

Los conflictos cognitivos en la construcción del concepto de continuo

Andrés de la Torre Gómez

Resumen

En este artículo proponemos, como hipótesis de trabajo, una clasificación de los principales conflictos cognitivos que deben ser superados por el aprendiz en su construcción del concepto de continuo. Específicamente, la identificación de los obstáculos epistemológicos se basa en el escrutinio histórico de las nociones de continuidad, infinito e infinitesimal. Con el fin de esclarecer el marco teórico de la investigación, exponemos de manera sucinta, por un lado, la concepción constructivista del aprendizaje y el papel que en ella juegan los conflictos cognitivos, y, por otro lado, la noción de obstáculo epistemológico y su aplicación al proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis matemático. El informe hace parte de una investigación que comienza con la detección de los conflictos cognitivos y debe llegar hasta la elaboración final de una estrategia docente y unas propuestas metodológicas que le sirvan de soporte al aprendiz.

Palabras y frases claves: Teoría constructivista, conflicto cognitivo, obstáculo epistemológico, concepciones espontáneas, continuo, infinito, infinitesimal.

1 La concepción constructivista del aprendizaje

Hemos resaltado, en otro lugar, el papel protagónico desempeñado en la Psicología experimental del siglo XX por la concepción “genética” de Jean Piaget, quien concentró sus investigaciones, durante largo tiempo, en las funciones cognitivas y en el desarrollo de los procesos sensorimotores, perceptuales e intelectuales del niño. ([7.], p. 118)

De acuerdo con Piaget, el desarrollo cognitivo del niño se da a través de una secuencia de cuatro fases de equilibrio, cada una de las cuales representa una etapa de maduración mayor que la inmediatamente anterior. El objetivo buscado por el sujeto es la adaptación inteligente al entorno, marcada por el equilibrio cada vez más completo entre los distintos procesos psicológicos.

El proceso de la percepción, por ejemplo, está cargado de factores amenazantes y de impedimentos, particularmente la distorsión, la inestabilidad y la ilusión: El niño atempera estas dificultades apelando, inicialmente, a la recopilación sistemática y a la comparación de informaciones

provenientes de distintas fuentes. La adquisición gradual del pensamiento lógico le permite ascender a niveles cada vez más altos de objetividad y coherencia, hasta llegar finalmente, en la adolescencia, al razonamiento científico formal.

Dos de las nociones más fértiles introducidas por Piaget son la asimilación y el acomodamiento, íntimamente asociadas con los conflictos cognitivos que se presentan en los períodos de transición entre una fase dada y la siguiente. Durante la transición pueden entrar en conflicto los elementos de un conocimiento nuevo con la experiencia de las ideas previamente adquiridas. El término asimilación denomina el proceso por el cual el individuo toma nuevos datos, y la palabra acomodamiento describe el proceso por el cual la estructura cognitiva del individuo entra en crisis y se ve forzada a una modificación. El acomodamiento, complementario de la asimilación, lleva consigo, con frecuencia, un proceso de auténtica reconstrucción mental.

Es esencial a la concepción piagetiana su insistencia en que las operaciones de tipo simbólico que participan en el pensamiento tienen su origen en las interacciones concretas con los objetos. Dichas operaciones se organizan en sistemas, los cuales obedecen a ciertas reglas que aseguran el mantenimiento de su estructura y, por lo tanto, la confiabilidad del pensamiento.

En su intervención ante el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática, en 1973, Piaget planteó de nuevo el tema de la existencia de una “lógica de la acción”, que le permite al sujeto llegar a construir ciertas identidades que van mas allá de la percepción, como, por ejemplo, la permanencia de un objeto escondido, e incluso a elaborar determinadas estructuras, como en el caso del grupo de los desplazamientos prácticos.

En su discurso, Piaget afirmó lo siguiente:

“ De lo anterior, se deduce que, aun en lo que se refiere a la pedagogía de la matemática, caeríamos en un grave error si, limitándonos al plano del lenguaje, dejásemos de lado el papel de las acciones. Por el contrario, en los alumnos jóvenes la acción sobre los objetos resulta totalmente indispensable para la comprensión, no sólo de las relaciones aritméticas, sino también de las geométricas (como sucedía en el caso de la matemática empírica de los egipcios). ” ([19.], p. 220)

Piaget llamó la atención de los pedagogos de la matemática, en múltiples oportunidades, respecto de los conflictos provocados por una formalización prematura, que se dan, por ejemplo, cuando el maestro intenta presentar las nociones y las operaciones correspondientes en una

forma estrictamente axiomatizada, sin consideración por el nivel de desarrollo alcanzado por el alumno. Acerca de los peligros de la axiomatización prematura escribió lo siguiente:

“Dicho de otro modo, se puede confundir la iniciación a las matemáticas modernas con el entrar de lleno en sus axiomáticas. En efecto, lo único que se puede axiomatizar son los datos intuitivos previos, y, desde un punto de vista psicológico, una axiomática solo tiene sentido en tanto que supone una toma de conciencia o una reflexión retroactiva, lo que implica toda una construcción proactiva anterior. El niño -desde los 7 años- y el adolescente manipulan continuamente operaciones de conjuntos, de grupos, de espacio vectorial, etc., pero sin ser en absoluto conscientes de ello, puesto que se trata de esquemas fundamentales de comportamiento - y, después, de razonamiento -antes de poder llegar a convertirse en objetos de reflexión. Se hace pues indispensable toda una gradación para poder pasar de la acción al pensamiento representativo, y una serie no menos larga de transiciones para pasar del pensamiento operatorio a la reflexión sobre dicho pensamiento; el último escalón es entonces el paso de esta reflexión a la axiomática propiamente dicha. La construcción matemática procede mediante abstracciones reflexivas (en el doble sentido de una proyección sobre nuevos planos y de una reconstrucción permanente que precede las nuevas construcciones) y, precisamente, muchos ensayos educativos apresurados pretenden prescindir de este proceso fundamental, olvidando que toda abstracción procede a partir de estructuras más concretas. Pero, si se consigue poner de acuerdo las matemáticas modernas y los datos psicológicos, la pedagogía tiene ante sí un porvenir luminoso. ” ([19.], p. 185)

