ANÁLISIS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO SOBRE EL SURGIMIENTO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Liset Fernanda Sánchez Ibarbo

Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

2016

ANÁLISIS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO SOBRE EL SURGIMIENTO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Liset Fernanda Sánchez Ibarbo

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Dirigido por:

Mg. Diego Díaz Enríquez

Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

2016

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico ______________________

Fecha

Día	Mes	Año
3	Sept.	2016

Código del programa: 3469

Resolución del programa: ______

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
Análisis Histórico Epistemológico sobre el surgimiento de la Distribución Normal.

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☒

Director
Diego Diaz
Nombre del Primer Evaluador
Gabriel Conde.
Nombre del Segundo Evaluador
Ruben Dario Corrales.

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Liset F. Sanchez.	1358875	3469		3154529983

Evaluación

Aprobado ☒ Meritorio ☒ Laureado ☐

Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ______ (máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ______ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* ____ ____ ____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones ☐	Observaciones ☐	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐

Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

Es un trabajo que cumple con los objetivos propuestos. Presenta buena redacción. El marco teórico es adecuado, se reconoce todo el aporte en los aspectos teóricos y metodológicos desarrollados por la estudiante. Es un estudio muy detallado del surgimiento de la distribución normal.

Los evaluadores deciden que el trabajo es APROBADO y se sugiere mención Meritoria por los aportes a nivel de la historia de la probabilidad.

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Agradecimientos

A Dios por darme esta valiosa oportunidad, por la salud y la vida que me permitieron culminar esta etapa.

A mis padres por su paciencia, amor y apoyo en todo este camino.

A mi tutor de trabajo de grado, por sus recomendaciones y consejos que ayudaron a estructurar este proyecto.

A todos mis profesores de la universidad del Valle, por contribuir a mi formación.

Al profesor Gabriel Conde, por sus observaciones y recomendaciones.

A mis compañeros y amigos de la Universidad del valle sede norte del Cauca, por su apoyo y cortesía para cumplir este propósito.

Tabla de contenido

Tabla de Figuras

Resumen

El presente trabajo es un estudio histórico epistemológico acerca del surgimiento de la distribución normal vía probabilidad, en el que se caracteriza los aportes que brindaron Jacob Bernoulli, Pierre Simon Laplace y Abraham de Moivre a la formación de este concepto. Como consecuencia de ese proceso se presenta el quincux de Galton, que es una máquina que surgió a lo largo de la historia para modelar la distribución normal. Este trabajo se realiza con el fin de comprender algunos aspectos que rodearon la constitución de esta distribución, para brindar elementos históricos y epistemológicos en este caso el quincux, que aporten a la comprensión y enseñanza del concepto de distribución normal.

Palabras Clave: distribución normal, Historia probabilidad, Abraham Moivre, Campana de Gauss.

Introducción

Esta propuesta surge de la experiencia obtenida en el curso de inferencia estadística, que ofrece la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca, para el programa de Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, en donde algunos estudiantes presentaron dificultades para la comprensión del concepto de distribución normal.

Este trabajo es un estudio histórico epistemológico que se realiza con el fin de aportar a la formación docente y a la educación básica, en particular a la enseñanza de la estadística, en el caso del concepto de distribución normal, debido a que este tipo de estudio, le permite al docente comprender adecuadamente un concepto, ya que proporciona las distintas ideas que ayudaron a forjarlo, las dificultades que tuvo en su desarrollo, el contexto en el que apareció, las distintas soluciones o definiciones que se le asignaron. (Urbaneja, 2004) afirma "El profesor que esté al corriente de la Historia, además de aprovechar el legado histórico para enriquecer su actividad docente, al conocer y comprender las dificultades de los contenidos impartidos manifestará una actitud prudente, precavida, paciente y encontrará sugerencias y apoyos que faciliten la introducción de los nuevos conceptos" (p. 24).

Este análisis histórico epistemológico expone como surgió el concepto de distribución normal y los distintos aportes que brindaron autores como J. Bernoulli, A. Moivre y P. Laplace, lo que permite comprender que la distribución normal, no es un concepto estático, este se desarrolló en determinado contexto, además no solo se utiliza para los juegos de azar. También brinda al docente una idea de cómo introducir este concepto en la educación básica a través del quincux de Galton.

De esta manera, se aporta a la enseñanza de la estadística, debido a que en muchas instituciones de educación básica y media no se enseña o si se hace es de forma general, ya que muchas veces se deja para el último periodo del año lectivo, y no alcanzan a abordar ya sea por la falta de tiempo o por la formación del docente, debido a que algunos de estos no han adquirido una comprensión adecuada de conceptos estadísticos, evitando enfrentarse a esos temas, porque no se sienten seguros, dejando así de un lado esta disciplina.

Así surge el propósito de este trabajo, que es brindar herramientas para que el docente pueda comprender y tratar de enseñar mejor el concepto de distribución normal. Aunque es un concepto que no está estipulado en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas del 2003 (MEN 2003), no quiere decir que no se puede abordar desde la educación básica, al contrario se puede introducir ya que es un concepto que tiene muchas aplicaciones, se enseña en distintas carreras universitarias y si se introduce desde la escuela tal vez a los estudiantes se les facilite la comprensión. (Carmen Batanero & Juan Godino, 2001) Afirman que esta distribución modela distintos problemas reales en distintos campos como:

- Problemas biológicos: distribución de las tallas, pesos y otras medidas físicas de un conjunto numeroso de personas de una determinada edad.
- Datos psicológicos: coeficiente de inteligencia, tiempo de reacción, puntuaciones en un examen o test, amplitud de percepción.
- Problemas físicos: distribución de los errores de observación o medida que aparecen en los estudios acerca de fenómenos meteorológicos, físicos, astronómicos, etc.
- Datos económicos: distribución de las fluctuaciones de los índices de precio o de las cotizaciones en bolsa de un cierto valor alrededor de la línea de tendencia.
- Problemas técnicos: distribución de las medidas de piezas manufacturadas, etc.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos, el primero se denomina contextualización de la problemática, en el cual se encuentran los aspectos que se vinculan con la problemática que es el objeto de estudio, se exponen la pertinencia de los estudios históricos epistemológicos, un estudio acerca de la distribución normal en la Educación Matemática, y por último la metodología empleada para llevar a cabo esta investigación.

El segundo capítulo se titula origen general de la teoría de la probabilidad, en el cual se aborda de manera breve el desarrollo de la teoría de la probabilidad basada en la solución al problema del reparto brindada por Pacioli, Tartaglia, Cardano, Pascal, Fermat y Huygens. Esto se realiza debido a que para la constitución del concepto de distribución normal, se necesitó primero el desarrollo del cálculo de probabilidad, además en la solución que brindó pascal al problema del reparto mediante el triángulo aritmético se evidenció propiedades de la distribución binomial y este fue el vínculo para llegar a la distribución normal.

El tercer capítulo, titulado pioneros en la constitución de la distribución normal, presenta los aportes de J. Bernoulli, A. de Moivre y P. Laplace a la distribución normal. Enfatizándose en el aporte de A. de Moivre.

En el capítulo cuatro se expone a manera de reflexión, cómo se puede introducir el concepto de distribución normal desde la educación básica con base en el quincux de Galton, aclarando que no es una propuesta didáctica ya que este no es el objetivo de este trabajo, se pretende evidenciar que en la historia se pueden encontrar elementos que aporten a la enseñanza de la matemáticas, en este caso a la enseñanza de la estadística y probabilidad con el concepto de distribución normal aunque no esté estipulado en los estándares de competencias matemáticas.

Capítulo 1

1. Contextualización a la problemática del trabajo

1.1 Planteamiento del problema

La distribución normal es un concepto probabilístico, conocida por muchos como la campana de Gauss, sin embargo se empezó a consolidar mucho antes de Friedrich Gauss, a lo largo de la historia se pueden evidenciar dos vías por las cuales surgió la distribución normal, la primera es vía teoría de errores que inició con los antiguos astrónomos, en donde se pueden mencionar autores como Galileo Galilei, Thomas Simpson, Daniel Bernoulli, Friedrich Gauss, quienes trabajaron y aportaron en la búsqueda de una curva que modelara los errores experimentales cometidos al realizar distintos tipos de mediciones.

La segunda vía es la de la probabilidad, en la cual se pueden encontrar personajes como Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Pierre Simón Laplace, en la que se convirtió en una herramienta que permite calcular algunos problemas probabilísticos. Es pertinente aclarar que la distribución normal es el resultado de una experimentación en la que se trató de mejorar el trabajo que realizó Bernoulli con respecto a la distribución binomial. Las pretensiones de este trabajo implican realizarlo por la segunda vía.

En muchos programas de pregrado, se dictan cursos introductorios de estadística o inferencia estadística, en donde no solo se incluyen contenidos de estadística descriptiva también abarcan contenidos importantes de inferencia como contrastes de hipótesis, estimación puntual, distribuciones, entre otros, sin embargo algunos estudiantes no logran comprender estas nociones, (Tauber, 2001) menciona algunas de las razones por las que ocurre esto, afirma que debido a la falta de conocimientos matemáticos previos que presentan los estudiantes al llegar a la universidad se les dificulta la comprensión de la estadística y su estudio formal, incluyendo la distribución normal, ya que deben hacer uso de conceptos como: funciones, derivación, integración, limites funcionales y otros temas.

Esto lleva a que el docente omita la parte formal de la matemática, para recompensar esa falta de conocimientos previos de los estudiantes, como afirma Moore citado por (Tauber, 2001) "falto de la posibilidad de demostrar a sus alumnos las propiedades y relaciones que les enseña, la estadística se convierte en un objeto misterioso, cuyos principios se aceptan sin comprenderlos y cuyas reglas y métodos de cálculo se memorizan y aplican mecánicamente." Resultando así, profesionales que aplican la distribución normal de forma mecánica sin comprender el concepto y sus propiedades.

Por tal razón no solo es importante el conocimiento matemático con el que deben llegar los estudiantes a programas de pregrado, también se hace necesario que desde la educación media se introduzca el concepto de distribución normal, esto podrá facilitar la comprensión, pues ya los estudiantes llegan con un conocimiento previo. Del mismo modo que está establecido en los lineamiento curriculares de matemáticas (MEN, 1998) "Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística, y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática"(p. 47). Esto se puede evidenciar con la distribución normal ya que modela adecuadamente fenómenos físicos, biológicos, sociológicos y psicológicos, como el efecto de un medicamento en cierta comunidad, medidas antropométricas1, cuestionarios, etc. siendo útil en distintas profesiones como ingenieros, psicólogos, médicos, biólogos, administradores y sobre todo licenciados en matemáticas que son los encargados de la enseñanza de la estadística y probabilidad en la educación básica y media.

La estadística y la probabilidad permean el pensamiento aleatorio, otra razón importante para la introducción del concepto de distribución normal, ya que de acuerdo con los estándares de competencia básica en matemáticas el pensamiento aleatorio (MEN, 2006) "Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos". (p. 64)

Para realizar este trabajo fue necesario revisar investigaciones, estudios y artículos relacionados con el aprendizaje, enseñanza y el desarrollo del concepto de distribución normal. Al realizar ese rastreo bibliográfico, se encontraron pocas investigaciones al respecto, por tal razón se siente la necesidad de asumir una postura constructivista desde lo histórico y epistemológico, para aportar a la educación matemática, en particular a la estadística. Por esta razón se realiza un estudio histórico epistemológico sobre la constitución de la distribución normal, como afirma Anacona "Esta clase de estudios ofrece significativos aportes a la Educación Matemática, pues tener un conocimiento sobre los diversos aspectos y conceptos que han incidido en la construcción de una teoría, permite formarse una idea más completa del discurso matemático en la que aparecen otros elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad, los cuales generalmente se ocultan bajo una presentación acabada y netamente formal" (Anacona, 2003 p. 33). Y así estudiar, analizar y comprender distintos aspectos que rodearon la construcción del concepto de distribución normal aportando a la educación matemática con elementos históricos y epistemológicos sobre este concepto.

Originándose así un problema relacionado con algunas de las dificultades históricas y epistemológicas que se encuentran inmersas en el desarrollo del concepto de distribución normal para la cual surge la siguiente pregunta que será la directriz de este trabajo:

¿Cómo inició la distribución normal vía probabilidad?

1.2 Justificación

Este trabajo de grado es un estudio histórico epistemológico acerca de la constitución de la distribución normal vía probabilidad, por tal razón se presenta a continuación la pertinencia de un estudio histórico epistemológico en la educación matemática y la pertinencia de un estudio sobre la distribución normal en la educación matemática.

