



Caracterización de un diseño para la comprensión del concepto de variable basado en el
Modelo 3UV para el aprendizaje del álgebra escolar

Daniel Alejandro Arias Feria
202061160

Pedro Daniel Uribe
202061199

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Zarzal - Valle del Cauca - Colombia

2025



Caracterización de un diseño para la comprensión del concepto de variable basado en el
Modelo 3UV para el aprendizaje del álgebra escolar

Daniel Alejandro Arias Feria

Pedro Daniel Uribe

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Dr. Yonathan Bonelo Ayala

Director trabajo de grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Zarzal - Valle del cauca - Colombia

2025

Agradecimientos

La realización de este estudio en el campo de la educación matemática ha sido una experiencia enriquecedora y llena de retos, la cual no hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de numerosas personas y entidades a las que agradecemos profundamente. En primer lugar, agradecemos a Dios por guiarnos y darnos la sabiduría y las fuerzas para terminar este trabajo, y la Universidad del Valle, por brindarnos la oportunidad y los recursos necesarios para llevar a cabo este proyecto y convertirnos en profesionales. En segundo lugar, manifestar nuestros más sinceros agradecimientos al Dr. Yonathan Bonelo, profesor y director de trabajo de grado, gracias, profesor.

Agradecimientos de Daniel Alejandro

Quiero agradecer especialmente a mi Madre María Idalia Feria y a mi tía María, quienes siempre fueron mi inspiración, mi motor y mi sostén durante toda la carrera, a Evelin, por su amor incondicional y por permanecer en el proceso, y a mis hermanos Andrei e Isabella quienes siempre confiaron en mí y me brindaron todo el amor, apoyo moral y económico para la culminación de esta etapa. Sin ellos no hubiera sido posible.

Agradecimientos de Pedro Daniel

Agradezco a mi familia Uribe Bañol, especialmente a mis padres, y a mi otra familia Giraldo Cajigas, quiero agradecerles por su amor y apoyo incondicional que me brindaron durante todo mi proceso formativo.

Resumen

La presente investigación está dirigida a investigadores y docentes interesados en la enseñanza del álgebra escolar, particularmente en la comprensión del concepto de variable y sus diversos usos. Se propone el diseño de una secuencia didáctica basada en el modelo 3UV, con el objetivo de fomentar el pensamiento algebraico en estudiantes de noveno grado. Este diseño promueve la comprensión de la variable en tres categorías clave: como incógnita, como número general y como relación funcional, a través de situaciones contextualizadas en la vida real. El enfoque se fundamenta en el modelo 3UV dentro de un marco teórico tanto didáctico como matemático, y se emplea la metodología de experimentos de enseñanza basado en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

Se diseñó una prueba diagnóstica para conocer los conocimientos previos de los estudiantes, la cual permitió caracterizar el diseño de la secuencia didáctica. Este diseño consistió en tres actividades, cada una enfocada en un uso específico de la variable: como incógnita, como número general y como relación funcional. Al finalizar, se aplicó una prueba final para evaluar los avances en la comprensión de los estudiantes sobre estos conceptos. Las actividades y pruebas fueron implementadas a través de formularios de Google, lo que facilitó la recolección y análisis de datos, permitiendo obtener una visión clara de la evolución de los estudiantes en relación con los objetivos establecidos al inicio de la investigación.

En los resultados se destacan hallazgos significativos en relación con los objetivos establecidos al inicio de la investigación. Se presentan los resultados obtenidos a partir de la prueba diagnóstica, las actividades diseñadas y la prueba final, así como las implicaciones pedagógicas derivadas del análisis de los datos. El análisis retrospectivo permitió establecer

la relación entre los resultados obtenidos en las actividades realizadas, evidenciando cómo estos convergen con el marco teórico utilizado en el estudio.

Palabras Claves: Álgebra escolar, variable, Modelo 3UV, Pensamiento algebraico, Secuencia didáctica, Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	1
1. Problema de investigación: la comprensión del concepto de variable en la iniciación en el aprendizaje del álgebra escolar	3
1.1 El problema de investigación.....	3
1.2 Revisión de la literatura	7
1.2.1 Principales dificultades a la hora de asignarle un uso específico a la variable	7
1.2.2 Tratamiento en la interpretación de los símbolos literales	9
1.2.3 Implementación del modelo 3UV	10
1.3 Objetivos	13
1.3.1 General	13
1.3.2 Específicos.....	13
2. Marco teórico	14
2.1 Enfoque didáctico: Modelo 3uv (Tres usos de la variable).....	14
2.2 Enfoque matemático.....	21
2.2.1 Importancia del álgebra	22
2.2.2 Pensamiento algebraico	23
2.3 Enfoque Curricular.....	24
2.3.1 Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas	25
3. Metodología.....	27
3.1 Naturaleza de la investigación	29
3.1.1 Enfoque	30
3.1.2 Recursos para la obtención de información y análisis de datos.....	30
3.1.3 Estrategia cualitativa: Experimentos de enseñanza	31
3.2 Recursos: Toma de información.....	32
3.2.1 Escenario.....	32
3.2.2 Informantes.....	32
3.2.3 Eventos.....	33
3.2.4 Recursos	33
3.2.5 Análisis local de los datos	34

