada documentalmente por diferentes investigadores de la educación.

Algunos de los puntos importantes resaltados por investigadores como consecuencias de la dificultad de aprender álgebra son: la falta de razonamiento, la falta de abstracción y el no poder resolver problemas matemáticos más complejos; convirtiendo el área como un objeto de investigación importante.

Estas dos líneas, como se dijo anteriormente, formaron parte crucial para la investigación, debido a que conjuntamente aportaron todos los argumentos conceptuales y teóricos para su correcto desarrollo y finalización.

#### **4.1 LA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE.**

La noción de Trayectoria Hipotética De Aprendizaje (THA) es propuesta inicialmente por Martín Simón en 1995, como respuesta a la necesidad de conjugar dos enfoques, el tradicional con el constructivista. La intención inicial es proponer una hipótesis sobre cómo pueden ir aprendiendo los estudiantes un contenido matemático, a partir de los conceptos previos de los alumnos y la experiencia del docente, para luego proponer tareas que logren fomentar el aprendizaje de manera eficaz (Saelices y Gámez, 2016)

Según Gómez y Lupiáñez (2007):

*“Mientras que el objetivo del profesor para el aprendizaje de los estudiantes proporciona una dirección para las otras componentes, la selección de las tareas de aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes son interdependientes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas” (p.2).*

Así que, el diseñar y aplicar una trayectoria radica en dar a conocer la relación existente entre la investigación y los procesos de enseñanza, apoyándose inicialmente en hipótesis de aprendizaje y su relación con las actividades de instrucción y en un segundo momento, tener la oportunidad de retroalimentar este proceso que es llamado por Simón como un ciclo de enseñanza.

Existen muchas interpretaciones que se le dan a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, por una parte se considera una herramienta valiosa a la hora de planeación de clases, donde las tareas se convierten en parte fundamental de la instrucción (Simon y Tzur, 2004), también es considerada una herramienta propia de investigación (Sarama y Clements, 2004; Lesh y Yoon, 2004) y otros asumen la compatibilidad de ambas (Stee, 2004; Gravemeijer, 2004).

El presente informe final tomó como herramienta el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje ya realizado, esto debido a la concordancia de los temas de interés a investigar y por ser una forma interesante de direccionar el aprendizaje de los estudiantes, en consecuencia, compartimos con María Victoria Amador (2015) creadora del diseño la compatibilidad entre ser herramienta de planeación y ser de investigación.

Esta trayectoria hipotética de aprendizaje se desarrolló a partir de tres elementos fundamentales: objetivos de aprendizaje, las tareas y las hipótesis sobre cómo se desarrolla el aprendizaje en los estudiantes.

### **Objetivo de aprendizaje:**

Conocer el lenguaje algebraico y utilizar las expresiones algebraicas para describir relaciones numéricas y geométricas utilizando un vocabulario adecuado. (Amador, 2015).

**Tareas:** Trayectoria hipotética de aprendizaje compuesta por trece actividades, separadas en 3 grupos: el primer grupo de motivación, el segundo de trabajo individual y el último grupo de repaso, direccionadas a contextos específicos (ver anexo F).

**Las hipótesis sobre cómo se desarrolla el aprendizaje:** estas hipótesis fueron planteadas a partir de la aplicación del test final (ver anexo G), el cual se construyó a partir de una investigación previa realizada por Hidalgo (2002), en la cual se establecen algunas clasificaciones de errores.

***H1** Los alumnos tienen dificultades en el uso de las letras como variables, ofreciendo respuestas numéricas concretas y buscando un resultado numérico. Es necesario mostrarles la necesidad del uso de letras para designar valores desconocidos o indeterminados y la potencia del lenguaje algebraico como una herramienta de generalización.*

***H2** Los alumnos tienen dificultades relacionadas con el manejo de terminología del lenguaje natural referido a operaciones matemáticas. Es necesario trabajar y reforzar el vocabulario aritmético en el lenguaje usual.*

***H3** Los alumnos tienen dificultades relacionadas con la aplicación de fórmulas geométricas básicas, como área y perímetro de cuadrados, rectángulos y triángulos. Es necesario trabajar y reforzar las formulas geométricas básicas.*

***H4** Los alumnos tienen dificultades a la hora de operar, en particular, no escriben los paréntesis cuando son necesarios. Es necesario que comprendan la diferencia entre usar y no usar paréntesis.” (Amador p 23-24)*

En este informe final se aplicó el diseño instruccional sin modificaciones en el grado 8º del Colegio Liceo Campestre la Misión, este se llevó a cabo de manera virtual

debido a la emergencia presentada por el COVID-19, finalizada la aplicación se realiza en test final (ver anexo G), a partir del cual se realiza la identificación de errores y por último el análisis.

## **4.2 EL LENGUAJE ALGEBRAICO: CONCEPCIONES Y PERSPECTIVAS**

El lenguaje, desde una mirada y panorama general, es concebido como la facultad humana para expresarse. Es el mismo lenguaje el que abarca todas las dimensiones del ser humano y promueve una transversalidad y puntos de encuentro con las disciplinas diversas que existen en los escenarios académicos y sociales, el lenguaje también está presente en las matemáticas y en particular en el álgebra, aquí se mencionan desde el lenguaje algebraico.

Desde la perspectiva de Morales (2017):

*“El lenguaje algebraico es el sistema de signos completamente simbólico que utiliza las matemáticas para expresar informaciones y operar sobre ellas con precisión y rigor a través de unas reglas y una lógica interna particulares, caracterizado por la generalización que le da el uso de la letra y por el significado que asume el signo “=”. Por ende, el conocimiento de este lenguaje conlleva la comprensión sintáctica y semántica de los signos, símbolos y reglas que comprende este sistema para así asegurar el uso significativo de las mismas” (p.24)*

Cabe anotar que el lenguaje algebraico comprende dos aspectos: el primero que es conocido como la semántica, que convoca al significado o al contenido del símbolo y esto nos lleva a cuestionarnos sobre cómo este es entendido por el sujeto y por otro

lado, la sintaxis que es lo que direcciona las posibles combinaciones de los diferentes símbolos.

Morales (2017) también argumenta que:

*“(...) una de las dificultades que presentan los estudiantes al utilizar los símbolos es que, algunas veces, su representación corresponde a un único significado, mientras que el significado puede tener múltiples representaciones y sentidos según el contexto en el que se encuentre. Además, cuando se trata de interpretar un enunciado matemático que viene dado en lenguaje natural dicha expresión debe ser primero comprendida, es decir, encontrar su significado” (p.24).*

Finalmente, desde la sugerencia de Ruiz (2016) se motiva a que

*“(...) en la enseñanza algebraica se debe lograr una modificación y ampliación del uso del lenguaje simbólico respecto a lo anterior, buscando una estructuración conceptual arraigada que le permita a los estudiantes interpretar más adelante los saberes propios del área ya que de este grado en adelante cada uno de los núcleos temáticos de la matemática usan el lenguaje algebraico como base mínima de conocimiento para la comprensión de nuevos contenidos, se asume que si los estudiantes han avanzado hasta dichos grados es porque han alcanzado los estándares para ser promovidos, así que ya los maestros no se verán en la tarea de detenerse a explicar el significado simbólico de sus temáticas sino sólo el significado conceptual” (p. 28).*

Sabemos que las dificultades en el área de algebra como un lenguaje propio de las matemáticas son innumerables, sin embargo, nuestro interés se enfocó en los errores posibles a cometer por estudiantes de 8º grado en su iniciación al lenguaje algebraico.

### 4.2.1 ERRORES

Desde la apreciación de Socas (1996) un error cometido por parte de los alumnos debe ser entendido como una información de las dificultades del álgebra que requiere un esfuerzo preciso, preocupándose por dos direcciones la primera: ¿Qué lo llevó a cometer este error? y en una segunda dirección cómo lograr prevenir que se cometan estos errores.

Gomez y Lupiañez (2007) por su parte asocian las capacidades con los errores cometidos por los estudiantes y las dificultades afirmando:

*“Son las dos caras de una misma moneda. Cuando afirmamos que un escolar tiene la capacidad para...”, estamos mirando una cara de la moneda. La otra cara corresponde a la afirmación el escolar tiene una dificultad al...”. Tanto la capacidad, como la dificultad se evidencian cuando el escolar aborda una tarea. Decimos que el escolar tiene una dificultad, cuando incurre en un error. Si resuelve la tarea apropiadamente, afirmamos que esto puede ser evidencia de que ha desarrollado las capacidades correspondientes. (p.93)*

Esta conexión entre capacidades y errores, entendiendo los errores como manifestación de las dificultades, fue la base para el análisis y la retroalimentación de la trayectoria hipotética de aprendizaje tomada para esta investigación, sin embargo, en este informe final no se usó el concepto de capacidades para el análisis, siendo estrictamente una identificación y caracterización de los errores.

Autores como Socas (2011) clasifican errores en la iniciación al álgebra estudiando las dificultades desde dos perspectivas: los errores con origen en un obstáculo y los errores que tienen su origen en una ausencia de significado; por su parte Hidalgo (2002) manifiesta la existencia de errores en el aprendizaje del álgebra que son repetitivos y que se pueden clasificar en 3 bloques: los errores en la

equivalencia entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, el bloque 2 corresponde a los errores respecto al manejo de las expresiones algebraicas y por último en el bloque 3 los relacionados con la resolución de problemas, esta clasificación le fue obtenido por medio de su investigación en el instituto de Badajoz a 64 estudiantes de 2º E.S.O.

Esta última referencia, fue la investigación que ayudó a María Victoria Amador diseñadora de la trayectoria hipotética de aprendizaje a realizar el test 1. Este test 1 es a partir del cual ella identifica y genera una lista de los errores posibles a partir de las respuestas de los alumnos (ver **FIGURA 1**)

E1: No asocia *aumentar* con la operación de sumar.

E1.1: Asocia *aumentar* con la operación de multiplicar.

E1.2: Asocia *aumentar* con la operación de elevar a cierta potencia.

E1.3: Asocia *aumentar* con el signo *más* pero no con la operación de sumar.

E2: No utiliza letras para designar cantidades indeterminadas.

E3: Ignora parte de la expresión del lenguaje natural.

E4: No asocia *disminuir* con la operación de restar.

E4.1: Asocia *disminuir* con la operación de dividir.

E4.2: Asocia *disminuir* con la operación de elevar a potencias negativas.

E4.3: Asocia *disminuir* con el signo *menos* pero no con la operación de restar.

E4.4: Asocia *disminuir* con una raíz.

E4.5: Asocia *disminuir* con elevar.

E5: Proporciona resultados numéricos.

E6: No utiliza operaciones aritméticas.

E7: Escribe cualquier expresión algebraica en forma de ecuación.

E8: No asocia *producto* con la operación de multiplicar.

E8.1: Asocia el producto con la suma.

E8.2: Asocia el producto con el cociente.

E9: Asocia *y* con la operación de sumar.

- E10: No utiliza el producto como una operación binaria.
- E11: No asocia *dentro de* a la operación de sumar.
  - E11.1: Asocia *dentro de* a la operación de multiplicar.
  - E11.2: Asocia *dentro de* a la operación de elevar.
  - E11.3: Asocia *dentro de* a la operación de restar.
- E12: Añade letras que no deben estar.
- E13: Cambia la letra dada por otra.
- E14: No asocia *diferencia* con la operación de restar.
  - E14.1: Asocia *diferencia* con la operación de sumar.
  - E14.2: Asocia *diferencia* con el signo *menos* pero no con la operación de restar.
  - E14.3: Asocia *diferencia* con la operación de dividir.
  - E14.4: Asocia *diferencia* con la operación de multiplicar.
  - E14.5: Utiliza la palabra *diferencia* como equivalente a *distinto*.
- E15: Cambia el orden de minuendo y sustraendo en una diferencia.
- E16: No asocia *cinco veces* con multiplicar por cinco.
  - E16.1: Asocia *cinco veces* con potencia.
  - E16.2: Asocia *cinco veces* con otras operaciones.
- E17: No asocia *número par* a multiplicar por dos.
  - E17.1: Asocia *número par* a elevar al cuadrado.
  - E17.2: Asocia *número par* a sumar dos.
- E18: Escribe la cuarta parte de un número como  $1/4$ .
- E19: No asocia el cubo con la potencia tres.
  - E19.1: Asocia el cubo de un número con el cuadrado de un número.
  - E19.2: Asocia el cubo con otras operaciones.
- E20: No asocia *la cuarta parte de un número* con dividir entre cuatro.
  - E20.1: Asocia *la cuarta parte* con la potencia cuarta.
  - E20.2: Asocia *la cuarta parte* con otras operaciones.
- E21: Cambia la información dada.
- E22: No escribe correctamente dos números consecutivos.
  - E22.1: Toma *números consecutivos* como dos números iguales.
  - E22.2: Toma *números consecutivos* con otras operaciones.
- E23: Concatena operaciones numéricas de forma equivocada.
- E24: No escribe *el doble de un número* de manera correcta.
  - E24.1: Identifica *el doble de un número* con el número dos.
  - E24.2: Identifica *el doble de un número* con el cuadrado de ese número.
  - E24.3: Identifica *el doble de un número* con otras operaciones.

