

**IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN SITUACIONES
PROBLEMA PARA PROMOVER LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE
ALEATORIEDAD**

FANOR YESID ZÚÑIGA PATIÑO

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI**

2017

**IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN SITUACIONES
PROBLEMA PARA PROMOVER LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE
ALEATORIEDAD**

FANOR YESID ZÚÑIGA PATIÑO

**Trabajo de grado para optar el título de
Magister en Educación con énfasis en Educación Matemática**

**Director
Mg. Diego Díaz**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI**

2017



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÁREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACIÓN: Santiago de Cali, 4 de Octubre de 2017
ESTUDIANTE: FANOR YESID ZUÑIGA PATIÑO - CÓDIGO: 1503658
"IMPLEMENTACIÓN DE SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN SITUACIONES PROBLEMA PARA LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE ALEATORIEDAD"
DIRECTOR DE TESIS: Profesor DIEGO DÍAZ ENRÍQUEZ
EVALUADORES: Profesora INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO Profesor AUDY SALCEDO
COMENTARIOS DE LOS JURADOS El jurado por unanimidad además de dar su concepto de aprobado, felicitan al estudiante y al director por ocuparse de un tema discutido en la educación y en el nivel de escolaridad que se ocupa. Así mismo, recomiendan su urgente socialización o publicación.
☒ APROBADO ☐ APLAZADO ☐ RECHAZADO

Prof. SANTIAGO A. ARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO
Jurado Evaluador

Prof. EVELIO BEDOYA MORENO
(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones y Posgrados)

Prof. DIEGO DÍAZ ENRÍQUEZ
Director de Tesis

Prof. AUDY SALCEDO
Jurado Evaluador

Contenido

	Pág.
RESUMEN	x
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	5
ASPECTOS GENERALES	6
1.1. Planteamiento del problema	6
1.2. Objetivos	7
1.3. Una aproximación al estado del arte	8
1.4. Justificación	13
CAPÍTULO II	17
MARCO TEÓRICO	18
2.1. Dimensión Histórica –Epistemológica: Una aproximación a la noción de aleatoriedad	18
2.2. Dimensión Didáctica: Teoría de Situaciones Didácticas, referente teórico para el diseño de una Secuencia Didáctica	26
2.2.1. Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)	26
CAPÍTULO III	33
DISEÑO METODOLÓGICO	34
CAPÍTULO IV	36
CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN	37
CAPÍTULO V	40
ANÁLISIS DIAGNÓSTICO: RECONOCIMIENTO DEL ESTADO CONCEPTUAL A PARTIR DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA	41
CAPÍTULO VI	55
ANÁLISIS PREVIO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA	56
6.1. Análisis previo de la Situación Didáctica N° 1: ¿se necesita alquilar una carpa?	59
6.2. Análisis previo de la Situación Didáctica N° 2: ¿Podemos predecir las lluvias?	63
6.3. Análisis previo de la Situación Didáctica N° 3: Cada ficha en su lugar	67
CAPÍTULO VII	74
ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y EVALUACIÓN	75
7.1. Análisis de la implementación de la Situación 1. ¿Se necesita alquilar una carpa?	78
7.2. Análisis de la implementación de la Situación 2: ¿podemos predecir la lluvia?	87

7.3. Análisis de la implementación de la Situación 3: Cada ficha en su lugar.....	94
7.4. Análisis de la fase de Institucionalización	110
7.5. Consideraciones finales	112
CAPÍTULO VIII	115
CONCLUSIONES	116
BIBLIOGRAFÍA.....	122
ANEXOS	125

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Campana de distribución para errores de observación.....	22
Figura 2. Esquema de Situación de acción.....	29
Figura 3. Esquema de Situación de formulación.....	29
Figura 4. Esquema de Situación de validación.....	30
Figura 5. Esquema para la valoración de la comprensión de la noción de aleatoriedad.	38
Figura 6. Opciones de respuesta en la distribución de las gotas de lluvia.....	44
Figura 7. Diagrama de precipitaciones de la última semana en Palmira.....	66
Figura 8. Regla uno del juego cada ficha en su lugar.....	70
Figura 9. Regla dos del juego cada ficha en su lugar.	71
Figura 10. Regla tres del juego cada ficha en su lugar.....	71
Figura 11. Regla cuatro del juego cada ficha en su lugar.....	71
Figura 12. Lanzamientos de ruletas roja y amarilla.	126
Figura 13. Canal con dos bifurcaciones.....	127
Figura 14. Canal con ocho salidas.	128
Figura 15. Canal con cuatro salidas.....	128
Figura 16. Canal con tres salidas.....	129
Figura 17. Canal con tres salidas.....	130
Figura 18. Canal con cuatro salidas.....	130
Figura 19. Urnas con balotas.....	132

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Contenido en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2007).....	10
Tabla 2. Descripción de los referentes a tener en cuenta en la prueba diagnóstica	41
Tabla 3. Respuestas de las estudiantes que conforman el Caso 1.	43
Tabla 4. Respuestas de las estudiantes que conforman el Caso 2.	43
Tabla 5. Presentación general de las Situaciones.	57
Tabla 6. Formato para el registro de los puntajes del juego cada ficha en su lugar.	72
Tabla 7. Rejilla para la valoración del referente incertidumbre.	76
Tabla 8. Rejilla para la valoración del referente ausencia de uniformidad en pequeñas muestras.....	76
Tabla 9. Rejilla para la valoración del referente asignación y comparación de probabilidades.....	76
Tabla 10. Fases de ejecución de la SD.....	77
Tabla 11. Valoración del cumplimiento del referente incertidumbre en la Situación 1.....	87
Tabla 12. Valoración del cumplimiento del referente incertidumbre en la Situación 2.....	94
Tabla 13. Distribución de las estudiantes en los tres grupos durante la Situación 3.	95
Tabla 14. Registro de los puntajes de los tres grupos en los tres lanzamientos.	95
Tabla 15. Valoración del cumplimiento del referente incertidumbre en la Situación 3.....	109
Tabla 16. Valoración del cumplimiento del referente ausencia de uniformidad en pequeñas muestras.	110
Tabla 17. Valoración del cumplimiento del referente asignación y comparación de probabilidades.	110
Tabla 18. Presentación de la SD en la fase de institucionalización.....	112

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Prueba diagnóstica de la noción de aleatoriedad.....	125
---	-----

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por fortalecer mi voluntad en los momentos más difíciles de mi vida, y en aquellos en los que solo Él podría darme esperanza para continuar.

*A mi Director por su voluntad y compromiso en el desarrollo del trabajo, el profesor
Diego Díaz.*

A mis padres por su apoyo incondicional.

RESUMEN

La presente propuesta surge como respuesta a la inquietud sobre el énfasis que se da en la enseñanza de la estadística y de la probabilidad a los procedimientos y a las fórmulas como propósito o fin educativo, a la vez que se deja de lado o no se da mayor importancia al desarrollo de conceptos y de nociones que son relevantes en el desarrollo del pensamiento aleatorio a lo largo de la escolaridad, como es el caso de la noción de aleatoriedad y que según Batanero (2001) debe ser un tema de estudio a nivel educativo. Esta situación sumada también a que muchas veces las propuestas educativas que crea el docente para la enseñanza de esta disciplina no incluyen situaciones problema como medio que lleven al estudiante al reconocimiento del hecho imprevisible o de indeterminación que es parte esencial de la naturaleza de la estadística conducen, según Batanero (2001), a limitar el conocimiento y a la vez el desarrollo del pensamiento aleatorio.

Esta preocupación genera el cuestionamiento sobre cómo promover la comprensión de la noción de aleatoriedad en estudiantes de grado cuarto de primaria de la IE San Vicente del municipio de Palmira, teniendo en cuenta las situaciones problema como medio de análisis y reflexión en torno a una noción que se puede trabajar desde el contexto de la cotidianidad de las estudiantes.

En respuesta a esta situación se plantea la necesidad de diseñar e implementar una secuencia didáctica basada en situaciones problema para promover la comprensión de la noción de aleatoriedad en estudiantes de grado cuarto de primaria de la IE San Vicente de Palmira. Para desarrollar esta propuesta se establecen las siguientes fases: determinación del estado conceptual de las estudiantes con respecto a la noción de aleatoriedad, diseño de la secuencia didáctica basada en situaciones problema de aleatoriedad, implementación de la secuencia didáctica y evaluación de los resultados de la implementación.

PALABRAS CLAVE: Secuencia didáctica, Situaciones problema, Pensamiento Aleatorio, Noción de aleatoriedad.

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo surge del interés por contribuir a la formación del pensamiento aleatorio a nivel escolar a partir del reconocimiento de una noción fundamental para la educación en estadística y probabilidad como lo es el de aleatoriedad.

Así mismo tener en cuenta que el desarrollo del pensamiento aleatorio no se da a la par con el resto de pensamientos en Educación Matemática, lo cual se debe a que la naturaleza de los conceptos matemáticos por lo general son de tipo determinista, mientras que los conceptos que orientan el estudio de la estadística y la probabilidad están fundamentados en el estudio de fenómenos que principalmente son de carácter no determinista. Sin embargo esta distinción no es obvia y en muchos casos los docentes podrían terminar dando un enfoque determinista al estudio de la estadística y la probabilidad.

Lo anterior conlleva a tomar en cuenta que el propósito de formar en competencias propias del pensamiento matemático exige que primeramente el docente sea quien se prepare en el reconocimiento de estos conceptos fundamentales, y a nivel escolar la noción de aleatoriedad es importante para orientar el desarrollo del pensamiento aleatorio del estudiante.

Con este trabajo se valoran los anteriores aspectos mediante una propuesta educativa en la que se quiere concebir, diseñar, experimentar y evaluar una secuencia didáctica (SD) sobre aleatoriedad que será implementada en dos grupos de estudiantes (Caso 1 y Caso 2) de cuarto grado de escolaridad en la ciudad de Palmira.

Según Batanero (2001b) el estudio de la estadística y la probabilidad se debe iniciar desde los primeros años de escolaridad, y el énfasis en estos niveles se debería enfocar a que se diferencie las situaciones aleatorias de las deterministas, es decir, que puedan apreciar algunas características básicas de la noción de aleatoriedad.

El cumplimiento de este propósito es fundamental ya que mayor énfasis en lo determinista termina dificultando en gran medida el desarrollo del pensamiento aleatorio.

La estrategia mediante la cual se busca plantear la propuesta educativa comienza por tener en cuenta que la noción de aleatoriedad puede ser estudiada a partir de fenómenos naturales, con esto se pretende que el estudiante comprenda algunos aspectos sobre aleatoriedad desde la experimentación con situaciones problema.

De acuerdo a lo anterior, el desarrollo del trabajo considera la siguiente estructura: Aspectos generales donde se encuentra el planteamiento del problema, los objetivos, una aproximación al estado del arte y la justificación. A continuación el marco teórico, el diseño metodológico, caracterización de la población, reconocimiento del estado conceptual inicial a partir de la prueba diagnóstica, análisis previo de la secuencia didáctica, análisis de la implementación de la secuencia didáctica y evaluación, conclusiones, referencias bibliográficas y anexos.

El **CAPÍTULO I** está dedicado a relacionar el planteamiento del problema con la aproximación del estado del arte y de esta forma, considerar entonces los objetivos y justificación de este trabajo de grado. En el planteamiento del problema se caracteriza brevemente las falencias actuales en la educación en estocástica a nivel escolar y la importancia de formar desde los conceptos fundamentales donde la noción de aleatoriedad es un caso especial, de allí surgen además unas hipótesis sobre lo que se espera con la implementación de la secuencia didáctica.

En los objetivos se encuentra, uno general que orienta el propósito del presente trabajo y algunos específicos que darán lugar a las fases intermedias.

En la aproximación al estado del arte se muestra, desde el aporte de varios autores la importancia de enseñar la noción de aleatoriedad en los primeros años de la escolaridad y las estrategias que se pueden utilizar para llevarla a cabo.

En la justificación se expresan las razones por las cuales es importante trabajar desde los primeros años de escolaridad la noción de aleatoriedad, los posibles campos de problema de donde puede surgir y su importancia en la educación de todo ciudadano actualmente.

El **CAPÍTULO II** corresponde al marco teórico en el cual se encuentra la dimensión histórico – epistemológica: Una aproximación a la noción de aleatoriedad, donde se realiza el reconocimiento histórico del concepto y los aportes que en su momento definieron lo que se entiende hoy en día por aleatoriedad.

Así mismo, se encuentra la dimensión didáctica relacionada con la Teoría de Situaciones Didácticas con el fin de tratar algunos de los elementos que orientan el diseño e implementación de una secuencia didáctica.

En el **CAPÍTULO III** se plantea el diseño metodológico con las fases que permitirán el desarrollo del proyecto como lo es el planteamiento y aplicación de la prueba diagnóstica, análisis de los resultados de la prueba diagnóstica y diseño de la secuencia didáctica (SD), análisis previo de la SD, aplicación de la SD, análisis de la implementación de la SD y evaluación.

En el **CAPÍTULO IV** se muestra la caracterización de la población, lo que permite una contextualización de la IE San Vicente Sede Rosa Virginia y también da lugar a establecer la selección de los dos casos a tener en cuenta para la implementación de la propuesta educativa.

El **CAPÍTULO V** alude al reconocimiento del estado conceptual inicial a partir de la prueba diagnóstica, primeramente se aclara que esta prueba fue ajustada de la propuesta por Green (1982) y con su planteamiento se valora el estado conceptual de las estudiantes que conforman los dos casos definidos previamente.

El **CAPÍTULO VI** corresponde al análisis previo de la secuencia didáctica donde se analizan las posibles estrategias que plantearan las estudiantes, también las posibles dificultades que puedan presentar, los actos de devolución que el docente debería llevar a cabo, el momento de la validación y la institucionalización.

En el **CAPÍTULO VII** se realiza el análisis de la implementación de la secuencia didáctica y evaluación, con lo cual se describe desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como se desarrolló la SD, dando especial énfasis al trabajo realizado por las estudiantes y se compara con lo esperado en el análisis previo.

Por último se realizarán las conclusiones de la implementación de la secuencia didáctica, sus posibilidades de mejoras y proyecciones a futuro. También las Referencias bibliográficas y Anexos.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES

1.1. Planteamiento del problema

A pesar de que la enseñanza de la estadística y la probabilidad se ha incorporado desde hace varios años en el currículo de matemáticas en Colombia, como se referencia en Montoya y Londoño (2011), aún sigue siendo para muchos docentes un campo del cual no se tiene una buena apropiación teórica.

Esta situación conlleva a que la enseñanza tanto de la estadística como de la probabilidad se centre más en lo procedimental, donde el uso de algoritmos es presentado muchas veces como lo más importante en la clase.

Aunque la probabilidad hace parte formal del currículo, no siempre se enseña y muchos maestros hacen un énfasis excesivo en la enseñanza de fórmulas, en lugar de trabajar con la resolución de problemas y la experimentación con fenómenos aleatorios (Montoya y Londoño, 2011, p.31)

Con esto se desvirtúa el enfoque formativo en el campo de la Educación Estocástica (enseñanza de la estadística y probabilidad), cuya esencia es el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual según los lineamientos curriculares debe tener como base el estudio de situaciones problema que en la mayoría de los casos surgen desde el contexto de la vida cotidiana donde los fenómenos naturales permiten evidenciar al estudiante la naturaleza de indeterminación de estas situaciones.

A partir de esta problemática que se da en la enseñanza de la estadística y la probabilidad surge la necesidad de plantear una propuesta educativa que oriente desde el grado cuarto de primaria el desarrollo de una noción fundamental de la educación estocástica que generalmente es omitido en la enseñanza, generando así unos conocimientos incompletos en esta área, esta noción es la de aleatoriedad.

Teniendo en cuenta que una de las recomendaciones que hacen los Lineamientos Curriculares en Matemáticas con respecto a la enseñanza de la estadística y la probabilidad tiene que ver con la necesidad de implementar actividades educativas que enfaticen el estudio sobre el significado de aleatoriedad a través de situaciones problema (MEN, 1998, p. 48), en el presente trabajo se plantea la siguiente pregunta problema como objeto de estudio, **¿Cómo promover la comprensión de la noción de aleatoriedad a partir de la implementación de una secuencia didáctica basada en situaciones problema en estudiantes de grado cuarto de primaria?**

A partir de la anterior pregunta se generan las siguientes dos hipótesis sobre algunos posibles resultados que se pueden obtener en el desarrollo del proyecto:

- Un buen desempeño en matemáticas facilita la percepción de la noción de aleatoriedad.
- Una de las mayores limitantes para la comprensión de la noción de aleatoriedad se debe a que no se acepta fácilmente la indeterminación en el fenómeno, al contrario se busca cualquier argumento para considerarlo como un fenómeno determinista.

Con base en ello se podría delimitar el curso del presente trabajo mediante los siguientes objetivos.

1.2. Objetivos

El objetivo general se centra en

- Promover la comprensión de la noción de aleatoriedad a partir de la implementación de una secuencia didáctica basada en situaciones problema en estudiantes de grado cuarto de primaria.

En los objetivos específicos se plantea

- Enunciar cuáles son las concepciones, los posibles errores y las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la noción de aleatoriedad.
- Caracterizar el diseño y la implementación de una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de grado cuarto de primaria a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas.
- Evaluar los resultados obtenidos de la implementación de la secuencia didáctica en torno a la noción de aleatoriedad.

1.3. Una aproximación al estado del arte

Dado que se va a considerar la noción de aleatoriedad como fundamental en el desarrollo del pensamiento aleatorio, a continuación se elaborará una aproximación al estado del arte respecto aquellos elementos que pueden aportar al cumplimiento de los objetivos planteados.

En este sentido, Bennett (1998) expresa que los fenómenos aleatorios han hecho parte de la sociedad por mucho tiempo y su estudio a través del significado de azar, aleatoriedad y probabilidad conllevaron a tomar conciencia de la importancia que tienen en diversos ámbitos de la vida diaria. De igual manera, su estudio ha permitido reconocer lo importante que son estos conocimientos para las personas del común, pues es de notar que gran parte de las situaciones de la vida diaria presentan una esencia no determinista.

Los aportes que se han obtenido en los últimos siglos acerca del estudio de los fenómenos aleatorios han enriquecido el campo de la estadística y la probabilidad, permitiendo considerar que deben ser de dominio público y parte del currículo de matemáticas en todas las instituciones educativas en todos los niveles.

Así, en el campo educativo se reconoce a la probabilidad como objeto de gran importancia para el desarrollo del pensamiento matemático en un país. Al respecto en el artículo, *Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continúa del profesorado* de Vásquez, C. y Alsina, A. (2014) en la revista NÚMEROS se expresa que:

Actualmente existe un acuerdo generalizado en que la probabilidad, debido a sus múltiples aplicaciones en distintas áreas del saber, es parte importante de la matemática, por lo que es necesario que el pensamiento probabilístico se desarrolle desde las primeras edades (nivel parvulario). Como se ha indicado, esta fue adoptada por la NCTM (1989), al incluir como área temática en el Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics a Datos y Azar, iniciativa que desde entonces ha cobrado fuerza y se ha plasmado, últimamente, en los Principles and Standard for School Mathematics. (Vásquez & Alsina, 2014, p.6)

Según se expresa en dicho artículo, muchos países que toman los referentes que se determinan por la NCTM (1980), han adaptado sus currículos para promover la enseñanza de la probabilidad desde primaria, tal es el caso de Chile y España. En España por ejemplo la enseñanza de la estadística y la probabilidad en primaria se da desde los seis a los doce años. A continuación se muestra según el artículo de Vasquez y Alsina (2014) la distribución de los contenidos sobre la probabilidad en primaria en España.

El currículo español se organiza en tres ciclos de dos años cada uno, y en cuatro bloques de contenidos para cada ciclo. El bloque cuatro, se organiza con base a dos aspectos: a) tratamiento de la información (gráficos estadísticos en el primer ciclo; gráficos y tablas en el segundo ciclo; y gráficos y parámetros estadísticos en el tercer ciclo); y b) azar y probabilidad (carácter aleatorio de algunas experiencias en el primer y segundo ciclo, e introducción al lenguaje del azar en el segundo ciclo, mientras que en el tercer ciclo no se hace ninguna referencia explícita a los contenidos de azar y probabilidad) (p.14).

Ciclo	Contenidos
Primer ciclo	Carácter aleatorio de algunas experiencias: - Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad. - Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.
Segundo ciclo	Carácter aleatorio de algunas experiencias: - Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar: - Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias. - Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica
Tercer ciclo	Carácter aleatorio de algunas experiencias: - Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación y expresión del grado de probabilidad de un suceso. - Utilización del lenguaje adecuado para describir experiencias relacionadas con el azar. - Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas. - Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.

Tabla 1. Contenido en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2007)
Fuente: Vásquez y Alsina. (2014).

En su tesis de posgrado, *Azar, Aleatoriedad y Probabilidad: significados personales en estudiantes de educación media*, Montoya y Londoño (2011), expresan que a pesar de que en Colombia la probabilidad hace parte del currículo muchas veces o no se enseña o se enseña de una manera sesgada, enfatizando en el uso de fórmulas y ejemplos repetitivos, lo cual limita el desarrollo de la formación en esta área conllevando además a que la enseñanza de la probabilidad tenga un enfoque determinista. Este hecho evidencia además otro aspecto que se presenta en las instituciones educativas en Colombia, la cual tiene que ver con la manera en que se fragmenta la enseñanza de lo que tiene que ver con la estadística y la probabilidad, esto sucede cuando se determina que en los primeros grados de bachillerato (6° - 8°) se enseña estadística y en el resto (9° - 11°) probabilidad. Esto no permite que haya unos niveles de aprehensión de los conceptos en los cuales progresivamente se ahonde en el estudio de los fenómenos aleatorios y se pueda establecer una integración de estos conceptos.

Igualmente dichos autores expresan que la probabilidad se puede iniciar desde primaria dando un enfoque descriptivo al estudio de la noción de *aleatoriedad* y

privilegiando situaciones relacionadas con los juegos de azar, pues son llamativos para los estudiantes a edad temprana.

Los significados sobre azar, aleatoriedad y probabilidad deben ser el punto de partida en la enseñanza, ya que los estudiantes llegan a las instituciones educativas con unas concepciones que pueden llevar a favorecer el aprendizaje, lo importante es identificar estas concepciones para poder planificar un trabajo que oriente el aprendizaje y fortalezcan más adelante la comprensión de la probabilidad.

Debido a que el estudio de la noción de aleatoriedad se da a partir de casos de la vida cotidiana o de otras disciplinas, es factible y a la vez necesario que se promueva el proceso de resolución de problemas en pro del análisis de diversos fenómenos aleatorios que generen el fortalecimiento del significado de azar y aleatoriedad en los estudiantes. Calderón (2013) expresa en su tesis de posgrado: *Desarrollo de estrategias metodológicas para mejorar el rendimiento académico en el área de estadística en temas relacionados con el concepto de probabilidad y de aleatoriedad en los estudiantes de quinto grado de básica primaria en la I.E El Salvador*, que el planteamiento de experimentos aleatorios en la clase debe privilegiar la imprevisibilidad de sus resultados y que el estudiante comprenda este aspecto, y a pesar de esto, que el estudiante pueda generar hipótesis, que luego pueda probar por medio de la reiteración del experimento.

Castaño (2013), expresa en su trabajo de posgrado: *Diseño de una unidad didáctica para el desarrollo del pensamiento probabilístico, que favorezca un aprendizaje significativo en los estudiantes del grado 5°-3 de la I.E El Pedregal del municipio de Medellín*, que el planteamiento de unidades didácticas basadas en la teoría del aprendizaje significativo que propone David Ausubel, como medio de enseñanza para trabajar de forma grupal, permite la experimentación, donde lo importante es que no se den de antemano unas definiciones, sino que estas se vayan construyendo con el desarrollo de las actividades que se plantean en la unidad, igualmente se recalca que en las clases los experimentos aleatorios se puedan repetir en las mismas condiciones (hipotéticamente hablando), ya que esto permite que el estudiante comprenda que en este tipo de experimentos a pesar de que se

mantienen unas condiciones similares no se pueden deducir los resultados, lo cual permite afianzar la noción de azar.

Zamora (2014), en su tesis de posgrado: *Desarrollo de la intuición probabilística en educación primaria*, expone que los niños desde muy temprana edad desarrollan en mayor medida conceptos deterministas, a la vez que se trabajan procesos de tipo reversible, en matemáticas por ejemplo al enseñar las operaciones básicas con objetos físicos se muestra a los estudiantes que al realizar una adición, juntando dos cantidades de piedritas se obtiene una cantidad mayor y que luego al separar nuevamente las piedritas en las cantidades iniciales el docente propicia una concepción de reversibilidad en tales procesos. En cambio los fenómenos no deterministas no presentan esta característica, tal es el caso del juego con una ruleta, al hacerla girar y cuando se detenga en un punto cualquiera, no es seguro poder llegar de nuevo al punto inicial haciendo el proceso contrario (girando la ruleta en sentido contrario al anterior). Expresa la autora que a falta de reforzar la experiencia con situaciones aleatorias donde se evidencie que existen fenómenos que tienen una carga de incertidumbre puede conllevar a que se demore más la comprensión de las nociones de probabilidad.

De otro lado la autora expone que en la enseñanza de los conceptos probabilísticos la intuición debe ser desarrollada en el aula, ya que la probabilidad presenta un alto grado de complejidad, es importante desarrollar la intuición como proceso que promueva la comprensión de estos conceptos.

La labor del docente en pro de generar propuestas educativas que desarrollen la idea de aleatoriedad debe considerar unos principios didácticos, como lo evidencia la autora cuando toma como referencia a Chamorro (2003). Estos principios tienen que ver con recurrir a situaciones que sean familiares para el estudiante y en las que a la vez se puedan plantear una serie de actividades que movilicen la combinatoria y el azar. Chamorro (2003) explicita los siguientes principios que se debe tener en cuenta:

Desarrollar en las actividades el vocabulario específico de estos saberes siendo muy riguroso con el uso de estos hasta el punto del reconocimiento de los términos del saber sabio.

Trabajar todas las posibles formas de representación y la lectura de datos, la determinación de frecuencias, la determinación de las posibles combinaciones que se den en un experimento aleatorio.