Los trabajos de Tall, Vinner y Hershkowitz, acerca de las nociones de concepto-imagen y concepto-definición, permitieron comprender con mayor claridad que una cosa es la matemática considerada como un sistema formal y otra es esa misma ciencia cuando se la toma como una actividad mental realizada por un individuo. Las investigaciones iniciales, emprendidas desde los comienzos de la década de 1980, se relacionaban con cuestiones geométricas, pero fueron el punto de partida para estudios similares en otras áreas de la matemática, por ejemplo, en relación con el concepto de límite, el de continuidad de una función de una variable e, inclusive, el de función.

El concepto-definición es la definición matemática presentada con todo el aparato formal. El concepto-imagen es la estructura cognitiva total que el aprendiz asocia con la definición formal. Dicha estructura está formada por todas las representaciones mentales, las propiedades,

los procesos, los ejemplos, los contraejemplos, las relaciones, etc., asociadas con el concepto - definición. Se trata de una estructura dinámica, construida por el aprendiz a través de múltiples experiencias y durante largos períodos de tiempo. De esta manera, el concepto - imagen desarrollado por un individuo puede contener concepciones diferentes e inclusive antagónicas que, al ser activadas en momentos diferentes, no llegan a la conciencia simultáneamente. El conflicto cognitivo aflorará, sin embargo, cuando esas concepciones sean evocadas al mismo tiempo en la mente del individuo. [27.]

2 Los tipos de conflictos cognitivos

El estudio de los conflictos cognitivos ayuda a precisar la naturaleza de las dificultades encontradas por el alumno en su proceso de aprendizaje y a elaborar mejores estrategias para la enseñanza. Algunos de estos impedimentos, de tipo psicológico y genético, se relacionan con el desarrollo personal del alumno. Otros, de tipo didáctico, tienen que ver con el profesor ó con los medios y métodos de la enseñanza. Un tercer grupo está constituido por los obstáculos epistemológicos, que se deben a la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos. Lugar aparte entre los conflictos cognitivos ocupan aquellos provenientes de las concepciones espontáneas.

2.1 Los obstáculos Epistemológicos

La noción de obstáculo epistemológico fue introducida por G. Bachelard en su libro *La Formación del Espíritu Científico*, de 1938. Escribió Bachelard:

“Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos”. ([1.], p. 15)

De acuerdo con esta concepción, los obstáculos epistemológicos son inevitables y deben ser enfrentados conscientemente para poder progresar en el razonamiento matemático.

En el mismo texto, escribió también Bachelard:

“La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación”. ([1.], p. 19)

Esta afirmación de Bachelard puede interpretarse, en su sentido más general, como un reconocimiento de la importancia pedagógica que entraña el escrutinio histórico de las ideas matemáticas. En efecto, puede observarse con frecuencia que muchas de las intuiciones primarias experimentadas por los estudiantes con respecto a un concepto matemático se asemejan a aquellas que aparecen en las etapas tempranas del desarrollo histórico del concepto. Véanse como testimonios positivos al respecto, los estudios de A. Sierpinska [25.] y de B. Cornu sobre la noción de límite ([26.], ch. 10), así como el de D. Tirosch sobre la comparación de conjuntos infinitos ([26.], ch. 12). En ellos, es notorio el paralelismo entre el desarrollo histórico de la especie y el del individuo, es decir, entre la filogenia y la ontogenia. Puede esperarse, en consecuencia, que el estudio de las condiciones históricas bajo las cuales se reconoció y se superó un determinado obstáculo en el pasado arroje luces sobre un obstáculo análogo manifestado hoy día por los alumnos, en su aprendizaje del concepto.

En 1983, B. Cornu publicó su tesis doctoral acerca del aprendizaje del concepto de límite. Allí, analizó la noción de obstáculo en los siguientes términos:

“Un obstáculo es una pieza de conocimiento; es una parte del conocimiento del alumno. En otra época, este conocimiento era generalmente satisfactorio en la solución de ciertos problemas. Es precisamente este aspecto satisfactorio el que ha convertido el concepto en un obstáculo, anclándolo en la mente. Más adelante, cuando este conocimiento es enfrentado con nuevos problemas, se muestra que es inadecuado, pero esta falta de adecuación puede no ser obvia”. ([26.], p. 9).

G. Brousseau trazó un programa de investigaciones cuyo propósito era, por un lado, identificar los obstáculos epistemológicos conectados con las matemáticas que se enseñaban en la escuela secundaria y, por otro, elaborar los medios didácticos adecuados para que los alumnos pudieran superar dichos obstáculos. Para este autor, un obstáculo epistemológico está constituido por aquellos conocimientos que deben su solidez al hecho de funcionar bien en ciertos dominios de la actividad pero que se muestran insuficientes y conducen a contradicciones cuando se los aplica con otros contextos. Es necesaria, entonces, una reconstrucción cognitiva, mediante la cual el alumno destruya el viejo conocimiento y lo trans-

forme en un concepto nuevo que sea satisfactorio para el nuevo ámbito de aplicación. [3.]

