



**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LA EDUCACIÓN BÁSICA
PRIMARIA: GENERALIZACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS.**

ELIZABETH RIVERA MUÑOZ

Código 0747839

LUISA FERNANDA SÁNCHEZ CHAVERRA

Código 0843519

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Santiago de Cali, Agosto de 2012



**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LA EDUCACIÓN BÁSICA
PRIMARIA: GENERALIZACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS.**

ELIZABETH RIVERA MUÑOZ
Código 0747839
LUISA FERNANDA SÁNCHEZ CHAVERRA
Código 0843519

Requisito parcial para optar el título de licenciadas en Educación Básica con Énfasis en
Educación Matemática

Asesora
LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO
Profesora del Área de Educación Matemática
Instituto de Educación y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Santiago de Cali, Agosto de 2012

AGRADECIMIENTOS

Para poder realizar este trabajo de la mejor manera posible fue necesario el apoyo de muchas personas a las cuales queremos agradecer.

En primer lugar a Dios, porque siempre estuvo con nosotras dándonos sabiduría e iluminándonos en cada palabra que escribimos.

A nuestros padres, por el amor y apoyo incondicional y por hacer posible nuestra formación profesional, enseñándonos que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para alcanzar las metas.

A nuestra tutora Ligia Amparo Torres, por su dedicación, orientación y paciencia para sacar este trabajo adelante.

A Dora Janneth Gómez, que siempre creyó en nosotras y estuvo ahí apoyándonos para hacer un buen trabajo.

A nuestros novios por creer siempre en nosotras y darnos su apoyo.

A nuestros profesores, quienes durante toda la carrera profesional aportaron conocimientos y valores a nuestra formación.

Finalmente, a nuestros compañeros por permitirnos entrar en sus vidas y por compartir con nosotras tantos momentos especiales durante estos años.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

CAPITULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	10
1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	10
1.2. OBJETIVOS	13
1.2.1. Objetivo general	13
1.2.2. Objetivos específicos	13
1.3. JUSTIFICACIÓN	14
1.4. MARCO CONTEXTUAL	18
CAPITULO II: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA	19
2.1. PERSPECTIVA CURRICULAR	19
2.2. PERSPECTIVA DIDÁCTICA	25
2.2.1. Algunas dificultades presentadas en la transición aritmética-álgebra	25
2.2.2. Generalización de patrones, como alternativa para el acercamiento del razonamiento algebraico	28
2.2.3. Tipos de patrones	31
2.2.4. Generalización y abstracción	36
2.3. PERSPECTIVA MATEMÁTICA	38
2.3.1. Patrones y relación funcional	38
CAPITULO III: GENERALIZACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS	48
3.1. Sobre la secuencia didáctica	49
3.1.1. Diseño y descripción de la secuencia	50
3.1.2. La secuencia	53
3.2. Metodología empleada en la secuencia didáctica	75
3.3. Resultados y análisis de resultados	76
CAPITULO IV: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS	155
4.1. CONCLUSIONES GENERALES	155
4.2. REFLEXIONES DIDÁCTICAS	159

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA

ANEXO

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Patrones en la multiplicación.....	45
Tabla 2. Situación 1.....	51
Tabla 3.Situación 2.....	51
Tabla 4. Situación 3.....	52
Tabla 5. Situación 4.....	52
Tabla 6. Tipificación situación 1, actividad 1, pregunta 3, literales a y b.	77
Tabla 7. Tipificación actividad 1, pregunta 4, literal a.....	80
Tabla 8. Tipificación situación 1, actividad 1, pregunta 4, literal b.....	81
Tabla 9. Tipificación situación 1, actividad 1, pregunta 4, literal c.	81
Tabla 10. Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 1, literales a y b.	83
Tabla 11. Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 2, literal a y c.	85
Tabla 12. Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 2, literal d.....	86
Tabla 13. Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 2, literal e.....	86
Tabla 14. Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 3, literal a.....	89
Tabla 15. Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 3, literal b.....	89
Tabla 16. Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 3, literal c.	90
Tabla 17. Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 1, literal a.....	92
Tabla 18. Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 1, literal b.....	92
Tabla 19. Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 1, literal c.	93
Tabla 20. Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 2.	95
Tabla 21. Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 3.	96
Tabla 22. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 1.	99
Tabla 23. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 2.	100
Tabla 24. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 3.	101
Tabla 25. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 4.	103
Tabla 26. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 5.	104
Tabla 27. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 6.	105
Tabla 28. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 1.	107
Tabla 29. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 2.	107

Tabla 30. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 3.	108
Tabla 31. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 4.	109
Tabla 32. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 5.	110
Tabla 33. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 1.	114
Tabla 34. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 2.	116
Tabla 35. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 3.	117
Tabla 36. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 4.	118
Tabla 37. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 5.	119
Tabla 38. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 6.	120
Tabla 39. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 7.	121
Tabla 40. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 1, literales a y b.	122
Tabla 41. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 2, literales a y b.	124
Tabla 42. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 3, literales a y b.	127
Tabla 43. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 4, literales a y b.	128
Tabla 44. Tipificación situación 4, actividad 1, pregunta 1.	132
Tabla 45. Tipificación situación 4, actividad 1, pregunta 2.	133
Tabla 46. Tipificación situación 4, actividad 1, pregunta 3.	135
Tabla 47. Tipificación situación 4, actividad 2, literal a.	137
Tabla 48. Tipificación situación 4, actividad 2, literal b.	140
Tabla 49. Tipificación situación 4, actividad 2, literal c.	142
Tabla 50. Tipificación situación 4, actividad 2, literal d.	143
Tabla 51. Tipificación situación 4, actividad 2, literal e.	144
Tabla 52. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 1.	146
Tabla 53. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 2.	147
Tabla 54. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 3.	149
Tabla 55. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 4.	151
Tabla 56. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 5.	153
Tabla 57. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 6.	153

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1: Patrones en la suma	32
Imagen 2. Patrones en el S.N.D.....	33
Imagen 3.Números triangulares	33
Imagen 4. Números cuadrangulares	34
Imagen 5. Patrones geométricos	34
Imagen 6. Patrones de reproducción y traslación	35
Imagen 7. Patrones de extensión.....	35
Imagen 8. Patrones de extrapolación.....	35
Imagen 9. Análisis escalar	46
Imagen 10. S1.A2.La.....	79
Imagen 11. S1.A2.Lb.....	80
Imagen 12. S1.A2.Le.....	88
Imagen 13. S1.A3	97
Imagen 14. S2.A2	111
Imagen 15. S3.A1	122
Imagen 16.S4.A1	136
Imagen 17.S4.A2.La.....	139
Imagen 18.S4.A2.La.....	139
Imagen 19.S4.A2.Le.....	145
Imagen 20.S4.A2.Le.....	146
Imagen 21. S4.A3	150

RESUMEN

El siguiente trabajo presenta los resultados de una secuencia de actividades aplicada a los estudiantes del grado tercero (B) de una entidad privada, relacionada con la generalización de patrones, como una alternativa para desarrollar el pensamiento variacional a partir de la Educación Básica Primaria. Para obtener dichos resultados la secuencia aplicada estaba conformada por una serie de actividades agrupadas en cuatro situaciones, las cuales fueron implementadas en ocho sesiones.

Entre los resultados sobresalen las respuestas que evidencian la facilidad por parte de los estudiantes para reconocer patrones en secuencias numéricas diferenciando claramente su núcleo, también se observó la potencialidad de las tablas de registro puesto que podían encontrar fácilmente las relaciones existentes entre las cantidades presentadas en ellas; sin embargo, también se resalta que fueron muy pocos los estudiantes que lograron plantear expresiones generales a partir de las variables propuestas.

Este trabajo es un aporte a la reflexión de la educación matemática en Colombia, sobre el desarrollo del pensamiento variacional desde edades tempranas, para potencializar la iniciación del álgebra escolar; en cuanto a esto, es muy importante integrar al currículo actividades que pensadas desde lo aritmético y geométrico potencialicen el razonamiento algebraico.

Palabras claves: Generalización, patrones numéricos, pensamiento variacional, estructuras multiplicativas, razonamiento algebraico.

INTRODUCCIÓN

Esta es una propuesta de trabajo de grado que se presenta en el marco de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y nace de la necesidad de implementar en la Educación Básica Primaria procesos que desarrollen el pensamiento variacional a través de la generalización de patrones numéricos, como una ruta para acceder al razonamiento algebraico, desde edades tempranas.

A partir de distintas investigaciones¹ que demuestran las dificultades comunes en el inicio del razonamiento algebraico, tales como el corte didáctico entre el pensamiento numérico y el pensamiento variacional, o el hecho de que en la Educación Básica Primaria se hace más énfasis en enseñar lo numérico y lo geométrico a través de operaciones y resolución de problemas, dejando de lado el estudio de la variación y el cambio, se propone como principal objetivo de este trabajo aportar elementos que permitan una reflexión del álgebra escolar, desde la perspectiva de generalización de patrones numéricos.

En relación con lo anterior, se presenta la generalización de patrones como una alternativa planteada desde los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), y diferentes investigadores como Mason (1985), que conlleva al desarrollo del pensamiento variacional y que nos induce a implementar situaciones que relacionen diferentes procesos en la básica primaria, como un camino alternativo de tener acceso al razonamiento algebraico².

Por consiguiente se propone, mediante una secuencia didáctica, actividades que permitan a los estudiantes adquirir herramientas conceptuales y procedimentales para la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de

¹ Los estudios específicos a los que nos referimos corresponden a los realizados por diferentes investigadores como Mason (1985), Kieran (1992), Radford (2006), Godino (2003).

² El Razonamiento Algebraico, según Castro, Godino & Rivas (2011) se considera como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la Educación Primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).

variaciones y formalización de relaciones estructurales; lo que a su vez permite desarrollar la capacidad para razonar algebraicamente.

La secuencia didáctica es aplicada a estudiantes de grado tercero, la cual cuenta con un diseño orientado desde tres perspectivas de análisis: Curricular, Didáctica y Matemática, que se explicitan en el marco teórico.

La organización del proyecto de grado ***desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica primaria: generalización de patrones numéricos*** se presenta en cuatro capítulos:

El primer capítulo corresponde al planteamiento del problema, los objetivos y la justificación, en los cuales se toma como punto de partida diferentes investigaciones sobre algunas dificultades presentadas en la transición aritmética-álgebra. Para ello se propone una alternativa que permita la iniciación al álgebra escolar y sus aproximaciones al pensamiento variacional, desde la perspectiva de generalización de patrones, en la Educación Básica Primaria.

El segundo capítulo hace alusión al marco de referencia donde se presentan los elementos teóricos que permiten la fundamentación de la problemática, y el desarrollo de la propuesta de trabajo, organizándose desde tres perspectivas de análisis: la perspectiva Curricular, la perspectiva Didáctica y la perspectiva Matemática.

En el tercer capítulo se aborda todo lo referente a la metodología, aquí se habla del proceso realizado durante el desarrollo de la propuesta de trabajo de grado, incluyendo el diseño de la secuencia de situaciones didácticas.

El cuarto capítulo corresponde a las conclusiones y reflexiones didácticas, en las que se muestran los resultados generales del trabajo, relacionando los planteamientos teóricos con el diseño y la implementación de la secuencia, lo que posibilita dar unas reflexiones acordes a estos resultados para aportar a la reflexión de este tipo de trabajos.

Finalmente se presenta la bibliografía, donde se encuentran las referencias de todos los autores, y textos corporativos que han servido de fundamentación teórica para la realización de este trabajo grado.

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

A pesar de los intentos que se han direccionado desde las propuestas curriculares nacionales (MEN, 1998) y las investigaciones sobre perspectivas del trabajo algebraico en la escuela (Bednarz, Carolyn, Lesley, & Lee, 1996) para que la transición de la aritmética al álgebra sea más sencilla de afrontar por los estudiantes, continúa existiendo un corte didáctico³ entre los dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico, puesto que para acceder al segundo (pensamiento algebraico) se hace necesario superar conceptos y procedimientos del pensamiento numérico; por ejemplo, la idea de igualdad.

En el estudio de la aritmética y en relación con el aprendizaje de los números y las operaciones; la noción de igualdad que se construye es una orden para ejecutar una operación o para encontrar un resultado, tal como $7 + 4 = 11$. Esta manera de concebir la igualdad hace énfasis en la idea de “proceso – resultado”, predominando una lectura unidimensional (izquierda a derecha) ignorando sus aspectos simétricos y transitivos⁴. (Arce C., et al. 2004. pág. 13)

De la misma manera, se hacen evidentes otras dificultades vinculadas al estudio del álgebra, en la comprensión y tratamientos de las expresiones, por ejemplo: el grado de abstracción, la utilización de símbolos para representarla, sus características sintácticas, signos de operación, uso de paréntesis, sentido de las letras, sus reglas de utilización y sus diferencias con el lenguaje aritmético. Estas dificultades se presentan con relación a los conceptos enfocados en las diversas

³Aquí se entiende el término ruptura o corte didáctico, tal como lo dice Gallardo & Rojano (1998) citando a G. Brousseau cuando habla del obstáculo didáctico de origen epistemológico. Es decir, nos referimos al tipo de obstáculo que no puede, ni debe escapar al hecho mismo de su papel constitutivo del conocimiento al que se apunta y que es frecuente encontrar en la historia de los conceptos mismos. La palabra corte o ruptura se emplea para enfatizar el hecho de que el obstáculo en cuestión (el operar lo representado) se localiza en la frontera entre dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico.

⁴En el álgebra, a diferencia de la definición anterior, el énfasis interpretativo que se da al signo igual radica precisamente en respetar el carácter simétrico y transitivo de la igualdad.

formas de presentación del álgebra: resolución de ecuaciones, manipulación de expresiones algebraicas, resolución de problemas y tratamiento de conceptos fundamentales como el de variable.

No obstante, para hacer la transición del pensamiento numérico al algebraico, es necesario romper con conceptos y prácticas de la enseñanza tradicional, pero también se requiere extender las nociones y acciones asignadas a los objetos aritméticos a un nuevo universo que incluye los algebraicos (Gallardo & Rojano, 1998). Esto significa que el pensamiento algebraico se construye en estrecha relación con el numérico, traspasando ciertas ideas aritméticas que se oponen a esta construcción, tal como lo explica Mason (1985) no se debe pensar que el álgebra inicia una vez hayan terminado la lista de contenidos “aritméticos”, pues el conocimiento algebraico está inmerso en todo el conocimiento matemático.

Es así como desde el estudio de la aritmética, se pueden involucrar ciertos procesos que favorecen el acercamiento al razonamiento algebraico, tal como lo presentan algunas perspectivas como: el modelaje de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, el estudio de situaciones funcionales, la solución de problemas, la generalización de patrones numéricos y geométricos, y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, (Kieran & Filloy, 1989) siendo esta última (generalización de patrones numéricos) sobre la que se va a enfatizar en este proyecto.

Según Mason (1985) la generalidad es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico. La generalización en álgebra es algo primario hacia la abstracción matemática, y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades que favorecen la articulación de la generalización en situaciones cotidianas. Para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar, para ello necesita percibir un patrón (unidad que se repite con regularidad,) y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien. (p. 16)

Es así como se propone, que para que exista una comprensión de estos patrones, la escuela debe promover actividades que involucren situaciones de variación y cambio, puesto que como lo dicen los Estándares Básicos de

Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), estas actividades preparan a los estudiantes, para la construcción de la expresión algebraica, a través de la formulación verbal de una regla recursiva, que muestra cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes.

En el marco de este trabajo de grado para el diseño e implementación de estas actividades de variación y cambio, se hace necesario desarrollar los procesos básicos⁵ de pensamiento algebraico desde las estructuras multiplicativas, y las propiedades de sus operaciones, las cuales permiten organizar formas estructurales de generalizaciones, pero sobre todo de argumentaciones para justificarlas.

Es importante resaltar que tales generalizaciones no se deben limitar al uso de letras, se debe ver que ni la presencia de la notación algebraica (letras) se debe tomar como un indicador de pensamiento algebraico, ni la falta de ella, debe ser juzgada como una incapacidad de pensar algebraicamente (Zazkis & Liljedahl, 2002). Además, muchos estudiantes no logran comprender apropiadamente como se puede usar una letra para representar un número generalizado, utilizan las letras como una forma abreviada de “algo”, no como una expresión algebraica y esto se convierte en un obstáculo que se evidencia frecuentemente, por ejemplo: los estudiantes que cometen este error tienden a ver $2m + 3b$ como: 2 manzanas más 3 bananos, usando letras como unidades de medición y no como símbolos que pueden tomar diferentes valores: (dos veces el número de manzanas...) (Mason, 1985).

Por consiguiente en este trabajo se considera necesario indaga sobre:

¿Cómo a través de una secuencia didáctica, acerca del tratamiento de patrones y variaciones numéricas que involucra algunas situaciones problema sobre multiplicación de naturales, se aporta a la reflexión didáctica enfocada hacia la iniciación al álgebra escolar, en la educación básica primaria?

⁵ Cuando se habla de procesos básicos se hace referencia a aquellos que permiten generalizar sin recurrir a una regla formal, tales como ver el patrón en una serie o secuencia numérica, poder expresarlo y si es el caso registrarlo ya sea de forma verbal o gráfica.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

Aportar elementos conceptuales y procedimentales a la reflexión sobre la iniciación al álgebra escolar, desde el análisis del diseño e implementación de una secuencia didáctica para el grado tercero de la Educación Básica Primaria, que involucre la generalización de patrones numéricos enfocándose a partir de las estructuras multiplicativas.

1.2.2. Objetivos específicos

- Identificar en algunas situaciones problema⁶ sobre estructura multiplicativa de naturales, elementos que posibiliten el diseño de una secuencia didáctica sobre generalización de patrones numéricos.
- Favorecer el acercamiento al pensamiento algebraico, por medio de la implementación de una secuencia didáctica, enfocada en la generalización de patrones numéricos.
- Aportar elementos conceptuales y procedimentales para la reflexión acerca de la importancia de implementar procesos de generalización de patrones numéricos, desde los primeros grados de la escolaridad para el desarrollo del pensamiento variacional.

⁶ Aquí situación problema según Muñera & Obando (2002) se entiende como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Teniendo en cuenta los problemas que pueden presentarse durante el transcurso de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, este trabajo pretende aportar a la reflexión en el campo de la educación matemática en nuestra región y país, sobre la importancia del desarrollo de los procesos algebraicos desde temprana edad, a través de la generalización de patrones numéricos, y al mismo tiempo intenta abordar de una manera articulada, conceptos como el de las estructuras multiplicativas, relación entre magnitudes y dependencia de variables a partir del diseño de una secuencia didáctica planteada en el contexto de un cuento infantil.

La aplicación de la secuencia se realizó a estudiantes de tercero de Educación Básica Primaria, dado el énfasis que se le da a las estructuras multiplicativas en este grado y que posteriormente permitirá continuar el trabajo variacional en los siguientes niveles de escolaridad. La organización de las estructuras multiplicativas posibilita el uso de patrones aritméticos enfocados hacia lo algebraico, entre estos patrones se referencian los formados por las reglas que rigen propiedades como la conmutativa y la asociativa; sin embargo, también se trabajaron patrones geométricos que en la identificación de sus regularidades dan lugar a patrones numéricos.

A raíz de lo anterior, para dar inicio a propuestas que permitan desarrollar el pensamiento variacional desde edades tempranas, en el caso de este trabajo a partir de generalización de patrones, es importante empezar por considerar los aspectos de variación y cambio, que son los que permiten establecer relaciones y regularidades que posibilitan llegar a la generalización, la que a su vez proporciona un acercamiento a lo algebraico.

Según Mason (1985), para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el estudiante tenga algo que comunicar; así, al percibir un patrón o una regularidad, puede intentar expresarlo y comunicárselo a alguien. Este proceso de generalización, tal cómo nos muestra la historia de las matemáticas, se puede lograr a través de las interrelaciones entre los lenguajes verbal, icónico, gráfico y

simbólico, expresados a través de patrones; donde el punto de partida no es la sintaxis propia de las reglas del álgebra, sino que por el contrario ella es el punto de llegada (Radford, 2006).

La generalización desarrollada a través del uso de patrones y regularidades, vista como parte fundamental del pensamiento variacional, induce a implementar situaciones que relacionen diferentes procesos en la formación matemática, con el propósito de otorgar significados a la generalidad desde edades tempranas, como un camino alternativo de tener acceso al pensamiento algebraico.

En este sentido este trabajo propone a los estudiantes actividades que les permita hacer la reflexión frente a lo que cambia, frente a lo que se conserva, y por ende, a las relaciones invariantes estructurales, pero principalmente, hacer que comuniquen lo que observan y que expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes formas, que hagan conjeturas y por tanto, que formulen hipótesis sobre la situación que analizan (MEN, 2006, p. 67); reflexiones que hacen parte del proceso de generalizar, y que involucran la identificación de patrones numéricos, eje fundamental de este trabajo. Son este tipo de procesos los que potencian diferentes formas de expresión de la generalidad y que más adelante dan lugar al simbolismo propio del álgebra.

En relación con lo anterior, cabe mencionar que las situaciones matemáticas a explorar en la Básica Primaria, que pueden potencializar el pensamiento variacional, en este caso relacionadas con la generalización de patrones numéricos desde las operaciones multiplicativas, no necesariamente deben ser tomadas como exclusivas de este pensamiento; lo tradicional es que en estos grados se enseña la aritmética, pero no se establecen vínculos con otros temas matemáticos del currículo, y es importante resaltar tal como lo dicen Butto & Rojano (2004) que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico y puede ser vista como parte del álgebra, en lugar de ser vista como un dominio claramente distinto de ella.

Así mismo, para el trabajo con patrones se pueden involucran otros tipos de pensamiento matemático como lo son: el espacial, métrico y aleatorio; esto, al menos por dos razones: de un lado, el estudio de cada uno de ellos, es un proceso que busca una versión cada vez más general y abstracta del conocimiento. Esto implica identificar estructuras invariantes en medio de la variación y el cambio. De otro lado, todos ellos ofrecen herramientas para modelar matemáticamente, situaciones a través de las funciones como resultado de la cuantificación de la variación (Universidad de Antioquia, 2006.p.17).

Para el desarrollo de nuestra propuesta, se presenta el diseño de secuencias didácticas como recurso pedagógico, ya que a través de ellas se puede hacer un acercamiento al pensamiento variacional partiendo de situaciones, en las que se brinde a los estudiantes herramientas conceptuales y procedimentales, para la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalización de relaciones estructurales, lo cual permite desarrollar la capacidad para razonar algebraicamente. Según Godino (2003):

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central. (p.774)

En el caso de la secuencia a presentar, diseñada con base en una adaptación del cuento Hansel y Gretel, cada una de las situaciones se desprenden de un aspecto mencionado en el cuento, con el fin de presentar una propuesta distinta, atractiva, motivadora y que les signifique a los estudiantes pues se busco integrar diferentes procesos matemáticos a través de un contexto literario infantil. En lo que se confiere a las multiplicativas, se utiliza la multiplicación como una operación cuaternaria, en la cual se involucran dos variables numéricas

relacionadas, y no ternaria como se piensa normalmente. Esta relación hace importante el concepto de covariación entre dos cantidades, donde dos o más variables están relacionadas de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s)(Universidad de Antioquia, 2006).

Desde este punto de vista, las actividades pensadas a partir de lo numérico y potencializando lo variacional se espera lleven a los estudiantes a procesos de generalización que desarrollen el razonamiento algebraico. Con los resultados de esta investigación se espera que los docentes de matemática utilicen diferentes herramientas para realizar nuevas propuestas que permitan el desarrollo temprano del razonamiento algebraico, para evitar que se presente dificultades en la transición aritmética-álgebra y sea un proceso continuo de formación académica para los estudiantes.

1.4. MARCO CONTEXTUAL

En la elaboración de este trabajo de grado, las situaciones diseñadas se implementaron en el año lectivo 2011-2012, a veinte estudiantes pertenecientes al grado tercero (B) de Educación Básica Primaria en el Colegio Bennett, el cual es una entidad privada que se encuentra ubicada en la Avenida Cascajal, Calle Alférez Real barrio Ciudad Jardín, pertenece a la comuna 22, es de estrato 6, y se encuentra en el Municipio de Santiago de Cali, del Departamento del Valle del Cauca. La institución cuenta con una única jornada académica: De 6:45 a.m. a 2:30 p.m. Los estudiantes del grado tercero, oscilan entre los 9 y 10 años de edad, su nivel socio económico puede clasificarse como alto y muy alto.

Es un colegio bilingüe que presenta una propuesta de valor que lo hace diferente a los otros colegios y consiste en “formar personas bilingües capaces de discernir ética y moralmente con un pensamiento crítico, creativo y reflexivo desarrollado a través de metodologías globalizadoras que les permiten comprender la realidad y afrontar un mundo cambiante”, el nivel educativo se encuentra en alto según los resultados de las pruebas Saber, siendo el área de matemáticas la de mejor promedio.

La implementación de la secuencia se realizó en la institución antes descrita, por la formación que presentan los estudiantes en lo relacionado a las estructuras multiplicativas y el trabajo con diferentes técnicas como la Egipcia, Rusa y Celosía.

CAPÍTULO II:

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En este apartado se presentan los elementos teóricos que son de referencia, tanto para la fundamentación de la problemática, como para el desarrollo de la propuesta de trabajo. Esta fundamentación, se organiza en tres perspectivas de análisis: la perspectiva Curricular, la perspectiva Didáctica y la perspectiva Matemática, que son las que orientan el diseño de la secuencia didáctica, enfocada a la generalización de patrones numéricos, como un proceso que permite un acercamiento al desarrollo del pensamiento algebraico desde lo variacional.

2.1. PERSPECTIVA CURRICULAR

Para el análisis de los elementos curriculares, que tienen relación tanto con la problemática en general como con el objeto de estudio: el tratamiento de patrones, variaciones numéricas y estructura multiplicativa, se toman como referencia, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006)

Los Lineamientos Curriculares, consideran tres aspectos para organizar el currículo:

- Los *Conocimientos Básicos*, desde los cinco pensamientos (el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.) y sus respectivos sistemas;
- Los cinco *Procesos Generales*, que tienen que ver con el aprendizaje; tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos y,

- El *Contexto*, último elemento del currículo, que está relacionado con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Comprende variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, los tipos de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, y las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo. Elementos que deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

Además, estos Lineamientos plantean que ser matemáticamente competente implica ser eficiente en el desarrollo de cada uno de los procesos generales, de los cuales se hará referencia más adelante; y se concreta en los cinco tipos de pensamientos matemáticos. A su vez, estos cinco tipos de pensamiento, se desarrollan y se refinan, mediante el dominio de unos sistemas conceptuales y simbólicos, que al mismo tiempo se desarrollan y perfeccionan con los avances en dichos tipos de pensamiento.

Los sistemas conceptuales son:

Los sistemas numéricos, relacionados con el pensamiento numérico; los sistemas geométricos, relacionados con el pensamiento espacial, los sistemas métricos o de medidas, relacionados con el pensamiento métrico; los sistemas de datos, relacionados con el pensamiento aleatorio; y finalmente los sistemas algebraicos y analíticos, relacionados con el pensamiento variacional.

Para el desarrollo de este trabajo, se evidencian algunos procesos que son de gran importancia para las situaciones propuestas en la secuencia, puesto que involucran elementos que constituyen la generalización y los patrones numéricos. Tales procesos son:

El razonamiento, el cual permite:

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

La comunicación, que permite:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.

La comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los estudiantes a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas, y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.

La modelación, que por tener como punto de partida una situación problemática real, y por la necesidad de transferir esa situación a un problema planteado matemáticamente, plantea actividades como las siguientes:

- Descubrir relaciones;
- Descubrir regularidades;

Y por último, la resolución de problemas, que permite:

- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
- Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.
- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones problema.

Estos procesos descritos a partir de los Lineamientos, están íntimamente ligados a los Estándares Básicos, en los que se habla de un aprendizaje desarrollado a través de competencias, mediado por diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas, donde los procesos generales son esenciales.

Desde esta perspectiva de los Estándares Básicos de Competencias, y los Lineamientos Curriculares, el pensamiento que alude de forma directa al desarrollo del razonamiento algebraico es el pensamiento variacional.

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, tienen que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

El desarrollo de este pensamiento, se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que las rigen, para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al reconocer en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para establecer en qué consiste la repetición de un mismo patrón y la

capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

Así, el estudio de patrones, se constituye en una herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. Estas exploraciones permiten, hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la transformación.

Para el desarrollo de este trabajo, las situaciones diseñadas desde los contextos de variación y cambio, incluyen patrones multiplicativos. Este tipo de patrones, aluden al pensamiento numérico, que es el que exige el dominio del conjunto de conceptos y procesos de las estructuras multiplicativas y su uso eficaz por medio del sistema de numeración con que se representan.

Tal como lo mencionan los Estándares (MEN, 2006), el pensamiento variacional y el pensamiento numérico, de los que se ha hecho referencia anteriormente, tienen elementos conceptuales comunes, que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje y en particular de situaciones problema. En cuanto a esto, el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones y la manera como varían sus resultados con el cambio de los argumentos, se proponen como procesos de abstracción y generalización, a partir del análisis de lo que es invariante en medio de los aspectos variables de un conjunto de situaciones.

El desarrollo del pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación, tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre ellas. En este sentido, la relación del pensamiento variacional con el manejo de los sistemas algebraicos, muestra que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio, y no

solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos.

Para dar cuenta de este trabajo, se potencia algunos de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), planteados de primero a tercero, relacionados al pensamiento variacional y de los cuales se rescatan los siguientes:

- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficos.
- Construir secuencias numéricas utilizando propiedades de los números.

Por tanto, para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria, y preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado, se planean como apropiadas, las siguientes actividades:

- Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras.
- Hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia,
- Procurar expresar ese término, oralmente, por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas.

Con relación a lo anterior, proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la Educación Básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que

permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problema tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (MEN, 1998)

Por ende, la secuencia didáctica a presentar en este trabajo, involucra elementos tanto del razonamiento algebraico, como del pensamiento numérico, los cuales, a través de los procesos de generalización, permiten el desarrollo del pensamiento variacional y ayudan a que no exista un corte didáctico entre este pensamiento y el numérico.

2.2. PERSPECTIVA DIDÁCTICA

En esta perspectiva, se presentan las dificultades que hay del paso del pensamiento numérico al pensamiento algebraico y las alternativas para su tratamiento, centrando la atención de este trabajo en la generalización de patrones numéricos para potencializar el razonamiento algebraico, desde una secuencia didáctica pensada para grado tercero.

2.2.1. Algunas dificultades presentadas en la transición aritmética-álgebra

En la transición aritmética-álgebra se presentan diversas dificultades, por causa de concepciones falsas que producen errores en los procesos relativos al álgebra. Enfatizando desde diferentes investigaciones sobre el aprendizaje del *“álgebra elemental”*, como es llamado por Mason (1985) se aborda algunos de esos errores, que no permiten reconocer lo común en lo particular.

Signo igual

Diversos estudios⁷ muestran que las interpretaciones que hacen los estudiantes del signo “=” y de las ecuaciones pueden diferir de las que se pretende en la enseñanza. Por ejemplo, los estudiantes piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta; la igualdad, $2 + 3 = 5$, se interpreta como “2 más 3 da como resultado 5”, no como la equivalencia entre las expresiones “ $2 + 3$ ” y “5”. Ellos consideran que cambiando la letra en una ecuación puede cambiar la solución; podemos encontrar que dan soluciones diferentes a estas dos ecuaciones: $7x + 3 = 28$, y $7B + 3 = 28$; algunos estudiantes pueden argumentar que x es mayor porque está más al final del alfabeto que B (Godino, 2003).

El profesor puede aprovechar este tipo de situaciones para ampliar el significado del signo igual “=”. Una ecuación, como cualquier otra función proposicional puede ser verdadera o falsa, según el valor que se asigne a la variable correspondiente; además es posible asignar a la variable, no un único valor, sino múltiples. Esto ayudará a los estudiantes a superar su idea de que el signo “=” es una indicación de realizar un cálculo, y ver que en el álgebra el signo igual cumple una relación de simetría y transitividad, la cual deja explícito que es un símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación.