1.2.1 Pertinencia de un estudio sobre la distribución normal en la Educación Matemática.

Es necesario darle importancia a los conceptos de estadística en la Educación Matemática, en este caso al de distribución normal, ya que muchas veces se dejan de lado y se enfatiza en otros como, los aritméticos, algebraicos, geométricos, etc. Esto es necesario porque los conocimientos de estadística se pueden aplicar a diferentes ciencias y disciplinas, como la medicina, sociología, psicología, sirven para modelar fenómenos, etc. Y así se resalta su importancia. A continuación se presentan otras razones las cuales evidencian el valor de una investigación sobre la distribución normal en la Educación Matemática:

- Falta de proyectos de investigación en Educación Matemática sobre la distribución normal en Colombia: al indagar sobre investigaciones en Educación Matemática relacionadas con la distribución normal, aparecen muy pocas en Colombia, al revisar la base de datos de la Universidad del Valle, se encuentran muy pocos estudios, artículos, trabajos de grado sobre este concepto, y más aun con relacionados con su historia. Al encontrar tan poco en la base de datos de la Universidad del Valle, se realizó una búsqueda en bases de datos de distintas universidades de Colombia, y aparecen artículos que se han presentado en algunos congresos sobre la historia de la distribución normal y muy pocos relacionados con la enseñanza de la distribución normal. Por tal razón este trabajo de investigación será un aporte a la Educación Matemática, sobre todo a la enseñanza de la estadística y a la formación de docentes.

- Distintas aplicaciones en otros campos: muchos de los conceptos de estadística se utilizan en distintas disciplinas, como la combinatoria, medidas de tendencia central, igualmente la distribución normal también se utiliza en otras ciencias y disciplinas, ya que esta distribución permite modelar distintos fenómenos de la vida real de manera adecuada como, el efecto de un medicamento en un grupo de personas, estudios relacionados con las medidas antropométricas, con el coeficiente intelectual, resultados de cuestionarios o pruebas como las que realiza el Icfes, etc.
- Formación de docente: este estudio le aportará a la formación y autoformación del docente, ya que le permitirá comprender la forma en que se constituyó la distribución normal y rastrear los aspectos culturales, políticos, sociales, matemáticos, que rodearon su constitución, como afirma Anacona “Un estudio histórico-epistemológico acerca de la génesis y consolidación de estos conceptos da cuenta de la complejidad que los rodea.

A parte de las razones anteriores por las cuales es importante un estudio sobre la distribución normal, Tauber (2001) menciona distinta razones que dan profesores e investigadores sobre la importancia de un proyecto de investigación sobre este tema, a continuación se presentan algunas de esas razones:

Las mencionan educadores de estadística como como Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) y Wilensky (1995 b, 1997):

- Muchos fenómenos físicos, biológicos, psicológicos o sociológicos, pueden ser adecuadamente modelizados mediante la distribución normal: Medidas antropométricas, puntuaciones en test y cuestionarios, errores de medición, etc.
- La distribución normal es una buena aproximación de otras distribuciones, como la distribución binomial, de Poisson o T de Student, para ciertos valores de sus parámetros.
- El teorema del límite central asegura que la media y otros resúmenes estadísticos de las muestras aleatorias tienen una distribución aproximadamente normal, en poblaciones no normales, para muestras de suficiente tamaño.
- Muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación.(Tauber, 2001, p. 16)

1.2.2 Pertinencia de un estudio histórico epistemológico en la Educación Matemática.

Desde hace varios años se han venido realizando proyectos de investigación, artículos, congresos a nivel nacional e internacional destacando la importancia de la historia en la Educación Matemática, ya que en muchas ocasiones solo se tienen en cuenta otros aspectos de la Educación Matemática como lo didáctico, lo pedagógico, el lenguaje, y se deja de lado los aportes que brinda la historia a esta.

Hay dos formas de abordar los estudios históricos entorno al conocimiento científico una *internalista* y otra *externalista,* la primera considera que el objeto de la Historia de las Ciencias, es la ciencia misma, es decir, se trata de hacer la historia de un concepto desde su producción lógica, mientras que en la externalista se cree que las explicaciones sobre acontecimientos científicos se pueden obtener primordialmente desde el ámbito social, postura que se acerca más a una sociología de las ciencias (Anacona 2003, p. 31). De acuerdo a esta clasificación este proyecto de investigación se realizará de forma internalista, sin dejar de lado algunos aspectos sociales, culturales y políticos que rodearon la constitución de la Distribución normal.

Dentro de la historia y su relación con las matemáticas hay unas posibles líneas de investigación: *Historia y epistemología de las matemáticas*, *Historia y enseñanza de las matemáticas* e *Historia social de las matemáticas*, que nos menciona Anacona, este trabajo será realizado por la primera línea Historia y epistemología ya que se pretende realizar el análisis teniendo siempre en cuenta el contexto particular en el que se dio la producción teórica del concepto distribución normal, además un estudio histórico epistemológico como lo afirma Anacona "Un estudio histórico epistemológico acerca de la génesis y consolidación de estos conceptos da cuenta de la complejidad que los rodea y de los múltiples aspectos que incidieron en su construcción teórica."(Anacona, 2013 p. 33) al analizar esa complejidad que rodea un concepto permite visualizar las dificultades que pueden presentar los estudiantes en el aula de clase en el momento de la enseñanza de este, además le permite al docente una mayor comprensión de ese concepto.

Cabe resaltar que desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se resalta la importancia de la historia en la Educación Matemática, "El conocimiento de la historia proporciona además una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas: posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para la construcción de nuevo conocimiento”. (MEN 1998, p. 15)

Por tal razón, la historia permite dejar de lado esa percepción que se tiene de la Educación Matemática, como aburrida, aislada de las demás ciencias, difícil de entender y como acabada, porque al comprender la historia de esta se pueden evidenciar distintos contextos que rodearon la constitución de los conceptos y que estos son creación del hombre.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General.

Realizar un análisis histórico epistemológico sobre el inicio de la distribución normal, para brindar elementos a la Educación Matemática que faciliten la comprensión de este concepto.

1.3.2 Objetivos Específicos.

- Determinar aspectos históricos y epistemológicos que rodearon la constitución de la distribución normal por la vía probabilidad.

- Caracterizar los principales aportes de J. Bernoulli, A. de Moivre y P. Laplace a la distribución normal.

- Evidenciar la posibilidad de introducir la distribución normal desde la educación básica a través del quincux de Galton.

1.4 Metodología

Este trabajo es un estudio histórico- epistemológico, acerca de la constitución de la distribución normal, se realiza para dar cuenta de algunos aspectos que rodearon la constitución de este concepto, se ejecuta por la línea de formación de Historia y Epistemología de las Matemáticas, estipulada en la estructura curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática ofrecida en la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca. Un estudio histórico epistemológico "se realiza teniendo siempre en cuenta el contexto particular de producción teórica. Aunque los estudios se realizan fundamentalmente al interior de la teoría, ellos se elaboran bajo la consideración de que el discurso matemático es una actividad de razonamiento que se desarrolla en un medio sociocultural específico" (Anacona, 2003, p. 32), es decir, en este trabajo además del contexto matemático, se tiene en cuenta el contexto social, cultural que rodeo el surgimiento de la distribución normal.

Se conocen dos formas de abordar los estudios históricos epistemológicos, las cuales son, internalista y la externalista, la primera se hace la historia del concepto, con base en su estructura lógica de producción y en la segunda, se tiene en cuenta el ámbito social, ya que se cree que desde ahí se puede obtener la historia acerca de la naturaleza de un concepto. Este trabajo se realiza desde la internalista, que se puede evidenciar mediante una estructura cronológica de los aportes que brindaron personajes para la constitución de la distribución normal, sin dejar de lado la externalista, ya que al final del trabajo se menciona el uso de la distribución normal en otros contextos, haciendo uso del quincux.

En este trabajo se tienen en cuenta los aportes que brinda Jacob Bernoulli con su Ars Conjectandi a la distribución normal, luego la Doctrina del Chance de Moivre, en donde llega a la aproximación de la normal por la binomial cuando $p = \frac{1}{2}$, posteriormente Laplace con la demostración general del teorema Laplace-Moivre, finalmente el uso que le dio Galton al quincux para probar la distribución normal.

Por los parámetros de esta investigación en cuanto a tiempo y extensión, se enfoca en la Doctrina del Chance de Abraham de Moivre quien fue el primero en dar con la aproximación de la binomial por la normal y a quien pocas veces se le reconoce el trabajo que realizó.

Este trabajo de investigación se realiza en tres momentos, el primero consiste en realizar una consulta y selección bibliográfica relacionada con la problemática, que permita dar cuenta de aspectos históricos y epistemológicos de la construcción del concepto de distribución normal, y posibiliten evidenciar de qué manera se puede llevar al aula de clase. Entre los textos seleccionados están la *The Doctrine of Chance* de Abraham de Moivre, *A History of Probability ans statiscs and their applications before 1750* de Anders Hald, la tesis doctoral *La construcción del significado de la distribucion normal a partir de actividades de análisis de datos* de Liliana Tauber, entre otros.

El segundo es, análisis de los textos y escritura de capítulos, se iniciará con los que aportan aspectos históricos y epistemológicos de la construcción del concepto de distribución normal, como el texto de Anders Hald, *A History of Probability ans statiscs and their applications before 1750,* ya que este autor hace un recorrido sobre la historia de la probabilidad hasta 1750, en el cual menciona a Jacob Bernoulli, Moivre, sus textos y aportaciones a la probabilidad y estadística. Se continuará con *The Doctrine of Chance* analizando los problemas y casos planteados por de Moivre para llegar a la aproximación de la binomial por la normal entre otros que aporten a la historia.

Por último se pretende analizar cómo se puede llevar el concepto de distribución normal a la educación básica mediante el quincux, conocido como la máquina de Francis Galton, teniendo en cuenta la tesis doctoral de Liliana Tauber *La construccion del significado de la distribción normal a partir de actividades de analisis de datos,* y los textos de Stigler *the History of Statistics Statistics on the table, the history of statistical Concepts and Methods,* también se analiza *A History of* *mathematical Stastistics from 1750 to 1930* de Hald, aclarando que no es una propuesta didáctica, ya que puede ser otro trabajo de grado, sino que se realiza a manera de recomendación para que los docentes puedan tener en cuenta en la enseñanza de la estadística en la educación básica. Este proceso se resume en la figura 1.

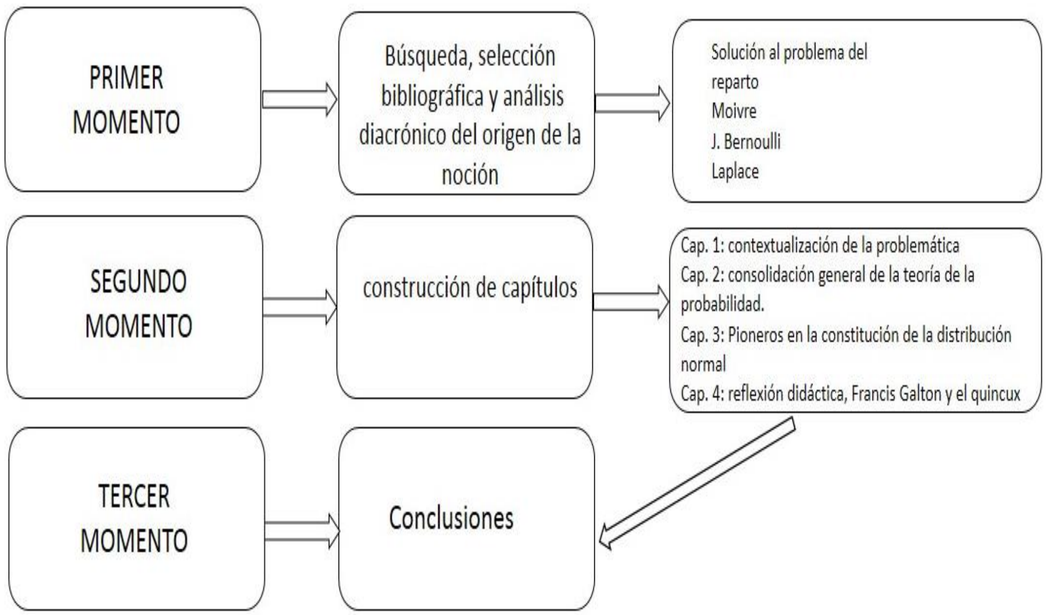

Figura 1: Metodología.

Capítulo 2

2. Consolidación general de la teoría de la probabilidad como antecedente de la distribución normal

Muchos investigadores le atribuyen el surgimiento de la teoría de la probabilidad al problema *el reparto de la apuesta* o *problema del reparto,* el cual trataron de resolver diferentes matemáticos, sin embargo la solución acertada se dio en el siglo XVII, mediante la correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat, la cual fue motivada por el caballero de Meré. El *reparto de la apuesta* es un ejemplo que permite identificar las dificultades que pueden presentarse para consolidar una teoría, ya que en el bosquejo de soluciones acertadas a este problema, los matemáticos atravesaron una serie de inconvenientes y obstáculos para hallar su solución y así afianzar una teoría.