La concepción de que el aprendizaje de un concepto matemático exige que el alumno enfrente y supere los obstáculos epistemológicos propios de ese concepto se vio corroborada por el trabajo de Davis y Vinner. Estos autores mostraron que en el aprendizaje del concepto de límite hay algunas etapas, aparentemente ineludibles, en las cuales el estudiante comete inevitablemente cierto tipo de equivocaciones. [5.]

La noción de obstáculo epistemológico es contemporánea, como hemos visto, pero tiene un antecedente claro en la mayéutica socrática, tal como ésta se perfila en los *Diálogos* de Platón. En otro lugar, hemos resaltado la importancia pedagógica del entorpecimiento o “adormecimiento” en el *Menón* y la forma como Sócrates lo compara con el efecto provocado en la víctima por las descargas eléctricas del pez torpedo ([7.], p. 129)

Aunque Bachelard se refirió a la enseñanza de las ciencias naturales, su crítica es válida también en lo que se refiere a las matemáticas. Cornu se ocupó de esa gama de “intuiciones básicas” mencionadas por Bachelard, con las que el alumno inicia su participación en la clase, y les dio el nombre de “concepciones espontáneas”. ([26.], p. 154)

El alumno forma sus concepciones personales a medida que va modificando aquellas intuiciones básicas para adaptarlas a los nuevos conocimientos. De esta manera, las concepciones espontáneas pueden continuar en la mente del alumno incluso en las etapas más avanzadas del conocimiento formal y contribuir, en múltiples ocasiones, a la acumulación de diversos factores cognitivos, potencialmente conflictivos, relativos a un mismo concepto matemático.

3 Los conflictos cognitivos relativos al concepto continuo

En otro lugar, hemos analizado las relaciones entre el concepto de continuo matemático y la imagen intuitiva de lo continuo [8.]. Nuestras sensaciones y percepciones, en efecto, nos llevan a afirmar con naturalidad que el movimiento, el tiempo y el espacio físicos son continuos, en el sentido de que están compuestos de partes unidas entre sí, sin ningún tipo de lapsos que separen a unas de otras. Aristóteles estudió exhaustivamente la estructura de este continuo de nuestras intuiciones.

Presentamos allí las concepciones pitagórica, aristotélica y euclidiana del continuo junto con la problemática planteada por las paradojas de Zenón, así como la superación de estas dificultades a la luz de la teoría cantoriana de las clases infinitas. Resaltamos asimismo los impedimentos que tuvieron que ser superados en el desarrollo histórico de las ideas antes

de que se llegara a la versión moderna del concepto de continuo, dada por Dedekind. [8.]

El escrutinio histórico y epistemológico arroja luces sobre las dificultades que se presentan en la mente del aprendiz y que se oponen al cabal entendimiento del continuo, sugiriendo algunas hipótesis acerca de los distintos tipos de impedimentos cognitivos en el proceso de construcción del concepto. Los clasificamos en cuatro grupos, a saber: (1) los impedimentos psicológicos, (2) las concepciones espontáneas, (3) los obstáculos epistemológicos y (4) los impedimentos didácticos en el maestro.

3.2 Los impedimentos psicológicos

Se relacionan con el desarrollo psicológico del sujeto. Encontramos cuatro obstáculos de este tipo, los dos primeros relativos a la modelización del espacio y del tiempo como un continuo y los otros dos a la percepción del infinito.

a) El modelo matemático y la experiencia modelizada no gozan de las mismas propiedades

El modelo matemático del espacio y el tiempo es el continuo geométrico, que es infinito, homogéneo e isotrópico. La homogeneidad del continuo consiste en que todos sus puntos son idénticos y la isotropía en que no hay en él ninguna dirección privilegiada.

En el caso del espacio, lo modelizado es aquella armazón sobre la cual descansan nuestras sensaciones y representaciones a la que H. Poincaré denominó "espacio representativo". ([21.], p. 52). Pero, si analizamos la simple impresión puramente visual producida por una imagen que se forma en el fondo de la retina, podremos concluir que el espacio representativo no es ni infinito ni homogéneo. En efecto, la imagen está encerrada en un marco limitado y, además, los puntos cercanos al centro de este marco no nos parecen idénticos a los puntos situados en el borde.

El tiempo, por otro lado, es percibido a través de la experiencia común como un flujo irreversible hacia el futuro, es decir, dotado de una dirección privilegiada. Así, el tiempo de nuestras sensaciones y representaciones no es isotrópico.

b) El presente sensible tiene duración

El mayor obstáculo psicológico para la modelización matemática del tiempo proviene de que el momento estrictamente presente no es sensorialmente captable en la experiencia inmediata del hombre. W. James se refirió a este presente estricto en los siguientes términos:

“Trátase, en realidad, de una abstracción jamás realizada por los sentidos y probablemente nunca concebida por los no acostumbrados a la meditación filosófica. La reflexión nos lleva a la conclusión de que debe existir, pero jamás puede ser un hecho de nuestra experiencia inmediata. El único hecho de nuestra experiencia inmediata, lo que ha sido llamado el presente “especioso”, es algo así como una especie de silla dispuesta a horcajadas sobre el tiempo, con cierta duración propia, sobre la cual vamos cabalgando y desde la cual contemplamos el tiempo en dos direcciones. La unidad de composición de nuestra percepción de tiempo es una duración con una proa y una popa, como si existiesen un término de visión hacia retaguardia y otro a vanguardia”. ([16.], p. 349)

c) La experiencia cotidiana se refiere siempre a lo finito

La experiencia cotidiana de los alumnos en la vida real se refiere a objetos finitos y a eventos finitos, la cual explica que sus esquemas mentales sean naturalmente finitistas. La capacidad de estos esquemas intelectuales de resistir a los efectos de la edad y de la instrucción escolar ha sido estudiada en distintas oportunidades ([13.], [17.], [28.]). Tirosh caracterizó dicha capacidad de resistencia en los siguientes términos:

“Esto significa que aquello que consideramos como autoevidente con respecto a la magnitud de los conjuntos infinitos permanece inalterado, en su mayor parte, desde la edad de 12 años y que estas intuiciones no se ven afectadas por el entrenamiento matemático regular - entrenamiento que fortalece los esquemas lógicos genuinamente finitistas”. ([26.], p. 201)

Tirosh observó, también, que esta tendencia a trasladar las propiedades de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos es una de las fuentes principales de los conflictos entre las creencias intuitivas y la teoría cantoriana del infinito actual.

d) La intuición del infinito como lo indefinidamente contable

Que los niños manifiestan un sentido del número y aprenden a contar desde muy pequeños es un hecho corroborado por los estudios más recientes de S. Dehaene, publicados en 1997. Estableció este investigador que, por lo menos desde los 6 meses de edad, los niños dan muestras de estar dotados de un acumulador numérico rudimentario que los capacita para reconocer números pequeños de objetos o de sonidos. Los niños de esa edad discriminan los números 1, 2 y 3 y son capaces de combinarlos mediante operaciones elementales de adición y sustracción. Después, adquieren la noción concreta de la cadena “1, 2, 3, 4 y así sucesivamente”, percibiendo de esa manera la posibilidad de continuar contando indefinidamente.

Acerca de los axiomas formales de Peano, escribió Dehaene lo siguiente:

“Estos axiomas pueden parecer complejos y gratuitos. Todo lo que hacen, sin embargo, es formalizar la muy concreta noción de la cadena 1, 2, 3, 4 y así sucesivamente. Ellos satisfacen nuestra intuición de que esta cadena no tiene fin: Todo número puede siempre ser sucedido por otro número que es distinto de todos los precedentes”. ([10.], p. 238)

Esta representación intuitiva de lo infinito como lo que puede contarse indefinidamente lleva a muchos a creer que las colecciones infinitas son siempre enumerables y que en todas ellas hay la misma cantidad de términos, creencia que choca con la teoría de los números cardinales transfinitos.

3.3 Las concepciones espontáneas

Se presentan en el alumno como verbalizaciones recurrentes, empleadas muchas veces de manera inconsciente. Encontramos las dos siguientes:

a) La validez axiomática del principio “parte-todo”

Es frecuente que los alumnos acudan a este principio y que lo enuncien en la forma “el todo siempre es mayor que cualquiera de sus partes”, con una formulación semejante a la dada por Euclides. Los estudios de Tirosh muestran que esta creencia se encuentra profundamente arraigada en las mentes de los alumnos y les inspira un alto grado de confianza. ([26.], p. 204)

Los argumentos basados en el principio “parte-todo” se presentan en múltiples razonamientos, a veces ligeramente ocultos o disfrazados, por ejemplo, en la perplejidad manifestada por Cantor cuando encontró la equipotencia de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$), descubrimiento que contradecía arraigadas convicciones relativas a la dimensión. Cantor se sintió sorprendido, a pesar de que mucho antes de este hallazgo había encontrado que la recta indefinida es equipotente con el segmento.

b) La incomparabilidad de dos conjuntos infinitos

Muchos alumnos sostienen que si dos conjuntos son infinitos tienen números infinitos de elementos y por tanto no es posible afirmar que uno de ellos es mayor o menor que el otro, ni siquiera que los dos son iguales, precisamente porque son infinitos. Este punto de vista coincide con el de Galileo, quien presenta la equipotencia $n \leftrightarrow n^2$ precisamente para mostrar las paradojas a que se puede llegar cuando se intenta comparar conjuntos infinitos. Dice Galileo:

“SALVIATI. Estas dificultades son de las que derivan del modo que tenemos nosotros de discurrir con nuestro entendimiento finito acerca de los infinitos, asignándoles aquellos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas; lo que reputo inconveniente, porque juzgo que estos atributos de prevalencia (maggioranza), subvalencia (minorità) e igualdad (egualità) no convienen a los infinitos, de los cuales no se puede decir que uno es mayor o menor o igual al otro. Para probarlo, se me ocurre un razonamiento que, para mayor claridad en su desarrollo, propondré en forma de preguntas a Simplicio, promotor de la dificultad. Supongo muy bien sabido de vosotros, cuales son los números cuadrados y cuales los no cuadrados”. ([14.], p. 57)

Más adelante, insiste Galileo por boca de nuevo de Salviati:

“SALVIATI. No veo que se pueda llegar a otra decisión, sino a decir que es infinita la totalidad de los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; y que la multitud de cuadrados no es menor que la de la totalidad de los números, ni ésta mayor que aquélla y en ultima instancia, que los atributos de “igual”, “mayor” y “menor”, no tienen lugar en los infinitos, sino sólo en las cantidades limitadas. Por ello, cuando Simplicio me propone varias líneas desiguales, y me pregunta cómo puede ser que no haya en las mayores más puntos que en las menores, yo le respondo que no hay más, ni menos, ni tantos, sino infinitos en cada una”. ([14.], p. 58)

3.4 Los obstáculos epistemológicos

Los obstáculos epistemológicos están concentrados en el concepto mismo de infinito. Hemos encontrado los siguientes:

a) La lucha de lo discreto contra lo continuo

El concepto de número se desarrolla en la mente del niño a partir del acto de contar. Para el niño, los números son los enteros - como lo fueron también para los pitagóricos en el alba de la matemática deductiva. Así, los números son una imagen de lo discreto. El intento de unir el número con la magnitud continua está preñado de dificultades, las cuales se manifiestan no sólo en el aprendiz sino también en el desarrollo histórico de las ideas matemáticas.