Utilizar la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau para el planteamiento de situaciones donde se privilegien las fases de formulación y de validación en las resoluciones (Chamorro, 2003, p.333).

La revisión de aquellos trabajos que fueron diseñados e implementados pensando en el contexto sociocultural de las instituciones educativas de algunas regiones Colombianas se constituyen en referentes importantes para el propósito de este trabajo. Igualmente, con esta propuesta se quiere aportar elementos que sirvan a la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en los primeros años de la escolaridad.

1.4. Justificación

La inclusión de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas es un suceso relativamente nuevo que fue concebido por parte del Concejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) en los años ochenta, con lo cual surge la reflexión sobre la necesidad de cambio en términos de contenido y método en las matemáticas que se venían enseñando en las escuelas desde primaria hasta bachillerato.

Las razones que conllevan a buscar el replanteamiento del trabajo que se venía desarrollando en la educación matemática se debe en parte a que las matemáticas que se estaban enseñando privilegiaban en mayor medida el manejo de algoritmos y procedimientos que no vinculaban el contexto de la vida cotidiana.

Lo anterior implica un cambio de paradigma en la Educación Matemática para generar impacto positivo tal como lo recomienda la NCTM por medio de los siguientes tres aspectos:

- Trabajar la resolución de problemas en matemáticas.
- Que se definan las habilidades matemáticas básicas de manera que no se reduzcan a las habilidades de cálculo, sino que comprendan otras habilidades.
- Que los programas de matemática aprovechen al máximo, y en todos los grados, las ventajas que brinda el poder de las calculadoras y de los computadores. (NCTM, 1980, p.1)

Estas recomendaciones las desarrolla atendiendo a una realidad social cuya naturaleza como se verá es de carácter variable, no determinista, y que su reconocimiento se desarrolla a partir del campo de la Educación Estocástica, entendida como el campo de la Educación en Estadística y Probabilidad.

Para organizar el currículo de matemática alrededor de la resolución de problemas, es necesario enseñarles a los estudiantes “métodos de obtener, de organizar y de interpretar información, realizando y probando inferencias con base en los datos, y a comunicar resultados. (NCTM, 1980, p. 3)

Con el reconocimiento de la importancia de la Estadística y la Probabilidad en el currículo de matemáticas surge la necesidad de desarrollar el pensamiento aleatorio cuya naturaleza es no determinista, diferente al carácter lógico deductivo de las matemáticas que se habían venido desarrollando antes de los ochenta con un enfoque estructuralista.

En nuestro país estas propuestas fueron implementadas como parte de las políticas educativas mediante los lineamientos curriculares de matemáticas en el año de 1998, en él se explicita que:

La enseñanza de las matemáticas convencionales ha enfatizado la búsqueda de la respuesta correcta única y los métodos deductivos. La introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas. Este carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permita exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones. (MEN, 1998, p.47)

A pesar de que esta propuesta está en concordancia con la idea que se establece por parte del NCTM (1980) generalmente no se desarrolla en las instituciones educativas, una de las razones puede ser que los docentes de matemáticas que laboran actualmente fueron formados a partir de una enseñanza tradicionalista en la que además se presentaba la matemática de una manera formalista y un cambio como el que se plantea puede implicar también un cambio en los propios conocimientos y paradigmas del docente.

La necesidad está en poder desarrollar desde los primeros años de la escolaridad el pensamiento aleatorio, lo cual se genera a partir del estudio de nociones fundamentales que sustentan la estocástica como lo es el de aleatoriedad y azar, entre otros. Estas nociones, como se expone en Batanero (2001b), no solo se pueden estudiar desde contextos cercanos a los estudiantes sino que debe presentarse desde diferentes situaciones que permitan que el estudiante desarrolle una idea de lo no determinista, que está caracterizada por nociones como la incertidumbre y lo impredecible.

A partir de esta situación que representa una necesidad en la Educación Matemática a nivel escolar, surge el interés por realizar una propuesta educativa que promueva el aprendizaje de la noción de aleatoriedad.

Así, este trabajo se centra en la concepción, diseño, experimentación y evaluación de una secuencia didáctica basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), alrededor de la noción de aleatoriedad aplicable a estudiantes de grado cuarto de primaria.

La TSD como referente educativo establece que el estudiante aprende mediante la interacción con un *medio*, en el que se quieren reproducir las condiciones naturales en que una persona podría descubrir el conocimiento:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986, p. 46).

La TSD implementa la *resolución de problemas* como parte importante del proceso de aprendizaje, por lo cual, según Batanero (2001b) la TSD como propuesta educativa es acorde para enseñar el significado de aleatoriedad, ya que promueve el aprendizaje por medio de la interacción con un medio que facilita las condiciones para que se lleve a cabo (contexto, nivel de escolaridad, conocimientos previos), pero que a la vez implica un esfuerzo por parte del estudiante para producir conocimiento, lo cual evidencia la esencia constructivista de esta teoría.

Para llevar a cabo esta propuesta con la que se busca generar la comprensión de la noción de aleatoriedad en estudiantes de grado cuarto de primaria, lo primero que se hará es realizar un análisis diagnóstico para conocer el estado de las estudiantes, con estos resultados se planteará una secuencia didáctica que aproveche las fortalezas y trabaje en resolver las falencias que allí se destaquen con respecto al significado de aleatoriedad. Además se realizará un comparativo entre los resultados que se obtengan de la aplicación de la secuencia didáctica con los presupuestos de un análisis “previo” sobre las posibles dificultades que puedan presentar las estudiantes, las posibles estrategias en la resolución de los problemas, los actos de devolución, validación e institucionalización formulados en la secuencia didáctica.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Dimensión Histórica –Epistemológica: Una aproximación a la noción de aleatoriedad

A pesar de que las definiciones formales de aleatoriedad se realizaron en el siglo XX, desde mucho tiempo atrás ha existido el interés por el estudio de los fenómenos de tipo no determinista.

A continuación se realiza el reconocimiento del desarrollo histórico y epistemológico del significado de aleatoriedad, mostrando aquellos aportes que a lo largo de la historia han propiciado su desarrollo, pues es sabido que la noción de aleatoriedad está presente en diversos fenómenos de la vida diaria y en diversas disciplinas.

Percepción histórica de los fenómenos no deterministas

Según Bennett (1998), el interés por recurrir a fenómenos de tipo no determinista, así como la búsqueda por tratar de comprender sus causas no es nuevo y de esto se tiene referencia desde diferentes fuentes históricas que datan desde varios siglos antes de Cristo.

En un primer momento de la historia los fenómenos que hoy en día se catalogan como no deterministas fueron estudiados desde el concepto de **azar** y uno de los referentes fue Leucipo (450 a.c.), cuyo pensamiento sobre el *azar* se centra en que nada sucede sin una causa, es decir que todo suceso presenta unas causas determinadas y el azar, “significaba ignorancia de la causa determinante” (Leucipo, siglo V a C., citado por Bennett, 1998), esta concepción que presenta una postura determinista sobre el azar reaparece más adelante en el siglo XVI en Europa cuando la iglesia cristiana consideraba que todo lo que ocurría en nuestra vida y en el universo era predeterminado por Dios, por lo que nada sucedía por fuera de los designios que estaban deparados por el creador.

De otro lado, el azar se ha percibido históricamente por diversas culturas en relación a lo que es justo, a ella se acudía cuando era necesario sortear una decisión en la cual ninguno de los participantes podía decidir, por el hecho que esto permitía cierta ventaja. En este sentido una de las primeras definiciones para el término suerte se da en el diccionario Asirio (como se citó en Bennett 1998, p 30) con la palabra *isqu* (suerte) que designa un sorteo (un medio de determinar una elección) pero también una heredad (una porción de tierra, unas rentas, propiedades o botines).

La relación entre aleatoriedad y probabilidad

La idea de *aleatoriedad* comienza a ser estudiado de forma paralela a la probabilidad aproximadamente en el siglo XIV, un referente fue Cardano (1501 – 1576) quien aportó al campo de la probabilidad desde los juegos de azar (*Liber de Ludo Alae* de Cardano). El estudio que realiza Cardano muestra que las posibilidades en el resultado en los juegos de azar (juegos de azar con dados, monedas, cartas, extracción de bolas de urnas) son aproximadamente iguales. Esta propiedad conocida como *equiprobabilidad* es una de las bases en el estudio de las probabilidades de sucesos simples y tiene la esencia no determinista que es propio de los fenómenos aleatorios.

A partir del estudio sobre la equiprobabilidad surge el análisis de la aplicación y el alcance que puede tener en otras situaciones del mundo físico o natural que igualmente presentan naturaleza no determinista, una de las conclusiones es que para un conjunto o colectivo infinito no es posible determinar la equiprobabilidad, debido a que el principio de indiferencia ya no es razonable, lo cual limita la aplicación a situaciones cuyo conjunto de elementos sea finito.

El principio de equiprobabilidad que se comporta bien en situaciones simples como los juegos de azar no funciona en situaciones que presentan mayor complejidad como por ejemplo al tratar de prever el color de ojos de un recién nacido. Kiburg (1974) indica que esta propiedad impone condiciones excesivas y por ello es difícil de aplicar. En ella se

concibe la idea de aleatoriedad como una propiedad “objetiva” de cada elemento de una clase.

Kiburg (1974) propone una interpretación de aleatoriedad compuesta de cuatro términos:

- Un objeto que es miembro de un conjunto o colectivo;
- El conjunto del cual el objeto es un miembro (población o colectivo);
- La propiedad con respecto a la cual queremos estudiar la aleatoriedad del objeto;
- El conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad. (Kiburg, 1974, p. 85)

En esta concepción de aleatoriedad propuesta por Kiburg el juicio de la persona depende del conocimiento sobre la situación que se estudia, siendo vista de manera “subjetiva”. Así, lo que puede ser aleatorio para una persona para otra tal vez no lo sea.

Estudio formal sobre aleatoriedad

Según Bennett (1998) el azar ha servido desde que se tiene referencia documental para tomar decisiones importantes que involucran la vida de las personas, así por ejemplo, en la antigüedad, para juzgar la culpabilidad de una persona se recurría a los dados y se llegaba a justificar que el resultado era designio de Dios, es decir que la voluntad de Dios se materializaba en el resultado, de igual manera con otras situaciones no menos importantes las personas aceptaban que el azar era sinónimo de justo, sin embargo en algunos casos podría intervenir un ser supremo que controlaba los resultados.

Este pensamiento determinista que establece la iglesia cristiana se reafirma poco tiempo después a finales XVII con la física newtoniana, postura que a partir del aporte de Newton

proponía que “todas las cosas del mundo natural podían ser conocidas a través de las matemáticas”. (Bennett, 1998, p. 71)

El pensamiento heredado de la física newtoniana generó el interés creciente por tratar de conocer con exactitud el funcionamiento de los fenómenos presentes en la naturaleza, el medio que permitiría esta enorme labor eran las leyes matemáticas en las cuales tenía gran relevancia la medición.

No pasó mucho tiempo para que los investigadores observaran que los datos obtenidos en los procesos de medición son aproximaciones y no medidas exactas que den validez a sus estudios, casos como el tratar de medir distancias muy grandes son ejemplos de los problemas que se generaron en la búsqueda del conocimiento y control de los fenómenos en la naturaleza.

Durante el siglo XVIII la búsqueda de la exactitud en la medición se convierte en un reto para los científicos, con lo cual se dan cuenta de que la medición específicamente en disciplinas como la astronomía y la geodesia no era tarea fácil de lograr, ya que al tratar de encontrar una medida exacta se encontraban en la situación de que al corroborar esta medida obtenían una medida diferente cada vez.

Esta situación que se debía en parte a la imperfección de los instrumentos utilizados y al error humano al momento de efectuar las mediciones conlleva a considerar que la exactitud en algunas áreas como las mencionadas no era alcanzable como se pensaba, es así como se reconoce y se acepta el *error aleatorio* como la mejor aproximación de la medida.

Este problema que se presenta en la ciencia es una prolongación del pensamiento antiguo en el que se considera que por más aproximado y por muy pequeño que sea el error, la incertidumbre está presente y por lo tanto no se tiene la certeza de cuál medida es la mejor.

Al respecto Thomas Simpson en 1776 escribe un ensayo en el que relaciona por primera vez la distribución de los errores con los sucesos aleatorios, en el ensayo expresa de que si una observación tiene la misma probabilidad de suceder dentro de un intervalo cercano al valor verdadero, “entonces las probabilidades de cualquier observación simple presentarán una distribución uniforme”. (Bennett, 1998, p. 74).

Con el reconocimiento del carácter aleatorio de los errores de medición surge el estudio del comportamiento de estos a través de gráficos como la campana de Gauss, donde Bernoulli (1777) expresa que “todo el complejo de observaciones es simplemente un suceso aleatorio”. (Bennett, 1998, p. 77).

A partir del estudio realizado sobre los errores de medición se consigue uno de los grandes logros en esta área, el conocido *teorema central del límite* que sería el principal postulado en la teoría de la probabilidad de Laplace en 1810. Este teorema probaba que “la suma o la medida de un gran número de errores seguía una distribución aproximadamente normal”. (Bennett, 1998, p. 79).

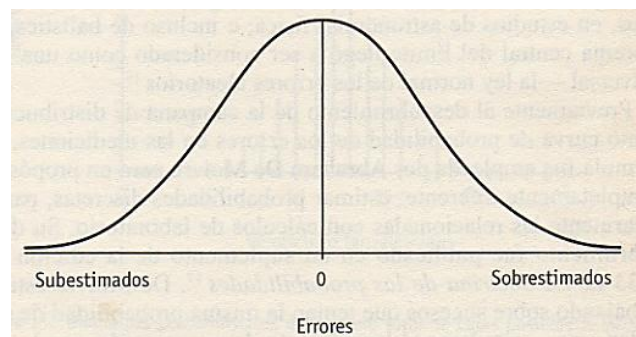


Figura 1. Campana de distribución para errores de observación.
Fuente: Bennett (1998)

El trabajo desarrollado por Gauss y Laplace profundiza en el reconocimiento y búsqueda por describir de una forma predecible (mediante las distribuciones de probabilidad) ciertos fenómenos que se comportaban como sucesos aleatorios. Los estudios hechos por Gauss y Laplace servían a una comunidad científica, sin embargo esto no era un campo de interés general.

Una de las personas que luego de Gauss y Laplace colaboró en el desarrollo de la estadística y la probabilidad fue Gustav Theodor Fechner, quien fue considerado el primer no determinista universal.

Fechner fue quien estudio el comportamiento de los datos en contextos de la vida diaria (lotería, meteorológicos, etc). Por medio de los datos que tomaba de situaciones de la vida diaria Fechner buscaba analizar la variabilidad y compararla con los datos de distintos contextos que también presentaban esencia no determinista, con estos resultados buscaba determinar “si las fluctuaciones en estos conjuntos de datos podían ser atribuidos a las circunstancias locales o al azar”. (Bennett, 1998, p.89).

El trabajo de Fechner fue el inicio en el estudio sobre la obtención de secuencias aleatorias a partir de los fenómenos presentes en la vida diaria, atribuyendo que los datos obtenidos son aleatorios debido a que la naturaleza presenta un carácter no determinista.

A pesar de que el ser humano ha buscado conocer y dominar los fenómenos de la naturaleza, en respuesta ha encontrado que la esencia de estos fenómenos son no deterministas y a lo más ha podido llegar a una aproximación, es así como poco a poco fue reconociendo y dando importancia a la estadística y a la probabilidad como campos de estudio para estos fenómenos. “sin incertidumbre, no hay aleatoriedad o azar”. (Bennett, 1998, p. 71)

Con el auge de campos como la medicina y la economía entre otras, se requiere de la estadística y la probabilidad para el desarrollo de estudios y experimentos que simularan las condiciones reales cuyas características como se vio son impredecibles, así surge la necesidad de obtener números aleatorios que garantizaran el carácter no determinista, y es en la segunda década del siglo veinte que se desarrollan medios para la obtención de estos números. En 1955 la corporación RAND publica un documento titulado *Un millón de dígitos aleatorios con 100.000 desviantes normales*, para lo cual se utilizó una ruleta electrónica como medio para generar estos números.

La noción de secuencia aleatoria no solo es considerada como necesaria e importante en diversas disciplinas sino que los investigadores en el campo de la estadística y la probabilidad han presentado puntos de vista diferentes que en ocasiones ha generado controversia.

Las secuencias aleatorias a menudo son aquellas cuyos elementos son igualmente probables, y Venn afirmaba que un ordenamiento debería ser juzgado como aleatorio o no, atendiendo a lo que podemos concluir que observaríamos si pudiéramos continuar nuestra observación durante un periodo mucho más prolongado Bennett (1998).

El reconocimiento de los fenómenos no deterministas junto con el desarrollo de la ciencia, le da un estatus de importancia a la Estadística, y en este campo es muy importante el significado de aleatoriedad como parte esencial de muchas de las situaciones que aquí se estudian. Es así como la probabilidad se fundamenta en la definición de aleatoriedad.

En 1919 Richard Von Mises define aleatoriedad en una secuencia de observaciones aleatoria como la imposibilidad de identificar previamente una observación particular de la secuencia, ya que no existe sistema que permita predecirlo. “La aleatoriedad garantiza que no existe sistema de juego, fórmula o regla alguna capaz de identificar un determinado elemento de la secuencia” (Bennett, 1998, p.125).

La concepción que plantea Von Mises sobre aleatoriedad en una secuencia es controvertida ampliamente debido a que aquí afirma la imposibilidad de existencia de un sistema que permita predecir la observación. Según Bennett (1998) es Kolmogorov quien plantea que en lugar de juzgar la aleatoriedad de una secuencia por la impredecibilidad, se asume que: “una secuencia es aleatoria si la fórmula más corta que la genera es extremadamente larga” (Bennet, 1998, p. 125).

Esta controversia representa una cuestión que ha estado presente en el estudio de los fenómenos aleatorios y consiste en la imposibilidad de probar la existencia de la indeterminación, ya que hay investigadores que piensan que la indeterminación se debe más

al desconocimiento de las causas por parte de las personas y no al carácter impredecible del fenómeno.

En cualquier caso, ya sea que la idea de aleatoriedad se relacione con la concepción de ignorancia, o a una extensión de la fórmula que permite obtener la observación, hay acuerdo en que es la impredecibilidad la que está presente. “Así pues, la aleatoriedad nos garantiza que no se puede concebir ningún esquema que permita aumentar la probabilidad de conocer el resultado” (Bennett, 1998, p. 127).

Este recorrido histórico ofrece una visión que pone en evidencia la ausencia de simplicidad sobre la idea de aleatoriedad, sin embargo se observa que la idea de aleatoriedad está presente como esencia de lo cotidiano y a pesar de esto no es algo que se logre caracterizar o definir fácilmente.

Así, se considera como un aspecto favorable para la comprensión de la noción de aleatoriedad, que para su estudio se recurra a un *fenómeno aleatorio* o a un *experimento aleatorio*, que sea cotidiano para las estudiantes. Esto permitiría un acercamiento significativo que facilitaría la abstracción de la noción de aleatoriedad.

En las experiencias cotidianas que los estudiantes ya tienen sobre estos sucesos y estos juegos, empiezan a tomar conciencia de que su ocurrencia y sus resultados son impredecibles e intentan realizar estimaciones intuitivas a cerca de la posibilidad de que ocurran unos u otros (MEN, 2006, p. 65).

De otro lado, al no encontrarse una única definición que permita un conocimiento pleno del significado de aleatoriedad, y al observar algo nuevo y diferente cuando se estudia desde perspectivas diversas, resulta necesario concentrarse en algunos referentes que promuevan la comprensión del significado de aleatoriedad y poder así establecer una propuesta educativa viable.

Al estudiar acontecimientos aleatorios surgen, conjuntamente, aspectos de distribución local y general así como de apariencia visual. Es necesario considerar separadamente estos aspectos y centrarse en ellos. El uso del término general “aleatoriedad” sin examinar sus diferentes manifestaciones e interpretaciones crea – más bien evita – dificultades y empobrece la vida intelectual de los estudiantes. (Green, 1989, p. 46)

De esta manera se destacan, entre otros los siguientes *referentes* formativos de la *noción de aleatoriedad*, que según Green (1982), estarían acordes para estudiantes que se encuentran en los últimos años de primaria y primeros años de secundaria, los cuales son: *equiprobabilidad, ausencia de uniformidad en pequeñas muestras, asignación y comparación de probabilidades*.

Los anteriores referentes fueron planteados en Green (1982) con el propósito de indagar por las concepciones de *probabilidad y aleatoriedad* que tienen los estudiantes ingleses entre 11 y 16 años de edad.

2.2. Dimensión Didáctica: Teoría de Situaciones Didácticas, referente teórico para el diseño de una Secuencia Didáctica

2.2.1. Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

Teniendo en cuenta que la TSD conforma un campo denso y complejo que está en proceso de formación, a continuación se realiza una breve descripción de la propuesta que establece Guy Brousseau, atendiendo a los conceptos básicos de esta teoría y a las características que conllevan al funcionamiento de sus componentes.

La propuesta de la TSD como teoría de la enseñanza está fundamentada desde la epistemología genética de Jean Piaget, con lo cual Brousseau sostiene “que la producción de conocimiento se construye a partir de reconocer, abordar y *resolver problemas* que son generados a su vez por otros problemas” (Zadovsky, 2005, p. 2).

A partir de lo anterior se plantea que el aprendizaje se logra como resultado de la adaptación del estudiante a un “*medio*” resistente con el que interactúa. “El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” (Brousseau, 2007, p. 45).

De acuerdo a esto se determina un elemento esencial dentro de la TSD que caracteriza y asemeja las condiciones a las cuales se refiere Brousseau, este elemento que es conocido como el “*medio*” es pensado, construido y propuesto por el docente para generar el aprendizaje en las condiciones particulares del contexto sociocultural del aula, el *medio* incluye una *problemática matemática* y unas relaciones sobre esta problemática que son abordadas por el estudiante en el transcurso de la actividad.

Habiendo explicitado la esencia del modelo teórico se entiende que **situación** “es un modelo de interacción de un sujeto (alumno) con cierto *medio* que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable” (Brousseau, 1999, 32).

Brousseau toma esta definición de *Situación* para plantear que “**situación didáctica**” es un sistema conformado por la interacción alumno/medio y docente/alumno, donde la función del docente en el proceso es la de animar al alumno para alcanzar el objetivo educativo que se plantea en la *Situación* pero evitando evidenciar el proceso de resolución.

Esta concepción sobre el aprendizaje es aclarada por Brousseau cuando expresa que una enseñanza que no atienda la posibilidad de que el alumno se confronte a una porción de la realidad termina por ser incompleta, ya que en el futuro el alumno no va a encontrar en la realidad situaciones con una intención didáctica, esto conlleva a considerar que el *medio* además debe permitir la **validación** como parte del aprendizaje, ya que de otra forma el alumno no podría darse cuenta si la estrategia de resolución que utiliza para la problemática matemática es correcta.

La necesidad de un *medio* que propicie el aprendizaje de forma más natural como sucede en la realidad implica necesariamente pensar una *problemática matemática*, donde el concepto matemático no se expone de forma directa, sino que la labor de resolución del problema por parte del alumno debe llevarle a utilizar una estrategia en la cual el concepto matemático implicado emerge como la solución correcta.

Según Zadozsky (2005), “más que pensar en un *problema* particular como núcleo del medio, se piensa en un tipo de problema con condiciones variables, cuyas particularidades se fijan cada vez” (p, 6), haciendo alusión con esto por un lado, a las relaciones que fueron planteadas por el docente y que más adelante se referenciaran y por otro, lo que Brousseau define como “*variables didácticas*”.

(...) las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una *variable didáctica* cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación (Panizza, 2003, p. 12).

Lo anterior conlleva a establecer que la *problemática matemática* que se encuentra en el “*medio*” debe permitir la modificación de algunos elementos o datos que son susceptibles de variar sin afectar las características esenciales del problema inicial, con el propósito de que se aprendan conocimientos diferentes. Esto implica también que para el desarrollo de una situación didáctica se requiera de un tiempo suficiente para que los estudiantes puedan realizar el proceso de interactuar con el medio una y otra vez, permitiéndole modificar o producir nuevos conocimientos a partir del análisis que realice sobre los resultados de sus acciones (retroacciones del *medio*).

En la TSD se establecen tres tipos de *situaciones didácticas* que determinan unas relaciones sobre la problemática matemática: las situaciones de *acción, formulación y*

validación. Los esquemas que aparecen a continuación representan las características de cada una de las tres *situaciones* y son propuestas por Brousseau (2007).

La *situación de acción* requiere que el alumno interactúe con el medio y se genere a partir de ello el reconocimiento de la problemática y el descubrimiento de estrategias de solución, la actividad que se desarrolla en esta situación es un acto del alumno con respecto al medio de forma individual, por lo cual se pone en juego los propios conocimientos como sustento en la comprensión y resolución del problema.

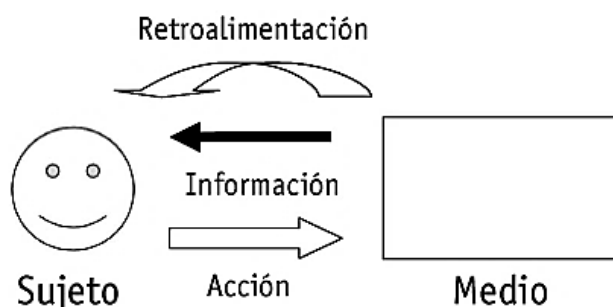


Figura 2. Esquema de Situación de acción.
Fuente: Brousseau (2007)

En la *situación de formulación* se destaca la interacción comunicativa (verbal, gestual, escrita) entre los alumnos participantes. Panizza (2003) la define como la situación en la que “un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a un alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base al conocimiento contenido en el mensaje” (p. 22).

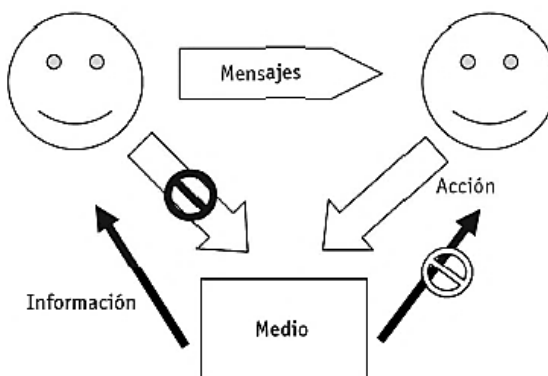


Figura 3. Esquema de Situación de formulación.
Fuente: Brousseau (2007)

La *situación de validación* consiste en el momento en el cual los alumnos exponen, argumentan y defienden la validez de sus afirmaciones, fruto del trabajo en la resolución del problema matemático.