4. Análisis local de los datos.....	36
4.1 Sobre la Prueba diagnóstica	36
4.1.2 Aspectos generales de la prueba diagnóstica.....	37
4.1.3 Análisis de los resultados obtenidos de la prueba diagnostica	38
4.1.4 Identificación de errores y dificultades en las respuestas de la prueba diagnostica	58
4.2 Caracterización del diseño.....	59
4.3 Análisis de la aplicación del diseño	61
4.3.1 Sobre el Diseño de la Variable Como Incógnita.....	62
4.3.2 Descripción de la actividad.....	62
4.3.3 Análisis de la actividad.....	63
4.3.4 Sobre el Diseño de variable como número general.....	68
4.3.5 Descripción de la actividad.....	68
4.3.6 Análisis de la actividad.....	69
4.3.7 Diseño de variable como relación funcional.....	74
4.3.8 Descripción de la actividad.....	74
4.3.9 Análisis de la actividad.....	75
4.4 Prueba Final	80
4.4.1 Estructuración de la prueba final.....	81
4.4.2 Análisis de los resultados de la prueba final.....	82
5 Conclusiones y recomendaciones	92
5.1 Objetivo específico 1.....	92
5.2 Objetivo específico 2.....	94
5.3 Objetivo específico 3.....	95
5.4 Recomendaciones.....	97
6 Referencias	98
Anexos	103
A. Hoja de trabajo prueba diagnóstica	103
B. Hojas de trabajo caracterización del diseño.....	104
C. Anexo: Prueba Final	106
D. Anexo: Datos recolectados	107

Índice de tablas

	Pág.
Tabla 1 Variable Como Incógnita.....	16
Tabla 2 Variable Como Número General	17
Tabla 3 Variable Como Relación Funcional	18
Tabla 4 <i>Ficha Panorámica Metodológica</i>	28
Tabla 5 Aspectos Generales de la Prueba Diagnóstica.....	38
Tabla 6 Conteo Clasificadorio de Respuestas de la Prueba Diagnóstica	39
Tabla 7 Conteo de Respuestas de las Preguntas Enfocadas al Uso de la Variable Como Incógnita	42
Tabla 8 Conteo de las Respuestas de las Preguntas del Uso de la Variable Como Número General	48
Tabla 9 Conteo de las Respuestas de las Preguntas del uso de la Variable Como Relación Funcional.....	54
Tabla 10 Estructuración del Diseño	60
Tabla 11 Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Incógnita Actividad N.º 1.....	64
Tabla 12 Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Incógnita Actividad N.º 3.....	67
Tabla 13 Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Número General Actividad N.º 2	71
Tabla 14 Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Número General Actividad N.º 3	73
Tabla 15 Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Relación Funcional Actividad N.º 1.....	75
Tabla 16 Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Relación Funcional Actividad N.º 2.....	77
Tabla 17 Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Relación Funcional Actividad N.º 3.....	79
Tabla 18 Aspectos Generales de la Prueba Final	81

Índice de figuras

	Pág.
Figura 1 Esquema de Distribución de Mesas y Sillas en una Reunión.....	20
Figura 2 Porcentaje de Respuestas de la Prueba Diagnóstica.....	40
Figura 3 <i>Representación Gráfica del Conteo de las Respuestas de las Preguntas Enfocadas en el Uso de la Variable Como Incógnita</i>	43
Figura 4 <i>P.4 V.I.</i>	44
Figura 5 <i>P.5. V.I.</i>	46
Figura 6 <i>P.1 V.I.</i>	47
Figura 7 <i>Representación Gráfica del Conteo de las Respuestas de las Preguntas Enfocadas en el Uso de la Variable como Número General</i>	48
Figura 8 <i>P2. V.N.G.</i>	49
Figura 9 <i>P.1 V.N.G.</i>	51
Figura 10 <i>P.5 V.N.G.</i>	53
Figura 11 <i>Representación Gráfica del Conteo de las Respuestas de las Preguntas Enfocadas en el Uso de la Variable Como Relación Funcional.</i>	54
Figura 12 <i>P.4 V.R.F.</i>	55
Figura 13 <i>P.3 V.R.F.</i>	57
Figura 14 <i>Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Incógnita Actividad N.º 2</i>	65
Figura 15 <i>Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Número General Actividad N.º 1</i>	70
Figura 16 <i>Gráfico Circular de la Pregunta N.º1 de la Variable como Incógnita</i>	82
Figura 17 <i>Gráfico Circular de la Pregunta N.º2 de la Variable como Incógnita</i>	84
Figura 18 <i>Gráfico Circular de la Pregunta N.º1 de la Variable como Número General</i> .	85
Figura 19 <i>Gráfico Circular de la Pregunta N.º4 de la Variable como Número General</i> .	86
Figura 20 <i>Gráfico Circular de la Pregunta N.º1 de la Variable como Relación Funcional</i>	88
Figura 21 <i>Gráfico Circular de la Pregunta N.º5 de la Variable como Relación Funcional</i>	89