- E25: No escribe *el triple de un número* de manera correcta.
- E25.1: Identifica *el triple de un número* con el número tres.
  - E25.2: Identifica *el triple de un número* con el cubo del número.
  - E25.3: Identifica *el triple de un número* con otras operaciones.
- E26: Opera mal.
- E27: Escribe el perímetro de un cuadrado incorrectamente.
- E27.1: Multiplica los cuatro lados del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.2: Escribe el área del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.3: Escribe dos por el lado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.4: Escribe otras operaciones para calcular el perímetro de un cuadrado.
- E28: No escribe paréntesis en productos en los que algún factor es una suma.
- E29: Escribe incorrectamente la fórmula del área de un rectángulo.
- E29.1: Escribe fórmulas sin sentido aparente en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.2: Escribe el área del triángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.3: Escribe el perímetro del rectángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
- E30: Escribe el perímetro cuando le preguntan por el área.
- E31: No escribe correctamente *el siguiente de un número*.
- E31.1: Toma el número y su siguiente como iguales.
  - E31.2: Toma *el siguiente de un número* como una variable independiente.
  - E31.3: Comete otros errores al escribir *el siguiente de un número*.
- E32: Hace una descripción gráfica equivocada de una situación geométrica descrita en el lenguaje natural.
- E33: Escribe incorrectamente el perímetro de un cuadrado a partir de su representación.
- E34: Escribe incorrectamente el área de un rectángulo a partir de su representación gráfica.

Figura 1. Listado de errores tomada de la tesis de maestría de María Victoria Amador (2015)

Este listado de errores, es la guía a partir de la cual se logró inicialmente identificar los errores cometidos por los estudiantes en esta investigación, permitiendo no solo una identificación directa de los mismos si no también un tipo de clasificación y caracterización. Debido a que la trayectoria ya tenía un ciclo completo de enseñanza, es decir, ya recibió retroalimentación, se esperó que en esta aplicación no se presentaran gran cantidad de errores por parte de los estudiantes.

## 5 METODOLOGÍA

En este capítulo del informe se presenta como se hizo la investigación, que herramientas se tuvieron en cuenta para su completo desarrollo y finalización, con la intención de describir los objetivos del ejercicio y los métodos que se utilizaron para alcanzar estos objetivos.

Toda la metodología de este informe final se encuentra dividido específicamente en dos momentos principales: Generalidades de la investigación y caracterización de la población y la muestra que fue elegida para el estudio, y como segundo momento los instrumentos y la forma de recolección de información.

Dentro de este capítulo, se encuentra en primer momento las generalidades de la investigación y caracterización de la población y la muestra, donde se pretende dar a conocer las características generales de la población y la muestra elegida para la investigación, y la metodología a la cual se ligó esta investigación; adicional a esto dar a conocer el proceso que se llevó a cabo para lograr realizar el estudio en esta institución y el grupo de octavo específicamente, todo esto con el fin de ubicar y establecer un contexto tanto social como geográfico.

En el segundo momento: instrumentos y la forma de recolección de información, se pretende dar a conocer a partir de que instrumentos fue obtenida la información relevante para la investigación y de qué forma, especificando cada uno de los instrumentos y los momentos más importantes que fueron claves para el desarrollo y obtención de información.

Para dar más claridad a este capítulo, se explicará cada uno de estos momentos a mayor profundidad dentro del texto, recordando que estos dos momentos fueron definitivos para el debido proceso del desarrollo de una investigación: su planeación, su ejecución y su finalización.

## **5.1 GENERALIDADES DE LA INVESTIGACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN Y LA MUESTRA.**

La planeación de toda la investigación inicia a partir del ejercicio docente; de vivenciar la necesidad de realizar una investigación referente al aprendizaje del álgebra, y más específicamente de su iniciación, esto, debido a la preocupación referente a las dificultades que esta área ha causado en los estudiantes; por lo cual, se procede a tomar la decisión de establecer una problemática, unos objetivos y la elección de una herramienta que permitiera lograr lo establecido en los objetivos y respondiese a la problemática.

Como ya se mencionó en capítulos anteriores, la problemática principal a trabajar en este trabajo final de investigación corresponde entonces a cuestionarnos

***¿Cómo a través de una trayectoria hipotética de aprendizaje se reconocen los errores frecuentes del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión?***

Donde se evidencia que la herramienta de elección corresponde a una trayectoria hipotética de aprendizaje donde el objetivo general se establece como el reconocimiento de los errores que más comenten los estudiantes a la hora de iniciar el

lenguaje algebraico, también se ve en la pregunta problema la elección de la población que en este caso es el Colegio Liceo Campestre la Misión y la muestra correspondiente al grupo de grado octavo, cabe resaltar que algunos de los investigadores en educación como se mencionó en los antecedentes como Malara y Navarra (2001) afirman que el aprendizaje del algebra debe iniciarse desde grados pequeños de escolaridad, sin embargo, debido al proceso y la metodología de la institución, se toma la postura de una iniciación al algebra en el grado octavo, motivo por el cual la investigación se realizó específicamente en este grupo.

Se realizó inicialmente la solicitud a María Victoria Amador mediante correo electrónico para el envío y uso de la trayectoria para esta investigación (ver anexo A), al cual su respuesta fue positiva; de igual forma se propone a los directivos del colegio ser el plantel para esta investigación, teniendo en cuenta que es donde se ejerce como docente y adicional a esto es donde se visualizó la necesidad (ver anexo B).

Se decide que la investigación sea de tipo cualitativa, según Bejarano (2016)

*“La investigación Cualitativa se centra en comprender y profundizar los fenómenos, analizándolos desde el punto de vista de los participantes en su ambiente y en relación con los aspectos que los rodean. Normalmente es escogido cuando se busca comprender la perspectiva de individuos o grupos de personas a los que se investigará, acerca de los sucesos que los rodean, ahondar en sus experiencias, opiniones, conociendo de esta forma cómo subjetivamente perciben su realidad.” (p, 3)*

Esta metodología tiene entonces como finalidad comprender la estructura de la realidad que es afectada por factores sociales y culturales. La idea es aportar a los problemas que ocurren en lugares naturales y no de corte teórico; es entonces

recolectar datos, analizarlos y tomar decisiones en pro de la necesidad evidenciada. Regularmente este tipo de metodología se emplea en contextos educativos y sociales.

El enfoque al cual orientamos la investigación es el descriptivo y que según Cazau (2006):

*“(…) se seleccionan una serie de cuestiones, conceptos o variables y se mide cada una de ellas independientemente de las otras, con el fin, precisamente, de describirlas. Estos estudios buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno” (p.27),*

Es decir, este enfoque de investigación permite ser un poco más detallados con toda la información, profundizando en las generalidades que se presentaron y teniendo en cuenta en lo posible la mayor cantidad de información recolectada, a fin de tener un panorama amplio.

Después de tener el Aval para continuar la investigación en la institución, el uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje y el enfoque cualitativo que tendría la investigación fue necesario la caracterización de la población y la muestra, esto con el fin de establecer un contexto específico en el cual se desarrolló toda la investigación.

### **5.1.1 CARACTERÍSTICAS DEL LICEO CAMPESTRE LA MISIÓN Y EL GRADO OCTAVO**

La institución Liceo Campestre la Misión ubicado en el km 1 vía a Dapa, colinas de arroyo hondo por la antigua vía Cali a Yumbo, se caracteriza principalmente por enfocar su educación en la formación de personas integrales, que se apropien de todo lo que los rodea, enseñando principalmente el amor como uno de los valores más importantes en todos los ámbitos de la vida, su metodología de enseñanza es una

pedagogía progresiva es decir una educación basada en procesos, donde es muy importante la autonomía y cuestionamientos de los estudiantes.

El Liceo Campestre La Misión cuenta con niveles de preescolar, básica y media. Cada grado cuenta con un salón de clases de máximo 23 estudiantes y como su nombre lo indica es completamente campestre, lo que representa un agradable ambiente para el desarrollo de las clases; en esta ocasión como consecuencia de la pandemia, iniciada el mes de marzo del 2020 COVID-19 las clases fueron completamente virtuales y todos los procesos académicos de la institución se re-estructuraron a modo de beneficiar lo más posible tanto a cuerpo estudiantil como cuerpo docente.

Esta investigación se realizó específicamente con el grado octavo, que estaba compuesto por 16 estudiantes de los cuales 9 son niños y 7 niñas; entre las edades de 12 y 13 años. Los núcleos familiares son de tipo funcional en su mayoría y en su minoría de tipo disfuncional. El estrato económico de las familias es cuatro (4) y cinco (5) y sus viviendas están ubicadas en el barrio la Flora y sus alrededores, algunos residen en Dapa y Yumbo. El grupo de estudiantes poseen buenas notas en casi todas las áreas y sus comportamientos facilitan el proceso de investigación.

Partiendo de toda esta elección inicial: la herramienta y la caracterización de nuestra población y muestra, fue posible continuar a la recolección de información relacionada con el objetivo propio de investigación, pues fue a partir de aquí que se concluyeron y analizaron detalles específicos relacionadas con el conocimiento de los estudiantes respecto a la iniciación en el álgebra.

## 5.2 INSTRUMENTOS Y FORMA DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Para lograr cumplir con el objetivo de la investigación, no basta con la caracterización general del grado octavo, fue necesario la implementación de otras herramientas que dieran cuenta del estado cognitivo de los estudiantes, además, de sus actitudes por el área de las matemáticas.

Se estableció con los directivos de la institución la realización de 4 sesiones de clases cada una de dos horas con el fin de implementar la trayectoria hipotética de aprendizaje, tratando en lo posible de no interrumpir ni las clases de los demás docentes ni de los estudiantes. Estas 4 sesiones se dividieron en 3 etapas, la primera corresponde a un tiempo de dialogo, donde la idea fue conocer y observar los gustos, las predisposiciones y las opiniones de los estudiantes respecto a las matemáticas y el álgebra en particular; como segunda etapa, la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y como ultima la evaluación o test final, a partir del cual se pudo reconocer y analizar los errores cometidos por los estudiantes.

La estructuración de las etapas y los diseños de los instrumentos de recolección de información guardan coherencia con el objetivo general y las características propias de la investigación. En este orden de ideas, la descripción de cada una de las etapas es:

### 5.2.1 ETAPA 1 : DIALOGO Y OBSERVACIÓN.

Como se mencionó anteriormente esta etapa corresponde a un tiempo de dialogo, de observación; donde lo principal fue conocer sus posturas frente a las matemáticas y al algebra; para ello se tomó una hora de las 4 sesiones de clases para romper el hielo, en donde como docente mediadora, se procede a realizar una breve presentación de lo que se realizará en las próximas clases y a cuestionarlos de manera general sobre su apreciación hacia las clases de matemáticas, para lo cual se usaron unas preguntas guías ver figura 2 , (ver anexo E).

1. ¿Cómo te parece la clase de matemáticas?
2. ¿Cuáles son los ejercicios más difíciles de la clase de matemáticas?
3. ¿Qué es para ti el lenguaje algebraico?
4. ¿Qué piensas sobre la fusión entre letras y números para actividades matemáticas?
5. ¿Cómo es el ambiente en el salón de clases?
6. ¿Cómo manejas los tiempos en las clases virtuales y especialmente en la clase de matemáticas?
7. ¿Te parece que lo que te enseñas en matemáticas lo aplicas en tu vida diaria?  
Sí – No y ¿por qué?

*Figura 2. Lista de preguntas guías para conocer la postura de los estudiantes frente al área de matemáticas y álgebra*

Estas preguntas no fueron obligatorias ni fueron usadas en forma de entrevista, fue una forma de obtener las percepciones de los estudiantes respecto al tema nuevo en el cual se les pensaba introducir.