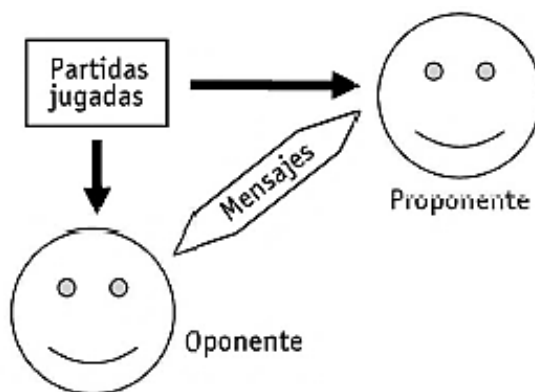


Figura 4. Esquema de Situación de validación.
Fuente: Brousseau (2007)

Durante el desarrollo de la Situación didáctica Brousseau plantea un modelo de interacción entre el alumno y el medio conocido como “*situación a – didáctica*”. En él se pretende que el alumno se enfrente al problema matemático y lo asuma como un reto que le corresponde y que es capaz de resolver.

El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (Brousseau, 1986, p. 56)

En el momento de la “*situación a – didáctica*” el proceso se centra en la interacción alumno/medio, aquí la posibilidad de que el *medio* facilite la *retroacción* es importante para que el estudiante pueda encontrar respuesta en él, sobre la pertinencia de una estrategia de solución a través de la *validación*. Sin embargo, como se mencionó anteriormente el *medio* debe permitirle al alumno establecer si el camino de resolución del problema que está pensando es viable, pero no debe brindarle el camino, ya que de ser así no le estaría

permitiendo la toma de decisiones y entonces el alumno no estaría produciendo conocimiento.

Sobre las funciones del docente en el proceso, su labor comienza con la propuesta del *medio*, el cual se debe adecuar al concepto matemático y al contexto de los estudiantes, es decir que gran parte del proceso dependen de esto. Pero además durante el proceso la labor del docente se determina especialmente en dos momentos que son: *la “devolución” y la “institucionalización”*. La *“devolución”* se entiende como la responsabilidad que el docente les encarga a los alumnos por la resolución de los problemas, así como el compromiso y la actitud correcta con el trabajo.

No basta con comunicar un problema a un alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema “universal” libre de presupuestos didácticos. Denominamos “devolución” a la actividad mediante la cual el docente intenta alcanzar ambos resultados (Panizza, 2003, p. 28).

Mientras que el momento de *“institucionalización”*, complementario al de devolución, consiste en dar un estatus a los conocimientos que se alcanzaron con la resolución del problema, pero que aún no se presentan de manera formal y no es percibido de esta manera por los alumnos.

(...) En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo a - didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones “libres” del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status (Brousseau, 1986, p. 89).

En la práctica las fases de acción - formulación – validación no necesariamente se da de una manera aislada y lineal como se muestra en la teoría, ya que durante el desarrollo de

la secuencia didáctica (SD) puede suceder que en una misma situación se lleven a cabo dos o más fases de manera simultánea. Brousseau aclara que cuando el estudiante formula una estrategia de solución a la problemática es posible que también deba llevar a cabo la validación de esta estrategia, por lo cual la teoría de las situaciones didácticas debe implementarse atendiendo la lógica que generalmente las personas utilizan cotidianamente cuando pretenden resolver una situación problema, sin embargo es importante que cada fase se cumpla y genere durante el desarrollo la abstracción del concepto.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

El propósito de este trabajo de grado consiste en promover la comprensión de la noción de aleatoriedad, a partir de ello se presenta a continuación la ruta metodológica con la cual se pretende su desarrollo.

Las fases de la metodología que guiarán el desarrollo del proyecto son las siguientes:

Primera fase: Planteamiento y aplicación de la prueba diagnóstica.

Segunda fase: Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica y diseño de la secuencia didáctica.

Tercera fase: Análisis previo de la SD.

Cuarta fase: Aplicación de la SD.

Quinta fase: Análisis de la implementación de la SD y evaluación.

En la primera fase se busca reconocer qué concepciones tienen las estudiantes sobre aleatoriedad, esto se hará a partir de una prueba diagnóstica, la cual es una adaptación de la propuesta en Green (1982), correspondiente a un nivel escolar entre los últimos años de primaria y primeros años de secundaria. En esta prueba diagnóstica se analiza la concepción de aleatoriedad a partir de cuatro referentes que abonan a la noción de aleatoriedad: *equiprobabilidad, incertidumbre, ausencia de uniformidad en pequeñas muestras, asignación y comparación de probabilidades*.

Según Green (1989), la comprensión del significado de aleatoriedad se valora por la riqueza en el reconocimiento de lo aleatorio en situaciones diversas, entre mayor diversidad de situaciones de carácter aleatorio, mejor será el reconocimiento de lo que se entiende por lo que es aleatorio.

En la segunda fase se retoman los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba diagnóstica para analizar qué concepciones tienen las estudiantes sobre la noción de

aleatoriedad y cómo estas concepciones pueden favorecer o al contrario dificultar su comprensión.

Con base en el análisis de los resultados de la prueba se diseña la SD, la cual está enfocada al fortalecimiento de la noción de aleatoriedad en las estudiantes, esto con el fin de mantener una concordancia entre lo trabajado en la prueba diagnóstica y la SD.

En un siguiente momento se realiza un análisis sobre lo que podrá suceder en la aplicación de la SD, este análisis contempla las posibles *estrategias de resolución*, las *variables didácticas* y *las dificultades* en la resolución de las actividades.

Desde la TSD se analizará los actos de *validación e institucionalización* así como el proceso de *devolución*.

En la cuarta fase se hace la implementación de la SD, aquí se explicita las condiciones bajo las cuales se desarrollará esta propuesta en el aula de clase y se establece el contrato didáctico. Es de aclarar que en esta fase la recolección de los datos se hará mediante registros filmicos, fotografía y las hojas de trabajo de las estudiantes que será evidencia para el análisis correspondiente.

En la última fase se realiza el análisis de los resultados obtenidos de la implementación de la SD de acuerdo a las categorías de análisis mencionadas anteriormente, también se realiza un análisis comparativo entre los resultados obtenidos del análisis previo y los resultados de la implementación de la SD, desde lo cual se espera observar el progreso en la comprensión de la noción de aleatoriedad en las estudiantes.

CAPÍTULO IV

CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN

La institución educativa en la cual se implementa la secuencia didáctica es la I.E. San Vicente sede Rosa Virginia, ubicada en la Cra 32 # 46 - 10, municipio de Palmira, departamento del Valle del Cauca. En ella funcionan los niveles de preescolar y primaria, de carácter oficial cuenta con estudiantes correspondientes a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3. El compromiso formativo de la Institución Educativa está enfocado en la población femenina.

El grado 4-3 está conformado por 39 estudiantes con edades entre 10 y 11 años, de ellas se optó por seleccionar un grupo de diez estudiantes de acuerdo al rendimiento académico presentado en el área de matemáticas.

Esta selección se realiza con el propósito de concentrar la atención en un grupo con características específicas, que contribuya a los objetivos del proyecto y poder así describir las acciones de las estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica.

A la vez se quiere interpretar la concepción de aleatoriedad en los diferentes momentos en que las estudiantes interactúen con las situaciones y en la prueba diagnóstica.

Para conformar este grupo de 10 estudiantes, por un lado se eligen las 5 estudiantes con mejor rendimiento académico en matemáticas, con notas mayores o iguales a 4,5 en la asignatura por cada periodo, mientras que la elección de las otras cinco estudiantes corresponde a las de bajo rendimiento en matemáticas, con notas menores o iguales a 3,5 en la asignatura por cada periodo.

Así, se realizará un análisis a priori y a posteriori de la secuencia didáctica para observar las concepciones sobre la aleatoriedad que muestran las estudiantes seleccionadas, que en adelante representan los siguientes dos casos: las estudiantes con alto rendimiento en matemáticas (caso 1) y las estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas (caso 2).

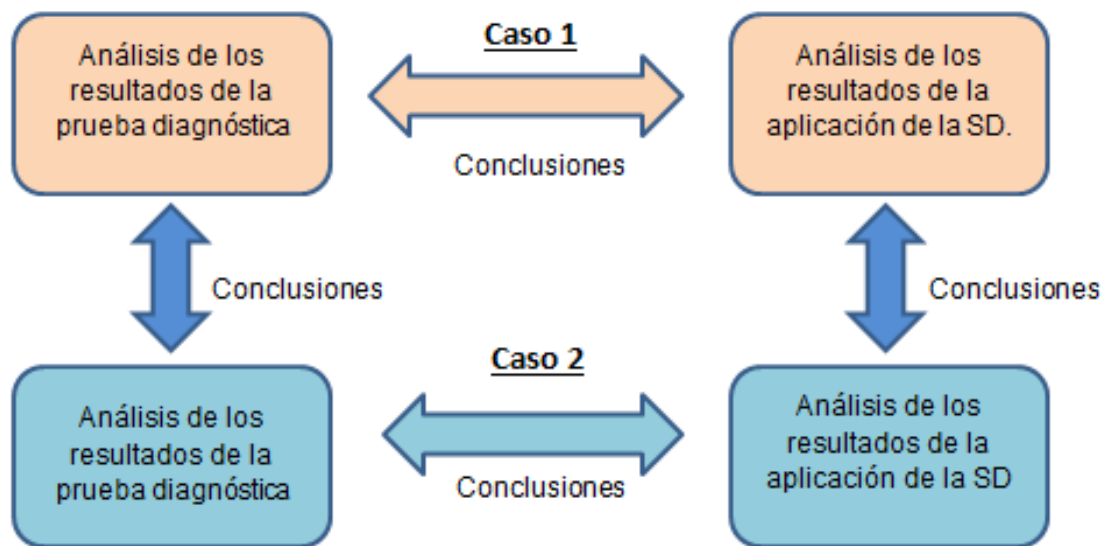


Figura 5. Esquema para la valoración de la comprensión de la noción de aleatoriedad.

En cuanto a la asignatura de estadística, en el grado 4-3 se le destina una hora a la semana a la temática que trata conceptos de estadística y de probabilidad. En la revisión del plan de asignatura para matemáticas en el grado cuarto se observa que en lo concerniente a la enseñanza de la estadística hay énfasis en el trabajo con tablas de frecuencias, gráficos de barras, gráfico circular, medidas de tendencia central, espacio muestral, sucesos seguros, imposibles, cálculo de la probabilidad de un evento simple.

El modelo pedagógico de la Institución Educativa

La institución Educativa San Vicente plantea que su modelo pedagógico es el Socioreconstruccionista – Dialéctico (SRD), el cual retoma de otros modelos pedagógicos algunos elementos considerados pertinentes de acuerdo a las necesidades socioculturales y a los principios que se quieren fomentar en las estudiantes. Educa en la relación dialéctica entre la teoría y la práctica y promueve procesos de liberación constante que implican formular alternativas de acción a comprobar en situaciones reales.

Este modelo asume que el docente toma el papel de un guía activo, crítico, interactuante con las estudiantes en el proceso de reflexión acción que a través del ejemplo

fomente el desarrollo de personas que aporten a la sociedad en orden a la reconstrucción social de la misma.

Los procedimientos metodológicos se centran en procesos de acción reflexión y de socialización. Incorporan metodologías participativas como trabajo grupal, autogestión, análisis de problemas e investigación entre otras. (Sistema Institucional de Evaluación escolar, 2015)

Métodos, técnicas e instrumentos de recogida y análisis de la información

La metodología que orienta este proyecto es de tipo cualitativo, experimental. Por ende se enfatiza la realización del análisis descriptivo a partir de la información captada de registros fílmicos, grabaciones de audio y material escrito.

La información recogida de la aplicación de la prueba diagnóstica permitirá la realización de un primer análisis acerca de la concepción de aleatoriedad por parte de las estudiantes y obtener así unas conclusiones.

Con esta información se procederá a la elaboración e implementación de la SD, que permita realizar un análisis comparativo respecto a la concepción de aleatoriedad antes y después de aplicar la SD y entre los dos grupos (caso 1 y caso 2).

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DIAGNÓSTICO: RECONOCIMIENTO DEL ESTADO CONCEPTUAL A PARTIR DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

El siguiente análisis se hace a partir de los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica aplicada a las estudiantes del grado 4-3 de la IE San Vicente en Palmira, en la cual se busca reconocer qué concepciones tienen sobre aleatoriedad. Esta prueba diagnóstica consta de seis preguntas que se basan en el cuestionario propuesto en Green (1982). La prueba diagnóstica se puede ver al final de este documento.

Hay que tener en cuenta que la noción de aleatoriedad, como se menciona en Green (1989), se debe estudiar en casos diferentes y reconociendo aspectos nuevos de la noción de aleatoriedad cada vez, lo cual lleva a evidenciar que existe una diversidad de referentes que abonan la concepción de la noción de aleatoriedad, como lo son: ausencia de uniformidad en pequeñas muestras, en algunos casos equiprobabilidad y, asignación y comparación de probabilidades, etc.

A continuación se muestra el sentido en que se valora cada uno de estos referentes.

Ausencia de uniformidad en pequeñas muestras	No es común presenciar una distribución que fije una forma geométrica euclídea o una relación de simetría entre los elementos que hacen parte del experimento aleatorio.
Equiprobabilidad	Todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos. (Batanero, 2001b, p. 24)
Asignación y comparación de probabilidades	En muchos fenómenos aleatorios la probabilidad de ocurrencia de los sucesos no es la misma. (Batanero, 2001b, p. 14)

Tabla 2. Descripción de los referentes a tener en cuenta en la prueba diagnóstica

Siendo consecuente con lo anterior se escogen tres referentes para analizar la noción de aleatoriedad, los cuales son: ausencia de uniformidad en pequeñas muestras, equiprobabilidad y asignación y comparación de probabilidades. Estos tres referentes fueron escogidos teniendo en cuenta la propuesta de Green (1982), la cual presenta similitud con algunos de los objetivos del presente trabajo, como por ejemplo el interés por indagar la concepción de aleatoriedad en niños que están finalizando la primaria e iniciando la secundaria.

Cada uno de estos referentes será tratado de forma descriptiva y no rigurosa, teniendo en cuenta la edad y grado escolar de las estudiantes.

Las preguntas son una adaptación de las propuestas en Green (1982), contribuyendo así al propósito de facilitar la comprensión por parte de las estudiantes, con lo cual se espera posibilitar que las respuestas evidencien los conocimientos previos.

La prueba diagnóstica fue aplicada a las treinta y nueve estudiantes del grado 4-3, sin embargo el análisis se realiza a las pruebas de las diez estudiantes que conforman los dos casos mencionados en el anterior capítulo.

A continuación se referencia las estudiantes que conforman los dos casos:

Caso 1: estudiantes con alto rendimiento en matemáticas

E1, E2, E3, E4, E5.

Caso 2: estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas

E6, E7, E8, E9, E10.

RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA PARA EL CASO 1

PREGUNTA	CATEGORÍA DE ANÁLISIS	ESTUDIANTES QUE RESPONDEN CORRECTAMENTE	ESTUDIANTES QUE RESPONDEN INCORRECTAMENTE
1	Aleatoriedad como ausencia de uniformidad en pequeñas muestras	0	5
2	Equiprobabilidad	2	3
3	Asignación y comparación de probabilidades	2	3
4-A	Equiprobabilidad	5	0
4-B	Asignación y comparación de probabilidades	0	5
4-C	Asignación y comparación de probabilidades	4	1
4-D	Asignación y comparación de probabilidades	4	1
4-E	Asignación y comparación de probabilidades	5	0
5	Equiprobabilidad	3	2
6-A	Comparación de probabilidades	5	0
6-B	Equiprobabilidad	4	1
6-C	Equiprobabilidad	5	0
6-D	Equiprobabilidad	4	1

Tabla 3. Respuestas de las estudiantes que conforman el Caso 1.

RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA PARA EL CASO 2

PREGUNTA	CATEGORÍA DE ANÁLISIS	ESTUDIANTES QUE RESPONDEN CORRECTAMENTE	ESTUDIANTES QUE RESPONDEN INCORRECTAMENTE
1	Aleatoriedad como ausencia de uniformidad en pequeños muestras	2	3
2	Equiprobabilidad	0	5
3	Asignación y comparación de probabilidades	1	4
4-A	Equiprobabilidad	1	4
4-B	Asignación y comparación de probabilidades	1	4
4-C	Asignación y comparación de probabilidades	3	2
4-D	Asignación y comparación de probabilidades	2	3
4-E	Asignación y comparación de probabilidades	1	4
5	Equiprobabilidad	2	3
6-A	Comparación de probabilidades	3	2
6-B	Equiprobabilidad	1	4
6-C	Equiprobabilidad	3	2
6-D	Equiprobabilidad	2	3

Tabla 4. Respuestas de las estudiantes que conforman el Caso 2.

El reconocimiento de la ausencia de uniformidad en los fenómenos de tipo aleatorio se trata en la primera pregunta y es lo que se busca determinar en las respuestas de las estudiantes.

Todas las estudiantes del Caso 1 escogieron la figura 1 como la mejor opción que muestra la distribución de las gotas de agua en el piso embaldosado, justificando que al haber dieciséis baldosas debería caer una gota en cada una de ellas para que las gotas queden bien distribuidas sobre el piso. Observe a continuación las tres opciones que había.

¿Qué figura muestra mejor la distribución de las gotas de agua sobre el patio?

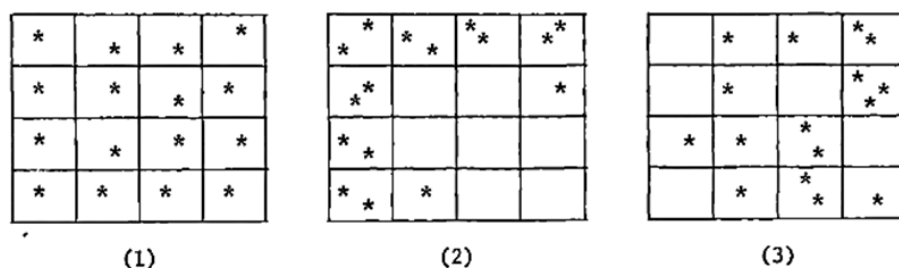


Figura 6. Opciones de respuesta en la distribución de las gotas de lluvia.
Fuente: Green (1982)

Según Green (1982), al escoger la figura 1 como la que mejor representa esta distribución se asume una característica no común en este tipo de fenómenos y es la regularidad en la distribución, algo que no es característico en los fenómenos de la naturaleza. De otro lado la escogencia de esta respuesta es un indicio de que no se reconoce la relación causa – efecto, pues antes de llegar al piso hay varios elementos que influyen de manera impredecible en la trayectoria de la gota.

Una de las respuestas más completas que representa lo que piensan el resto de estudiantes que conforman el Caso 1 es la estudiante E4, después de elegir la opción 1 afirma lo siguiente:

¿Por qué eliges esta figura?

Por dice que en las baldosas o sea en todas están completas las goteras y decía que en todas las 16 baldosas cayeran 16 goteras de agua cuando lluvia en fances la figura uno es la correcta por que está más completa.

Así como para la estudiante E4 la opción 1 es la correcta, para las demás estudiantes del Caso 1 es la opción 1 la que representa una distribución uno a uno entre baldosas y gotas de lluvia, lo que debería ser lo normal.

Con las estudiantes del Caso 2 se observa que tres estudiantes (E6, E8, E10) eligen la opción: figura 1, que muestra una gota por cada baldosa, lo cual se justifica como en el caso anterior a la necesidad de la regularidad en la distribución. Hay dos estudiantes (E7, E9) que escogen la opción correcta: figura 3, y argumentan que no es posible que se dé un caso como el de la figura 1, pues la equivalencia entre gota y baldosa no es común en la vida cotidiana.

E7: “las goteras no pueden caer en cada cuadro es casi imposible pero si pueden caer en la misma”

Yo escogi la figura numero 2 Porque las goteras no Pueden caer en cada Cuadro es casi imposible Pero si Pueden caer en la misma

En la segunda pregunta se les aclara a las estudiantes en una nota que ambas ruletas tienen la misma forma y el mismo tamaño, esto con el propósito de evitar que lo tomaran como argumento para decidir.

- Al hacer girar cualquiera de las dos ruletas que aparecen en la figura, puede resultar que caiga un número uno o un número dos. En un concurso en el que se va a utilizar una de las dos ruletas, si haces girar la ruleta y cae el número uno ganas un premio, pero si cae un dos no ganas nada.

NOTA: las dos ruletas tienen la misma forma y tamaño.

¿Cuál de las dos ruletas (Ruleta roja o Ruleta amarilla) crees que da mayor posibilidad de obtener un 1 cuando la ruleta se detenga?

El propósito de esta pregunta es observar cómo responden las estudiantes al hecho de si afecta o no afecta la posición de los números en la ruleta para que se logre obtener un uno, ya que en ambas ruletas la cantidad de números uno y dos es la misma. En el Caso 1 tres estudiantes (E1, E2, E4) eligieron la opción: *es más fácil obtener un uno en la ruleta amarilla*, afirmando que la posición de los números en la ruleta afecta la posibilidad de que salga el uno, ya que al estar repartido a igual distancia en la ruleta amarilla se incrementa la posibilidad de salir este número en esta ruleta. Sin embargo no tienen en cuenta que las mismas condiciones presenta el número dos en esta ruleta. De otro lado solo dos estudiantes (E3, E5) escogieron la opción correcta: *las dos ruletas dan la misma posibilidad de obtener un uno*, en su argumento expresan que las dos ruletas ofrecen igual posibilidad de obtener uno, pues ambas tienen igual forma y tamaño.

En el Caso 2, tres estudiantes (E6, E8, E10) contestaron que *la ruleta roja da mayor posibilidad de obtener un número uno* debido a que los números uno están juntos, lo cual genera mayor posibilidad de que caiga este número. Mientras que dos estudiantes (E7, E9) respondieron que *la ruleta amarilla ofrece mayores posibilidades de obtener un número uno*, argumentando que al estar separados a igual distancia hay mayor posibilidad de que se obtenga este número al girar la ruleta. Ninguna de las estudiantes de este grupo eligió la respuesta correcta: *las dos ruletas dan la misma posibilidad de obtener un 1*, mostrando que las respuestas son debidas a las opiniones personales pero no se concibe la estimación de la probabilidad de que salga uno en cada ruleta y la comparación de las probabilidades de que salga uno entre las ruletas.

En la tercera pregunta se busca indagar por la estimación que pueden realizar las estudiantes de lo que es más o menos posible al sacar un papel del sombrero marcado con el nombre de un niño o el de una niña, teniendo en cuenta que hay 13 nombres de niños y 16 nombres de niñas en el sombrero.

En el Caso 1, dos estudiantes (E2, E5) escogen la opción correcta: *hay más posibilidad de que salga el nombre de una niña que el de un niño*, argumentando que la diferencia en las cantidades de los nombres favorece esa ventaja. Tres estudiantes (E1, E3, E4)

contestaron que hay igualdad en la posibilidad de que salga el nombre de un niño o el de una niña pues los papeles en que están escritos los nombres tienen igual tamaño e igual forma, por esto las condiciones no privilegian a uno de los dos géneros a salir más que al otro. Observe como la respuesta de la estudiante E4 está motivada por la forma de los papeles en que se escribe los nombres.

¿por qué eliges esa respuesta?

Por que no es la diferencia
entre los papellitos si son
iguales de tamaño

Otro de los argumentos tiene que ver con que la diferencia entre niños y niñas no es muy grande, por lo tanto no se convierte en una ventaja clara para alguno de los dos géneros.

El último argumento de este tipo está más relacionado con la condición de incertidumbre, donde se expresa que “*nadie sabe lo que puede suceder en ese momento*”, mostrando que la diferencia entre la cantidad de nombres de niñas y niños no es condición suficiente para que se pueda sugerir la posibilidad de obtener el nombre de una niña más que el de un niño.

En el segundo grupo (Caso 2) solo una estudiante (E9) contestó que las niñas tienen más posibilidad de salir, ya que hay mayor cantidad de nombres de niñas que de niños en el sombrero. Dos estudiantes (E6, E7) responden que hay igual posibilidad de que salga el nombre de una niña que el de un niño, la justificación que dan es que “*nadie sabe si va a salir el nombre de un niño o el de una niña*”.

- A. Hay más posibilidad de que salga el nombre de un niño que el de una niña ()
- B. Hay más posibilidad de que salga el nombre de una niña que el de un niño (X)
- C. Hay la igual posibilidad de que salga el nombre de un niño o el de una niña (X)
- D. No lo sé ()

¿por qué eliges esa respuesta?

Porque uno no sabe si el niño o niña va a ganar

Esta respuesta como se ve está relacionada con la concepción de que es incierto el resultado, sin embargo no se puede establecer si esta afirmación se debe a que las cantidades de nombres de cada género es pequeña o porque independientemente de esto no es posible anticipar estos resultados. La estudiante (E8) escogió la opción “no sé”.

Como se puede observar, entre los dos grupos (Caso 1 y Caso 2) solo dos estudiantes escogen la opción B, que corresponde a la respuesta correcta: “*hay más posibilidad de sacar el nombre de una niña que el de un niño*”, esto muestra que no hay claridad entre lo que es seguro, lo que es posible y lo que es imposible.

En la cuarta pregunta se muestra a las estudiantes varios canales que se bifurcan en diferentes puntos y que deberán utilizar para estimar a cuales salidas llegaran más canicas, menos canicas o igual cantidad de canicas.

Al usar términos como, “*en algunas salidas hay igual posibilidad de que lleguen canicas*” o “*en algunas salidas hay poca posibilidad en comparación a las otras*”, se reconoce que hay sucesos que son menos probables que otros.