Letras como variables

Tal como lo dice Kieran (1992) la discriminación entre las diferentes formas en las cuales las letras son usadas en el álgebra, pueden presentar dificultades a los estudiantes. Kuchemann (1981) categorizó los siguientes seis niveles de

⁷ Los estudios específicos a los que nos referimos corresponden a los realizados por diferentes investigadores como Mason (1985), Kieran (1989, 1992), Radford (2006), Godino (2003), citados en diferentes apartados de este proyecto.

interpretación de letras, de acuerdo al mínimo nivel requerido para una ejecución exitosa.

- ✓ **Letra evaluada:** La letra es asignada a un valor numérico desde el principio. Si se pregunta al niño, "Si $5 + x = 13$, ¿cuánto vale x ?", dirá que 8, sin hacer ninguna manipulación escrita, le bastará un simple cálculo mental.
- ✓ **Letra no considerada:** La letra es ignorada o su existencia es reconocida sin darle un significado. Si se pregunta el valor de $a + b + 2$ cuando se sabe que $a + b$ es igual a 27, el niño puede responder 29 sin pensar en ningún momento en a, b o la suma $a + b$.
- ✓ **Letra considerada como un objeto concreto:** La letra es reconocida como una taquigrafía para un objeto concreto o como un objeto concreto en su propio derecho. La frase matemática $3m + 7b$ y la frase "tres manzanas y siete bananos" se consideran como equivalentes. La letra m se ve como la abreviatura del nombre de un objeto particular. Esto ocurre especialmente en problemas donde se involucran objetos concretos como lápices, mesas, etc.
- ✓ **Letra considerada como una incógnita específica:** La letra es considerada como un número específico pero desconocido. "¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?" La respuesta esperada, $4 + 3n$, requiere considerar n como incógnita genuina, pero los estudiantes en este estadio pueden dar como solución $3n$ y 4, $7n$, o 7, en las que los elementos que intervienen son combinados sin tener en cuenta la presencia de la letra.

- ✓ **Letra considerada como un número generalizado:** La letra asume varios valores, en lugar de uno solo. Si se pregunta a los estudiantes que listen todos los valores de A cuando $A + B = 10$, podemos encontrar que ofrecen uno o varios números que cumplen la condición, pero no reconocen la necesidad de listar todos los valores.
- ✓ **Letra considerada como una variable:** La letra es vista como representando un rango de valores no especificados. Si se pregunta, ¿qué es mayor $3n$ ó $n + 3$? La letra n tiene que representar en cada caso un conjunto de valores no especificados y usarse como herramienta para hacer la comparación sistemática entre tales conjuntos. Si los estudiantes prueban con un solo número, por ejemplo 4, o con tres o cuatro números particulares, decimos que están considerando la letra como número generalizado. Pero si consideran la relación en términos de todos los números, aunque pueden usar algunos ejemplos específicos para ayudarse en la decisión, tratan la letra como variable.

Las anteriores fueron algunas dificultades usuales cuando se está abordando el pensamiento variacional en su etapa inicial desde la aritmética, las cuales fueron consideradas en el diseño y el análisis de este trabajo de acuerdo a los resultados que muestran las investigaciones antes citadas, sobre razonamiento algebraico en Educación Básica Primaria.

2.2.2. Generalización de patrones, como alternativa para el acercamiento del razonamiento algebraico

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), proponen el acercamiento al razonamiento algebraico, desde la generalización de patrones en la Educación Básica Primaria:

Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y las leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras

involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. (MEN, 2006. p.67).

Desde esta mirada se piensa que la enseñanza de patrones es muy importante, pero la idea es que se integren al conjunto de actividades pensadas desde lo numérico, que se utilice esta herramienta significativa, para que los estudiantes desde la Educación Primaria, construyan comprensivamente recursos, que les permitan encontrar regularidades, interpretar sus procesos de gestación y usarlos con propiedad, este contenido debería ser desarrollado a lo largo de toda la Educación Básica y en relación con los otros contenidos que se estén tratando en la aritmética, darle su espacio e importancia al igual que otros conceptos matemáticos propuestos por el currículo.

Teniendo en cuenta lo anterior para el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros niveles escolares, son apropiadas actividades donde se permita analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una sucesión de figuras, números o letras, calcular o refutar conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. Mason (1985) propone cuatro etapas para trabajar la generalización desde el estudio de patrones, la cual es muy apropiada para preparar el aprendizaje significativo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a la educación secundaria:

“Ver”, hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común. *“Decir”* ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras, esto que se ha reconocido. *“Registrar”*, es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos). *“Probar la validez de las fórmulas”*, para que una fórmula tenga validez debe probarse de diferentes formas. Pero también es importante que la regla sea correcta y, para eso, se necesita tener una noción de lo general, lo

cual involucra la idea de cómo un ejemplo particular puede mostrar lo general. Para mostrar lo general es necesario reestructurar el ejemplo particular y señalar características generales, lo que se logra observando características específicas en cada caso y haciendo notar que, a pesar de que cambien, lo hacen de manera regular (Mason, 1985. p. 17).

Con base en las ideas de generalización expuestas por Mason (1985), se propone la incorporación de situaciones que les signifiquen a los estudiantes a partir del conocimiento que ellos ya adquirieron en el transcurso de sus años escolares, y el conocimiento de las dificultades que enfrentan en el aprendizaje escolar; es importante que el trabajo empiece desde edades tempranas, a fin que el niño pueda pensar en términos no específicamente algebraicos, pero si con nociones, ya que la generalización es un proceso gradual y como adquisición continua, está conectada al conocimiento algebraico.

Referenciando lo anterior Mason propone algunas actividades con patrones en Rutas hacia el Álgebra Raíces del Álgebra (1985), aquí tomamos un significativo ejemplo que nos puede ilustrar el trabajo con patrones numéricos.

Ejemplo: patrones con números

Decida cómo se forma la secuencia en cada uno de los casos que se presenta a continuación. Escriba una expresión general para hallar cualquier término de la secuencia, y de una razón que sea convincente para explicar por qué su generalización es correcta.

1. $1+2=3$

$$4+5+6=7+8$$

$$9+10+11+12=13+14+15$$

2. $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = ?$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 =$$

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = ?$$

1. ¿De cuántas formas diferentes puede encontrar dos números naturales que adicionados nos dé el mismo resultado? ¿que pasara con tres números naturales?

2. Haga una predicción de los números que aparecerían en la fila más larga.

La anterior es una actividad con patrones numéricos, que busca una regla general para hallar cualquier término y demostrar que esa regla siempre se cumple, sin importar cuál sea el número; actividades como esta permite que los estudiantes puedan identificar regularidades y establecer relaciones desde lo aritmético, lo que posteriormente los lleva a generalizar.

2.2.3. Tipos de patrones

Para efectos de este trabajo, a partir de la Básica Primaria es importante potencializar el pensamiento variacional, y una de las rutas para hacerlo es a partir de la generalización y el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo). El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas, por esto, a medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas, concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central (Godino, 2003).

Los patrones se presentan en diferentes contextos y dominios de las matemáticas, tales como, lo numérico, lo geométrico, lo aleatorio y lo variacional. Permiten la interpretación de regularidades presentes en diversas situaciones de la vida diaria por ejemplo en la música, en el movimiento, la economía, la geografía y la variación en general. El análisis cuidadoso de patrones y regularidades permite establecer generalizaciones.

Un patrón es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición. Es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etc.) que se construye siguiendo una

regla o algoritmo, ya sea de repetición o de recurrencia (Secretaría Técnica de Gestión Curricular, 1996).

Son patrones de repetición aquellos en los que los distintos elementos son presentados en forma periódica. Existen y se pueden crear diversos patrones de repetición teniendo en cuenta su estructura de base o núcleo, por ejemplo si el núcleo es de la forma: (AB, Patrón) se repiten alternadamente.

- 1,2,1,2,1,2
- 4,5,4,5,4,5,4

• Otro ejemplo de patrón de repetición, son los mecanismos convencionales con que se resuelven las cuentas, en los que se aplica la reiteración de una regla (algoritmo). Por ejemplo para la siguiente suma:

639	«9 más 8 es 17, pongo 7 y me llevo 1»
+ 468	«4 más 6 es 10, pongo 0 y me llevo 1»
1107	«7 más 4 es 11, pongo 1 y me llevo 1»

Imagen 1: Patrones en la suma

La regla para este tipo de operación siempre va a ser la misma, lo que evidencia el patrón repetitivo de comportamiento.

Es importante rescatar en estos patrones la forma del núcleo ya que expresa la manera cómo se construye la sucesión.

Son patrones de recurrencia aquellos en los que el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores, de cuyo análisis se infiere su ley de formación. Por ejemplo:

- $xx, xxxx, xxxxxx, xxxxxxxx \dots$ que traducido numéricamente es: 2,4,6,8
.....

- 2, 2 + 4, 2 + 4 + 6, 2 + 4 + 6 + 8 lo que puede expresarse como:
2, 6, 12, 20
- 0, 10, 20, 30, 40 lo que habitualmente se conoce como la escala del 10
- 1, 3, 9, 27, 81 que es la sucesión de cubos perfectos.
- El sistema de numeración posicional decimal, donde siempre con diez unidades de un nivel se obtiene una unidad del orden superior siguiente.

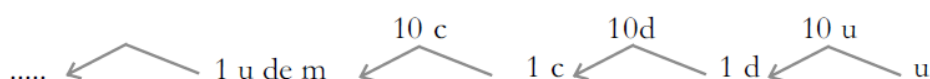


Imagen 2. Patrones en el S.N.D.

En muchas partes podemos encontrar diferentes clases de patrones, otro claro ejemplo son los números poligonales, las figuras que se desprenden son patrones puntuales, también se les suele considerar patrones geométricos que son aquellos que en su configuración, dan lugar a figuras geométricas. Los números triangulares son un tipo de patrón también relacionado con los patrones puntuales, los cuales se dibujan en forma de símbolos. Las características de los símbolos de los patrones puntuales, son: la forma, el tamaño y los colores. Cada una de estas características del patrón puntual, puede tener su propio valor informativo.

Números triangulares

Los números triangulares son aquellos que su configuración puntual tiene forma de triángulo. Forman la secuencia 1, 3, 6, 10, 15, 21 ...

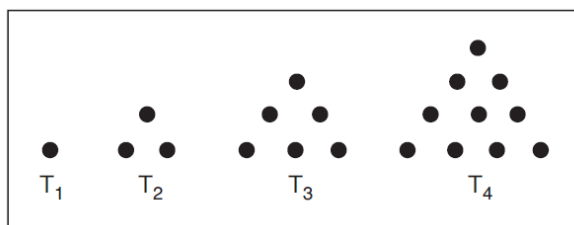


Imagen 3. Números triangulares

Números cuadrangulares

Los números cuadrados o cuadrangulares son aquellos que pueden dar lugar a una configuración en forma de cuadrado, figura 4. Forman la secuencia 1, 4, 9, 16, 25...

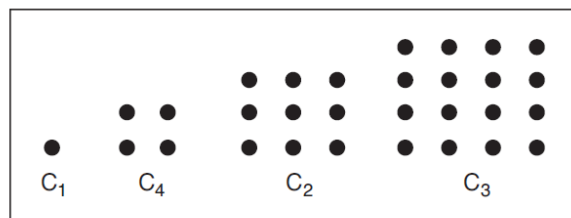


Imagen 4. Números cuadrangulares

La siguiente tabla recoge las secuencias de los números poligonales hasta el orden cinco. Cada una de estas secuencias es una sucesión de números naturales, en la última columna de la tabla se recoge el término general de estas sucesiones y en la última fila el término general de las sucesiones que se forman en cada una de las columnas. Se puede observar que las sucesiones de números naturales que se forman en las filas son sucesiones cuadráticas y las formadas en las columnas son sucesiones lineales (Castro, 1995).

Orden Nombre	1º	2º	3º	4º	5º	...	Termino general
Triangular	1	3	6	10	15	...	$1/2r(r+1)$
Cuadrangular	1	4	9	16	25	...	$1/2r(2r-0)=r^2$
Pentagonal	1	5	12	22	35	...	$1/2r(3r-1)$
Hexagonal	1	6	15	28	45	...	$1/2r(4r-2)$
Heptagonal	1	7	18	34	55	...	$1/2r(5r-3)$
Octogonal	1	8	21	40	65	...	$1/2r(6r-4)$
Nonagonal	1	9	24	46	75	...	$1/2r(7r-5)$
Decagonal	1	10	27	52	85	...	$1/2r(8r-6)$
...		...	...	...	...	...	...
Enegonal		n	$3(n-1)$	$2(3n-4)$	$5(2n-3)$		$1/2r[(r-1)n-2(r-2)]$

Imagen 5. Patrones geométricos

La identificación de patrones requiere del reconocimiento de semejanzas y diferencias, y la detección de los rasgos fundamentales que conforman una estructura de aquellos no esenciales a la misma. El trabajo con patrones incluye procedimientos de distinto orden de dificultad:

- De reproducción (copia de un patrón dado).
- De identificación (detección de la regularidad).
- De extensión (dado un tramo de la sucesión el alumno debe extenderla de acuerdo al núcleo que la rige).
- De extrapolación (completamiento de partes vacías).
- De traslación (utilización del mismo patrón sobre propiedades diferentes, Por ejemplo: cambiar formas por colores; cambiar una representación visual por una auditiva, etc.).

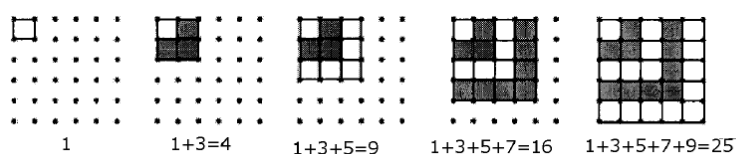


Imagen 6. Patrones de reproducción y traslación

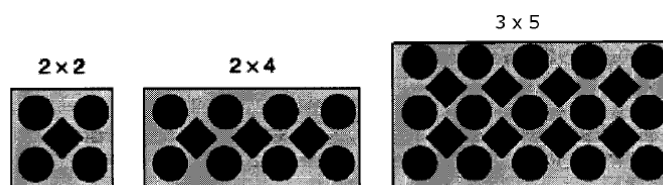


Imagen 7. Patrones de extensión.

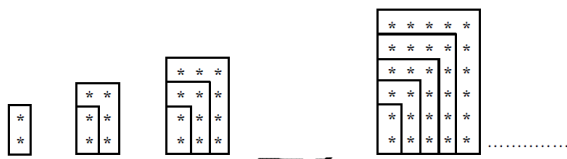


Imagen 8. Patrones de extrapolación.

A través del uso de los distintos tipos de patrones mencionados y ejemplificados, los estudiantes van construyendo comprensivamente recursos, que les permiten encontrar regularidades, interpretar y usar sus procesos de gestación.

La secuencia didáctica a presentar en este trabajo de grado incluye en sus actividades algunos de los anteriores tipos de patrones: reproducción, identificación, extensión y extrapolación.

2.2.4. Generalización y abstracción

Desde los primeros grados, se busca que el camino al álgebra se construya utilizando patrones de todo tipo. Las tablas y los arreglos numéricos dan origen a diferentes clases de consideraciones algebraicas. Muchas expresiones equivalentes del álgebra abstracta surgen con naturalidad al estudiar patrones numéricos, incluso se encuentran elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación en la solución de problemas, estas propiedades permiten la construcción de generalidades, pero sobre todo de argumentaciones para justificar dichas generalizaciones, las cuales a partir del análisis de casos particulares, llevan a organizar y justificar formas estructurales que capturan la generalidad.

En relación a lo anterior, es importante resaltar, que la generalización tiene como precedente la abstracción. No es posible construir conocimiento general sin eliminar lo individual, esto es, sin abstraer. La abstracción prepara para la generalización, dispone el análisis y es el requisito indispensable de la sistematización ordenada de los conocimientos; además, el proceso de

abstracción, permite el establecimiento de los variantes y su descripción simbólica, ya que se centra en las propiedades y relaciones de las operaciones.

Se distinguen dos formas de abstracción: una empírica, en la que el sujeto se limita a comprobar ciertas propiedades de los objetos exteriores y a analizarlas independientemente; la generalización en este tipo de abstracción empírica es de naturaleza extensional, es decir sólo contempla el paso de algunos a todos. Otra forma de abstracción es la reflexiva, se refiere a las acciones y operaciones que el sujeto realiza, que hacen de lo real una manifestación de lo posible. (Castro, Cañadas, & Molina, 2010).

2.2.5. Secuencia didáctica

Teniendo en cuenta la definición de Guerrero (2006), la secuencia didáctica se entiende aquí como el plan de actuación del profesor, correspondiente a lo que Llinares (1991) denomina la fase preactiva, donde se explicitan aquellos aspectos fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje.

“Un plan de actuación del profesor es en este sentido, una manera de entender la secuencia didáctica como la operativización de la relación didáctica, sustentada a partir de poner en momentos claramente diferenciados la construcción del significado matemático por parte del profesor y los estudiantes, los roles (compromisos y responsabilidades del estudiante y el profesor), la organización de aula (formas de trabajo), el tiempo requerido para su implementación (se refiere al tiempo didáctico), la descripción de la actividad (intención de la actividad, explicitar en que consiste), los materiales didácticos (como fichas, palabras escritas o dichas, gráficos) y los referentes teóricos para la actividad” (Guerrero, 2006. p.3)

Según lo planteado en la presentación del problema de este trabajo de grado y lo citado anteriormente, se presenta una secuencia didáctica entendida como una propuesta de aula, guiada por un proceso didáctico que tiene una serie de actividades articuladas a través de un contexto literario como es el cuento de

Hansel y Gretel, con el fin de movilizar contenidos matemáticos que potencializan el desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria.

Lo anterior deja ver como se entiende en este trabajo qué es una secuencia didáctica, los tipos de patrones que se va a trabajar en la secuencia diseñada y algunas dificultades y su posible solución cuando se está dando la transición aritmética-álgebra.

2.3. PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Teniendo en cuenta la problemática a tratar en este trabajo de grado, sobresale el contenido matemático correspondiente a patrones, variaciones numéricas y producto de naturales. Con relación a los patrones y variaciones numéricas, es importante resaltar nuevamente que el reconocimiento de patrones se encuentra asociado a los procesos de generalización y abstracción y se fundamenta en los conceptos de relación y función, y la multiplicación como función. Con base en esto, el uso de patrones numéricos se toma como punto central para la realización de este proyecto, y se concreta en la generalización, a lo largo de un proceso que se nutre de las relaciones y funciones, y que potencializa el desarrollo del razonamiento algebraico.

A continuación se expone el fundamento matemático de este contenido desde la teoría matemática y desde las matemáticas escolares.

2.3.1. Patrones y relación funcional

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad, la cual integra el estudio y comprensión de variables

intensivas con dimensión, y ayuda al estudiante a comprender el razonamiento multiplicativo. En relación a lo anterior, se resalta que el papel de las tablas y gráficas contribuye en gran medida a la identificación de patrones, ya que tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

La introducción de la función en contextos tales como el de la proporcionalidad, preparan al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como la relación establecida entre ellos. Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba directamente una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica. A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, cuadrático, exponencial, priorizando en éstos el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes).

Relaciones y Funciones

En la escuela tradicional, el concepto de función se aborda generalmente en los últimos años de la Educación Básica y se potencia con más fuerza en la Educación Media, a través diferentes definiciones tomadas de los distintos libros de texto en esta área. En este trabajo, el concepto de función se abordará desde la óptica que nos presenta el libro Cálculo Diferencial (Camacho, 2009).

Funciones

Cuando dos cantidades están ligadas de tal manera que dándose el valor de una de ellas, se pueda determinar el valor correspondiente de la otra, se dice que cada una de las variables es función de la otra. Si y se expresa inmediatamente, como en las ecuaciones siguientes:

$$y = ax, \quad y = x^n, \quad y = \log x, \quad y = \frac{a}{x}$$

Se dice que y es una función explícita de x y se emplea las notaciones $y = f(x), y = F(x)$.

Para dar una definición del concepto de función es necesario además conocer el significado de otros conceptos involucrados con ella, como lo son el de variable, variación, variabilidad, dependencia de variables, etc.

Variables

Se dará la definición de variable en los siguientes términos:

Una variable x , es una cantidad medible que aumenta o disminuye.

La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudiarán a través del cálculo diferencial, no obstante las variables adoptan el movimiento en diferentes contextos de las matemáticas:

- ✓ Aritmético: Se concibe como números reales contenidos en la recta real. Por ejemplo, en un segmento de recta, la variable x se mueve en el intervalo (a, b) tomando una cantidad inconmensurable de valores. La variación de x en el intervalo (a, b) es supuesto por la cantidad de valores que es susceptible de tomar.
- ✓ Geométricos: las variables como x se asignan a las cantidades que cambian o adquieren movimiento en las figuras geométricas. Las figuras suelen ser puntos, distancias, áreas, ángulos, radianes, volúmenes, etc.

Variabilidad

La cantidad de variación que se puede establecer a partir de la expresión $A(y) = \frac{a}{2}y$ es llamada variabilidad. Se expresara este concepto de la siguiente manera:

La variabilidad es el conjunto de todas las variaciones del movimiento de un fenómeno.

Como se puede observar la expresión $A(y) = \frac{a}{2}y$ indica con más claridad la dependencia entre las dos cantidades, toda vez que represente totalmente la variabilidad producida por el fenómeno; dicha expresión es llamada función. En el caso de la fórmula $A = \frac{a}{2}y$ esta idealiza el caso particular de una de las variaciones producidas por el fenómeno, toda vez que permite considerar al movimiento en un estado fijo de constancia.

Ecuación: $A = \frac{a}{2}y$

Función: $A(y) = \frac{a}{2}y$

Función como relación de dependencia entre cantidades

La variación que se da en las variables en los problemas físicos y geométricos ofrecen dos opciones para dar definición al concepto de función, la primera de esta es a través de la dependencia entre las propias cantidades y la segunda más precisa que la anterior en un sentido conjuntista en tanto el recorrido de las variables en intervalos numéricos que son sujetas a las cantidades.

Euler en 1748, estableció una relación de dependencia entre cantidades variables en los siguientes términos “se dice que una cantidad es función de otra cantidad”. Actualmente esto último se concibe en tanto la cantidad variable está en función de la otra cantidad.

La siguiente definición del concepto de función, dada en términos de la dependencia entre cantidades es la siguiente:

Dadas dos cantidades, decimos que la primera está en función de la segunda cuando cada valor de la segunda determina solo un valor de la primera.

Función desde el punto de vista de la teoría de conjuntos

Centrando de forma particular en la definición de función que propone el grupo Bourbaki, quienes se basan en el lenguaje de los conjuntos, se llega a la siguiente formulación:

Sean A y B dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de A y un elemento variable y de B se llama una relación funcional, si para todo $x \in A$, existe un único $y \in B$ que está relacionado con x en la relación dada. Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $x \in A$ el elemento $y \in B$ está relacionado con x en la relación dada. (Lacasta y Pascual, 52)

En relación a esta definición, los textos escolares proponen interpretaciones, que van encaminadas a que los estudiantes aprendan que una función es un conjunto de pares ordenados de la forma (x,y) tales que no deben haber dos pares ordenados diferentes en el conjunto, que tengan el mismo primer elemento.

Una de las interpretaciones que hace alusión a lo antes mencionado es:

Una función de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que le asigna a cada elemento x de X uno y solo un elemento y de Y . El conjunto X se llama dominio de la función.

Al no tenerse en cuenta las anteriores consideraciones, el concepto de función, se estudia dejando de lado el papel que juega como objeto que permite atrapar matemáticamente la covariación entre dos o más cantidades de magnitud, de la misma o distinta naturaleza, a través de algún registro de representación.

De esta forma, aunque se reconoce que este concepto necesita de unos elementos teóricos abstractos y por tanto sería mucho más pertinente trabajarlo en

los últimos grados de escolaridad, también se considera importante propiciar contextos que permitan dar inicio a su comprensión desde los primeros años. Para esto, como una de las alternativas se propone generar actividades centradas en el estudio de patrones y regularidades, rescatando los aspectos de la generalidad desde los fenómenos de variación, lo que constituye el eje fundamental de esta propuesta.

Por esta razón uno de los problemas determinantes que requiere ser abordado desde el pensamiento variacional, es entender que el paso en la apreciación del sentido variacional a la determinación de una expresión que correlacione dicha variación, no siempre es fácil e inmediato.

Esto significa, que si se entiende por sentido variacional, aquella apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otra u otras, y a la noción de correlación como la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional, entonces el problema es encontrar, si es posible, una función que exprese la variación entre dichas variables. Esto es, en términos del proceso de modelación matemática, formular el modelo.

Ejemplos de patrones numéricos y su relación funcional

En la multiplicación, podemos encontrar patrones que fortalecen los conocimientos y que les ayudan a comprender a los estudiantes. Por ejemplo, saber que los productos de 9 forman el patrón $10 - 1, 20 - 2, 30 - 3$ (9, 18, 27), y así sucesivamente, es una ayuda para aprender el significado e importancia de las tablas de multiplicar.

Ejemplos:

Tabla del 9.

Esta dada por $f(a) = 9a$ tal que:

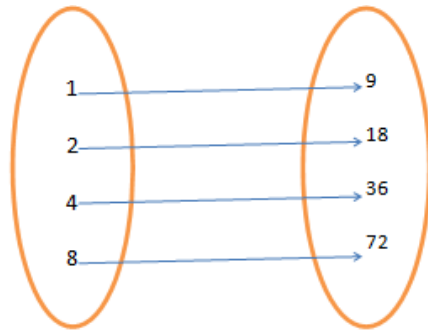
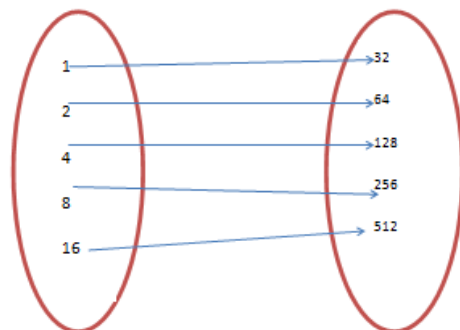


Tabla del 32.

Esta dada por $f(b) = 32b$ tal que:



Citando la definición anterior de función, en las tablas de multiplicar, podemos encontrar un claro ejemplo de patrones que se rigen por la constante que acompaña a la variable; sea cual sea el valor de la variable, por el hecho de estar acompañado de una constante va siguiendo una secuencia que al final serán los múltiplos. Pero no es el único lugar donde se pueden encontrar patrones, la multiplicación en general es rica en este concepto de gran importancia para las matemáticas, otro ejemplo podrían ser los números elevados a un número n .

Ejemplo:

Sea $f: AB$ definidas por $f = X^2$

Sea $y: AB$ definidas por $y = X^3$

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	n
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	n^2
Cubo	1	8	27	64	125	216	343	512	n^3

Tabla 1. Patrones en la multiplicación.

La multiplicación como función⁸

El trabajo inicial en la educación básica primaria se constituye en la base para el desarrollo del concepto de función en los años posteriores, y por supuesto, en el uso, sentido y significado de las funciones desde la modelación de situaciones y fenómenos físicos.

Las relaciones funcionales se dan a partir del análisis de correlaciones entre dos o más variables. Esto se muestra desde los problemas típicos de multiplicación, hasta las situaciones de variaciones complejas como las exponenciales, logarítmicas, etc.

Para el caso de la multiplicación, se tiene que la relación $f(n) = n \times f(1)$ se puede obtener por dos vías diferentes: a partir del análisis escalar o del análisis funcional.

⁸ Para ampliación de este apartado ver unidad n° 3 del modulo pensamiento variacional de la universidad de Antioquia (2006) paginas 77-88.

En el primero, el análisis por escalar, la multiplicación por n es el resultado de analizar como la variación en uno de los espacios, determina los valores posibles en el otro (en cierta forma, las llamadas tablas de multiplicar tienen su origen en una mirada de la multiplicación, como un problema de variación conjunta de dos espacios de medida). Este tipo de análisis pone en relación las variaciones en uno de los espacios de medida, con respecto a las variaciones en el otro. O dicho de otra forma, cambios en un espacio de medida, generan cambios simétricos en el otro.

Esto es, en un problema típico de multiplicación, al valor de la unidad en un espacio de medida $E(1)$, se corresponde con un valor k en el otro espacio de medida $E(2)$. De esa forma, si en el espacio $E(1)$ el valor de unidad se repite 2, 3 ..., n -veces, entonces el valor k en el espacio $E(2)$ se repite esta misma cantidad de veces, de tal forma que a 2 veces la unidad se le corresponde 2 veces el valor de k , a 3 veces la unidad se le corresponde 3 veces el valor de k , y así sucesivamente.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} E1 & E2 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{c} 2\text{-veces} \\ \vdots \\ 3\text{-veces} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow f(1)=k \\ 2 \rightarrow f(2)=2k \\ 3 \rightarrow f(3)=3k \\ \vdots \\ 9 \rightarrow f(9)=9k \end{array} \right. \\ \vdots \\ n \rightarrow f(n)=nk \end{array} \right\} \begin{array}{c} 2\text{-veces} \\ \vdots \\ 3\text{-veces} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 2\text{-veces} \\ \vdots \\ 3\text{-veces} \end{array}} \right\} n\text{-veces}
 \end{array}$$

Imagen 9. Análisis escalar

Por su parte, el procedimiento funcional, es a través del planteamiento de una relación entre los dos espacios de medida, es decir, reconocer que la multiplicación de n por C , produce el valor de $f(n)$. Esto es válido en tanto se

tiene que para todo par de valores correspondientes, uno de cada espacio de medida, se cumplen las siguientes equivalencias: $\frac{f(1)}{1} = \frac{f(2)}{2} = \dots = \frac{f(n)}{n} = f(1)$.

Por lo tanto $n f(1) = f(n)$

En este tipo de análisis es necesario considerar las unidades de las cantidades de cada espacio de medida, pues el cociente no se hace solo con los números, sino con las unidades también.

De acuerdo a todo lo anterior, este trabajo se enfatiza en la generalización de patrones numéricos y su relación estructural y funcional, con el fin de aportar al desarrollo del pensamiento variacional desde la Educación Básica Primaria, a través de actividades en las que los estudiantes puedan ver la dependencia entre cantidades, y a partir del establecimiento de relaciones entre variables logren dar inicio al proceso de generalizar. (Universidad de Antioquia, 2006).

CAPÍTULO III:

GENERALIZACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS



En este capítulo se presentan todos los aspectos relacionados con el diseño, concepción e implementación de la secuencia didáctica sobre generalización de patrones como una alternativa para desarrollar el pensamiento variacional en la Educación Primaria, incluyendo su descripción y aplicación, los logros que se pretende alcancen los estudiantes en las preguntas al enfrentarse a cada situación y saberes matemáticos involucrados. Por último, se muestra el informe detallado de los resultados con su respectivo análisis según los porcentajes obtenidos en la aplicación de la secuencia y algunas conclusiones específicas de tales resultados.

En primer lugar, se expone las fases en las que se desarrolló el diseño de la secuencia, presentando cada una de las situaciones diseñadas con su respectivo análisis y objetivo. Este análisis incluye los aspectos correspondientes a la aplicación en el aula; es decir, el número de estudiantes que participaron, la cantidad de sesiones en las que se realizó y el tiempo utilizado en cada una de ellas.

En segundo lugar, se abordan los aspectos cualitativos y cuantitativos, que hacen referencia tanto al análisis de los resultados arrojados por los estudiantes, como al registro de sus desempeños, respectivamente.

3.1. Sobre la secuencia didáctica

El diseño de la implementación y el análisis de resultado de la secuencia propuesta en este trabajo, tiene como principal referencia, los aportes que hacen Mason (1985) y Molina (2007). De acuerdo con el primer autor las habilidades que se pueden movilizar desde el estudio de patrones son *ver, decir, registrar y probar* enfocándose desde la generalización, como una ruta hacia el álgebra o como una base de ella. En relación con el segundo autor se propone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas. Para ello, se recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo.