Aprovechando este mismo espacio y tiempo, se aplicaron dos rejillas de observación, una enfocada en el proceso de enseñanza y aprendizaje y otra preocupada por la interacción entre los estudiantes (ver figura 3 y 4).

|                                                                                                   |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Nombre de la institución:</b>                                                                  |  |
| <b>Jornada:</b>                                                                                   |  |
| <b>Grado:</b>                                                                                     |  |
| <b>N° de estudiantes:</b>                                                                         |  |
| <b>N° de niños:</b>                                                                               |  |
| <b>N° de niñas:</b>                                                                               |  |
| <b>Edades:</b>                                                                                    |  |
| <b>Estrato socioeconómico:</b>                                                                    |  |
| <b>¿Cómo propicia espacios de participación de los estudiantes en el aula de clase?</b>           |  |
| <b>¿Cuáles actividades emplea el docente para la iniciación del lenguaje algebraico en clase?</b> |  |

*Figura 3. Rejilla de observación proceso de enseñanza y aprendizaje*

|                                                                                                     |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Nombre de la institución:</b>                                                                    |  |
| <b>Jornada:</b>                                                                                     |  |
| <b>Grado:</b>                                                                                       |  |
| <b>N° de estudiantes:</b>                                                                           |  |
| <b>N° de niños:</b>                                                                                 |  |
| <b>N° de niñas:</b>                                                                                 |  |
| <b>Edades:</b>                                                                                      |  |
| <b>Estrato socioeconómico:</b>                                                                      |  |
| <b>¿Cómo se dirige un estudiante a otro?</b>                                                        |  |
| <b>¿Los estudiantes respetan la participación de sus compañeros?</b>                                |  |
| <b>El vocabulario empleado por los estudiantes ¿Es acorde a su edad?</b>                            |  |
| <b>En caso de que un estudiante no entienda la consigna ¿Algún estudiante procede a explicarle?</b> |  |
| <b>¿Los estudiantes califican sus intervenciones entre sí?</b>                                      |  |

*Figura 4. Rejilla de observación interacción entre estudiantes*

Según Ruiz y Velasco (2017):

*“Observación directa: Es una técnica o procedimiento práctico que permite identificar, recolectar y validar la información del campo de estudio. La información que se obtiene es de primera mano, el instrumento a utilizar en nuestra investigación es: los registros de observación.*

*Observación participante: Técnica que le permite al investigador ser un sujeto activo en la investigación” (p.47)*

En este caso el objetivo de la observación corresponde a identificar las percepciones arraigadas en los estudiantes referentes a la iniciación al álgebra y las clases de matemáticas, este proceso de observación resultó fundamental a fin de cumplir el objetivo final de toda la investigación; brindando el punto de partida para el desarrollo de la investigación.

De esta primera etapa se observó que los estudiantes tienen una percepción negativa frente al álgebra, es evidente el miedo que le tienen a la transición de las matemáticas numéricas a unas algebraicas, donde el uso de variables es algo significativo, este miedo viene muy arraigado a la percepción compartida por padres, hermanos mayores y amigos que ya cursaron el área y que por diferentes motivos no tuvieron una experiencia satisfactoria con ella.

Respecto a la recolección de información por medio de las preguntas guías algunos estudiantes consideran las matemáticas como una de las áreas menos didácticas y agradables, también expresaron que es muy difícil de visualizar y aplicar en la vida real de la forma en como es propuesta por los docentes, respecto al álgebra la definen como una rama de las matemáticas que combina letras y números al mismo tiempo, sin tener conciencia de lo trascendental de esto, y como última observación se encontraban un poco frustrados por ver clases del área que para ellos es más complicada por medio virtual, ya que las horas eran bastante extensas frente a un computador y se convirtió en algo tedioso la comprensión del área como tal por medio de una pantalla.

### **5.2.2 ETAPA 2: APLICACIÓN DE LA TRAYECTORIA HIPOTETICA DE APRENDIZAJE Y TEST FINAL.**

En este trabajo de investigación se aplicó la trayectoria hipotética de aprendizaje propuesta por Amador (2015), con el objetivo principal de reconocer los errores frecuentes empleados por los estudiantes en el momento de iniciar el lenguaje algebraico. Para dicha aplicación se tomaron específicamente 2 sesiones de clase, de 2 horas cada una, más la hora restante de la etapa 1: Dialogo y observación.

Esta aplicación se encuentra dividida en 3 momentos: el primer momento corresponde a las actividades de motivación, el segundo momento a las actividades de individualidad y apoyo colectivo entre estudiantes, y el tercer momento corresponde a actividades de repaso y profundización (ver anexo F), finalizando estos tres momentos, se procedió a la aplicación del test final (ver anexo G), a partir del cual se identificaron y caracterizaron los errores convirtiéndose en pieza clave para el análisis final.

Para mayor claridad de cada uno de los momentos de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la aplicación del test final, caracterizaremos cada uno de los momentos:

Se inicia con las actividades de motivación, que se caracterizan por ser completamente guiadas por la docente y por ser presentados en forma de juegos. Estas actividades de motivación corresponden específicamente a 3 actividades: juegos, ejemplos y ejercicios guiados (ver figura 5).

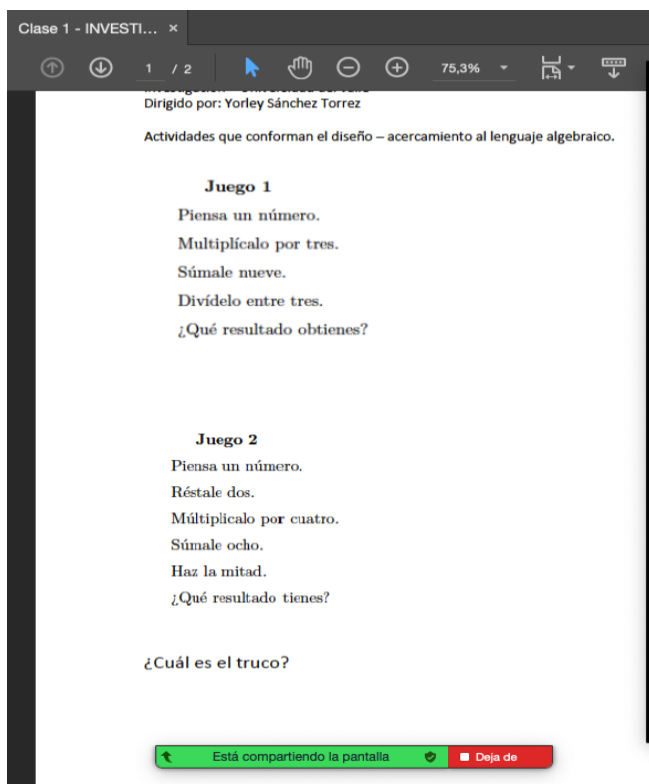


Figura 5. Aplicación del momento 1 de la trayectoria

**Actividad 1:** Corresponde a las actividades de “*adivina que número estoy pensando*” realizado a partir de unas operaciones consecutivas específicas, donde los estudiantes se cuestionaron sobre lo que realmente pasaba implícitamente con los enunciados de este juego y como estos permitían adivinar el número que pensó alguno de sus compañeros.

**Actividad 2:** motivación mediante ejemplos, corresponden a la explicación dada por la docente, especificando lo que es el lenguaje algebraico, y brindando algunos ejemplos.

Por último, **la actividad 3:** correspondiente a los ejercicios guiados, corresponden entonces a la invitación de realizarlos por si solos como estudiantes, para al final corroborar con la explicación de la docente.

El segundo momento de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje, corresponde al trabajo individual y colectivo entre estudiantes, donde la docente solo es un ente observador de las diferentes conversaciones y aportes entre el grupo, este momento se conformaba por 6 actividades que se direccionaban en diferentes intereses al aprendizaje del álgebra:

**Actividad 4:** Corresponde a la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, esto por medio de actividades de selección múltiple, donde se les daba el enunciado y ellos debían elegir la expresión algebraica correcta.

**Actividad 5:** Al igual que en la actividad 4 se enfoca en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, en este caso, se realiza a partir de un contexto.

**Actividad 6:** Bingo algebraico, esta actividad, lastimosamente debido a la virtualidad de las clases no se logró realizar, se trataron de buscar estrategias para la aplicación del mismo, pero no se logró.

**Actividad 7:** Corresponde a la explicación del valor numérico de una expresión algebraica, se hace por medio de una pequeña intervención por parte de la docente, con un ejemplo claro y preciso, para luego proponerles un ejercicio específico.

**Actividad 8:** Álgebra para generalizar, en esta actividad los estudiantes deben buscar el término faltante a partir de reconocer el patrón numérico.

**Actividad 9:** Contestar preguntas con ayuda del álgebra, en esta actividad se les propone a los estudiantes diferentes ejercicios con un contexto y que con ayuda del álgebra podrían resolverlo.

Para el último momento de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje se proponen actividades de repaso, donde se esperó que los estudiantes profundizaran por su cuenta, este último momento de la aplicación se encuentra conformado exactamente por 3 actividades:

**Actividad 10:** Traducción de enunciados al lenguaje algebraico

**Actividad 11:** Ejemplos de problemas – más complejos

**Actividad 12:** Taller de problemas.

Como se mencionó anteriormente finalizada la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje, los estudiantes realizaron el test final (ver anexo G), este a diferencia de toda las actividades de la trayectoria, debían realizarse completamente individual y sin apoyo de la docente, el consolidado de estas respuestas fue enviado vía correo electrónico, finalizando así la recolección de información a partir de la cual se realizó el análisis final de esta investigación (ver anexo H).

Los diferentes momentos de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje, permitieron diferentes escenarios de observación y caracterización. El momento de las actividades de motivación, los estudiantes se mostraron entretenidos, asombrados y motivados a descubrir cuál era el truco del juego, se mostraron participativos, opinando sobre cuál era posiblemente la respuesta a sus inquietudes, y como, esto podría funcionar para otras actividades; Al descubrir que todo implícitamente era algebra, hizo que las actividades llamaran mucho más su atención, causando en ellos la curiosidad de querer saber más. Para el segundo momento se

evidenció la interacción entre todos, al ser un grupo pequeño, el manejo del micrófono fue adecuado y se podría decir de manera general que todo el grupo participó y resolvió dudas, para el último y tercer momento los estudiantes se mostraron interesados por profundizar más lo que ya habían aprendido, el indagar por su cuenta fue una de sus acciones más fuertes para su conocimiento.

## 6 ANÁLISIS

En este capítulo se realizó el análisis correspondiente a toda la información recolectada a partir de la caracterización de la institución y el grado octavo, la observación, la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y el test final, teniendo en cuenta los contextos donde se desarrolló todo.

Este capítulo está dividido en dos apartados: el primero corresponde a los resultados obtenidos a partir de la caracterización de la población y la muestra, y la información obtenida a partir de la observación; En este primer apartado se evidencia un análisis que responde a identificar variables contextuales, que podrían intervenir y/o afectar el aprendizaje de los estudiantes a pesar de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje; y como segundo apartado los resultados obtenidos a partir del test final, siendo este un análisis más enfocado hacia los errores cometidos por los estudiantes en la aplicación del test final, en este análisis se pasará punto por punto identificando y caracterizando cada error cometido, argumentado desde Amador (2015)

Ambos resultados ayudan a cumplir con el objetivo principal de la investigación, corroborando que responde a una necesidad vivenciada en el aula de clases, y que promete fortalecer el sector educativo en la iniciación al álgebra.

## 6.1 RESULTADOS CONTEXTUALES

A partir de la información recolectada por medio de la observación, las rejillas y la aplicación de trayectoria hipotética de aprendizaje se pudieron determinar puntos claves que de alguna forma intervinieron con el proceso de aprendizaje del lenguaje algebraico es su etapa inicial, estos vistos desde una mirada más contextual y amplia.

Un factor importante para el aprendizaje de los estudiantes corresponde a la infraestructura de la institución, este caracterizado por el espacio donde se desarrollan las clases, las herramientas disponibles en el aula y todo lo que pueda beneficiar o afectar externamente el aprendizaje de los estudiantes, según el Banco de desarrollo de América Latina CAF (2016)

*“contar con aulas y espacios de aprendizaje en buen estado es determinante en el momento de lograr que los alumnos obtengan los resultados académicos esperados” (p,1)*

Específicamente hablando de la institución y su infraestructura los espacios físicos brindados por este cumplen con la idea de un ambiente escolar facilitador del aprendizaje, esto por ser campestre y contar con todas las herramientas necesarias para el desarrollo de las clases, sin embargo, por inicio de la pandemia por COVID-19 a mediados del mes de Marzo del año 2020, la estructuración de las clases debió ser modificada a fin de proteger tanto al ente institucional como al ente estudiantil.

Este cambio consistió en la implementación de clases completamente virtuales, estas realizadas por medio de la aplicación Zoom, donde tanto docentes como alumnos accedían desde sus hogares, lo que afectó bruscamente el desarrollo de las clases y el aprendizaje. De la noche a la mañana los hogares se convirtieron en las aulas de

clases. Algunos estudiantes contaron con los espacios y las herramientas propicias, sin embargo, algunos contaban solo con el celular pues sus padres y/o hermanos también debían ingresar a trabajar o estudiar virtualmente.

La virtualidad, significó entonces un reto para todas las directivas de la institución, para las familias y para los estudiantes, siendo este un factor influyente para la investigación, considerándolo como un inconveniente que podría contribuir negativamente.