Nuestras intuiciones de la continuidad provienen fundamentalmente de la experiencia con las magnitudes espaciales y temporales y con el movimiento de los cuerpos en el espacio. Dichas intuiciones nos llevan a afirmar que si el móvil ha de pasar de una posición a otra entonces debe pasar por todas las posiciones intermedias, cada una de las cuales debe

ser ocupada en un momento definido. La propiedad esencial que reconocemos en este continuo de nuestras intuiciones es la de su divisibilidad ilimitada.

Euclides expuso en los *Elementos* la teoría de las magnitudes, que fue desarrollada por la matemática moderna hasta llegar a la caracterización plena de la continuidad por parte de R. Dedekind y K. Weierstrass. La equivalencia entre el continuo geométrico y el aritmético se logra estableciendo una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales que preserve la relación de orden. Una manera de establecer la correspondencia deseada es exigiendo que la diferencia entre dos números reales represente la longitud del segmento de recta cuyos extremos son los puntos que corresponden a los dos números.

La equivalencia así establecida entre el continuo geométrico y el aritmético implica que la recta está constituida por puntos, cada uno de los cuales es un elemento que no tiene magnitud. También conduce a la negación de la existencia de segmentos infinitesimales en la recta, así como en el sistema de los números reales la propiedad arquimediana garantiza que no existen los números infinitesimales. ([6.], p. 70)

Este punto de vista, sin embargo, es atacado por quienes afirman que la única manera en que podemos concebir el espacio como constituido de elementos es dotando a éstos de algunas características espaciales. Tales ataques han fructificado bajo la forma de diversas teorías en las que se concibe a los infinitesimales o a los indivisibles como componentes de la magnitud espacial, entre ellas la de Veronese. ([15.], p. 58)

b) En nuestra intuición, la línea es anterior a los puntos

Desde los griegos se planteó el problema matemático y filosófico de la relación entre un continuo y sus elementos. Aun cuando muchos filósofos llegaron a admitir que el continuo *contiene* elementos, otros opusieron la objeción de que aceptar esto no es equivalente a afirmar que el continuo está *compuesto* de elementos.

Aristóteles reconoció la existencia de elementos en el continuo y lo definió como aquella magnitud cuyas partes están unidas en un todo por límites comunes. Santo Tomás de Aquino señaló que es continuo el ente en el cual están contenidas muchas partes en una, y se mantienen simultáneamente. ([11.], entrada: *continuo*).

Ahora bien, el continuo espacial de nuestra concepción ordinaria es intuído inicialmente como un todo, por ejemplo, como un segmento rectilíneo y después imaginamos, por abstracción, que dicho todo contiene puntos. Así, en el proceso intuitivo la línea es anterior al punto. K. Gödel argumentó incluso que los puntos no bastan para producir aquella

línea que concebimos por medio de nuestra intuición espacial, pues *“de acuerdo con este concepto intuitivo, al sumar todos los puntos no obtenemos todavía la línea sino que, más bien, los puntos forman una especie de esqueleto de la línea”*. ([22.], p. 82)

Con respecto a la forma como intuimos el continuo temporal es necesario tener en cuenta los experimentos de Mach, Helmholtz y otros investigadores, los cuales sugieren que los espacios fisiológicos de la vista y el tacto son en sí mismos discontinuos. ([2.], p. 204). Esto contribuye a explicar nuestras dificultades para percibir el continuo temporal como compuesto de elementos, a los cuales quisiéramos poner en correspondencia con los puntos del segmento rectilíneo. W. James planteó este problema de la manera siguiente:

“No apreciamos primero un término y luego otro, infiriendo un intervalo de tiempo por la percepción de la sucesión, sino que nos parece sentir el intervalo como un todo con sus dos términos embebidos en él. La experiencia es, desde el principio, un dato sintético, no un dato simple, y para la percepción simple sus elementos son inseparables, aunque la atención, mirando atrás, puede fácilmente descomponer la experiencia y distinguir su principio de su fin”. ([16.], p. 350)

La teoría cantoriana, en cambio, concibe el continuo aritmético como un agregado ordenado de términos, en el cual éstos tienen la primacía sobre aquel. De esta manera, el análisis conjuntista del continuo entra en conflicto con nuestras concepciones iniciales de tipo intuitivo, para las cuales la línea es anterior al punto, así como el desplazamiento de un móvil en el espacio es percibido antes que las posiciones que ocupa en su movimiento y el periodo temporal es percibido como un todo anterior a los elementos que lo componen.

H. Poincaré observó con claridad la oposición entre el camino seguido por nuestra intuición y el concepto cantoriano del continuo aritmético, al cual se refirió de la manera siguiente:

“El continuo así concebido no es sino una colección de individuos dispuestos en un cierto orden, infinitos en número, es cierto, pero externos entre sí. Esta no es la concepción ordinaria, en la que se supone que hay entre los elementos del continuo una especie de vínculo íntimo que hace un todo de ellos, en el que el punto no es anterior a la línea, sino esta a aquel. De la fórmula [según la cual] el continuo es unidad de multiplicidad sólo subsiste la multiplicidad, la unidad ha desaparecido”. ([23.], p. 135)

En el transcurso de una investigación llevada a cabo recientemente en la Universidad Politécnica de Valencia, España, pudimos encontrar en los

alumnos este tipo de dificultades. Detectamos allí, en efecto, los niveles de razonamiento 1, 2 y 3, correspondientes al modelo de van Hiele, en el proceso de modelización matemática del espacio y del tiempo como un continuo, visualizado mediante la recta. De acuerdo con nuestros resultados, en el nivel 1 el alumno relaciona el segmento rectilíneo con el desplazamiento espacial de un móvil. Sin embargo, las asociaciones entre el punto y la posición espacial, o entre el punto y el instante, sólo quedan definitivamente establecidas en la transición del nivel 2 al nivel 3.