También se pretende observar si las estudiantes logran estimar la posibilidad de los sucesos a través de expresiones como “*más posible o menos posible*”, debido a que al comparar la posibilidad de ocurrencia entre los sucesos se evidencia un análisis sobre las causas que provocan esta afirmación.

El total de estudiantes del primer grupo (Caso 1) eligió en la pregunta 4 – A (canal con ocho salidas), la opción correcta: *en cada salida llegará igual cantidad de canicas*, la justificación dada es que ambos ramajes tienen igual forma y tamaño. Con esto se evidencia que en un nivel básico de complejidad (un canal con una sola bifurcación), las estudiantes pueden establecer de forma previa cuando los sucesos tienen aproximadamente la misma posibilidad de ocurrir.

En el segundo grupo (Caso 2), tres estudiantes (E6, E7, E8) eligen la opción: llegarán más veces las canicas a la salida 2, pero no argumentan por qué lo consideran. Una estudiante (E10) elige la opción: *llegarán más veces las canicas a la salida 1*, a continuación expresa que no sabe porque será así. Por último, una estudiante (E9) escogió la respuesta correcta de que en cada salida llegará igual cantidad de canicas.

En la pregunta 4 - B se muestra un canal con cuatro salidas. En esta pregunta todas las estudiantes del primer grupo (Caso 1) afirman que en las salidas 1, 4, 5 y 8 resultarán más canicas que en las salidas 2, 3, 6 y 7. Ninguna estudiante elige la opción correcta que es: *en cada salida llegarán igual cantidad de canicas*. El argumento que dan las estudiantes es que las salidas 1, 4, 5 y 8 están más inclinadas y que esto favorece a que lleguen más canicas, sin embargo hay que aclarar que al inicio de esta pregunta se muestra a las estudiantes en una nota que los canales presentan igual tamaño y forma. Esto permite evidenciar que cuando se complejiza el experimento (un canal con más de una bifurcación), a las estudiantes se les dificulta reconocer la equiprobabilidad.

En el Caso 2, tres estudiantes (E6, E9, E10) responden “no sé”, una estudiante (E7) responde que en las salidas 1, 4, 5 y 8 resultarán más canicas que en las salidas 2, 3, 6 y 7, porque las salidas 4 y 5 están más unidas y la 1 y la 8 están más separadas. La estudiante (E8) afirma que en cada salida llegará igualdad cantidad de canicas. En este grupo se observa que no hay claridad en lo que puede suceder al dejar caer las canicas por este canal y se les dificulta comparar las posibilidades de llegada de las canicas en cada salida.

En la pregunta 4 - C las estudiantes (E1, E2, E3, E4) eligen la opción correcta: *en cada salida llegarán igual cantidad de canicas*, la justificación dada es que los canales son iguales y por lo tanto bajarán igual cantidad por cada uno, mientras que la estudiante (E5) elige la opción: llegarán más canicas a las salidas 1 y 2 que a las salidas 3 y 4.

En el segundo grupo las estudiantes (E7, E8, E10) eligen la opción correcta: *en cada salida llegarán igual cantidad de canicas*, afirmando que por tener la misma forma permite que lleguen igual cantidad de canicas a cada salida. Una estudiante (E6) elige la opción:

llegarán más canicas a las salidas 1 y 4 que a las salidas 2 y 3, una estudiante (E9) eligió la opción “no lo sé”. En esta pregunta se muestra un canal con tres bifurcaciones y además tiene un distractor en el que se muestra que uno de los cuellos del canal es más largo que su opuesto, sin embargo las respuestas evidencian que esto no representó mayor dificultad en la mayoría de las estudiantes, ya que pudieron distinguir que en las cuatro salidas pueden llegar igual cantidad de canicas.

En la pregunta 4 - D las estudiantes (E1, E2, E3, E4) eligieron la opción correcta: *llegarán más canicas a la salida 3 que a las salidas 1 y 2*, argumentando que si las canicas se van hacia la derecha solo hay una salida que es la número tres, mientras que si van hacia la izquierda pueden ir a la salida número uno o hacia la salida número dos. Solo una estudiante (E5) eligió la opción: *llegarán más canicas a las salidas 1 y 2, y pocas canicas a la salida 3*.

En el segundo grupo solo dos estudiantes (E6, E9) eligieron la opción correcta: *llegarán más canicas a la salida 3 que a las salidas 1 y 2*, la justificación es que el canal tres es más ancho que el canal uno y el dos, dos estudiantes (E7, E10) eligieron que *llegarán más canicas a las salidas 1 y 2, y pocas canicas a la salida 3*.

En la pregunta 4 – E todas las estudian eligieron la opción correcta: *llegaran más canicas a la salida 2 que a las salidas 1 y 3*, la justificación dada es que a la salida 2 llegan dos canales, mientras que a las salidas 1 y 3 solo llegan una. La complejidad de esta pregunta es baja, teniendo en cuenta que solo había tres bifurcaciones y que era evidente la característica que utilizaron las estudiantes en la justificación.

En el segundo grupo solo una estudiante (E9) eligió la opción correcta: *llegarán más canicas a la salida 2 que a las salidas 1 y 3*, dos estudiantes (E6, E10) eligieron la opción: *en cada salida llegarán igual cantidad de canicas*, en la justificación no es claro qué las llevó a considerar esta opción. Dos estudiantes (E7, E8) eligieron la opción: *llegarán más canicas a las salidas 1 y 3 que a la salida 2*, la justificación es que por ser más ancho el canal que lleva a la salida 2 hay menos posibilidad de que lleguen más canicas a esta salida.

Como se mencionó al principio, estas preguntas tenían el propósito de evidenciar cómo las estudiantes analizan y entienden que un suceso tenga más posibilidad, menos posibilidad o igual posibilidad de ocurrir en comparación a otro, el concepto de aleatoriedad en la primera pregunta es más clara para el grupo 1 que expresa que las canicas podían igualmente ir a la izquierda o a la derecha, pero cuando se les presenta más de una bifurcación no es tan clara esta posibilidad para las estudiantes. En el grupo 2 se evidencia que no es clara la equiprobabilidad, pues desde la primera pregunta tratan de buscar la respuesta en las condiciones físicas del canal, como por ejemplo que haya defectos que favorezcan que ocurra uno de los sucesos más que los otros, a pesar de que se había expresado en la nota que después de cada bifurcación, cada rama tenía las mismas características físicas que las otras.

En la pregunta 5 se muestra una secuencia de ocho lanzamientos de una moneda en donde los últimos cinco resultados son sello, a partir de esto se pregunta a las estudiantes sobre las posibilidades en un noveno lanzamiento, con lo cual se busca indagar cómo influye la presencia de unos datos previos en la concepción de las estudiantes sobre el suceso en el noveno lanzamiento.

En el Caso 1, solo las estudiantes (E1, E3, E5) eligen la opción correcta: *hay la misma posibilidad de que salga cara o sello*, la justificación es que a pesar de que salió más veces sello, tanto cara como sello pueden caer en el noveno lanzamiento, en virtud que los eventos sale cara o sello son independientes. Las estudiantes (E2, E4) eligieron la opción: *hay más posibilidad que salga sello*, pues la tendencia de los últimos cinco lanzamientos favorece que se dé una vez más en el noveno lanzamiento.

En el Caso 2 las estudiantes (E8, E9) eligieron la opción correcta: *hay la misma posibilidad de que salga cara o sello*, porque “tanto cara como sello tienen la misma posibilidad de caer en el siguiente lanzamiento”.

- A. Hay mayor posibilidad de que salga cara. ()
 B. Hay mayor posibilidad de que salga sello. ()
 C. Hay la misma posibilidad de que salga cara o sello. (X)
 D. No lo sé. ()

¿Por qué?

Porque Puede caer las dos cara o sello

Las estudiantes (E6, E7, E10) eligen la opción: *hay mayor posibilidad de que salga cara*, en su justificación solo expresan que hay más posibilidad de que salga cara, pero esto podría entenderse en razón de que ya ha salido muchas veces sello y es momento de que salga cara.

En conclusión, las estudiantes se guían por los hechos previos y físicos del experimento más que por un análisis sobre lo que puede suceder a partir de las condiciones y características que tiene la moneda, evidenciando así una necesidad en cuanto al reconocimiento del carácter impredecible en experimentos aleatorios.

En la pregunta seis se pretende establecer desde el contexto de la urna y las balotas la comparación que realizan las estudiantes sobre la posibilidad de ocurrencia del suceso: Sacar una balota blanca en la urna A y en la urna B, llevado a cabo a partir de expresiones como más posible, menos posible o igual posibilidad.

Esta pregunta en comparación a la de los canales tiene la ventaja de que se muestra a las estudiantes las cantidades de balotas negras y blancas que hay en cada urna, permitiendo realizar un análisis comparativo parte – todo entre cantidades discretas para determinar la posibilidad. Las estudiantes del Caso 1 compararon el número de balotas blancas con el total de balotas que hay en la urna, para decidir cuál de las dos urnas presentaba mayor, igual o menor posibilidad de sacar una balota blanca, así lograron elegir las opciones correctas en todas las preguntas que aquí se desglosan (6 – A, 6 – B, 6 – C, 6 – D).

Las estudiantes del segundo grupo (Caso 2) presentaron mayor dificultad en realizar esta comparación parte – todo, lo cual llevó a que en la mayoría de las veces como mínimo

dos estudiantes eligieran la opción incorrecta, además solo en la pregunta 6 – A se muestra las urnas con las balotas, en el resto de preguntas no se hace. Las justificaciones no fueron muy precisas, más que aclarar el por qué de su elección expresan que la opción elegida es la correcta.

De acuerdo a lo observado en las respuestas de las estudiantes se plantean las siguientes conclusiones.

- Tanto las estudiantes del Caso 1 como las del Caso 2 tienden a considerar que hay una distribución uniforme entre las gotas de lluvia y las baldosas del piso, este hecho lleva a pensar que hace falta analizar con mayor detenimiento el desarrollo del fenómeno antes que caiga cada gota sobre el piso, por lo que es necesario fortalecer el reconocimiento de la ausencia de uniformidad en pequeñas muestras.
- En las preguntas dos y tres del cuestionario, solo 2 estudiantes del Caso 1 contestaron correctamente, afirmando que en ambas ruletas había igual posibilidad de obtener un uno, mientras que el resto de las estudiantes del Caso 1 y todas las estudiantes del Caso 2 responden incorrectamente, sus argumentos se basan en aspectos visuales de cada ruleta por separado, esto llevó a respuestas subjetivas basadas en la apariencia de cada ruleta.
- En las preguntas que corresponden al punto cuatro se observó que las estudiantes del Caso 1 contestaban en su mayoría de forma correcta, sin embargo en los argumentos que utilizaban se presenta nuevamente el recurso de lo estrictamente perceptual, lo cual puede haber favorecido el acierto de las estudiantes, mientras que en las estudiantes del Caso 2 la mayoría de las veces contestaron de forma incorrecta y en varios casos no dieron justificación a su elección o contestaron que no sabían porque esa respuesta era válida.
- La pregunta cinco permitió valorar más profundamente la concepción de lo que para ellas significaba la comparación de dos o más eventos simples, aquí tres estudiantes del Caso 1 contestaron correctamente, argumentando que hay igual posibilidad de que

resulte cara o sello, mientras que dos estudiantes del Caso 2 contestaron correctamente. El resto de estudiantes de cada Caso que contestaron de forma incorrecta afirman que el resultado depende de lo que ya ha sucedido previamente con los lanzamientos.

- La mayoría de las estudiantes piensan que es posible predecir los resultados de estos experimentos, mostrando así una fuerte tendencia a un pensamiento determinista.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS PREVIO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

La siguiente secuencia didáctica está planteada con el propósito de promover un acercamiento a la noción de aleatoriedad en estudiantes de grado 4° de primaria. La propuesta educativa está conformada por tres situaciones, las cuales se interrelacionan a partir de dos componentes.

El primer componente tiene que ver con el contexto, el cual está referido al pronóstico del clima, en especial el de la lluvia. Con este contexto se busca que las estudiantes inicien el reconocimiento de la noción de aleatoriedad tomando como punto de partida el análisis de este fenómeno aleatorio, que en muchas ocasiones ha afectado los eventos programados en la Institución Educativa.

El segundo componente corresponde a la noción de aleatoriedad. Esta noción se desarrolla en la secuencia didáctica a partir del reconocimiento de algunos de los referentes que caracterizan la noción de aleatoriedad, así, los referentes de aleatoriedad trabajados en la secuencia didáctica son los de: incertidumbre, ausencia de uniformidad en pequeñas muestras, asignación y comparación de las probabilidades de ocurrencia de un evento aleatorio.

Como se puede observar, en este caso se optó por incluir el referente de incertidumbre en lugar del referente de equiprobabilidad, esto se debe a que en la prueba diagnóstica se observó la necesidad de fortalecer la identificación del carácter de incertidumbre e impredecibilidad, con el propósito de que se logre distinguir lo determinista de lo no determinista.

En este sentido, se presenta a continuación un análisis previo de la secuencia didáctica donde se muestra para cada situación un estimativo de las posibles estrategias de resolución y de las posibles dificultades que pueden presentar las estudiantes.

Desde lo concerniente a la TSD se analiza de qué manera se desarrollaran los actos de devolución, la validación e institucionalización. Adicionalmente se presenta el propósito de cada una de las Situaciones Didácticas y las variables didácticas involucradas en cada una de ellas.

En la siguiente tabla se relacionan las cuatro situaciones y el propósito de cada una dentro de la propuesta educativa.

SITUACIÓN	PRÓPOSITO	TIEMPO
¿Se necesita alquilar una carpa?	Reconocer el carácter impredecible y de incertidumbre en los fenómenos aleatorios.	40 minutos
¿Podemos predecir las lluvias?	Establecer la relación de causa – efecto que guardan los fenómenos aleatorios.	60 minutos
Cada ficha en su lugar	• Comprender que una de las características de los experimentos aleatorios es la ausencia de uniformidad en muestras pequeñas. • Realizar la asignación y comparación de las probabilidades de ocurrencia de los eventos del experimento aleatorio.	90 minutos

Tabla 5. Presentación general de las Situaciones.

VARIABLES DIDÁCTICAS EN LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Brousseau (2007) define el concepto de *variable didáctica*, la cual tiene importancia en la implementación de las situaciones didácticas debido a que hay ciertos valores o datos dentro de ellas que se pueden modificar o cambiar, generando necesariamente un cambio de estrategia en la solución de la situación y a la vez posibilitando el aprendizaje de conocimientos nuevos.

Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación (Panizza, 2003, p. 10).

En el planteamiento de las situaciones didácticas se presentan las siguientes variables didácticas a tener en cuenta para la implementación y análisis posterior.

- El carácter no determinista en los fenómenos aleatorios visto como resultado de una serie de causas de naturaleza variable, lo cual se evidencia en:

La reflexión sobre cómo afecta el suceso aleatorio si se varía la distancia a la que se realiza el lanzamiento del objeto. Esta variable aplica a la Situación No 3: *Cada ficha en su lugar*.

El análisis sobre cómo afecta el suceso si reducimos o aumentamos la cantidad de tiempo en días antes de que suceda el fenómeno que se busca pronosticar. Esta variable aplica a la Situación No 1: *¿se necesita alquilar una carpa?* y Situación No 2: *¿podemos predecir las lluvias?*

La reflexión sobre si es posible la certeza en los resultados de un fenómeno de tipo aleatorio cuando se cuenta con mayor información sobre el fenómeno, información

obtenida de los medios de comunicación (radio, televisión, periódico, internet). Esta variable aplica a la Situación No 1: *¿se necesita alquilar una carpa?*

- Reflexión sobre los posibles resultados en un juego aleatorio y la comparación de estos resultados dependiendo de las condiciones (reglas de juego) que apliquen a cada uno. Esta variable aplica a la Situación No 3: *Cada ficha en su lugar.*

La organización física de las reglas de juego que permiten sumar cierta cantidad de puntos en el desarrollo del experimento.

De otro lado, la secuencia didáctica cuyo planteamiento está basado en la TSD considera cuatro tipos de situaciones, las cuales propiciarán la realización de unos procesos específicos enmarcados en las fases de: Acción, Formulación, Validación e Institucionalización, esta última será desarrollada por parte del docente.

Lo anterior es destacado por Brousseau en la TSD como la vía que permite la construcción del conocimiento de forma similar al proceso natural en que el ser humano lo ha hecho.

6.1. Análisis previo de la Situación Didáctica N° 1: ¿se necesita alquilar una carpa?

En esta primera situación se pretende recrear un momento particular de la vida cotidiana de las estudiantes, la cual trata de la necesidad de una cubierta en la cancha de basquetbol de la Institución Educativa para proteger de la lluvia los actos culturales que en muchas ocasiones se han visto afectados por los efectos del clima.

La situación plantea un dilema en torno al pronóstico del clima, aquí se presenta la necesidad de tomar la decisión, y anticipar la ocurrencia de la lluvia en un momento específico a futuro.

La metodología que guía el desarrollo de la situación es la reflexión y el discurso verbal en el grupo, esto permitirá analizar que concepciones tienen las participantes sobre los fenómenos aleatorios.

De acuerdo a las fases de la TSD esta situación didáctica es catalogada de formulación y lo que se quiere con ella es que cada una de las estudiantes aporte ideas que contribuyan a dar respuesta al problema planteado.

De igual manera sirve para orientar a las estudiantes sobre el carácter de incertidumbre que presenta la noción de aleatoriedad, contribuyendo con esto a que la situación didáctica número 2 y número 3, tengan para ellas más relevancia y se logre enriquecer las concepciones sobre este tipo de fenómenos aleatorios.

Por otro lado, el contexto de las lluvias en la situación establece continuidad con una de las preguntas diagnósticas que generaron mayor dificultad en las estudiantes. Esto facilitará tomar conciencia de la respuesta que dieron en estas preguntas diagnósticas en pro de orientar un acercamiento a la noción de aleatoriedad.

Con respecto a las posibles estrategias que pueden llegar a utilizar las estudiantes para la resolución del problema, en primera instancia se podría considerar el pronóstico del clima que se genera en algún medio de comunicación. Ante esta posible estrategia se debe reconocer que los pronósticos del clima están afectados por muchos factores, entre los cuales se encuentra la cantidad de tiempo antes del suceso y el carácter de aproximación que arroja este pronóstico.

Otra de las posibles estrategias de resolución podría ser una que resulta ser más práctica. Teniendo en cuenta los recursos a disposición, una estudiante puede proponer una reunión con los padres de familia y pedir una cuota para facilitar el alquiler y salir así del dilema, lo que sería una buena solución, sin embargo y sin dejar de lado el hecho que la carpa solo cubre los equipos pero no a los asistentes, el docente deberá reorientar el análisis en este sentido para tratar de que no se pierda el propósito de la actividad.

Por último, se puede presentar de forma general la idea de que ante la ausencia de certeza sobre lo que puede suceder, entonces se podría asumir que hay igual posibilidad de que llueva y de que no llueva, por lo que es mejor asegurarse y alquilar la carpa así salga costoso. Este hecho podría dificultar la comprensión y el análisis de los fenómenos aleatorios, ya que se asume de antemano una actitud de desinterés que solo se enfoca en salir del problema de la forma más rápida.

En la situación se presenta como variable didáctica la reflexión sobre cómo la cantidad de información con la que se cuenta (fuente de internet, televisión, periódico) puede facilitar la toma de una decisión. Esto llevará a las estudiantes a reflexionar sobre el papel de la incertidumbre en el fenómeno natural, pues la información no asegura el suceso y solo es un estimativo.

Otra variable didáctica tiene que ver con el tiempo en días que hay antes del suceso, lo cual se pondrá en juego para que las estudiantes comprendan que igualmente existe una carga de incertidumbre que impide saber lo que sucederá ese día a esa hora.

Como se mencionó anteriormente la situación está planteada para propiciar que cada estudiante exprese sus ideas y que haya un espacio de confrontación donde cada una pueda contribuir a validar o refutar las estrategias de las demás compañeras, igualmente el acompañamiento del docente, quien mediante preguntas orientadoras contribuirá a que las estudiantes no asuman como válida cualquier idea que parezca servir a la solución del problema.

Los actos de devolución serán llevados a cabo por el docente en los momentos en que los aportes de las estudiantes se salgan del propósito pactado en la situación, es decir, cuando la necesidad de considerar la incertidumbre en el fenómeno se pone en riesgo y se avanza en otra dirección, como en el supuesto planteado antes en el que la estudiante podría considerar una solución rápida que saltará la reflexión sobre el indeterminismo.

Una de las dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de la situación tiene que ver con las costumbres que hay en el entorno sociocultural y familiar relacionado con las creencias no fundamentadas, esto puede llevar a asumir que estos fenómenos son predecibles y dificultar la comprensión de la incertidumbre en estos fenómenos.

Otra de las dificultades está relacionada con la actitud de desinterés que en ocasiones se muestra hacia estos aspectos, ofreciendo una respuesta inmediata con el argumento de que al final se debe asumir las consecuencias si sucede algo inesperado. A continuación se presenta la Situación Didáctica No 1: *¿Se necesita alquilar una carpa?*

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN VICENTE SEDE ROSA VIRGINIA¹	
ÁREA: MATEMÁTICAS	SITUACIÓN 1	FECHA:
PROFESOR: FANOR YESID ZÚÑIGA PATIÑO		GRADO: CUARTO DE PRIMARIA

PROPÓSITO: Reconocer el carácter impredecible y de incertidumbre en los fenómenos aleatorios.

TIEMPO: 40 minutos.

TÍTULO: ¿SE NECESITA ALQUILAR UNA CARPA?

El próximo viernes a las diez de la mañana se hará un acto cultural en la cancha de la Institución, para esto se utilizará un equipo de sonido muy costoso y unos instrumentos musicales que deben protegerse de la lluvia. Los organizadores de este evento tienen duda sobre si deben o no alquilar una carpa para proteger estos equipos, pues el alquiler de la carpa es muy costoso y tal vez resulte innecesario.

¹ El formato de presentación que se utiliza para las Situaciones Didácticas es el modelo que a nivel institucional se utiliza en la IE San Vicente para la presentación de los diferentes recursos didácticos (talleres, evaluaciones, etc.)

¿Cómo pueden darse cuenta los organizadores si es o no necesario alquilar la carpa?, justifica tu respuesta.

De acuerdo a tu respuesta muestra la forma como lograrías resolver la situación planteada.

En conclusión, de acuerdo a las respuestas de tus compañeras, ¿Es posible saber si va a llover el próximo viernes a las diez de la mañana?

¿Si alquilan la carpa crees que habrán invertido correctamente el dinero?

Si se disminuye el número de días antes del suceso, ¿crees que facilitaría saber lo que sucederá con el estado del tiempo? ¿Por qué?

Si se aumenta el número días antes del suceso, ¿crees que facilitaría saber lo que sucederá con el estado del tiempo? ¿Por qué?

6.2. Análisis previo de la Situación Didáctica N° 2: ¿Podemos predecir las lluvias?

En esta situación se profundiza el reconocimiento del carácter de incertidumbre de los fenómenos del estado del tiempo a partir de lo socializado en la situación anterior. Para realizarlo se ofrece la información (en un diagrama de barras), sobre las precipitaciones ocurridas en la última semana.

Con esto se busca orientar la reflexión sobre la relación (si la hay) entre las precipitaciones que se presentan en el diagrama de barras y las que pudieran presentarse en la semana siguiente. Cuando la estudiante pronostica las posibles precipitaciones de la semana siguiente debe asumir una postura respecto a si hay o no relación con las precipitaciones de la última semana, estas concepciones serán evidenciadas cuando sean socializadas en el grupo.

El propósito de esta situación es reconocer que los fenómenos climatológicos no son predecibles con total certeza.

Igualmente tener en cuenta que la lluvia es un suceso que resulta a partir de unas causas que actúan de manera independiente y esto hace que no se pueda anticipar con exactitud.

Esta situación didáctica está planteada para cumplir las características de una situación de acción - formulación, ya que como se acaba de explicitar, las estudiantes deberán recurrir a sus conocimientos previos y a la información dada en el diagrama, con lo cual podrán opinar sobre lo que sucederá en la próxima semana. Esto constituye un acto personal que expone parte de las concepciones que poseen las estudiantes con respecto a este tipo de fenómenos de naturaleza no determinista.

La información aquí recolectada permitirá realizar una socialización que exponga las diferentes ideas que consideran las estudiantes, buscando con ello reflexionar sobre la independencia entre los acontecimientos climatológicos de la semana pasada y los de la semana entrante. Este proceso permitirá la validación de las estrategias mediante la guía del docente, quien deberá plantear preguntas que conlleven a la comprensión de la independencia como característica de los fenómenos aleatorios.

Con respecto a las posibles estrategias de resolución que pueden llegar a utilizar las estudiantes, se destaca la posibilidad de que algunas estudiantes asuman que el diagrama de barras sobre las precipitaciones, realmente guarde relación con los eventos futuros y terminen por concluir que el estado del tiempo de la semana siguiente sea similar al de la semana anterior. En la situación didáctica no se explicita si existe o no una relación entre estos eventos, es la estudiante quien mostrará si existe o no tal relación.

En otro caso, algunas estudiantes pueden plantear un gráfico que no guarde relación con el que corresponde a la semana anterior, buscando con esto dar a entender que en el

estado del tiempo interviene una multitud de factores que lo hacen variable, lo cual lo deberán expresar durante la socialización.

Una última estrategia puede consistir en expresar que no se puede representar lo que sucederá, debido a que no se cuenta con la información suficiente o también que así tenga más información no es posible hacerlo.

En esta situación didáctica el factor tiempo se convierte en una variable didáctica al momento de pronosticar la lluvia, lo cual se pone en consideración para propiciar que el estudiante reflexione sobre cómo afecta el pronóstico realizado si se aumenta o se disminuye el número de días antes de que se lleve a cabo el suceso.

A pesar de que la cantidad de días no implica una mayor posibilidad de certeza en el pronóstico del evento, es muy posible que las estudiantes asuman que una menor cantidad de días antes del evento implique poder saber lo que sucederá. Con relación a esto último se aclara que no se cuenta más que con el diagrama de barras y no puede utilizar otro medio.

Una de las dificultades puede ser que las estudiantes no entiendan suficientemente el significado del gráfico y esto termine comprometiendo el propósito de la situación.