Dentro de la infraestructura también es importante para un adecuado ambiente de aprendizaje escolar la cantidad de estudiantes, según el ministerio de educación (2017) el artículo 2.4.6.1.2.4 del Decreto 1075 de 2015 modificado por el artículo 2 del Decreto 490 de 2016 correspondiente a la relación técnica de estudiantes por docente y estudiantes por aula de clase en los colegios oficiales de Colombia, tiene como referencia un mínimo de 32 estudiantes por salón en la zona urbana, en este caso, esta investigación contó con la presencia de 16 estudiantes con familias en su mayoría de tipo funcional, este grupo se caracterizó por tener una cultura amena, respetuosa y participativa, lo que aportó positivamente a la investigación ya que la comunicación fue asertiva y logró contribuir al cumplimiento de los tiempos establecidos para la observación y la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Por otro lado el dialogo y observación realizada en el grupo de grado octavo del Liceo Campestre la Misión, permitió dar cuenta de una predisposición por parte de los estudiantes referente a el aprendizaje de las matemáticas y más aún del álgebra, muchos de los estudiantes señalaban que más que una opinión propia, era la percepción de personas que ya tuvieron la oportunidad de ver el área y que no

contaron con una buena experiencia, caracterizando el área como la más difícil de todo el bachillerato. Esta predisposición inicialmente genera en los estudiantes un miedo arraigado a un área de conocimiento que implícitamente no es nuevo, sin embargo, el hecho de mencionar que el álgebra corresponde a la unión de letras con números, genera en ellos un tipo de recelo, este factor para la investigación no fue considerado como negativo o positivo, debido a que la propuesta de implementar una trayectoria hipotética de aprendizaje busca aportar positivamente en estas situaciones.

Desde la aplicación de la primera actividad de la trayectoria hipotética de aprendizaje los estudiantes se mostraron interesados; El hecho de no lograr explicar por medio del lenguaje natural el poder adivinar el número que uno de sus compañeros pensó, los invitaba a cuestionarse, a indagar y a razonar un poco sobre lo que internamente sucedía. Al recibir la explicación de lo que realmente pasaba y como el álgebra era un factor transcendental en el juego, los motivo a continuar y a querer aprender más.

La organización de todas las actividades correspondientes a la trayectoria hipotética de aprendizaje fueron fundamentales para el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, además de fomentar en ellos, el trabajo guiado, el trabajo grupal y el individual. Finalizada la aplicación de la trayectoria fue notorio el cambio de percepción de los estudiantes, mostrándose más seguros y cooperativos.

A partir de esta aplicación se esperó que los estudiantes no presentaran tantos errores en el test final, primero debido a que la trayectoria ya tenía un ciclo de enseñanza, recordemos que este término corresponde a la retroalimentación de la trayectoria después de haber sido evaluada una vez; si no también porque el desarrollo

dentro del aula virtual se mostró coherente a los tiempos, a la participación individual y la participación grupal.

## 6.2 IDENTIFICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE ERRORES

La identificación y caracterización de los errores en la iniciación al álgebra se realizó a partir de la aplicación del test final (ver anexo G), test que fue usado por Amador (2015) no solo para construir inicialmente la trayectoria, sino también a partir del cual realizó la retroalimentación.

Morales (2017) caracteriza el lenguaje algebraico como:

*“(...) el sistema de signos completamente simbólico que utiliza las matemáticas para expresar informaciones y operar sobre ellas con precisión y rigor a través de unas reglas y una lógica interna particulares (...)” (p.24)*

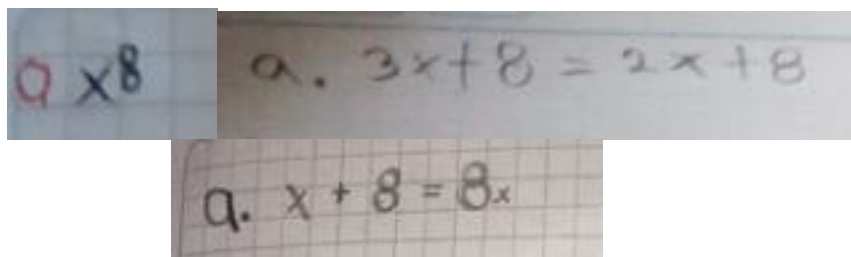
Se debe precisar que el análisis está direccionado hacia el reconocimiento de los errores empleados en este tiene una doble intención.

Desde la mirada de Socas (citado en Amador, 2015) es:

*(...) de una parte, sirve para ayudar a los profesores a conducir mejor la enseñanza– aprendizaje del álgebra, insistiendo en aquellos aspectos en los que los alumnos cometen errores, y de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos. En este sentido, el profesor debe entender los errores específicos de sus alumnos como una información de las dificultades del álgebra que requiere un esfuerzo preciso en las dos direcciones apuntadas anteriormente, entendiéndose, obviamente, que si al detectar un error, el alumno reconoce inmediatamente el fallo y lo corrige, aplicándolo a la generalidad de los casos, no será necesario ningún remedio, si, por el contrario, se produce con cierta frecuencia, implica que es algo más que un descuido que necesita una atención más precisa (p.109).*

Partiendo del listado propuesto por amateur (ver Figura 1) pasaremos punto por punto identificando los errores cometidos por los estudiantes

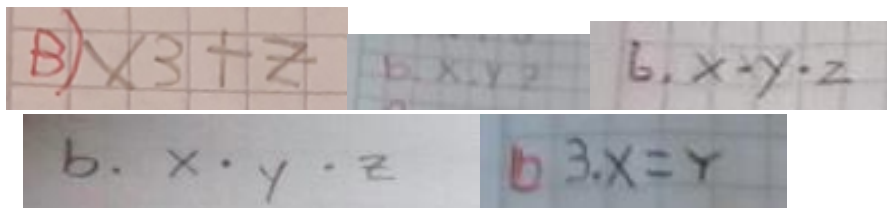
**a. Un número aumentado en ocho:** 3 estudiantes cometieron error (ver figura 6): uno de los estudiantes no asoció aumentar con la operación suma (E1). Los otros dos estudiantes escribieron las expresiones en forma de una ecuación (E7), agregando valores numéricos e igualdades que no están en la expresión.



The figure shows three pieces of handwritten work on grid paper. The first piece shows 'a x 8' in red ink. The second piece shows 'a. 3x + 8 = 2x + 8'. The third piece shows 'a. x + 8 = 8x'.

Figura 6. Colección de errores en el punto a del test final

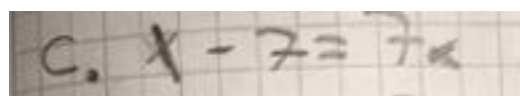
**b. El producto de tres y un número:** 5 estudiantes cometieron error (ver figura 7): 4 de ellos cometen el error de agregar letras que no deben estar (E12), el estudiante faltante escribió la expresión algebraica como una ecuación (E7).



The figure shows five pieces of handwritten work on grid paper. The first piece shows 'B) x(3 + z)'. The second piece shows 'b. x.y.z'. The third piece shows 'b. x-y.z'. The fourth piece shows 'b. x · y · z'. The fifth piece shows 'b 3.x = y'.

Figura 7. Colección de errores en el punto b del test final

**c. Un número disminuido en siete:** 1 estudiante comete un error (ver figura 8). Escribió la expresión algebraica como una ecuación (E7).



The figure shows a piece of handwritten work on grid paper. It shows 'c. x - 7 = 7x'.

Figura 8. Colección de errores en el punto c del test final

**d. La edad de Juan dentro de 9 años si hoy tiene  $a$  años:** 2 estudiantes cometieron error (ver figura 9). 2 estudiantes por su parte cometieron el error de no usar la letra dada (E13), usando la  $x$  en vez de la  $a$ .

Figura 9. Colección de errores en el punto d del test final

**e. La diferencia entre el 7 y un número:** 2 estudiantes cometieron error (ver figura 10). Un estudiante cambió el orden de la diferencia (E15), 1 estudiante no asocia la palabra diferencia con la operación resta (E14).

Figura 10. Colección de errores en el punto e del test final

**f. Cinco veces un número menos 8:** 2 estudiantes cometieron error (ver figura 11). 1 estudiante expresó la multiplicación en términos de una suma (E16), el otro estudiante expresó el enunciado como una ecuación (E7).

Figura 11. Colección de errores en el punto f del test final

**g. Un número par:** 4 estudiantes cometen error (ver figura 12). Todos cometen el error de no asociar número par a multiplicar por 2 (E17), un estudiante no utiliza letras para designar cantidades indeterminadas (E2), un estudiante proporciona resultados numéricos (E5).

Figura 12. Colección de errores en el punto g del test final

**h. El cubo de un número menos su cuarta parte es igual a 63:** 3 estudiantes cometen error (ver figura 13). Un estudiante ignora gran parte de la expresión del lenguaje natural (E3), 3 estudiantes no asocian la palabra cubo con la potencia 3 (E19), dos estudiantes no asocian la palabra cuarta parte de un número con la división entre 4 (E20).

Figura 13. Colección de errores en el punto h del test final

**i. La suma de dos números consecutivos:** 5 estudiantes cometen error (ver figura 14). 1 estudiante no escribe paréntesis en productos en los que algún factor es una suma (E28), 4 estudiantes no escriben correctamente dos números consecutivos (E22), 3 estudiantes añaden letras que no deben estar (E12).

Figura 14. Colección de errores en el punto i del test final

**j. La suma de un número y su siguiente es nueve:** 6 estudiantes cometen error y un estudiante no lo resolvió (ver figura 15). los 5 estudiantes no escribieron correctamente el *siguiente de un número* (E31), 3 de estos estudiantes ignoran parte del enunciado del lenguaje natural (E3), 1 estudiante proporciona resultados numéricos E5. 1 estudiante no utiliza letras para designar cantidades indeterminadas (E2), 2 estudiantes cambian la información dada (E21).

Handwritten student work for item j showing several errors. The top row shows  $x + 8$ ,  $9 + 4x^2 = [x + (x+1)]^2$ , and  $\frac{1}{9}$ . The bottom row shows  $x+1=9$  and  $x \div 2$ .

Figura 15. Colección de errores en el punto j del test final

**k. Un número más su doble, más su triple es igual a 12:** 4 estudiantes cometen error (ver figura 16). Todos los 4 estudiantes ignoraron parte del enunciado del lenguaje natural (E3), 2 de los estudiantes cambia la información dada (E21), 2 de los estudiantes no escriben correctamente el triple de un número (E25).

Handwritten student work for item k showing errors. The top row shows  $2x + 3x = 9$  and  $2x + 3 \cdot (x+1) = -12$ . The bottom row shows  $2x + 3x = 12$  and  $2x + 3 = 15$ .

Figura 16. Colección de errores en el punto k del test final

**l. El perímetro de un cuadrado de lado x:** 4 estudiantes cometen error (ver figura 17). Un estudiante no realizó el ejercicio, 3 estudiantes no escriben correctamente el perímetro de un cuadrado (E27), 1 estudiante cambia la letra dada por otra (E13), 1 estudiante proporciona resultados numéricos (E5), 1 estudiante no utiliza letras para designar cantidades indeterminadas (E2).

Handwritten student work for item l showing errors. The top row shows  $x$ ,  $p = 56.57$ ,  $1.4$ , and  $x^2 + x^2$ . The bottom row shows  $x$ .

Figura 17. Colección de errores en el punto i del test final

**m. El área de un rectángulo de base x y de altura x+6:** 6 estudiantes cometen error (ver figura 18) y uno no resuelve el ejercicio. 1 estudiante no escribe paréntesis en productos en los que algún factor es una suma (E28), 2 estudiantes cambian la letra

dada por otra (E13), 1 estudiante proporciona resultados numéricos (E5), 2 estudiantes cambian la información dada (E21), 1 estudiante ignora parte del enunciado del lenguaje natural (E3), 1 estudiante añade letras que no deben estar (E12), 3 estudiantes no escriben correctamente la fórmula del área de un rectángulo (E29).

Handwritten student work for Figure 18 showing various errors in calculating the area of a rectangle. The work includes:

- $x + 6$
- $A = b \cdot h$
- $A = 9 \cdot 4$
- $A = 36$
- $(r \cdot (r+6)) \div 2$
- $r \cdot r + 6$

Handwritten student work for Figure 18 showing errors in algebraic expressions. The work includes:

- $2x + 4$
- $A = x \cdot x + 6$

Figura 18. Colección de errores en el punto m del test final

**n. El área de un rectángulo de base  $a+3$  y de altura  $a$ :** 6 estudiantes cometen error (ver figura 19), y 2 estudiantes no resuelven el ejercicio. 3 estudiantes escriben incorrectamente la fórmula del área de un rectángulo (E29), 1 estudiante proporciona resultados numéricos (E5), 2 estudiantes no escriben paréntesis en productos en los que algún factor es una suma (E28), 1 estudiante no utiliza letras para designar cantidades indeterminadas (E2).