Introducción

El presente trabajo se enmarca en el ámbito de la educación matemática, con un enfoque particular en el aprendizaje del álgebra en los primeros años de secundaria. Este capítulo inicial presenta la problemática relacionada con la comprensión del concepto de variable, destacando los errores y dificultades comunes que enfrentan los estudiantes al iniciar su estudio del álgebra. Asimismo, se aborda la necesidad de mejorar su transición desde la aritmética hacia conceptos más abstractos, esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico.

La investigación toma como eje el modelo 3UV, que identifica tres usos fundamentales de la variable: como incógnita, como número general y como relación funcional. Este enfoque permite explorar las diversas formas en que los estudiantes pueden interpretar y trabajar con la variable, brindando una perspectiva más amplia y significativa frente al aprendizaje tradicional.

El análisis de esta problemática revela las limitaciones de los métodos de enseñanza tradicionales, que suelen priorizar la memorización de procedimientos y algoritmos, dejando de lado la comprensión conceptual profunda. Ante este panorama, se propone un diseño didáctico alternativo fundamentado en el modelo 3UV, cuyo objetivo es ofrecer a los estudiantes un acercamiento integral al concepto de variable, promoviendo no solo su

comprensión, sino también su capacidad de aplicar este conocimiento en diferentes contextos.

Este trabajo de investigación no solo busca contribuir al fortalecimiento del aprendizaje del concepto de variable, sino también fomentar una participación de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Al hacerlo, se aspira a desarrollar de manera efectiva y significativa el pensamiento algebraico, una competencia clave para el éxito académico en matemáticas y otras disciplinas.

1. Problema de investigación: la comprensión del concepto de variable en la iniciación en el aprendizaje del álgebra escolar

En este capítulo, se presenta primeramente la problemática en relación con la comprensión y las concepciones que tienen los estudiantes de los diferentes significados y usos del concepto de variable en la transición de la aritmética al álgebra en la iniciación del aprendizaje algebraico. De la misma forma, se consideran dificultades y obstáculos de diferentes índoles que tienen los estudiantes cuando empiezan a ver el álgebra y, el interés por vincular un diseño basado en el modelo 3UV¹ que contribuya a la mejora en la comprensión del objeto de estudio. En segundo lugar, se presenta la revisión de literatura de acuerdo con los criterios de búsqueda y las categorías que surgieron a partir de la vinculación del modelo 3UV en las actividades y comportamientos que se analizan e implementan este enfoque. Finalmente, se presentan los objetivos de la investigación.

1.1 El problema de investigación

Generalmente, cada estudiante tiene diversas concepciones y dotan de significados a las variables, debido a la relación con sus conocimientos algebraicos y a sus niveles de abstracción. Estos significados es necesario potenciarlos en la enseñanza y el aprendizaje de

¹ Se entiende por el modelo 3uv el carácter multifacético del concepto de variable, y establece que se debe trabajar con tres usos principales para el aprendizaje del álgebra: la incógnita específica, el número general y relación funcional. Ursini et., al (2005)

álgebra, estableciendo modelos matemáticos adecuados que permitan a los estudiantes en relación con la variable, describir y comprender fenómenos de la cotidianidad. Y a la vez, crear, interpretar, manipular y hacer un cambio de registro en representaciones simbólicas y gráficas. Poniendo en juego y resaltando la importancia de la integración de los diversos usos de las variables. (M.E.N., 2006, p. 67).

La variable es un concepto clave en la comprensión del álgebra, desde las primeras nociones de aprendizaje del ser humano hasta la creación y modelización de sistemas en áreas de gran importancia, como la ingeniería, la programación, la economía, entre otras. (PISA, 2012). Las variables tienen sus raíces en las matemáticas antiguas, están plenamente desarrolladas en las matemáticas modernas y avanzadas, y desempeñan un papel fundamental en las futuras profesiones de cada estudiante. Por ello, es significativo que comprendan qué es una variable y, además, entiendan cómo usarla en determinados casos.

Sin embargo, se ha evidenciado que existen diversas dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar que están intrínsecamente relacionadas con la comprensión del concepto de variable y sus usos.