Debido a que la semana en que se indagó el pronóstico del tiempo es de lluvias, puede ser que las estudiantes asuman que todos los días debe llover y esto se convierta en una dificultad, sin embargo en la situación se adiciona la condición de que es a las diez de la mañana. A continuación se presenta la Situación No 2: *¿Podemos predecir la lluvia?*

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN VICENTE SEDE ROSA VIRGINIA	
ÁREA: MATEMÁTICAS	SITUACIÓN 2	FECHA:
PROFESOR: FANOR YESID ZÚÑIGA PATIÑO		GRADO: CUARTO DE PRIMARIA

PROPÓSITO: Comprender que en un experimento aleatorio no hay relación de dependencia entre los sucesos que se lleven a cabo.

Comprender que no hay relación de dependencia entre el estado del tiempo de la última semana y el que se presentará en la semana próxima.

TIEMPO: 60 minutos.

TÍTULO: ¿PODEMOS PREDECIR LA LLUVIA?

Se observa durante una semana los días que llueve en Palmira, en especial en el sector donde se encuentra la Institución Educativa San Vicente sede Rosa Virginia. Los datos recogidos se registran en el siguiente gráfico de barras.

Información tomada de www.eltiempo.es el 9 de octubre de 2016.

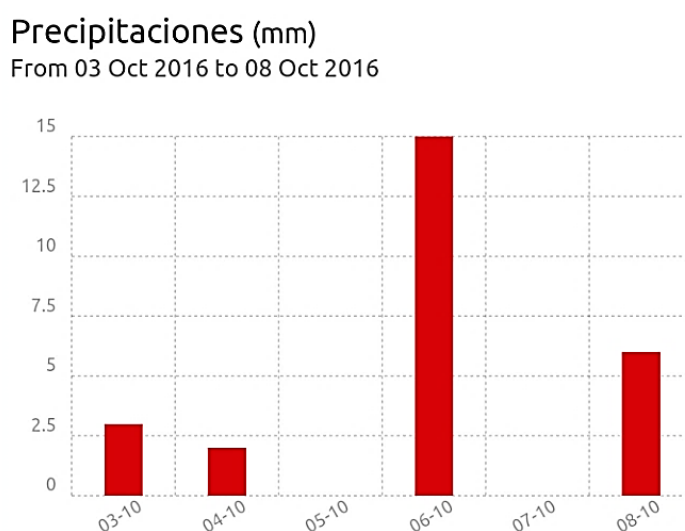


Figura 7. Diagrama de precipitaciones de la última semana en Palmira.
Fuente www.eltiempo.es

- A. Sin utilizar ningún otro medio más que el anterior gráfico, ¿Qué días de la siguiente semana crees que va a llover y en qué cantidad?

Realiza un diagrama de barras para mostrarlo.

Explica tus respuestas.

- B. Si este lunes llueve a las diez de la mañana, ¿es seguro que el próximo lunes llueva a la misma hora? Explica tu respuesta.
- C. ¿Crees que al finalizar esta semana el pronóstico del tiempo que realizaste coincidiría con la realidad? ¿Por qué?
- D. De acuerdo con lo que escribiste anteriormente, contesta. ¿es posible conocer con exactitud las precipitaciones que se van a presentar en los días siguientes?

6.3. Análisis previo de la Situación Didáctica N° 3: Cada ficha en su lugar

Esta situación es presentada en términos de un juego cuyo propósito es comprender que la noción de aleatoriedad se caracteriza por la ausencia de uniformidad en pequeñas muestras. El juego se basa en una de las preguntas diagnósticas de Green (1982) que fue implementada en la prueba diagnóstica, la cual mostró una concepción de uniformidad por parte de las estudiantes en la distribución de las gotas cuando cae la lluvia en un piso embaldosado.

Antes de iniciar el juego las estudiantes observan las reglas a seguir, dándose cuenta que para ganar el juego en un solo lanzamiento, las fichas deben quedar distribuidas una por cada espacio cuadrado del tablero, hecho que muy posiblemente las llevará a pensar en la respuesta que dieron cuando se les preguntó por la distribución de las gotas de lluvia en el piso embaldosado.

La realización de esta situación es importante si se tiene en cuenta que todas las estudiantes contestaron que las gotas de lluvia quedan distribuidas una por cada baldosa

Las fases que se pretenden desarrollar en esta Situación son: acción – formulación – validación, lo cual sucede en los siguientes momentos: lo primero es que las estudiantes deberán interactuar con el juego y tratar de cumplir el objetivo planteado que consiste en obtener el mayor puntaje en el menor número de lanzamientos, de esta forma las estudiantes deberán considerar las distintas maneras para el lanzamiento de las fichas, hecho que las llevará a plantear las estrategias de resolución que muy seguramente estarán relacionadas con el lanzamiento de las fichas.

En un segundo momento se socializa las estrategias que utilizaron y cómo estas afectaron el cumplimiento del objetivo del juego.

Finalmente las estudiantes deberán reflexionar sobre las dificultades que tuvieron para conseguir el mayor número de puntos durante los lanzamientos, esto las llevará a comprender que en un juego de tipo aleatorio no hay una estrategia ganadora.

En el momento de la reflexión se efectúa el proceso de validación, con él se busca que las estudiantes comprendan que la distribución de las fichas no es uniforme (distribución uno a uno entre ficha y cuadro del tablero) cuando se realiza el lanzamiento.

El reglamento para la consecución de los puntos corresponde a una variable didáctica, ya que al experimentar con el juego y partiendo de los principios probabilísticos, es más fácil que ocurra la regla número dos, pues presenta menos condicionamiento a la forma como pueden quedar distribuidas las fichas. Mientras que la regla número uno, que aplica para ganar automáticamente el juego es muy difícil debido a que involucra una condición para cada una de las 16 fichas.

Otra variable didáctica corresponde a la altura de lanzamiento de las fichas, el propósito es que las estudiantes analicen cómo afecta el propósito del juego si se aumenta o se disminuye la altura a la que se lanzan las fichas.

El referente será la primera ronda de lanzamientos, la cual se hará a una altura aproximada de setenta centímetros, luego, se pedirá que en la segunda ronda los lanzamientos se hagan a una altura aproximada de noventa centímetros, y por último, la tercera ronda la deberán realizar a una altura de cincuenta centímetros, aproximadamente.

Entre las dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de la situación didáctica se destaca el que las estudiantes se centren solo en la parte lúdica de la situación y no reflexionen sobre lo sucedido en el desarrollo del juego y las reglas de juego.

Igualmente que las estudiantes no valoren la importancia de las reglas de juego y solo realicen el lanzamiento de las fichas para cumplir con la actividad. A continuación se presenta la Situación No 3: *Cada ficha en su lugar*.

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN VICENTE SEDE ROSA VIRGINIA	
ÁREA: MATEMÁTICAS	SITUACIÓN 3	FECHA:
PROFESOR: FANOR YESID ZÚÑIGA PATIÑO		GRADO: CUARTO DE PRIMARIA

PROPÓSITO: Comprender que una de las características de la noción de aleatoriedad es la ausencia de uniformidad cuando se recogen en pequeñas muestras.

Realizar la asignación y comparación de las probabilidades de los eventos del experimento aleatorio.

TIEMPO: 90 minutos.

TÍTULO: CADA FICHA EN SU LUGAR

Se requiere un tablero con forma cuadrada de un metro cuadrado, con dieciséis cuadrados y dieciséis fichas de yas.

REGLAS DEL JUEGO:

Cada grupo está conformado por tres integrantes y habrá una persona quien tiene la función de registrar los puntajes obtenidos en cada lanzamiento.

El grupo ganador es el que sume más puntos después de lanzar nueve veces las fichas. Por cada ficha que se salga del tablero, se pierden dos puntos.

El propósito individual y grupal del juego es obtener el mayor puntaje posible al finalizar los nueve lanzamientos.

1. Si un jugador lanza las fichas al aire y cae una ficha en cada cuadro, automáticamente gana el juego, es decir que obtiene 50 puntos.

*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

Figura 8. Regla uno del juego cada ficha en su lugar.

2. Si el jugador lanza las fichas al aire y cuatro fichas (individuales) caen en cuadrados diferentes, por cada una de estas cuatro fichas se dan 2 puntos (ver figura de la izquierda). Si se cumple esta condición, por cada ficha adicional que caiga en un cuadrado diferente se dan dos puntos adicionales (ver figura de la derecha).

Gana 8 puntos

★			★
★★			★★★★
★			★
	★		
★★★★			★
★★			

Gana 12 puntos

★			★
★★		★★	★★★★
★			★ ★
	★		
	★		
★	★		★

Figura 9. Regla dos del juego cada ficha en su lugar.

3. Si el jugador lanza las fichas al aire y caen dos fichas por cada cuadro o cuatro fichas por cada cuadro (sin importar en que cuadro), obtiene 20 puntos.

★★		★★	★★
	★★		
★★		★★	
	★★	★★	

★★			
★★			
		★★	
		★★	
★★			
★★			
			★★
			★★

Figura 10. Regla tres del juego cada ficha en su lugar.

4. Si al lanzar las fichas, algunas caen en grupos de cuatro y otras en grupos de dos dentro de los cuadros, obtiene 20 puntos.

★★★★		★★	
★★		★★★★	
★★★★			

Figura 11. Regla cuatro del juego cada ficha en su lugar.

TABLA DE REGISTRO DE PUNTAJES

		LANZAMIENTO # 1	LANZAMIENTO # 2	LANZAMIENTO # 3	TOTAL POR INTEGRANTE	TOTAL
GRUPO 1	INTEGRANTE 1					
	INTEGRANTE 2					
	INTEGRANTE 3					
GRUPO 2	INTEGRANTE 1					
	INTEGRANTE 2					
	INTEGRANTE 3					
GRUPO 3	INTEGRANTE 1					
	INTEGRANTE 2					
	INTEGRANTE 3					

Tabla 6. Formato para el registro de los puntajes del juego cada ficha en su lugar.**TERMINADA LA PRIMERA RONDA:**

Contesta (individualmente) de forma escrita:

- A. Después de lanzar las fichas, ¿Qué crees que impide ganar automáticamente el juego?
- B. Si se aumenta el número de fichas, ¿crees que habría más ó menos posibilidades de ganar? ¿Por qué?
- C. Si se disminuye el número de fichas, ¿crees que aumentaría o disminuiría las posibilidades de ganar? ¿Por qué?
- D. ¿Cuál de las reglas ocurrió más frecuentemente?
- E. ¿Por qué las fichas no caen en el orden que uno espera?
- F. Modifica la forma de lanzamiento para cumplir el propósito de lograr el mayor puntaje en el menor número de lanzamientos en la segunda ronda, de forma individual como grupal.

TERMINADA LA SEGUNDA RONDA:

Socialización en el grupo:

- G. Al modificar la forma como lanzaste las fichas, ¿se cumplió el propósito de aumentar el puntaje obtenido? ¿Por qué?
- H. Al aumentar la altura de lanzamiento se facilita o se dificulta cumplir con el propósito del juego, ¿Por qué?

TERMINADA LA TERCERA RONDA:

Socialización en el grupo:

- I. La modificación de la estrategia de lanzamiento de las fichas, ¿propició que se obtuviera un mayor número de puntos en comparación a las primeras rondas? ¿Por qué?
- J. ¿Cuál es la regla que más se repitió? ¿Por qué?
- K. ¿Qué ejemplos de la naturaleza puedes tomar que sean similares al juego?

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y EVALUACIÓN

En este capítulo se desarrolla el análisis comparativo entre lo que se esperaba de la implementación de la secuencia didáctica y los resultados obtenidos en la fase de experimentación. Para llevarlo a cabo, primero se deberá explicitar lo acontecido durante la fase de experimentación, dando especial énfasis a aquellos aspectos que contribuyen al propósito de cada situación.

Aquí es importante tener en cuenta que cada situación tiene el propósito de promover la comprensión de algunos de los diferentes referentes que caracterizan la idea de aleatoriedad, como lo son: incertidumbre, aleatoriedad como ausencia de uniformidad en pequeñas muestras, asignación y comparación de las probabilidades de ocurrencia de un evento aleatorio.

Por lo tanto, un insumo para realizar el análisis comparativo es la valoración del cumplimiento de este propósito, el cual estará basado en unos criterios previamente establecidos y que han sido retomados de las investigaciones que orientan este trabajo.

Por último, con los resultados anteriores se realiza el análisis comparativo entre lo supuesto en el análisis previo y los resultados obtenidos en la fase de experimentación.

Análisis de la implementación de la secuencia didáctica

En el siguiente análisis se describe lo acontecido en la fase de experimentación, con lo cual se pretende realizar dos cosas: primero identificar los elementos (sucesos y hechos) que serán tomados como una muestra de que se avanza en el cumplimiento del propósito de promover la comprensión del significado de la noción de aleatoriedad; y segundo, analizar las concepciones, los errores, las dificultades y los logros de las estudiantes, esto a partir del referente de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Para valorar el cumplimiento de la comprensión de los referentes conceptuales relacionados con la noción de aleatoriedad, se plantean a continuación las siguientes rejillas, en cada una se argumentará el cumplimiento o no de estos referentes.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Incertidumbre	Lo impredecible como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirán un resultado inesperado. (Batanero, 2001b, p.58)	

Tabla 7. Rejilla para la valoración del referente incertidumbre.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Ausencia de uniformidad en pequeñas muestras	No es común presenciar una distribución que fije una forma geométrica euclídea o una relación de simetría entre los elementos. Tampoco es común la distribución uno a uno entre gotas y baldosas.	

Tabla 8. Rejilla para la valoración del referente ausencia de uniformidad en pequeñas muestras.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Asignación y comparación de probabilidades.	En muchos fenómenos aleatorios la probabilidad de ocurrencia de los sucesos no es la misma. (Batanero, 2001b, p. 14)	

Tabla 9. Rejilla para la valoración del referente asignación y comparación de probabilidades.

Con respecto al tiempo previsto para la implementación de la secuencia didáctica se observa que fue el apropiado, ya que de las 4 horas y 40 minutos que habían sido estimadas en el análisis previo, al final fue necesario 2 horas y 30 minutos para la implementación, tiempo que se distribuyó de la siguiente manera.

SITUACIÓN 1
Fecha: miércoles 16 de noviembre
Duración: 30 minutos
SITUACIÓN 2
Fecha: jueves 17 de noviembre
Duración: 40 minutos
SITUACIÓN 3
Fecha: viernes 18 de noviembre
Duración: 60 minutos
INSTITUCIONALIZACIÓN
Fecha: lunes 21 de noviembre
Duración: 20 minutos
Tabla 10. Fases de ejecución de la SD.

Como se hizo en la prueba diagnóstica, los dos grupos correspondientes al **Caso 1** y al **Caso 2** se referencian de la siguiente forma.

Caso 1: Estudiantes con alto rendimiento en matemáticas.

E1, E2, E3, E4, E5

Caso 2: Estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas.

E6, E7, E8, E9, E10

El docente se referenciará con la letra D.

7.1. Análisis de la implementación de la Situación 1. ¿Se necesita alquilar una carpa?

Teniendo en cuenta que el momento de apertura es esencial para lograr que las estudiantes se interesen en el desarrollo de la secuencia didáctica, en la Situación uno se propone una problemática que es común para ellas en el ámbito escolar, y se piensa que el aprovechamiento de esta problemática podría motivar el interés por participar en el resto de la secuencia didáctica.

La dinámica de esta Situación está pensada para reconocer las concepciones de cada una de las estudiantes por separado y generar así un espacio de reflexión sobre los fenómenos no deterministas, con esto se quiere fortalecer la concepción de lo impredecible con respecto a estos fenómenos, igualmente se observará cómo es el desempeño de las estudiantes que conforman cada uno de los dos Casos.

Con el desarrollo de la Situación se pudo evidenciar que se cumplió el propósito de captar la atención de las estudiantes y además propició que varias de las estudiantes expresaran desde sus conocimientos previos algunas ideas importantes que en adelante irían enriqueciendo el significado de aleatoriedad.

Es importante tener en cuenta que la problemática fue expuesta de forma tal que dejara abierta la posibilidad de encontrar una solución, y las mismas estudiantes por medio del estudio del caso llegaron a reconocer que la incertidumbre es determinante en su desarrollo.

Como punto de partida se socializa la situación mediante la lectura del caso, el docente aprovecha el momento para orientar el desarrollo de la actividad y establecer las pautas a seguir, expresa que es necesaria la participación verbal de las estudiantes con sus opiniones y creencias personales.

El docente motiva que las estudiantes piensen cómo conocer con ocho días de anticipación si el próximo viernes a las 10: 00 AM va a llover en la institución, y lograr así decidir si se debe alquilar una carpa para proteger los equipos de sonido. La estudiante E3

plantea que se debe contratar una persona que se encargue del clima, o que también se podría mirar el pronóstico del clima en internet.

Luego de la intervención de la estudiante E3, el docente interviene con el siguiente acto de devolución: ¿es suficiente con contratar una persona que sea especialista en el estudio del comportamiento del clima o mirando el pronóstico del clima para tener la certeza sobre lo que sucederá ese día?

Ante esta pregunta, la estudiante E1 expresa que con la ayuda de un especialista en el estudio del comportamiento del clima no se va a lograr saber con certeza si va a llover o no, pues no se puede llegar a obtener la exactitud en una situación como esta.

Posteriormente surge una propuesta de la estudiante E2, la cual expresa lo siguiente:

“También se podría utilizar uno de esos aparatos electrónicos que utilizan para saber si va a llover o no y que se utilizan para saber si un avión puede despegar o no en los aeropuertos, porque de pronto se aproxima una tormenta y ellos no puede despegar”.

El docente pregunta a las estudiantes si es suficiente con un aparato electrónico como el que dice la estudiante E2 para saber con varios días de anticipación lo que va a suceder con el estado del tiempo en un día y a una hora determinada en el futuro, teniendo en cuenta que hoy es miércoles y el aparato electrónico debe predecir el estado del tiempo del día viernes. Las estudiantes permanecen en silencio por un momento.

La estudiante E1 expresa que el aparato electrónico daría la información del estado del tiempo del mismo día o anticipando solo unas horas del evento, pero no podría anticipar con exactitud del estado del tiempo después de un día o más.

Durante estos primeros minutos de la actividad se puede observar que de entrada la problemática que se les planteó fue tratada desde una mirada reflexiva por varias de las estudiantes, esto también se debe a que el docente formuló un ejemplo relacionado con el caso estudiado, generando una apertura a la participación.

Aquí la participación de las estudiantes presenta un énfasis a considerar que hay forma de predecir el suceso, en parte esto se debe a que hay seguridad o confianza en la información del pronóstico del clima que se obtiene de los medios de comunicación o de las personas especialistas en el estudio de estos fenómenos naturales.

Según Batanero & Serrano (1995, p. 8), el reconocimiento del significado de aleatoriedad depende de la comprensión de la relación causa – efecto en fenómenos de este tipo, ya que sin la referencia de los factores que están inmersos en el fenómeno no se podría distinguir lo determinista de lo no determinista.

Esto se observa cuando las estudiantes expresan sus creencias y estrategias de resolución acerca de la posibilidad de predecir el suceso de si va a llover o no, inicialmente muestran una tendencia de argumentar que si es posible, pero cuando el docente los confronta surge la duda de cómo lograr este nivel de exactitud en el pronóstico del clima, considerando que desde sus conocimientos previos eso es algo que no han visto.

La primera dificultad evidenciada es justamente tratar de sobrevalorar lo determinista, la percepción de que es posible determinar lo que va a suceder, con lo cual no hay cabida a pensar que la incertidumbre esté presente en este caso.

Esta dificultad no fue prevista, sin embargo reafirma los resultados obtenidos en el análisis diagnóstico al constatar que la mayoría de las estudiantes pensaban que este tipo de fenómenos se podía predecir y lo no determinista se asocia a una falta de conocimiento.

Como se puede ver, hay coincidencia en la estrategia que se había previsto sobre el uso de algún programa o aplicación que se encargue del pronóstico del clima, ya que es algo que en la cotidianidad de las estudiantes se presenta recurrentemente a través de los medios y es fácil de obtener.

De otro lado se observa que las estudiantes que más proponen alternativas son las que conforman el Caso 1, es decir a aquellas que presentan un alto rendimiento en matemáticas, lo que muestra una actitud reflexiva frente a la problemática.

Posteriormente el docente continuó preguntando al grupo de estudiantes, ¿Cómo podemos darnos cuenta si el próximo viernes a las 10: 00 AM va a llover?, en vista de que las estudiantes del Caso 2 no han participado, el docente decide proponer un ejemplo para motivar la participación:

D: Si quisieras hacerte un peinado o un cepillado para asistir a la fiesta de una amiga el próximo viernes, corriendo el riesgo de que ese día llueva y se te dañe el peinado porque no hay forma de cubrirte lo suficiente, ¿Cómo harías para saber si inviertes o no el dinero en el peinado?

E9: Esperar a ver si llueve.

D: Pero como harías para darte cuenta con anticipación, suponga que así te protejas igualmente te vas a mojar porque llueve muy fuerte, ¿Cómo harías para anticipar esta situación y tomar una decisión? ¿Para decidir si te haces el peinado o no?

E9: Descargar una aplicación que informe sobre el estado del tiempo.

D: A bueno, es similar a lo que dice E1, pero con dos días de anticipación, de hoy miércoles para el viernes. ¿Sí?

D: Que otra niña tiene una idea diferente.

E1: Específicamente no es posible darnos cuenta.

D: ¿Específicamente no podemos darnos cuenta? ¿Están de acuerdo las demás?, no es posible darnos cuenta si va a llover o no va a llover el próximo viernes a las 10:00 AM, ¿están de acuerdo con esto?

E1: Puede cambiar el estado del tiempo, pero no podemos darnos cuenta específicamente si va a hacer sol o no va a hacer sol.

Después de observar que algunas de las estudiantes piensan que la incertidumbre no está presente en el caso estudiado, el docente utiliza el ejemplo anteriormente mostrado, con lo cual la estudiante E1 expresa una vez más que no es posible predecir el suceso.

El docente utiliza la conclusión a la que llega la estudiante E1, a propósito de que en dos ocasiones ha afirmado que no es posible tener certeza, pregunta si están de acuerdo, a lo cual la mayoría de las estudiantes concuerdan con gestos (moviendo la cabeza en gesto de aceptación).

A partir de esta conclusión que se establece en el grupo con respecto a la pregunta inicial se abre un espacio para socializar las posibles causas de la imposibilidad de conocer el suceso con anticipación.

D: De acuerdo a las respuestas que acaban de dar sus compañeras, según ustedes no es posible saber con anticipación si va a llover o no va a llover.

Si alquilan la carpa para esta actividad del día viernes, ¿ustedes creen que habrían invertido bien el dinero?

E4: Pues en estos días ha estado lloviendo toda la mañana, pero hay otros días que no llueve.

E2: Si, pero a veces amanece lloviendo, luego hace sol y ya se seca, tal vez no es necesario alquilar la carpa.

D: Pero recordemos que la actividad es para el día viernes exactamente a las 10:00 AM, y E4 dice que no es necesario alquilar la carpa, ¿están de acuerdo con lo que dice su compañera?

E3: Pues de pronto llueve y de pronto no llueve, mirando las características del clima.

D: Claro porque es que mire, si se mojan los equipos se pierde un poco de dinero, porque los equipos son muy caros y por más que sea caro el alquiler de la carpa, pues tampoco va a ser más caro que el valor de los equipos.

E5: Es mejor prevenir, ¿no?

D: ¿O sea que ustedes dicen que es mejor alquilar la carpa?

E4: Pues también sirve para tapar el sol.

D: O sea que es mejor prevenir, que es mejor alquilar la carpa.

E5: Si, mirando las características del clima.

D: Ustedes que creen que impide que uno pueda darse cuenta con anticipación si va a llover o no va a llover.

E1: ¿Porque uno no puede controlar la naturaleza?, ¿porque el clima cambia?

E2: El clima cambia porque hay personas que están quemando nuevos combustibles eso hace que el clima cambia, y nunca se sabe si ese día pueda llover o no, o haga sol. Nunca se sabe.

E8: También los cambios de clima repentinos.

D: Bueno ustedes acá también, el grupo de E6, E7, E9 y E10, qué opinan.

E9: No se sabe porque cambia el clima.

D: Si, pero entonces nosotros dijimos que no podíamos saber si iba a llover o no el próximo viernes a las 10:00 AM porque cambia el clima, pero qué hace que cambie el clima.

E1: Los fenómenos naturales.

Hasta el momento las estudiantes han propuesto estrategias alternativas para analizar el estado del tiempo a futuro, pero de acuerdo a lo anterior ninguna de ellas afirma que estas estrategias resuelven el dilema sobre qué decisión tomar.

En este punto de la actividad se puede observar que el trabajo de analizar las diferentes estrategias de resolución ha permitido tomar conciencia de la imposibilidad de anticipar el suceso.

Si las estudiantes no reconocían la naturaleza no determinista de este fenómeno natural, el primer paso consistía en exponer la insuficiencia de las estrategias expuestas y tomar así conciencia de la incertidumbre.

La reflexión hecha hasta el momento ha permitido que varias de las estudiantes consideren la imposibilidad de saber con exactitud los cambios en el clima. Esto se vio cuando la estudiante E1 expresa reiteradamente que no se sabe específicamente qué pueda suceder.

Se observa que en la cotidianidad ninguna de las estudiantes usaría las estrategias que ellas mismas exponen y ninguna de las estudiantes asume que estas sean precisas, es decir

que ante la situación de tener que decidir si llevar un paraguas por la posibilidad de lluvia, es muy probable que ellas no utilicen el programa que estima el estado del tiempo para tomar esta decisión.

Con respecto a lo anterior, las estudiantes piensan que con varios días de anticipación o con pocos días de anticipación, la situación va a ser la misma, no es posible saber con exactitud lo que puede suceder con el clima. Esto se observa cuando algunas estudiantes expresaron que de un momento a otro podía llover sin previo aviso.

D: Supongamos que esta mañana estaba despejado el cielo, de pronto se fue oscureciendo y a las 10: 00 AM llueve, ¿Qué aspectos están involucrados allí?, ¿Qué hace que suceda ese cambio de soleado a lluvioso?

E1: La tormenta.