Luca Pacioli en 1494 formuló el problema del reparto de la siguiente manera:

> *Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué parte del dinero del premio le corresponde a cada bando.*

2.1 Soluciones al problema del reparto

2.1.1 Solución dada por Fra Luca Pacioli.

Es el primer conocido en intentar solucionar este problema, en su obra *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalità (1994),* afirma la dificultad para solucionarlo: *He encontrado que las opiniones sobre la solución difieren de una persona a otra pero, todos parecen insuficientes argumentos. Yo afirmo la verdad y doy la forma correcta de* *solucionar este problema*. Pacioli propuso una solución aritmética, la cual era dividir la apuesta de forma proporcional al número de puntos obtenidos, que involucra los siguientes cálculos $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$, donde $\frac{8}{11}$ equivale a los 22 ducados, por tal razón, al ganador le corresponde $\frac{5}{11}$ de 22 ducados y al que va perdiendo le corresponde $\frac{3}{11}$ de la apuesta. Sánchez y Valdés (2001) afirman. "Pacioli propone y resuelve otros problemas de este tipo y en todos utiliza un reparto proporcional a los puntos obtenidos por cada jugador en el momento en el que el juego es interrumpido. Esta forma de solucionar el problema se consideró correcta en un tiempo" (p.213). Sin embargo hay que observar que Pacioli no tiene en cuenta que el grupo que perdió puede exigir que la apuesta se reparta por igual a los dos grupos, pues desde el inicio se pactó a un término y no hubo una cuerdo sobre otra eventualidad del juego.

2.1.2 Solución dada por Niccolo Tartaglia.

Tartaglia consideró que la solución de Pacioli no era correcta y en 1556 la retoma en su obra *Trattato generale di numeri et misure*, haciendo la siguiente suposición: si en un juego un grupo ha ganado 10 puntos y el otro 0 puntos, el grupo que tiene 10 puntos debería recibir toda la apuesta.

Tartaglia resuelve el problema bajo la siguiente situación: en una partida de 60 puntos A ha ganado 50 puntos y B ha ganado 30 puntos ¿Cómo debería repartirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?

De acuerdo con (Diaz, 2012) A está 2 juegos adelante y a 1/3 del total de juegos requeridos para ganar. Por lo tanto A debería tomar 1/3 del total de la apuesta; esto es 5/3=1 $\frac{2}{3}$, luego el jugador A debería recibir 5+1 $\frac{2}{3}$ =6 $\frac{2}{3}$ y el jugador B recibe 5 - $\frac{2}{3}$= 3 $\frac{1}{3}$. Lo que finalmente da la proporción de 2:1." (p.56). Se puede observar que si se continua el juego B podría lograr la cantidad de puntos que tiene A, también podría superarlo y ganar el juego, este es un argumento en contra de la propuesta de Tartaglia, quien parece no haber quedado satisfecho con su solución, ya que concluye su exposición con la siguiente observación: *La resolución de tal pregunta debe ser más judicial que matemática, de modo que cualquiera sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar*.

2.1.3 Solución dada por Girolamo Cardano.

Retoma el problema en su obra *Practica arithmeticae generalis (1539)* critica la solución propuesta por Pacioli, brinda una nueva dirección para solucionar el problema, se trata de tener en cuenta el número de juegos que a cada jugador le hace falta para ganar, en caso de que este continuara, Sin embargo la solución que propone no es la correcta. De acuerdo con (Garcia, 2000) la expresión que propone Cardano para la solución de problema es:

$$\frac{Parte\ \ de\ A}{Parte\ de\ B} = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n - q)}{1 + 2 + 3 + \cdots + (n - p)}$$

Donde n es el número total de puntos a jugar y p y q son los números de puntos ganados por A y B, respectivamente. Esa expresión es correcta para el caso particular planteado por Pacioli, pero no es válida de manera general.

2.1.4 Solución dada por Blaise Pascal y Pierre de Fermat.

En la mitad del siglo XVII en Francia, cien años después, empezaron a resaltar los primeros avances de la probabilidad, uno de ellos fue en 1654 cuando se inicia una correspondencia entre Pascal y Fermat, en donde algunas de esas cartas se han perdido, sin embargo se conserva gran parte de la epístola. En esa correspondencia Pascal y Fermat se enfrentaron a algunos problemas que habían sido propuestos por un personaje conocido como Chevalier de Méré. Entre los problemas propuestos se encontraba el problema del reparto de la apuesta.

Pascal y Fermat le dan un giro completo a los métodos utilizados por Pacioli y Tartaglia, ellos continúan con la idea de Cardano, teniendo en cuenta lo que le hace falta a cada jugador para ganar el juego. De acuerdo con las cartas encontradas Fermat respondió a Pascal con un método para resolver el problema, en el cual lo enuncia de la siguiente manera: Se suponen que hay dos jugadores A y B, al jugador A le faltan *a* lances para ganar y al jugador B le faltan *b* lances para ganar. Hay que determinar cuántos lances necesita cada jugador para terminar el juego. El enunciado que plantea Fermat es distinto al de los pensadores anteriores a Cardano, lo que se debe tener en cuenta son los lances necesarios para ganar y no los puntos o partidas ganadas por cada jugador.

De acuerdo con (Diaz, 2012). "Fermat supone que el juego terminará en $a+b-1$ lanzamientos. Así, hay que suponer todas las posibles combinaciones que harán ganar al primero, cuantas al segundo y como puede terminar este juego con dicha proporción. Fermat calcula el número posibles de combinaciones en esos $a+b-1$ lanzamientos como 2^{a+b-1}" (p. 66). Fermat supone que el juego terminará en cuatro lances con los dos jugadores, hay que determinar cuántas combinaciones harán ganar al primero, cuantas para el segundo y así dividir la apuesta de acuerdo con tal proporción. Las combinaciones posibles son:

(a,a,a,a); (a,a,a,b); (a,a,b,a); (a,b,a,a) (b,a,a,a); (b,b,a,a); (b,a,b,a); (b,a,a,b), (a,b,b,a); (a,a,b,b); (a,b,a,b); (b,b,b,a); (b,a,b,b); (b,b,a,b), (a,b,b,b); (b,b,b,b). Estos son las combinaciones posibles, donde aparecen 2 veces *a*, gana el primer jugador y donde aparece 3 veces *b* gana el segundo, de donde se deducen 11 opciones de A contra 5 de B, por tal razón la apuesta debe dividirse como 11 es a 5.

Pascal le hace una observación a Fermat y a su método de combinaciones, ya que no es necesario hacer cuatro lanzamientos para que termine el juego, pueden ser tres, dos o los cuatro, y si hubiese tres jugadores y al primero le falte un lance, al segundo dos lances y al tercero dos lances, el método no es tan general para este número de jugadores, pascal presenta las siguientes combinaciones para tres jugadores:

(a,a,a); (a,a,b); (a,a,c); (a,b,a); (a,b,b); (a,b,c); (a,c,a); (a,c,b); (a,c,c); (b,a,a); (b,a,b); (b,a,c); (b,b,a); (b,b,b); (b,b,c); (b,c,a); (b,c,b); (b,c,c); (c,a,a); (c,a,b); (c,a,c); (c,b,a); (c,b,b); (c,b,c); (c,c,a); (c,c,b); (c,c,c).

Esas son las combinaciones que se pueden hacer con tres jugadores, si al primero le faltan un lance, entonces en todas las combinaciones que haya por lo menos una *a* son favorables para él, y son en total 19, al segundo le faltan dos lances, entonces las combinaciones que tengan dos *b* le favorecen, hay 7, igualmente para el tercero todas las combinaciones que tengan dos *c* son favorables para él, también hay 7. Entonces se debería hacer el reparto de la apuesta con la proporción 19:7:7, lo cual sería un error ya que un mismo resultado favorece a más de un jugador. García (2000) afirma. “Sin embargo si se asigna la combinación al primero que gane el juego y no el lance parcial, entonces el método de Fermat sería válido” (p. 7). Por ejemplo en el caso *bcc*, el jugador que ganaría es b ya que es el primero, sin importar cuántos lances obtenga el siguiente jugador.

Pascal propone tres métodos para solucionar el problema de los puntos, el método recursivo, el método alternativo y mediante el triángulo aritmético. Al colocar los datos de la solución que hizo por medio del triángulo aritmético en una tabla, se puede observar un comportamiento que fue extraño para él, y permite evidenciar una propiedad de la distribución binomial, debido a que el triángulo aritmético no es el foco de este trabajo, se recomienda al lector interesado indagar en el texto de Edwards “*Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea”* o en *Historia de La Probabilidad Y La Estadística II (*A.H.E.P.E.).

En la figura 2 se expone la tabulación de los datos obtenidos mediante el triángulo aritmético, para dos jugadores

Juego	Total para el primer jugador	Parte que se extrae del segundo jugador
(1,2)	48	16
(1,3)	56	24
(2,3)	44	12

Figura 2: reparto de la apuesta. Para dos jugadores a y b

En la primera columna denominada juego, están las partidas que le faltan al jugador *a* y al jugador *b* para ganar el juego, es decir, en (1,2) al jugador *a* le falta una partida para ganar y al *b* le faltan 2, en toda la columna al jugador *a* tiene ventaja sobre *b*. en la segunda columna está el Total de monedas para el primer jugador que es quien tiene la ventaja, en esta se encuentra el valor que le pertenece a *a* en este caso son 32 monedas más lo que se le entrega *b*, en el caso de la primera fila (1,2), el jugador *a* cuenta con 32 y como *b* lleva desventaja le entrega 16 monedas, así *a* obtiene 48 monedas en total.

Santos y Camuñez (2007) afirman que Pascal observa el valor que le corresponde al jugador *a* en cada una de las partidas de forma individualizada, por ejemplo si se toma el juego (2,3) si el juego termina en tres partidas al primer jugador le falta 1 partida para ganar, y le corresponden 12 puntos del segundo jugador. Si se toma las partidas de este juego como aparece en la figura 3.

Partida	Valor de cada partida
1ª	12
2ª	12
3ª	8

Figura 3: Valor de cada partida en un juego

Al jugador 1 le pertenecen 12 puntos en la primera partida, entonces mediante sustracciones en la segunda partida le corresponden 12 y en la tercera 8. Pascal en una carta del 29 de julio establece dos tablas, en la primera es donde aparece el valor de cada partida según el total de partidas necesarias para ganar el juego e incorpora como máximo 6 partidas. Establece 256 puntos como apuesta por cada jugador para evitar fracciones. La figura 4 muestra las 6 partidas con sus respectivos valores.

		Número de Partidas					
		6	5	4	3	2	1
Valor de cada partida	1ª	0’2461	0’2734	0’3125	0’375	0’5	1
	2ª	0’2461	0’2734	0’3125	0’375	0’5	
	3ª	0’2188	0’2344	0’250	0’250		
	4ª	0’1641	0’1563	0’125			
	5ª	0’0938	0’0625				
	6ª	0’0313					

Figura 4: Valor de cada partida vs. Numero de partidas

Santos y Camuñez (2007) afirman “Pascal comenta acerca de la tabla anterior, veréis igualmente que, los números de la primera línea aumentan siempre; lo mismo los de la segunda; lo mismo los de la tercera. Pero a continuación, los de la cuarta disminuyen, los de la quinta, etc.” (p. 42). Eso es lo que le parecía extraño, y utilizando tres consecuencias del triángulo aritmético Pascal justifica el comportamiento de las filas que aparece detallada en Basulto y Camuñez (2007). Al realizar esta justificación se concluye:

Las observaciones empíricas sobre la tabla de Pascal nos llevan a formular y demostrar una propiedad de la familia de distribuciones binomiales simétricas, la cual resulta tangible, como se ha visto, al ir variando el parámetro n de la distribución, o sea, cuando se comparan distribuciones con distinto parámetro. Se ha visto, además, que la comparación resulta natural cuando se hace entre distribuciones con n par o con n impar. (Basulto y Camuñez, 2007, p. 46).

2.1.5 Solución dada por Christiaan Huygens.

Matemático Holandés, en 1655 visitó a parís por primera vez, había leído acerca de la correspondencia entre Pascal y Fermat, estaba muy interesado en establecer una conversación con ellos sobre el problema de los puntos, sin embargo, es ese viaje no pudo obtener esa reunión personal con estos personajes que era lo que pretendía. De regreso a Holanda Huygens investiga por su cuenta, retoma esos nuevos problemas planteados por Pascal y Fermat, resolviéndolos con sus propios métodos.