Los estudiantes al comenzar los estudios del álgebra traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en la aritmética escolar (Kieran y Filloy, 1989). Lo cual genera dificultades y errores en su aprendizaje. Uno de estos es la comprensión del concepto de variable, además sus múltiples usos, que debe ser atendida de manera significativa en la iniciación al álgebra

Las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos: aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza

(Wagner y Parker, 1999). La mayoría de los estudiantes no logran obtener un conocimiento algebraico satisfactorio en el aprendizaje del álgebra, es por ello por lo que se debe tomar conciencia de esta problemática y en cómo encontrar soluciones que impacten de forma positiva este fenómeno favoreciendo el pensamiento algebraico

Es importante comprender las concepciones previas de los estudiantes en la iniciación del aprendizaje del álgebra escolar. Según Urisni, (1993) las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como base en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados. Muchos profesores pasan por alto la producción de experiencias introductorias que permitan servir como base en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados.

La comprensión de cualquier rama de las matemáticas requiere de un manejo completo y profundo de los conceptos algebraicos, particularmente del concepto de variable (Trigueros et al., 2000). Cuando un estudiante comprende el concepto de variable y su aplicabilidad, está en capacidad de trabajar y desarrollar competencias algebraicas en áreas como el cálculo, la trigonometría, la geometría, la estadística y en situaciones cotidianas.

Se espera que esta investigación contribuya a mitigar las desmotivaciones y traumas que muchos estudiantes enfrentan actualmente, las cuales generan dificultades y obstáculos, debido a que no realiza un tratamiento que posibilite la comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos. Los autores Rojas y Vergel (2014) señalan que algunas de las dificultades comunes encontradas en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra suceden particularmente en estudiantes de 13 a 15 años, quienes a menudo expresan sorpresa y frustración al tener que trabajar con símbolos literales o "letras" en contextos matemáticos.

Estas dificultades están relacionadas con la comprensión del significado de estas "letras" en el álgebra. Incluso, exponen que existentes estudiantes que han tenido un desempeño sólido en matemáticas durante años anteriores, muestran perplejidad ante la introducción de las "letras" en sus estudios, expresando su disgusto con frases como: "¿...y por qué tengo que trabajar con letras?"", "¿Sí ve?, ¿de qué sirvió todo lo anterior?... ¡Para que ahora no entienda nada!", o incluso, "aparecieron las malditas letras" (p. 20).

El acercamiento a la comprensión del concepto de variable y sus usos ha sido un tema ampliamente investigado en el campo de la educación matemática a lo largo de los años. Sin embargo, sigue siendo un área de estudio fundamental que requiere atención continúa debido a su relevancia para el desarrollo del pensamiento algebraico.

El Modelo 3UV como componente teórico ofrece una respuesta adecuada a problemas algebraicos desde la comprensión de la variable y tres usos con los aspectos que caracterizan a cada uno.

De acuerdo con lo anterior, esta investigación pretende realizar la caracterización e implementación de un diseño que genere en el estudiante un acercamiento a la comprensión del concepto de variable y a sus diferentes usos, basado en el modelo 3UV trabajando la variable como incógnita, como número general y como relación funcional según, Trigueros y Ursini (2003). Por medio de actividades que exploren habilidades como reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se pueda determinar, reconocer patrones, percibir reglas, simbolizar enunciados, expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica, o analítica a partir de los datos de un problema. Entre otros. Es así como se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué elementos debe considerarse en un diseño de una secuencia didáctica basada en el modelo 3UV que pueda generar un acercamiento a la comprensión del concepto de variable y sus diversos usos en el aprendizaje del álgebra escolar?

1.2 Revisión de la literatura

Las dificultades de los estudiantes para comprender adecuadamente la variable algebraica se han estudiado durante décadas con diversas estrategias en el marco del modelo 3UV para diferentes poblaciones internacionales. Por otra parte, en los últimos años se han realizado pocas investigaciones utilizando la misma herramienta para explorar y potenciar la comprensión del concepto de variable y sus usos en estudiantes a nivel nacional.

Las investigaciones que se presentan a continuación se lograron hallar y vincular al plantear tres criterios de búsqueda, que son en primer lugar, las principales dificultades a la hora de asignarle un uso específico a la variable, en segundo lugar, el tratamiento en la interpretación de los símbolos literales y tercero la implementación del modelo 3uv.