Lo que se busca con la secuencia, es que los estudiantes empiecen a reconocer lo que es un patrón, desde la identificación de sus principales características, y así logren expresarlo de alguna forma (no necesariamente dado desde lo simbólico, sino mediante el lenguaje natural o el uso de dibujos, entre otros), favoreciendo el acercamiento al razonamiento algebraico, desde la Educación Básica Primaria.

3.1.1. Diseño y descripción de la secuencia

La secuencia está propuesta para estudiantes de Tercero de Primaria, con el fin de poder analizar los patrones numéricos desde los aspectos multiplicativos. Cuyo objetivo comprende aportar elementos conceptuales para el desarrollo del pensamiento variacional, a través de la generalización de patrones numéricos, para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra en la Educación Secundaria.

A continuación, se describen los aspectos que se tuvieron en cuenta durante el diseño de la secuencia, incluyendo los relacionados a su estructura.

Para el diseño de la secuencia, tal como se mencionó anteriormente, se parte del marco teórico presentado en el capítulo dos, en el que se enfatiza la estructura multiplicativa y su potencial para el reconocimiento de regularidades. La secuencia se divide en cuatro situaciones⁹, que a su vez están conformadas por varias actividades explicadas en las siguientes tablas.

Situación 1		Acerquémonos a los patrones		
Cantidad de actividades	3	Número de preguntas por actividad		
		4	3	3
Objetivo y/o propósito				
Esta situación empieza con la lectura de la adaptación del cuento Hansel y Gretel, a partir del cual se desprenden todas las actividades. Con el fin de contextualizar a los estudiantes después de la lectura se proponen unas preguntas cortas, en las que se pretende que el estudiante se familiarice con los aspectos centrales del cuento. Luego de esta “introducción” al contexto en el que se desarrollara la secuencia, se inicia la actividad que va a ser objeto de estudio: Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica primaria: Generalización de patrones numéricos En general, esta primera situación está enfocada hacia el reconocimiento visual de patrones geométricos, involucrados desde diseños artísticos, aspecto propuesto desde la				

⁹ El concepto de situación se entiende en este trabajo como un conjunto de actividades que posibilitan la conceptualización de saberes matemáticos, articulados en un determinado contexto.

primera fase que plantea Mason (1985) expuesta en el marco teórico, es decir, el *ver*. Los estudiantes, deben reconocer el patrón, a través de la visualización, para poder completar correctamente los diseños presentados. Posteriormente, a través de unas preguntas, se hace énfasis en dos aspectos: el primero relacionado con la organización de las figuras que componen el patrón, con el fin de que se empiece a reconocer su estructura (en este caso son patrones de extrapolación que permiten completar las partes vacías); y el segundo concerniente a la cantidad de figuras y la relación entre ellas (proceso que permite el trabajo con patrones de extensión, en el cual dadas unas figuras del diseño, el estudiante debe continuar la secuencia de acuerdo al núcleo presentado). Finalizando la situación uno, se propone una actividad de diseño, utilizando material concreto (masmelos y palillos de dientes), para la creación personal de una secuencia, con el propósito de corroborar los conocimientos sobre patrones adquiridos por los estudiantes al terminar la situación.

Tabla 2. Situación 1.

Situación 2	Hansel y Gretel y los patrones numérico		
Cantidad de actividades	2	Número de preguntas por actividad	
		6	5
Objetivo y/o propósito			
Tiene como objetivo realizar la transición desde el reconocimiento de los patrones a través de imágenes, hacia los patrones numéricos. Para esto, la primera actividad involucra imágenes, que permiten la identificación del patrón (patrón de identificación), pero al mismo tiempo, intenta impulsar al estudiante a que reconozca la regularidad y continúe la sucesión, sin necesidad de apoyarse en tales imágenes. Posteriormente se les propone que expresen de forma general cómo podrían encontrar un término cualquiera de la sucesión. Esto con el fin de potencializar, además del <i>ver</i> , la segunda fase planteada por Mason (1985), el <i>decir</i> . De esta forma, los estudiantes además de identificar el patrón, lo expresan de acuerdo a sus herramientas. Finalmente, al igual que con la primera situación, se propone al estudiante la creación de una secuencia que tenga un patrón, pero esta vez, dada desde lo numérico y sin el uso de material concreto.			

Tabla 3.Situación 2.

Situación 3	Patrones y productos con piedritas		
Cantidad de actividades	2	Número de preguntas por actividad	
		7	4
Objetivo y/o propósito			
el propósito va enfocado al trabajo con los múltiplos y divisores de un mismo número y de números distintos; esto con El propósito es que los estudiantes puedan reconocer que existe una forma general para expresar el resultado, y que además, identifiquen las relaciones funcionales existentes entre las dos variables, tomando la multiplicación como una operación cuaternaria, en la que se hace énfasis desde el análisis escalar. La situación se desarrolla mediante la utilización del registro en tablas y sobre todo las últimas dos actividades se desarrollan a partir de tablas que permite establecer las relaciones estructurales de la tabla de multiplicar del siete.			

Tabla 4. Situación 3.

Situación 4	Estrategias multiplicativas		
Cantidad de actividades	3	Número de preguntas por actividad	
		3	4
Objetivo y/o propósito			
El objetivo es continuar con el trabajo de la multiplicación como operación cuaternaria que viene desarrollándose desde la situación anterior, en la que se identifican unas relaciones de variación entre los dos espacios de medida; además se potencia el trabajo con las propiedades multiplicativas (asociativa y conmutativa), las cuales permiten la construcción de generalidades y de argumentaciones para justificarlas, a través de formas estructuradas. De este mismo modo, se pretende que a través de dos variables dadas como el número de triángulos y el número de barquillos, se encuentre una relación y se pueda expresar de forma general de tal manera que se verifique para cualquier número que cumpla esa condición.			

Tabla 5. Situación 4.

3.1.2. La secuencia

En el diseño de la secuencia didáctica propuesta, se ha considerado de vital importancia la coherencia entre los contenidos matemáticos a ser movilizados, su organización, su potencialidad, y la intención de los aspectos que se pretende desarrollar a partir del pensamiento variacional relacionados con la generalización de patrones. A continuación se muestra la secuencia, los logros de cada situación y se describe el propósito matemático y didáctico de cada una de las actividades de las cuatro situaciones propuestas.

Situación 1: Acerquémonos a los patrones

Logro: Identificar patrones en contextos artísticos y geométricos, que permitan establecer relaciones tanto numéricas como de forma, entre los diferentes elementos que los componen.

Contenidos matemáticos involucrados:

En la primera parte de las actividades de la situación 1, las preguntas que se hacen son referentes al cuento Hansel y Gretel, esto con el fin de contextualizar la secuencia didáctica, que a partir de la pregunta 2 involucra fines matemáticos. El contenido movilizado es la idea de patrón como un elemento que se repite en un determinado diseño o serie, lo cual hace parte de los contenidos presentados por los Estándares Curriculares del MEN en lo relacionado al desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

“Para iniciar el estudio de la variación desde la educación básica primaria es necesario tomar como herramienta los patrones ubicándolos en un contexto matemático, los escenarios geométricos y numéricos deben de ser utilizados para reconocer y describir regularidades”. (MEN, 1998)

Tomando como referencia la cita anterior se diseñó un conjunto de actividades contextualizadas desde lo geométrico basadas en diseños artísticos

que tuvieran patrones, donde el estudiante debe reconocer de qué forma se presenta la regularidad y que la figura tiene una manera de comportarse que no es al azar sino que es regida por una regla que ellos deben “ver”.

Para la segunda parte de actividades de la situación 1 y continuando con el estudio de la variación, se diseñó un grupo de actividades donde los estudiantes deben observar la secuencia que se presenta, reconocer cuál es el siguiente término de la secuencia, encontrar el patrón, expresarlo matemáticamente y justificarlo con sus propios argumentos, usando el lenguaje natural u otras herramientas. El razonamiento aquí como proceso general es muy importante ya que permite utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998).

Situación 2: Hansel y Gretel y los patrones numéricos

Logro: Establecer relaciones numéricas que permitan continuar una secuencia de números e iniciar el proceso de generalización en los estudiantes en la forma de calcular un número cualquiera de la secuencia, a través de la variación y el cambio.

Contenidos matemáticos involucrados:

En la segunda situación se moviliza el contenido matemático de la adición como un modelo matemático de cierto tipo de variaciones, es decir, se basa a partir de lo aditivo para fomentar el desarrollo del pensamiento variacional a través de la sucesión de Fibonacci contextualizada con el cuento, en donde se inicia con 0 y 1, y a partir de ahí cada elemento es la suma de los dos anteriores, y se expresa de la siguiente manera:

Los números de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$ quedan definidos por las ecuaciones

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ Para } n = 2, 3, 4, 5, \dots$$

Esto produce los números

- $f_0 = 0$
- $f_1 = 1$
- $f_2 = 1$
- $f_3 = 2$
- $f_4 = 3$
- $f_5 = 5$
- $f_6 = 8$
- $f_7 = 13$

En esta actividad no se busca que los estudiantes lleguen a formular expresiones algebraicas para encontrar una respuesta de manera general, pero si que a partir de casos particulares ellos puedan decir qué reconocen en la sucesión que se propuso.

En lo anterior también se puede ver un segundo concepto que es el de función, pero podría ser mejor abordado si se trabaja en grados superiores, por ahora es importante la relación numérica que ellos puedan observar a través de las tablas “donde también se pueden usar posteriormente para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto. La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas” (MEN, 1998).

La segunda parte de la situación está enfocada en completar una secuencia numérica regida por un patrón, además en la elaboración de una secuencia por parte de los estudiantes, aquí se establecen relaciones numéricas para identificar cómo varían los números que hacen parte de las sucesiones.

Situación 3: Patrones y producto con piedritas

Logro: Identificar y formular patrones numéricos con estructuras multiplicativas, estableciendo relación entre las variables de los dos espacios de medida.

Contenidos matemáticos involucrados:

En la situación 3, el contenido matemático que se moviliza es el de estructuras multiplicativas desde el enfoque de la resolución de problemas tal como lo plantea Orozco (2009). Tradicionalmente la operación multiplicativa se ha presentado como una relación ternaria $a \times b = c$ pero para Vergnaud (1983) se trata de una relación cuaternaria entre 4 cantidades y dos tipos de medidas. Dos cantidades corresponden a medidas de un cierto tipo (por ejemplo, número de objetos) y las otras dos, son medidas de otro tipo (por ejemplo, su precio).

En relación con lo anterior en la resolución de problemas multiplicativos se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones, que para su solución exigen las operaciones de multiplicación y de división: Isomorfismo de medidas y producto de medidas. En este trabajo se abordan las correspondientes a la categoría de Isomorfismo de medidas.

Problemas de multiplicación

M_1	M_2	
1	7	Si Hansel por cada paso que da tira 7 piedras, al dar 12 pasos
12	x	¿cuántas piedras habrá tirado?

Problemas de división – partición

Para Vergnaud (1983) en la multiplicación surgen dos tipos de problemas de división. El primer caso se define cuando la incógnita corresponde al multiplicando y obedecen al siguiente esquema:

M_1	M_2
1	X
2	6

Si al dar dos pasos Gretel arroja 6 piedritas, ¿Cuántas piedritas arroja al dar 1 paso?

División – agrupamiento

Estos problemas se denominan de agrupamiento. La incógnita corresponde al número de partes que se forman en el espacio de medida M_1 . En este tipo de problemas se conoce el valor de cada parte y debe encontrar el número de partes resultantes.

M_1	M_2
1	6
X	54

Si cada paso Hansel arroja 6 piedritas, al arrojar 54 piedritas ¿cuántos pasos en total habrá dado?

La idea con actividades de este tipo contextualizadas desde el cuento Hansel y Gretel, es que los estudiantes puedan hacer uso de las diferentes herramientas con las que han trabajado (tanto en matemáticas en inglés como en español) desde lo aritmético, tales como la multiplicación egipcia y proporcionalidad directa simple, y como a través de este trabajo se puede hacer un acercamiento más profundo a lo que es la generalización mediante el uso de patrones multiplicativos utilizando la adición, sustracción, división y multiplicación.

Situación 4: Estrategias Multiplicativas

Logro: Identificar patrones numéricos a través de las propiedades de la multiplicación y la relación entre variables y establecer expresiones que permitan llegar a una generalidad de estos patrones.

Contenidos matemáticos:

Para la primera parte de la situación 4 al igual que la anterior (situación 3), se pretende movilizar el contenido de estructura multiplicativa desde el contexto de variación a través del isomorfismo de medidas, el cual toma la multiplicación como una operación que involucra cuatro cantidades, donde si por ejemplo se tienen dos cantidades y una de ellas aumenta o disminuye un cierto número de veces, la otra también se incrementa o disminuye en igual cantidad. Para la segunda parte de la situación el propósito es movilizar las propiedades de la multiplicación, centrando la atención en esta operación básica, que los estudiantes han aprendido en el colegio Bennett a través de diferentes estrategias como la multiplicación egipcia, la celosía y la rusa. Esta situación es la ampliación del contenido de la situación 3, pero con la intención de identificar patrones en las propiedades multiplicativas.

A continuación se presenta la secuencia didáctica que abarca las situaciones y los contenidos mencionados anteriormente.

Situación 1: Acerquémonos a los patrones.

Actividad 1: Reconozcamos patrones artísticos en la casa de dulce.

En parejas lee la siguiente adaptación matemática y resumen del cuento de los hermanos Grimm: Hansel y Gretel.

Hansel y Gretel



En el límite de un gran bosque vivía un pobre leñador con su mujer y sus dos hijos: el pequeño se llamaba Hansel y la pequeña Gretel. La familia tenía muy poco para comer y no les alcanzaba el dinero ni para comprar el pan diario. Una noche, mientras se atormentaba por la situación económica, el leñador le preguntó a su esposa ¿Qué va a ser de nosotros? ¿Cómo podremos alimentar a nuestros pobres hijos si ni siquiera tenemos nada para nosotros?.

Tengo una idea, respondió la mujer; mañana, bien temprano, llevaremos los niños a la parte más oscura del bosque, prenderemos una hoguera para ellos, le daremos un trocito de pan a cada uno, luego nos iremos al trabajo y los dejaremos solos; no encontrarán el camino de regreso y así nos libramos de ellos. El hombre no estuvo de acuerdo al principio pero al final lo aceptó.

A causa del hambre los dos niños tampoco habían podido dormir y oyeron lo que la madrastra decía a su padre. Gretel lloró y Hansel le respondió que no se preocupara que él tenía un plan. Cuando sus padres se durmieron se levantó, se puso su saco, abrió la puerta y salió rápidamente, recogió algunas piedritas blancas que brillaban como monedas y con ellas llenó sus bolsillos.

Al amanecer la mujer despertó a los niños les dio a cada uno un pedacito de pan, Gretel puso todo el pan bajo su delantal por que Hansel tenía los bolsillos llenos con veinticuatro piedras, de inmediato todos emprendieron camino hacia el bosque, Hansel iba tirando cada una de las veinticuatro piedritas a igual distancia por todo el camino, cuando llegaron al centro del bosque se

hizo justamente lo que la madrastra había pronosticado. Los niños se quedaron dormidos, y cuando despertaron ya era tarde, aunque Gretel estaba angustiada solo debían de esperar a que saliera la luna para ver alumbrar las piedritas y encontrar el camino, cuando la luna llena apareció caminaron durante toda la noche y llegaron a la casa de su padre al amanecer y él, que estaba muy arrepentido, de haberlos abandonado se alegró mucho de verlos.

Tiempo después la familia continuaba con los problemas económicos y la madrastra convenció de nuevo al padre de Hansel y Gretel que los debían abandonar pero esta vez en lo más profundo del bosque para que nunca más volvieran a encontrar el camino. Los niños volvieron a escuchar la conversación y Hansel pensó en hacer lo mismo de la vez anterior pero en esta ocasión las puertas y ventanas de la casa estaban totalmente cerradas. Al día siguiente salieron al bosque y Hansel partió su pan en cincuenta pedacitos, y los iba tirando en el camino uno cada tres pasos. Todo sucedió de la misma forma de la vez anterior pero con la diferencia que en esta oportunidad no encontraron el camino de regreso pues las aves se habían comido los pedacitos de pan.

En vista de la situación, desde ese momento los niños empezaron a caminar y caminar pero cada vez se perdían más en el bosque, hasta que siguieron el cantar de un pajarito que los condujo a una casita con el techo hecho de barquillos y pastel, ventanas de azúcar, el tapete de la entrada hecho de galletas con forma de hexágono, y paredes decoradas con diferentes figuras. Hansel se subió al techo y Gretel a la ventana, de pronto la puerta de la casa de dulce se abrió y salió una mujer anciana, los niños se asustaron pero la mujer muy amablemente los invitó a pasar a la casa donde les ofreció a escoger entre siete diferentes sabores de helados que ellos podían combinar como quisieran y los hizo sentar en unos asientos de chocolate, Gretel notó que los asientos tenían diferentes tamaños, lo cual le causó gran curiosidad. Después de comer su helado Hansel y Gretel se acostaron y creyeron estar en el paraíso pero la anciana era en realidad una bruja mala que engordaba a los niños para comérselos.

Al día siguiente, la bruja tomó a Hansel de la mano y lo encerró en una jaula asegurada con un

candado enorme que debía ser abierto con una combinación de 12 números.



Cerca de allí, había una secuencia de números que podían ser la clave para liberar el candado, pero algunos de ellos estaban tapados y el niño no los podía ver. Luego la vieja ordenó a Gretel prepararle mucha comida y un rico postre, así fue durante cuatro semanas y cada semana se iba duplicando la cantidad de comida y postre. Para preparar toda esa comida, Gretel debía acompañar a la bruja todos los días a un riachuelo que había en un lado oscuro del bosque con el fin de llevar agua suficiente para las labores de la casa. Con el paso de los años la vieja había construido un caminito delimitado por hongos agrupados por colores, los cuales le permitían identificar rápidamente la forma de llegar.

Cada día, después de llegar del riachuelo, la bruja iba donde Hansel y le gritaba: ¡muéstrame tus dedos para ver si engordas!, el niño le mostraba un huesito y como la bruja tenía vista defectuosa no podía saber que no era el dedo del niño; pasadas cuatro semanas sin que Hansel engordara, la impaciencia la desbordó y no quiso esperar más, ordenó a Gretel traer agua para cocinar a su hermano al otro día, ya no importaba si estaba flaco o gordo. Al amanecer la niña debía prender el fuego, pero la bruja quiso primero hacer el pan, para lo cual le pidió a Gretel que entrara al horno a probar la temperatura, cuando la niña estuviera adentro ella cerraría la puerta, la asaría y se la comería, pero la pequeña adivinó lo que la bruja pensaba y le dijo: No sé cómo hacer para entrar ahí, ¡Boba! dijo la bruja, la entrada es bastante grande: ¡fíjate, hasta yo misma podría entrar! se acercó hasta el horno y metió la cabeza, entonces Gretel la empujó con tanta energía que la bruja se fue hasta el fondo y ardió miserablemente.

Después de haber derrotado la bruja, la niña

de inmediato rescato a su hermano con el que encontraron en todos los rincones de la casa de dulce, cofres llenos de perlas y de piedras preciosas. Hansel llenó sus bolsillos y Gretel su delantal y de inmediato decidieron salir del bosque y volver a su casa, caminaron y caminaron hasta que reconocieron la salida del bosque; cuando llegaron a la casa se echaron a correr encima de su padre, el cual estaba muy alegre de volverlos a ver. Gretel sacudió su delantal del que caían perlas y piedras preciosas, y al mismo tiempo Hansel vaciando sus bolsillos, sacaba puñados y puñados de ellas. Minutos después del reencuentro, al darse cuenta que su madrastra no salía, Hansel y Gretel preguntan a su padre que le ha sucedido y él muy tranquilo les responde que había muerto hace unos días pero que eso ya no importaba, pues se sentía muy feliz por su llegada y que gracias a las perlas y las piedras preciosas, se acabarían las preocupaciones económicas y vivirían juntos y felices para siempre¹⁰.



¹⁰ Adaptación del cuento Hansel y Gretel realizada por Elizabeth Rivera y Luisa Fernanda Sánchez bajo la dirección de Ligia Amparo Torres, con base en la versión original de los hermanos Grimm editado por www.elaleph.com.

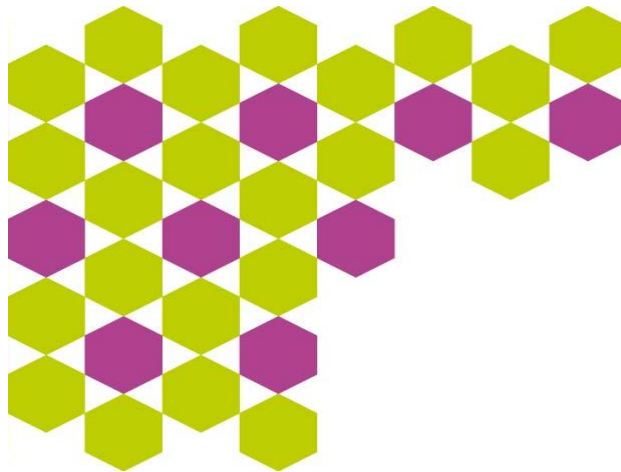
Secuencia didáctica



1. Preguntas sobre el cuento de Hansel y Gretel

- a. Describe como te imaginas que era la casa de la bruja por dentro y por fuera y di cuál de los objetos que pertenecen a la vivienda de la bruja, te llamo más la atención ¿Por qué?
- b. Si tu fueras Hansel ¿Qué estrategia hubieras utilizado para escapar de la casa de dulces de la bruja?
- c. Inventa un final diferente en máximo 3 renglones para la historia de Hansel y Gretel.
- d. ¿Cómo crees que la bruja pudo construir una casa de dulce que resistiera los días de lluvia, de sol y el fuerte viento del bosque?

2. Recuerda que la casa de dulce donde llegan Hansel y Gretel tiene las paredes decoradas con diferentes diseños, uno de ellos es el siguiente:



- a. Completa el diseño y explica ¿Cómo lo completaste?
- b. ¿Cómo se organizan los hexágonos en cada columna según el color?

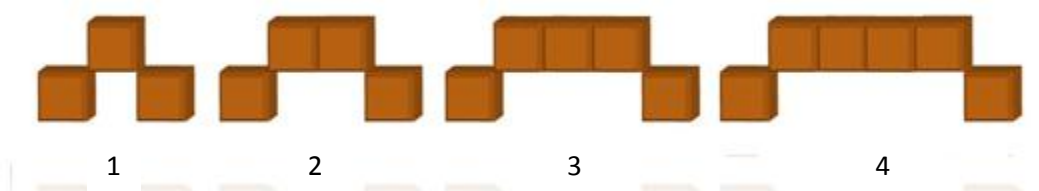
3. Hansel y Gretel se dan cuenta que el siguiente diseño está incompleto:



- Dibuja las figuras que hacen falta para completar el diseño y para continuar la secuencia, e indica ¿cómo lo hiciste?
- ¿Qué figuras tridimensionales forman el diseño?
- ¿Cómo están organizados los cubos que componen el diseño?

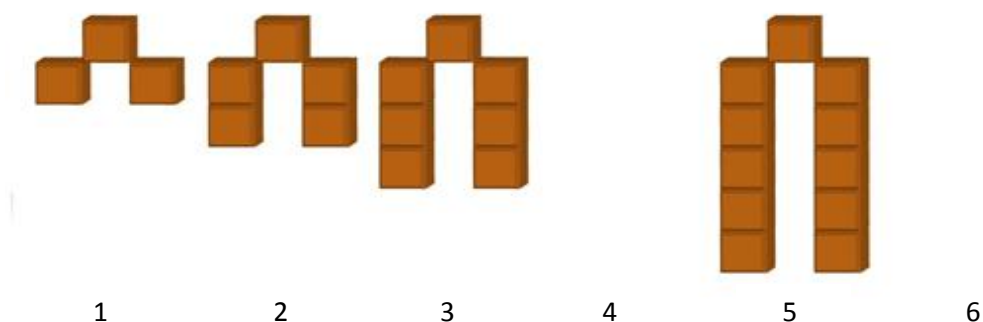
Actividad 2: Los asientos de chocolate y los patrones geométricos.

Gretel al entrar a la casa observa varios asientos de diferentes tamaños y formas los cuales están elaborados a base de cubos de chocolate.



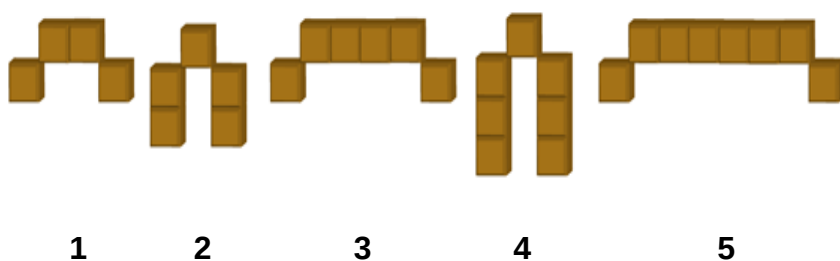
- Observa los anteriores asientos de chocolate.
 - Describe cómo cambia cada uno de ellos respecto al anterior, teniendo en cuenta la forma.
 - ¿Qué parte de los asientos varía? Y ¿Qué parte no cambia (permanece constante)?

2. Dibuja los asientos que faltan en la posición número 4 y 6 de la siguiente secuencia.



Cantidad numérica _____

- Justifica por qué lo hiciste de esa manera.
 - Asigna una cantidad numérica (sobre las líneas que hay debajo de la posición de la figura) que represente los cubos de chocolate de cada una de las posiciones, ten en cuenta los dos asientos que dibujaste.
 - ¿Qué cantidad numérica representaría el número de cubos en el asiento de la posición 11? ¿Cómo lo hallaste?
 - ¿Como varia el número de cubos de las patas de los asientos de chocolate anteriores?
3. Observa la siguiente secuencia de asientos de chocolate.



- Dibuja los asientos de la posición 6, 7 y 8.

- b. ¿Qué relación encuentras entre los asientos de las posiciones 1, 3 y 5 en comparación con los asientos de las posiciones 2, 4 y 6? ¿Por qué crees que se da esta relación?
- c. Dibuja los asientos de chocolate de las posiciones 10 y 13.

Actividad 3: Los asientos de masmelo diseñados con patrones.

Gretel pensó por un momento que los asientos de chocolate serían muy duros al sentarse y se imaginó como podrían ser de cómodos unos asientos hechos de masmelo.

- 1. Utiliza mínimo dos masmelos diferentes, para formar la serie de asientos que se pudo haber imaginado Gretel. No olvides que se debe conservar un patrón de comportamiento.
 - a. ¿Qué tuviste en cuenta para formar la secuencia?
 - b. Dibuja la secuencia que diseñaste.
 - c. ¿Por qué crees que tu diseño sigue un patrón? Justifica tu respuesta.
- 2. Dibuja dos secuencias de masmelos que cumplan un patrón de comportamiento.
 - a.
 - b.
- 3. Según lo trabajado hasta ahora, responde: ¿Qué es una secuencia y qué elementos se deben tener en cuenta?

Situación 2: Hansel y Gretel y los patrones numéricos.

Actividad 1: Patrones numéricos con hongos de colores.

La bruja mala para poder tener agua en su casa de dulce, debía ir todos los días a un riachuelo que había en un lado oscuro del bosque. Con el paso de los años la vieja decidió construir un caminito delimitado por puros hongos agrupados por colores, los cuales le permitían identificar rápidamente la forma de llegar. Un día Gretel se vio obligada a acompañarla y se dio cuenta que la organización de los hongos era bastante especial:



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6

1. Sin necesidad de dibujar escribe ¿Cuántos hongos debería tener la figura 7 y por qué?

2. Completa la siguiente tabla:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	15	18	20
Número de hongos	1	1	2	3	5	8			34				

3. Escribe como encuentras cualquier número de hongos según la posición dada.

4. ¿Qué cantidad de hongos azules y hongos rojos tendrá la posición 9? Explica como lo hiciste.

5. ¿Cómo aumentan los hongos azules de la posición 5 a la posición 6 ¿Qué relación existe entre los hongos azules y los rojos en las demás posiciones?

6. Dibuja una secuencia de triángulos que tenga un patrón.

Actividad 2: En búsqueda de la clave numérica.

La jaula donde se encontraba encerrado Hansel estaba asegurada con un candado enorme que debía ser abierto con una combinación de 12 números. Cerca de allí, había una secuencia de números que podían ser la clave para liberar el candado, pero algunos de ellos estaban tapados y el niño no los podía ver. La secuencia es la siguiente:



1. Ayúdale a Hansel a completar la serie con los números faltantes.
2. ¿Qué tuviste en cuenta en el momento de buscar los números que faltaban para completar la que podría ser la clave del candado?
3. Hansel cree que uno de los números que completan la secuencia es el número 52, ¿estás de acuerdo con el niño? ¿Por qué?
4. Si esta serie continúa ¿Existe alguna forma de calcular cualquiera de los números que siguen? Explica tu respuesta, escribiendo la manera de hacerlo.
5. Construye una serie numérica que sea la clave para abrir una caja fuerte (no olvides que debe tener un patrón).

Situación 3: Patrones y producto con piedritas.

Actividad 1: El producto como organizador de arreglos con piedritas

Recuerda que Hansel y Gretel, cuando iban de camino a lo profundo del bosque, arrojaron un grupo de piedritas, imagina que no eran 24 sino 500 piedritas y que riegan por el camino 240 de esas 500 piedritas en grupos a igual distancia.



1. Indica el número de piedritas que le quedaron a los niños, después de haber arrojado las 240 piedritas y explica como llegaste a la respuesta.
2. Hansel y Gretel deciden armar grupos de tres piedritas. ¿Cuántos grupos de 3 piedritas pudieron armar? ¿Cómo encontraste la respuesta?
3. Si en lugar de ser grupos de tres, fueran grupos de 4 piedritas, ¿Cuántos grupos podrían formar? Justifica como lo hiciste.
4. Para hacer 8 grupos iguales de piedritas, ¿Cuántas piedritas han de recoger a la vez? ¿por qué?
5. Hansel y Gretel escribieron numéricamente las posibles organizaciones que podían hacer con las piedritas, pero se le borraron algunos datos. Ayúdale a completar la siguiente tabla.

Grupos de piedritas	Número de piedritas en cada grupo	total
8		240
	60	240
12		240
	24	240

6. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información dada:

Grupos de piedritas	Número de piedritas	total
5		300
	3	81
6		72
	7	98
11		44

7. Encuentra y escribe una forma de escribir el total, teniendo en cuenta que el número de grupos es a, el número de grupos es b, y el total es c.

Actividad 2: Estrategias multiplicativas.

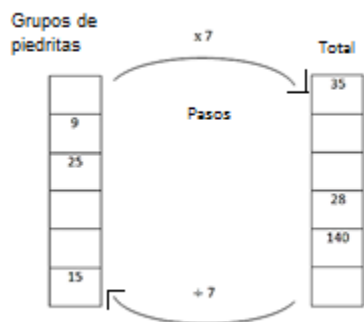
Hansel partió su pan en varios pedacitos los cuales regó por el camino, 1 cada 7 pasos. Con tanto trabajo solo registró algunos datos, como se muestra en la siguiente tabla. Con tu experiencia multiplicativa:

1. Reconstruye la siguiente tabla:

Pedazos de pan	Pasos
1	7
	14
4	
	56
10	
18	
	140
	280
58	
	812

- a. Explica como hiciste para completarla.
 - b. Indica las técnicas multiplicativas que usaste para completar la tabla anterior. Explica tu respuesta.
2. En relación con la tabla del literal número 1(pregunta anterior):
 - a. Escribe cuántos pedazos de pan regó Hansel cuando dio el paso 35. Explica como encontraste la solución.
 - b. Escribe el número de pedazos de pan que Hansel regó cuando dio 182 pasos. Explica como encontraste la respuesta.
3. Considerando la tabla del literal 1:
 - a. Escribe una relación que encuentres entre la cantidad de pan (primera columna) y el número de pasos (segunda columna).
 - b. ¿Qué operación usaste para encontrar el número de pasos? y ¿Cuál operación usaste para hallar el número de pedazos de pan?
4. El siguiente esquema muestra una relación entre los grupos de piedras que Hansel y Gretel podían formar, según el número de pasos, y el total de piedritas que tenían.