El alumno capta primero, de manera intuitiva, el período temporal y lo concibe después como un continuo geométrico. Finalmente, como consecuencia de lo anterior, construye la noción de instante con el propósito de que los instantes cumplan en el período temporal un rol similar al desempeñado por los puntos en el continuo lineal.

Un proceso análogo sigue el alumno con respecto al espacio: primero, concibe el desplazamiento como un segmento y, posteriormente, elabora la noción de posición espacial para ponerla en correspondencia con la de punto geométrico. ([7.], [9.]

c) La confluencia de lo infinito con lo indivisible

En el continuo geométrico confluyen lo infinito y lo indivisible. Cada uno de estos conceptos es altamente problemático de por sí; la unión de ellos sólo puede aumentar las dificultades, que se manifestaron entre los griegos a partir de la teoría del atomismo matemático. Cada alumno debe enfrentar, acerca de la confluencia de lo infinito con lo indivisible, obstáculos semejantes a los vividos por el pensamiento matemático a lo largo de su historia.

Con respecto a esta confluencia problemática, Galileo se expresó así:

"SALVIATI. Apuntaré un pensamiento particular mío, repitiendo, en primer lugar, lo que poco ha dije, y es que lo infinito es de por sí solo incomprensible para nosotros, como lo son también los indivisibles; pensad ahora lo que serán reunidos en conjunto. Sin embargo, si queremos componer la línea de puntos indivisibles, es necesario hacerlos infinitos; y así conviene tomar en consideración al mismo tiempo lo infinito y lo indivisible". ([14.], p. 56)

d) La negativa a admitir el infinito actual

Los griegos se negaron persistentemente a aceptar el infinito actual. La palabra misma "infinito" - apeiron, en griego - tenía entre ellos un sentido peyorativo. La usaban, por ejemplo, para referirse al caos o a una línea quebrada, en el sentido de un defecto, una privación o una carencia de límites y no en el de una perfección.

Los argumentos de Zenón tuvieron como resultado que los matemáticos griegos hicieran a un lado el infinito y crearan el método de exhaustión para probar que dos magnitudes son iguales - método que emplearon en sus cálculos de áreas y volúmenes. El método de exhaustión, sin embargo, es la manera griega de evitar el paso al límite.

El rechazo al infinito actual perduró en la matemática hasta bien entrado el siglo XIX. El mismo Gauss se opuso con energía a la concepción del infinito actual. En 1831 le escribió a Shumacher:

*“Protesto contra el uso de la magnitud infinita como algo completo, pues en matemáticas tal uso no es permisible nunca. El infinito es meramente una **façon de parler**, cuyo significado real es el de un límite al cual ciertas razones se acercan indefinidamente mientras que a otras se les permite crecer sin restricción”. ([18.], p. 337)*

La negativa a aceptar la existencia de conjuntos infinitos fue denominada por Cantor *horror infiniti* y definida por él como “una forma de miopía que impide ver el infinito actual”. ([25.], p. 39).

En 1886, escribió Cantor lo siguiente:

*“A pesar de la diferencia esencial entre los conceptos de infinito potencial y actual, donde el primero significa una magnitud finita **variable** que crece más allá de todo límite finito, mientras que el segundo es una cantidad **constante** y **fija** situada más allá de todas las magnitudes finitas, sucede con demasiada frecuencia que el uno es tomado erróneamente por el otro... Gracias a una aversión justificable a tales infinitos actuales **ilegítimos** y a la influencia de la moderna tendencia epicúreo-materialista se ha extendido en amplios círculos científicos un cierto **horror infiniti**, que encuentra su expresión clásica y su apoyo en la carta de Gauss. Pero, me parece que el consiguiente rechazo superficial del infinito actual legítimo es una violación no menor de la naturaleza de las cosas, que tienen que ser tomadas como son”. ([18.], p. 337)*

Sólo después de la obra de Cantor, Dedekind y Weierstrass pudo el infinito actual imponerse en la matemática. Pensamos que el momento crucial en este camino fue la definición de número irracional dada por Weierstrass hacia 1876, definición en la cual es necesario tomar en consideración todos los términos de un agregado infinito.

Buscaba Weierstrass una teoría de funciones independiente de la intuición geométrica y para ello se propuso fundamentar aquella exclusivamente en el concepto de número. En esta teoría, el número entero es un agregado de unidades que comparten una propiedad característica común y el número complejo es un agregado de unidades de varias especies que comparten más de una característica común. Los números

racionales pueden definirse introduciendo para cada uno de ellos la clase apropiada de números complejos. Por ejemplo, el número $\frac{13}{5}$ está compuesto de 2α y 3β , donde α es la unidad principal y β es la parte alícuota $\frac{1}{5}$, tomada como otro elemento. Un número queda determinado cuando conocemos los elementos de que está compuesto - de los cuales hay un número infinito - y el número de veces que cada elemento se presenta.