1.2.1 Principales dificultades a la hora de asignarle un uso específico a la variable

En los últimos años, diversos estudios han resaltado investigaciones dirigidas a estudiar las dificultades de los estudiantes en el manejo eficiente del concepto de variable. Así lo muestra Meléndez (2016) el cual presenta en su trabajo resultados de una investigación centrada en la caracterización del desempeño y sus principales dificultades de tres grupos de estudiantes mexicanos de nivel medio superior en la comprensión de conceptos algebraicos, específicamente los relacionados con ciertos usos del concepto de variable. El autor menciona que: “se observó que la mayoría de los estudiantes poseen una concepción muy reducida del concepto de variable, utilizan la palabra incógnita para definir

la variable, dándole un sentido estático. De igual forma, una manera recurrente que usaron para definirla es como un valor desconocido, dejando de lado el atributo de cambio y reduciéndolo a “una” cantidad por conocer” (p. 125).

Así mismo, Meléndez (2016) menciona una lista de dificultades encontradas que caracterizó por medio de las siguientes dos preguntas que fueron esenciales para su reconocimiento:

¿Cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas o ejercicios relacionados con los diversos usos de la variable? Las tres principales dificultades identificadas son:

- Un anclaje a la operatividad de la variable como incógnita, imposibilitando la obtención de expresiones generales.
- Manipular la variable simbólica (simplificar, desarrollar).
- Transitar entre diversos textos (representación algebraica, geométrica, tabular o lenguaje común).

¿Cuáles son las principales tendencias cognitivas presentes en los estudiantes al resolver problemas relacionados con los diversos usos de la variable?

- La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.
- El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.
- La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.

- Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.
- La articulación de generalizaciones erróneas.
- La presencia de mecanismos inhibitorios.
- La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa”. (p.125)

Finalmente, el autor concluye que la investigación logró cumplir sus objetivos al analizar y describir el desempeño y las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos. Además, enfatiza la importancia de trabajar con los diferentes usos de la variable, como número general, relación funcional e incógnita, y de profundizar en la caracterización de las tendencias cognitivas que muestran los estudiantes al enfrentarse a problemas que involucran estos conceptos.

Así mismo, Castro (2012) realiza una investigación titulada “Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar” donde asume que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza). Desde dicha asunción reflexiona sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra en relación con el objeto. Así mismo, se centró en dos de los enfoques que se consideran del álgebra: álgebra como generalización de la aritmética y álgebra como lenguaje.

1.2.2 Tratamiento en la interpretación de los símbolos literales

Por otra parte, se han realizado estudios en relación con el manejo y la comprensión de las letras y otros símbolos en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Gonzáles (2012)

presenta en su trabajo de maestría la investigación en la cual realizó con estudiantes de Educación Básica Secundaria en la Institución Educativa Rural La Granja, donde se identificaron dificultades en los estudiantes de séptimo grado para comprender y comunicar en lenguaje simbólico. La autora logró observar que la enseñanza del álgebra se enfoca más en la aplicación de fórmulas que en su comprensión, lo que llevó a los estudiantes a ver el lenguaje simbólico como una serie de algoritmos desconectados.

Consecuentemente, se hizo un estudio del significado de la variable en la transición del lenguaje natural al algebraico y las dificultades escolares en su interpretación, donde se presentaron ejemplos de actividades con estudiantes y revisando textos escolares.

Finalmente, se presentó una propuesta didáctica para potenciar en los estudiantes los diferentes usos e interpretaciones de la variable mediante procesos de generalización en contextos geométricos y numéricos. La propuesta incluyó una selección de ejercicios de varios autores para dar significado a conceptos fundamentales como el de variable y fortalecer la asimilación y comunicación del lenguaje algebraico.

1.2.3 Implementación del modelo 3UV

En los últimos años, muchas de las investigaciones que se enfocan en la comprensión del concepto de variable en el aprendizaje del algebra hacen uso del modelo 3uv. Sánchez (2022) en su trabajo de maestría se centró en identificar los usos de la variable, que emergen en el discurso de un grupo de estudiantes durante sesiones de resolución de problemas adecuados utilizando el modelo de los Tres Usos de la Variable (3UV). En México, Se seleccionaron problemas de un libro de texto de secundaria que fueron adecuados mediante el modelo 3UV. Los problemas se trabajaron de manera virtual con un grupo de estudiantes de primer grado de secundaria en un taller extraescolar, las sesiones fueron grabadas y

posteriormente se analizaron las interacciones entre los estudiantes y el profesor por medio de un software para el análisis de datos cualitativos, se clasificaron y contabilizaron las interacciones de contenido matemático de acuerdo con el uso de la variable y los criterios utilizados en el modelo 3UV, a partir de los datos se identificó que en el transcurso de las sesiones aumentaron las preguntas sobre el concepto de variable o el proceso de resolución, estos datos indican no sólo un incremento en la participación e interés de los estudiantes en el taller, sino un involucramiento con los usos de la variable. Se concluye que sí surgieron los tres usos de las variables en las participaciones de los estudiantes, al igual que la mayor parte de los indicadores del modelo 3uv, incluidos en las adecuaciones de los problemas. Más aún, se identificó que los usos de la variable como incógnita y como número general se encuentran con mayor frecuencia en las participaciones de los estudiantes, que el uso de la variable como relación funcional.