- a. Completa las siguientes columnas según la operación indicada.



- b. Establece una relación entre el esquema anterior y el número pasos y pedazos de pan (tabla de la pregunta 1).

Situación 4: Estrategias multiplicativas.

Actividad 1: Los Muffins de limón del padre de Hansel y Gretel

Cuando los niños regresan de nuevo a su hogar, el padre les ofrece de comer todo lo que ellos quieran, Hansel y Gretel le dicen que quieren Muffins de limón ¡su preferido!, los ingredientes que el padre de los niños recuerda para preparar dos porciones de torta son:

12  de harina

1  Huevo

5  de 

7  de 

3  de 

2  (Ralladura de cascara de limón)

1.El padre de los niños quiere organizar una tabla con la cantidad de ingredientes que necesita para preparar varias porciones, ayúdale a llenarla

INGREDIENTES PORCIONES	 HARINA	 HUEVOS	 LECHE	 AZUCAR	 MANTEQUILLA	 LIMON
2						
4						
8						
6						
12						

2. Escribe cuántas cucharadas de harina serían necesarias para preparar 57 porciones de torta. Explica como lo harías.
3. Si quisiéramos saber cuántas cucharadas de azúcar se necesitan para un número cualquiera de porciones de torta, que operación utilizarías y como lo expresarías de forma general.
4. Si el padre de Hansel y Gretel utilizó 17 huevos, ¿cuántas cucharadas de mantequilla necesita? Y ¿cuántas porciones podría preparar?

Actividad 2: El techo de barquillos

El techo de la casa de dulce estaba formado por filas de triángulos construidos por barquillos como se muestra a continuación:



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

- a. ¿Cuántos triángulos y cuantos barquillos deben tener las figuras 4,5 y 6 que siguen en la secuencia? ¿por qué?

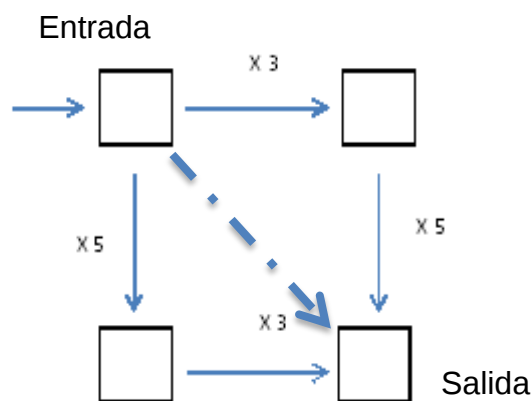
Completa la siguiente tabla y establece una relación entre los triángulos y el número de barquillos.

Número de triángulos							
Número de barquillos							

- b. Si una secuencia está compuesta por 9 triángulos. ¿Cuántos barquillos se necesitan para formarlo? ¿por qué?
- c. ¿Con 21 barquillos cuantos triángulos se podrían formar? ¿Por qué?
- d. Si n es el número de triángulos, escribe una forma que permita encontrar el número de barquillos.

Actividad 3:

Hansel mientras estaba encerrado en la jaula se inventó los siguientes cuadros mágicos, escribe un número en el cuadro de entrada y efectúa las operaciones que te indica:



1. Compara el número de entrada y el número de salida ¿Cómo aumenta o disminuye?
2. Explica cómo se obtiene el número de salida utilizando las operaciones indicadas. ¿existe alguna regla?
3. Ensaya con diferentes números en el recuadro de entrada y di si al desarrollar las operaciones se cumple la regla para cualquier número que en la salida, realiza mínimo 3 cuadros mágicos.
4. Teniendo en cuenta el cuadrado mágico que diste, completa los siguientes esquemas :

1. $\square \times (\square \times \square 5) = \square$

2. $(\square \times \square) \times \square = \square 30$

3. Explica qué tuviste en cuenta para hacerlo de esta manera.

3.2. Metodología empleada en la secuencia didáctica

Para la aplicación de la secuencia propuesta en este trabajo de investigación se contó con 8 secciones de clase las cuales tenían una duración aproximada de 45 y 50 minutos cada una, los espacios con los que contamos fueron prestados en su mayoría por la directora del grupo y algunas horas de la clase de matemáticas en español.

Se planearon actividades que podrían ser resueltas tanto de manera individual como de manera grupal, de esta forma en algunas de las actividades los estudiantes trabajaron en parejas y en la actividad en la cual se utilizó material concreto, trabajaron en grupos de cuatro. Las personas encargadas de dirigir las actividades fueron las dos personas autoras de este trabajo y en dos sesiones intervinieron otras dos profesoras del colegio, cada una en sesiones distintas. Durante la implementación, docentes y autoras con estudiantes interactuaron a través de preguntas que permitieron dejar ver los procesos y los obstáculos a los que los estudiantes se enfrentan en actividades como las planteadas. Para tener un registro de toda la aplicación, se contó con 2 cámaras digitales; con una se grababan las secciones de aplicación de la secuencia y con otra se hacía el registro fotográfico, también se utilizó la toma de notas como estrategia metodológica de recuperación de información; esto con el fin de tener acceso a las expresiones de los estudiantes y analizar de forma más detallada los procedimientos registrados.

3.3. Resultados y análisis de resultados

Situación 1: Acerquémonos a los patrones.

Número de estudiantes: 19

Descripción general de la aplicación de la actividad

La situación 1 fue aplicada en dos sesiones la primera el martes 29 de mayo del 2012, el tiempo utilizado en el desarrollo de la primera parte de la actividad fue de 55 minutos, la otra parte se aplicó el miércoles 30 de mayo del 2012 y duró 1 hora 30 minutos, contó con la participación de 19 estudiantes. En total se utilizaron 145 minutos que equivalen a 2 horas 25 minutos.

La actividad inicia luego de repartir a cada estudiante una copia de las actividades propuestas para esa sección y hacer lectura de la adaptación del cuento Hansel y Gretel de forma general, luego se procede a entregar a cada niño una copia con preguntas relacionadas al cuento que son una introducción a la secuencia didáctica.

Individualmente, cada estudiante comenzó a desarrollar la actividad y a realizar preguntas sobre los enunciados de las actividades. La primera parte que consta de cinco preguntas, está dirigida a la observación de unos diseños que los estudiantes debían completar según las regularidades identificadas y explicar qué habían tenido en cuenta para hacerlo. La segunda parte también requería mucha visualización pero el enfoque se da desde casos particulares de patrones donde deben completar secuencias, y explicar de qué forma varía o se queda constante el patrón planteado, dependiendo de la clase del patrón propuesto en las series que hacen parte de las actividades.

Observaciones de las tablas y los análisis:

En la escritura de las tablas y los análisis se emplearon dos convenciones de abreviatura, y son las siguientes:

C.E.: Cantidad de Estudiantes

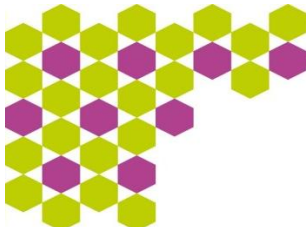
T(n): T significa tipo de respuesta y n cualquier número, por ejemplo: T1, T2, etc.

S(n): S Significa situación y n cualquier número.

A(n): A significa Actividad y n cualquier numero.

L: Literal.

Tabla 6. Tipificación situación 1, actividad 1, pregunta 3, literales a y b.

Actividad 1						
3. Recuerda que la casa de dulce donde llegan Hansel y Gretel tiene las paredes decoradas con diferentes diseños, uno de ellos es el siguiente: 						
a. Completa el diseño y explica ¿Cómo lo completaste?						
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C. E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que completan el diseño en forma correcta, siguiendo un patrón de comportamiento	7	35 %	Siguen el patrón tomando de referencia el hexagono violeta y los triángulos que forman los espacios en blanco entre todos los hexágonos.	1	14 %
				General, aludiendo a la organización de las figuras según los colores.	2	29 %
				Toman como referencia los hexágonos verdes y cómo los violeta se organizan alrededor de estos.	1	14%
				Siguen el patrón de organización de los hexágonos por filas.	3	43 %
	Estudiantes que			Observan la estrella que se	4	33%

T2	completan el diseño sin seguir el patrón de comportamiento .	12	65 %	forma entre los triángulos blancos de los espacios, y los hexagnos verdes y el hexagono violeta.		
				Se guían por el resto del diseño.	5	42%
				Toman como referencia los triángulos que se forman con los espacios en blanco.	2	17%
				Lo realizan por columnas.	1	8%
b. ¿Cómo se organizan los hexágonos en cada columna según el color?						
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que identificaron la organización de los hexágonos en cada columna según el color.	8	42%	Tienen en cuenta el patrón de comportamiento verde, verde, violeta, verde, verde.	6	75%
				Se guían por la cantidad de hexágonos violeta en cada columna (en la primera columna: 1 violeta, en la segunda columna: 2 violeta, en la tercera columna: 1 violeta, y así repetitivamente (1,2,1,2,1,2,1,2)).	2	25%
T2	Estudiantes que no logran identificar la organización de los hexágonos de acuerdo a la ubicación de los colores en cada columna.	10	53%	Hexágono violeta en el centro, 1verde arriba, 1 verde abajo, y 2 verdes a cada lado (forma de flor).	3	30%
				El color va intercalado en cada fila.	1	10%
				Responden con el enunciado de la pregunta.	4	40%
				Siguiendo la secuencia de los demás.	2	20%
T3	Estudiantes que no responden la pregunta.	1	5%	Sin justificación.		100%

Análisis actividad 1, pregunta 3, literales a y b.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la pregunta 3 que se muestran en la tabla 1, se observa que la mayoría de los estudiantes (12 de 19 – 65%) completan el diseño sin tener en cuenta un patrón de comportamiento, el 35% (7 de 19) lo hacen siguiendo un patrón. Estos últimos estudiantes muestran diferentes formas de visualizarlo: cerca de la mitad pueden seguir la organización de los hexágonos

por columna, manera ésta que permite dar cuenta de la organización de los hexágonos por colores en forma eficiente, es decir, que al observar el espacio particularizando por columna o fila se hace evidente el número de hexágonos verdes que se alternan con los violetas. Por otro lado, hay estudiantes que observan la organización de estos hexágonos según formas conocidas o que el dibujo permite tener en cuenta (forma de flor y estrella), lo que deja apreciar que hay una manera global de ver esta organización sin hacer particiones del espacio donde están los hexágonos (filas o columnas).

En el caso del 65% que completa el diseño sin seguir un patrón, se observa que utilizan casi las mismas estrategias que los que lo hacen, pero no logran realizarlo con éxito debido a varias limitaciones, relacionadas con la forma del dibujo o con el espacio que se tiene para hacerlo.

Lo anterior permite apreciar que los estudiantes de grado tercero, pueden completar un patrón de comportamiento de figuras de colores, utilizando estrategias que van desde la observación global de la organización y que puede llevar a reconocer en forma exitosa el patrón, hasta el hecho de no hacerlo porque los dibujos (hexágonos) o son muy pequeños, o no corresponden a la forma correcta (en el caso de la respuesta de los círculos), lo que hace que, a pesar de tener el patrón “en la cabeza”, no lo puedan expresar en el dibujo de manera adecuada, tal como se observa a continuación:

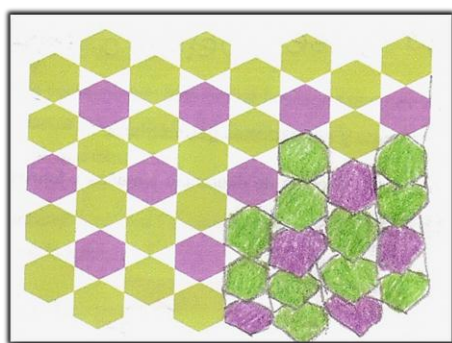


Imagen 10. S1.A2.La

Además, desde esa primera actividad hay estudiantes que buscan estrategias exitosas para encontrar el patrón, tal como se mostró antes, ya que visualizan las regularidades a través de la organización del espacio que da la secuencia, en este caso observando las variaciones de los hexágonos por columna, según la cantidad y el color de estos.

Es importante anotar que en la parte b de la pregunta 3, la intención fue guiar la mirada de los estudiantes hacia las columnas, y de esta forma empezaran a observar de manera organizada un diseño geométrico; sin embargo, aunque el 42% lo hacen, el resto continúa dando respuestas globales.

Ejemplo:

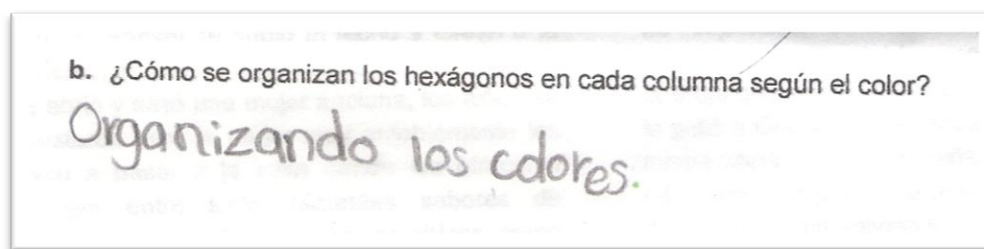


Imagen 11. S1.A2.Lb

Tabla 7. Tipificación actividad 1, pregunta 4, literal a.

4. Hansel y Gretel se dan cuenta el siguiente diseño está incompleto: 						
a. Dibuja las figuras que hacen falta para completar el diseño y para continuar la secuencia, e indica ¿cómo lo hiciste?						
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C. E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que completan el diseño en forma correcta, siguiendo un patrón de comportamiento.	7	35 %	Según el número de cubos que hay en cada columna (1,2,3,2,1,2,3...)	1	14%
				Guiándose por el número de cubos organizados en forma diagonal (3,3,5,3,5...).	2	29%
				De acuerdo a las líneas horizontales y diagonales	1	14%

				que presenta el diseño (1,2,3,2,1...).		
				Orientandose por el núcleo completo del diseño.	2	29%
				No Justificarón	1	14%
T2	Estudiantes que no reconocen un patrón de comportamiento en el diseño.	12	65%	Orientandose por el núcleo del diseño (separando cada parte que presenta el núcleo).	6	50%
				Según el número de cubos que hay en cada columna.	2	16,6 %
				Trasladando línea por línea, mediante el repintado de cada cubo ya dado en el diseño, correspondiente a la posición faltante.	2	16,6 %
				No se dio una explicación coherente.	2	16,6%

Tabla 8. Tipificación situación 1, actividad 1, pregunta 4, literal b.

b. ¿Qué figuras tridimensionales forman el diseño?			
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que identifican que el diseño está compuesto por cubos.	15	79 %
T2	Estudiantes que escriben que la figura está compuesta por cuadrados o por "cuboadedros".	2	10,5 %
T3	Estudiantes que no responden.	2	10,5 %

Tabla 9. Tipificación situación 1, actividad 1, pregunta 4, literal c.

c. ¿cómo están organizados los cubos que componen el diseño?						
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C. E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que identifican cómo estan organizados los cubos que componen el diseño.	14	74 %	Por la cantidad de cubos en cada columna.	10	71 %
				Por la cantidad de cubos en forma diagonal.	4	29 %
T2	Estudiantes que no identifican			Cada cubo esta organizado como los que	1	20%

	cómo estan organizados los cubos que componen el diseño.	5	26 %	lo preceden.		
				En orden: primero uno, después el otro, y así sucesivamente.	1	20%
				Se organizan en fila.	1	20%
				Se organizan en forma de círculo.	1	20%
				Cada vez son más cubos.	1	20%

Las tablas anteriores (tabla 7, 8 y 9) muestran los resultados de la pregunta 4 de la actividad 1, en la cual se observa que el 35% de los estudiantes objeto de estudio, dibujan los cubos que faltan para completar el patrón y dan las pautas de como realizan esta tarea. De las justificaciones prevalece el hecho de que estos estudiantes tienen una estrategia para hallar y completar el patrón, tal como observar los cubos por columna, por fila, diagonal, combinación de estos o el núcleo de repetición completo. Sin embargo, el resto de los estudiantes no dibujan el patrón en forma correcta, dejando apreciar en sus justificaciones que tienen una estrategia para completar el patrón, pero que esta no funciona porque los conteos se hacen en forma incorrecta o porque separan el núcleo del diseño a pesar que este presenta una concatenación.

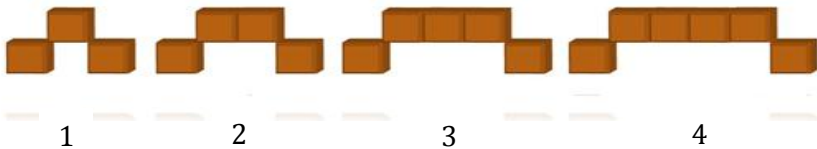
En las preguntas 3 y 4 de esta actividad (1), se puede concluir que cerca la mitad de los estudiantes, logran identificar de qué manera cambia la forma en una sucesión de figuras, esto a través del proceso de visualización, que corresponde a la primera etapa que plantea Mason (1985), en el cuál se observan las características comunes (mediante la detección de un patrón o relación) que se presentan en el diseño, e intentan establecer justificaciones cortas, directamente desde la relación que se pretendía identificar o valiéndose de otros aspectos reconocidas (otro tipo de figuras que aunque no son las más eficientes, también se reconocen en el diseño). Además, se puede observar también, que los estudiantes reconocen patrones de repetición, en los que los elementos que los componen se presentan de forma periódica; patrones de reproducción, en los que se debe reproducir un patrón dado; y de extrapolación, en los que se completan partes

vacías.

Tabla 10.Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 1, literales a y b.

Actividad 2

Gretel al entrar a la casa observa varios asientos de diferentes tamaños y formas los cuales están elaborados a base de cubos de chocolate.



1

2

3

4

1. Observa los anteriores asientos de chocolate.

a. Describe cómo cambia cada uno de ellos respecto al anterior, teniendo en cuenta la forma.

Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C. E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que describen cómo cambia cada uno de los asientos en relación con el anterior.	17	89%	Tienen en cuenta que se aumenta un cubo en la parte superior de la figura.	3	19%
				Reconocen que la parte superior (horizontal) aumenta, sin identificar la cantidad.	7	41 %
				Observan el total de cubos de cada figura y su variación.	6	35 %
				Ve los asientos de derecha a izquierda, y va restando uno a cada figura.	1	5%
T2	Estudiantes que no identifican cómo cambia cada uno de los asientos en relacion con el anterior.	2	11%	Describe que aumenta la parte de abajo.	1	50%
				Aumentan de dos en dos.	1	50%

b. ¿Qué parte de los asientos varia? Y ¿Qué parte no cambia (permanece constante)?

Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C. E.	Porcentaje
-------------------	--	-----	------------	---------------	-------	------------

T1	Estudiantes que identifican la parte que varia.	16	84 %	La parte que varía es la superior, y la que queda constante son las patas que se encuentran en la parte inferior.	14	88%
				Observan solo que la parte de abajo permanece constante.	1	6%
				Observan solo la variación en la parte de arriba.	1	6%
T2	Estudiantes que no identificaron la parte que cambia.	3	16 %	Describieron que la parte que varia es la de abajo.	2	67%
				Se suma un chocolate a cada figura.	1	33%

Análisis actividad 2, pregunta 1, literales a y b.

En relación a los resultados del literal a, se evidencia que solo 2 de 19 estudiantes (11%) no logran identificar y describir la variación de las figuras respecto a su forma en relación con las anteriores, mientras que el otro 89% (17 de 19), consigue hacerlo. En cuanto a este último grupo de respuestas, se puede observar que los estudiantes adoptan diferentes formas de visualizar esa variación, y aunque la pregunta hace relación únicamente a los aspectos de forma, la mayor parte de los estudiantes se enfocaron en relaciones numéricas de cantidad, por ejemplo, relacionan el total de cubos de cada figura para establecer el patrón de aumento global, o identifican el patrón de aumento particular ligado a la parte horizontal que es la que presenta la variación. Es importante destacar que dado que la pregunta no especificaba si se debía empezar a establecer la variación desde el lado izquierdo o el derecho, uno de los estudiantes la observó de derecha a izquierda y en lugar de ir aumentando cubos los iba restando, lo que evidencia que el “ver” (propuesto por mason, 1985) involucra distintos aspectos en los que no existe una única forma de identificar las regularidades, pueden haber muchas expresiones del mismo patrón.

En relación al literal b, en el cual se pretende que se identifique la parte de los asientos que presenta variación y la parte que permanece constante, los estudiantes reconocen que lo que varía en cada una de las figuras es la parte

superior; para realizar esta identificación, algunos visualizan únicamente los cambios que se presentan en la parte de arriba de los asientos, otros prefieren visualizar solo la parte de abajo, y otros se fijan en ambas partes lo que les permite formular una respuesta más completa.

De otro lado, solo dos estudiantes no identifican cómo cambia cada figura en relación con la anterior, estableciendo las relaciones contrarias, es decir, justificando que la parte que varía es la de abajo de los asientos o que hay un aumento de cantidad el cual va de uno en uno o de dos en dos; esto quizás como consecuencia de que no tienen claro el concepto de cambio o variación, y el concepto de constante.

Tabla 11.Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 2, literal a y c.

2. a. Dibuja los asientos que faltan en la posición número 4 y 6 de la siguiente secuencia.

Cantidad numérica _____

c. Justifica porqué lo hiciste de esa manera.

Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que identifican que la variación de una figura a otra es de dos cubos de chocolate (aumentando a medida que se avanza una posición).	8	42%
T2	Estudiantes que identifican la variación a partir de relacionar (relacion de igualdad) el número de cada posicion con el número de cubos de chocolate de cada pata del asiento duplicando este valor y aumentando el resultado en 1.	5	26%

T3	Estudiantes que no justifican y/o presentan incoherencia en su justificación.	6	32%
----	---	---	-----

Tabla 12.Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 2, literal d.

d. ¿Qué cantidad numérica representaría el número de cubos en el asiento de la posición 11? ¿Cómo lo hallaste?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que encontraron la cantidad numérica (23) correspondiente a la posición 11.	11	58%	Suman dos cubos de chocolate al asiento anterior desde la posición 6 hasta llegar a la posición 11.	6	55%
				Calculan el número de cubos de cada pata del asiento de la posición, más el cubo de chocolate de la parte de arriba.	2	18 %
				Se duplican los cubos de la posición 6, y se le resta los cubos de la posición 1.	1	9%
				No justifican.	2	18%
T2	Estudiantes que no respondieron correctamente la cantidad numérica de la posición 11.	7	37%	Cuentan los cubos.	2	29 %
				Duplican el cardinal que representa la posición 5 y le suman 1.	5	71 %
T3	Estudiantes que no contestaron.	1	5%	No justifican.		

Tabla 13.Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 2, literal e.

e. ¿Cómo varia el número de cubos de las patas de los asientos de chocolate anteriores?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que describen de manera correcta			Identifican la variación sumando un cubo en cada pata del asiento.	3	20%

	como varia el número de cubos en las patas de los asientos de chocolate.	15	79%	Varían de dos cubos de chocolate por asiento.	10	67%
				Depende de la cantidad de cubos que tenga el asiento.	2	13%
T3	Estudiantes que no contestan y/o contestan de manera incoherente.	4	21%	Describen que las patas se alargan.	1	25%
				Sin justificación.	3	75%

Análisis actividad 2, pregunta 2, puntos a, b, c, d, y e.

En relación a la pregunta 2 literales a y b es importante resaltar que todos los estudiantes lograron dibujar las figuras faltantes y asignar correctamente la cantidad de cubos correspondiente, ya que ellos identificaron que el patrón de comportamiento de los asientos de chocolate va aumentando de a dos por cada asiento en sus patas (verticalmente), y que la cantidad de cubos para la asignación numérica también se guía por esta relación, por tal motivo no se presentan las tablas de los anteriores literales. A partir del literal c, se presenta la tabla donde se muestran las diferentes respuestas de los estudiantes para la justificación de los literales a y b.

Esta tabla (c) evidencia que más de la mitad de los estudiantes justifican la forma en la que completaron la secuencia, al igual que la manera en la que lograron asignar correctamente la cantidad a cada figura; esto a través de dos estrategias base: la primera, relacionada con el conteo de dos en dos hasta llegar a la posición que se pide, y la segunda, realizando correspondencia uno a uno entre la cantidad de cubos por pata y la posición.

El 32% restante no muestra una justificación o lo hace de forma incoherente; sin embargo, es importante resaltar que dado que completan bien los dibujos faltantes y asignan la cantidad correctamente, no se puede afirmar que no identificaron el patrón que rige la secuencia, porque además en el literal d, donde se les pide encontrar la cantidad de cubos de una posición que no es dada, algunos de ellos lo hacen bien dando una justificación válida (como se muestra en la imagen

12.S1.A2.Le), lo que demuestra, que varios de los estudiantes tienen algunas deficiencias en el proceso de argumentación, mas no directamente en el proceso de reconocimiento del patrón (para el caso antes mencionado).

En cuanto a este último literal, aunque el 58% de los estudiantes logran encontrar la cantidad de cubos que componen la posición 11, 7 de 19 (37%) aún no logran hacerlo, justificando que se llega a la respuesta sumando los cardinales de ciertas posiciones, y en el literal e, el 79% de los estudiantes identifican cómo varían las patas de los asientos a partir de tres formas distintas; la primera dada desde lo particular, aumentando un cubo a cada pata; la segunda aumentando dos cubos por cada uno de los asientos a medida que se avanza una posición; y la última muy general, referenciando que la variación depende de la cantidad de cubos que tenga el cada asiento; de otro lado, el 21% restante solo describe que las patas se van alargando a medida que aumenta la figura, pero esta respuesta no va acorde a la pregunta que se estaba realizando, en la que se hacía referencia a la variación de la cantidad de cubos de las patas.

A photograph of a student's handwritten response on a piece of paper. The text is written in dark ink and includes the words 'Da 23 y lo halle sumando 2 el seis me' and '1 el tres.' on two lines. There are some corrections or additions visible in the handwriting.

Imagen 12. S1.A2.Le

Lo anterior deja ver que para los estudiantes es fácil reconocer aquellos patrones que son de recurrencia, es decir en los que el núcleo cambia con regularidad, pero que cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores y a pesar que su representación era geométrica pues estaban conformados por cubos de chocolate, los estudiantes hacían la relación con lo numérico al dar el total de cubos de cada asiento.

Tabla 14.Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 3, literal a.

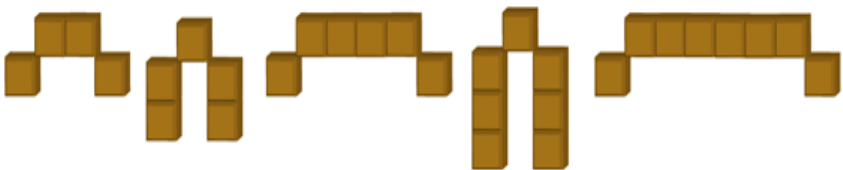
3. Observa la siguiente secuencia de asientos de chocolate.  a. Dibuja los asientos de la posición 6, 7 y 8.			
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que dibujan correctamente los asientos de las posiciones 6, 7 y 8 (estableciendo el patrón de aumento horizontal, vertical, horizontal...).	8	42 %
T2	Estudiantes que no dibujan correctamente los asientos de las posiciones 6, 7 y 8 (dibujan todos los asientos de forma horizontal, todos de forma vertical, o intercalados pero con un número incorrecto de cubos).	11	58 %

Tabla 15.Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 3, literal b.

b. ¿Qué relación encuentras entre los asientos de las posiciones 1, 3 y 5 en comparación con los asientos de las posiciones 2, 4 y 6? ¿Por qué crees que se da esta relación?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que establecen alguna relación entre los asientos de las posiciones 1, 3 y 5, y los asientos de las posiciones 2, 4 y 6.	12	63%	Estudiantes que aluden a las posiciones 1,3,5 como el número de cubos de chocolate par, y los de las posiciones 2,4,6 como el número de cubos de chocolate impar.	2	16%
				Tanto los de las posiciones 1, 2, 3 como los de las posiciones 2, 4, 6 aumentan de dos cubos en cada figura.	5	42 %
				Relacionan la variación aludiendo a la forma de los asientos: 2, 4, 6 vertical y 1, 3, 5 horizontal.	5	42%
T2	Estudiantes que no responden.	3	16 %	Sin justificación.	3	100%

T3	Estudiantes que no relacionan los asientos de las posiciones 1, 3 y 5 con los asientos de las posiciones 2, 4 y 6.	4	21 %	Todos tienen la misma secuencia.	1	25 %
				Están de diferentes formas.	1	25 %
				Aumenta el número de cubos, y el asiento se va haciendo más grande.	2	50%

Tabla 16.Tipificación situación 1, actividad 2, pregunta 3, literal c.

c. Dibuja los asientos de chocolate de las posiciones 10 y 13.			
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que solo dibujan correctamente una de las posiciones (posición número 10).	5	26 %
T2	Estudiantes que dibujan correctamente las dos posiciones.	1	6%
T3	Estudiantes que no dibujan correctamente ninguna de las dos posiciones.	13	68 %

Análisis pregunta 3 literales a, b y c.

Según los resultados que muestra la tabla relacionada con el literal a, al 58% de los estudiantes se les dificulta realizar correctamente los dibujos que se piden; mientras que el 42% si lo hace correctamente. El porcentaje asertivo aumenta cuando se dan las justificaciones sobre la relación existente entre determinadas figuras; esto relacionado con el literal b, en el que el 63% logra identificar por lo menos una de las relaciones entre las posiciones presentadas, mientras que solo un 21% no establece una relación adecuadamente, y los 3 estudiantes restantes no responden a la pregunta. En cuanto a los 12 estudiantes que representan el 63%, se establecen tres tipos de respuestas siendo las dos primeras las más eficientes, en la medida que permiten ver el patrón de comportamiento de par e impar, o de dos en dos, y la última la menos eficaz, debido a que aunque observan que existe una variación distinta en los dos conjuntos de posiciones (unos varían horizontalmente y otros vertical) no hay un patrón de comportamiento desde lo numérico. Para el caso de los 4 estudiantes que componen el 21%, se evidencia que las respuestas son mucho más globales y por tal globalidad, no dejan clara

una buena relación, además de no responder exactamente a la pregunta, puesto que ésta alude a la identificación de una relación entre unas figuras específicas, y no a una generalidad común entre el conjunto total de figuras.

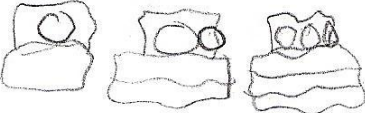
Con relación al porcentaje de estudiantes que no logran dibujar correctamente las figuras, la dificultad va aumentando a medida que se les pide una figura con más número de cubos, esto dado que es una secuencia en la que se alternan dos series de figuras distintas y si no se identifica el patrón de comportamiento que las rige, se presentan las dificultades al momento de determinar hacia donde tienden y cuantos cubos van en la figura que sigue. Lo anterior se ve reflejado en los porcentajes de las respuestas del literal c, en los que el 68% de los estudiantes no logran dibujar correctamente ninguna de las dos figuras que se les pide, solo el 6% (1 estudiante) logra hacerlo perfectamente, y el 26% restante solo logra dibujar la primera posición por ser la más cercana.

En conclusión, según todos los resultados anteriores de la actividad 2, se puede decir que cerca de la mayoría de los estudiantes logran identificar las variaciones que presenta una secuencia de dibujos, y aproximadamente la mitad lo hacen identificando un patrón de comportamiento ya sea global o particular, facilitándoseles la identificación de los patrones de recurrencia, en los que cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores; y presentando dificultades en aquellos patrones que aunque son también de recurrencia, tienen dos núcleos distintos que se presentan alternadamente. Se observa que los estudiantes pueden hacer inferencias correctas sobre las relaciones propuestas en una secuencia, y que además de hacerlo a través de la observación, se inician en el proceso de *decir* lo que observan (segunda fase que propone Mason (1985), de manera mucho más concreta que en la actividad anterior. Respecto a esto último, es importante resaltar que los estudiantes utilizan diversas estrategias que desde el pensamiento variacional, permiten ir progresando el desarrollo de este mismo pensamiento y en consecuencia en el razonamiento algebraico.