Huygens envía a su tutor Fran van Schooten la solución de esos problemas en un manuscrito titulado *Rekinigh in Spelen van Geluck* que incluía una carta introductoria en la que explica el contenido del manuscrito y aclara que esos problemas eran planteados por los sabios franceses sin mostrar sus soluciones, para colocarse retos entre ellos. Van Schooten realizó la traducción del manuscrito al latín con el título *de Ratiociniis in ludo aleae*, “Cálculo en los juegos de azar”.

El *Ratiociniis in ludo aleae* es muy importante, ya que fue el primer libro impreso en la teoría de la probabilidad, este pequeño tratado compuesto por 14 proposiciones más cinco problemas propuestos al lector dos de ellos pertenecen a Pascal, uno de Fermat y los propuestos por el mismo autor. (Diaz, 2012) Menciona que estos problemas se convirtieron en un reto para grandiosos matemáticos de la época como J. Bernoulli Y A. de Moivre.

En el *Ratiociniis in ludo aleae* Huygens hace referencia a la solución al problema de los puntos, a partir de la proposición IV hasta la IX en diferentes formas y con más de dos jugadores, se puede evidenciar en sus demostraciones la misma elegancia de exposición que tiene Pascal, utiliza el método de recursividad, pero lo que más se destaca en estas es la deducción de la esperanza matemática. (Diaz, 2012) Afirma. “Lo interesante de esta forma de demostración o método es que podemos inferir el tipo de "esperanza" o valor del juego en Huygens: aparentemente es de tipo aleatoria aunque algunos autores como Hacking afirman que hasta cierto punto Huygens se mantiene neutral entre las aproximaciones aleatoria y epistemológica acerca de la probabilidad". De las proposiciones en las que se presenta el problema de los puntos se considera la cuarta y su respectiva solución. El lector interesado se puede dirigir al *Ratiociniis in ludo aleae*.

> *Proposición IV: Suponga que acepta jugar con otra persona bajo la siguiente condición: El primero que consiga ganar tres juegos, se llevará el total de la apuesta. Yo he ganado dos de los juegos y mi oponente solamente uno. Sí aceptamos retirarnos del juego por alguna razón de fuerza mayor, ¿cómo debe ser repartida o dividida la apuesta de manera justa?*

Siguiendo a Huygens afirma: para considerar la proporción para cada jugador, se debe considerar que pasaría si el juego continúa. Si los jugadores aceptan continuar y el primero gana la partida el juego termina y obtendría el total de la apuesta, lo que se denomina como $\boldsymbol{a}$, y si el oponente es quien gana la primera partida, se tendría la misma posibilidad, pues a cada uno le hace falta un juego para terminar, este se representa como $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, en donde se divide la apuesta $\boldsymbol{a}$ entre dos y así tienen igual posibilidad de ganar o perder. Por tal razón el primer jugador tiene la posibilidad de conseguir $\boldsymbol{a}$ ó $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ por la primera proposición[1] y aplicando esta se obtiene $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a},$ entonces la proporción del primer jugador es $\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$ y de su oponente es $\frac{1}{4}$.

[1] Proposición I: Sí existe igual chance de recibir a y b, entonces el valor del juego o *expectatio* es $(a+b)/2$.

Uno de los impactos del *Ratiociniis in ludo aleae* ocurrió en 1713, fue la publicación del *Ars conjectandi* de Jacob Bernoulli, como complemento del tratado de Huygens, cuyo objetivo era darle mayor campo de aplicación a lo que él define como probabilidad.

A partir del trabajo de Huygens, Jacob involucró la palabra probabilidad que no era usada por los pensadores anteriores, además también planteó un problema del reparto aunque no lo nombró así y lo resolvió mediante binomios.

Capítulo 3

3. Pioneros en la constitución de la distribución normal vía Probabilidad

De acuerdo con el artículo *La distribución normal una rápida revisión histórica* de Gabriel Conde, el concepto de distribución normal se desarrolló a lo largo de la historia por dos vías, una es la de probabilidad y la otra la teoría de errores, este proyecto de investigación se enfoca en el desarrollo de la distribución normal por la vía probabilidad, en la que se encuentran autores como Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Simón Pierce Laplace. A continuación se presentan los aportes de cada uno a la distribución normal, enfocándose en la contribución de Abraham de Moivre, quien se apoyó en lo que J. Bernoulli dejó planteado en la cuarta parte del *Ars Conjectandi* y fue quien encontró la aproximación de la binomial por la normal, y se conoció como teorema de Moivre que luego fue generalizada por Laplace y se le dio el nombre de teorema de Moivre-Laplace.

3.1 Jacob Bernoulli

De sus hermanos fue el primero que inicio estudios en una universidad, investigó en las matemáticas y recibió un título de doctor. Su obra más destacada es el *Ars Conjectandi*, aunque quedó incompleta debido a su muerte. El *Ars Conjectandi* fue editado por su sobrino Nicolás I, quien invitó a matemáticos de la época para completar el trabajo que inició Jacob, sin embargo estos no aceptaron la oferta (Sánchez & Valdés, 2001). Por tal razón fue publicado en el año 1713 incompleto y se considera una obra muy importante para la teoría de la probabilidad.

El objetivo inicial de Jacob con el *Ars Conjectandi* era crear un tratado que se utilizara como manual en la teoría de la probabilidad para solucionar problemas relacionados con la toma de decisiones, descartar juicios, problemas prácticos de la vida cotidiana, situaciones morales y económicas. Aunque Jacob no logró su objetivo inicial con su tratado, si aportó de manera contundente a la teoría de la probabilidad, ya que muchas de las aplicaciones que se realizan con cálculo de probabilidad actualmente están relacionadas con la definición estadística de probabilidad que apareció por primera vez en su texto, que se relaciona con la conocida *ley de los grandes números*[2], así se le denominó tiempo después (Sánchez y Valdés, 2001).

El *Ars Conjectandi* está dividido en dos partes, en la primera Jacob continua con la obra de Huygens *De ratiociniis in ludo aleae.* La segunda parte aunque incompleta se considera la más importante de su obra y es la que se menciona en este trabajo, ya que en esta Jacob empieza a desarrollar su objetivo intentando realizar un manual matemático que se pueda utilizar para la solución de problemas de tipo social, moral y económico, además demuestra su teorema fundamental, conocido como teorema de Bernoulli, el cual de Moivre aborda en su *doctrine of chance* y llega a la aproximación de la binomial por la normal.

En virtud de la complejidad intrínseca de la demostración del teorema de Bernoulli, este trabajo se centra solo en las bases que realiza Jacob en el Ars conjectandi y en un ejemplo que el mismo utiliza para ayudar al lector a la comprensión del teorema:

Supongamos que una urna contiene 3000 bolas blancas y 2000 negras, pero este dato no es conocido del observador. Se quiere determinar la proporción de bolas blancas y negras en la urna por medio de la experimentación. Para ello se extrae una bola tras otra cierto número de veces, reintegrando siempre la bola antes de tomar la siguiente y se anotan los resultados obtenidos.

[2] Ley de los grandes números: conocida también como teorema de Bernoulli, Si la probabilidad de que ocurra un hecho en una prueba única es *p*, y se hacen varias pruebas, independientemente y en las mismas condiciones, la proporción más probable de que ocurran los hechos en el número total de pruebas es también p; aún más, la probabilidad que la proporción en cuestión difiera de p en menos de una cantidad dada, por pequeña que sea, aumenta al mismo tiempo que aumenta el número de pruebas.

Actualmente el teorema de Bernoulli establecería lo siguiente:

Dada una cantidad positiva cualquiera que denotamos por la letra ε y un número arbitrario C, puede encontrarse un número N (posiblemente muy grande) que depende de C, tal que la probabilidad de que $\frac{X}{N}$ difiera de p en no más que ε es mayor que C veces la probabilidad de que $\frac{X}{N}$ difiera de p en más que ε.

De acuerdo con Sánchez y Valdés (2001) en notación moderna, este resultado se puede escribir a través de la desigualdad:

$$P\left(\left|\frac{X}{N}-p\right| \leq \varepsilon\right) > C \cdot P\left(\left|\frac{X}{N}-p\right| > \varepsilon\right)$$

Es decir, la probabilidad de que $\frac{X}{N}$ este próxima a p es mayor que la probabilidad de que no lo este. Por lo tanto, el ejemplo mencionado anteriormente quedaría:

Cuando se toma C = 100 y ε = $\frac{1}{50}$, entonces N = 25,550. De acuerdo con el resultado habría que tomar 25,550 observaciones para que sea suficiente tener certeza para saber la proporción de bolas blancas y negras, con una probabilidad menor que 0,001. Para esa época 25,550 era un número muy grande, Jacob recibió muchas críticas con respecto a su teorema ya que se debe hacer un proceso laborioso y con gran dificultad que solo pocas personas pueden realizarlo ya que el número N de ensayos es demasiado grande. Sánchez y Valdés (2001) afirman. "Es Abraham de Moivre quien intentó mejorar la forma en la que J. Bernoulli estimó el número de ensayos necesarios para asegurar que la frecuencia observada se aproxime a la probabilidad buscada" (p. 232). Obteniendo así un resultado muy importante en la teoría de la probabilidad la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal.

3.2 Abraham de Moivre

Matemático que nació en la región francesa de Champagne, se exilió en Londres en busca de protección frente una persecución religiosa que le acechaba en Francia, hizo parte de los amigos de Isaac Newton y Edmund Halley, perteneció a la Sociedad de Londres (Royal Society), a pesar de ser miembro de diversas sociedades y academias de ciencia, nunca obtuvo una cátedra de matemáticas, por tal razón, se dedicó a dar clases particulares toda su vida, es famoso por haber pronosticado el día de su muerte, y por los trabajos matemáticos que desarrolló sobre la teoría de la probabilidad y aspectos analíticos de la trigonometría. En la teoría de la probabilidad publicó un tratado con el nombre *Mensura Sortis*, dos libros, *The Miscellanea Analytica* y *the doctrine of chance.*

De Mensura Sortis lo publicó en el año 1712, este tratado consta de un prefacio, una corta introducción, y la solución de 26 problemas, algunos comentarios sobre cómo establecer la probabilidad y un caso particular del problema de los puntos. De Mensura Sortis es importante en la historia de la probabilidad pues se considera el cuarto de los grandes tratados, siendo los tres primeros los de Huygens (1657), Pascal (1665) y Montmort (1708). (Hald, 1990, p.402)

En el año 1718 de Moivre publicó la primera edición de *the doctrine of chances*. En 1730 pública *the Miscellanea Analytica*, en la cual resume muchos de sus trabajos en matemáticas con una mejor versión de algunas demostraciones y brinda nuevos resultados. En 1738 la segunda edición de *the doctrine of chances* y la tercera en 1756. La primera edición de *the doctrine of chance* consta de 53 problemas sobre probabilidad, la segunda de 75 problemas sobre probabilidad y 15 sobre cálculo de anualidades, la tercera edición consta de 74 problemas sobre probabilidad y 33 problemas sobre cálculo de anualidades. En este trabajo de grado se tiene en cuenta la tercera edición de la doctrina del chance o de las probabilidades, ya que es la más actualizada de las tres.

3.2.1 La doctrina del chance tercera edición:

En esta Moivre muestra el desarrollo de la probabilidad, desde 1718 hasta 1756, teniendo en cuenta que cada nueva edición es una ampliación de las anteriores y se añaden nuevos problemas, nuevas observaciones y corolarios para los problemas existentes, como la aproximación de la binomial por la normal que la incluye a partir de la segunda edición.

De Moivre decidió escribir este texto en ingles debido a la población de lectores que podía tener. Aparentemente tomó esa decisión por razones económicas, pues él esperaba tener una gran cantidad de suscriptores para financiar la impresión de su texto, para demostrar su habilidad para resolver todo tipo de problemas relacionado con juegos de azar populares y poder fortalecer su negocio como consultor (monitor), que era a lo que se dedicaba para generar ingresos económicos Hald (1990). Moivre tuvo dos ejemplares a seguir para el desarrollo de su texto, uno de ellos era el *Ars Conjectandi*, escrito Jacob Bernoulli y el otro el *Ensayo de Montmort,* él eligió el segundo ejemplar, asimismo incorporó a su *doctrine of chance* elementos conceptuales de *Mensura sortis* y la sección de juegos de azar del ensayo de Montmort.