Boyer analiza el caso de $\sqrt{2}$ a la luz de la definición de Weierstrass, en los siguientes términos:

“En esta teoría, el número $\sqrt{2}$ no está definido como el límite de la sucesión 1, 1.4, 1.41, ... y tampoco es introducida la idea de sucesión. El número $\sqrt{2}$ es simplemente el agregado mismo 1α , 4β , 1γ , ..., tomado en cualquier orden, donde α es la unidad principal y β , γ , ... son ciertas partes alícuotas y donde el agregado está, por supuesto, sujeto a la condición de que la suma de cualquier número finito de elementos es siempre menor que un cierto número racional. Estamos en capacidad ahora de probar, si lo deseamos, que el número $\sqrt{2}$ es el límite de la sucesión variable 1α ; 1α , 4β ; 1α , 4β , 1γ ; ..., corrigiendo así el error lógico que se presentó en la teoría del número y de los límites creada por Cauchy. En cierto sentido, Weierstrass zanja la cuestión de la existencia de un límite de una sucesión convergente tomando la sucesión misma [realmente, él considera un agregado no ordenado] como el número o el límite”. ([2.], p. 286)

Las subrayas que hemos introducido en la cita anterior resaltan el hecho de que Weierstrass estaba tomando todos los términos de un agregado que tenía un número infinito de términos. Así, Weierstrass se movía en la órbita del infinito actual.

e) La dificultad de desarrollar “intuiciones secundarias apropiadas” de la cardinalidad infinita

Ya hemos visto el papel obstaculizador desempeñado por las concepciones espontáneas, que se basan en las primeras intuiciones del niño. Para superarlas, es necesario desarrollar nuevas intuiciones o “intuiciones secundarias” a través de la instrucción sistemática. El desarrollo de estas intuiciones secundarias plantea un problema de tipo psicológico pero también epistemológico, como se desprende de las múltiples resistencias que tuvo que vencer la teoría cantoriana antes de ser admitida en la matemática.

Fischbein distingue, desde el punto de vista psicológico, dos tipos de intuición: Las *intuiciones primarias* se refieren a aquellas creencias cognitivas que se desarrollan espontáneamente en el niño, de manera natural, antes de la instrucción sistemática e independientemente de esta. Las *in-*

tuiciones secundarias son aquellas que se desarrollan como resultado de un entrenamiento intelectual sistemático. ([12.], p. 161)

La existencia de distintas especies de intuición fue reconocida por Poincaré desde la primera década del siglo XX. En efecto, en su ensayo *Intuición y lógica en Matemáticas* escribió Poincaré:

“Tenemos entonces varias clases de intuición. Primero, la apelación a los sentidos y a la imaginación; enseguida, la generalización por inducción, calcada, por así decirlo, de los procedimientos de las ciencias experimentales; tenemos finalmente la intuición del número puro..., que es la que puede engendrar el verdadero razonamiento matemático. He mostrado por medio de ejemplos que las dos primeras no pueden darnos la certeza; pero ¿quién pondrá seriamente en duda la tercera, quién dudará de la aritmética?”. ([20.], p. 22)

Más adelante, hacia el final del ensayo, escribió Poincaré:

“He dicho arriba que hay varias especies de intuición. He dicho cuánto la intuición del número puro, de la que surge la inducción matemática rigurosa, difiere de la intuición sensible a la cual la imaginación propiamente dicha le hace las principales contribuciones”. ([20.], p. 32)

Prosiguió su análisis Poincaré preguntando si el abismo que separa estas intuiciones es menos profundo de lo que parece en principio y si aun la intuición del número puro y de las puras formas lógicas necesita de la ayuda de los sentidos.

Es claro que la teoría cantoriana de la cardinalidad infinita choca con algunas de nuestras más arraigadas convicciones y que no concuerda con nuestras intuiciones primarias. Un adecuado entrenamiento intelectual debería ayudar a remplazar esas intuiciones primarias - que nos conducen a situaciones paradójicas en relación con el infinito - por una serie de “intuiciones secundarias apropiadas”. Estudios como el de Cornu ([26.], ch. 10), el de Tirosch ([26.], ch. 12) y el de Sierpinska [25.] muestran que el procesó de adquisición de tales intuiciones secundarias no es sencillo y requiere un esfuerzo considerable.

En su ensayo *Las Matemáticas y los Metafísicos* escribió B. Russell lo siguiente:

*“En realidad, en el tratamiento del infinito es imposible evitar conclusiones que a primera vista parecen paradójicas, siendo ésta la razón de que tantos filósofos hayan supuesto que en el infinito se dan contradicciones intrínsecas. Pero un poco de práctica nos permite captar los verdaderos principios de la doctrina de Cantor y adquirir **nuevos y mejores instintos** con respecto a lo verdadero y lo falso”. [Subrayas nuestras] ([24.], p. 100)*

Tiresh comenta el anterior texto de Russell de la manera siguiente:

*“Russell distinguió aquí entre ganar un conocimiento conceptual del infinito y adquirir nuevas intuiciones. También afirmó que **un poco de práctica** capacitaría a los aprendices para adquirir ambas cosas. Nuestra investigación ha mostrado que el proceso de adquisición de **nuevos instintos** no es tan simple. Más aun, los datos que hemos recogido indican que el camino por recorrer desde la captación conceptual de los principios de la teoría de conjuntos hasta la adquisición de mejores intuiciones con respecto a la comparación de conjuntos infinitos puede ser muy largo”.* ([26.], p. 214)

3.5 Los conflictos didácticos en el maestro

Los maestros han pasado también, en su propio proceso de aprendizaje del concepto de continuo, por obstáculos semejantes a los que sus alumnos deben superar. Esto representa un doble esfuerzo para el alumno por cuanto, en muchas oportunidades, el maestro no ha sobrepasado dichos obstáculos.