Tabla 17.Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 1, literal a.

Actividad 3			
Gretel pensó por un momento que los asientos de chocolate serían muy duros al sentarse y se imaginó cómo podrían ser de cómodos unos asientos hechos de masmelo.			
1. Utiliza mínimo dos masmelos diferentes, para formar la serie de asientos que se pudo haber imaginado Gretel. No olvides que se debe conservar un patrón de comportamiento.			
a. ¿Qué tuviste en cuenta para formar la secuencia?			
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que tienen en cuenta los modelos de secuencia presentados durante las actividades anteriores (situación 1).	4	21 %
T2	Estudiantes que describen que cada figura de la secuencia debe ir aumentando (a partir de un determinado número de masmelos) en relación con la anterior (Ej.: dos en dos, uno en uno).	8	42 %
T3	Estudiantes que describen la forma que tiene los masmelos utilizados (masmelos en forma de cilindro y masmelos en forma de esfera).	1	5%
T4	Estudiantes que responden con el enunciado (un patrón de comportamiento).	1	5%
T5	Estudiantes que no responden.	3	16 %
T6	Estudiantes que responden que se debe tener en cuenta un conteo de cubos.	2	11%

Tabla 18.Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 1, literal b.

b. Dibuja la secuencia que diseñaste.				
Tipo de respuesta			C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que hicieron un diseño teniendo en cuenta un patrón de comportamiento.		7	37 %
			b. Dibuja la secuencia que	
				

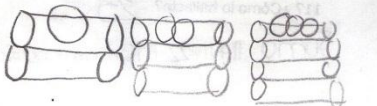
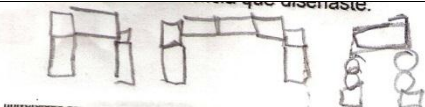
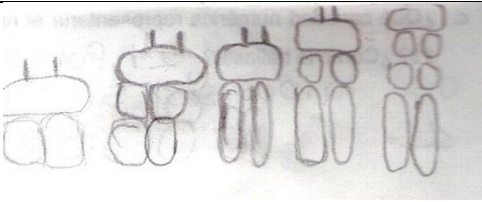
				
T2	Estudiantes que hicieron un diseño sin un patrón de comportamiento.	 	9	47 %
Estudiantes que no realizaron el dibujo del diseño que hicieron.			3	16 %

Tabla 19. Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 1, literal c.

c. ¿Por qué crees que tu diseño tiene un patrón?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que Justificaron porque creen que su diseño tenía un patrón.	13	68%	Porque sigue el modelo de los diseños anteriores.	3	23 %
				Porque la secuencia aumenta de a dos en relación con la figura anterior.	3	23%
				Porque las figuras de la secuencia van aumentando vertical y/o horizontalmente.	5	38 %
				Porque cada figura va aumentando de cuatro en cuatro, en relación con la anterior.	1	8%
				Estudiantes que justifican que su diseño tiene un patrón, porque la secuencia aumenta de uno en uno, en relación con la figura anterior.	1	8%
T2	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	5	26 %	Sin Justificación	5	100%
T3	Estudiantes que contestan de manera	1	6%	Estableciendo que existe una diferencia entre la parte de abajo y la parte de arriba de	1	100 %

	incoherente porque su diseño tiene un patrón.			cada figura.		
--	---	--	--	--------------	--	--

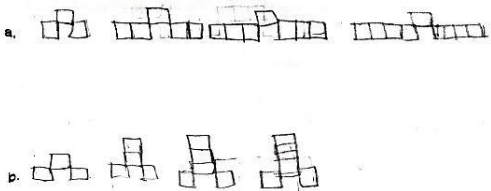
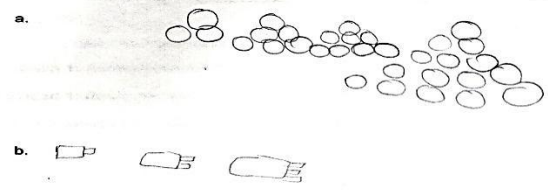
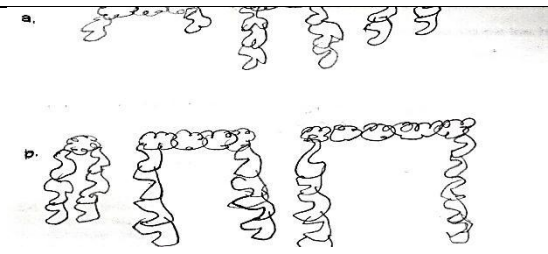
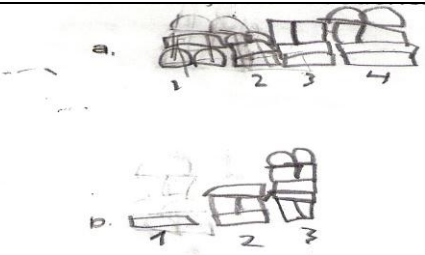
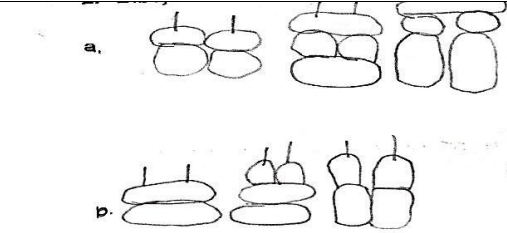
Análisis actividad 3, pregunta 1, literales a, b, c.

Empezando con la tabla del literal a, se puede observar que en el momento de diseñar una serie, 4 (21%) de los estudiantes prefieren seguir los modelos presentados anteriormente en la secuencia y otros 4, lo realizan aumentando de a dos a la figura que sigue, dada su facilidad para trabajar con los dobles; así mismo reconocen que en una serie los elementos pueden ir alternados pero de acuerdo a un orden, establecido por la cantidad, y que a medida que se aumentan los elementos pueden ser más largos.

Según la tabla del literal b, se puede decir que el 47 % de los estudiantes aún no realiza un diseño utilizando un patrón de comportamiento, mientras que el 37% restante si lo hace. Se resalta que el hecho de que ese 47% no lo realice, no quiere decir que no conocen características que se deben tener en cuenta en el momento de diseñar el patrón; esto se ve reflejado en el literal c, cuando el 68% de los estudiantes logra justificar por qué su diseño tiene un patrón. Quizás el inconveniente se presenta con las habilidades para dibujar.

En cuanto al porcentaje de estudiantes que si logra diseñar un patrón, es indispensable rescatar que cerca de la mitad asocian un patrón a una serie de más de dos elementos que debe ir en ascenso o debe tener alternados los elementos que la componen; además, se evidencia que los estudiantes prefieren diseñar patrones relacionados con dobles y cuádruples.

Tabla 20.Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 2.

2. Dibuja dos secuencias de masmelos que cumplan un patrón de comportamiento.				
Tipo de respuesta			C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que dibujan la secuencia teniendo en cuenta un patrón de comportamiento.		7	37 %
				
				
T2	Estudiantes que dibujan la secuencia pero no tienen en cuenta un patrón de comportamiento.		7	37 %
				

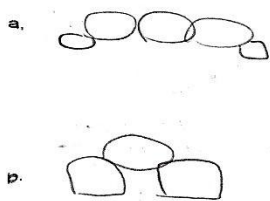
				
T3	Estudiantes que no realizan la secuencia de masmelos.		5	26 %

Tabla 21. Tipificación situación 1, actividad 3, pregunta 3.

3. Según lo trabajado hasta ahora, responde: ¿Qué es una secuencia y que elementos se deben tener en cuenta?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden lo que para ellos es una secuencia, según lo que se ha trabajado hasta ahora.	14	74 %	Estudiantes que responden que en una secuencia se debe tener en cuenta el establecimiento de un orden.	5	37%
				Una secuencia equivale a un patrón.	3	21%
				Una secuencia es algo que se repite y debe tener más de un elemento.	1	7%
				Aumenta la cantidad de cosas horizontal o verticalmente	3	21%
				Se debe tener en cuenta sumar.	2	14%
T2	Estudiantes que no responden.	5	26 %	Sin justificación.	5	100%

Análisis actividad 3, preguntas 2 y 3.

Las tablas anteriores muestran como el 37% de los estudiantes logran dibujar secuencias utilizando un patrón de comportamiento mientras que el 37 % lo hace sin tenerlo en cuenta; sin embargo, es importante hacer énfasis en que como lo muestra la tabla 15, más de la mitad (74%) se acerca al significado básico de lo que es una secuencia y los elementos que se deben considerar cuando se está identificando o diseñando, en coherencia con lo trabajado a lo largo de las actividades ya realizadas, justificando nuevamente que en una secuencia se repiten los elementos que la conforman (que debe ser más de un elemento) y que

además se debe tener en cuenta un orden determinado, tal como se observa en la siguiente imagen:

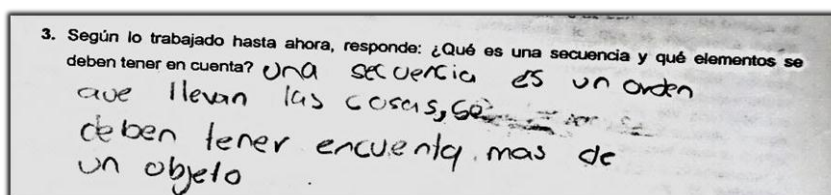


Imagen 13. S1.A3

Según los resultados que muestra la actividad 3, más de la mitad de los estudiantes aún no tienen una noción de lo que es una secuencia y un patrón, y no logran diseñar, mientras que entre 7 y 9 estudiantes si logran hacerlo. Sin embargo, los resultados no son negativos, puesto que el trabajo con el pensamiento variacional, que es el que permite llegar a tales nociones, es un proceso largo que se debe desarrollar a lo largo de toda la vida escolar; además, en relación con la segunda fase de Mason (1985), después del reconocimiento de los patrones, se empieza a fortalecer el *decir* y es algo que en lo que resta de la secuencia se va a ir potencializando hasta llegar al *registrar y verificar*.

Situación 2: Hansel y Gretel y los patrones numéricos.

Número de estudiantes: 19

Logro: Encontrar relaciones numéricas que permitan llegar a una generalización y continuar la secuencia.

Descripción general de la aplicación de la actividad

La situación 2 fue aplicada en dos partes, la primera el miércoles 6 de junio de 2012 y el tiempo utilizado en el desarrollo de la primera parte de la actividad fue de 55 minutos, la otra parte se aplicó el jueves 7 de junio de 2012 y duró 1 hora 30 minutos, contó con la participación de 19 estudiantes.

La actividad inicia luego de repartir a cada estudiante una copia y leer el enunciado inicial de la actividad 1 de la situación 2, individualmente, cada estudiante comienza a desarrollar la actividad y a realizar preguntas sobre los enunciados de las actividades. La primera parte de las preguntas estaba dirigida al reconocimiento de la secuencia de hongos, en donde ellos debían de descubrir como estaban organizados.

La actividad dos de la situación dos, se desarrolla a través de una serie con números faltantes donde los estudiantes deben completar, y describir que elementos tienen en cuenta para hallar los números que no se encontraban en la secuencia, por último ellos deben de crear una serie que debe estar regida por un patrón de comportamiento.

Situación 2: Hansel y Gretel y los patrones numéricos.

Actividad 1: Patrones numéricos con hongos de colores.

La bruja mala para poder tener agua en su casa de dulce, debía ir todos los días a un riachuelo que había en un lado oscuro del bosque. Con el paso de los años la vieja decidió construir un caminito delimitado por puros hongos agrupados por colores, los cuales le permitían identificar rápidamente la forma de llegar. Un día Gretel se vio obligada a acompañarla y se dio cuenta que la organización de los hongos era bastante especial:



Fig.1

Fig. 2

Fig.3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Tabla 22. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 1.

1. Sin necesidad de dibujar escribe ¿Cuántos hongos debería tener la figura 7 y por qué?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que identifican que la figura 7 debe tener 13 hongos.	19	100 %	Explican que se suman las dos cantidades anteriores (hongos de la figura 5, más los hongos de la figura 6).	14	74%
				Dicen que se debe seguir el orden de la secuencia de los anteriores hongos (hongos figura 1 más hongos figura 2 = hongos figura 3).	5	26 %

Análisis actividad 1, pregunta 1.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la pregunta 1 que se muestran en la tabla anterior, se observa que todos los estudiantes identifican cuántos hongos debe tener la figura 7 que en total son 13. El mayor porcentaje de los estudiantes

(14 de 19 – 74%) justificaron que se deben tener en cuenta las cantidades de hongos de las dos figuras anteriores a la figura desconocida, por otro lado están los estudiantes que justifican que se debe tener en cuenta el orden de la secuencia que siguen los hongos anteriores a la cantidad que se les está pidiendo hallar, esta respuesta corresponde al 26% de los estudiantes.

Lo anterior permite ver que los estudiantes pudieron identificar la cantidad correcta de hongos que tenía la figura 7 basándose en justificaciones muy parecidas entre ellas. El hecho de que los estudiantes digan que siguieron la secuencia que tenían las anteriores figuras deja apreciar que observaron bien la cantidad de hongos que componía cada figura y logran identificar cual era el posible patrón de comportamiento que seguía los hongos, la suma de las cantidades de hongos de las figuras anteriores a la que se desea hallar es una respuesta que deja ver que los estudiantes están reconociendo que la secuencia de hongos no es al azar y que por el contrario van más allá del ver, ya lo pueden expresar con sus palabras.

Tabla 23. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 2.

2. Completa la siguiente tabla:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	15	18	20
Número de hongos	1	1	2	3	5	8			34				

Tipo de respuesta		Número de estudiantes	Porcentaje
T1	Estudiantes que completan la tabla de forma correcta, sumando los dos números anteriores a la posición que se necesita encontrar.	15	79 %
T2	Estudiantes que no completan la tabla de forma correcta.	3	16 %
T3	Estudiantes que no completan la tabla.	1	5 %

Análisis actividad 1, pregunta 2.

La tabla anterior muestra los resultados de la pregunta 2 de la actividad 1, en la cual sobresale que el 79% de los estudiantes objeto de estudio completan la tabla de forma correcta, justificando que se debe sumar las cantidades de hongos de las dos figuras anteriores a la que se desea hallar. Sin embargo el 16% de los estudiantes completan la tabla pero no de manera correcta y el resto de los estudiantes correspondiente al 5% no la alcanza a completar, estos dos últimos porcentajes que hacen referencia a los estudiantes (3 y 1 correspondientemente) que no responden a la pregunta cómo es esperado, quizás no tuvieron en cuenta la pregunta 1 de la actividad 1 en donde debían de encontrar sin dibujar los hongos la posición número 7, y/o quizás se equivocaron al realizar las operaciones.

Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes logra llenar la tabla de manera correcta y tener en cuenta la pregunta 1 de esta misma actividad. Es primordial resaltar que la observación jugaba un papel muy importante en esta pregunta, pues no todos los números superiores de las tablas que corresponden a la posición de los hongos estaban en orden y si no se tiene presente este hecho ellos hubieran podido hacerlo de manera lineal y completar mal tales posiciones.

Tabla 24.Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 3.

3. Escribe como encuentras cualquier número de hongos según la posición dada.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden como encuentran cualquier número de hongos según la posición.	15	79 %	Estudiantes que suman los dos números anteriores a la posición que se desea encontrar.	7	47%
				Estudiantes que siguen la secuencia de forma que se suma el último resultado con el número anterior.	4	27%

				Estudiantes que responden realizando las operaciones de suma utilizadas para hallar las respuestas.	4	27%
T2	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	4	21 %	Sin Justificación		

Análisis actividad 1, pregunta 3.

En relación a los resultados de la tabla anterior se evidencia que solo 4 de 19 estudiantes (21%) no responden a la pregunta mientras que el otro 79% (15 de 19), responden a la pregunta con diferentes argumentos. En cuanto a este último grupo, se puede observar que adoptan diferentes formas de justificar como encuentran cualquier cantidad de hongos según la posición, el 47% de los estudiantes explican que se debe considerar las dos posiciones anteriores a la que se desea encontrar, el 27% de los estudiantes dicen que se debe tener en cuenta la secuencia para sumar el último resultado con el penúltimo para hallar la cantidad de la nueva posición y por último están los estudiantes que responden realizando las operaciones de suma que utilizaron este último grupo corresponde al 4%.

En conclusión un porcentaje alto de estudiantes responden de diferentes maneras como encontrar cualquier número de hongos según su posición, esto deja ver que los estudiantes se basaron de las respuestas anteriores y logran expresar con sus palabras las estrategias que ellos utilizaron para responder las preguntas de los enunciados con lo que ellos habían observado.

Tabla 25.Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 4.

4. ¿Qué cantidad de hongos azules y hongos rojos tendrá la posición 9? Explica como lo hiciste.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden que la cantidad de hongos azules y rojos de la posición 9, son 21 y 13 Respectivamente.	15	79 %	Estudiantes que explican que la cantidad de hongos azules debe de ser mayor a la de hongos rojos, y se dan cuenta observando la secuencia de los hongos anteriores.	2	13 %
				Estudiantes que observan la tabla y la comparan con la secuencia de hongos, evidenciando que si el número de hongos es 34, entonces el número anterior muestra exactamente la cantidad de azules.	2	13%
				Estudiantes que dibujan la cantidad de hongos que tendría la posición 9.	2	13%
				Sin justificación	9	61 %
T2	Estudiantes que no responden correctamente la cantidad de hongos azules y rojos de la posición 9.	4	21 %	Sin justificación		

Análisis actividad 1, pregunta 4.

En relación a la tabla anterior es importante resaltar que el 79% de los estudiantes logra reconocer la cantidad de hongos azules y rojos de la posición particular que se pide en el enunciado, pero de este grupo un porcentaje alto de estudiantes (61%) no da una justificación de como encontraron la respuesta, por otro lado el 13% de los estudiantes justificaron que ellos observaron la secuencia

de los hongos y se dieron cuenta que la cantidad de hongos azules siempre era mayor que la cantidad de hongos rojos, el otro 13% dio un argumento parecido al anterior solo que ellos se basaron en la tabla de la pregunta 2, por último está el otro 13% que decide dibujar las posiciones de anteriores a la que se les pide, el resto de los estudiantes (4 de 19) no responden a lo que se les está preguntando.

En las respuestas que dieron los estudiantes a esta pregunta sucedió algo particular y es que en su mayoría respondieron por el total de los hongos es decir 34, pero no explicaron cómo se dieron cuenta que eran 21 azules y 13 rojos, se evidencia que no leyeron de manera correcta el enunciado y esto ocasionó una incoherencia con las respuestas que muchos de ellos expresaron y lo que se pedía en la pregunta.

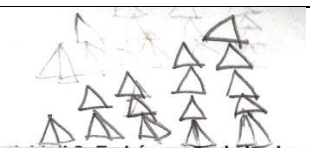
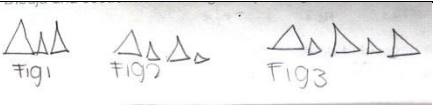
Tabla 26. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 5.

5. ¿Cómo aumentan los hongos azules de la posición 5 a la posición 6 ¿Qué relación existe entre los hongos azules y los rojos en las demás posiciones?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden como creen ellos que aumentan los hongos azules de la posición 6 con respecto a la posición 5, y la relación que existe entre los hongos azules y los rojos respecto a las demás posiciones.	6	32%	Explican que la cantidad de hongos azules que aumentan de la posición 6 con respecto a la posición 5 son los hongos azules que hay en la posición 4, ya que la cantidad de hongos de una posición depende de la cantidad de hongos de las dos posiciones anteriores.	4	68%
				La relación que encuentran es que en una posición siempre deben de haber más hongos azules que rojos.	1	16%
				Solo se le deben sumar dos hongos más a la posición siguiente.	1	16%
T2	Estudiantes que no responden a la pregunta.	13	68%	Sin justificación.	13	100%

Análisis actividad 1, pregunta 5.

Según los resultados que muestra la tabla anterior, el 68% de los estudiantes no responden a la pregunta del enunciado, es un porcentaje bastante alto pues no dan una justificación a una pregunta que recoge elementos de preguntas anteriores. El resto de estudiantes que corresponden al 32% dan una justificación de como aumentan los hongos azules de la posición 6 con respecto a la posición 5, y la relación que existe entre los hongos azules y los rojos respecto a las demás posiciones, el 68% de este grupo relacionan la cantidad de hongos de las posiciones anteriores, un 16% dice que siempre deben de haber más hongos azules que rojos y el otro 16% explica que siempre se le debe sumar dos hongos más a la posición siguiente esta última respuesta no es una relación general de como aumentan los hongos, pues solo se basó en el caso particular de la posición 5 y 6 y no con la relación existente entre las demás posiciones.

Tabla 27. Tipificación situación 2, actividad 1, pregunta 6.

6. Dibuja una secuencia de triángulos que tenga un patrón.				
Tipo de respuesta			Número de estudiantes	Porcentaje
T1	Estudiantes que realizan una secuencia de triángulos teniendo en cuenta un patrón.		11	58 %
				
				
				
				

T2	Estudiantes que realizan la misma secuencia de hongos pero con triángulos.	6	32%
T3	Estudiantes que realizan una secuencia de triángulos sin un patrón de comportamiento.	2	10%

Análisis actividad 1 pregunta 6.

En relación con la tabla anterior, se puede observar que en el momento de diseñar 11 (58%) estudiantes logra diseñar una secuencia que tiene un patrón diferente a las presentadas a lo largo de las actividades anteriores, esto da cuenta que la mayoría de los estudiantes pueden reconocer un patrón y expresarlo a través de su propio diseño, mientras que el 32% de los estudiantes deciden realizar la secuencia de triángulos tomando como modelo los hongos, no realizaron un diseño propio si no que optaron por guiarse con el ejemplo presentado anteriormente. El resto de los estudiantes correspondientes al 10% realizan un diseño pero no tienen en cuenta un patrón es decir no hay ni un orden ni una estructura en su secuencia.

Para concluir se puede decir que esta última pregunta deja ver con claridad que la más de la mitad de los estudiantes pueden reconocer un patrón y expresarlo, algo muy positivo para nuestra investigación pues están haciendo su propio diseño teniendo en cuenta un orden y una regularidad.

Actividad 2: En búsqueda de la clave numérica.

La jaula donde se encontraba encerrado Hansel estaba asegurada con un candado enorme que debía ser abierto con una combinación de 12 números. Cerca de allí, había una secuencia de números que podían ser la clave para liberar el candado, pero algunos de ellos estaban tapados y el niño no los podía ver. La secuencia es la siguiente:



Tabla 28.Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 1.

1. Ayúdale a Hansel a completar la serie con los números faltantes.			
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran identificar que la secuencia presenta los múltiplos del siete y completan correctamente los números que faltan.	19	100%

Análisis actividad 2, pregunta 1.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la pregunta 1 que se muestran en la tabla anterior, se observa que todos los estudiantes identifican que la secuencia se debe completar hallando los múltiplos del 7, los estudiantes lograron identificar el patrón de comportamiento de esta serie numérica y se cumple el objetivo planteado de esta pregunta, que está pensada como una introducción a los patrones numéricos.

Tabla 29. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 2.

2. ¿Qué tuviste en cuenta en el momento de buscar los números que faltaban para completar la que podría ser la clave del candado?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden que tuvieron en cuenta para completar la serie de números de la clave del candado.	19	100 %	Estudiantes que tienen en cuenta los dobles. Hallan el doble del número 7, a ese resultado aplican nuevamente dobles, y así sucesivamente.	5	26 %
				Estudiantes que identifican la relación con la tabla del 7 y la utilizan para llegar a las respuestas.	11	58 %
				Estudiantes que suman de 7 en 7.	3	16%

Análisis actividad 2, pregunta 2.

La anterior tabla deja ver las justificaciones que los estudiantes dan sobre como completaron la secuencia de la pregunta 1. En relación a esto el 26% de ellos dice que tuvo en cuenta los dobles, es decir hallan el doble de 7 y a este nuevo resultado se le vuelve aplicar la misma estrategia, más de la mitad de los estudiantes (58%) identificaron la relación de esta secuencia con la tabla del 7 y a través de esta relación logran completarla de manera correcta, el resto de los estudiantes correspondiente al 16% dicen que sumaron de 7 en 7 y así lograron hallar los números faltantes.

Esta pregunta es la justificación de como los estudiantes se dieron cuenta de cual era la posible manera de completar la tabla del literal anterior, las diferentes respuestas que ellos daban deja ver que todos encontraron la relación de esta serie con el número 7 es decir logran reconocer el patrón de comportamiento de esta serie y pueden expresar con sus propias palabras como identifican los números faltantes.

Tabla 30. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 3.

3. Hansel cree que uno de los números que completan la secuencia es el número 52, ¿estás de acuerdo con el niño? ¿Por qué?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden que no están de acuerdo con Hansel, por que el 52 no es uno de los números que completa la secuencia.	19	100 %	Porque en la tabla de 7 no está el número 52.	14	74%
				Porque el número que completa la secuencia no es el 52 si no el 56.	4	21%
				Porque al seguir la secuencia que va de 7 en 7 el 52 no está.	1	5%

De acuerdo a los resultados obtenidos en la pregunta 3 que se muestran en la tabla anterior, se observa que todos los estudiantes logran reconocer que el

número 52 no pertenece a la secuencia de la pregunta 1, la mayoría de ellos (74%) manifiesta en su justificación que el 52 no hace parte de la tabla del 7 por esta razón no debe de hacer parte de la secuencia, el 21% de los estudiantes dice que el número que realmente hace parte de la secuencia es el 56 y no el 52 y un 5% dice que si se sigue de 7 en 7 el 52 no está en la secuencia por lo tanto no hace parte de este grupo.

Lo anterior evidencia que los estudiantes hacen un razonamiento y justifican por que el número 52 no hace parte de la serie numérica de la pregunta 1, es importante resaltar que todos responden correctamente a la pregunta y todas las diferentes justificaciones que dan son válidas pues unas se basan directamente en la tabla del 7 y ven que el 52 no es un múltiplo, más allá de pensar que es una pregunta donde se necesitan saber las tablas es una pregunta que deja ver como los estudiantes responden en lenguaje natural porque el 52 no hace parte de la serie del 7, viendo la dificultad que se ha presentado en anteriores preguntas para expresar con palabras lo que ellos quieren decir.

Tabla 31. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 4.

4. Si esta serie continúa ¿Existe alguna forma de calcular cualquiera de los números que siguen? Explica tu respuesta, escribiendo la manera de hacerlo.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que identifican una forma de calcular cualquier número que continúe en la secuencia.	15	79 %	Estudiantes que dan un ejemplo particular, multiplicando por 7.	3	20 %
				Estudiantes que explican que se debe multiplicar por el número 7.	9	60 %
				Estudiantes que justifican que se debe sumar de 7 en siete.	3	20 %
T2	Estudiantes que no respondieron a la pregunta.	4	21 %	Sin justificación		

Análisis actividad 2, pregunta 4.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la pregunta 4 que se muestran en la tabla anterior, se observa que la mayoría de los estudiantes (79%) identificaron una forma de hallar cualquier número que haga parte de la secuencia de la pregunta 1; de este grupo el 20% dan ejemplos particulares multiplicando por el número 7, un 60% solo dejan explícito que se debe multiplicar por 7 y el resto correspondiente al 20% dicen que se puede hallar sumando de 7 en 7, estas diferentes estrategias que los estudiantes proponen para identificar cualquier número que haga parte de esta serie deja evidenciar que los estudiantes identifican claramente el patrón de comportamiento y son válidas para hallar cualquier múltiplo del 7, otro aspecto importante es que a pesar que si hubieron casos particulares para responder esta pregunta, la mayoría optó por responder que solo sería multiplicar la posición por el número 7 es decir lo deja de manera general; el resto de los estudiantes (4) correspondientes al 21% no dio una respuesta a esta pregunta.

Tabla 32. Tipificación situación 2, actividad 2, pregunta 5.

5. Construye una serie numérica que sea la clave para abrir una caja fuerte (no olvides que debe tener un patrón).						
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que crean una serie numérica utilizando un patrón.	18	95%	Realizan la serie de los múltiplos del cuatro (4, 8, 12, 16...).	1	6%
				Realizan la serie de los múltiplos del seis (6,12, 18, 24...).	1	6%
				Empiezan la serie desde el número veinte y sacan en doble de cada resultado (20 40, 60 80...).	1	6%
				Usan los múltiplos del cinco para armar la serie (5, 10, 15, 20, 25...).	6	33%
				Realizan la serie de los múltiplos del dos (2, 4	3	17%

				6, 8, 10...).		
				Realizan una serie que va de uno en uno.	1	6%
				Realizan una serie que va de diez en diez (10, 20, 30, 40,...)	2	11%
				Utilizan la tabla del 11 para formar la serie.	1	6%
				Realizan la serie con los múltiplos del 9, explicando que el 9 es el patrón que la rige.	1	6%
				Realizan la serie aplicando dobles (1, 2, 4, 8, 16...).	1	6%
T2	Estudiantes que crean una serie sin tener en cuenta un patrón.	1	5%	Realizan la serie 1, 1, 3 3, 5, 7, 8, 9...	1	100%

Análisis actividad 2, pregunta 5.

La tabla anterior nos muestra los resultados de los estudiantes al pedirles en el enunciado que realicen una serie numérica que se rija por un patrón, el 95% de los estudiantes realizó de manera correcta una serie, la más común correspondiente al 33% de los estudiantes fue con los múltiplos del 5, seguida por los múltiplos del 2 (17%), luego una serie que va de 10 en 10 (11%), múltiplos del 4 (como lo muestra la imagen 14.S2.A2), múltiplos del 6, dobles a partir del número 20, serie que va de 1 en 1, la tabla del 11, múltiplos del número 9, aplican dobles a partir del número 1, y por último un 5% no realizó una serie con un patrón de comportamiento.

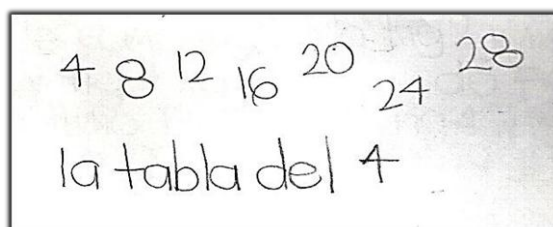
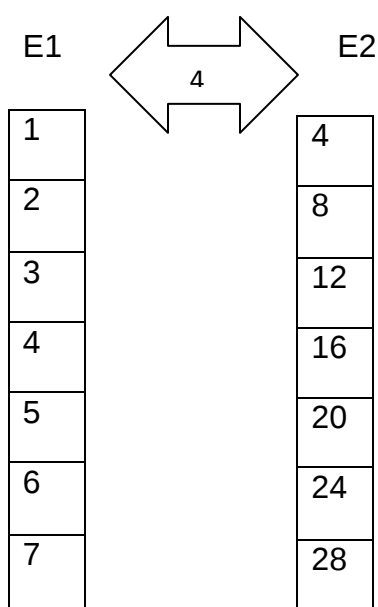


Imagen 14. S2.A2

Esto nos deja ver que los estudiantes reconocen qué es un patrón numérico, lo expresan y saben que debe seguir un orden guiado por la cantidad que representa el número elegido para formar su serie numérica; además, implícitamente los estudiantes aplican la relación $f(n) = nf(1)$ presentada en el marco teórico, a través del análisis por escalar de tal forma como lo muestra la imagen 14.S2.A2., los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7 representan el primer espacio de medida, el cual corresponde con el valor 4 en el segundo espacio de medida, adicionalmente, el valor de la unidad se repite siete veces, al igual que los valores del otro espacio de medida, pues el cambio que genera el valor 4, en el primer espacio se refleja en el otro.