D: Que hace que haya ese cambio y llegue la tormenta en un tiempo corto, un cambio drástico, repentino.

E2: El cambio de las estaciones.

E2: A veces en las aplicaciones de Google aparecen los estados del tiempo, yo los he visto.

E1: Pero no puede ser tan seguro, porque puede cambiar el clima.

D: Listo, miremos lo siguiente, ¿se han dado cuenta que algunas veces cuando va a llover está haciendo viento?

E9: Que se colocan las nubes oscuras cuando está haciendo viento.

D: ¿Creen que siempre que hace viento va a llover?

E1: Algunas veces, porque pueda que llueva o no.

D: Algunos de sus Papás, algunas personas de la casa o algún profesor les han dicho que existen algunas señales en el entorno que permitan anticipar si va a llover o no.

E3: Un día mi tía me dijo que un gato mato un lagarto que iba a llover y al final llovió. En serio. Eso siempre pasa.

E5: Mi abuela mira el sol, empieza a hacer una cosa rara con las manos y luego dice que va a llover y más tarde llueve.

D: O sea que, ¿existen unas creencias?, que nos permite saber si va a llover. ¿Sí? Por

ejemplo algunas personas dicen que cuando hace un sol picante significa que va a llover.

Varias estudiantes expresan que si lo han escuchado.

E3: Yo he escuchado que a veces hace un sol de lluvia, que es cuando hay un sol fuerte.

D: Pero esto es solo algunas horas antes, es decir que cuando ocurre lo que ustedes dicen unas horas más tarde o a la media hora llueve. ¿Sí?

E4: Pues yo creo que ninguna de estas cosas permitiría saber si va a llover o no cuando pasan más de un día.

E1: Algunos días que son muy calurosos son síntomas de que va a llover.

D: Las demás, que creen que hace la gente para que llueva, ¿han visto que la gente haga alguna cosa para que llueva?

Ninguna de las demás estudiantes expresan que hayan visto algo que ocasione la lluvia.

Cuando las estudiantes expresaron algunas de las creencias de los adultos que buscan anticipar la lluvia, permitió socializar lo que pensaban al respecto. La mayoría de las estudiantes se mostraron escépticas y dijeron que algunas veces hay unas señales relacionadas con la sensación de calor en exceso.

En conclusión, esto no llevó a que las estudiantes validaran o aceptaran la existencia de conocimientos tradicionales efectivos para llegar a dar solución a la pregunta inicial.

En este sentido, la variable correspondiente al tiempo de anticipación al suceso no conllevó a que las estudiantes asumieran una ventaja para dar solución al problema. Ya que por cercano que estuviera el día del evento, no hubo quien expresara que había una estrategia que diera solución al problema.

En conclusión, se pudo observar que lo preestablecido sobre la implementación de la situación inicial ocurrió en gran parte, ya que en principio las estudiantes mostraron resistencia a pensar que estos fenómenos son de tipo impredecible.

Lo anterior se apoya en la concepción de que existe una estrategia que permitía deducir lo que sucederá con el estado del tiempo a futuro, esto fue objeto de reflexión y se buscó

que las estudiantes reconocieran que no se puede asegurar nada sobre el estado del tiempo en un momento a futuro, con lo que se comienza a mostrar el carácter impredecible de estos fenómenos.

De otro lado se observó que la participación de las estudiantes del Caso 1 fue más reiterada, primero con estrategias que consideraban resoluble la situación, lo cual fue recurrente al inicio, sin embargo a medida que se discutía la validez de estas estrategias se fue consolidando una mirada menos optimista hacia la solución de la Situación, además de que los aportes que realizaban las estudiantes del primer caso en varias ocasiones llevó a que sus compañeras se motivaran a participar, ya fuera para expresar acuerdo o para refutar.

El aporte que realizaron las estudiantes del Caso 1 fue cambiando de una concepción estrictamente determinista hacia el análisis de lo impredecible, como la instancia final a la que se llega luego de probar las diferentes soluciones. Este ejercicio fue enriquecedor especialmente para aquellas estudiantes que desde un inicio expresaron sus opiniones y con esto motivaron el análisis del caso, sin embargo como se pudo observar, la mayoría de las estudiantes que conforman el Caso 2 no se hicieron partícipes de la dinámica, más que como oyentes.

A pesar de que al final las estudiantes expresaron que no es posible asegurar lo que sucederá con el estado del tiempo en el fenómeno estudiado, se observa claramente la necesidad de trabajar mucho más sobre este aspecto, pues en este momento la distinción entre lo seguro y lo no seguro, no es clara.

De acuerdo a lo anterior se puede establecer lo siguiente.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Incertidumbre	Lo impredecible como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirán un resultado inesperado. (Batanero, 2001b, p.58)	(SE CUMPLE) Se observa que a pesar de una concepción inicialmente determinista, las estudiantes al final llegaron a considerar que no es posible saber con certeza qué decisión tomar debido a que no se sabe lo que puede suceder. Esto se evidencia en la imposibilidad de validar una estrategia que permitiera asegurar el suceso.

Tabla 11. Valoración del cumplimiento del referente incertidumbre en la Situación 1.

7.2. Análisis de la implementación de la Situación 2: ¿podemos predecir la lluvia?

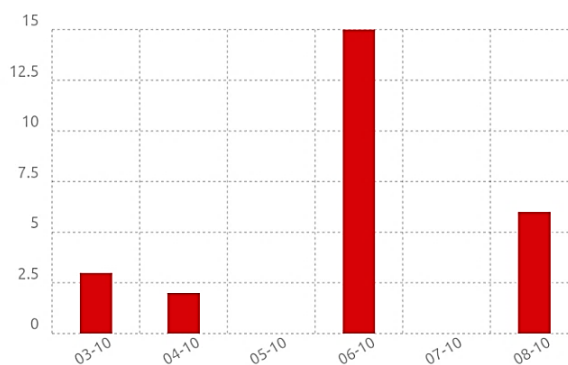
En esta situación se pretende afianzar lo alcanzado en el primer momento, por esta razón se retoma el contexto de la lluvia para analizar las relaciones que se pueden encontrar entre las precipitaciones de una semana y su incidencia en el estado del tiempo a futuro, con esto se quiere que las estudiantes reconozcan la independencia entre los posibles sucesos de un fenómeno aleatorio (niveles de las precipitaciones para cada día) y también que reconozcan la existencia de la incertidumbre en la estimación de los niveles de las precipitaciones para la semana siguiente.

Para llevarlo a cabo, cada estudiante debía observar un gráfico de barras (ver el gráfico a continuación) donde se muestran las precipitaciones ocurridas en la última semana en la sede, luego con esta información debían plantear un gráfico de barras que estime las precipitaciones de la semana próxima. Para mayor detalle de la situación, ver secuencia didáctica en la página 63.

MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO	LUNES	MARTES
09-11	10-11	11-11	12-11	13-11	14-11	15-11

Precipitaciones (mm)

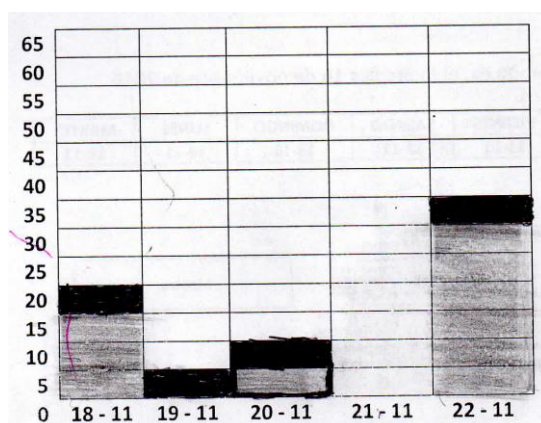
From 03 Oct 2016 to 08 Oct 2016



A continuación se muestra el gráfico que realizó la estudiante E6.

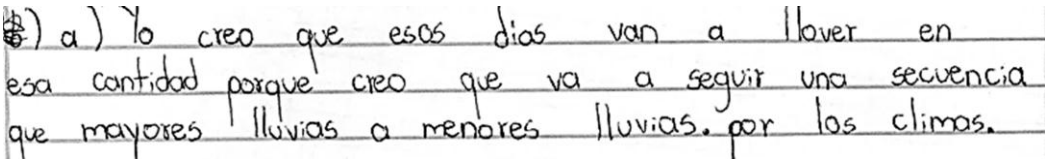
Precipitaciones (mm) del 18/11/2016 al 22/11/2016 en Palmira, sector de la sede RV.

VIERNES	SABADO	DOMINGO	LUNES	MARTES
18-11	19-11	20-11	21-11	22-11



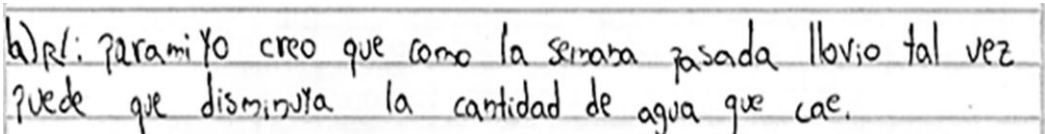
En la primera actividad todas las estudiantes, tanto del Caso 1 como del Caso 2 realizaron la estimación de las precipitaciones de la semana próxima mediante un gráfico de barras como el anterior, ninguna de ellas realizó un gráfico igual al que se les entregó, lo que permite entrever que para ellas las precipitaciones presentadas en la semana pasada no tienen por qué ser iguales a las que sucederán en la semana próxima. Además, pareciera ser que la mayoría de las estudiantes tratan de realizar sus gráficos de manera que las barras sean lo menos parecidas a las del gráfico de la semana pasada, esto es un hecho en el que concuerdan las estudiantes de ambos grupos (Caso 1 y Caso 2)

Entre los argumentos que utilizan las estudiantes para la estimación de las precipitaciones se destacan los siguientes:

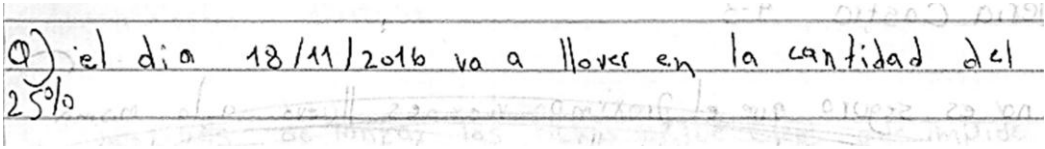
E3:  a) Yo creo que esos días van a llover en esa cantidad porque creo que va a seguir una secuencia que mayores lluvias a menores lluvias. por los climas.

Aquí la estudiante E3 plantea que los altos niveles de las precipitaciones de la semana pasada influyen en las precipitaciones que se pueden presentar en la semana próxima, lo cual se infiere como una consecuencia natural del fenómeno que puede estar sujeto a un ciclo de lluvias o un periodo de lluvias que se va debilitando. Sin embargo la estudiante muestra en su gráfico que todos los días de la siguiente semana lloverá.

Como se observa a continuación, la estudiante E2 tiene un argumento similar al que hace la estudiante E3, pues ella piensa que los niveles de las precipitaciones en la semana entrante son menores, debido a que los presentados en la semana pasada han sido frecuentes y en algunos casos en niveles altos.

E2:  a) R: Poramiyo creo que como la semana pasada llovió tal vez puede que disminuya la cantidad de agua que cae.

Con respecto a las estudiantes que conforman el Caso 2, las estudiantes E8 y E9 utilizan valores porcentuales para determinar lo que sucederá, así la estudiante E9 expresó:

E9:  a) el día 18/11/2016 va a llover en la cantidad del 25%

De forma similar la estudiante E8 utiliza una estimación porcentual para expresar el nivel de las lluvias en la semana entrante, lo cual permite observar que para ellas existe alguna razón para asumir que va a llover en esa cantidad, sin embargo no argumentan la razón que las lleva a afirmarlo.

La estudiante E7 afirma que si llovió el nueve de noviembre entonces es posible que el 18 de noviembre llueva, lo cual muestra que hay una relación entre las precipitaciones ocurridas y las que se presentaran en la semana próxima.

Con respecto a la segunda pregunta: *si este viernes llueve a las diez de la mañana, ¿es seguro que el próximo viernes llueva a la misma hora?*

Las estudiantes consideran que la variación y el cambio son aspectos característicos del estado del tiempo, por lo cual no se puede anticipar el estado del tiempo en un momento a futuro, y a causa de esto ninguna de ellas se atrevió a asegurar o por lo menos deducir si lloverá o no en ese horario en la semana próxima.

Igual que lo escrito por la estudiante E1, el resto de las estudiantes de ambos grupos (Caso 1 y Caso 2) piensan que no hay garantía de que las precipitaciones presentadas en un día cualquiera determinen lo que pueda suceder a futuro.

E1: b. Talvez, porque no hay una respuesta segura.
Porque el proximo viernes puede llover más o menos o pueda que no llueva.
Asi que no es algo muy exaeto.

Algunas estudiantes utilizaron el gráfico con las precipitaciones de la semana pasada como *estrategia* para argumentar que no es fácil de saber qué día va a llover y en qué nivel, como ocurre con la afirmación de la siguiente estudiante (E4).

E4: B) Talvez, porque no se sabe con seguridad si va a llover menos o no llueva o llueva más y mire las características de como estaba el clima de la semana anterior uno no se puede dar cuenta por que el clima cambia por las estaciones o los fenomenes naturales

Lo anterior contribuye a mostrar lo que piensan las estudiantes acerca de cómo puede favorecer o dificultar la estimación del suceso si se aumenta o se disminuye la cantidad de días antes de que ocurra el evento.

Casos aparte son las respuestas de las estudiantes E7 y E8 quienes ofrecen afirmaciones sobre el nivel de precipitaciones para este día que está sujeta a acontecimientos previos, por ejemplo la estudiante E7 contesta que *“va a brisar poquito porque el 13 de noviembre llovió”*, esta respuesta muestra una vez más con la misma estudiante que hace falta reconocer el carácter de variación que está presente en el fenómeno.

Finalmente solo las estudiantes E6 y E7 se sostuvieron en la idea de que los niveles de las precipitaciones de la semana pasada podría guardar relación con las precipitaciones que se presentarán en la semana próxima, ya que para las preguntas siguientes no expresaron algo diferente al respecto.

De acuerdo a los gráficos y a las conclusiones que formularon las estudiantes, se puede observar que ninguna de las estudiantes del Caso 1 consideran que la estimación de las precipitaciones pueda verse favorecida si se hace a unos pocos días del evento (1 día) en comparación a una estimación que este más distante al día del evento (5 días), del Caso 2 solo la estudiante E10 tiene una percepción similar, ya que el resto de las estudiantes, como se observó, tienden a pensar que existe relación con las precipitaciones de los días anteriores. Esta variable muestra unos resultados que concuerdan a lo que se concluyó en la situación 1, pues al considerar la manera en que favorece la estimación del estado del tiempo en un momento a futuro si se reduce o se aumenta la cantidad de días antes del evento las estudiantes concluyeron que igualmente no se podía asegurar nada.

En el gráfico que se les entregó se puede observar que las precipitaciones en los días jueves y sábado son casos atípicos en comparación al resto de días, pues el nivel de las precipitaciones para el día jueves se presenta muy alto y para el día sábado muy bajo, hecho que no guarda relación directa con lo sucedido en los días que les preceden. Esto constituye

un referente para que las estudiantes comparen lo sucedido y valoren la incertidumbre como característica del fenómeno.

Según Batanero (2001a, p. 22), es importante que en un experimento aleatorio se reconozca la existencia de unas causas que generan uno u otro resultado, por lo cual, la repetición del experimento es fundamental para mostrar que en condiciones similares los resultados no son los mismos, y reitera que si el niño no logra comprender la idea de causa, no tendrá un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios.

Este planteamiento contribuye a reconocer el hecho de que a pesar de que no se puede controlar los factores que intervienen en un fenómeno natural como el estado del tiempo, si se puede reconocer que existen unas causas que están involucradas y que conllevan los resultados mostrados en el gráfico.

Tomando como referente la propuesta de Batanero (2001a) se realiza a continuación el análisis de las respuestas de las estudiantes a la pregunta: *¿crees que al finalizar esta semana el pronóstico del tiempo que realizaste coincidirá con la realidad? ¿Por qué?*

Aunque las estudiantes de ambos grupos (Caso 1 y Caso 2) están de acuerdo en que no es posible predecir el estado del tiempo, se observa en los argumentos de las estudiantes que conforman el Caso 1 un análisis más elaborado.

Por ejemplo, la estudiante E4 considera que no se sabe si va a coincidir o no, pero además expresa la existencia de unas causas que afectan este suceso, lo cual es muestra de que hay reconocimiento de la naturaleza no determinista del fenómeno.

E4:

D) No es posible saber porque uno no sabe cuando lloverá o cuando no por lo que el clima cambia de vez en cuando por las cosas malas y buenas que el hombre hace o por los fenómenos que ocurren es posible saber pero solo ese mismo día.

La afirmación que hace la estudiante muestra, entre otras cosas, el reconocimiento de unas causas que conllevan al suceso, lo cual es un referente para una concepción más elaborada de aleatoriedad, donde se piensa que el fenómeno de las lluvias son la consecuencia de una serie de eventos que aunque no se describen en su totalidad contribuyen a que sucedan.

El resto de las estudiantes afirman que no es posible saber si la estimación que hicieron coincidirá con lo que realmente va a ocurrir, lo cual es justificado a la naturaleza cambiante e impredecible del fenómeno, más no se expresa que estos sucesos son consecuencia de unas causas o que la incertidumbre es motivada por algo más.

De acuerdo a lo anterior se puede decir que las estudiantes reconsideraron el carácter no determinista en estos fenómenos y valoraron la incertidumbre como un aspecto que muestra la imposibilidad de asegurar cual será el estado del tiempo en un momento dado a futuro, entre los referentes para esto se pudo observar el uso de términos que muestran por lo general el reconocimiento de la incertidumbre (no es posible saber, tal vez, no hay seguridad).

Las variables didácticas puestas en juego contribuyeron a reforzar el reconocimiento de la idea de incertidumbre, como en el caso de la cantidad de información con la que se cuenta sobre el estado del tiempo. Con respecto a la Situación dos, las estudiantes opinaron que una mayor cantidad de información no es garantía para determinar lo que ocurrirá con el estado del tiempo.

En esta situación se observó que las estudiantes trataban de mostrar la independencia entre lo sucedido con el estado del tiempo en la semana pasada y lo que podría ocurrir en la semana próxima, esto permitió avanzar en el reconocimiento del carácter no determinista en los fenómenos aleatorios y cumplir en mayor medida el propósito de la Situación.

Lo que se había considerado en el análisis previo se cumplió durante la implementación de la Situación, a excepción de las dificultades que se pensaban sobre la

comprensión del gráfico de barras y cómo podía el gráfico impedir el propósito de la Situación.

A partir de lo observado en el desarrollo de la presente Situación se concluye lo siguiente.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Incertidumbre	Lo impredecible como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirán un resultado inesperado. (Batanero, 2001b, p.58)	(SE CUMPLE) De acuerdo al propósito de la situación, se observa que las estudiantes reconocen la independencia de sucesos que se da entre las precipitaciones en un día y las precipitaciones en los días anteriores y posteriores. De igual forma expresan el carácter impredecible en el fenómeno.

Tabla 12. Valoración del cumplimiento del referente incertidumbre en la Situación 2.

7.3. Análisis de la implementación de la Situación 3: Cada ficha en su lugar.

Para esta situación se necesitaba que las estudiantes asuman una actitud propositiva en cada momento de la actividad, hecho que contribuirá muy posiblemente a la comprensión del referente conceptual involucrado para este caso, el cual consiste en la ausencia de uniformidad en pequeñas muestras.

Adicionalmente se quiere contribuir al reconocimiento de la incertidumbre en los fenómenos aleatorios y de la mano, reconocer que existen causas determinantes, las cuales actúan de forma independiente y generan unos resultados impredecibles.

De acuerdo a lo anterior el docente plantea a las estudiantes lo que espera de ellas durante el desarrollo de esta situación, seguidamente les explica en que consiste el juego denominado cada ficha en su lugar.

Se establece como condición que el lanzamiento de las fichas se haga a una altura aproximada de setenta centímetros.

Después de socializar el propósito del juego, que consiste en sumar la mayor cantidad de puntos en el menor número de lanzamientos, las estudiantes se distribuyen en los siguientes tres grupos:

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
Integrante 1: E9	Integrante 1: E8	Integrante 1: E10
Integrante 2: E6	Integrante 2: E5	Integrante 2: E7
Integrante 3: E2	Integrante 3: E4	Integrante 3: E1

Tabla 13. Distribución de las estudiantes en los tres grupos durante la Situación 3.

Como se puede observar, el propósito no era que las estudiantes que conforman cada uno de los dos Casos se hicieran en un mismo grupo, sino que al contrario, el propósito de la Situación se puede ver favorecida si las fortalezas de unas estudiantes se aprovechan para motivar a las demás y un inicio será manteniendo lo más equilibrado posible las tres grupos, sin embargo la distribución de los grupos fue a su decisión.

La estudiante E3 fue quien llevó el registro de los lanzamientos de sus compañeras. A continuación se muestra la tabla con los puntajes obtenidos durante los tres lanzamientos.

		LANZAMIENTO # 1	LANZAMIENTO # 2	LANZAMIENTO # 3	TOTAL POR INTEGRANTE	TOTAL
GRUPO 1	INTEGRANTE 1	-4	-2	8	2	30
	INTEGRANTE 2	0	6	8	14	
	INTEGRANTE 3	6	10	-2	14	
GRUPO 2	INTEGRANTE 1	10	6	-4	12	32
	INTEGRANTE 2	4	4	-6	2	
	INTEGRANTE 3	6	6	6	18	
GRUPO 3	INTEGRANTE 1	0	0	0	0	8
	INTEGRANTE 2	0	-6	-2	-8	
	INTEGRANTE 3	0	12	4	16	

Tabla 14. Registro de los puntajes de los tres grupos en los tres lanzamientos.

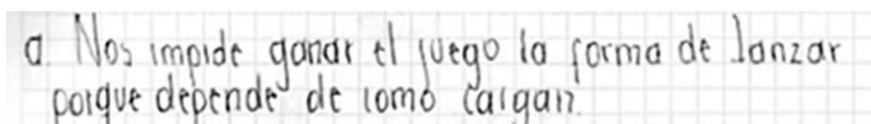
Las estudiantes de cada grupo realizan la primera ronda de lanzamientos, mientras que las compañeras están expectantes ante cuál estrategia (lanzamiento de las fichas) puede favorecer el logro de una gran cantidad de puntos.

Terminada la primera ronda se les entrega un papel a las estudiantes para que contesten algunas preguntas relacionadas con las estrategias utilizadas y la dificultad para cumplir con el propósito del juego.

A la pregunta: después de lanzar las fichas, ¿Qué crees que impide ganar automáticamente el juego?, las respuestas fueron las siguientes.

La estudiante E1 considera que una dificultad para el logro del propósito es la forma como se tiren las fichas, es decir, la técnica de lanzamiento utilizada.

E1:



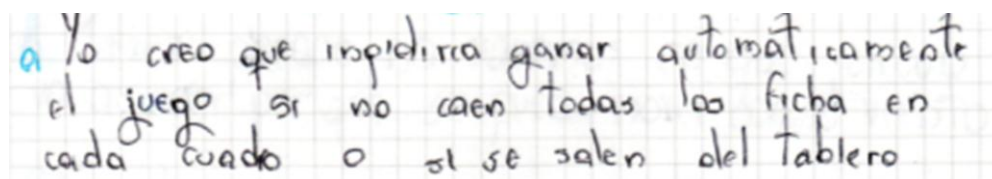
a. Nos impide ganar el juego la forma de lanzar porque depende de como caigan.

Esta afirmación lleva implícita la concepción de que es posible una estrategia ganadora, la cual hay que conocer para hacer que las fichas caigan como se quiere.

Una respuesta similar ofrecen las estudiantes E2, E5, E7, E9 y E10, quienes consideran que todo está en el lanzamiento de las fichas, hay una técnica de lanzamiento que hay que dominar.

Las estudiantes E3, E4 y E6 consideran que lo que impide ganar automáticamente el juego es que muchas de las fichas se salen del tablero. Como lo expresa E4 en el siguiente apartado.

E4



a Yo creo que impedirá ganar automáticamente el juego si no caen todas las ficha en cada cuando o si se salen del tablero

Las razones que dan las estudiantes sobre la imposibilidad de ganar automáticamente el juego no es la misma en todos los casos, ya que algunas estudiantes consideran que depende de la técnica de lanzamiento, es decir, piensan que es posible controlar las causas involucradas en el experimento “lanzar las fichas”, mientras que la percepción del resto de estudiantes no es muy clara, ya que no determinan si las fichas se salen del tablero porque se lanzan de forma incorrecta o porque el movimiento incontrolable de la ficha durante la caída conlleva a que se salga del tablero.

Cualquiera sea la percepción que tengan las estudiantes, lo común es que ninguna de ellas logró sumar más de diez puntos en sus respectivos lanzamientos de forma individual, por lo tanto, solo se logró cumplir la regla número dos: *“si caen al menos cuatro fichas en cuadros diferentes, suman ocho puntos, y por cada ficha adicional que caiga en un cuadro diferente suma dos puntos”*

Esta primera ronda contribuyó a que las estudiantes pusieran a prueba sus estrategias de lanzamiento y evidenciaran lo que pensaban acerca de la posibilidad de ganar automáticamente el juego, adicionalmente contribuyó a generar un ambiente de competencia donde cada estudiante expresa a las compañeras de grupo la forma como pueden lanzar las fichas para que aporten más puntos.

A la pregunta: si se aumenta el número de fichas, crees que, ¿aumentaría o disminuiría las posibilidades de ganar?, ¿Por qué?

La mayoría de las estudiantes (E1, E2, E3, E8, E9, E10) piensan que al aumentar el número de fichas se disminuyen las posibilidades de ganar, ya que varias fichas caerían por fuera del tablero y restarían puntos, otras quedarían amontonadas y solo algunas quedarían en un solo cuadro.

La estudiante E1 considera que entre mayor número de fichas, hay menos posibilidades de ganar, así que al aumentar el número de fichas conllevaría a un hecho

contraproducente porque constituiría una desventaja más, obsérvese el apartado sobre la respuesta de la estudiante E1.