También, López y Pineda (2011) abordan la pertinencia del empleo del modelo 3uv en el diseño de estrategias didácticas con 46 niños de tercer grado de Educación Primaria, cuyo objetivo fue desarrollar el pensamiento algebraico. Se trabajó con un diseño cuasiexperimental, pretest y posttest con grupos control y experimental. Los resultados mostraron un avance extraordinario en el posttest, apoyando con ello la pertinencia de la enseñanza del álgebra en edades tempranas con el empleo del modelo 3UV que resultó ser una herramienta muy útil en el desarrollo del pensamiento algebraico, en los niños participantes de este estudio.

Por último, Trigueros y Ursini (2000) presentan una investigación en la cual analizan los resultados de un estudio en el que se investigó acerca de la forma en que los estudiantes de diferentes niveles escolares (secundaria, preparatoria e inicio de la universidad)

interpretan, simbolizan y manipulan la variable en sus distintos usos utilizando el modelo (3UV) para la realización de un cuestionario que explora las capacidades anteriormente mencionadas. El estudio se realizó con 98 estudiantes de entre 12 y 19 años. Los resultados muestran que las concepciones de la variable que tienen los estudiantes en los diferentes cursos no reflejan una diferencia sustancial en la comprensión de este concepto.

Las autoras consideran que las dificultades que manifiestan los estudiantes están fuertemente influidas por las prácticas docentes y el contenido de los cursos de álgebra. Los datos analizados llevaron a concluir que a lo largo de la instrucción los estudiantes aprenden a manejar técnicas específicas y algoritmos, pero no aprenden a reflexionar sobre la utilidad y pertinencia, se trata de un aprendizaje memorístico que, en lugar de favorecer su comprensión del concepto de variable, tiende a entorpecer. Por tanto, una mala conceptualización de la variable puede ser una causa importante para las múltiples dificultades que suelen tener los estudiantes en los cursos de matemáticas en los distintos niveles de enseñanza media y superior.

Por último, sugieren que desde sus primeros acercamientos al álgebra y a lo largo de los cursos sucesivos, los estudiantes deberían trabajar de manera simultánea con los tres usos de la variable.

Los antecedentes expuestos en este capítulo ofrecen diversas perspectivas sobre las dificultades más comunes y las estrategias más efectivas para abordar la enseñanza del concepto de variable y sus tres usos en los estudiantes. El análisis de la documentación revisada ha permitido desarrollar una comprensión más profunda y detallada del objeto de estudio, brindando una visión apropiada y enriquecedora permitiendo identificar desafíos y

metodologías que resultan significativas para contribuir una comprensión sólida y aplicada del concepto.

1.3 Objetivos

1.3.1 General

Caracterizar el diseño de una secuencia didáctica basada en el modelo 3uv que permita un acercamiento en los estudiantes a la comprensión del concepto de variable y de sus diversos usos en el aprendizaje del álgebra escolar.

1.3.2 Específicos

Diseñar y aplicar una prueba diagnóstica para identificar saberes previos, errores y dificultades en relación con los parámetros asociados a los usos de la variable.

Estructurar una secuencia didáctica basada en el modelo 3uv teniendo en cuenta el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica.

Estudiar el vínculo entre el concepto de variable y las capacidades básicas que plantea el modelo 3uv.

2. Marco teórico

En esta sección, se presentan los elementos teóricos de referencia, los cuales sirven para fundamentar la problemática y desarrollar la propuesta de trabajo. Esta fundamentación se organiza en tres enfoques de análisis: Didáctica, Matemática y Curricular. Estas perspectivas son las encargadas de guiar la caracterización del diseño didáctico centrado en la comprensión del concepto de variable en el aprendizaje del álgebra a través del modelo 3uv como un proceso que permite el acercamiento al desarrollo del pensamiento algebraico.

2.1 Enfoque didáctico: Modelo 3uv (Tres usos de la variable)

A continuación, se presenta una serie de contribuciones teóricas de diversos autores que respaldan la conceptualización planteada en el presente estudio. En esta perspectiva, se presenta el modelo 3uv como tratamiento didáctico para potenciar la comprensión del concepto de variable en el aprendizaje del álgebra escolar.

En el campo del álgebra escolar, se destacan tres posibles aplicaciones principales de la variable, según el modelo 3UV sugerido por Trigueros y Ursini (2003).

Este modelo se centra en el desarrollo de herramientas conceptuales que son útiles para la toma de decisiones para los docentes al elegir las estrategias de enseñanza adecuadas y para los alumnos al elegir el método para resolver un problema de álgebra.

Este modelo hace referencia a los niveles de comprensión (interpretación, simbolización y manipulación) y a las características de cada uno de ellos, que son

necesarios para un buen desempeño en la solución de situaciones que involucren la variable en diferentes contextos.