En general como muestran los resultados de la situación 2, para los estudiantes fue sencillo reconocer el patrón y las características de la serie presentada en esta primera parte de la situación y se puede ver en los registros donde la mayoría explica en lengua natural, la forma en la que identifican como se está dando la regularidad del patrón de recurrencia, aquí tal como lo dice Mason (1985) al identificar algo común e intentar expresarlo, es un intento de articular en palabras esto que se ha reconocido, los estudiantes ya conocen algunos aspectos propios de la generalización a partir de casos particulares.

Situación 3: Patrones y producto con piedritas.

Número de estudiantes: 20

Logro: Identificar patrones numéricos, mediante el trabajo con las estructuras multiplicativas, estableciendo relación entre las variables de los dos espacios de medida.

Descripción general de la aplicación de la actividad

La situación 3 fue aplicada en dos secciones la primera el día viernes 8 de junio del 2012 a las 8:30 am y el tiempo utilizado en el desarrollo de la primera parte de la actividad fue de 45 minutos, la segunda parte se aplicó el día lunes 11 de junio del 2012 y duro 50 minutos, contó con la participación de 20 estudiantes.

La actividad inicia luego de repartir a cada estudiante una copia y leer el enunciado inicial de la actividad 1 de la situación 3, como se ha venido realizando en las anteriores situaciones, para esta situación los estudiantes se hicieron en parejas. La mayor parte de las preguntas hacían referencia a la interpretación de los enunciados, ya que si lograban comprender lo que se les estaba pidiendo no presentarían problemas para realizar las operaciones necesarias (suma y resta multiplicación y división) y dar respuesta a las preguntas.

Situación 3: Patrones y producto con piedritas.

Actividad 1: El producto como organizador de arreglos con piedritas

Recuerda que Hansel y Gretel, cuando iban de camino a lo profundo del bosque, arrojaron un grupo de piedritas, imagina que no eran 24 sino 500 piedritas y que riegan por el camino 240 de esas 500 piedritas en grupos a igual distancia.



Tabla 33. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 1.

1. Indica el número de piedritas que le quedaron a los niños, después de haber arrojado las 240 piedritas y explica como llegaste a la respuesta.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran reconocer y realizar correctamente la operación que debía efectuarse para obtener la respuesta (Se debe hacer una resta y se obtienen 260 piedritas).	18	90%	Estudiantes que explican que se resta 500-240 y el resultado es 260.	8	45%
				Estudiantes que resuelven la pregunta realizando una suma: $260+240=500$	3	17%
				Estudiantes que explican que la pregunta se resuelve usando los dobles: el doble de dos y a partir de ahí los dobles hasta llegar a diez.	1	5%
				Estudiantes que explican que se está haciendo referencia a algo que se descarta por tanto se realiza una resta.	1	5%
				Estudiantes que dicen que si se arrojan 240 de 500 se debe restar 240 a 500.	2	11%
				Sin justificación.	3	17%
T2	Estudiantes que se equivocan realizando el cálculo en la operación que se	2	10%	Explican que se está haciendo referencia a algo que se descarta por tanto debe realizarse una resta.	1	50%

	debía efectuar para llegar al resultado.			Se debe restar 500-240.	1	50%
--	--	--	--	-------------------------	---	-----

Análisis actividad 1, pregunta 1.

Como se puede observar en la tabla anterior, solo el 10% de los estudiantes no responden correctamente la pregunta, mientras que el 90% restante si lo hace. En relación con este último porcentaje (T1), solo tres estudiantes no justifican como llegaron a la respuesta, mientras que en el resto se destacan diferentes estrategias, la más común es la de realizar la resta, sin embargo tres estudiantes lo hicieron por complemento, donde a la cantidad más pequeña que tenían, le adicionaron la cantidad que se necesitaba para llegar a 500, es decir 260; por otro lado algunos estudiantes identifican la operación que se debe realizar con base en el enunciado que se presenta en lengua natural, esto en el caso de los que dicen que se está haciendo referencia a algo que se descarta o se habla de algo que se arroja y cuando se utilizan esos términos se hace referencia a una resta. También en relación a T1, se puede observar una estrategia bastante particular en la que un estudiante lo hace por complemento, pero su principal método es utilizar los dobles, en este caso el niño parte de que hay que encontrar cuanto le falta a 240 para llegar a 500, para esto, hace el doble de 2 (que representa los doscientos) lo cual le da 4 (cuatrocientos), y a partir del 4 (que representa los cuarenta) empieza a completar hasta llegar a diez, es decir, que la cantidad que necesita para llegar a 10 es 6 (sesenta) y por tanto la cantidad que resulta de la resta es 260.

Para el caso de T2, se resalta que los estudiantes presentaron dos de las estrategias descritas anteriormente, pero tuvieron errores de cálculo en la operación, que no les permitieron llegar a la respuesta correcta.

Lo anterior muestra que la mayoría de los estudiantes no presentan dificultades para identificar y resolver operaciones como la planteada en esta pregunta, así mismo se rescatan las distintas estrategias evidenciadas en la columna de

justificación que presentan y que les permiten de una u otra forma llegar a la solución.

Tabla 34. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 2.

1. Hansel y Gretel deciden armar grupos de tres piedritas. ¿Cuántos grupos de 3 piedritas pudieron armar? ¿Cómo encontraste la respuesta?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran identificar la operación indicada, obteniendo el resultado correcto (80 grupos de 3 piedritas).	17	85%	Estudiantes que encontraron la respuesta porque tres veces 80 da 240.	2	12%
				Estudiantes que utilizaron la tabla del tres (multiplican hasta llegar a 24 y luego aumentan el cero).	2	12%
				Estudiantes que realizaron una división (240/3)	8	47%
				Estudiantes que repartieron 240 piedritas en grupos de 3.	1	6%
				Sin justificación.	4	23%
T2	Estudiantes que no logran llegar a la respuesta.	3	15%	Estudiantes que utilizaron la tabla del tres (multiplican hasta llegar a 24 y aumentan el cero).	1	33%
				Estudiantes que realizan una división (240/3)	2	67%

Análisis actividad 1, pregunta 2.

En relación a los porcentajes que muestra la tabla anterior, se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes (85%) logran identificar la operación que se debe realizar para poder hallar la respuesta correcta, mientras que solo un 15% no logra hacerlo porque aunque identifica la operación que se debe hacer se equivoca en los cálculos realizados. Los porcentajes de T1, nos muestran que los

estudiantes utilizan dos estrategias base para llegar a la respuesta: una a través de multiplicaciones, multiplicando por tres, y otra dividiendo 240 entre tres y que solo 4 de los 17 estudiantes que acertaron en la respuesta no justifican su resultado.

En cuanto a lo anterior, se puede decir que la mayoría de los estudiantes resuelven fácil este tipo de problemas de estructura multiplicativa, ya sea por medio de una división o por medio de una multiplicación.

Tabla 35. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 3.

2. Si en lugar de ser grupos de tres, fueran grupos de 4 piedritas, ¿Cuántos grupos podrían formar? Justifica cómo lo hiciste.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran identificar la operación indicada, obteniendo el resultado correcto (60 piedritas).	18	90%	Estudiantes que utilizan la tabla del cuatro para llegar a la respuesta (multiplican hasta llegar a 24 y luego aumentan el cero)	2	11%
				Estudiantes que realizan una división (240/4).	8	45%
				Estudiantes que reparten las 240 piedritas en grupos de 4.	2	11%
				Sin justificación.	6	33%
T2	Estudiantes que no logran llegar a la respuesta.	2	10%	Estudiantes que multiplican por cuatro hasta llegar a 24 y luego aumentan el cero.	1	50%
				Estudiantes que dividen 240 entre 4.	1	50%

Análisis actividad 1, pregunta 3.

En correspondencia con los resultados que muestra la tabla anterior, se puede observar que las justificaciones son muy similares a las de la pregunta antes analizada solo que esta vez el T2 se reduce a un 10% siendo nuevamente

correctas las justificaciones pero con errores en la operación, que hacen que el resultado sea desacertado. En el caso de T1 en esta ocasión es el 90% de los estudiantes quienes responden correctamente a la pregunta dando la respectiva justificación; sin embargo 6 de ellos dan el resultado pero no justifican la forma como llegaron a él.

En relación a los resultados de las preguntas 2 y 3, se puede decir que los estudiantes no muestran mayores dificultades para resolver problemas que requieran una división, puesto que el mayor porcentaje de acierto según T1 de ambas preguntas, fue el de los estudiantes que utilizaron esta operación; sin embargo, alrededor del 12% de los estudiantes prefieren multiplicar hasta llegar al resultado (en estos casos aumentando un cero al final). Se rescata el hecho de que siendo las dos preguntas muy parecidas y con el mismo propósito en la tercera pregunta se minimiza el porcentaje de desaciertos (T2), mostrando que los estudiantes tienen dominio con el uso de las estructuras multiplicativas.

Tabla 36. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 4.

3. Para hacer 8 grupos iguales de piedritas, ¿Cuántas piedritas han de recoger a la vez? ¿por qué?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran identificar la operación indicada, obteniendo el resultado correcto (30 piedritas).	17	85%	Se recogen 30 piedritas porque 30 veces 8 es 240.	1	6%
				El resultado es 30 piedritas, y se encuentra al realizar una división (240 /8).	1	6%
				Se recogen 30 piedritas, porque se reparte 240 en grupos de 8.	2	12%
				Sin justificación.	13	76%
T2	Estudiantes que no logran llegar a la respuesta.	3	15%	Estudiantes que realizan una multiplicación.	1	33%
				Estudiantes que realizan una división.	1	33%
				Sin justificación.	1	33%

Análisis actividad 1, pregunta 4.

Según los resultados que muestra la tabla anterior, el 85% de los estudiantes reconoce la operación que se debe realizar para llegar al resultado correcto y el 15% restante no logra hacerlo. A diferencia de las dos preguntas anteriores (2 y 3), esta vez los estudiantes que llegan a la respuesta correcta dejan de lado la estrategia de realizar una multiplicación y hacen todos una división (T1) además, se evidencia el incremento del porcentaje de los estudiantes que no justifican en T1 (76%), tal vez porque sentían que la justificación iba a ser igual a la de las preguntas anteriores.

Tabla 37. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 5.

4. Hansel y Gretel escribieron numéricamente las posibles organizaciones que podían hacer con las piedritas, pero se le borraron algunos datos. Ayúdale a completar la siguiente tabla.			
Grupos de piedritas		Número de piedritas en cada grupo	Total
8			240
		60	240
12			240
		24	240
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran completar la tabla correctamente, identificando los divisores del 240.	12	60%
T2	Estudiantes que presentan dificultad al completar la tabla y no lo hicieron correctamente.	6	30%
T3	Estudiantes que no completaron la tabla totalmente.	2	10%

Análisis actividad 1, pregunta 5.

En relación a los resultados que nos muestra la tabla anterior, se puede observar que más de la mitad de los estudiantes (T1) reconocen los divisores de 240 y pueden completar la tabla correctamente, mientras que 6 de los estudiantes

(T2) no lo hacen quizás debido a que cometen errores en los cálculos al realizar las operaciones y el 10% deja campos de la tabla sin completar, lo que significa que estos dos últimos (T2 y T3) presentan ciertas dificultades relacionadas con la operación de división y su identificación.

Tabla 38. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 6.

5. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información dada:			
Grupos de piedritas		Número de piedritas	Total
5			300
		3	81
6			72
		7	98
11			44
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran completar la tabla correctamente, realizando la operación correspondiente.	4	20 %
T2	Estudiantes que presentan errores en algunos de los campos de la tabla, debido a dificultades en los cálculos.	14	70%
T3	Estudiantes que no completaron la tabla totalmente.	2	10%

Análisis actividad 1, pregunta 6.

Según los resultados que muestra la tabla anterior, que es del mismo tipo de pregunta que la 5, se evidencia que en comparación con dicha pregunta esta vez el porcentaje más alto es el porcentaje de respuestas erróneas (T2) y no el de respuestas acertadas, esto tal vez porque se preguntaba por los divisores de diferentes números. Solo 4 de los 20 estudiantes completaron la tabla correctamente (T1) realizando las operaciones indicadas, lo que deja ver nuevamente dificultades con la operación de división.

Tabla 39. Tipificación situación 3, actividad 1, pregunta 7.

6. Encuentra y escribe una forma de hallar el total, teniendo en cuenta que el número de grupos es a, el número de piedras es b, y el total es c.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran escribir la expresión, según las variables asignadas.	11	65%	Muestran que la forma de hallar el total según las variables dadas es: $a \times b = c$ y ejemplifican con un caso en particular.	2	18%
				Expresan que $a \times b = c$ es la forma de hallar el total.	8	73%
				Explican que hay dos formas de hallar el total según lo dado: $a \times b = c$ y $c/a = b$	1	9%
T2	Estudiantes que no logran plantear adecuadamente la expresión.	6	20%	Expresan operaciones correctas y erróneas para el caso. $ax b = c$ $a + b = c$ $a / b = c$ $a - b = c$	4	67%
				Muestran que la forma general de hallar el total usando esas variables es: $a / b = c$	2	33%
T3	Estudiantes que no realizan el ejercicio.	3	15%	Sin justificación.	3	100%

Análisis actividad 1, pregunta 7.

El propósito de la pregunta anterior era observar si los estudiantes podían expresar una operación de manera general utilizando letras como variable; en relación con los resultados que muestra la tabla, se puede evidenciar que más de la mitad de los estudiantes (65%) consiguen plantear la expresión y es solo el 20% quien lo hace de manera incorrecta escribiendo expresiones para tratar de obtener la respuesta correcta al azar, de esta forma escriben todas las operaciones que conocen $a \times b = c$, $a + b = c$, $a / b = c$, $a - b = c$ (67% - T2) y algunos dan la respuesta de manera inversa $a / b = c$ (33% - T2); mientras que el 15% no responde. En cuánto al porcentaje asertivo (T1), es importante resaltar,

que aunque solo un estudiante logra identificar que hay dos formas de expresar la respuesta $a \times b = c$ y $c / a = b$ (tal como se ve en la imagen 15.S3.A1), la mayoría pudieron llegar a $a \times b = c$ (73% de T1) y dos verifican con un caso particular (18% de T1), ejemplificando la forma de hacerlo. Esto nos deja ver que los estudiantes pueden encontrar una forma general de expresar una operación usando casos particulares, entendiendo que una expresión se puede enunciar de por lo menos dos formas. Sin embargo se evidencia que la letra es considerada como un número generalizado y no como una variable, pues piensan la relación en términos de casos particulares y no para todos los casos.

A photograph of a piece of paper with two handwritten mathematical equations. On the left, it says $A \times B = C$. On the right, it says $C \div A = B$. The handwriting is in dark ink on a light-colored background.

Imagen 15. S3.A1

Tabla 40. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 1, literales a y b.

Actividad 2: Estrategias multiplicativas.

Hansel partió su pan en varios pedacitos los cuales rego por el camino, 1 cada 7 pasos. Con tanto trabajo sólo registró algunos datos como se muestra en la siguiente tabla. Con tu experiencia multiplicativa:

1. Reconstruye la siguiente tabla:

Pedazos de pan	Pasos
1	7
	14
4	
	56
10	
18	
	140
	280
58	
	812

- a. Explica como hiciste para completarla.

Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran completar correctamente la tabla identificando la relación de dependencia entre cantidades.	8	45%	Explican que se completa usando dobles y multiplicando por siete.	3	38%
				La completan usando la tabla del siete.	3	38%
				Explican que para completarla deben multiplicar (por siete), dividir (entre siete), sumar y restar.	1	12%
				Expresan que la tabla se completa siguiendo la secuencia (tabla de multiplicar del siete).	1	12%
T2	Estudiantes que no logran completar correctamente la tabla, por errores en los cálculos realizados.	11	50%	Explican que la tabla se completa siguiendo la tabla del 7.	3	27%
				Completan la tabla multiplicando y dividiendo por 7.	4	37%
				Explican que la tabla se completa sumando y multiplicando por 7.	3	27%
				Completan la tabla contando de 7 en 7 o buscando el doble.	1	9%
T3	Estudiantes que dejaron la tabla incompleta.	1	5%	Explican que completan la tabla realizando un conteo.	1	100%
b. Indica las técnicas multiplicativas que usaste para completar la tabla anterior. Explica tu respuesta.						
Tipo de respuesta					C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que utilizaron la técnica de la multiplicación egipcia (dobles), incluyendo la propiedad $f(x) = f(y) + f(z)$.				6	30%
T2	Estudiantes que identificaron que el patrón era el número siete (7) y utilizaron esa tabla multiplicativa para llegar a la solución, realizando todas las operaciones o contando de 7 en 7.				13	65%
T3	Estudiantes que no dieron una explicación sobre la estrategia utilizada para resolver la tabla.				1	5%

Análisis actividad 1, pregunta 1, literales a y b.

Según los resultados que muestra la tabla anterior, en relación con el literal a, el 45% de los estudiantes consiguen completar la tabla en forma correcta y justificar de qué manera lo hicieron, mientras que el 50% no logra hacerlo y el 5% dejan la tabla con datos faltantes, explicando que para resolverla realizaron un conteo, el cual quizás se efectuó contando de siete en siete. Los resultados que arroja T1 evidencian, que los estudiantes si identifican que el patrón es el número siete, ya que sus justificaciones dejan ver esa relación al multiplicar y dividir por siete, usar la tabla del siete o seguir la secuencia que va de siete en siete. Es importante resaltar que los estudiantes no solo evidencian multiplicación o división sino que también utilizan los dobles y la propiedad aditiva: $f(y)+f(z)=f(x)$ o $f(y)-f(z)=f(x)$, lo que les permite llegar fácilmente a ciertos resultados; esto se debe a la previa exposición que el colegio les ha dado en el uso de estas estrategias. Otro aspecto importante es que los estudiantes que completan la tabla de forma incorrecta (T2), justifican de la misma manera que T1, lo que deja ver que su error no se generó al identificar la operación que se debía realizar, sino que se dio en el momento de realizar los cálculos y desarrollar las operaciones.

Para el literal b, se puede observar que los estudiantes justifican con las estrategias antes descritas: Multiplicación Egipcia (dobles), contando de siete en siete, usando la tabla del siete y utilizando la propiedad $f(y)+f(z)=f(x)$ o $f(y)-f(z)=f(x)$; y solo 1 estudiante (5%) no responde la pregunta, lo que permite evidenciar nuevamente que los estudiantes si identifican el siete como el patrón de comportamiento.

Tabla 41. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 2, literales a y b.

2. En relación con la tabla del literal número 1(pregunta anterior): Escribe cuántos pedazos de pan regó Hansel cuando dio el paso 35. Explica como encontraste la solución.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que llegan			Estudiantes que	2	11%

	a la respuesta correcta (5 pedazos de pan), realizando la operación adecuada.	18	90%	llegan a la solución usando la tabla del 7 (multiplicando hasta llegar a $7 \times 5 = 35$).		
				Estudiantes que llegan a la respuesta mediante la operación de división ($35/7=5$)	3	17%
				Estudiantes que resuelven la pregunta usando dobles.	1	5%
				Estudiantes que realizan una suma para llegar a la respuesta ($7+7+7 \dots$).	9	50%
				Sin justificación.	3	17%
T2	Estudiantes que no logran llegar a la respuesta correcta.	2	10%	Ninguna.	2	100%
a. Escribe el número de pedazos de pan que Hansel regó cuando dio 182 pasos. Explica como encontraste la respuesta.						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran responder correctamente a la pregunta, identificando que cuando Hansel dio 182 pasos regó 26 pedazos de pan.	5	25%	Explican que encuentran la respuesta al realizar una división ($182/7$).	2	40%
				Explican que utilizan los datos anteriores de la tabla para realizar una suma (Suman los 126 pasos que ya tienen más los 56 pasos que también tienen y esto da como resultado 182, luego observan la cantidad de pedazos de pan correspondiente a estas dos cantidades y las suman, lo que da como resultado 26.	2	40%
				Sin justificación.	1	20%
T2	Estudiantes que no logran responder la pregunta correctamente por error de cálculos en la operación realizada.	3	15%	Resuelven la pregunta al hacer una división.	3	100%
T3	Estudiantes que no logran responder la pregunta adecuadamente.	10	50%	Resuelven la pregunta al realizar una suma.	3	30%
				No realizan operación y se limitan al lenguaje	7	70%

				natural (ej.: hice una suma, hice una división..., pero sin dar la respuesta a la pregunta).		
T4	Estudiantes que no resuelven la pregunta.	2	10%	Sin justificación.	2	100%

Análisis actividad 2, pregunta 2, literales a y b.

En relación a los resultados que muestra la tabla anterior literal a, se observa que el 90% de los estudiantes identifica la forma para llegar a la respuesta usando estrategias similares a las de la pregunta anterior (teniendo en cuenta la tabla del siete, utilizando dobles, dividiendo entre siete) y también presentan una estrategia particular que se evidenció en el protocolo de observación, en la que utilizan la tabla de la pregunta 1 que debían completar; es decir, ubican el 35 en la columna de los pasos, y realizan la operación (según su estrategia) tal como la realizaron para completar la tabla. Se observa que en esta pregunta predomina el número de estudiantes que responden en forma aditiva 50% -T1 y solo 3 no justifican su respuesta.

En relación a los resultados del literal b, el 25% de los estudiantes encuentran la respuesta correcta y justifican como llegaron a ella, el 15% presenta errores en los cálculos al hacer la división, lo cual no les permite llegar a la respuesta correcta; el 10% no responde y el porcentaje más alto lo representa el 50% de los estudiantes quienes no dan la respuesta adecuada a la pregunta. Se resalta que los estudiantes que respondieron bien a la pregunta (T1), utilizan dos estrategias mediante las cuales justifican: la primera se basa en realizar la división $182/7$ y la segunda utilizando nuevamente la propiedad $f(y)+f(z)=f(x)$.

Se puede evidenciar que en esta pregunta hay un aumento significativo en el porcentaje de error (T3), en la medida que los estudiantes emplean operaciones equivocadas para responder (30% de T3) o se limitan a escribir en lenguaje natural la operación que se debería realizar, sin hacer el procedimiento (70% de

T3); esto porque 182 parecía ser un número bastante grande y los estudiantes pensaban que se demorarían mucho en llegar hasta allá.

Tabla 42. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 3, literales a y b.

3. Considerando la tabla del literal 1:						
a. Escribe una relación que encuentres entre la cantidad de pan (primera columna) y el número de pasos (segunda columna).						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran establecer una relación entre las dos columnas.	9	45%	Estudiantes que explican que la relación es la tabla del 7.	9	100%
T2	Estudiantes que no establecen una relación coherente entre las dos columnas.	6	30%	La relación es que se puede encontrar una respuesta en relación a los pedazos de pan.	3	50%
				Estudiantes que escriben que la relación es que unos números son los dobles de otros.	3	50%
T3	Estudiantes que no responden.	5	25%	Sin justificación.	5	100%
b. ¿Qué operación usaste para encontrar el número de pasos?						
Tipo de respuesta		C.E.	Porcentaje	Justificación	C.E.	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden la pregunta, identificando la operación correcta.	7	35%	Explican que usan la multiplicación y la división (por siete y entre siete).	2	29%
				Expresan que para encontrar el número de pasos utilizan la tabla del 7.	5	71%
T2	Estudiantes que responden la pregunta, dando una respuesta errónea o imprecisa.	7	35%	Explican que la operación utilizada fue la suma.	4	58%
				Muestran que dividen 182 entre 7.	1	14%
				Explican que usan la división en las dos columnas.	1	14%
				Expresan que para encontrar el número de pasos se multiplica y se divide por 2.	1	14%
T3	Estudiantes que no responden las preguntas.	6	30%	Sin justificación.	6	100%

Análisis actividad 2, pregunta 3, literales a y b.

Según el literal a que muestra la tabla anterior, cerca de la mitad de los estudiantes (45%) pueden reconocer y expresar una relación entre las dos columnas, donde la única respuesta dada por 6 estudiantes (75% de T1) es que la relación es la tabla del siete. El 30% no responde coherentemente a la pregunta dando una respuesta un poco vacía y otra en la que se establece una relación pero solo desde la primera columna con ella misma (unos números son los dobles de otros ejemplo: 4 es el doble de 2, 8 es el doble de 4, ente otros.); y el 25% de los estudiantes no responden.

En cuanto al literal b, el porcentaje de estudiantes que responde la pregunta correctamente justificando la respuesta fue igual al porcentaje de los que no responden bien (35% respectivamente) y el 30% restante no respondió. Los que responden bien (T1) justifican que multiplicaron y dividieron por siete (29% de T1) y la respuesta más popular fue el uso de la tabla del 7 (71% de T1). En el caso de T2 se evidencian diversas respuestas en su mayoría sin coherencia, por ejemplo el 14% de T2 responde que para responder multiplicó y dividió por dos, otro 14% muestra que divide 182 entre siete, lo cual equivale a una de las preguntas anteriores, también el 14% responde que divide en las dos columnas y un 58% usa una suma para llegar a la respuesta. Estas justificaciones dejan ver que hay una inconsistencia entre estas respuestas y respuestas anteriores relacionadas con la tabla (ejemplo: pregunta 1a.), puesto que los estudiantes anteriormente podían justificar de manera adecuada así no quedara bien la operación, mientras que en este caso ni siquiera lograron justificar algo que venían haciendo en varias actividades.

Tabla 43. Tipificación situación 3, actividad 2, pregunta 4, literales a y b.

- | |
|--|
| <p>4. El siguiente esquema muestra una relación entre los grupos de piedras que Hansel y Gretel podían formar según el número de pasos, y el total de piedritas que tenían.</p> <p>a. Completa las siguientes columnas según la operación indicada.</p> |
|--|

Grupos de pedritas 9 25 15 35 28 140 9 25 15 35 28 140 35 28 140 35 28 140 35 28 140 35 28 140			
--	--	--	--

Análisis actividad 2, pregunta 4, literales a y b.

Según lo que se observa en la tabla preliminar, los porcentajes son similares a la pregunta anterior, el 30% de los estudiantes completa la tabla correctamente sin ninguna dificultad, mientras que el 35% lo hace de forma incorrecta y el 35% restante no logra hacerlo. En consecuencia con lo que se ha trabajado a lo largo de la secuencia se esperaba que los porcentajes de acierto fueran más altos, puesto que el esquema es muy parecido a la tabla de la pregunta 1 y estaba

completamente dirigida por las líneas que determinaban que operación se debía realizar.

En correspondencia con el literal b, el 50% de los estudiantes establecen una relación entre los dos esquemas y el 50% restante deja el espacio en blanco, evidenciando que se presentan ciertas dificultades cuando se pide hablar sobre alguna “relación”, quizás no es claro para los estudiantes lo que esa palabra significa. En cuanto al porcentaje asertivo, se rescata que las relaciones encontradas dejan ver que se identificó el patrón que determina las operaciones (en una columna se multiplica y en la otra se divide- por siete- 70% de T1) y que nuevamente el patrón de comportamiento interno era el número siete (ambos esquemas se resuelven usando la tabla del 7, 30% de T1).

En conclusión, y en coherencia con los resultados que se evidenciaron a lo largo de la situación, se puede indicar que en esta etapa los estudiantes ya están en condiciones de ver el patrón, sea en forma general o particular, decirlo y empezar a registrar expresiones, ya sea a través de números o utilizando algunas letras que los representan. Tal como dice Mason (1985) uno de los aspectos de “ver”, lo general en lo particular es que una vez que se ha logrado, cualquier ejemplo particular puede ser estructurado de tal forma que la generalidad inherente en ésta puede ser identificada. De esta forma se corrobora lo dicho anteriormente sobre el “ver”, puesto que los estudiantes lograron expresar y ejemplificar sus expresiones usando casos particulares y justificando porque su respuesta se dio de esa manera. El “decir” se evidencia cuando los estudiantes se arriesgan a dar en voz alta sus apreciaciones y se animan a comentarlo con los compañeros, lo que posteriormente les da la certeza que se necesita para llegar al registrar. Este último paso deja ver que pueden expresar la generalidad mediante la forma en la que plasman las repuestas, en las respuestas y en las justificaciones mismas. Esto permite evidenciar que esta situación conlleva a un acercamiento al razonamiento algebraico, a través de actividades que desarrollan

el pensamiento variacional, desde las estructuras multiplicativas, permitiendo la identificación de aspectos generales y particulares que dan lugar a un patrón.

Situación 4: Estrategias multiplicativas.

Actividad 1: Los Muffins de limón del padre de Hansel y Gretel

Cuando los niños regresan de nuevo a su hogar, el padre les ofrece de comer todo lo que ellos quieran, Hansel y Gretel le dicen que quieren Muffins de limón ¡su preferido!, los ingredientes que el padre de los niños recuerda para preparar dos porciones de torta son:

- 12  de harina
- 1 
- 5  de 
- 7  de 
- 3  de 
- 2  (Ralladura de cascara de limón)

Tabla 44.Tipificación situación 4, actividad 1, pregunta 1.

1. El padre de los niños quiere organizar una tabla con la cantidad de ingredientes que necesita para preparar varias porciones, ayúdale a llenarla:

INGREDIENTES PORCIONES								
	HARINA	HUEVOS	LECHE	AZUCAR	MANTEQUILLA	LIMON		
2								
4								
8								
6								
12								

Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que llenan la tabla correctamente.	11	58%
T2	Estudiantes que presentan errores en algunos campos de la tabla.	8	42%

Análisis actividad 1, pregunta 1.

Según los porcentajes que muestra la tabla anterior, más de la mitad de los estudiantes (58%) logran llenar la tabla correctamente, mientras el 42% no logra hacerlo porque presenta errores en algunas de las celdas. En relación a este último porcentaje (T2), es importante resaltar que 2 de los estudiantes no observaron bien la tabla y esto hizo que se confundieran y que aplicaran dobles en todos los campos de cada columna, cuando solo se podía hacer dobles en los primeros tres campos; así mismo es importante rescatar que los errores del resto de los estudiantes de T2 fueron mínimos, en uno o dos campos de toda la tabla, lo que nuevamente demuestra lo bien permeados que los estudiantes están con relación al trabajo de dobles y de la propiedad aditiva: $f(y)+f(z)=f(x)$.

Tabla 45. Tipificación situación 4, actividad 1, pregunta 2.

2. Escribe cuantas cucharadas de harina serian necesarias para preparar 57 porciones de Muffins, explica como lo harías.						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden correctamente expresando que las cucharadas de harina que se necesitan son 342 y la forma como llegaron a la respuesta.	12	63%	Estudiantes que lo hacen teniendo en cuenta que una porción son seis cucharadas de harina (multiplican 57×6).	11	92%
				Sin justificación	1	8%
T2	Estudiantes que identifican la forma de hallar la respuesta pero se equivocan en los cálculos.	4	21%	Estudiantes que lo realizan teniendo en cuenta que una porción son seis cucharadas de harina (proporcionalidad).	2	50%
				Estudiantes que lo hacen realizando una	2	50%

				multiplicación (57x6), teniendo en cuenta que 6 es la mitad de 12.		
T3	Estudiantes que no logran encontrar la respuesta.	3	16%	Sin justificación	1	33%
				Estudiantes que lo hacen usando el 12 como patrón de comportamiento, partiendo de que 12 porciones son 24 cucharadas de harina, doblan hasta 48 y de ahí van de uno en uno hasta llegar a 57 aumentando de a 12.	2	67%

Análisis actividad 1, pregunta 2.

Con relación a los resultados que muestra la tabla anterior, se puede observar que más de la mitad de los estudiantes (63% - T1) identifican sin dificultades la operación que se debe realizar, determinando la relación cuaternaria que existe entre los datos del ejercicio; es decir, haciendo la equivalencia de que si para dos porciones son 12 cucharadas entonces para una porción se necesitan 6 cucharadas de harina, y a partir de ahí establecen la relación que les permite llegar a la multiplicación 57×6 . Solo un 8% de T1 no justifica como encontró la respuesta correcta sino que simplemente se limita a escribir el número.