Esta edición de la doctrina del chance, contiene un prefacio y una introducción que son importantes para comprender el texto, debido a que en tiempos pasados los autores en el prefacio escribían definiciones, y pensamientos importantes que tenían con respecto a algo, ya que el cuerpo del texto estaba conformado por la solución de problemas, corolarios, lemas, observaciones, etc. Se utilizaba el prefacio o la introducción para expresar sus ideas y opiniones. Como en el caso de la doctrina del chance Moivre en el prefacio menciona que su texto es un tratado que puede ser útil para varios fines, además escribe los usos que puede tener, a continuación se mencionan algunos de ellos:

- Para conocer qué bases o fundamentos se tienen, cuando se involucre en el juego, ya sea por un motivo de ganancia o solo diversión, pueden, con la ayuda de este o del tiempo satisfacer su curiosidad… y dado por hecho que las demostraciones son correctas. (De Moivre, 1756, p. i)
- Ayuda a tratar algún tipo de superstición, que haya existido desde hace mucho tiempo en el mundo, por ejemplo, que en un juego no hay cosa tal como la suerte, buena o mala. (De Moivre, 1756, p. ii)
- Uno de los principales usos que tiene la doctrina del chance que puede ser aplicado, es el descubrimiento de algunas verdades, que no puede dejar de complacer a la mente, por su generalidad y su sencillez; la conexión admirable de estas consecuencias incrementarán el placer del descubrimiento, y las aparentes paradojas con que abunda, brindará un gran factor de sorpresa y entretenimiento a los curiosos. (De Moivre, 1756, p. v).

En la introducción de este texto de Moivre indica que la palabra probabilidad, incluye dos ideas, la primera es, el número de oportunidades de que un evento pueda ocurrir y la segunda, el número de posibilidades que le permita ganar o fallar, lo explica con el siguiente ejemplo:

Si me dicen que tengo tres oportunidades de ganar una cantidad de dinero, es imposible que solo con la afirmación pueda juzgar si puedo obtenerlo; pero si añado que el número de posibilidades, ya sea para ganarlo o perderlo, es cinco en total, a partir de ahí se producirá una comparación entre el número de posibilidades que están a favor o en contra de mí, con lo que se forma un verdadero juicio de mi probabilidad de éxito: a partir de donde se sigue necesariamente, que es la magnitud comparativa del número de oportunidades que suceda, en relación con el número total de posibilidades, ya sea a ganar o fallar, lo cual es la medida de la probabilidad.

En la tercera edición de doctrine of chance, Moivre intenta mejorar el resultado que obtuvo Jacob en la cuarta parte del Ars conjectandi, conocido como teorema de Bernoulli. La doctrina del chance está compuesto por una serie de problemas, corolarios, observaciones y lemas, al final del libro Moivre expone un método que está compuesto por casos, corolarios y observaciones, en el que plasma la aproximación de la binomial por la normal, y continua con este trabajo en Miscellanea Analytica.

Hald (1990) afirma. "Después de 20 años de la publicación de los resultados de James y Nicholas Bernoulli, de Moivre tiene éxito en la búsqueda de una forma precisa y sencilla de la aproximación de la distribución binomial" (p. 485) que se considera uno de los resultados más importantes de doctrine of chance, y aparece titulado como, *"A Method approximating the Sum of the Terms of the Binomial* $(a+b)^n$ *expanded into a Series, from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of Assent which is to be given to Experiments".*

Previamente a la publicación de este método, Moivre hace dos comentarios aparentemente incompatibles sobre la prueba del teorema fundamental proporcionada por Nicolás Bernoulli. Primero envía una carta a Nicolás en Marzo de 1714, en la cual expresa que "el problema de experimentos es de infinita belleza" refiriéndose a la demostración del teorema fundamental de Bernoulli (Sylla, 2014). Posteriormente otros autores admiraron el rigor y la belleza de la prueba de Bernoulli. Sin embargo, (De Moivre, 1756) en la tercera edición de la doctrina of chance comenta en una breve introducción que hace a su método de aproximación:

> A pesar de crear conjeturas con base en observaciones y teniendo en cuenta el poder de la probabilidad, un experimento podría obtener un resultado distinto al esperado, además un evento puede ocurrir fácilmente como no ocurrir, por lo tanto la razón es la mejor herramienta para deducir conclusiones acerca de un experimento. (p. 242)

En respuesta a eso Moivre, se toma la libertad e indica que este es el problema más difícil que se ha propuesto en el asunto del azar, y por esa razón lo ha dejado de último, además, pide disculpas si la comprensión de su solución no está al alcance de todos los lectores. También asegura que de su solución va a derivar algunas conclusiones que pueden ser útiles para cualquier persona.

Moivre (1756) afirma: Con el fin de la misma, lo haré aquí, traduciré aquí un documento mío que fue impreso 12 de noviembre de 1733, y comunicado a algunos amigos, pero nunca lo había hecho público, reservando para mí el derecho de ampliar mis propios pensamientos, cuando la ocasión lo exigiera. (p. 242). Por un lado Moivre considera que es un problema de infinita belleza y por el otro que es el problema más difícil en los asuntos del azar. Por esa razón lo deja de último en su texto.

Al traducir el método de aproximación de Moivre se titula:

> *Un método de aproximación de la suma de los términos del binomio $(a + b)^n$ expandido en una serie, de donde se deducen algunas reglas prácticas para estimar el grado de aceptación que ha de ser dado a experimentos.*

Moivre menciona que la solución de problemas de azar a menudo requiere que varios términos del binomio $(a + b)^n$ se sumen, sin embargo cuando son potencias muy altas se vuelve un trabajo tan laborioso y de gran dificultad, que pocas personas han llevado a cabo la tarea porque además, de James y Nicolás Bernoulli, dos grandes matemáticos, él no conoció alguien más que lo haya intentado (p.243). Moivre invita al lector a consultar Miscelánea Analytica en la que describe el método de Bernoulli.

Moivre consideraba de infinita belleza la estructura del método utilizado por Bernoulli para la demostración del teorema fundamental, y creía muy difícil y tedioso calcular las cantidades necesarias de términos. Debido a que no era un método breve y práctico para calcular sumas de términos buscados, solo Daniel y Jacob Bernoulli lograron esta tarea. Inclusive en corolarios Moivre se atreve a calcular por ejemplo, que si tiene un número infinito de experimentos (aparentemente no tenía problemas para trabajar con un número infinito de experimentos), la probabilidad de un evento que tiene la misma posibilidad de suceder o no estará dentro de los límites $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}$ y $\frac{1}{2n}-\frac{1}{2\sqrt{n}}$ y será expresado por el decimal 0.682688 (Sylla, 2014). Al igual que Jacob Bernoulli, Moivre estaba interesado en el desarrollo de la probabilidad matemática hacia ambos extremo, práctico y teórico.

Moivre realizó dos observaciones en su método de aproximación en la primera expresa algunas ideas coherentes con las opiniones Bernoulli:

> Remark I. From what has been said, it follows, that Chance very little disturbs the Events, which in their natural Institution were designed to happen or fail, according to some determinate Law... But we have seen in our LXXII Problem that although Chance may produce an inequality of appearance, and still a greater inequality according to the length of time in which it may exert itself, yet the appearances, either one way or the other, will perpetually tend to a proportion of Equality.....And thus in all Cases it will be found, that although Chance produces Irregularities, still the Odds will be infinitely great, that in the process of Time, those Irregularities will bear no proportion to the recurrency of that Order which naturally results from original design (p. 250).

De acuerdo con (Sylla, 2014) en la segunda observación, Moivre se refiere a la prueba de Bernoulli, aunque la prueba que realizó Jacob de su teorema era matemática parece que Moivre habla sobre el mundo, lo social. Lo, que se confirma con esta observación:

> Remark II. As, upon the Supposition of a certain determinate Law according to which any Event is to happen, we demonstrate that the Ratio of Happenings will continually approach

> to that Law, as the Experiments or Observations are multiplied: so, *conversely*, if from numberless Observations we find the Ratio of the Events to converge to a determinate quantity, as to the Ratio of P to Q; then we conclude that this Ratio expresses the determinate Law according to which the Event is to happen... Yet there are Writers, of a Class indeed very different from that of fames Bernoulli, who insinuate as if the Doctrine of Probabilities could have no place in any serious Enquiry; and that Studies of this kind, trivial and easy as they be, rather disqualify a man for reasoning on every other subject. Let the Reader chuse. (p. 251)

Moivre termina mencionando que el razonamiento que expresa en sus observaciones se puede aplicar en diferentes investigaciones sin necesidad de realizar una demostración rigurosa. Añade que muchos insinúan que la doctrina del chance no tiene cabida para una investigación seria y que un trabajo de este tipo fácil y trivial descalifica a un hombre para trabajar sobre cualquier tema. Moivre termina con la frase ¡que el lector elija!

El propósito de Moivre fue perfeccionar el teorema de Bernoulli, para el caso en el que $p = \frac{1}{2}$ el trabajo que realizó en la doctrina del chance fue descriptivo, sin embargo en notación moderna demostró:

Sea X ~ B(n, p), $P(x) = \binom{n}{p} p^x(1-p)^{n-x}$ *entonces, para valores grandes de n, X sigue una distribución aproximadamente normal N* (μ ,σ) *de media* $\mu = n\,p$ *y desviación típica* $\sigma = \sqrt{npq}$*; es decir la variable* $Z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ *sigue una distribución normal N (0,1).*

Moivre investigó los límites de la distribución binomial cuando el número de ensayos aumenta, encontrando una relación con la función e^{-x^2} e intento determinar, para valores grandes del número de ensayos n, la probabilidad de ocurrencia del valor central $2n$ de una distribución binomial, aproximándola a la expresión $\frac{2}{(k\sqrt{n})} \cdot \frac{1}{2n}$, en donde el valor de k lo descubrió Stirling el cual es $k = \sqrt{2\pi}$. La demostración de la aproximación de la binomial por la normal se encuentra en (Hald, 1990) para el lector interesado.

Cabe resaltar que Moivre hizo la aproximación para p = ½, este aporte fue importante en la teoría de probabilidad pues condujo al primer teorema del límite central, luego Laplace lo generalizó para el caso p arbitrario y es lo que se conoce como teorema de Moivre-Laplace.

3.3 Pierre Simon Laplace

Fue un astrónomo, físico y matemático, nació en Francia en la región de Calvados en el año 1794, en 1765 ingresa en la Facultad de Artes de Caen. A los 23 años ya pertenece a la Academia Francesa. En 1774 publica Memoria sobre la probabilidad de las causas por los sucesos. Inicialmente iba a dedicarse a la carrera sacerdotal, sin embargo, descubre su inclinación hacia las matemáticas y en 1771, apoyado por De Alambert obtiene plaza de profesor en la École Militaire donde dio clases a Napoleón.

Con referencia a la historia del cálculo de probabilidades y la estadística, los trabajos más destacados de Laplace son, la *Memoria sobre la probabilidad de las causas por los sucesos* de 1774 y la *Teoría Analítica de las Probabilidades* publicada en 1812, a la cual en la segunda edición se le agregó la obra *Essai philosophique sur les probabilités* escrita en 1814.

Laplace le dio un giro a los temas abordados en la probabilidad por sus antecesores, ya que ellos esencialmente investigaban problemas sobre juegos, él es quien inicia una formalización de la teoría de la probabilidad. Como afirma (Mateos & Aparicio Morales, 2002) “Así, en su memoria Sur les naissances, les mariages et les morts á Paris, Laplace aborda un problema de inferencia estadística sobre población, inaugurando de esta manera un campo de aplicación de la estadística a las ciencias sociales, que con tanto éxito se aplicaría en el futuro.” (p. 14). Ampliando así la aplicabilidad del cálculo probabilístico a otros campos investigativos, lo que se puede evidenciar actualmente, ya que se utiliza la inferencia estadística no solo en juegos de azar, sino también, en psicología, medicina, sociología, investigaciones de mercadeo, control de calidad, etc.