En este sentido, se examinan tres posibles aplicaciones de la variable, como incógnita específica, como número general, y como relación funcional.

Además, cada uno de estos usos implica una serie de temas a los que un usuario de álgebra debe enfrentarse para poder resolver problemas y ejercicios. A continuación, se presentan de manera sintética estos elementos, que corresponden a diferentes niveles de abstracción. (Ursini, 2005)

2.1.1 *La Variable como incógnita*

Es crucial comprender que en ciertos problemas o situaciones existe un valor desconocido que puede ser descubierto utilizando la información disponible. Cuando se habla de una variable como incógnita, nos referimos a un valor específico que aún no conocemos pero que podemos determinar mediante el uso de datos y ecuaciones. En otras palabras, una incógnita es una variable cuyo valor queremos descubrir.

Las autoras Trigueros y Ursini (2003) describen un método para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran los usos de la variable. De esta forma, se presentan primeramente los indicadores para trabajar el uso de la variable como incógnita.

Los indicadores para la caracterización de los usos de la variable son: I: Incógnita, G: Número General, F: Relación Funcional.

Tabla 1*Variable Como Incógnita*

Uso de la Variable	Indicadores (I)
Variable como incógnita	I1. Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar. I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos. I3. Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera. I4. Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas y/o aritméticas necesarias. I5. Simbolizar la incógnita que aparece en una situación específica y plantear una ecuación.

Nota. Elaboración propia.

2.1.2 La Variable como número general

La variable como número general es una herramienta útil que permite la abstracción y generalización de métodos, patrones y reglas. Mediante el uso de símbolos, se pueden representar y conectar expresiones generales, abordar cantidades indeterminadas y desarrollar una comprensión más profunda. Este método no solo facilita la resolución de problemas específicos, sino que también fomenta el pensamiento lógico y abstracto,

permitiendo aplicaciones más amplias y complejas. A continuación, las autoras presentan los indicadores correspondientes para trabajar en el uso de la variable como número general.

Tabla 2

Variable Como Número General

Uso de la Variable	Indicadores (G)
Variable como Número General	G1. Reconocer patrones y reglas generales en secuencias numéricas y en familias de problemas. G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que asumir cualquier valor. G3. Deducir reglas o métodos generales, en secuencias y en familia de problemas. G4. Manipular la variable simbólica para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas. G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Nota. Elaboración propia.

2.1.3 La Variable como relación funcional

En el contexto de las variables de una relación funcional, es fundamental comprender cómo ciertas cantidades están conectadas en una situación dada, además es importante entender que en ocasiones el cambio en una cantidad tiene un impacto en el cambio de la otra. En estas circunstancias, la información puede presentarse a través de tablas, gráficos,

expresiones analíticas o descripciones verbales. Es esencial conocer cómo las variables varían entre sí y cómo se relacionan entre sí, también saber el rango de valores para el cual se define la relación, por ende, los estudiantes deben ser capaces de representar las relaciones funcionales de diferentes maneras, alternar entre estas representaciones y, además, expresarlas de forma analítica.

Tabla 3

Variable Como Relación Funcional

Uso de la Variable	Indicadores (F)
Variable como Relación Funcional	F1. Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica. F2. Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente. F3. Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente. F4. Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación. F5. Determinar los intervalos de variación cuando se conocen los de la otra. F6. Simbolizar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, con

base en el análisis de los datos de un problema.

Nota. Elaboración propia.

Para una mejor comprensión de este enfoque, se presentan tres ejemplos a modo situación problema para cada uso de la variable que implica la sintonía con el modelo 3uv, dos ejemplos extraídos del libro Enseñanza Del Álgebra Elemental, Una propuesta alternativa de Ursini et al (2005) y un ejemplo extraído del artículo Usos de la variable, sentido simbólico metacognición: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental, Marino, e Isla, (2018, P.260)

Ejemplo Uso de la Variable como Incógnita

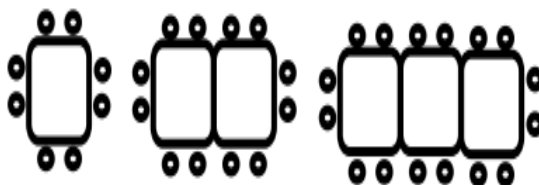
Una caja en forma de prisma rectangular tiene 4,5 cm de ancho y 3 cm de alto y su volumen es de 81 cm^3 ¿Cuánto mide el largo? P.24

Ejemplo Uso de la Variable como Número General

En una importante reunión se ofrece una cena para todos los invitados. A medida que se van sumando comensales se agregan mesas como muestra el siguiente esquema:

Figura 1

Esquema de Distribución de Mesas y Sillas en una Reunión



Nota. Adaptado de Marino, e Isla, (2018).