Handwritten student work for Figure 19 showing various errors in calculating the area of a rectangle. The work includes:

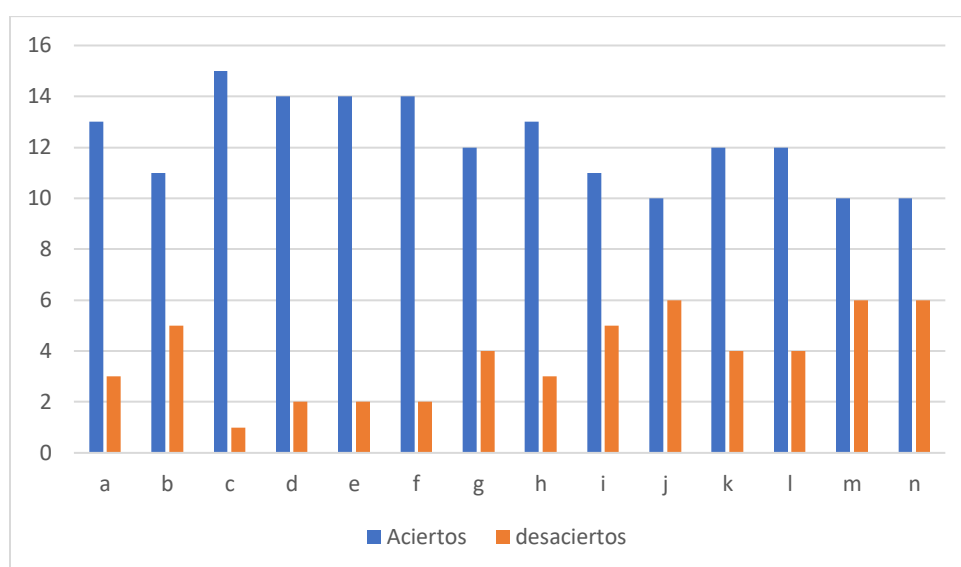
- $3 + a$
- $((a+3) \cdot a) \div 2$
- $a+3 \cdot a$
- $a = a + 3 \times a$
- $15 \times 1/3 = 15/1 \times 1/3 = 15/3 =$
- $a (a+3 \times a)$

Figura 19. Colección de errores en el punto n del test final

Después del reconocimiento de errores, e identificar la cantidad de aciertos y desaciertos en la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje, uno de los

principales cuestionamientos corresponde a si el diseño implementado de trayectoria hipotética de aprendizaje muestra unos resultados satisfactorios, teniendo en cuenta que este diseño ya tenia un ciclo de enseñanza.

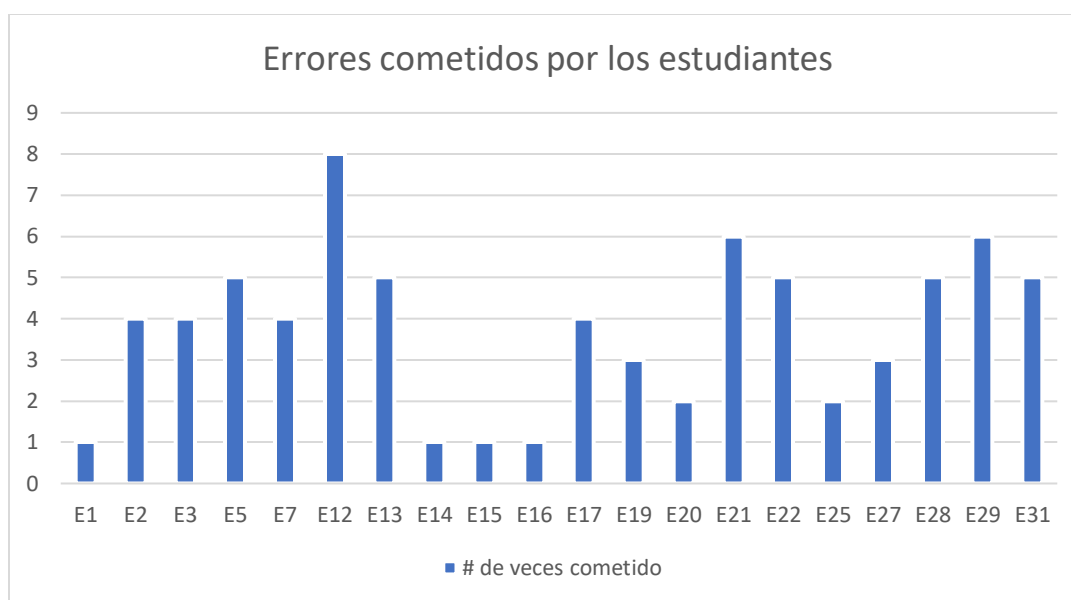
Para responder a esto fue necesario consolidar toda la información en un diagrama de barras (ver grafica 1), este corresponde a la representación estadística de los aciertos y los desaciertos en las respuestas del test final, después de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje.



*Gráfica 1. Aciertos y desaciertos en cada punto del test final después de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje*

Veamos que de manera general se presento un promedio entre 3 y 4 aproximadamente de desaciertos por pregunta, teniendo en cuenta que la cantidad de estudiantes correspondió a 16 y que la cantidad de desaciertos por pregunta no supero a la mitad mas uno de estudiantes, se podría afirmar que la trayectoria hipotética de aprendizaje aportó beneficiosamente el aprendizaje de los estudiantes.

A pesar de que los resultados de los aciertos fueron satisfactorios, estos no dan cuenta de cual fue la intervención directa de la trayectoria hipotética de aprendizaje en la reducción y/o prevención de errores, por este motivo fue necesario fijarnos en los errores mas cometidos por los estudiantes, para lo cual, se representó la información en una grafica de barras (ver grafica 2).



*Gráfica 2. Reconocimiento de errores a partir de la aplicación del test final*

Cabe resaltar que a pesar de que los aciertos fueron mucho mas que los desaciertos, los estudiantes con una única respuesta podían estar cometiendo mas de un error, aclarado esto, se tendrán en cuenta los errores mas representativos y relacionados para la culminación de este análisis.

Los errores E1, E14 y E15 son los relacionados específicamente con las operaciones fundamentales de suma y resta, fueron los menos cometidos por los estudiantes, esto puede deberse a que siempre se inicia y se refuerza principalmente con estas dos operaciones, indicando siempre palabras claves como “aumentado”,

“diferencia”; además de resaltar la importancia del orden en la resta entre sus elementos. Estos errores corresponden al 4% del total de errores cometidos.

Los errores E2, E3, E5, E7, E12, E13, E21 y la E28 tienen que ver con errores de estructura algebraica, es decir, primero que existe una interpretación errónea del lenguaje natural y por ende un error al traducirlo al lenguaje algebraico y en segunda que el estudiante no es capaz de identificar un orden y unas reglas que rigen la estructura misma del algebra; en este caso es mas fácil para los estudiantes ignorar, agregar y/o cambiar a conveniencia.

Estos errores corresponden al 54,7% del total de los errores, la mayoría de los estudiantes, agregaron, descartaron, dieron valores numéricos y omitieron el uso de paréntesis. De todos estos el de mayor repetición fue el E12 y el E21, uno correspondía a agregar letras que no deben estar, y el otro a cambiar la información dada.

Los errores E16, E17, E19, E20, y E25 están relacionadas con las operaciones fundamentales de multiplicación y división, en este caso los errores se presentaron al no poder interpretar “el doble de...” “el triple de...” “la cuarta parte de...” y “el cubo de”, en este grupo también entra el número par. Estos errores corresponden al 16% del total de errores y el mas cometido por los estudiantes fue el no poder asociar número par como el producto por dos, esto podría explicarse a que los docentes se centran mucho en la memorización de los números pares y no en su comportamiento implícito.

Los errores E22 y E31 están relacionados con la no visualización del comportamiento de dichos números específicos, En este caso, los estudiantes relacionaban el orden del abecedario con la palabra consecutivos y/ o siguientes, por lo

tanto, estos estudiantes no asimilaban las letras como unas variables completamente independientes. Estos errores corresponden al 13,3%.

Y por ultimo los errores E27 Y E29 relacionados con el área de geometría, en este caso conceptos como perímetro y área. En primera instancia se les dificultó recordar con claridad cada uno de los conceptos, y en segunda al estos enunciados contener variables hacia que los estudiantes quedará indecisos sobre su traducción, además de la confusión de si poner o no paréntesis. Estos errores corresponden al 12% del total identificados.

En esta investigación finalmente se identifica que una de las mayores dificultades para los estudiantes es la interpretación del lenguaje natural, y el lograr comprender como se estructuran las expresiones algebraicas, en este sentido, la falta de reconocimiento de esta complejidad lleva a los estudiantes a tener una visión del algebra como un conjunto de simbología arbitraria y que por lo tanto puede ser descartada, ignorada y hasta modificada. Se hace necesario, dar importancia a lo que la estructura algebraica concierne: jerarquía de operaciones, simbología, diferentes representaciones, entre otras.

Respecto a los demás errores cometidos se evidencia la necesidad de fortalecer, algunos conceptos, brindando estrategias que no solo hagan sentir mas a gustos los estudiantes, si no también que realmente aporten a su aprendizaje, en este caso, consideramos que el factor de la virtualidad no permitió un desarrollo optimo de la aplicación de la trayectoria, y que por el contrario pudo haber interferido negativamente en el proceso de la investigación.

Se afirma entonces que es importante refrescar y fortalecer asuntos o conceptos especiales en el área de matemáticas para emplear el uso del lenguaje algebraico. Se resalta también el valor e importancia de herramientas como la trayectoria hipotética de aprendizaje con objetivos tanto investigativos como de planeación, ya que fue a través de esta que los estudiantes se sintieron más confiados y seguros, saliendo de percepciones generacionales negativas, se puede decir que la introducción de los estudiantes en el lenguaje algebraico fue satisfactoria.

## 7 CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo de grado radicó en reconocer a través de una trayectoria hipotética de aprendizaje los errores cometidos por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión al iniciar el lenguaje algebraico.

Como conclusiones de esta investigación se exponen los consolidados desde las diferentes etapas del proceso de investigación: desde lo teórico, desde la metodología y desde lo práctico:

### **Desde lo teórico**

- La recopilación e indagación de información teórica para la realización de la investigación fue valioso, pues esto permitió la validación de hipótesis, el establecer las necesidades y a partir de allí conocer el panorama a fin de establecer una ruta metodológica.
- El apropiarse de una necesidad vivenciada en clase, y lograr realizar una investigación, genera en nosotros como docentes crecimiento profesional y personal, pues, se convierte en un reto que requiere responsabilidad y dedicación.
- Indagar sobre herramientas que benefician el acto de enseñanza y aprendizaje, como las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, abren el panorama de posibilidades, para el desarrollo e investigación en cualquier tipo de investigaciones futuras.

- A partir de toda la investigación inicial se logra reconocer que el álgebra al igual que las matemáticas son necesarias actualmente, su importancia es indudable y que su aprendizaje, facilita el desarrollo de diferentes competencias matemáticas.

### **Desde lo metodológico**

- Los espacios organizados para la observación y registro de las interacciones, por medio de las rejillas, fueron indispensables, para la caracterización de la población y la muestra, este espacio, dio a conocer el sinnúmero de factores que podrían intervenir en la investigación, en este caso el más relevante fue el hecho de tener que implementar todo virtualmente debido a la pandemia del COVID -19.
- Se resalta la importancia de la comunicación, y la organización. Se evidenció un excelente manejo del micrófono, adicional a esto, la interacción docente-estudiante, estudiante-estudiante, fueron llevadas de maneras adecuadas y respetuosas, lo que facilitó el cumplimiento de los tiempos establecidos para el desarrollo de la investigación.
- El aprendizaje de los estudiantes se encuentra ligado a la planeación que se le dé a la clase, en este caso se usó la trayectoria hipotética de aprendizaje, lo que evidenció resultados satisfactorios, logrando no solo un aprendizaje, sino también un cambio en sus percepciones sobre el área.

## Desde lo práctico

- A pesar de la implementación de una trayectoria hipotética de aprendizaje ya desarrollada, del sinnúmero de investigaciones y aportes a la Educación Matemática referente a la iniciación al álgebra; los errores y las dificultades continúan apareciendo, esto nos invita a seguir investigando, esto nos ayuda a comprender como los estudiantes realmente aprenden, como se lleva a cabo la comprensión de conceptos, entre otros valiosos aportes, la divulgación de todos estas investigaciones, ayuda a los diferentes docentes en sus diferentes contextos a realizar clases eficaces.
- La identificación de los errores presentó dos propósitos, primero el poder planificar de manera más adecuada las clases partiendo de los diferentes errores cometidos por los estudiantes y como segundo el lograr establecer estrategias que prevean los errores de los estudiantes.

La labor docente no ha terminado con el presente análisis y reconocimiento de errores frecuentes, es solamente el inicio de un recorrido complejo y satisfactorio que se desea continuar estructurando con el pasar del tiempo.

## 8 REFERENCIAS

- Amador-Saelices, M. V., & Montejo-Gámez, J. (2016). Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores. *Revista Épsilon*, 33(93), 7-30.
- CAF - Banco de Desarrollo de America Latina. (Septiembre de 2021). *CAF - Banco de desarrollo de America Latina*. Obtenido de <https://www.caf.com/es/actualidad/noticias/2016/10/la-importancia-de-tener-una-buena-infraestructura-escolar/>
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Investigación en educación matemática XVI*, 75-94.
- Daro, Phil; Mosher, Frederic; Corcoran, Thomas. (2011). *learning Trajectories in Mathematics: A Foundation for Standards, Curriculum, Assessment, and Instruction*. CPRE Research Reports.
- Gomez, P; Lupiañez, J. (2007). Trayectorias Hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria. *PNA, Revista de investigación en didáctica de las Matemáticas*, 78-98.
- Guerrero Bejarano, M. A. (2016). La investigación cualitativa.
- Icfes. (2017). *informe nacional, resultados nacionales saber 11º 2014 - 2016*. Bogotá D,C: Icfes.
- Icfes. (2018). *resultados nacionales saber 3º, 5º, 9º 2012- 2017*. Bogotá D,C: Icfes.