Se destacan en relación con este tipo de obstáculos las investigaciones acerca del conocimiento explícito del infinito, llevadas a cabo por Wheeler y Martin ([17.], [28.]), quienes encuestaron a un grupo de maestros de la escuela elemental matriculados en un curso universitario de metodología matemática. De sus investigaciones pueden destacarse los siguientes resultados:

- (1) Más de la mitad de los maestros encuestados no estaban familiarizados con el significado del símbolo ∞ ni con los tres puntos finales en la expresión 1, 5, 25, 125, 625, ...
- (2) La noción de infinito predominante entre ellos fué la de infinito potencial, según se desprende de sus respuestas a la pregunta “¿Qué es el infinito?”. En efecto, la mayoría de sus respuestas se referían a procesos interminables o recursivos, como en el caso de “los números siguen hacia delante sin parar” o “no importa cuál número diga, siempre encuentro otro más grande simplemente añadiéndole uno”.
- (3) De 70 maestros encuestados sólo 39 reconocieron como verdadera la afirmación de que todo segmento contiene un número infinito de puntos, 24 la calificaron de falsa y 7 no respondieron.
- (4) De los 70 maestros encuestados sólo 29 reconocieron como falsa la afirmación de que existe una fracción positiva que es la más pequeña, 28 la calificaron de verdadera y 13 no respondieron.

La conclusión de estos investigadores fue que los conceptos de infinito manifestados por la gran mayoría de los maestros eran incompletos e inconsistentes. En muchos casos, las respuestas escritas por el maestro mostraron que éste evocaba un concepto - imagen plagado de conflictos e incongruencias.

Este texto se basa en resultados parciales del proyecto de investigación titulado *Obstáculos epistemológicos relativos al concepto de continuo*, presentado por el autor en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia en el 2000. Con respecto a las facetas históricas y epistemológicas de la investigación, véase nuestra ponencia en el VIII Encuentro de la ERM, titulada *Aspectos históricos relativos al concepto de continuo*.

Referencias

- [1] Bachelard, G. *La formación del espíritu científico*, siglo XXI, México, 1993.
- [2] Boyer, C. B. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, New York, 1949.
- [3] Brousseau, G. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Thèse, Université de Bourdeaux, 1988.
- [4] Cornu, B. *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat de troisième cycle, L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983.
- [5] Davis, R. B. Vinner, S. *The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages*, Journal of Mathematical Behaviour, 5 (3), 281-303, 1986.
- [6] De la Torre Gómez, Andrés. *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*, Editorial Universidad de Antioquia, Medellín, 1997.
- [7] De la Torre Gómez, Andrés. *Una aplicación del modelo de van Hiele al concepto de continuo*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. VIII, N° 1, 2, 117-141, 2000.
- [8] De la Torre Gómez, Andrés. *Aspectos históricos relativos al concepto de continuo*. Memorias del VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia, 2001.
- [9] De la Torre Gómez, A., Perez Carreras P. *La modelización del espacio y del tiempo: Su estudio vía el modelo de van Hiele*, Memorias del iv Taller Internacional sobre la enseñanza de las matemáticas para Ingeniería y Arquitectura, I.S.P. José Antonio Echavarría, La Habana, Cuba, 2000 ([http://www.ispjae.cu/eventos/IV Taller Matemática](http://www.ispjae.cu/eventos/IV_Taller_Matemática)).

- [10] Dehaene, S. *The number sense, How the mind creates mathematics*, Oxford University Press, New York, 1997.
- [11] Ferrater Mora, J. *Diccionario de Filosofía*, Suramericana, Buenos Aires, 1951.
- [12] Fischbein, E. *Intuition and mathematical education*, Osnabrücker Schriften zur Mathematik, **1**, 148-176, 1978.
- [13] Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P. *The intuition of infinity*, Educational Studies in Mathematics, **10**, 3-40, 1979.
- [14] Galileo Galilei. *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, Losada, Buenos Aires, 1945.
- [15] Hobson, E. W. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, Dover, New York, 1957.
- [16] James, W. *Compendio de Psicología*, Emecé, Buenos Aires, 1947.
- [17] Martin, G., Wheeler, M. M. *Infinity concepts among pre-service elementary school teachers*, Proceedings of PME 11, Montreal, 362-368, 1987.
- [18] Moritz, R. E. *On Mathematics and Mathematicians*, Dover, New York, 1958.
- [19] Piaget, J., Choquet, G., Dieudonne, J., Thom, R. y otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 1978.
- [20] Poincaré, H. *La Valeur de la Science*, Flammarion, Paris, 1935.
- [21] Poincaré, H. *Science and Hypothesis*, Dover, New York, 1952.
- [22] Rucker, R. *Infinity and the Mind, The science and philosophy of the infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [23] Russell, B. *Los Principios de la Matemática*, Espasa Calpe, Madrid, 1967.
- [24] Russell, B. *Misticismo y Lógica y otros ensayos*, Paidós, Buenos Aires, 1961.
- [25] Sierpinski, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **6** (1), 5-67, 1985.
- [26] Tall, D. O. Ed. *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Boston, 1991.
- [27] Tall, D. O., Vinner, S. *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, **12**(2), 151-169, 1981.

- [28] Wheeler, M. M., Martin, G. *Explicit knowledge of infinity*, Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of PME, Northern Illinois University, DeKalb, Illinois, 312-318, 1988.

Dirección del autor: Andrés de la Torre Gómez Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. adatorre@matematicas.udea.edu.co