E1:

b. No, porque podrían caer muchas fichas en un solo cuadro así que no aumentara las posibilidades de ganar.

La estudiante E8 considera que al aumentar el número de fichas no cambia en nada las posibilidades de ganar, obsérvese la respuesta de la estudiante.

E8:

B) No, porque yo creo que el número de fichas no afecta nada

El resto de estudiantes (E4, E5, E6, E7) contestan que no saben si al aumentar el número de fichas aumentaría o disminuiría las posibilidades de ganar automáticamente. Obsérvese lo que expresa la estudiante E6 al respecto.

E6:

b) Por que si se aumenta el numero de fichas puede uno ganar pero tambien puede

A la pregunta: si se disminuye el número de fichas, crees que ¿aumentaría o disminuiría las posibilidades de ganar?, ¿Por qué?

Cinco estudiantes (E1, E2, E4, E7, E9) consideran que al disminuir el número de fichas habría mayor posibilidad de ganar el juego, debido a que hay más posibilidades de que queden esparcidas en un cuadrado diferente. Observe a continuación la respuesta de la estudiante E2.

E2:

c) si se disminuye si podria ganar por que si estan dispersas y no sale ninguna ficha del cuadro te sugarian puntos

Tres estudiantes (E3, E6, E8) consideran que al disminuir el número de fichas disminuye las posibilidades de ganar.

Dos estudiantes (E5, E10) consideran que no afecta en nada las posibilidades de ganar si se disminuye la cantidad de fichas.

La siguiente pregunta fue: ¿Por qué las fichas no caen en el orden que uno espera?

Entre las respuestas que dieron las estudiantes se destaca las de E1 y E4, las cuales expresan que el suceso está afectado por algunas causas externas al control de quien realiza el lanzamiento, como se ve en el apartado de la estudiante E4.

E4:

El resto de las estudiantes utilizan como justificación la falta de una buena técnica de lanzamiento.

Finalizada la primera ronda de lanzamientos la mayoría de estudiantes considera que la obtención del mayor número de puntos depende de una buena estrategia, es decir que se requiere de una buena técnica de lanzamiento.

En conclusión, la uniformidad para las estudiantes, entendida como la distribución uno a uno entre fichas y cuadros del tablero, es posible de lograr con una buena técnica de lanzamiento.

Antes de iniciar la segunda ronda de lanzamientos se recuerda a las estudiantes que deben tratar de cumplir el propósito del juego, además se establece que los lanzamientos se

deberán hacer desde una altura aproximada de noventa centímetros, es decir, mayor a la anterior.

Después de terminar la segunda ronda de lanzamientos se discute con todas las estudiantes lo siguiente:

- a. Al modificar la forma como lanzaste las fichas, ¿se cumplió el propósito de aumentar el puntaje obtenido? ¿Por qué?

El docente expresa al grupo lo siguiente:

D: ...Teniendo en cuenta que el propósito del juego es que caiga una ficha por cada cuadro del tablero para ganar en un solo lanzamiento, ¿Quién de ustedes pensó en modificar la forma del lanzamiento de las fichas para lograrlo?

Todas las estudiantes permanecen en silencio.

El docente expresa.

D: Levanten la mano quienes lanzaron las fichas.

Todas las estudiantes levantan la mano.

D: Cuando ustedes lanzaron las fichas, ¿las lanzaron de cualquier manera? O buscaron la forma para que quedarán distribuidas una por cada cuadro.

La estudiante E1 levanta la mano.

D: ¿Tú lo hiciste?, que estrategia utilizaste.

E1: Pues yo trate de lanzarlas como yo creía pero no me dio resultado.

La estudiante E2 levanta la mano y el docente le da la palabra.

E2: Yo primero cerré un poco la mano pensando que así las fichas no se iban a regar mucho, pero quedaron muy amontonadas, luego hice lo contrario pero varias se salieron del tablero

D: Bueno, ustedes utilizaron varias estrategias, ¿pero alguna de ellas fue efectiva?

Todas las estudiantes responden que no, algunas con el movimiento de la cabeza, otras verbalmente.

El momento de socialización permitió reconsiderar la concepción determinista que se tenía sobre la estrategia de lanzamiento de las fichas, lo cual se observa cuando las estudiantes cuestionan la existencia de una estrategia “óptima” para ganar automáticamente el juego.

Durante la ronda de lanzamientos se pudo observar que las estudiantes que conforman el Caso 1 fueron más dedicadas al cumplimiento de las pautas que se dieron al inicio, esto favoreció la discusión al momento de socializar las preguntas, mientras que las estudiantes que conforman el Caso 2 fueron menos atentas a las pautas.

Este hecho constituye una dificultad tanto para el desarrollo de la socialización como para el cumplimiento de la validación de los procedimientos, ya que se espera de antemano que las estudiantes se comprometan con el cumplimiento de las reglas y pautas dadas desde un inicio con el fin de generar en su momento la socialización de las estrategias de lanzamiento utilizadas y el análisis de cómo estas estrategias contribuyeron al propósito del juego.

Con respecto al puntaje obtenido, ninguna de las estudiantes obtuvo más de diez puntos en este lanzamiento, lo que permite deducir que en realidad las estrategias no han sido efectivas, mientras que en el acumulado de puntos llevan la delantera las estudiantes E8 y E2, con dieciséis puntos cada una.

h) Al aumentar la altura de lanzamiento se facilita o se dificulta cumplir con el propósito del juego, ¿Por qué?

Todas las estudiantes afirmaron que es más difícil ganar si se aumenta la altura de lanzamiento de las fichas.

A continuación se retoma un apartado del momento en que se socializa esta pregunta.

E1: Porque al aumentar la altura del lanzamiento de las fichas estas rebotaban mucho y se salen del tablero.

E3: A mayor altura las fichas se chocan entre ellas durante la caída, por esto no caían donde uno quería.

D: Alguien más que nos diga si al haber aumentado la altura de lanzamiento de las fichas se facilitó o se dificultó el propósito de obtener una mayor cantidad de puntos.

E2: Cuando yo lance las fichas desde esa altura fue difícil sumar puntos, porque se mueven más y rebotan más en el tablero.

El resto de estudiantes están de acuerdo en que al aumentar la altura del lanzamiento hay factores que influyen en la disposición final de las fichas, algunos de los factores que se identifican son: el viento, el rozamiento entre las fichas, el rebote de las fichas.

Es importante tener en cuenta que hasta el momento los puntajes obtenidos se deben a la regla número dos, la cual es la más simple del juego, ya que no exige mayores condiciones con respecto a la disposición de las fichas en comparación a las demás reglas.

En este sentido se pudo observar que la mayoría de estudiantes considera que es muy difícil que se logre ganar automáticamente el juego, debido a que la condición: “cada una de las dieciséis fichas debe caer en un cuadro diferente del tablero”, no depende exclusivamente de una buena técnica de lanzamiento.

Posteriormente se inicia la última ronda de lanzamientos, con lo cual se tiene una oportunidad más para sumar la mayor cantidad de puntos de forma individual y grupal que permita ganar el juego.

Esta vez la condición para el lanzamiento de las fichas consiste en que la altura de lanzamiento sea de aproximadamente cincuenta centímetros, es decir, más cerca al tablero en comparación a la altura inicial.

Finalizada la última ronda de lanzamientos se procede a discutir las siguientes preguntas.

1. Si se disminuye la altura de lanzamiento a cincuenta centímetros, crees que, ¿aumentaría o disminuiría las posibilidades de ganar?, ¿Por qué?

Al observar el resultado de todos los lanzamientos, ninguna de las estudiantes llega a afirmar que la disminución de la altura de los lanzamientos favoreció la obtención de una mayor cantidad de puntos. A continuación se muestra un apartado de lo que expresan las estudiantes sobre esta pregunta.

La estudiante E4 expresa que la disminución de la altura de lanzamiento dificulta la obtención de puntos porque estas caen juntas y no es posible cumplir con las reglas.

E4: No es fácil, porque yo lance las fichas pero quedaban amontonadas y no quedan distribuidas como uno quiere.

De forma similar la estudiante E1 considera que el lanzamiento de las fichas a esta altura dificulta la obtención de los puntos debido a que es más difícil que las fichas se distribuyan una por cada cuadro.

E1: Cuando se lanzan más cerca del tablero quedan varias fichas juntas y ya no se puede lograr que quede una en un cuadro diferente.

Una última respuesta que muestra la dificultad para obtener los puntos se ve a continuación con la estudiante E7, se observa como la estudiante expresa que existe mayor dificultad para sumar puntos cuando la distancia de lanzamiento se disminuye en comparación a los casos anteriores, cuando la altura era mayor.

E7: Cuando las fichas se lanzan cerca del tablero, si se lanzan fuertemente se salen del tablero y si se lanzan de forma suave pueden quedar juntas, entonces no permite sumar más puntos.

A pesar de que todavía no se ha concluido nada sobre la existencia de una estrategia ganadora que permitiera obtener la mayor cantidad de puntos por lanzamiento, se puede observar que las estudiantes han ido confrontando por medio del ensayo y error lo que se resistían a pensar, la imposibilidad de controlar la distribución de las fichas con el lanzamiento.

Con lo realizado hasta el momento se abre un espacio para concluir la posibilidad o imposibilidad de una estrategia ganadora.

D: Ustedes buscaron una manera u otra para lanzar las fichas y los resultados no eran los que uno quería, ¿ustedes creen que había una estrategia ganadora?

E2: No, porque si uno las lanza un poco fuerte las fichas, quedan regadas y se salían del tablero, si uno las lanza muy despacio quedan amontonadas y tampoco se logra la estrategia ganadora.

D: ¿O sea que una persona no puede saber que va a ganar antes de jugar?

Algunas estudiantes hacen gestos de que no es posible saber (moviendo la cabeza), otras dicen que no.

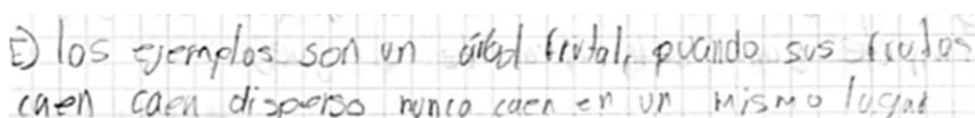
La distribución de las fichas en los cuadros del tablero no depende exclusivamente de quien realiza el lanzamiento, pues existen unos factores externos que están involucrados. Factores que fueron identificados anteriormente por las estudiantes.

También se reconoce que la única regla que les permitió sumar puntos durante las tres rondas fue la segunda, por lo tanto, ninguna de las estudiantes logró sumar puntos mediante la regla tres o la cuatro. La regla tres establecía que si las dieciséis fichas quedaban distribuidas en grupos de dos o de cuatro por cada cuadrado, entonces sumaba veinte puntos. Mientras que la regla cuatro establecía que si en el mismo lanzamiento las fichas quedaban distribuidas en grupos de dos y de cuatro por cada cuadro, entonces sumaba veinte puntos.

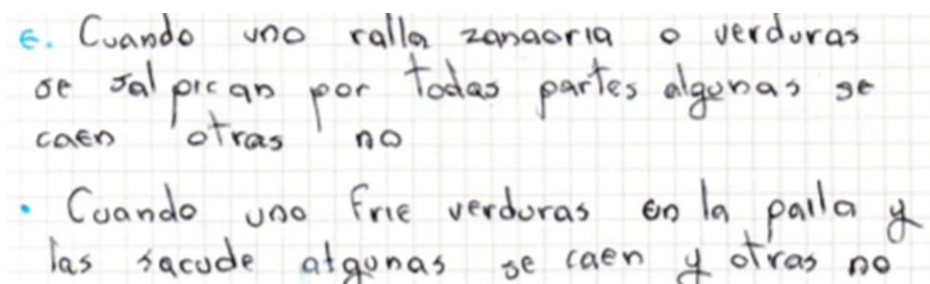
1. ¿Qué ejemplos de la naturaleza puedes tomar que sean similares al juego?

Las respuestas que dieron las estudiantes conllevaron a verificar que las estudiantes reconocen algunas de las características de los fenómenos aleatorios y entre estas características se encuentra el carácter impredecible en la posición final del objeto.

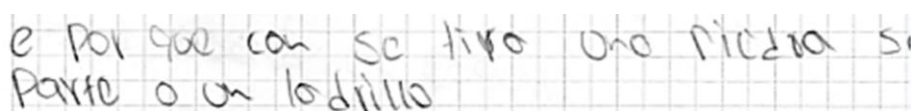
En el siguiente apartado se observa la similitud entre el ejemplo que da la estudiante E5 y el juego cada ficha en su lugar, lo que permite verificar que hay un acercamiento con el contexto de la vida cotidiana, y como analiza desde la percepción del ejemplo el carácter impredecible con respecto a la posición final del objeto.

E5: 

De forma similar las estudiantes E1, E2, E3, E4, E6 y E8, plantean ejemplos que guardan la relación de lo impredecible con respecto a la posición final del objeto, se observa en el ejemplo de la estudiante E3.

E3: 

Sin embargo las estudiantes E7, E9 y E10, no muestran una concepción tan clara de lo impredecible a partir del juego realizado, por ejemplo la estudiante E7 plantea cuando se tira “un ladrillo”, sin embargo las características de este objeto (peso, caras aplanadas), lo hacen menos propicio para ejemplificar el carácter impredecible con respecto a la posición final del objeto.

E7: 

¿Cuál es la regla que se cumple más fácilmente en el juego? ¿Por qué?

Todas las estudiantes están de acuerdo en que la única regla que se cumplió fue la número dos, ejemplo de esto es la respuesta que da la estudiante E1.

E1: La regla que más se repitió fue la que decía que si caían al menos cuatro fichas en un cuadro diferente sumaban ocho puntos, porque yo no vi que se cumpliera otra.

La afirmación que hace la estudiante E1 no describe las razones por las que se cumple en mayor medida la regla número dos, sin embargo muestra que se hizo la comparación entre las posibilidades de ocurrencia de las reglas establecidas.

La respuesta que da la estudiante E2 muestra la comparación de las cuatro reglas, esto permite observar que en este experimento aleatorio hay reconocimiento de la disparidad entre la ocurrencia de una de las reglas en comparación a las demás.

E2: Yo creo que la regla dos se cumple más fácilmente, porque no era tan difícil de que se cumpliera, en cambio las otras tres reglas ponían más condiciones.

Igual pensamiento tiene la estudiante E3, quien expresa que las características del juego favorecen que algunas fichas queden distribuidas en cuadros diferentes, pero esto no se cumple fácilmente con la totalidad de las fichas y por esto la regla número dos es más fácil de que se cumpla en comparación a las demás reglas.

E3: Porque casi siempre quedaban algunas fichas en un cuadro diferente, pero eso no pasaba con todas las fichas.

¿Cuál es la regla que es más difícil de cumplir en el juego? ¿Por qué?

Las respuestas que dieron las estudiantes para esta pregunta son diferentes, ya que no es fácil de identificar la regla más difícil de cumplir. Esto se debe en gran medida a que las

reglas uno, tres y cuatro no se pudieron cumplir durante los tres lanzamientos, por lo tanto resulta difícil saber cuál de ellas se cumple menos si la frecuencia es la misma.

Ejemplo de esto corresponde a la respuesta que da la estudiante E1.

E1: Yo creo que la primera, la tercera y la cuarta son igualmente difíciles de cumplir porque ninguna se cumplió.

Una percepción diferente se observa en la respuesta que da la estudiante E2, quien considera que la regla más difícil de cumplir es la uno, es decir, aquella que establecía que todas las fichas deben quedar repartidas en un cuadro diferente. La razón que da es que en repetidas ocasiones sucedió que las fichas quedaban juntas, ya fueran muchas o pocas las fichas quedaban juntas, lo que verdaderamente llama la atención es que no es fácil que todas las fichas queden separadas y a la vez que cada una quede en un cuadro diferente.

E2: La más difícil de cumplir es la uno, porque no es fácil que las fichas queden en un cuadro diferente.

Una percepción similar se observa en la respuesta de la estudiante E5, quien expresa que las reglas uno y tres son igualmente difíciles de cumplir, pues la distribución homogénea y regular no es tan fácil de evidenciar.

E5: La más difícil de cumplir es la número uno y la número tres, porque la exigencia es mayor para que queden de esa forma, como dice el enunciado.

A pesar de que las estudiantes realizan una estimación sobre las posibilidades de ocurrencia de las cuatro reglas después de haber hecho el experimento y no de manera previa al experimento, si representan el trabajo consciente y crítico sobre una situación que puede ser común para ellas pero que tal vez no había concentrado su interés.

Esta pregunta es una cuota inicial al estudio de la probabilidad, donde las estudiantes pudieron estimar de manera subjetiva la posibilidad de ocurrencia de un suceso por medio de la comparación de las diferentes alternativas a partir de los aspectos más inmediatos que generan el experimento.

Un hecho que fue característico y permanente durante el desarrollo de las tres Situaciones Didácticas fue la participación activa de las estudiantes del Caso 1, las cuales además de expresar sus opiniones y puntos de vista también buscaban cumplir con lo que pedía la Situación, sin embargo no se percibió lo mismo con las estudiantes que conformaban el Caso 2, ya que por lo general no expresaban mucho y las opiniones no eran tan profundas para mostrar una claridad al respecto.

Por último, se pudo evidenciar que el estudio de conceptos tan complejos pero fundamentales en la formación de la Estadística y la Probabilidad es posible de lograr a partir del diseño y la implementación guiada de situaciones que sean llamativas para las estudiantes, si es de su contexto social, pero es muy importante que determinen unos conocimientos previos que faciliten el aprendizaje. Es así que como se logrará el desarrollo de conocimiento, según la TSD.

La palabra interacción da cuenta de una ida y vuelta entre el sujeto y el medio: frente a un problema el sujeto elige una alternativa matemática entre varias posibles, la pone en juego y tiene la posibilidad de analizar los resultados de sus acciones reafirmando sus decisiones o rectificándolas. Al hacer este movimiento está produciendo conocimiento (Zadovsky, 2005, p. 5).

La secuencia didáctica propició el cumplimiento de un proceso que Brousseau denomina de retroacción, pues a medida que se iniciaba una nueva ronda de lanzamientos el grupo de estudiantes determinaba una estrategia de lanzamientos que luego era confrontada en la práctica, de esta manera se logró considerar si había o no una estrategia óptima, y si la había cuales eran los factores externos que debía superar.

Con lo observado en la situación tres se puede concluir que a pesar de que al inicio las estudiantes consideraban que por tratarse de un juego se podía llegar a una estrategia ganadora, se fue reconociendo mediante el ensayo y el error que la seguridad no es alcanzable, es decir que nuevamente la incertidumbre es característica del experimento.

Las variables puestas en juego como lo fue la distancia de lanzamiento fue crucial para generar el reconocimiento de la incertidumbre una vez más debido a que antes de iniciar a lanzar las fichas las estudiantes pensaban que por estar más cerca del tablero iban a sumar más puntos, sin embargo esto no fue así.

Otro aspecto que fue valorado en el análisis previo y que se cumplió durante la implementación de la situación fue la dificultad correspondiente a enfatizar la parte lúdica que el trasfondo de la actividad, hecho que se observó en algunas estudiantes que conformaban el Caso 2. Esto se veía cuando se les preguntaba cómo habían hecho para cumplir la regla de sumar muchos puntos en un solo lanzamiento y no generaban una respuesta que lo evidenciara.

De acuerdo a lo anterior se plantea lo siguiente.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Incertidumbre	Lo impredecible como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirán un resultado inesperado. (Batanero, 2001b, p.58)	(SE CUMPLE) Se reconoce que en un juego aleatorio no existe una estrategia óptima que permita una ventaja, pues existen factores externos al control del jugador que influyen en el resultado.

Tabla 15. Valoración del cumplimiento del referente incertidumbre en la Situación 3.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Ausencia de uniformidad en pequeñas muestras	No es común presenciar una distribución que fije una forma geométrica euclídea o una relación de simetría entre los elementos. Tampoco es común la distribución uno a uno entre gotas y baldosas.	(SE CUMPLE) Las estudiantes reconocen que en un fenómeno aleatorio relacionado con la distribución de elementos sobre una cuadrícula, por lo general, no presentan un carácter de uniformidad (distribución uno a uno entre elementos y cuadrícula)

Tabla 16. Valoración del cumplimiento del referente ausencia de uniformidad en pequeñas muestras.

REFERENTE	DESCRIPCIÓN	CUMPLIMIENTO
Asignación y comparación de probabilidades.	En muchos fenómenos aleatorios la probabilidad de ocurrencia de los sucesos no es la misma. (Batanero, 2001b, p. 14)	(SE CUMPLE) Las estudiantes plantean una disparidad al comparar la probabilidad de ocurrencia de las cuatro reglas de juego, lo cual es justificado a la frecuencia con que se cumplían estas reglas.

Tabla 17. Valoración del cumplimiento del referente asignación y comparación de probabilidades.

7.4. Análisis de la fase de Institucionalización

En esta última fase de la secuencia didáctica el docente retoma parte de las ideas que fueron aportando las estudiantes durante el desarrollo de las Situaciones para establecer una connotación formal de la aleatoriedad y aclarar algunas cuestiones que habían quedado sin resolver.

Para hacerlo recurre a una presentación en la que se comienza con la explicación de qué es un fenómeno aleatorio y se dan algunos ejemplos de fenómenos deterministas y fenómenos no deterministas.

Pero también hay otros fenómenos que tienen varios resultados y estos no se pueden predecir con certeza, estos son llamados **fenómenos aleatorios**; por ejemplo: el resultado probable de una rifa; ¿cual será el equipo ganador en un campeonato de fútbol?, ¿que cara quedará arriba al lanzar un dado?, etc.

A partir de la explicación de las características que presenta un fenómeno aleatorio el docente explica los referentes conceptuales de la noción de aleatoriedad que fueron tratados en las Situaciones didácticas.

D: Ausencia de uniformidad, equiprobabilidad e incertidumbre.

¿Qué es la incertidumbre?, es no tener el conocimiento de lo que va a suceder, yo no sé lo que va a pasar antes de realizar el experimento aleatorio.

La ausencia de uniformidad, cuando lanzamos las fichas es que quede cada una repartida por cada cuadro, ¿esto pasaba?

La mayoría de estudiantes contesta que no.

D: No, cuando lanzabas las fichas, las fichas no quedaban distribuidas una por cada cuadro, entonces una característica de los juegos aleatorios es que cuando se lanzan las fichas en un tablero como este las fichas no quedan distribuidas en un cuadro diferente cada una.

Entonces los juegos aleatorios no cumplen la uniformidad.

Recordemos que unas fichas quedaban juntas, otras separadas, ¿sí?

La equiprobabilidad es que hay juegos aleatorios en el que todas las opciones tienen la misma posibilidad de ocurrir.

E3: Como en los dados.

D: Exactamente, en el lanzamiento de los dados todas las caras tienen la misma posibilidad de caer.

Finalmente el docente muestra en la presentación cual era el propósito de cada una de las Situaciones.

SITUACIÓN	PROPÓSITO
¿Se necesita alquilar una carpa?	Reconocer el carácter impredecible y de incertidumbre en los fenómenos aleatorios.
¿Podemos predecir las lluvias?	Establecer la relación de causa – efecto que guardan los fenómenos aleatorios.
Cada ficha en su lugar	Comprender que una de las características de los fenómenos aleatorios es la ausencia de uniformidad.
Lluvia de serpentina	Reconocer si es posible una estrategia ganadora en un fenómeno aleatorio.

Tabla 18. Presentación de la SD en la fase de institucionalización.

7.5. Consideraciones finales

Con la implementación de la SD se pudo observar un aspecto generalizado en la mayoría de las estudiantes que tiene que ver con el arraigo al pensamiento determinista, mencionado ya en la parte histórica y que aun cobra vigencia en esta época.

Con respecto a lo anterior se pudo constatar que la implementación de Situaciones Didácticas donde el estudiante deba utilizar sus conocimientos previos como una excusa

para resolver una problemática es un método valioso y altamente efectivo, en el desarrollo de la SD el estudiante tuvo la oportunidad de poner a prueba y reconsiderar la validez de las concepciones que se tenían sobre el comportamiento de los fenómenos aleatorios.

Como expresan Batanero (2001b) y Green (1989), la noción de aleatoriedad debe ser enseñado a temprana edad por medio actividades lúdicas y desde situaciones cotidianas para el estudiante, con el motivo de ir fortaleciendo el razonamiento a priori sobre la relación causa – efecto que conlleva a la diferenciación de las posibilidades que se pueden presentar en un fenómeno aleatorio.

Esto permite tomar conciencia sobre un hecho que fue recurrente durante la implementación de la SD y corresponde a la diversidad de actitudes y disposiciones de las estudiantes en el momento de la práctica, hecho que mostró una diferencia entre las estudiantes del Caso 1 y las estudiantes del Caso2.

Las estudiantes del Caso 1 mostraban mayor compromiso en las Situaciones, en cambio las estudiantes del Caso 2 perdían esporádicamente la atención y esto causaba que en momentos cruciales como el de la socialización no propusieran argumentos que encausaran la participación del grupo.

De acuerdo a esto se observa una relación entre el desempeño en matemáticas y la disposición a comprender la noción de aleatoriedad, lo cual concuerda con la primera hipótesis planteada.

El caso contrario resulta ser muy válido ya que las estudiantes del Caso 2 por lo general estaban de acuerdo con lo propuesto por las estudiantes del Caso 1, sin embargo cuando se les solicitaba que profundizaran un poco más es la apreciación, por lo general no lograban presentar un caso diferente o un ejemplo similar.

De otro lado, se presentó como un hecho reiterado el que las estudiantes asumieran de entrada que las situaciones estudiadas se podían predecir de alguna manera, por lo tanto el

reto no era solamente motivar la comprensión del significado de aleatoriedad sino también el de romper la barrera sobre la negación a los fenómenos no deterministas, este hecho da cuenta de la validez de la hipótesis número dos que afirmaba que una de las mayores limitantes para la comprensión del significado de aleatoriedad se debe a que no se acepta fácilmente la indeterminación en el fenómeno, al contrario se busca cualquier argumento para considerarlo como un fenómeno determinista.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

Esta propuesta surgió del interés por comenzar a abonar el terreno en el estudio de conceptos fundamentales de la Educación Estocástica para los primeros años de escolaridad, por ende su desarrollo fue una labor motivante y enriquecedora tanto para el docente como para las estudiantes que por primera vez estudiaban la noción de aleatoriedad.