- Jimenez, Luis Jaime Piñeros; Pinzon, Alberto Rodriguez. (1998). Los insumos escolares en la educación secundaria y su efecto sobre el rendimiento académico de los estudiantes: Un estudio en Colombia. *LCSHD Paper series, The World Bank, Latin America Caribbean Regional Office*, serie 36.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Escribe y Edita.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares matemáticas*. Bogotá: MEN.
- MEN. (Septiembre de 2021). *Concepto 144558 de 2017*. Obtenido de Normograma.info:  
[https://normograma.info/men/docs/concepto\\_mineduccion\\_0144558\\_2017.htm](https://normograma.info/men/docs/concepto_mineduccion_0144558_2017.htm)
- Malara, N., & Navarra, G. (2001). Promoting an early approach the algebraic thought in primary and middle school. *In SEMT'01 International Symposium Elementary Maths Teaching Chasles University-Prague.*, 119-121.
- Morales, S. P. (2017). *Errores que presentan estudiantes de undécimo, en el uso del lenguaje algebraico.*. Recuperado de:  
<http://hdl.handle.net/20.500.12209/2242>.
- OCDE . (2016). *PISA 2015 resultados clave* . OCDE.
- Ruiz Moreno, M. (2016). *Diseño de una propuesta metodológica que contribuya al lenguaje algebraico, su precisión e importancia para la enseñanza-aprendizaje del álgebra*.

*Sepúlveda, A., Opazo, M., Díaz-Levicoy, D., Jara, D., Sáez, D., & Guerrero, D.*

*(2016). ¿ A qué atribuyen los estudiantes de educación básica la dificultad de aprender matemática?. Revista de Orientación Educacional, 31(58), 105-119.*

*Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria.*

*Aportaciones de la investigación. NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, 5-34.*

# 9 ANEXOS

## 9.1 ANEXO A

### SOLICITUD DE ENVIÓ Y USO DE LA TRAYECTORIA: RESPUESTA A LA SOLICITUD

**YORLEY SANCHEZ TORRES** <yorley.sanchez@correounivalle.edu.co> 15 nov 2019 23:26 ☆ ↩ ⋮  
para jmontejo ▼

hola buen día

mi nombre es Yorley Sanchez Torres, soy estudiante de la Universidad del Valle en Cali Colombia, me comunico con usted para solicitar un grande favor.

Recientemente como proyecto de grado (PREGRADO) quise hacer el diseño de una trayectoria para el álgebra, desde un enfoque diferente al de piaget, para ser más específica quise hacer un diseño desde el enfoque semiótico cognitivo, pero mi trabajo de grado fue negado por la fundamentación teórica y la estructura teórica que propone Simón.

por motivos de tiempo me es imposible empezar desde cero un proyecto de grado, por lo cual a grado me sugieren tomar un diseño de una trayectoria ya elaborada, aplicarla y realizar un análisis desde el enfoque que me interesa (semiótico cognitivo).

y es aquí donde solicito su ayuda y la de la señora Maria Victoria Amador, de ser posible quisiera que porfavor me colaboren con el envío del diseño que ustedes realizaron para el álgebra y algún tipo de documento que certifique que me dan el permiso de aplicar su diseño y así yo realizar un análisis desde mi enfoque, de igual manera todo en mi proyecto iría referenciado con ustedes.

he leído el informe publicado en Epsilon de su trabajo, y me interesa su diseño para realizar un análisis desde otra perspectiva. espero tengan en cuenta mi situación, muchas gracias.

La verdad he intentado comunicarme con la señora Maria Victoria Amador, pero no he tenido éxito, agradezco la atención prestada y quedo atenta a cualquier respuesta.

att: Yorley Sanchez  
estudiante de pregrado de la Universidad del valle.

 **Jesús Montejo Gámez** <jmontejo@ugr.es> mar, 19 nov 2019 18:56 ☆ ↩  
para mí ▼

Estimada Yorley:

Tanto la profesora Amador como yo le agradecemos el interés en nuestro trabajo, también le pido disculpas por el retraso en darle respuesta.

Le adjunto a este correo el Trabajo Fin de Máster de la profesora Amador, que contiene en sus anexos el diseño instruccional completo de la THA implementada. Espero que le sea de utilidad y pueda seguir desarrollando estas ideas.

Un cordial saludo,

 **Amador\_Saelices\_MªVictoria\_TFM.pdf**

Jesús Montejo Gámez

Departamento de Didáctica de la Matemática  
Facultad de Ciencias de la Educación  
Campus Universitario de la Cartuja, s/n  
Despacho 403  
18071 - GRANADA

\*\*\*

## 9.2 ANEXO B

### CONSENTIMIENTO INFORMADO

**27 DE ENERO DEL 2021**

**Santiago de Cali- Valle del Cauca**

**Señores**

**directivos del Colegio Liceo Campestre la Misión**

**Solicitud.**

Como es de conocimiento de ustedes, actualmente me encuentro finalizando mi carrera como licenciada en educación en el área de matemáticas y física, en estos momentos me encuentro en la culminación de mi trabajo de grado, por lo cual solicito de manera muy comedida la realización de mi investigación en la institución.

**¿Como se realizaría?**

La idea del proyecto es realizar un seguimiento en máximo 3 clases a estudiantes de grado 8º, por medio de la aplicación de una trayectoria hipotética de aprendizaje, de donde se procederá a realizar un análisis (tema: Errores la iniciación al Álgebra).

Lo que solicito entonces, es que la institución me brinde su apoyo por medio de 2, máximo 3 espacios de clase con dichos estudiantes.

Para dicha investigación es necesario que se me permita grabar, esto con un fin estrictamente académico, cabe aclarar que estas grabaciones no se presentarán en ninguna conferencia o en ningún momento dentro de la universidad del Valle, ni tampoco estarán presentes como anexos a mi documento investigativo final, estas se hacen para realizar junto con la aplicación de la trayectoria un adecuado análisis.

Claramente de ser positivo su apoyo, buscaría la forma de no afectar mi horario laboral, ni las clases de los chicos como tal.

Quedo atenta a cualquier respuesta, e inquietud.

Mil gracias por la atención prestada.

**Yorley Sanchez Torrez**

**Docente del área de matemáticas- primaria**

## 9.3 ANEXO C

### REJILLAS DE OBSERVACIÓN PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

|                                                                                                   |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Nombre de la institución:</b>                                                                  |  |
| <b>Jornada:</b>                                                                                   |  |
| <b>Grado:</b>                                                                                     |  |
| <b>N° de estudiantes:</b>                                                                         |  |
| <b>N° de niños:</b>                                                                               |  |
| <b>N° de niñas:</b>                                                                               |  |
| <b>Edades:</b>                                                                                    |  |
| <b>Estrato socioeconómico:</b>                                                                    |  |
| <b>¿Cómo propicia espacios de participación de los estudiantes en el aula de clase?</b>           |  |
| <b>¿Cuáles actividades emplea el docente para la iniciación del lenguaje algebraico en clase?</b> |  |

## 9.4 ANEXO D

### REJILLAS DE OBSERVACIÓN INTERACCIÓN ESTUDIANTE-ESTUDIANTE

|                                                                                              |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Nombre de la institución:                                                                    |  |
| Jornada:                                                                                     |  |
| Grado:                                                                                       |  |
| N° de estudiantes:                                                                           |  |
| N° de niños:                                                                                 |  |
| N° de niñas:                                                                                 |  |
| Edades:                                                                                      |  |
| Estrato socioeconómico:                                                                      |  |
| ¿Cómo se dirige un estudiante a otro?                                                        |  |
| ¿Los estudiantes respetan la participación de sus compañeros?                                |  |
| El vocabulario empleado por los estudiantes ¿Es acorde a su edad?                            |  |
| En caso de que un estudiante no entienda la consigna ¿Algún estudiante procede a explicarle? |  |
| ¿Los estudiantes califican sus intervenciones entre sí?                                      |  |

## 9.5 ANEXO E

1. ¿Cómo te parece la clase de matemáticas?
2. ¿Cuáles son los ejercicios más difíciles de la clase de matemáticas?
3. ¿Qué es para ti el lenguaje algebraico?
4. ¿Qué piensas sobre la fusión entre letras y números para actividades matemáticas?
5. ¿Cómo es el ambiente en el salón de clases?
6. ¿Cómo manejas los tiempos en las clases virtuales y especialmente en la clase de matemáticas?
7. ¿Te parece que lo que te enseñas en matemáticas lo aplicas en tu vida diaria?  
Sí – No y ¿por qué?

## 9.6 ANEXO F

### ACTIVIDADES QUE CONFORMAN EL DISEÑO INSTRUCCIONAL

#### Actividades 1. Motivación para el lenguaje algebraico.

##### Juego 1

Piensa un número.

Muéltiplicalo por tres.

Súmale nueve.

Divídelo entre tres.

¿Qué resultado obtienes?

##### Juego 2

Piensa un número.

Réstale dos.

Muéltiplicalo por cuatro.

Súmale ocho.

Haz la mitad.

¿Qué resultado tienes?

##### Juego 3

Piensa un número.

Muéltiplicalo por cinco.

Súmale diez.

Divídelo entre cinco.

Réstale el número que habías pensado.

¿A que a todos os da dos?

##### Juego con la baraja

Escoge una carta y no me la enseñes.

Dobla el valor de tu carta.

Al resultado añádele uno.

Multiplica ahora por cinco.

Si tu carta es oros, súmale cuatro, si es copas, súmale tres, si es espadas súmale dos y si es bastos, súmale uno.

## Actividades 2. Ejemplos para expresiones algebraicas.

El lenguaje de las matemáticas es el lenguaje algebraico. El lenguaje algebraico se utiliza para escribir matemáticamente situaciones de nuestra vida. Las expresiones algebraicas son las frases del lenguaje algebraico. Las expresiones algebraicas pueden ser:

Números, letras u operaciones con números y letras. Ejemplos:

- ✓ La edad de Alba dentro de dos años. ( $e$ = edad de Alba)
- ✓ El precio del pan ha subido diez céntimos. ( $p$ =precio del pan).
- ✓ Ocho veces el número de conejos.
- ✓ El área de un cuadrado de lado  $l$ .
- ✓ El número de goles que meterá Cristiano esta temporada (en la liga) menos el número de goles de Messi.
- ✓ El tiempo que voy a dedicar a trabajar matemáticas esta semana si cada día estoy  $t$  horas.
- ✓ La temperatura en Madrid aumentada en tres grados.
- ✓ El número de patas que hay en una granja que tiene  $a$  gallinas y  $b$  cerdos.
- ✓ El dinero que le tengo que pedir a mi madre para ir al cine y al teatro si la entrada del cine cuesta tres euros menos que la entrada del teatro.
- ✓ El producto de mi edad y la de mi hermana si le saco ocho años.
- ✓ El cubo de un número menos el triple de ese número.
- ✓ El dinero que me gasto al comprar un cuarto de chorizo y medio de queso.
- ✓ La diferencia entre lo que gana Belén Esteban y un ingeniero.
- ✓ La diferencia entre la altura de David y la mía si yo mido quince cm menos que David.

## Actividades 3. Hoja 1: traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

- (a) El doble de un número, más nueve.
- (b) El cuadrado de un número, menos siete.

- (c) La suma de dos números.
- (d) La suma de dos números consecutivos.
- (e) La quinta parte de un número.
- (f) La diferencia entre el doble de un número y doce.
- (g) El producto de un número y once.
- (h) El área de un rectángulo.
- (i) El área de un rectángulo de base  $b$  y altura  $b + 4$ .
- (j) El área de un rectángulo cuya altura es el doble de la base.
- (k) El perímetro de un cuadrado de lado  $l$ .
- (l) El perímetro de un rectángulo de lados  $c$  y  $c + 9$ .
- (m) Un número más su cuadrado más su cubo.
- (n) Un número par.
- (ñ) Un número impar.
- (o) El área de un triángulo.
- (p) El área de un triángulo de base  $m$  y altura  $m - 1$ .
- (q) El producto de cuatro veces un número y cinco.
- (r) La cuarta parte de un número, más el triple de ese número.
- (s) La suma de un número y su siguiente.
- (t) La suma de un número y su siguiente es quince.
- (u) La diferencia entre el triple de un número y su doble.
- (v) El cociente de dos números, aumentado en ocho.
- (w) La edad de Juan dentro de  $a$  años si hoy tiene trece años.
- (x) La diferencia entre el cuadrado de un número y su doble.
- (y) Seis veces un número, aumentado en dos.
- (z) El producto del triple de un número y el doble del número.