Todo esto permite justificar la capacidad y la importancia que tuvo Laplace en esta teoría, ya que advirtió desde el siglo XVIII las posibles aplicaciones de la estadística en el futuro. Con su frase «la probabilidad es básicamente el sentido común, reducido a cálculo» afirma que estaba seguro de la aplicabilidad universal del cálculo de probabilidades**.**

Las contribuciones de Laplace a la Teoría de la Probabilidad que se consideran importantes son el teorema de Moivre-Laplace y el actualmente llamado Teorema Central del Límite. El trabajo que hizo Moivre para $p = \frac{1}{2}$, Laplace lo generalizó para el caso p arbitrario y se conoce como teorema de Moivre-Laplace (Blaiotta & Delieutraz, 2004). Actualmente se denota de la siguiente manera:

Teorema de Moivre-Laplace: si $n \to \infty$ y k está restringido a un intervalo $k < K_n$ tal que $K_n^3/n^2 \to 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande se cumple:

$$1 - \epsilon < \frac{a_k}{h\phi(kh)} < 1 + \epsilon$$

Donde $a_k = b(k + m; n, p)$ y m es el único término central, es decir, el único entero de la forma:

$$m = np + \delta \; con - q < \delta \leq p$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

El teorema de Moivre-Laplace llevó a Laplace hacia la primera versión del teorema del límite central, en el que establece que cualquier suma o media (no únicamente el número de éxitos en *n* experimentos) será, si el número de observaciones es suficientemente grande, aproximadamente distribuido como una normal. El teorema central del límite fue el resultado de casi 40 años de trabajo arduo de Laplace, el cual incluye: las sumas de variables aleatorias independientes **y** métodos para encontrar fórmulas de aproximación adecuadas, que puede encontrarse en (Fisher, 2000)**.**

Las sumas de variables aleatorias independientes desempeñaron un papel importante en la constitución del teorema, (Fisher, 2000) afirma:

Ya que anteriormente Laplace trabajó en el cálculo de distribuciones de probabilidad de la suma de ángulos de inclinación de meteoros y afrontó el problema de la desviación entre la media aritmética de los datos (obtenido con errores observacionales) y los valores teóricos, suponiendo que todos estos ángulos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución rectangular entre 0º y 90º. Debido a la considerable elevación de cuerpos celestiales, no fue capaz de representar un cálculo exacto y así necesitó de una aproximación. En ese proceso de encontrar una aproximación Laplace formuló la otra versión del teorema de Moivre. (p. 19)

En 1810 publicó una memoria, donde probó más formalmente la siguiente versión del teorema central del límite:

Sea X una variable aleatoria valorada entera que toma valores enteros {-a,…0,…a,}, con probabilidad $P(X = x) = \left(\frac{x}{2a}\right)$*, entonces para una muestra n grande la suma* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *está distribuida aproximadamente en forma normal N (*μ*,*σ*) de media n*μ *y desviación típica* $\sqrt{n}\sigma$ *siendo* μ *,*σ *la media y desviación típica de la distribución de partida.*

Laplace dio una demostración rigurosa para el caso discreto del teorema central del límite, en la cual desarrolla una serie que se encuentra en Fisher (2000). La demostración en una versión actual y resumida de acuerdo con (Martinez, 2007):

Sea la probabilidad *P (S n - n*μ *= x)* para *x* menor que *n*, siendo μ la media de la distribución de partida. Despreciando los términos de orden superiores a dos, obtiene lo siguiente: $P\ (S_n - n\mu\ =\ x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n\sigma^2}\right)$. Esto significa que $S_n - n\mu$ se aproxima asintóticamente a la distribución normal $N(0, \sqrt{n}\ \sigma)$.

(Martinez, 2007) afirma que Laplace no logró dar demostraciones rigurosas para las siguientes afirmaciones, por tal razón intento argumentarlas:

- Debido a que la distribución límite es independiente de *a* (sólo depende de *a* a través de la media y la varianza), el resultado es válido también para una distribución discreta con rango infinito, en el caso de que existan los momentos finitos se puede considerar este otro caso particular del campo de problemas.
- Probó que los resultados también se cumplen para variables aleatorias con distribución continua y acotada. Se considerará esta argumentación como un nuevo campo de problemas ya que se introducen nuevos conceptos como el de variable continua, función de densidad, etc. y se utilizan nuevas herramientas, como la integral. Primero, Laplace estudió la variable aleatoria discreta X que toma valores enteros muy grandes $\{-a, \dots, 0, \dots, b\}$; con la probabilidad *P(X = x)* dada anteriormente, consideró la función de densidad de la variable continua de la forma $f(x) = \frac{x}{a+b}$, y la integral de esta función la trató como una suma.

En 1800 Gauss derivó la función de densidad $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ en su trabajo "*Teoría motus corporum celestium*". Su solución recibió muchas críticas, sin embargo tuvo un impacto grande en Laplace. Stigler (1986) sugiere que no hay indicios que Laplace haya pensado en que esta función pudiese representar una función de densidad para una distribución de probabilidad, y debe haber encontrado el resultado en el trabajo de Gauss en 1810.

Los autores mencionados en este capítulo aportaron al surgimiento de la distribución normal, vía probabilidad, cabe aclarar que este proceso no se detuvo ahí, años después aparecen autores que no eran matemáticos pero llevaron la aplicación de la estadística y del concepto de distribución normal a diferentes contextos, como Adolphe Quetelet, quien era sociólogo pero se interesó en aplicar la estadística a los estudios que realizó, por ejemplo, un estudio que realizó sobre la medida del pecho de un grupo de hombres, él discute que los datos obtenidos están normalmente distribuidos. Luego aparece Sir Francis Galton, quien adopta las herramientas de Quetelet, el inicia su trabajo con el libro *Hereditary Genius*, en el cual el busca probar que los genios se heredan en las familias. Como él es consciente de que la excepción a esa regla abunda, utiliza la estadística para mostrar que es verdad (Stahl, 2006). Galton utiliza la distribución normal, para modelar sus investigaciones e ideó el quincux, dispositivo que uso para modelar el comportamiento de sus investigaciones.

A partir del uso que se le empezó a dar a esta distribución, es que surge el término normal. Se cree que el nombre de "distribución normal" fue otorgado independientemente por el americano Charles S. Peirce en 1873, el inglés Francis Galton en 1879 y el alemán Wilhelm Lexis en 1879, ya que ellos lo usaron para referirse a la curva del error. Sin embargo (Stahl, 2006) menciona que su generalizado uso se debe a la influencia Karl E. Pearson quien en 1920 afirma "Hace muchos años [en 1893] yo llamé a la curva Laplace-Gaussiana la curva normal, que nombre, mientras que evita la cuestión de prioridad internacional, tiene el inconveniente de llevar a las personas a creer que todas las otras distribuciones de frecuencia son en uno u otro sentido anormal" (p. 112). Tal vez estos personajes le dieron ese nombre debido al comportamiento que tenía la distribución.

Capítulo 4

4.0 Francis Galton y el Quincux.

En el capítulo anterior se hizo un breve recorrido sobre el surgimiento de la distribución normal, en el sentido de los aportes de J. Bernoulli, A. de Moivre y P. Laplace a esta distribución, otros autores los utilizaron como base para continuar el desarrollo de la distribución normal o investigaciones relacionadas con este concepto, uno de ellos fue Francis Galton, quien tal vez no aportó a la construcción del concepto, pero si lo aplicó en campos distintos a los juegos de azar, además creó una máquina conocida como *quincux*, con la que realizó pruebas para sus investigaciones. Este avance se dio casi 50 años después de los aportes de Laplace.

4.1 Francis Galton

Su padre fue un banquero y su madre era hija de Erasmus Darwin, por tal razón era primo de charles Darwin, estudió medicina en Londres y luego en Inglaterra donde también estudio matemáticas, dejó Cambridge en 1843. En 1844 su padre murió y le dejó una fortuna considerable, con lo que logró seguir sus intereses por el resto de su vida, los cuales no incluían la medicina, entre los años 1850-1852, realizó una expedición a una región de áfrica de sudoeste, que en ese momento era gran parte inexplorado y escribió un libro sobre sus experiencias.

En 1853 obtuvo una medalla de oro de la Real Sociedad Geográfica, fue elegido miembro de su consejo como explorador y geógrafo ya que estaba interesado en los mapas y la meteorología. A finales de 1850 empezó la recogida de datos de las estaciones meteorológicas en diferentes países europeos para la construcción de mapas del tiempo que muestran la presión, la fuerza y dirección del viento y así sucesivamente. Escribió un libro sobre sus resultados y fue elegido miembro de un comité meteorológico, además desempeñó un papel importante en la construcción de los mapas meteorológicos diarios.

Se puede decir que Galton fue un polímata[3], aunque no terminó sus estudios académicos, investigó por su cuenta, y aportó a diferentes ciencias y disciplinas, como a la psicología, biología, estadística etc. Galton tenía una notable habilidad para la construcción de dispositivos mecánicos, que utilizó para hacer nuevos instrumentos de medición y maquinas analógicas de correo, se obsesionó por la medición, conteo y graficar fenómenos, comenzó a estudiar antropología, biología, genética, sociología, psicología Hald (1998). Su principal interés entre los años 1860 a 1890 fueron estudios empíricos de leyes de la herencia por medio de métodos estadísticos.

Galton aprendió métodos estadísticos leyendo un artículo de otro geógrafo quien aplica el método de Quetelet de ajuste de una distribución normal para sus datos, ya que en ese momento resultaba muy sencillo ese método, pues solo requería del cálculo de las frecuencias relativas y la interpolación en la tabla de la binomial acumulativa.

Un artículo de 1875, contiene un fragmento sobre lo que Galton consideró dos años más tarde la clave para todo tipo de problema. Galton analiza qué afecta el tamaño de una fruta x, él supone que el tamaño se divide en tres: grande, mediana y pequeña, al recoger los datos de todas las frutas y obtiene qué la mezcla de series radicalmente diferentes, en numerosos casos debe dar resultados aparentemente idénticos a las de una simple serie, de acuerdo con (Stigler, 1998) en un lenguaje moderno es ¿por qué el total de la producción sigue la curva normal? Galton tenía dos soportes

[3] Polímata: de acuerdo con la rae, es la persona con grandes conocimientos en diversas materias científicas o humanísticas.

para probar el comportamiento de su estudio: uno era el resultado de extensas series de experimentos con guisantes dulces y el otro era el uso de un dispositivo conocido como quincux que él ideo, en este trabajo de grado se tiene en cuenta cómo usó el segundo soporte (quincux). No hay fecha exacta de la creación del quincux, pero fue antes del 27 de febrero de 1874, porque Galton lo presentó en la conferencia de la Institución Royal de esa fecha.

Hald (1998) afirma que Galton lucha para entender las propiedades de la binomial y la distribución normal y su importancia para explicar la ley de herencia. En virtud de que su fortaleza no eran las matemáticas de la época, involucra en 1877 un dispositivo llamado el quincux para probar las propiedades de la binomial. (P. 604).

El quincux está compuesto por un tablero con una tapa de cristal y un embudo en la parte superior, debajo tiene unas filas de clavos, en la parte inferior hay unas ranuras rectangulares. En la figura 5 aparece la versión original del quincux.

Figura 5 Versión original del quincux, que fue aparentemente diseñado por Galton en el año 1873.

El quincux funciona de la siguiente manera: se lanza una bola a través del embudo, esta atraviesa la cascada de clavos, golpeando cada uno de estos, teniendo igual posibilidad de caer hacia la derecha o hacia la izquierda terminado en la parte inferior de las ranuras rectangulares, teniendo en cuenta que cada lanzamiento cuenta como un evento independiente, Stigler afirma “el lanzamiento total de una bolita desde el punto inicial del quincux es la suma de muchos eventos independientes” (p.276). En la figura 6 se exponen tres modelos distintos del quincux, que diseñó Galton.

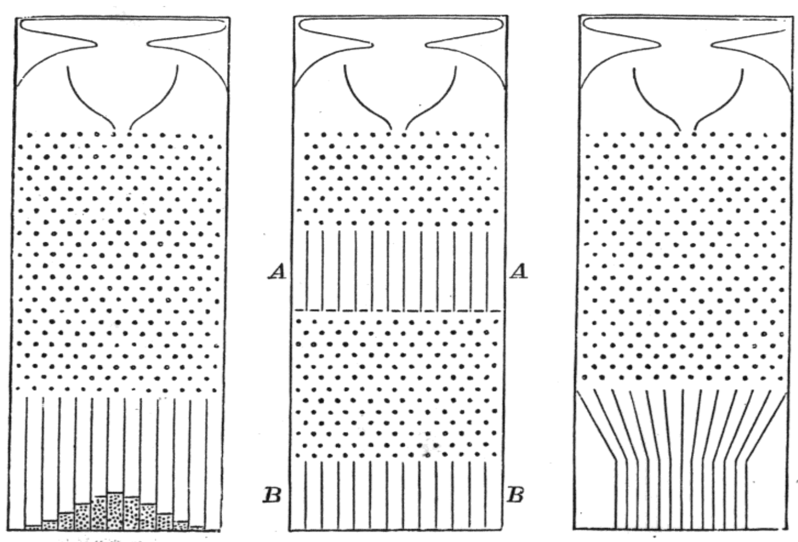

Figura 6: Versiones del quincux diseñadas por Francis Galton.

Cada vez que se lanza una bola tiene igual probabilidad de seguir a la derecha o a la izquierda cuando golpea los clavos, produciendo un ensayo de Bernoulli, que al repetirse *n* veces de forma independiente se puede representar mediante la distribución binomial. El número de filas de clavos es el valor de *n*, con $p = 0.5$ para cada bola lanzada. En la figura 7 se ejemplifican un numero *n* de filas con sus respectivas probabilidades.