En cuanto a T2 las dos justificaciones que proporcionan los 7 estudiantes, son prácticamente la misma respuesta, sin embargo el primer 50% justifica que lo hace teniendo en cuenta que para una porción se necesitan seis cucharadas de harina, y proceden como se describió anteriormente para T1 equivocándose en los cálculos lo que hace que no lleguen a la respuesta correcta; el 50% restante basa su justificación únicamente en la operación de multiplicación que hizo (en la cual presento errores), obviando el procedimiento que se debió realizar anteriormente (equivalencia de medidas).

Para terminar el análisis de esta pregunta se rescata que según los resultados que muestra T3, el porcentaje de estudiantes que no llegan a la respuesta correcta es solo un 16% equivalente a 3 de los 19 estudiantes, presentando confusiones entre las cantidades de las porciones y la cantidad de cucharadas de harina (67% de T3).

Tabla 46. Tipificación situación 4, actividad 1, pregunta 3.

3. Si quisiéramos saber cuántas cucharadas de azúcar se necesita para un número cualquiera de porciones de Muffins, que operación utilizarías y como lo expresarías de forma general.						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que encuentran una forma general que les permite hallar las cucharadas de azúcar para un número cualquiera de porciones de muffins.	8	42%	Estudiantes que responden que la solución es $a \times b = c$ (expresando la forma general con el uso de letras, mediante la operación de multiplicación), y explican lo que significa cada letra.	4	50%
				Estudiantes que responden que la solución es $a \times b = c$, y dan ejemplos particulares.	4	50%
T2	Estudiantes que no logran encontrar una forma general para hallar las cucharadas de azúcar que serían necesarias para un número cualquiera de porciones de muffins.	7	37%	Estudiantes que tratan de encontrar la respuesta al azar expresando las diferentes operaciones que se pueden realizar con a , b y c ; es decir, $a \times b = c$, $a + b = c$ y $a/b = c$.	2	29%
				Estudiantes que responden en lengua natural que lo harían a través de una suma.	3	43%
				Estudiantes que resuelven la pregunta usando la harina en lugar del azúcar y responden tal como en la pregunta 2.	2	29%
T3	Estudiantes que no resuelven la pregunta.	4	21%	Sin justificación.	4	100%

Análisis actividad 1, pregunta 3.

En correspondencia con los resultados que muestra la tabla anterior, podemos observar que los porcentajes de acierto y desacierto son bastante similares. El 42% de los estudiantes (T1) expresan que para saber las cucharadas de azúcar que se necesitan para un número cualquiera de porciones es necesario realizar una multiplicación, y tienen claro que como se habla de un número cualquiera, estos números pueden ser representados por letras, y de esta forma llegan a: $a \times b = c$, explicando la variable que representa cada letra (como se ve en la imagen 16.S4.A1); además, la mitad de T1 explica la respuesta con casos particulares, lo que permite evidenciar con más seguridad que tienen claro lo que representa cada variable.

lo haria con A B y C...

$$A \times B = C \rightarrow \text{el total}$$

↓ ↓

de cucharadas de 1 Porcion cantidad de Por ciones

Imagen 16.S4.A1

Con relación al porcentaje de desacierto (37% - T2), el 29% de los estudiantes opta por escribir operaciones de división, multiplicación y suma utilizando letras, para tratar de conseguir la respuesta al azar, lo que permite evidenciar que no tienen claro cómo ir de casos particulares a casos generales mediante una expresión que los represente; el 43% prefieren solo dar una respuesta en lengua natural sin realizar la operación, quizá porque tampoco tienen claro lo que se debe hacer en esa pregunta; y finalmente el 29% restante responde la pregunta con otra que realizaron anteriormente.

Para concluir se observa que 4 de los 19 estudiantes no resolvieron la pregunta quizá porque no fue claro para ellos que se debía realizar.

Actividad 2: El techo de barquillos

El techo de la casa de dulce estaba formado por filas de triángulos contruidos por barquillos como se muestra a continuación:



Fig. 1



Fig.2



Fig. 3

Tabla 47.Tipificación situación 4, actividad 2, literal a.

a. ¿Cuántos triángulos y cuantos barquillos deben tener las figuras 4,5 y 6 que siguen en la secuencia?						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que llegan a la respuesta correcta identificando que la cantidad de barquillos que tienen las figuras mencionadas son 9, 11 y 13, y que el número de triángulos es 4, 5 y 6, respectivamente.	7	37%	Establecen la relación entre los barquillos y los triángulos, a través del uso de dibujos, y especifican que el cardinal que representa la posición de la figura es el mismo que representa la cantidad de triángulos; es decir, que si la figura 4 tiene 9 barquillos entonces tiene 4 triángulos, y así sucesivamente en cada figura aumenta un triángulo.	4	57%
				Resuelven la pregunta utilizando una tabla de registro, en la que escriben el número de la figura, el número de triángulos y el número de barquillos, siguiendo la secuencia vertical.	2	29%
				Sin justificación.	1	14%
T2	Estudiantes que solo responden que el número de barquillos que compone cada figura que se pide es 9, 11 y 13 respectivamente.	4	21%	Porque continúan con la secuencia que se lleva: 3, 5, 7, 9, 11, 13.	1	25%
				Porque identifican que el patrón va de dos en dos (9, 11 y 13).	2	50%
				Porque justifican mediante dibujos, señalando cuantos barquillos tiene	1	25%

				cada figura.		
T3	Estudiantes que solo responden al número de triángulos que tiene la figura que se pide: 4, 5 y 6 respectivamente.	4	21%	Porque identifican que en la secuencia de las figuras cada vez que aumenta una figura aumenta un triángulo que corresponde al mismo cardinal que representa la figura.	2	50%
				Usan los dibujos para identificar el número de triángulos que corresponde a cada uno.	2	50%
T4	Estudiantes que realizan correctamente los dibujos de las posiciones pedidas pero no dan respuesta a las preguntas.	1	5%	Sin justificación.	1	100%
T5	Estudiantes que no responden las preguntas o intentan dibujar pero no logran terminar ni dar la respuesta.	3	16%	Sin justificación.	3	100%

Análisis actividad 2, literal a.

Según los resultados que muestra la tabla anterior, se evidencia que el 37% de los estudiantes (T1) responden las dos preguntas que incluye el literal, donde se observa que solo uno no justifica porque dio esas respuestas y el resto utiliza dos estrategias base para explicar el porqué; en la primera (57% de T1) realizan los dibujos que corresponden a cada figura para determinar el número de barquillos e identifican el patrón que relaciona el número de triángulos con el cardinal que representa la posición; la segunda estrategia (29% de T2) consiste en realizar una tabla donde una vez identificado el patrón que va de dos en dos (para el caso de los barquillos) y el patrón que va de uno en uno (para el caso de los triángulos), registrando los datos que se piden en forma ordenada, tal como se muestra en la imagen 17.S4.A2.La :

a. ¿Cuántos triángulos y cuantos barquillos deben tener las figuras 4,5 y 6 que siguen en la secuencia? ¿por qué?

Figura	triángulos	barquillos
4	4	9
5	5	11
6	6	13

Imagen 17.S4.A2.La

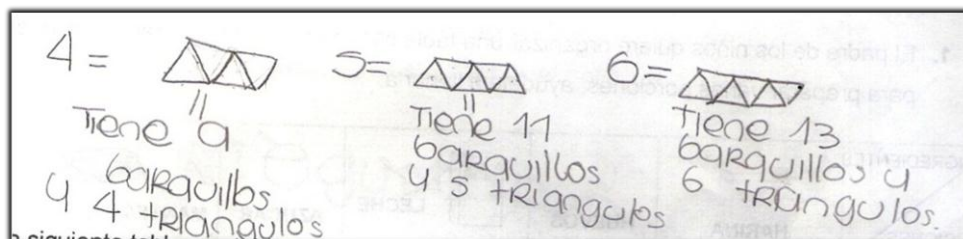


Imagen 18.S4.A2.La

Sin embargo, es importante resaltar que un 21% de los estudiantes (T2), identifican el número de barquillos que compone las figuras pedidas, justificando mediante tres respuestas incluidas las dos descritas anteriormente, mas una en la que los estudiantes expresan que lo hacen así porque siguen la secuencia que llevan los números; mientras el otro 21% (T3) identifica únicamente el número de triángulos que tiene cada figura que se pide, mediante el uso de dibujos y nuevamente mediante la identificación del patrón que relaciona la posición con el número de triángulos.

Con relación a T4, uno de los 19 estudiantes, realiza los dibujos que corresponden a las figuras de las que se está pidiendo identificar el número de barquillos y el número de triángulos, pero no da respuesta alguna sobre lo que se pide; es posible que el estudiante haya pensado que con solo hacer el dibujo se obviaba la respuesta y que no era necesario escribirlo en lengua natural. Finalmente, teniendo en cuenta el porcentaje de T5 (16%), se observa que uno de los estudiantes dejo en blanco el espacio de respuesta y los dos restantes, intentaron realizar los dibujos pero no lo lograron y no dieron ninguna respuesta.

Considerando los resultados anteriores, se puede decir, que menos de la mitad de los estudiantes logran ver, decir y registrar una secuencia que involucra dos patrones relacionados, pero la mayoría logran hacerlo por lo menos con uno de los patrones; lo que deja evidenciar que es sencillo para los estudiantes trabajar con un patrón y que cada vez adquieren más habilidades para trabajar con más de uno, lo que también deja ver que el pensamiento variacional se va ciertamente desarrollando a través de esas actividades y que los estudiantes están en capacidad de recibir tal formación.

Tabla 48. Tipificación situación 4, actividad 2, literal b.

b. Completa la siguiente tabla y establece una relación entre los triángulos y el número de barquillos.						
Número de triángulos						
Número de barquillos						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que completan la tabla correctamente y establecen una relación entre los triángulos y el número de barquillos.	1	5%	Establecen que la relación que existe es: $n+n+1$ y justifican con casos particulares.	1	100%
T2	Estudiantes que completan la tabla correctamente pero no expresan ninguna relación entre los datos.	14	74%	Sin justificación.	14	100%
T3	Estudiantes que cometen errores en la tabla y no escriben ninguna relación entre los datos.	1	5%	Sin justificación.	1	100%

T5	Estudiantes que no completan la tabla.	3	16%	Sin justificación.	3	100%
----	--	---	-----	--------------------	---	------

Análisis actividad 2, literal b.

En correspondencia con los resultados que muestra la tabla anterior, se puede observar que el 74% (T2) de los estudiantes completaron la tabla en forma correcta dándole a cada campo el valor que corresponde según la variable indicada, pero sin expresar la relación que se pide entre los datos. Solo 1 de los 19 estudiantes logra completar bien la tabla y dejar escrita la relación $n+n+1=$ número de barquillos; sin embargo la observación que se realizó mientras los estudiantes desarrollaban la secuencia, evidenció que muchos de ellos encontraron la relación pero no lograban registrarla, se limitaban a decirle: el número de barquillos es el número de triángulos sumado dos veces más uno; incluso, algunas estudiantes identificaron que si completaban las casillas correspondientes al número de triángulos (que sabían que aumentaba de uno en uno por las actividades anteriores: 1,2,3,4,5...), podían llegar a que si tomaban por ejemplo la posición que tiene 4 triángulos (posición 4), al hacer 4 más (+) la posición anterior a él ($4+3$) daba como resultado el número de barquillos correspondiente a la casilla de la posición número tres (es decir la que esta antes del cuatro pero en la fila de abajo), lo que permite ver la relación $n+ (n-1) =$ número de barquillos de $(n - 1)$.

Por otro lado, el 5% de los estudiantes (T3), comete errores en algunos campos de la tabla y además no expresa ninguna relación entre las dos variables, y el 16% restante (T4) deja los espacios de la tabla y de la pregunta en blanco.

Los resultados anteriores demuestran que dada la complejidad de la pregunta, los estudiantes aunque observan el patrón y lo expresan con palabras, aún no se

encuentran en completa capacidad para registrarlo, quedándose en la segunda etapa que plantea Mason (1985): el “decir”.

Tabla 49. Tipificación situación 4, actividad 2, literal c.

c. Si una figura está compuesta por 9 triángulos. ¿Cuántos barquillos se necesitan para formarlo? ¿por qué?						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que responden correctamente a la pregunta, identificando que se necesitan 19 barquillos para formar la figura compuesta por 9 triángulos.	13	68%	Porque la secuencia va de dos en dos.	4	31%
				Justifican realizando el dibujo que les permite hacer el conteo de barquillos.	1	8%
				Realizan el dibujo de la figura con 9 triángulos y equivocadamente adicionan que da ese resultado porque cada triángulo se forma con tres barquillos y el 19 se puede dividir en grupos de tres.	2	15%
				Porque se aumenta 4 a la última cantidad que se completó en la tabla.	1	8%
				Sin justificación.	5	38%
T2	Estudiantes que dan una respuesta equivocada.	2	11%	Porque así continua la secuencia.	2	100%
T3	Estudiantes que no responden la pregunta y dejan el espacio de respuesta en blanco.	4	21%	Sin justificación.	4	100%

Análisis actividad 2, literal c.

Según los resultados que muestra la tabla anterior, más de la mitad de los estudiantes (68%- T1), responden correctamente la pregunta, en la que la mayor cantidad identifican nuevamente el patrón que va de dos en dos (31% de T1), dejando ver que han desarrollado satisfactoriamente la etapa del “ver”; algunos

prefieren realizar el dibujo con los 9 triángulos lo que luego les ayuda a contar fácilmente con cuantos barquillos está formado; otros utilizan la tabla que completaron en el literal anterior y aumentan dos casillas más; el 38% no da ninguna justificación; y finalmente dos estudiantes (15% de T1) dan la respuesta utilizando dibujos pero erróneamente justifican que da ese resultado porque cada triángulo se forma con tres barquillos y por tanto se puede dividir de forma exacta entre 3, sin tener en cuenta que en cada figura de la secuencia (a partir de la segunda) algunos triángulos comparten lados (barquillos) entre ellos.

En relación al T2, dos estudiantes (11%) responden de forma incorrecta, justificando que da esa respuesta porque así continua la secuencia, lo que deja ver que quizá su error fue durante los cálculos; y finalmente 4 de los 19 estudiantes (21% - T3) dejan el espacio de la respuesta totalmente en blanco.

Tabla 50. Tipificación situación 4, actividad 2, literal d.

d. ¿Con 21 barquillos cuantos triángulos se podrían formar? ¿Por qué?						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que dan la respuesta correcta, identificando que con 21 barquillos se pueden formar 10 triángulos.	12	63%	Porque la secuencia aumenta de dos en dos (conteo).	5	42%
				Porque al aumentar dos a los 19 que se tienen del literal anterior da 21 y esta respuesta corresponde a 10 triángulos.	4	33%
				Sin justificación.	3	25%
T2	Estudiantes que da una respuesta equivocada.	2	11%	La respuesta es 21 triángulos porque la secuencia aumenta de dos en dos.	1	50%
				Estudiante que realiza nuevamente el conteo de dos en dos desde el principio, pero se equivoca y llega a que la respuesta es 9.	1	50%
T3	Estudiantes que no dan respuesta a la pregunta.	5	26%	Sin justificación.	5	100%

Análisis actividad 2, literal d.

En relación con los porcentajes que muestra la tabla anterior, nuevamente se observa que el porcentaje más alto es el porcentaje de aciertos, en el cual 12 de los 19 estudiantes (T1) responden correctamente a la pregunta justificando de dos maneras diferentes: la primera usando el patrón que va de dos en dos, y la segunda utilizando la respuesta del literal anterior la cual estaba muy cerca del resultado que se pedía, facilitándoles el conteo. En cuanto al porcentaje de desaciertos (T2), se resalta que los dos estudiantes que responden de manera incorrecta lo hacen identificando el patrón, pero se equivocan en el conteo. Por último, se observa que solo 5 de los 19 estudiantes (T3) no dan respuesta alguna a la pregunta.

La pregunta de este literal era inversa a la pregunta del literal anterior, con el fin de corroborar que los estudiantes podían hacerlo de las dos formas. Es importante ver que los porcentajes son bastante similares: 68%, 11%, 21% y 63%, 11%, 26% respectivamente, lo cual permite evidenciar que realmente pueden ver las particularidades y encontrar elementos de la secuencia usando las dos variables.

Tabla 51. Tipificación situación 4, actividad 2, literal e.

e. Si n es el número de triángulos, escribe una forma que permita encontrar el número de barquillos.						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran encontrar una fórmula para hallar el número de barquillos dado que n representa el número de triángulos.	13	69%	Estudiantes que responden que la forma general es: $2 \times n + 1$ y comprueban con un caso particular, especificando a que equivale n .	2	15%
				Estudiantes que responden que la fórmula es: $n + n + 1$.	3	23%
				Estudiantes que responden que la fórmula es: $n + n + 1$ y además ejemplifican con un caso particular mostrando a que equivale n .	5	39%

				Estudiantes que dicen que la fórmula es: $n + n + 1$ y la igualan a un resultado pero no especifican quien es n .	3	23%
T2	Estudiantes que escriben una formula inexacta.	1	5%	Estudiantes que dicen que la fórmula es: $n + 1 = ?$	1	100%
T3	Estudiantes que no dan respuesta a la pregunta.	5	26%	Sin justificación.	5	100%

Análisis actividad 2, literal e.

En correspondencia con los resultados que muestra la tabla anterior se evidencia que el 69% de los estudiantes (T1) encuentran una formula según el requisito que se les da; mientras el 5% la escribe pero queda incorrecta (T2) y el 26% no da respuesta alguna (T3). Con relación con el resultado del T1, se puede observar que se presentan dos clases de respuesta, la primera, dada por el 15% de T1, se relaciona con una multiplicación y una suma: $2 \times n + 1$ (dos veces n más 1), el resto de los estudiantes responde aditivamente expresando la siguiente formula: $n + n + 1$ ya sea dejando solamente la formula o expresando con casos particulares, dando cuenta de que si tomamos uno de los números que son representados por n y lo sumamos dos veces más 1 da el número de barquillos; además es importante resaltar que un gran porcentaje de estudiantes tenían claro que n equivale a cualquier número, tal como se ve en la siguientes imágenes:

Handwritten note: $n + n + 1$ Equivale a cualquier numero
ejemplo.
 $4 + 4 + 1 = 9$

Imagen 19.S4.A2.Le

$$2 \times n + 1$$

N va a ser lo si remplazamos lo por n $2 \times 10 + 1 = 21$

Imagen 20.S4.A2.Le

Con relación a T2, solo un estudiante da una fórmula diferente pero le queda incorrecta, sin embargo, es el único estudiante que incluye el igual (=) en la expresión, formulando una ecuación en la que la respuesta está representada por un signo de interrogación (?).

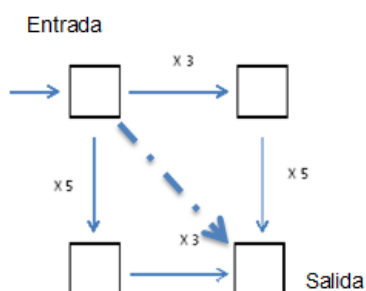
Finalmente, cinco de los 19 estudiantes no responden la pregunta, quizá porque no lograron ver la relación entre n como un número cualquiera de triángulos y la cantidad de barquillos.

Actividad 3:

Tabla 52. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 1.

Hansel mientras estaba encerrado en la jaula se inventó los siguientes cuadros mágicos:

1. Escribe un número en el cuadro de entrada y efectúa las operaciones que te indica:



Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que dan respuesta a la pregunta a través de un número cualquiera, y	12	63%	Estudiantes que utilizan el número uno como número de entrada.	4	33%
				Estudiantes que utilizan el número dos como número de entrada.	2	17%

	realizan las operaciones.			Estudiantes que utilizan el número tres como número de entrada.	3	25%
				Estudiantes que utilizan el número cuatro como número de entrada.	3	25%
T2	Estudiantes, que no responden la pregunta dejando el espacio de respuesta en blanco.	7	37%	Sin justificación.	7	100%

Análisis actividad 3, pregunta 1.

Esta pregunta estaba pensada para que los estudiantes pudieran ver las relaciones al manipular las reglas aritméticas basadas en un diagrama, el cual constituye una forma muy útil de generalizar dichas reglas, aquí el estudiante se puede dar cuenta que hay siempre una relación fija entre el número inicial y el número final. En cuanto a esto, el 63% de los estudiantes lo hicieron sin ninguna dificultad presentando en su mayoría cardinales pequeños tales como 1, 2, 3, 4 debido a su facilidad para operar, mientras que el 37% no lo hicieron, quizá porque se les dificultó entender el esquema.

Tabla 53. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 2.

2. Compara el número de entrada y el número de salida ¿Cómo aumenta o disminuye?						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que identifican alguna forma de aumento y disminución, entre el número de entrada y el de salida.	4	21%	Aumenta: el número de entrada es menor que el de salida.	3	75%
				Cuando se multiplica por números grandes aumenta.	1	25%
T2	Estudiantes que dan su respuesta en relación con el procedimiento y no con las dos cantidades que se piden.	3	16%	No aumenta ni disminuye dado que el total no cambia lo que cambia es el procedimiento, puesto que el esquema esta acomodado de diferente manera pero con las mismas operaciones.	2	67%

				El número de entrada y el de salida no tienen importancia, por los dos lados sin tener en cuenta la posición del multiplicador, se va a llegar al mismo número.	1	33%
T3	Estudiantes que no encuentran ninguna forma de aumento y disminución entre los dos números.	12	63%	Sin justificación.	12	100%

Análisis actividad 3, pregunta 2.

En correspondencia con los resultados que muestra la tabla anterior, se puede observar que el 21% de los estudiantes logran dar una respuesta válida a la pregunta, mientras el 63% restante no lo hace, y el 16% lo hace basándose en el procedimiento presentado por el esquema, identificando que el orden de los factores no altera el producto, y que por tal motivo no hay aumento ni disminución, lo que además permite evidenciar que los estudiantes logran ver el patrón de comportamiento y verificar con el resultado. Con relación al primer porcentaje T1, la mayoría de los estudiantes se basan únicamente en la relación de orden, afirmando que el número de salida es mayor que el de entrada, dado que a diferencia de los antes descritos, se limitan únicamente a observar las dos cantidades sin detenerse a pensar que sucedió y de qué forma se puede llegar de una a la otra; el resto aseguran que cuando se multiplica por un número grande la cantidad aumenta.

Estos resultados muestran que el porcentaje de aciertos disminuyó considerablemente con relación a las preguntas anteriores, esto quizá por la presentación de la pregunta ya que los estudiantes pudieron tener dificultades al leer el esquema y en la comprensión de los enunciados, dadas en lengua natural.

Tabla 54. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 3.

3. Explica cómo se obtiene el número de salida utilizando las operaciones indicadas. ¿existe alguna regla?						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que logran identificar una regla, según el procedimiento que sigue las operaciones que muestra el esquema.	7	58%	La regla es que por los dos lados del esquema se llega al mismo resultado.	2	29%
				La regla es que sin importar por cuál de los multiplicadores se opere primero, se llega a la misma respuesta.	1	14%
				Estudiantes que responden que puede existir una regla utilizando letras.	1	14%
				El número de salida se obtiene multiplicando. Además, sí existe una regla (no explica cuál).	2	29%
				Estudiantes que utilizan una cantidad particular para explicar que al multiplicar por ese número se llega al número de salida (Ej: el total se obtiene al multiplicar por 5).	1	14%
T2	Estudiantes que explican cómo obtienen el número de salida pero afirman que no existe ninguna regla.	1	8%	El número de salida se obtiene multiplicando y relacionando las cantidades. No existe ninguna regla.	1	100%
T3	Estudiantes que no dan respuesta a la pregunta.	4	33%	Sin justificación.	4	100%

Análisis actividad 3, pregunta 3.

Con relación a los resultados que presenta la tabla anterior, se observa que más de la mitad de los estudiantes logran explicar cómo se obtiene el resultado y expresar si existe una regla que generalice el procedimiento (T1); el 8% (T2) explica que se llega mediante una multiplicación, pero que no existe regla alguna; y finalmente el 33% de los estudiantes (T3) no responde la pregunta dejando

espacio en blanco. Con relación a T1, se puede observar que existen cinco clases de respuesta, en la primera y la segunda, los estudiantes logran identificar la propiedad conmutativa, asociando que sin importar el orden de los factores se llega al mismo resultado por ambos lados (tal como se ve en la imagen 21.S4.A3); en la tercer respuesta un estudiante deja escrito que quizá usando letras se puede hacer una regla pero no se atreve a formularla, al igual que en la cuarta respuesta, donde los estudiantes explican que el número de salida se obtiene multiplicando, y que existe una regla pero no la escriben; finalmente, un estudiante da la misma respuesta anterior pero lo hace usando un caso particular.

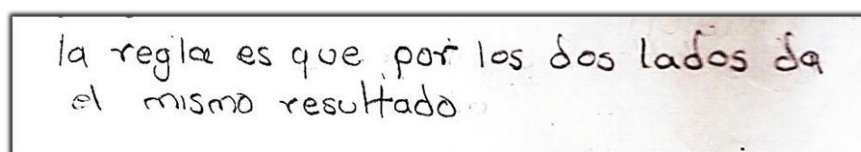


Imagen 21. S4.A3

Por otro lado, se resalta que según lo observado en las pruebas, dos de los estudiantes dieron también como respuesta que la regla era que por los dos lados se llega al mismo resultado, pero decidieron borrarla tal vez porque no se sentían seguros de que una regla se pudiera expresar en lengua natural, esto según lo analizado en los protocolos de observación.

Las anteriores respuestas permiten evidenciar, que los estudiantes pueden reconocer el patrón de las propiedades multiplicativas y decirlo en lengua natural, pero aún se les dificulta bastante registrarlo; sin embargo se rescata que presentan una idea de que la regla se podría plantear utilizando letras, lo cual es un acercamiento bastante grande respecto a la idea de generalización, usando las letras como número generalizado.

Tabla 55. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 4.

4. Ensayo con diferentes números en el recuadro de entrada y di si al desarrollar las operaciones se cumple la regla para cualquier número. Realiza mínimo 3 cuadros mágicos.						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que identifican que la regla se cumple para diferentes números y realizan por lo menos un cuadro mágico.	5	42%	La regla se cumple. (Realizan un cuadro mágico en el que el número de entrada es 4).	2	40%
				Estudiantes que realizan un cuadro mágico en el que el número de entrada es 2, y justifican que la regla es tener en cuenta las tablas de multiplicar.	2	40%
				Estudiantes que afirman que la regla si se cumple porque por los dos lados se llega al resultado (realizan un cuadro mágico).	1	20%
T2	Estudiantes que responden que la regla se cumple, pero no realizan ningún cuadro mágico.	1	8%	Estudiantes que afirman que la regla se cumple porque con cualquier número, por los dos lados se llega al mismo resultado.	1	100%
T3	Estudiantes que realizan los cuadros mágicos pero no responden si la regla se cumple.	3	25%	Estudiantes que realizan dos cuadros mágicos.	1	33%
				Estudiantes que realizan un cuadro mágico en el que el número de entrada es 1.	1	33%
				Estudiantes que realizan los tres cuadros mágicos que se piden. (Número de entrada: 5, 10 y 4 respectivamente).	1	33%
T4	Estudiantes que no responden la pregunta.	3	25%	Sin justificación.	3	100%

Análisis actividad 3, pregunta 4.

Según los resultados que muestra la tabla anterior, se puede observar que de los 12 estudiantes que respondieron esta última parte de la situación, un poco menos de la mitad (42%- T1) realiza las dos actividades que propone esta

pregunta, mientras que el 8% (T2) responden lo relativo a la regla y no realizan los cuadros mágicos, el 25% (T3) hace lo contrario (realizan los cuadros mágicos pero no responden si se cumple la regla); y el 25% (T4) restante no responde la pregunta.

Con relación a T1, se puede evidenciar que el 40% de los estudiantes expresan que la regla si se cumple y se limitan a realizar un solo cuadro mágico como prueba de ello, estos dos estudiantes en la pregunta anterior especificaron que la regla era que por los dos lados del esquema se llega al mismo resultado, lo que permite evidenciar que si identificaron la relación y el patrón de la propiedad trabajada, al igual que el 20% también perteneciente al T1 quienes si dejan explicita la regla; el otro 40% de justifica que la regla es tener en cuenta las tablas de multiplicar, esto quizá porque consideran que si presentan errores al realizar la operación la regla deja de ser efectiva. Al igual que en T1, en T2 el estudiante que representa el 8% justifica también que sí se cumple la regla porque sin importar el número que se ponga en la casilla de entrada, siempre se llega al mismo resultado por ambos lados. En cuanto a T4, se puede observar que los cuadros mágicos realizados por los estudiantes presentan valores distintos, lo cual permite corroborar que estaban tomando varios números al azar para realizar la actividad.

Con relación a lo anterior, se resalta que en la mayoría de los casos los estudiantes prefieren utilizar números pequeños para evitar que las multiplicaciones resultantes del proceso sean muy grandes. Además es importante rescatar que aunque algunos estudiantes no dejan explicitas las justificaciones de sus respuestas en esta pregunta, los resultados de la pregunta anterior permiten evidenciar que sí identifican la variación y la constancia de las variables en el esquema presentado.

Tabla 56. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 5.

5. Completa los siguientes esquemas : a. $\square \times (\square \times \square 5) = \square$ b. $(\square \times \square) \times \square = \square 30$			
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que completan los dos esquemas operando de manera correcta.	11	92%
T2	Estudiantes que no completan ninguno de los esquemas.	1	8%

Análisis actividad 3, pregunta 5.

La pregunta anterior se trataba de encontrar números que sirvieran para completar la ecuación, por tal motivo 11 de los 12 estudiantes lo que corresponde al 92%, lograron realizarlo correctamente sin presentar errores en los cálculos, mientras que solo un 8% dejó las casillas en blanco; sin embargo se observa que este último intento realizarlo pero tuvo dificultades al encontrar los números que le permitían llegar a la respuesta.

Tabla 57. Tipificación situación 4, actividad 3, pregunta 6.

6. Explica que tuviste en cuenta para responder la pregunta anterior.						
Tipo de Respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C.E	Porcentaje
T1	Estudiantes que dieron una respuesta, justificando qué tuvieron en cuenta al momento de responder la pregunta.	9	75%	Estudiantes que tuvieron en cuenta la operación de multiplicación.	3	33%
				Estudiantes que tuvieron en cuenta una propiedad multiplicativa (la propiedad asociativa).	4	45%
				Estudiantes que tuvieron en cuenta los números dados.	1	11%
				Estudiantes que tuvieron en cuenta el orden de la multiplicación.	1	11%
T2	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	3	25%	Sin justificación.	3	100%

Análisis actividad 3, pregunta 6.

En correspondencia con los resultados que muestra la tabla anterior, se observa que cerca de la mayoría de los estudiantes dan una respuesta válida de lo que tuvieron en cuenta para responder la pregunta anterior. Del porcentaje asertivo T1 se rescata que el 45% de los estudiantes identificaron que los esquemas estaban relacionados con la propiedad asociativa de la multiplicación, mientras que el resto de los estudiantes dan respuestas elementales como que tuvieron en cuenta la operación de multiplicación y su orden, o los números dados, mientras que el 25% deja el espacio de respuesta en blanco.

Lo anterior permite evidenciar que por lo menos el 45% de los estudiantes logran identificar ciertas regularidades que les permiten llegar a que se trata de propiedades multiplicativas, lo que sin duda hace parte de un proceso de generalización, dado mediante la observación de esquemas y pueden explicar la forma como realizarlo.

CAPÍTULO IV:

CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS



4.1. CONCLUSIONES GENERALES

En este capítulo se exponen algunas conclusiones relacionadas con la generalización de patrones numéricos, como una vía para desarrollar el razonamiento algebraico desde el grado tercero de Educación Básica Primaria. En consecuencia se retoman los análisis de respuestas ya presentadas en el capítulo y algunos aspectos expuestos en investigaciones sobre el tema.