**Actividades 4. Hoja 2:** elegir la/s respuesta/s correcta/s y traducir al lenguaje ordinario todas las expresiones algebraicas que aparecen.

Ejercicio 1. Elegir las respuestas correctas y traducir al lenguaje ordinario todas las expresiones algebraicas.

1. El producto de un número por sí mismo, aumentado en cuatro.

$$a^2 + 4$$

$$2a + 4$$

$$a \cdot a + 4$$

$$4a$$

2. El triple de un número, disminuído en siete.

$$3p - 7$$

$$3(p - 7)$$

$$p^3 - 7$$

$$\frac{3p}{7}$$

3. El área de un rectángulo de base  $c$  y altura  $c + 1$ .

$$c(c + 1)$$

$$c \cdot c + 1$$

$$\frac{cc + 1}{2}$$

$$\frac{c(c + 1)}{2}$$

4. El perímetro de un cuadrado de lado  $m$ .

$$m + m + m + m$$

$$m^4$$

$$4m$$

$$m \cdot m \cdot m \cdot m$$

5. El cuadrado de un número, aumentado en cinco.

$$b^2 5$$

$$b^2 + 5$$

$$b \cdot b + 5$$

$$2b + 5$$

Ejercicio 2. Traduce al lenguaje ordinario las siguientes expresiones algebraicas.

- a)  $6x + y$
- b)  $x \cdot x$
- c)  $3a + 2b$
- d)  $c^3 + p^2$
- e)  $4m$
- f)  $t(t + 1)$
- g)  $tt + 1$
- h)  $\frac{s}{2}$
- i)  $\frac{s}{3} + 3s$
- j)  $\frac{m}{4}$
- k)  $\frac{2}{3}s$

**Actividades 5. Hoja 3: traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico. (Gavilán Bouzas, 2004)**

Siendo  $d$  la edad de Teresa, escribe en lenguaje algebraico:

1. La edad de Teresa hace tres años.
2. La edad de Teresa dentro de seis años.
3. El doble de la edad de Teresa.
4. La edad de Teresa aumentada en cinco años.
5. La edad de Teresa disminuída en tres años.
6. El doble de la edad que tuvo Teresa hace cuatro años.
7. El triple de la edad que tuvo el año pasado.
8. La quinta parte de la edad que tendrá el año que viene.
9. Tres veces la mitad de su edad.
10. El doble de su edad aumentada en tres años.
11. El doble de su edad, aumentada en tres años.

Siendo  $y$  el número de conejos de una granja, escribe en lenguaje algebraico:

1. El número de conejos si el granjero vende ocho.

2. El número de conejos si el granjero vende la tercera parte.
3. El número de conejos si el granjero compra cinco.
4. El número de conejos aumentado en seis.
5. Seis veces el número de conejos.
6. La cuarta parte del número de conejos después de haber vendido cinco.
7. El triple del número de conejos tras haber comprado veinte.
8. La quíntuplo del número de conejos, aumentado en cuatro.
9. El cuadrado del número de conejos, disminuido en tres.
10. La cuarta parte de la tercera parte del número de conejos.
11. La mitad del triple del número de conejos.

## Actividades 6. Bingo algebraico.

| ANVERSO DE LAS TARJETAS                              | REVERSO DE LAS TARJETAS |
|------------------------------------------------------|-------------------------|
| Un número disminuido en seis.                        | 7                       |
| El cubo de un número, menos veinticinco.             | 3                       |
| La suma de un número y su siguiente.                 | 1                       |
| El cociente de un número y seis.                     | 24                      |
| El cuadrado de un número aumentado en uno.           | 2                       |
| Tres veces un número, menos seis.                    | 4                       |
| La diferencia entre un número y siete.               | 14                      |
| Dos veces un número.                                 | 4                       |
| La mitad de un número.                               | 18                      |
| El producto de dos y un número.                      | 5                       |
| La tercera parte de un número.                       | 33                      |
| El doble de un número.                               | 6                       |
| Un número aumentado en tres.                         | 10                      |
| Cuatro veces un número menos dos.                    | 4                       |
| El doble de un número más su triple.                 | 3                       |
| El cuadrado de un número.                            | 4                       |
| El doble de un número aumentado en uno.              | 8                       |
| El triple de un número.                              | 6                       |
| El triple de un número aumentado en uno.             | 6                       |
| El cociente de un número y dos.                      | 40                      |
| El producto de tres y un número.                     | 7                       |
| El producto de once y un número.                     | 2                       |
| La diferencia entre treinta y cuatro y un número.    | 11                      |
| El cuadrado de un número menos su quinta parte.      | 5                       |
| Cinco veces un número.                               | 5                       |
| El doble de un número.                               | 13                      |
| La suma del doble de un número y su cuarta parte.    | 12                      |
| La mitad de un número, aumentado en tres.            | 50                      |
| El cociente de un número y dos aumentado en catorce. | 30                      |
| La suma de un número y su doble y su triple.         | 5                       |

### Actividades 7. Valor numérico de una expresión algebraica.

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras de la expresión algebraica por números determinados y hacer las operaciones que indica la expresión.

Ejemplo: área de un cuadrado de lado  $l$  es  $l^2$ . Si se quiere hallar el área de un cuadrado de lado 5, hay que sustituir...

Ejercicio 1: En un libro antiguo de medicina aparece la fórmula

$$N = \frac{Ae}{e + 12}$$

donde  $N$  es la dosis en medicamentos para niños,  $A$  es la dosis para adultos y  $e$  es la edad en años del niño ( $>1$  año) ¿Cuál es la dosis para un niño de ocho años si la dosis de adultos es de 20mg?

Ejercicio 2: Pedro vive a 180 Km de su lugar de trabajo. Sale a las 9h de su casa y conduce a 50 Km/h ¿A qué hora llegará al trabajo?

### Actividades 8. El álgebra para generalizar.

Ejercicio 1. Encuentra el término general de las siguientes secuencias numéricas.

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 3 | 5  | 9  | n |
| 6 | 10 | 18 |   |

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 3 | 8  | 12 | n |
| 8 | 18 | 26 |   |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | n |
| 5 | 6 | 7 |   |

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 4 | 6  | 10 | n |
| 7 | 11 | 19 |   |

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 1 | 3  | 10 | n |
| 4 | 10 | 31 |   |

|    |    |    |   |
|----|----|----|---|
| 10 | 11 | 12 | n |
| 8  | 9  | 10 |   |

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 2 | 5  | 6  | n |
| 4 | 25 | 36 |   |

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 2 | 3  | 4  | n |
| 9 | 14 | 11 |   |

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 2 | 7  | 8  | n |
| 9 | 29 | 33 |   |

**Actividades 9. Hoja 4: contestar preguntas utilizando el lenguaje algebraico.**

- (a) Si Laura tiene actualmente  $t$  años, ¿cuál será su edad dentro de siete años? ¿Cuántos años tenía hace cuatro?
- (b) Si María tiene  $p$  euros y Pablo la mitad que ella más uno, ¿cuántos euros tiene Pablo?
- (c) Si David tiene  $k$  cromos y su hermano el doble que él menos tres, ¿cuántos cromos tiene el hermano? ¿cuántos cromos tienen entre los dos?
- (d) Cristina, Alba y Lucía tienen un acuario cada una. Cristina tiene el doble de peces que Alba y Lucía el triple que Cristina, ¿cuántos peces tiene cada una? ¿cuántos peces tienen entre las tres?
- (e) El número de alumnos de 1ºA es  $\frac{2}{3}$  de los alumnos de 1ºB. En 1ºC hay la mitad de alumnos que en 1ºA más diez. ¿Cuántos alumnos hay en cada clase?

- (f) Rocío tiene billetes de 5 euros y de 10 euros. Si tiene el doble de billetes de cinco euros que de 10, ¿cuántos billetes tiene de cada clase?

**Actividades 10. Hoja 5: ejercicios de repaso para vacaciones.**

**1. Traducir las siguientes expresiones al lenguaje algebraico:**

- (a) Un número aumentado en diez.
- (b) La diferencia entre el triple de un número y su doble.
- (c) El área de un rectángulo cuya base es tres veces su altura.
- (d) El área de un triángulo de base  $s$  y altura  $s + 5$ .
- (e) El producto de dos veces un número y cuatro.
- (f) El cuadrado de un número menos la mitad del número.
- (g) El perímetro de un triángulo isósceles de lados  $l$  y  $l + 2$ .
- (i) Un número par.
- (j) La suma de un número y su anterior es trece.
- (k) La diferencia de dos números consecutivos.
- (l) Un número aumentado en ocho, más el cuadrado del número es veinte.
- (m) El área de un cuadrado de lado  $a$ .
- (n) La diferencia entre el cubo de un número y tres veces ese número.
- (ñ) El doble de la edad de Juan hace tres años.
- (o) El área de un rectángulo de base  $e + 7$  y altura  $e$ .
- (p) El área de un triángulo cuya altura es igual a su base aumentada en dos.
- (q) El producto de cinco y un número.
- (r) La tercera parte de la suma de un número y su siguiente.
- (s) La mitad de un número, aumentado en uno es ocho.
- (t) Nueve veces un número, disminuido en siete.

- (u) El perímetro de un cuadrado de lado  $t$  es igual a doce.
- (v) El doble de la edad de Pedro el año que viene si hoy tiene “ $k$ ” años.
- (w) Los euros que me quedan si me gasto la tercera parte.
- (x) La quinta parte de la mitad de un número.
- (y) El cociente de un número y cuatro es cuarenta.
- (z) El cubo de un número, aumentado en su triple.

### Actividades 11. Ejemplos de problemas (Gutiérrez Vázquez et al., 2011)

En una granja hay 34 animales. Si el número de caballos es la mitad que el de gallinas y el número de conejos es tres veces el de gallinas menos dos, ¿cuántos animales hay de cada tipo?

Luis tiene la mitad de rotuladores que Juan. Si a cada uno le regalan 5 y en total suman 40. ¿cuántos rotuladores tenía cada uno?

¿Cuánto miden los lados de un rectángulo  $(x + 1, 2x)$  si su perímetro es de 26 centímetros?

En tres estantes de una librería hay 129 libros. En el segundo hay siete más que en el primero. En el tercero hay el doble que en el segundo, ¿cuántos libros hay en cada estante?

### Actividades 13. Taller de problemas (Marcos Hidalgo, 2002)

**Grupo1.** En una persona sana, la presión sanguínea normal  $P$  se puede estimar mediante esta expresión,

$$P = 110 + \frac{E}{2},$$

donde  $E$  representa la edad en años. Las unidades de la presión son milímetros de mercurio (mmHg).

1. Determina cuál será la presión sanguínea normal de una persona de veinte años, de una de cuarenta y de otra de sesenta.
2. Si una persona tiene un presión sanguínea de 115 mmHg, ¿cuál será su edad estimada?
3. ¿Es posible que una persona sana tenga 100 mmHg de presión sanguínea? ¿por qué?
4. Representa gráficamente la presión sanguínea con el paso del tiempo. ¿Qué se puede decir sobre la relación entre la presión sanguínea y la edad de una persona?