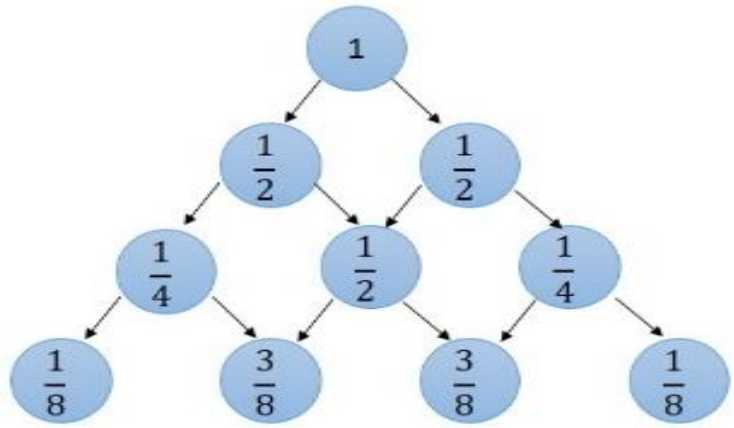

Figura 7: n filas de clavos, con su respectiva probabilidad.

La ranura donde cae una bola representa el número de veces que tras golpear los clavos, la bola se desplaza hacia la derecha desde el punto de vista del espectador. Por lo tanto la variable aleatoria que sigue una distribución binomial es el número de veces que ocurre un suceso dado dos posibles desplazamientos (derecha o izquierda). El razonamiento sería similar si se considera que la bola se desplaza hacia la izquierda. En cualquiera de los dos casos la variable puede tomar valores desde cero hasta n, es decir desde un mínimo de ningún desplazamiento hacia la derecha hasta un máximo de *n* desplazamientos hacia el mismo sentido. (Manolov, y otros, 2015)

Para Galton cada trayectoria aleatoria tras golpear los clavos representaba un factor de mínima incidencia y por lo tanto el número de impactos de la bola con los clavos, representa la desviación total observada como resultante de la agregación de varios factores aleatorios. Así cuando la ranura en la que cae la bola representa la desviación de la característica genética en cada persona, en los casos en los que Galton en los estudios de herencia genética de Galton. En el caso del tamaño de las frutas las ranuras representan el tamaño de cada fruta.

Ese es el recorrido que hace una bola, pero ¿cómo será en el caso de muchas bolas? Para el caso de las frutas es posible conocer ¿cuál es la distribución para el conjunto de frutas? Para el conjunto de frutas, se trata de determinar la probabilidad de las desviaciones en las características de tamaño, el resultado que muestra el quincux es la distribución binomial que se aproxima a la distribución normal. Así el quincux permite evidenciar que si existe un conjunto de factores aleatorios de escasa incidencia el resultado agregado esta descrito por la distribución normal de probabilidad. (Manolov, y otros, 2015). Todo esto permite evidenciar que Galton tuvo en cuenta algunos de los aportes que se brindaron para el surgimiento de la distribución normal, como los de Bernoulli y Moivre.

En la figura 8 muestra algunos dibujos que realizó Galton de las dos versiones del quincux, explicándole a su primo George Darwin el funcionamiento de su dispositivo, en una carta del 12 de enero de 1877.

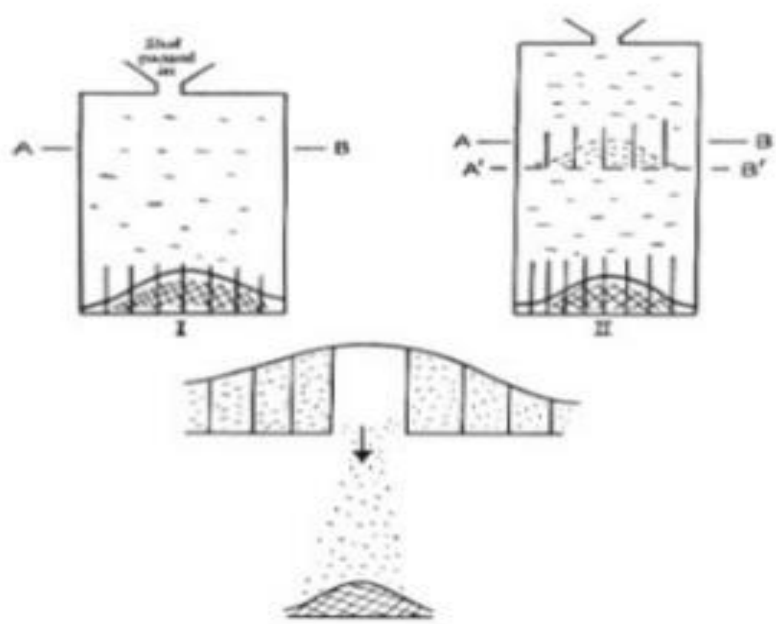

Figura 8: Explicación del funcionamiento de las dos versiones del quincux.

El dibujo que está al lado izquierdo (I) es el quincux original, sin embargo el del lado derecho (II) el compartimiento AB lo divide en dos partes. En la versión II del quincux, al realizar el lanzamiento de las bolitas caerán en AB el resultado será una distribución binomial que es aproximadamente normal. Si se abre una de las ranuras del compartimiento AB como si fuera un embudo, las bolitas caerán en la parte inferior y se producirá una pequeña curva normal, como aparece en la figura 2. Si se abren todas las ranuras del compartimiento AB se obtendrá una mezcla de curvas de diferentes tamaños, porque el resultado de liberar todos las ranuras es el mismo que si el lanzamiento no hubiese sido interrumpido en AB, la mezcla resultante debe ser una curva normal.

Galton uso este dispositivo para probar el resultado de sus investigaciones, como en el caso del tamaño de las frutas, con la versión II del quincux, el compartimiento AB se toma como los diferentes aspectos que puede tener una fruta, y la parte inferior los diferentes tamaños que pueden llegar a tener estas. Al caer todas las bolitas en la parte inferior el resultado será una curva normal.

En muchos textos explican cómo funciona su máquina, sin embargo, no especifican que bases tuvo en cuenta cuando la ideó o cómo lo hizo. Con todo eso, se puede considerar que Galton creó esta máquina con bases matemáticas y algunos conocimientos de probabilidad, él fue un genio ya que la estructura de esta debe tener una lógica para que al caer muchas bolitas se produzca una curva normal. Empezando desde la forma en que están organizadas las filas de clavos, y la trayectoria de las bolitas al ser lanzadas por el embudo, hacen un recorrido en forma de triángulo y se cree que está relacionada con el triángulo de Pascal, tal vez estos pequeños detalles pudo haber tenido en cuenta Galton para idear el quincux. El aparato de Galton también se utiliza para modelar el teorema del límite central, sin embargo esta parte se escapa de los objetivos de este trabajo.

4.2 Recomendaciones para la enseñanza

Esta máquina se puede tomar como un recurso pedagógico para la enseñanza de las distribuciones binomial y normal en la educación básica y la media. Este trabajo se enfoca en la educación Básica, aunque en los estándares de competencias Matemáticas no está estipulado la enseñanza de la distribución normal, cabe resaltar que en estos aparece lo básico que se debe enseñar en el aula, y se ha mostrado desde el primer capítulo la importancia de la introducción de este concepto desde la escuela.

La enseñanza del concepto de distribución normal se puede abordar desde la estadística o la probabilidad. (Tauber, 2001) Afirma que si se hace por la probabilidad, se presenta la distribución normal como parte de un conjunto mayor formado por las distribuciones de probabilidad. Si se introduce el tema desde la estadística, es posible comenzar directamente introduciendo la distribución normal desde un enfoque intuitivo. (p.17).

Así desde la estadística puede introducir la distribución normal en la educación básica, realizando este proceso de manera intuitiva y destacando algunas propiedades de esta, ya que la mayoría de estudiantes en este nivel educativo no tienen conocimiento del cálculo de probabilidades ni de la inferencia estadística para abordar este concepto de manera formal.

Tal vez la introducción de la distribución normal en la educación básica no sea fácil, pero tampoco es imposible, ya que el mismo Piaget creó un dispositivo con base en el quincux para la introducción del concepto de distribución en niños. Utiliza 5 aparatos, de los cuales cuatro tienen la abertura superior en la parte central y uno la tiene en el extremo superior derecho. Los aparatos se diferencian por el número de divisiones que tienen las ranuras (en los dispositivos I y V tienen dos divisiones, tres en el II, y 4 en el III y un gran número de divisiones en el aparato IV) (ver Figura 9). En cada una de ellos comienza introduciendo una bola, después una segunda y tercera, preguntando al niño donde cree que va a caer y por qué. Una vez comprendida la experiencia, se pide al niño que explique la forma que tomaría la distribución cuando se dejasen caer un gran número de bolas. Finalmente se dejan caer las bolas y se pide al niño que interprete la distribución obtenida. (Batanero, 2013).

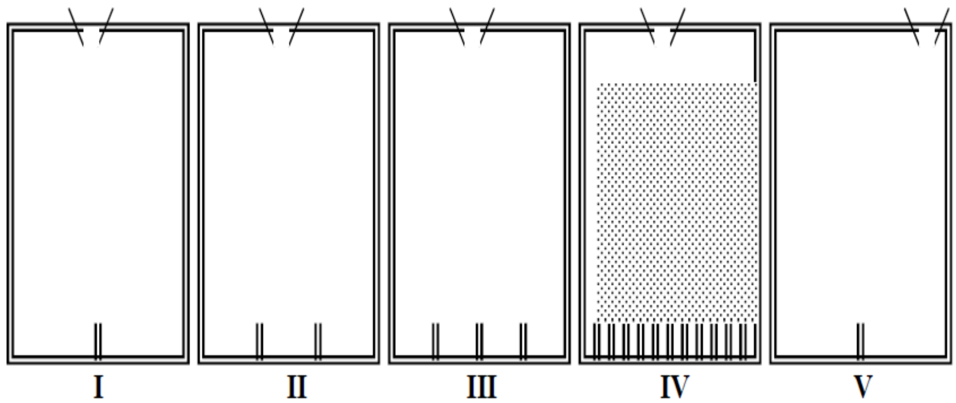

Figura 9: Dispositivos de Piaget, realizados con base en el quincux.

A continuación se presenta una reflexión acerca de la enseñanza de la distribución normal para la educación básica usando el quincux. La figura 10 se ha realizado con base en el quincux, y tiene en la parte superior una especie de embudo por el cual se lanzarían las bolas, debajo de este se encuentran las puntillas (óvalos), por las que tiene que pasar la bola para llegar a la parte inferior que es donde están las ranuras.

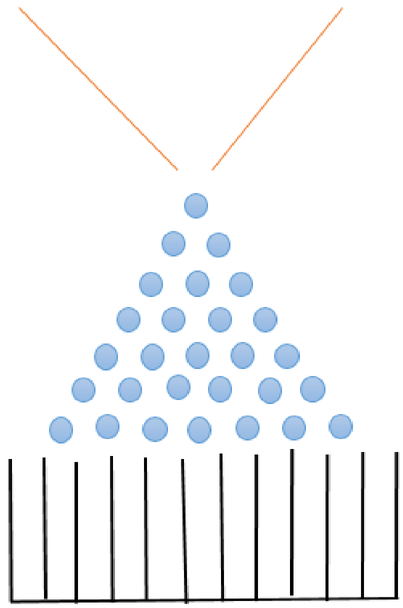

Figura 10: Quincux

La trayectoria que realiza una bola al ser lanzada por el embudo, se puede observar en la figura 11.

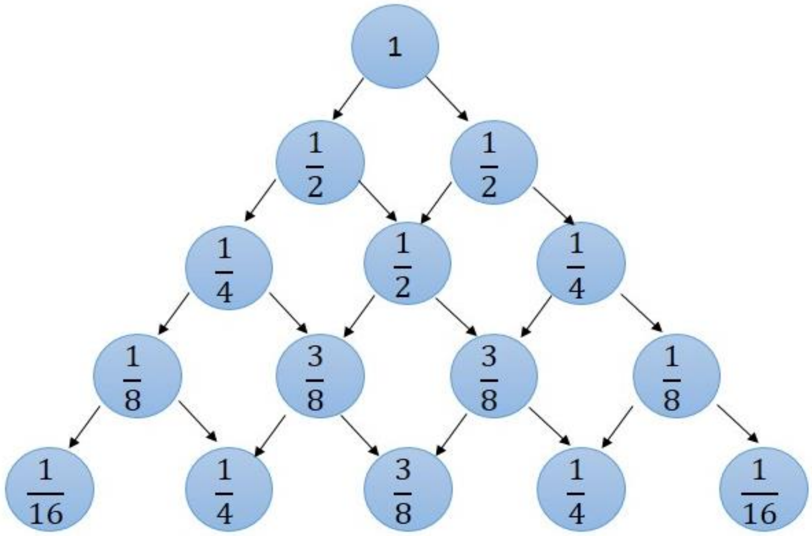

Figura 11: Recorrido de una bola cuando se lanza al quincux

Cuando la bola toca el primer clavo, tiene dos opciones para seguir su camino, con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, en la segunda fila, cuando toca alguno de los dos clavos igualmente se le presentan dos opciones para descender al tercer nivel pero con probabilidad de $\frac{1}{4}$, así sucesivamente hasta llegar a las ranuras. Al analizarlo de esta forma se puede identificar que los clavos que están en el medio tienen mayor probabilidad de ser tocados por las bolas lanzadas y los que están en los extremos presentan menor probabilidad, por esta razón las ranuras que coinciden con los clavos que están en el centro siempre van a estar más llenas que las de los extremos, como aparece en la figura 12.