1. En los resultados de la actividad donde los estudiantes debían completar el diseño dibujando (situación 1) se evidencio que se presenta más dificultad en los patrones de extrapolación y es más sencillo para ellos ver los patrones de recurrencia, en cuanto a esto se pudo identificar que el problema no estuvo en el reconocimiento del patrón sino en la complejidad del boceto, dado que en su mayoría no tienen la destreza para el dibujo y esto pudo ocasionar que se distorsionara lo que ellos querían expresar.

2. En los resultados se observa que a los estudiantes se les facilita identificar patrones numéricos que incluyen procesos a través de dobles y prefieren utilizar cantidades pequeñas tales como 1, 2, 3, 4, entre otros durante las actividades libres y de ejemplificación, porque les permiten operar más fácilmente.

3. El uso de tablas como registro de representación, permite a los estudiantes identificar y establecer relaciones entre cantidades de una manera más eficaz, lo que favorece que a través de esas relaciones se encuentren patrones, actividad que hace parte de generalizar. De esta forma, al momento de trabajar con letras los estudiantes lo hacen fácilmente asociando cada variable a los campos de la tabla, relacionando las reglas con las operaciones realizadas al completarla.

4. Los estudiantes reconocen con gran facilidad patrones de tipo numérico, tienen una gran movilidad cuando se trata de identificar la variación y esto permite tener buenos resultados para el enriquecimiento de la secuencia, pues con ella se busca potencializar el pensamiento variacional a través de la generalización de patrones numéricos.

5. Los estudiantes desarrollan sin mayores dificultades las dos primeras etapas planteadas por Mason (1985) “el ver” y “el decir”, iniciando con la identificación del patrón a través de la visualización, para luego expresarlo ya sea mediante palabras o escrito en lengua natural, y finalmente varios se aproximan

al registrar usando símbolos y letras como variables, que les permite ir acercándose más al concepto de generalidad que se maneja en secundaria.

6. Los estudiantes logran llegar a un nivel de generalización elemental a través del contexto empleado en las actividades, identificando la variación y el cambio que se genera durante el trabajo con patrones geométricos y numéricos y relacionando cantidades de acuerdo a lo planteado en cada actividad.

7. El diseño y la implementación de la secuencia propuesta en el trabajo, permitió que los estudiantes lograran dar un significado a las variables que intervinieron en las situaciones planteadas y las relaciones existentes entre ellas, lo que a su vez daba lugar a la observación de ciertas regularidades que generaba el trabajo con diferentes patrones, logrando un acercamiento al pensamiento variacional mediante el proceso de generalizar.

8. La presentación de la secuencia didáctica enmarcada en el contexto del reconocido cuento Hansel y Gretel, y las modificaciones que dan origen a procesos matemáticos, es una buena alternativa que debe de ser explorada por maestros, pues ayuda a mejorar la comprensión de las situaciones y tareas, ya que se tornan significativas para los estudiantes y los incentiva a usar distintas estrategias y técnicas que les permiten llegar de diferentes formas a la respuesta.

9. El trabajo con las estructuras multiplicativas es una buena vía para trabajar con patrones dado que sus operaciones permiten la construcción y la argumentación de generalidades, que se dan desde los casos más particulares a los generales, mediante la organización y justificación de las formas estructurales dadas. Este el caso de las actividades propuestas con las tablas multiplicativas, las propiedades y los problemas que involucran ambas operaciones (multiplicación y división).

10. Con el desarrollo de este trabajo y los resultados que muestra la aplicación de la secuencia, los estudiantes llegan a considerar la letra como un número

generalizado, probando con varios números particulares si determinadas variables cumplen con cierta relación.

11. Es posible determinar que con este trabajo investigativo se aportan elementos tanto conceptuales como metodológicos a la reflexión sobre la iniciación al álgebra escolar, proponiendo un tipo de actividades que desde lo numérico potencializan el pensamiento variacional, y que hacen mucho más enriquecedor el trabajo con el álgebra en la Educación Secundaria.

12. Los resultados registrados muestran la factibilidad de iniciar desde los primeros años de la Educación Básica Primaria el desarrollo del razonamiento algebraico, partiendo de temas y conceptos curriculares de este nivel escolar como la estructura matemática y potenciando su expresión general en un lenguaje semejante al del álgebra. Esto, en vista de la experiencia que desarrollan los estudiantes al interesarse en actividades que involucran secuencias de patrones. Los resultados confirman que es posible aprovechar la aritmética para fomentar en los estudiantes procesos de generalización que los lleve hacia un nivel algebraico. “Tanto la generalización como la simbolización formal son aspectos sustantivos del álgebra y en este sentido se apunta hacia el surgimiento de un acceso temprano al pensamiento variacional” (Butto & Rojano 2010).

13. El desarrollo de este trabajo permitió a las autoras considerar aspectos importantes para el fundamento de la investigación, haciendo énfasis al propósito de innovar en las situaciones que se presentan a los estudiantes desde lo aritmético para potencializar lo variacional, tomando como referencia un marco teórico específico y contando con la participación de un grupo de estudiantes, donde los resultados fueron objeto de estudio, y a partir de los cuales se llegaron a conclusiones que permiten dar un aporte conceptual y procedimental a la reflexión del álgebra escolar.

14. El marco teórico elaborado a base de tres perspectivas (curricular, didáctica y matemática) aportó elementos importantes para reconocer factores como: dificultades que se presentan en la transición aritmética-álgebra, la generalización de patrones como una alternativa al razonamiento algebraico, la identificación de componentes curriculares a partir de los lineamientos y estándares curriculares de matemáticas del MEN desde un aprendizaje desarrollado a través de competencias, mediado por diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas, donde los procesos generales son esenciales y finalmente elementos matemáticos que sustenta el desarrollo del pensamiento variacional desde la Educación Básica primaria. Estos aspectos fueron fundamentales en el diseño e implementación de la secuencia didáctica.

15. Para el diseño de una secuencia se debe tener en cuenta elementos importantes tales como la forma de las imágenes, diagramas y tablas puesto que estos aspectos pueden prestarse para confusiones en la interpretación y desarrollo de las actividades.

4.2. REFLEXIONES DIDÁCTICAS

A continuación se presentan algunas reflexiones que están ligadas a los resultados de este trabajo, desde la perspectiva didáctica, con el fin de que pueda aportar a la reflexión sobre la iniciación del álgebra escolar.

- En primera instancia, se considera que tal como lo mencionan los Estándares Básicos de Competencias (2006), en las matemáticas los escenarios geométricos y numéricos deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones que generan. Estas exploraciones permiten a los estudiantes hacer una

descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades que intervienen en la transformación.

- Según los resultados encontrados en la aplicación de la prueba los estudiantes presentan muchas dificultades cuando se hace necesario expresar la forma general de un patrón, ellos identifican las regularidades y logran llegar a una generalidad a partir de casos particulares, pero al momento de explicar o de expresar en palabras como se conforma el patrón presentan dificultad tratando de buscar la mejor forma de decirlo. Para esto, es importante que se presenten en repetidas situaciones a los estudiantes actividades en las que ellos puedan encontrar respuestas mediante la formulación de hipótesis de conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para posteriormente lograr construir, interpretar y explicar los hechos.

- El desarrollo de la secuencia muestra cómo partiendo de situaciones propiamente numéricas, los estudiantes pueden encontrar patrones que les permiten hallar los términos de una secuencia lo que lleva a un desarrollo del pensamiento variacional identificando lo variante y lo constante para poder evidenciar la regla que rige el patrón. Este proceso, como en el caso de las situaciones planteadas a partir de tablas multiplicativas y de las propiedades, permite que los estudiantes desde temprana edad observen que existen dichas reglas que son útiles para evitar largos procesos.

- Con relación al trabajo con patrones es importante que los docentes propongan a sus estudiantes situaciones que permitan el desarrollo del pensamiento variacional, el cual es indispensable para caracterizar aspectos de la variación, tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre ellas. En este sentido, la relación del

pensamiento variacional con el manejo de los sistemas algebraicos, muestra que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio, y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos (MEN, 2006).

- El uso del registro de representación tabular es indispensable en el estudio de la generalización, porque permite hacer reflexiones importantes sobre el objeto matemático trabajado. Por ejemplo, en el caso de la secuencia didáctica implementada en este trabajo, las reflexiones se centran en la variación que se presenta entre las cantidades y la dependencia de algunas variables respecto a otras. Así, el trabajo con el objeto matemático no se limita solo al registro en lengua natural y al numérico sino que incluye también las tablas como registro de representación, tal como lo dice el MEN (1998) el estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. Igualmente, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arce J , et al. (2004). *Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación*. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.
- Bednarz, n & B. Janvier (1996). *Emergence and development of álgebra as a problem-solving Tool. Continuities and discontinuities with arithmetic*. en Bednarz, N., Carolyn, K., Lesley, & Lee (eds.), *Approachs to álgebra* Dordretch, Holanda, Kluwer Academic publishers, pp. 115- 136.
- Butto, C. & Rojano, T. (2010). *Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo Educación Matemática*, Santillana. Distrito Federal, México, pp. 55-86
- Camacho, A. (2009). *Calculo diferencial*. Díaz de Santos.
- Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (Abril 2010). *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matematico* . *UNO* 54, 55-67.
- Castro, W., Godino, J., Rivas, M. (2011). *Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores*. En: revista iberoamericana de educación matemáticas, pp. 73-83.
- Elejalde R & Leon G (1996). *Relaciones y funciones*. Universidad Pontificia Bolivariana.
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1998). Areas de dificultades en la adquisicion del lenguaje aritmetico-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 9.2, 155 - 188.
- Grimm, J & W. (2000). *Hansel y Gretel*. Editado por elaleph. Recuperado el 2 de abril de 2012 de www.elaleph.com.

- Guerrero, F., Sánchez, N., & Lurduy O (2006). *La práctica docente a partir del modelo deca y la teoría de situaciones didácticas*. V festival internacional de matemática.
- Godino, J. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros*. Recuperado el 7 de septiembre de 2011 de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>.
- Kieran, C. & Filloy E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. En: *enseñanza de las Ciencias*, 7, pp. 229-240.
- Kieran, C. (1992). *The Learning and Teaching of School Algebra*. Traducción resumida hecha por Vilma María Mesa. (1995). Capítulo 17. Investigar y Enseñar. Universidad de los Andes. Una empresa docente. Pp. 1-24.
- Küchemann, D.E. (1981) álgebra. En: *Children's understanding of mathematics*. Hart. K. (Ed.). London.
- Mason, J. (1985). *Rutas hacia el algebra y Raices del algebra*. (C. Agudelo, Trad.)Tunja, Colombia. Tunja: UPTC.
- MEN. (1998). *Lineamiento curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogota, Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Santa fe de Bogota, Colombia.
- Molina, M. (2007).*La integración de pensamiento algebraico en educación primaria*. Universidad de Granada.
- Muñera, J. & Obando, G. (2002).*Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática*. Universidad de Antioquia.

- Universidad de Antioquia. (2006). Módulo 2. *Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos*. Medellín: Artes y Letras LTDA.
- Orozco, M. (2007). *Estructuras multiplicativas*. Universidad del Valle.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *PME-NA*, 1-2.
- Secretaría Técnica de Gestión Curricular. (1996). *Las regularidades: Fuente de aprendizajes matemáticos*. Argentina.
- Vergnaud, G. (1983) *Multiplicative Structures*. In Lesh, R., Landau, L. *Acquisition of mathematic concepts and processes*. New York: Academic Press. 127-174.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). *Generalización de patrones : la tension entre el pensamiento algebraico y la notacion algebraica*. 379-402.

ANEXO: Ejemplo de algunas situaciones resueltas por los niños.

2. Preguntas del cuento Hansel y Gretel

- a. Describe como te imaginas que era la casa de la bruja por dentro y por fuera y di cuál de los objetos que pertenecen a la vivienda de la bruja, te llamo más la atención ¿Por qué?

Creo que es pequeña hecha de chocolate
y por dentro de chocolate blanco

Y me gusta mas el tapete de galleta
en forma de exagono

- b. Si tu fueras Hansel ¿Qué estrategia hubieras utilizado para escapar de la casa de dulces de la bruja?

Yo hubiera olvidado los numeros
de la conbinacion para salir

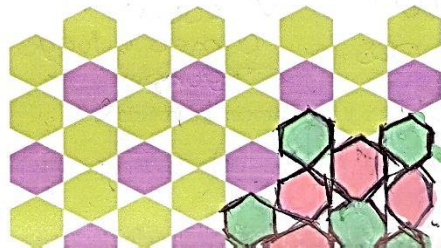
- c. Invéntate un final diferente en máximo 3 renglones para la historia de Hansel y Gretel.

y llegaron a su hogar sanos y
salvos y no tuvieron mas pobreza
fin!

- d. ¿Cómo crees que la bruja pudo construir una casa de dulce que resistiera los días de lluvia, de sol y el fuerte viento del bosque?

Como es bruja ella hizo un hechizo
de hacer una casa de dulce resistente
a todo

3. Recuerda que la casa de dulce donde llegan Hansel y Gretel tiene las paredes decoradas con diferentes diseños, uno de ellos es el siguiente:



Ejemplo de
combinación de
Colores
Aleatoriamente

a. Completa el diseño y explica ¿Cómo lo completaste?

lo complete haciendo que se
formaran estrellitas

b. ¿Cómo se organizan los hexágonos en cada columna según el color?

haciendo que el centro
sea el centro de la estrellita

4. Hansel y Gretel se dan cuenta el siguiente diseño está incompleto:



a. Dibuja las figuras que hacen falta para completar el diseño y para continuar la secuencia, e indica ¿cómo lo hiciste?

siguiendo las columnas

b. ¿Qué figuras tridimensionales forman el diseño?.

cubos

c. ¿Cómo están organizados los cubos que componen el diseño?

primero 1 cubo

segundo 2 cubos

tercero 3 cubos

y despues el
primero y luego el
segundo

Actividad 2: Los asientos de chocolate y los patrones geométricos.

Gretel al entrar a la casa observa varios asientos de diferentes tamaños y formas los cuales están elaborados a base de cubos de chocolate.

1. Observa los anteriores asientos de chocolate.

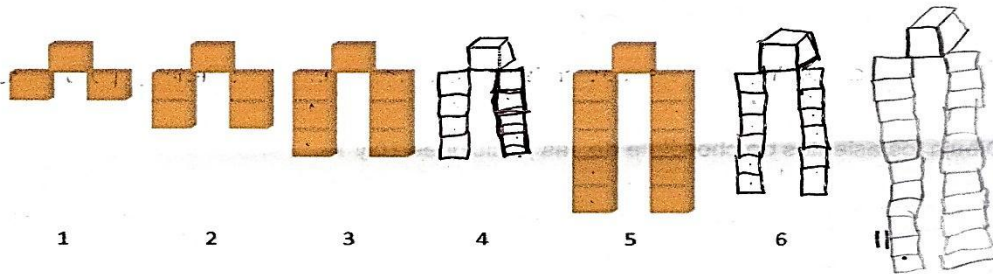
a. Describe cómo cambia cada uno de ellos respecto al anterior, teniendo en cuenta la forma.

va sumando uno más

b. ¿Qué parte de los asientos varía? Y ¿Qué parte no cambia (permanece constante)?

la parte de arriba cambia y lo que no cambia son los dos cuadrados de abajo

2. a) Dibuja los asientos que faltan en la posición número 4 y 6 de la siguiente secuencia.



Cantidad numérica

3 5 7 9 11 13 15

a. Justifica por qué lo hiciste de esa manera.

porque los cuadrados van sumando 2

b. Asigna una cantidad numérica (sobre las líneas que hay debajo de la posición de la figura) que represente los cubos de chocolate de cada una de las posiciones, ten en cuenta los dos asientos que dibujaste.

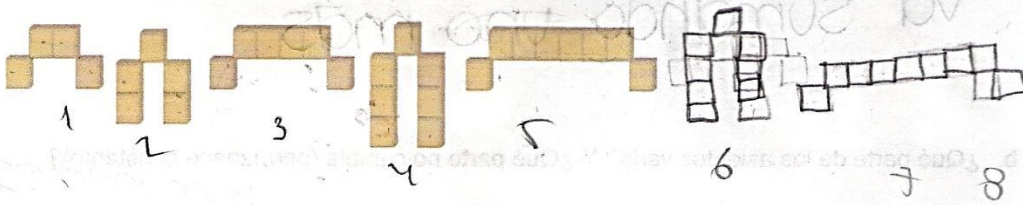
c. ¿Qué cantidad numérica representaría el número de cubos en el asiento de la posición 11? ¿Cómo lo hallaste?

Sumo $11 + 11 = 22 + 1 (\text{de arriba}) = 23$

d. ¿Como varia el numero de cubos de las patas de los asientos de chocolate anteriores?

va sumando dos

3. Observa la siguiente secuencia de asientos de chocolate.

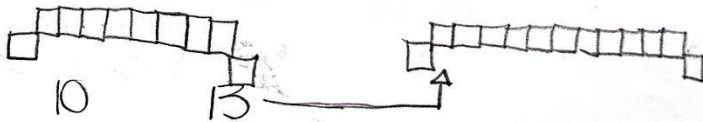


a. Dibuja los asientos de la posición 6, 7 y 8.

b. ¿Qué relación encuentras entre los asientos de las posiciones 1, 3 y 5 en comparación con los asientos de las posiciones 2, 4 y 6. ¿Por qué crees que se da esta relación?

Son numeros pares
y los otros impares

c. Dibuja los asientos de chocolate de las posiciones 10 y 13.



Actividad 3: Los asientos de masmelo diseñados con patrones.

Gretel pensó por un momento que los asientos de chocolate serían muy duros al sentarse y se imaginó como podrían ser de cómodos unos asientos hechos de masmelo.

1. Utiliza mínimo dos masmelos diferentes, para formar la serie de asientos que se pudo haber imaginado Gretel. No olvides que se debe conservar un patrón de comportamiento.

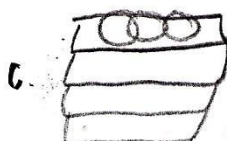
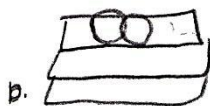
a. ¿Qué tuviste en cuenta para formar la secuencia?

Sumarle 7 a la silla (abundante se sienta)

c. ¿Por qué crees que tu diseño sigue un patrón? Justifica tu respuesta.

Por que suma 1

2. Dibuja dos secuencias de masmelos que cumplan un patrón de comportamiento.



3. Según lo trabajado hasta ahora, responde: ¿Qué es una secuencia y qué elementos se deben tener en cuenta?

una secuencia es algo que se
va sumando

se debe tener en cuenta sumar

Nombre del estudiante:

Diana Maria Mateus Gutierrez

Grado: Tercero

3B

Situación 2: Hansel y Gretel y los patrones numéricos.

Actividad 1: Patrones numéricos con hongos de colores.

La bruja mala para poder tener agua en su casa de dulce, debía ir todos los días a un riachuelo que había en un lado oscuro del bosque. Con el paso de los años la vieja decidió construir un caminito delimitado por puros hongos agrupados por colores, los cuales le permitían identificar rápidamente la forma de llegar. Un día Gretel se vio obligada a acompañarla y se dio cuenta que la organización de los hongos era bastante especial:



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6

1. Sin necesidad de dibujar escribe ¿Cuántos hongos debería tener la figura 7 y por qué?

Le sumo Fig 1 a la Fig 2 y me da Fig 4
y Fig 4 mas Fig 3 me da Fig 5 y por
ultimo Fig 5 mas Fig 4 y me da Fig 6
en tonces para conseguir Fig 7 sumo
 $\text{Fig 6} + \text{Fig 5} = 13$

2. Completa la siguiente tabla:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	15	18	20
Número de hongos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	44	60	81	105

3. Escribe como encuentras cualquier número de hongos según la posición dada.

Sumando los ultimos 2

4. ¿Qué cantidad de hongos azules y hongos rojos tendrá la posición 9?

Explica como lo hiciste

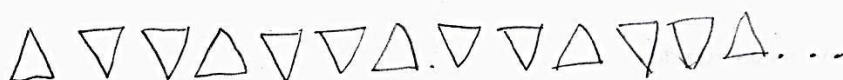
A mi me dio 34 yo hice sucesivamente hasta la 9! 21 azules y 13 rojos

5. ¿Cómo aumentan los hongos azules de la posición 5 a la posición 6

¿Qué relación existe entre los hongos azules y los rojos en las demás posiciones?

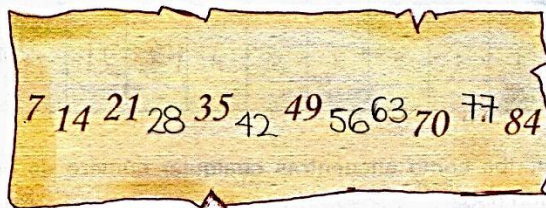
que en la tabla azul y, $13 + 21 = 24$ entonces hay más azules entonces azules son 21 azules y 13 rojos.

6. Dibuja una secuencia de triángulos que tenga un patrón.



Actividad 2: En búsqueda de la clave numérica.

La jaula donde se encontraba encerrado Hansel estaba asegurada con un candado enorme que debía ser abierto con una combinación de 12 números. Cerca de allí, había una secuencia de números que podían ser la clave para liberar el candado, pero algunos de ellos estaban tapados y el niño no los podía ver. La secuencia es la siguiente:



1. Ayúdale a Hansel a completar la serie con los números faltantes.

2. ¿Qué tuviste en cuenta en el momento de buscar los números que faltaban para completar la que podría ser la clave del candado?

habla del sumando 7 y eso o sea que el habla del siete le aumento 7 (reserva)

3. Hansel cree que uno de los números que completan la secuencia es el número 52, ¿estás de acuerdo con el niño? ¿Por qué?

No porque en la tabla del 7
no está el 52 como hay el

4. Si esta serie continúa ^{rojo!} ¿Existe alguna forma de calcular cualquiera de los números que siguen? Explica tu respuesta, escribiendo la manera de hacerlo.

Siguiendo la tabla del 7
(aumentándole mas 7)

1

5. Construye una serie numérica que sea la clave para abrir una caja fuerte (no olvides que debe tener un patrón).

4 8 12 16 20 24 28

la tabla del 4

Nombre del estudiante: Juan David P.

Grado: Tercero B

Situación 3: Patrones y producto con piedritas.

Actividad 1: El producto como organizador de arreglos con piedritas

Recuerda que Hansel y Gretel, cuando iban de camino a lo profundo del bosque, arrojaron un grupo de piedritas, imagina que no eran 24 sino 500 piedritas y que riegan por el camino 240 de esas 500 piedritas en grupos a igual distancia.



1. Indica el número de piedritas que le quedaron a los niños, después de haber arrojado las 240 piedritas y explica como llegaste a la respuesta.

$$\begin{array}{r} 500 \\ - 240 \\ \hline 260 \end{array}$$

Respuesta

A los niños les quedaron 260 piedritas por que estan preguntando por algo que estan descartando.

2. Hansel y Gretel deciden armar grupos de tres piedritas. ¿Cuántos grupos de 3 piedritas pudieron armar? ¿Como encontraste la respuesta?

$$\begin{array}{r} 80 \\ 3 \overline{) 240} \\ \underline{24} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Respuesta
Se pueden armar 80 grupos de 3

3. Si en lugar de ser grupos de tres, fueran grupos de 4 piedritas, ¿Cuántos grupos podrían formar? Justifica como lo hiciste.

Dividi 4 entre 240

$$\begin{array}{r} 60 \\ 4 \overline{) 240} \\ \underline{24} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Respuesta
se pueden formar 60 grupos de 4

4. Para hacer 8 grupos iguales de piedritas, ¿Cuántas piedritas han de recoger a la vez? ¿por qué?

$$\begin{array}{r} 30 \\ 8 \overline{) 240} \\ \underline{24} \\ 00 \\ 0 \end{array}$$

Respuesta
Tienen que recoger
30 piedritas a la vez

Por que tengo que buscar
cuantas veces cabe 8 en
240

5. Hansel y Gretel escribieron numéricamente las posibles organizaciones que podían hacer con las piedritas, pero se le borraron algunos datos. Ayúdale a completar la siguiente tabla.

Grupos de piedritas	Número de piedritas en cada grupo	total
8	30	240
4	60	240
12	20	240
10	24	240

$$\begin{array}{r} 10 \\ 24 \overline{) 240} \\ \underline{24} \\ 00 \\ 0 \end{array}$$

6. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información dada:

Grupos de piedritas	Número de piedritas	total
5	60	300
27	3	81
6	12	72
14	7	98
11	4	44

$$\begin{array}{r} 27 \\ 3 \overline{) 81} \\ \underline{81} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 7 \overline{) 98} \\ \underline{98} \\ 0 \end{array}$$

7. Encuentra y escribe una forma de escribir el total, teniendo en cuenta que el número de grupos es a, el número de ~~grupos~~ ^{piedritas} es b, y el total es c. 7

siete

* cojo a y lo multiplico por b verticalmente x me

Actividad 2: Estrategias multiplicativas.

Hansel partió su pan en varios pedacitos los cuales rego por el camino, 1 cada 7 pasos. Con tanto trabajo solo registro algunos datos, como se muestra en la siguiente tabla. Con tu experiencia multiplicativa:

1. Reconstruye la siguiente tabla:

Pedazos de pan	Pasos
1	7
2	14
4	28
8	56
10	70
18	126
20	140
40	280
58	406
116	812

- a. Explica como hiciste para completarla.

Use la tabla del 7

- b. Indica las técnicas multiplicativas que usaste para completar la tabla anterior. Explica tu respuesta. Use la tabla del 7

2. En relación con la tabla del literal número 1(pregunta anterior):

- a. Escribe cuántos pedazos de pan rego Hansel cuando dio el paso 35. Explica como encontraste la solución.

Rea 5 en el paso 35 porque sume

- b. Escribe el número de pedazos de pan que Hansel rego cuando dio 182 pasos. Explica como encontraste la respuesta.

El paso 182 Hansel rego 26 pedazos de pan por que sume el 18 con el 8.

3. Considerando la tabla del literal 1:

- a. Escribe una relación que encuentres entre la cantidad de pan (primera columna) y el número de pasos (segunda columna).

La tabla del 7.
Por que va de 7 en 7 como por ejemplo
 $7 \times 2 = 14$

- b. ¿Qué operación usaste para encontrar el número de pasos? y ¿Cuál operación usaste para hallar el número de pedazos de pan? Dividiendo por 2 y multiplicando por 2.

4. El siguiente esquema muestra una relación entre los grupos de piedras que Hansel y Gretel podían formar, según el número de pasos, y el total de piedritas que tenían.

- a. Completa las siguientes columnas según la operación indicada.

Grupos de piedritas	x 7	Total
5	Pasos	35
9		63
25		175
9		28
20		140
15	÷ 7	105

- b. Establece una relación entre el esquema anterior y el numero pasos y pedazos de pan (tabla de la pregunta 1). Por que el las dos en una columna se divide y en la otra se multiplica.

Nombre del estudiante:

ISAAC GOMEZ

Grado: Tercero

B

Situación 4: Estrategias multiplicativas.

Actividad 1: Los Muffins de limón del padre de Hansel y Gretel

Cuando los niños regresan de nuevo a su hogar, el padre les ofrece de comer todo lo que ellos quieran, Hansel y Gretel le dicen que quieren Muffins de limón ¡su preferido!, los ingredientes que el padre de los niños recuerda para preparar dos porciones de torta son:

12  de harina1 5  de 7  de 3  de 2  (Ralladura de cascara de limón)

$$\begin{array}{r} 5:36 \\ 5:3 \\ 5:15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5:21 \\ 5:9 \\ 5:6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 136 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 12 \\ \hline 36 \end{array}$$

1. El padre de los niños quiere organizar una tabla con la cantidad de ingredientes que necesita para preparar varias porciones, ayúdale a llenarla:

INGREDIENTES						
PORCIONES	HARINA	HUEVOS	LECHE	AZUCAR	MANTEQUILLA	LIMON
2	12	1	5	7	3	2
4	24	2	10	14	6	4
8	48	4	20	28	12	8
6	36	3	15	21	9	6
12	72	6	30	42	18	12

2. Escribe cuántas cucharadas de harina serían necesarias para preparar 57 porciones de torta.

4 Explica como lo harías.

57

X6

3. Si quisiéramos saber cuántas cucharadas de azúcar se necesitan para un número cualquiera de porciones de torta, que operación utilizarías y como lo expresarías de forma general.

multiplico el número de la porción con lo que me piden.

4. Si el padre de Hansel y Gretel utilizó 17 huevos, ¿cuántas cucharadas de mantequilla necesita? Y ¿cuántas porciones podría preparar?

serian 11 porciones y 51 cucharadas de m.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 17 \\ \times 3 \\ \hline 51 \end{array}$$

Actividad 2: El techo de barquillos

El techo de la casa de dulce estaba formado por filas de triángulos contruidos por barquillos como se muestra a continuación:



Fig. 1

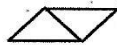


Fig. 2



Fig. 3

- a. ¿Cuántos triángulos y cuantos barquillos deben tener las figuras 4,5 y 6 que siguen en la secuencia? ¿por qué?



la figura cuatro cuatro triángulos
figura cinco cinco triángulos
seis seis triángulos

Completa la siguiente tabla y establece una relación entre los triángulos y el número de barquillos.

Numero de triángulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Numero de barquillos	3	5	7	9	11	13	15	17	19

c. ¿Con 21 barquillos cuantos triángulos se podrían formar? ¿Por qué?

con 21 barquillos se forman 10 triángulos porque en cada triángulo se suman dos barquillos



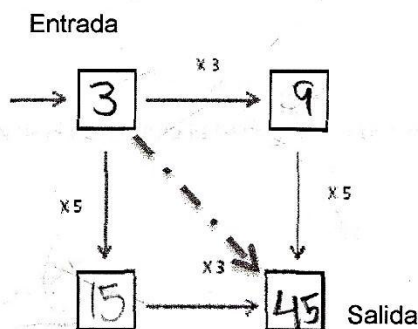
d. Si n es el número de triángulos, escribe una forma que permita encontrar el número de barquillos.

n es cuatro entonces sumos

$$n + n + 1 = 9$$

Actividad 3:

Hansel mientras estaba encerrado en la jaula se invento los siguientes cuadros mágicos, escribe un número en el cuadro de entrada y efectúa las operaciones que te indica:



$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 3 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 3 \overline{) 45} \\ \underline{3} \\ 15 \\ \underline{15} \\ 00 \end{array}$$

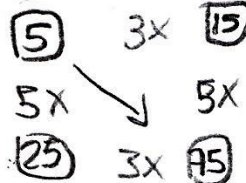
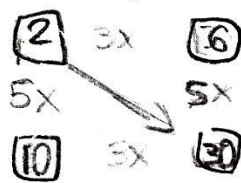
1. Compara el número de entrada y el número de salida ¿Cómo aumenta o disminuye?

Que cuando multiplico 3×3 disminuye y cuando multiplico 3×5 aumenta y despues me toco multiplicar 9×5 y 15×3 .

2. Explica como se obtiene el número de salida utilizando las operaciones indicadas. ¿existe alguna regla?

Si existe que las multiplicaciones estan desordenadas entonces primero en

3. Ensayá con diferentes números en el recuadro de entrada y di si al desarrollar las operaciones se cumple la regla para cualquier número que en la salida, realiza mínimo 3 cuadros mágicos.



$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 3 \\ \hline 75 \end{array}$$

4. Teniendo en cuenta el cuadrado mágico que diste, completa los siguientes esquemas :

a. $\boxed{5} \times (\boxed{3} \times \boxed{5}) = \boxed{75}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

b. $(\boxed{2} \times \boxed{5}) \times \boxed{3} = \boxed{30}$

- c. Explica que tuviste en cuenta para hacerlo de esta manera.

yo tuve en cuenta las tablas.

Preguntas finales

1. En relación a todas las actividades que realizaste teniendo como base el cuento de Hansel y Gretel, responde las siguientes preguntas :

- a. ¿Te gustaron las actividades que realizaste? ¿Por qué?

mas o menos por que me toco
que pensar mucho

- b. ¿Qué aprendiste con el desarrollo de estas actividades?

aprendi a multiplicar y dividir