Específicamente fueron dos los referentes que se tuvieron en cuenta para el desarrollo del proyecto:

- Como se expresó desde un inicio, el estudio de la noción de aleatoriedad es requerido desde los primeros años de escolaridad con propuestas educativas bien fundamentadas y validadas, por esta razón y a pesar de que en Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN) solicita a través de sus propuestas rectoras que se trabaje en el desarrollo del pensamiento aleatorio, se observa la necesidad de que los primeros competentes debemos ser los docentes.
- En las investigaciones que tratan sobre la enseñanza de la noción de aleatoriedad en la escolaridad se muestra que para promover su comprensión, es importante recurrir a la práctica, ya que se valora más una idea que surge del descubrimiento en contextos cotidianos del estudiante y que quedan instalados en su memoria.

Al tomar lo anterior como premisas se observa que la propuesta educativa permitió obtener varios elementos que motivan a concluir algunos aspectos que en la mayoría de los casos son positivos y animan a continuar con el trabajo iniciado.

En primera instancia, el trabajo realizado permitió desvelar algunas características de los fenómenos aleatorios, hecho que contribuyó a romper una visión que consideraba determinista cualquier fenómeno sin analizar mínimamente algunas características de su comportamiento.

En este sentido se puede decir que aunque la propuesta educativa fue altamente efectiva para romper una concepción arraigada, se requiere continuar con el trabajo para llegar a calar en el pensamiento de la estudiante y fortalecer la idea de aleatoriedad.

Así, la falta de un trabajo planificado sobre los conceptos fundamentales dentro de la educación estocástica para los primeros grados de escolaridad limita el desarrollo conceptual del estudiante, y por lo tanto dificulta en gran medida la posibilidad de que el estudiante llegue a desarrollar un pensamiento aleatorio acorde al nivel escolar correspondiente.

Los referentes conceptuales trabajados en pro de la comprensión de la noción de aleatoriedad quedaron en un nivel básico de desarrollo y es necesario que se profundice en su estudio, a la vez que es necesario incluir otros referentes conceptuales como lo son la equiprobabilidad y el azar para potenciar la noción de aleatoriedad, ya que como menciona Green (1989), es por medio de la variedad de ejemplos y de situaciones como se fortalece la idea de aleatoriedad.

Con respecto a los resultados obtenidos con el estudio de caso, el trabajo permitió dar cuenta que las estudiantes con alto rendimiento en matemáticas (Caso 1) presentan más disposición a entender la naturaleza de los fenómenos aleatorios y a analizar las características de estos fenómenos, mientras que las estudiantes correspondientes al segundo Caso presentaron menor receptividad a las Situaciones a pesar de que cada una de las Situaciones proponía actividades diferentes.

La Situación correspondiente al juego Cada ficha en su lugar motivó el trabajo de ambos grupos (Caso 1 y Caso 2), sin embargo se pudo observar que las estudiantes del Caso 1 además de divertirse con el juego también buscaban cumplir las reglas que allí se presentaban, y aportaban ideas acerca del tema tratado durante la socialización, mientras que las estudiantes del Caso 2 participaban del juego pero cuando se les solicitaba el aporte sobre el trabajo realizado no mostraban mayor profundidad en sus opiniones.

Un aspecto que se destaca en las estudiantes que conforman el Caso 1 es la facilidad para expresar opiniones y ejemplos fuera de lo común, esta habilidad que relaciona la imaginación con la libertad para expresarse, marca la diferencia en el proceso generador de nuevos conocimientos y a la par contribuye a que las demás compañeras se concentraran en el momento del análisis.

El aprovechamiento de esta habilidad contribuyó a que de forma general se lograra afianzar los propósitos de cada Situación, ya que la comunicación era uno de los recursos más importantes que se tenía para validar las estrategias de solución a los problemas y para reorientar aquellas ideas que no se enfocaban a lo que se quería llegar.

La implementación de la TSD como referente de la propuesta educativa potenció los recursos a disposición, a partir de la coherencia de este enfoque con la propuesta del MEN que trata el desarrollo de pensamiento aleatorio, ya que considera que el estudiante aprende por medio de la experiencia, de la interacción con un medio que le ofrece resistencia y a partir del cual el estudiante deberá proponer estrategias de solución en aras de propiciar el funcionamiento del proceso educativo.

Esto fue apropiado para la enseñanza de la noción de aleatoriedad pues confluyó la TSD con la naturaleza experimental y vivencial que representa la idea de aleatoriedad, permitiendo así encausar la propuesta y plasmar la naturalidad de los fenómenos aleatorios y el enfoque práctico que establece la TSD.

Uno de los elementos fundamentales de la propuesta educativa enmarcada desde la TSD corresponde al medio definido por el docente, este fue un elemento que generó mucha atención en el momento de su planteamiento pues debía que retomar los resultados del análisis de la prueba diagnóstica para fortalecer las debilidades que aquí se presentaban, con esto se generó una SD que en términos generales cumplió el propósito que era el de mostrar a las estudiantes la naturaleza no determinista de los fenómenos aleatorios y en el acto estudiar algunas de las características de los fenómenos aleatorios.

En las tres Situaciones se optó por un contexto que fuera cotidiano para la estudiante y a la vez llamativo, es así como se pensó en una situación que ha representado un problema común para la comunidad educativa y de la cual se podía sacar provecho en esta propuesta, esto fue un recurso que permitió profundizar en el estudio de los fenómenos no deterministas y destacar las características de los fenómenos aleatorios.

Al tomar los recursos a disposición y plantearlos de acuerdo a la TSD se pudo observar que el medio cumplió el propósito de facilitar y orientar el objetivo de la propuesta educativa, ya que la mayoría de las estudiantes mostraron compromiso con el trabajo y se observó que las Situaciones tenían un nivel adecuado para el grado y la edad de las estudiantes.

De forma general se observa que las Situaciones cumplieron el propósito de permitir la retroacción durante su ejecución, lo cual es una condición que Brousseau establece para valorar la pertinencia de la propuesta educativa. La retroacción se valoró de acuerdo a las siguientes dos condiciones: que el estudiante convocado a aprender se ubique en una posición de producción, y que el problema y el modo de plantearlo ofrezcan la posibilidad de que el sujeto valide sus acciones. (Zadovsky, 2005, p. 5)

La validación de las estrategias en las tres Situaciones considera un hecho interesante sobre cuál debía ser la estrategia óptima, al final ninguna de las estrategias de solución era óptima, sin embargo las estudiantes de entrada pensaban que había una estrategia óptima que debían encontrar y a medida que iban agotando las posibles estrategias se analizaba como poder llegar a resolver una situación que busca predecir un fenómeno no determinista.

Un aspecto que muestra relación con el trasiego histórico fue el hecho del arraigo al pensamiento determinista, parece que desde pequeños somos formados para asumir que no hay nada que sea irresoluble, que podemos conocerlo todo, que todo puede ser descubierto. En este sentido se observó una tendencia que resulta difícil de romper, el arraigo a pensar que se puede conocer las causas de un fenómeno aleatorio.

Haciendo una comparación con los hechos históricos se puede observar que la percepción sobre la aleatoriedad difiere en cada sujeto, que es subjetiva, esto depende de aspectos socioculturales, ya que en algunos casos la mente se permea por las costumbres del entorno, esto se pudo observar en las estudiantes cuando expresaban algunas señales que eran consideradas por sus abuelos o por sus padres para saber con anticipación si iba a llover horas más tarde.

Como se pudo constatar en el recorrido histórico, la enseñanza del significado de aleatoriedad adquiere significado cuando se presenta relacionada ya sea con un fenómeno aleatorio o con un experimento aleatorio del contexto cotidiano de los estudiantes, no de forma desligada y como una idea general definida. Igualmente que los estudiantes durante el trabajo práctico puedan socializar sus concepciones al respecto y estas sean tomadas como referencia por el docente.

Se logró fortalecer la secuencia didáctica a partir de dos aspectos: primero, el planteamiento se realizó teniendo en cuenta las concepciones que presentaban las estudiantes sobre la noción de aleatoriedad, y segundo, un contexto cotidiano para las estudiantes que implicaba el fenómeno aleatorio correspondiente a la lluvia. Estos dos aspectos permitieron establecer relación entre la prueba diagnóstica y la secuencia didáctica, logrando detallar porque algunas estudiantes habían contestado de forma inesperada ciertas preguntas de la prueba diagnóstica y al respecto, que preguntas hacerles para replantear aquellas concepciones que implícitamente conllevaban a hacerlo.

Este material educativo podría ser utilizado en instituciones educativas de contextos similares, para iniciar o fortalecer la formación de la noción de aleatoriedad, ya que las situaciones que conforman la secuencia didáctica no generan ambigüedades o vacíos por desconocimientos.

Es recomendable que a partir de los resultados de la prueba diagnóstica se orienten las preguntas, ya que los resultados en muchos casos son inesperados y el entorno sociocultural de los estudiantes puede contribuir a estas diferencias.

La prueba diagnóstica podría ser adaptada y mejorada, ya que puede presentar un nivel alto de complejidad debido a que los dispositivos que allí se mencionan no son muy conocidos, en especial el de los canales.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C, (2001a). Aleatoriedad, modelización, simulación. Zaragoza, España: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C, (2001b). Didáctica de la Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada, España: Universidad de Granada.

Batanero, C., Serrano, L (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 5, 15-28. MEC. Madrid.

Bennett, D. (1998). Aleatoriedad. (Gonzales, F – Marcilla, F, Trad). Madrid, España. Editorial Alianza.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (1999). Educación y Didáctica de las Matemáticas. Educación Matemática. México, noviembre de 1999.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas. (Fregona, D, Trad). Buenos Aires, Argentina. Libros del Zoral.

Castañó, M. (2013). *Diseño de una unidad didáctica para el desarrollo del pensamiento probabilístico, que favorezca un aprendizaje significativo en los estudiantes del grado 5º3 de la I.E El pedregal del municipio de Medellín*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia: Medellín, Colombia.

Calderón, P. (2013). *Desarrollo de estrategias metodológicas para mejorar el rendimiento académico en el área de estadística en temas relacionados con el concepto de probabilidad y de aleatoriedad en los estudiantes de quinto grado de básica primaria de la Institución*

Educativa el Salvador. Tesis de grado. Universidad Nacional de Colombia: Medellín, Colombia.

Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Didáctica de las Matemáticas. Madrid, España. Ed: Pearson Educación.

Green, D. R. (1982). Probability concepts in school pupils aged 11 - 16 years. A Doctoral Thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the award of the degree of Doctor of Philosophy of the Loughborough University of Technology. Loughborough University.

Green, D. R. (1989). La comprensión de la aleatoriedad por los alumnos escolares, En: *Estadística en la educación primaria*. Estudios en educación matemática. Unesco, 7, 27 - 39.

Kiburg, H. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Boston: Reidel.

Montoya, E., Londoño, D. (2011). *Azar, aleatoriedad y probabilidad: Significados personales en estudiantes de educación media*. Tesis de maestría. Universidad de Manizales: Manizales, Colombia.

MEN, (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas*. Colombia, Santafé de Bogotá, Colombia: MEN

MEN, (2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas*. Santafé de Bogotá, Colombia: MEN

NCTM. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, Va; Concejo Nacional de Profesores de Matemática.

Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB (1ª Ed). Buenos Aires, Argentina. Ed: Paidós.

SISTEMA INSTITUCIONAL DE EVALUACIÓN ESCOLAR, Institución Educativa San Vicente. 2015

Vásquez, C., Alsina., A. (2014). *Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado*, En: NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas Vol 85. Tenerife, España.

Zadovsky, P. (2005). *La Teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires, Argentina. Libros del Zoral.

Zamora, V. (2014). *Desarrollo de la intuición probabilística en la educación primaria*. Tesis de maestría. Universidad de Valladolid: Palencia, España.

ANEXOS

Anexo 1. Prueba diagnóstica de la noción de aleatoriedad.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

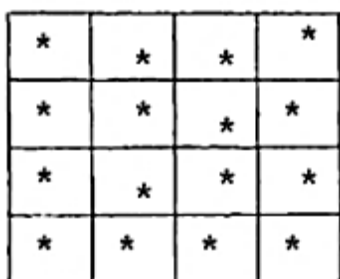
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CUESTIONARIO PARA EL DIAGNÓSTICO DE LA NOCIÓN DE ALEATORIEDAD EN ESTUDIANTES DE GRADO CUARTO DE PRIMARIA

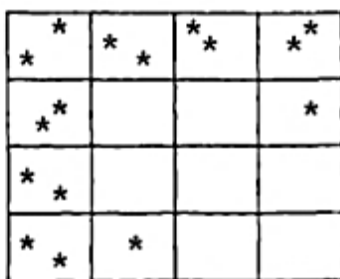
El siguiente cuestionario se basa en el propuesto por el profesor David Green en la tesis doctoral: Probability concepts in school pupils aged 11 - 16 years.

1. El patio de una casa tiene 16 baldosas cuadradas. Comienza a lloviznar. Después de un rato un total de 16 gotas de agua han caído en el patio. En las tres figuras siguientes se muestra las gotas con un asterisco *

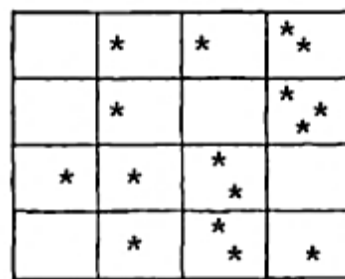
¿Qué figura muestra mejor la distribución de las gotas de agua sobre el patio?



(1)



(2)



(3)

Justifica tu respuesta:

2. Al hacer girar cualquiera de las dos ruletas que aparecen en la figura, puede resultar que caiga un número uno o un número dos. En un concurso en el que se va a utilizar una de las dos ruletas, si haces girar la ruleta y cae el número uno ganas un premio, pero si cae un dos no ganas nada.

¿Cuál de las dos ruletas (Ruleta roja o Ruleta amarilla) crees que da mayor posibilidad de obtener un 1 cuando la ruleta se detenga?

¿Por qué?

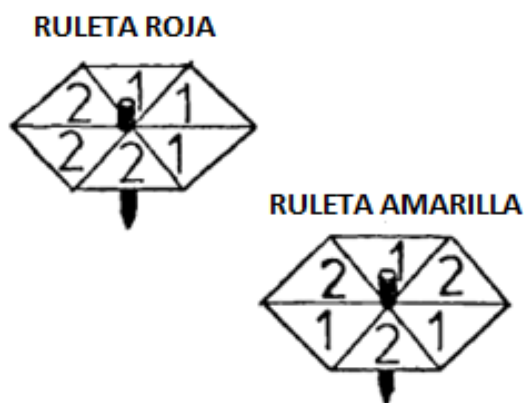


Figura 12. Lanzamientos de ruletas roja y amarilla.
Fuente: Green (1982)

3. En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar y pregunta a sus alumnos: ¿Qué es más probable que suceda?

Coloca una X al frente de la afirmación que consideres la más apropiada.

- a) Es más probable que salga el nombre de un niño que el de una niña ()
- b) Es más probable que salga el nombre de una niña que el de un niño ()
- c) Hay la misma probabilidad de que salga el nombre de un niño o el de una niña ()
4. Una canica cae por un canal y llega a un cruce. A continuación, va a la izquierda o a la derecha, y desciende a 1 ó 2 (véase imagen)
- a) Si deajo caer una canica por el canal, ¿va a ir a 1 o 2?
- b) Si deajo caer la canica muchas veces por el canal ¿qué ocurrirá?

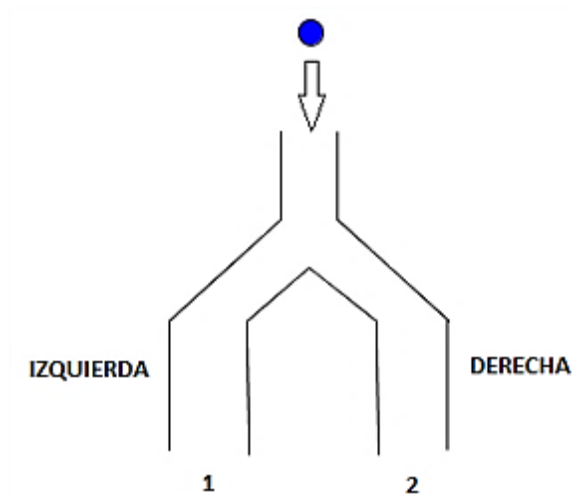


Figura 13. Canal con dos bifurcaciones
Fuente: Green (1982)

Para cada uno de los canales dibujados a continuación, si una gran cantidad de canicas son dejadas caer en cada uno de ellos, ¿Qué cantidad de canicas van a terminar en cada salida?
 Explica:

NOTA. A pesar de que los canales puedan parecer angostos, la canica puede pasar por los canales.

Después de cada caída el canal que se dirige a la izquierda y el que se dirige a la derecha tienen la misma forma y el mismo tamaño.

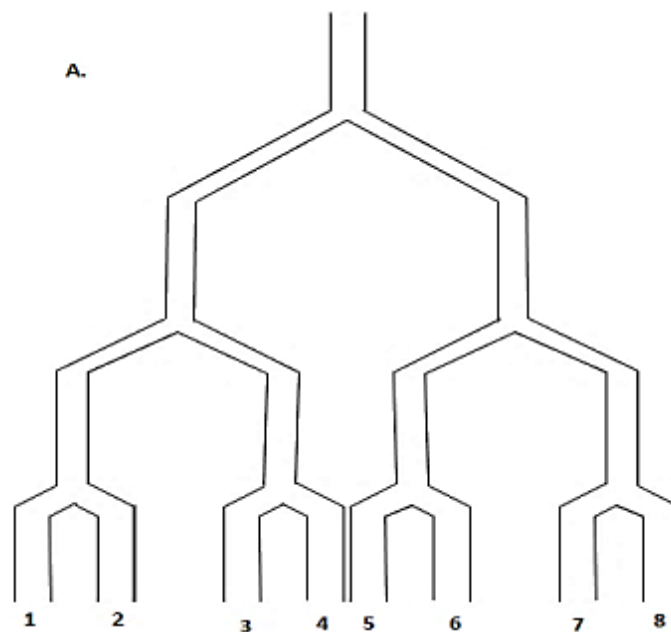


Figura 14. Canal con ocho salidas.

Fuente: Green (1982)

- A. En cada salida habrá igual cantidad de canicas. ()
- B. En la salida 1 y en la 8 resultarán más canicas que en el resto de salidas. ()
- C. En las salidas 1, 4, 5 y 8 resultarán más canicas que en las salidas 2,3,6 y 7. ()
- D. No lo sé. ()

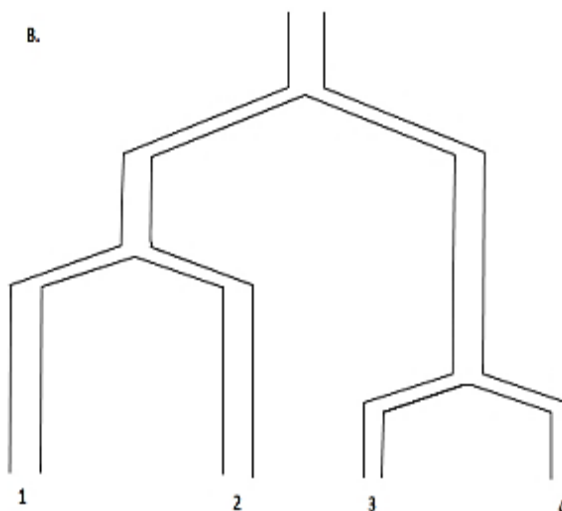


Figura 15. Canal con cuatro salidas.

Fuente: Green (1982)

- A. En cada salida llegarán igual cantidad de canicas. ()
- B. Llegarán más canicas a las salidas 1 y 4 que a las salidas 2 y 3. ()
- C. Llegarán más canicas a las salidas 1 y 2 que a las salidas 3 y 4. ()
- D. No lo sé. ()

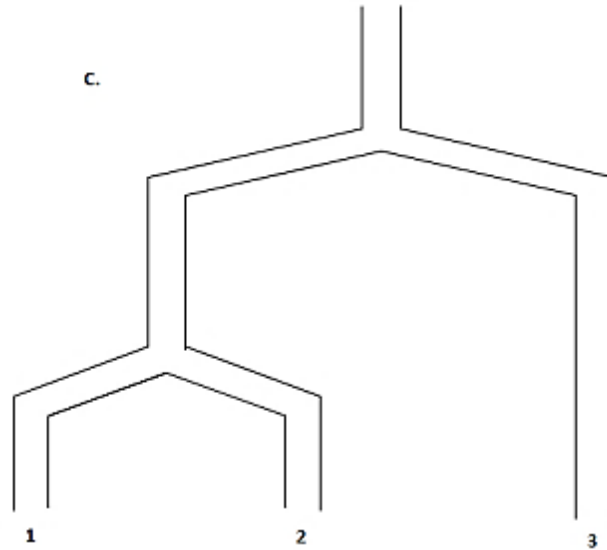


Figura 16. Canal con tres salidas.
Fuente: Green (1982)

- A. Llegarán más canicas a la salida 3 que a las salidas 1 o 2. ()
- B. Llegaran más canicas a las salidas 1 o 2, y pocas canicas a la salida 3. ()
- C. Llegarán igual cantidad de canicas a las salidas 1 y 3, y pocas a la salida 2. ()
- D. No lo sé. ()

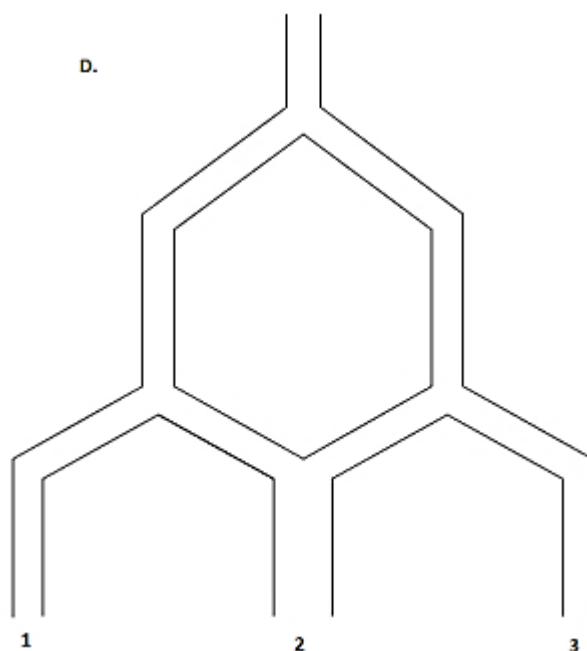


Figura 17. Canal con tres salidas.
Fuente: Green (1982)

- A. En cada salida llegarán igual cantidad de canicas. ()
- B. Llegarán más canicas a la salida 2 que a las salidas 1 y 3. ()
- C. Llegarán más canicas a las salidas 1 y 3 que a la salida 2. ()
- D. No lo sé. ()

¿Por qué?

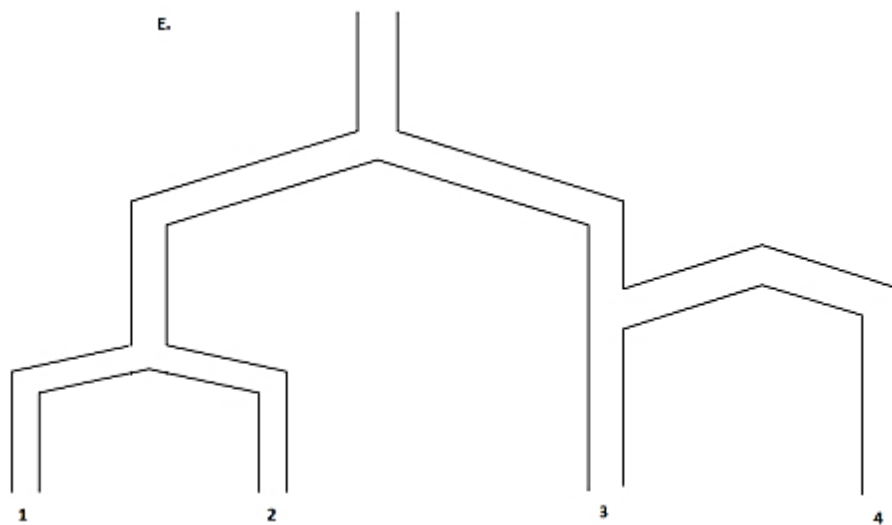


Figura 18. Canal con cuatro salidas.
Fuente: Green (1982)

5. Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados:

Cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello.

Si lanza la moneda por novena vez, ¿Qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Explique:

6. Dos urnas contienen algunas balotas de color negro y otras balotas de color blanco.

La urna A contiene: 1 balota blanca y 2 balotas negras.

La urna B contiene: 5 balotas blancas y 2 balotas negras.



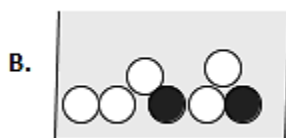


Figura 19. Urnas con balotas.

Fuente: Green (1982)

John tiene que elegir una de las urnas y sacar una balota sin mirar. Si él saca una balota blanca gana un premio. ¿Cuál urna le da a John la mayor oportunidad de sacar una balota blanca?

b) Otras dos urnas también tienen balotas blancas y negras:

La urna C contiene: 2 balotas blancas y 2 balotas negras.

La urna D contiene: 4 balotas blancas y 4 balotas negras.

¿Qué urna da una mayor oportunidad de sacar una balota blanca?

¿Por qué?

c) Otras dos urnas también contienen balotas blancas y negras:

La urna E contiene: 3 balotas blancas y 1 balota negra.

La urna F contiene: 3 balotas blancas y 2 balotas negras.

¿Qué urna da una mayor oportunidad de sacar una balota blanca?

¿Por qué?

d) Otras dos urnas contienen balotas blancas y negras:

La urna G contiene: 12 balotas blancas y 4 balotas negras.

La urna H contiene: 20 balotas blancas y 10 balotas negras.

¿Qué urna da una mayor oportunidad de sacar una balota blanca?

¿Por qué?