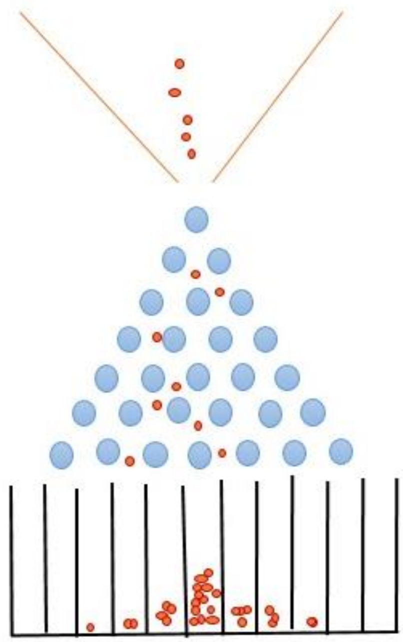

Figura12: Lanzamiento de una cantidad x de bolas en el quincux

De esta manera se puede introducir el concepto de distribución normal desde la educación básica. Se pueden realizar algunas preguntas para que los estudiantes exploren el quincux y puedan evidenciar algunas propiedades de la distribución normal como:

¿Al lanzar una bola en qué ranuras hay más probabilidad de que caiga?

Al lanzar 10 bolas ¿Cuáles ranuras quedan más llenas? ¿Qué crees que sucede con las otras ranuras? ¿Qué forma crean todos los clavos cuando caen a las ranuras? ¿Cuál de las ranuras quedarán más llenas al lanzar una gran cantidad de bolas?, ¿Qué sucede si se quita uno de los clavos?

Con este dispositivo el estudiante puede visualizar que la forma de la gráfica es acampanada, también que la media aritmética, la moda y la mediana son iguales, la simetría que se presenta en la gráfica de la distribución normal, se puede observar que sus colas son asíntotas con el eje x, se acercan a él pero no lo tocan. Con esta máquina el docente puede guiar al estudiante para que visualice y comprenda las anteriores propiedades, sin utilizar fórmulas, cálculo de probabilidades, y esta puede ser una manera de abordar la distribución normal desde la educación básica.

Otra forma de llevar al estudiante a la exploración es mediante el uso de aplets como https://www.geogebra.org/material/simple/id/45700 el cual se puede encontrar en geogebratube. En el episodio "Racha parte II- hijas" de la serie Numb3rs hay una actividad con base en el quincux denominada el tablero de Galton, en la que explican al estudiante la probabilidad de que una bola siga determinado trayecto al ser lanzada en el quincux, y como se distribuye un número *x* de bolas lanzadas en la parte inferior. Inclusive el programa de televisión *The Price is Right* hay un juego llamado "Plinko" ver figura 13. Que se vale de un tablero de Galton para determinar qué sumas de dinero ganará el concursante.

Figura13: Plinko

Este ha sido un juego utilizado en distintos programas de televisión y con base en este se puede crear una situación problema para un estudiante después de que haya realizado la exploración del quincux. Como ¿Cuál es la probabilidad de ganar 10.000 lanzando una bola?

Si el docente pretende profundizar y hacer un trabajo más complejo o formal puede tomar como base hasta uno de los casos que investigó Galton, como el caso del tamaño de las frutas, se pueden encontrar casos en la vida cotidiana para los que se puede utilizar el quincux, como el ejercicio del lanzamiento de una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara?, o en el lanzamiento de una moneda quince veces en ¿cuantas se obtiene cara?, esto se puede realizar en el quincux, y se ahorran los quince lanzamientos. El docente interesado en utilizar la máquina, puede profundizar y usar su creatividad con este potencial recurso para llevar al aula de clase el concepto de distribución normal.

Aunque este trabajo es un estudio histórico epistemológico, esta reflexión, acerca de cómo se podría introducir el concepto de distribución normal en la Educación Básica, se realizó con el fin de mostrar que la historia puede aportar recursos manipulativos que facilitan la enseñanza de la estadística, aportándole a la formación teórica y práctica del docente.

5. Conclusiones

- El surgimiento de la distribución normal, vía probabilidad en la mayoría de casos se abarca desde los aportes que dio J. Bernoulli, sin embargo es necesario hacer ese recorrido histórico desde el surgimiento de la teoría de la probabilidad, ya que en la solución que brinda Pascal al problema de los puntos mediante el triángulo aritmético, se evidencian propiedades de la distribución binomial, la cual fue un antecedente de la distribución normal.
- El estudio histórico epistemológico acerca del surgimiento de la distribución normal, permite evidenciar que los aportes de J. Bernoulli, Moivre y Laplace a la distribución normal van enlazados, a pesar de que cada uno trabajo por su cuenta, desde el momento en que J. Bernoulli se trazó la meta de crear un manual probabilístico que se pudiera aplicar a diferentes situaciones de la vida cotidiana, y a pesar de que no pudo terminar su trabajo uno de los resultados obtenidos en él fue el teorema de Bernoulli, que fue estudiado por de Moivre y le pareció fascinante el trabajo realizado por Bernoulli, pero lo consideraba extenso y tedioso, por esta razón trato de hacerlo de manera más práctica, para que cualquier persona lo pudiera utilizar, obteniendo así la aproximación de la distribución normal a la binomial, que se conoció como teorema de Moivre, este se podía utilizar cuando N es grande, luego aparece Laplace quien generaliza el teorema de Moivre y se le conoce como teorema de Moivre-Laplace. Esto es una muestra de que en la constitución de un concepto en la mayoría de casos participan varios pensadores, a pesar de que se le atribuye a un solo autor, es lo que sucede con el concepto de distribución normal, se le atribuye a Moivre, pero si no fuera por el trabajo que dejó Bernoulli, tal vez no hubiese realizado su trabajo.

- El trabajo que realizó Moivre y Laplace, con respecto a la aproximación de la distribución binomial por la normal, se considera importante en la teoría de la probabilidad, ya que condujo al primer teorema central del límite, el cual es muy importante ya que este permite hacer aproximaciones de otras distribuciones a la distribución normal, cuando la muestra es muy grande.
- La distribución normal es un concepto que continuó con su desarrollo después de los aportes de Laplace. Esta distribución se empezó a utilizar como herramienta en ciencias como la sociología, la psicología, la biología incluso la genética, autores como Quetelet, Peirce, Galton que no eran matemáticos la utilizaron para explicar los resultados de sus estudios, desde ese entonces se empezó a utilizar el término *normal,* para esta distribución, pues se podía observar que muchos fenómenos o casos de la vida real se modelaban con esta distribución, y se podía concluir que era algo normal.
- Francis Galton fue un pensador que aportó a diferentes disciplinas, se dedicó realizar estudios sobre la herencia, genética, biología, botánica, etc. Utilizo métodos estadísticos para verificar los resultados obtenidos en sus investigaciones. Ideó un dispositivo conocido como el quincux, que le permitía probar el comportamiento de sus investigaciones, este aparato modelaba la distribución binomial, la distribución normal y se utilizó para demostrar el teorema del límite central. Este es un gran aporte a la estadística ya que Galton logró pasar de lo teórico a lo físico (Palpable, Sensible), ideando una máquina que le permitió probar sus estudios ya que su fuerte no eran las matemáticas. Ese dispositivo era parecido a un experimento o ensayo de Bernoulli, al lanzar una bola o un disco, tenía dos opciones para continuar su camino, hacia la izquierda o derecha, el lanzamiento de cada

bolita es un evento independiente, al realizarse muchos lanzamientos el resultado que se obtiene es parecido a la distribución normal.

- La distribución normal se puede abordar desde la educación básica, aunque no es un concepto plasmado en los entandares de competencias matemáticas, se puede introducir en la educación básica usando el quincux, pues ya se ha mostrado la importancia de esta distribución. La enseñanza de este concepto se puede llevar a cabo de forma intuitiva dejando de lado la parte formal (cálculo), para que el estudiante comprenda algunas propiedades de esta distribución, y pueda tener una idea acerca de la distribución normal, y tal vez cuando se le enseñe en los estudios de pregrado o superiores la comprenda con más facilidad.
- La realización de este trabajo dejó como resultado, dos ponencias, la primera se denomina *Aproximación Histórica a La Constitución de La distribución normal,* presentada en el Enhem V, que tuvo lugar en la universidad externado de Colombia, en Bogotá, los días 4, 5 y 6 de noviembre de 2015. La segunda titulada *Aproximación al origen de la distribución normal, vía Probabilidad,* en el segundo encuentro de educación estocástica los días 10, 11 y 12 de agosto de 2016 en la ciudad de Bogotá.

6. Referencias Bibliográficas

A.H.E.P.E. (2004). Historia de la probabilidad y la estadistica II. *Estadisticos Significativos* (págs. 272-286). Madrid: Delta.

Anacona, M. (2003 p. 33). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA Vol. 8, No. 1*, 33.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? *ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA. BRAGA* (págs. 1-13). Portugal: Centro de Investigação em Educação (CIEd) .

Blaiotta, J., & Delieutraz, P. (2004). *Teorema central del limite.* Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Carmen Batanero, & Juan Godino. (2001). *Análisis de datos y su didáctica.* Granada: Universidad de Granada.

Conde, G. (2015). La distribución Normal una rapida revisión histórica., (págs. 59-65).

De Moivre, A. (1756). *Doctrine of Chance.* Londres.

Diaz, D. (2012). *Análisis histórico epistemológico de la esperanza matemática (Tesis de Maestría). Universidad del Valle.* Santiago de Cali, Colombia.

Fisher, H. (2000). *A history of the central limit theorem from classical to modern probability theory.* Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Garcia, J. A. (2000). Historia de un problema: el repartode la apuesta. *Suma*, 25-36.

Hald, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750.* New York, Estados Unidos: Wiley interscience.

Hald, A. (1998). Statistical Laws in the social and Biological Sciences. Poisson, Quetelet, and Galton, 1830.1890. En A. Hald, *A history of Mathematical Statistics from 1750 to 1930* (págs. 567-631). New York, Estados Unidos: Wiley.

Jesus Santos Basulto, & Jose Camuñez Ruiz. (2007). Sobre una propiedad de la familia de distribuciones binomiales simetricas detectada por Blaise Pascal (1654) en su resolución del problema de los puntos. *Estadistica Española*, 33-58.

Manolov, R., Solanas, A., David Leiva, Losada, J., Peró, M., & Guárdia, J. (2015). Actividades de aprendizaje autónomo y presencial en metodología de las ciencias del comportamiento. Barcelona: Universitat Barcelona.

Martinez, H. A. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería. Tesis doctotal.* Universidad Granada, España.

Mateos, G., & Aparicio Morales. (2002). Historia de la probabilidad (desde sus origenes a Laplace) y su relación con la historia de la teoria de la decisión. En F. Martín(presidencia). *A.H.E.P.E* (págs. 1-18). Madrid: AC primera edición.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemática.* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html

MEN. (2006). *Estandares de competencias Matemáticas.* Bogota: Ministerio de Educación Nacional.

Sánchez, C., & Valdés, C. (2001). *Los Bernoulli, Geometras y Viajeros.* España: Nivola libros y ediciones.

Stahl, S. (2006). The evolution of the normal distribution. *Mathematics Magazine*, 96-113.

Stigler, S. (1998). *the History of Statistics.* Londres.

Stigler, S. (1999). *Statistics on the table, the history of statistical Concepts and Methods.* Londres.

Sylla, E. D. (2014). Tercentenary of Ars Conjectandi (1713): Jacob Bernoulli and the Founding of Mathematical Probability. *International Statistical Review, 82*, 27-45. doi:0.1111/insr.12050

Tauber, L. (2001). *La construccion del significado de la distribción normal a partir de actividades de analisis de datos(Tesis Doctoral). Universidad de Sevilla.* Sevilla, España.

Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 17-28.

Wenciker, B. (5 de Mayo de 2006). *Actividad NUMB3RS: El tablero de Galton.* Obtenido de https://education.ti.com/~/media/520EB727ED7E4DB186C923D1D17AF357