## 9.7 ANEXO G

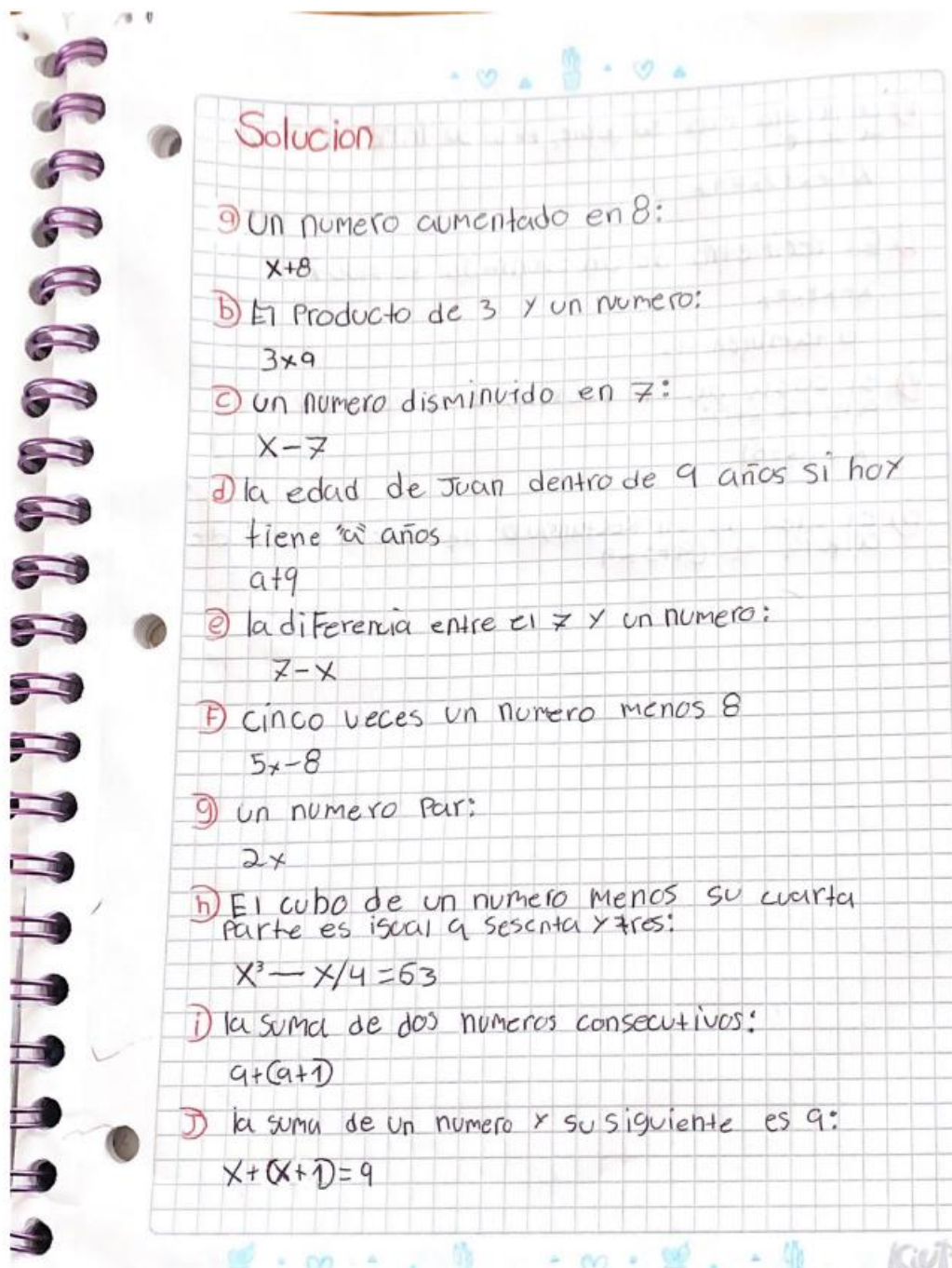
### TEST FINAL DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

#### 1. Traducir las siguientes expresiones al lenguaje algebraico:

- (a) Un número aumentado en ocho.
- (b) El producto de tres y un número.
- (c) Un número disminuido en siete.
- (d) La edad de Juan dentro de nueve años si hoy tiene “a” años.
- (e) La diferencia entre siete y un número.
- (f) Cinco veces un número menos ocho.
- (g) Un número par.
- (i) El cubo de un número menos su cuarta parte es igual a sesenta y tres.
- (j) La suma de dos números consecutivos.
- (k) La suma de un número y su siguiente es nueve.
- (l) Un número más su doble más su triple es igual a doce.
- (m) El perímetro de un cuadrado de lado  $x$ .
- (n) El área de un rectángulo de base  $x$  y altura  $x + 6$ .
- (ñ) El área de un rectángulo de base  $a + 3$  y altura  $a$ .

## 9.8 ANEXO H

### EVIDENCIAS DE LOS EJERCICIOS PLANTEADOS POR LA DOCENTE Y DESARROLLADOS POR LOS ESTUDIANTES



k) Un número más su doble, más su triple es igual a doce:

$$x + 2x + 3x = 12$$

l) El Perímetro de un cuadrado de lado  $x$ :

$$x + x + x + x$$

o también  $4x$

m) el área de un Rectángulo de base  $x$  y de altura  $x+6$ :

$$x \times (x+6)$$

n) el área de un Rectángulo de base  $a+3$  y de altura  $a$  ( $a+3 \times a$ )

a.  $3x+8=2x+8$

b.  $x \cdot y \cdot z$

c.  $x-7$

d.  $x+a$

e.  $x/2+7$

f.  $5x-8$

g. un numero par seria  $2x$

i.  $2x+3=15$

j.  $x+x+1$

k.  $x \div 2$

l.  $2 \cdot 3 = 6$  es el doble de 12

m.  $p=41$

n.  $2x+4$

ñ.  $15 \times 1/3 = 15/1 \times 1/3 = 15/3 = 5$



Nota:

1. traduce las expresiones al lenguaje algebraico

a.  $x+8$

b.  $x \cdot y \cdot z$

c.  $x-7$

d.  $a+9=x$

e.  $7-x$

f.  $x+x+x+x+x-8$

g.  $x$

i.  $x^3 - \frac{1}{7}x = 63$

j.  $a+b$

k.  $x+1=9$

l.  $x+2x+3x=12$

m.  $x^2+x^2$

n.  $a = x \cdot x + 6$

ñ.  $a = a + 3 \times a$

# Actividad Investigacion

1. Resolver

a.  $x + 8$

b.  $x \cdot y \cdot z$

c.  $x - 7$

d.  $a + 9$

e.  $3 - x$

f.  $5 \cdot x - 8$

g.  $2x$

I.  $x^2 - \frac{x}{4} = 65$

J.  $x + (x + 1)$

K.  $x + y = 9$

L.  $x + 2x + 3x = 12$

M.  $4x$

N.  $x(x + 6)$

O.  $(a + 3) \cdot a$

a  $x^8$

b  $3 \cdot x = y$

c  $x - 7$

b  $9 + 9$

e  $7 - x$

f  $5 \cdot x - 8$

g  $x$

i  $\sqrt[3]{x - (1/4)x} = 63$

j  $x + y$

k

l  $x + (2 \cdot x) + (3 \cdot x) = 12$

m  $r \cdot 4$

n  $r \cdot r + 6$

o  $9 + 3 \cdot 9$

$$a: x+8$$

$$b: 3 \cdot x$$

$$c: x-7$$

$$d: a+9=x$$

$$e: x-7$$

$$f: x+5-8$$

$$g: x$$

$$h: x^3 - \frac{1}{x} = 6$$

$$i: x + x_1$$

$$k: x + (x+1) = 9$$

$$l: x + (x \cdot 2) + (x \cdot 3) = 12$$

$$m: r + r + r + r$$

$$n: (r \cdot (r+6)) \div 2$$

$$\bar{n}: ((a+3) \cdot a) \div 2$$

traducir las expresiones:

Q) un número aumentado en 8 =  $n+8$

B) El producto de tres y un número =  $3+n$

C) un número disminuido en siete =  $x-7$

D) la edad de Juan dentro de nueve años  
Si hoy tiene "a" años =  $a+9=y$

E) la diferencia entre siete y un número =  $x-7$

F) cinco veces un número menos ocho =  $5x-8$

G) un número par =  $2x$

I) El cubo de un número menos su cuarta  
Parte es igual a sesenta y tres =  $(x^3-4)=63$

J) La suma de dos números consecutivos =  $x+(x+1)$

K) La suma de un número y su siguiente  
es nueve =  $\frac{1}{9}$

L) un número mas su doble mas su triple es  
igual a doce =  $2x+3x=12$

M) El Perimetro de un cuadrado de lado  $x$  =

$$a. x + 8 = 8x$$

$$b. 3m$$

$$c. x - 7 = 7x$$

$$d. 9 - a = 9a$$

$$e. 7 = x$$

$$f. 8^x - 8 = 8x$$

$$g. x \times 5$$

$$h. 4^3 - 4x = 68$$

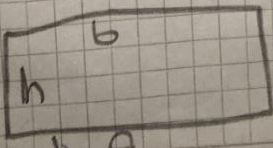
$$i. 3x - 1 = 34$$

$$k. 9 + 4x^2 = [x + (x+1)]^2$$

$$l. 2x + 3 \cdot (x+1) = -12$$

$$m. p = 66.57$$

N.

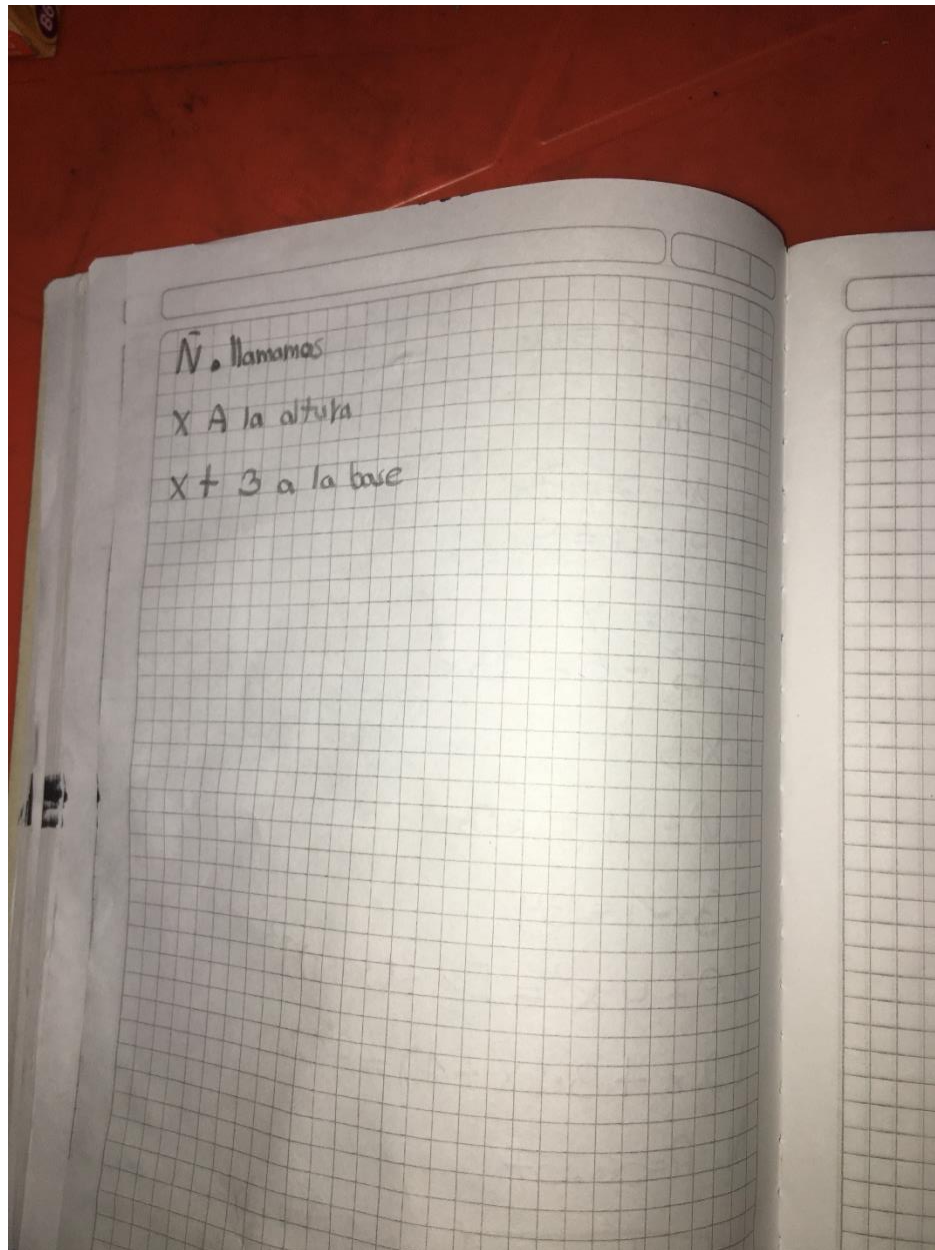


$h = 4$

$$A = b \cdot h$$

$$A = 9 \cdot 4$$

$$A = 36$$



$$A) x + 8$$

$$B) x + 3 + z$$

$$C) x - 7$$

$$D) a + 9$$

$$E) 7 - x$$

$$F) 5x - 8$$

$$G) 2x$$

$$i) a^3 - \frac{a}{4} = 63$$

$$j) x + (x + 1)$$

$$k) M + (M + 1) = 9$$

$$l) a + 2a + 3a = 12$$

$$m) p = x + x + x + x = 4x$$

$$A = x \cdot (x + 6)$$

$$n) A = x^2 + 6x$$

$$o) A = (a + 3) \cdot a$$

$$A = a^2 + 3a$$

## Actividad

a.  $x + 8$

b.  $3 \cdot x$

c.  $x - 7$

d.  $x + 9$

e.  $7 - x$

f.  $5x - 8$

g.  $4$

h.  $x^2 - 24 = 63$

i.  $x + 5$

j.  $x + 8$

k.  $2x + 3x = 9$

l.  $x$

m.  $x + 6$

n.  $3 + 9$

# Lenguaje Algebraico

a  $x^p + 8$

b  $3 \cdot x / 3 \times a$

c  $x - 7$

d  $a + 9 =$

e  $7 - b$

f  $(5F) - 8$

g  $2p$

h  $(z)^3 - \frac{z}{4} = 73$

j  $c + (c + 1)$

k  $n + (n + 1) = 9$

L  $d + 2d + 7d = 12$

m  $x + x + x + x \Rightarrow 4x$

n  $x \times (x + 6) \Rightarrow x(x + 6)$

ñ  $(a + 3) \times (a) \Rightarrow a(a + 3)$

Mes

Día

Año