¿Cuántas sillas se necesitan para armar 30 mesas? ¿Y para armar 97 mesas? b) ¿Es posible que se sienten 96 personas sin que sobren lugares? En caso afirmativo, ¿cuántas mesas serían necesarias? P.260

Ejemplo uso de la variable como relación funcional

El peso de la mercancía que se compra en el mercado se mide en la báscula. En el puesto de Don Panchito, por cada kilogramo de peso, la charola de la báscula se desplaza 4 cm. Encuentre la relación entre el peso de la compra y el desplazamiento de la charola. Si la charola se desplaza 10,5 cm ¿Cuántos kilogramos pesan la mercancía? P. 32

De esta manera, el modelo 3UV permite la implementación efectiva de las principales aplicaciones de la variable y el desarrollo de habilidades relacionadas con cada una, sirviendo como base fundamental para diseñar secuencias educativas que mejoren la comprensión del concepto de variable en los estudiantes al comenzar sus estudios en álgebra escolar.

Con la caracterización e implementación que se propone de actividades similares a las anteriores, se fomenta el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. De esta forma, se analiza el siguiente enfoque matemático.

2.2 Enfoque matemático

Para hablar del concepto de variable, se debe tener en cuenta una herramienta y rama de las matemáticas llamada álgebra, aquí es donde los estudiantes presentan dificultades al momento de ver los símbolos o letras, como mal lo llamamos, debido a la poca manipulación que pueden haber tenido previamente. El álgebra es un lenguaje universal que nos permite expresar relaciones, cantidades, etc. de manera más concisa y precisa.

Uno de los conceptos algebraicos más fundamental es el de variable, representan valores que pueden cambiar o números descubiertos. La capacidad de manejar variables es esencial para resolver ecuaciones, modelar escenarios del mundo real y comprender conceptos matemáticos avanzados. Sin una sólida comprensión de las variables, a los estudiantes les puede resultar difícil avanzar en matemáticas y en otras materias que se basan en el razonamiento algebraico. En el contexto del álgebra y las ecuaciones, las variables suelen utilizarse principalmente para representar incógnitas.

Este enfoque no sólo facilita el aprendizaje de álgebra en la escuela, sino que también prepara a los estudiantes para utilizar lo que han aprendido en contextos más avanzados y variados. A través de actividades interactivas y exploratorias, implementar un diseño didáctico que incluya la utilización de variables como incógnita, número general y relación funcional puede mejorar significativamente la comprensión y rendimiento en álgebra de los estudiantes. La importancia del álgebra en el progreso del pensamiento lógico y abstracto

indica que estos conceptos fundamentales deben ser enseñados de manera eficiente y comprensiva.

2.2.1 Importancia del álgebra

El álgebra es una disciplina fundamental en las matemáticas que facilita la generalización y abstracción de situaciones concretas al usar letras y símbolos para representar números y relaciones. Sin embargo, su estudio es importante. Una de las ideas fundamentales del álgebra es el concepto de variable, que funciona como un puente entre el pensamiento algebraico y la aritmética.

"La mayoría de las investigaciones acerca del problema de los procesos de representación de los estudiantes de álgebra han encontrado que ellos utilizan o bien una traducción directa o una aproximación dirigida por principios. En el proceso de traducción directa se hace una traducción frase por frase a una ecuación que contiene números, variables y operaciones. Se requiere algún conocimiento semántico, pero la mayoría de los estudiantes sólo se apoya con conocimientos sintácticos" (Sánchez et., al 2010, p.47).

Este hallazgo demuestra que el álgebra resalta su valor no sólo como disciplina académica sino también como lenguaje que permite a los estudiantes traducir problemas del mundo real en expresiones matemáticas manejables.

Existen varios desafíos en la enseñanza del álgebra. Uno de los más significativos es la transición del álgebra a las matemáticas, acostumbrándose a trabajar con números específicos. La transición exige un cambio en los procesos de pensamiento y puede presentar un desafío importante para muchos estudiantes. La abstracción integrada del álgebra es otro desafío. Los alumnos que no están acostumbrados a pensar de manera abstracta pueden tener dificultades al comprender los conceptos algebraicos, ya que son más abstractos que los

aritméticos. Es crucial brindar amplias oportunidades para que los estudiantes practiquen y apliquen estos conceptos en diversos contextos para apoyar el desarrollo de su comprensión más profunda.

El objetivo principal de este enfoque matemático es brindar a los estudiantes una comprensión completa y flexible del concepto de variables, permitiéndoles reconocer y trabajar con varios tipos de transición fluida entre representaciones simbólicas, gráficas y tabulares, y usar variables para modelar y resolver problemas en una variedad de contextos. La aplicación del modelo 3UV implica crear actividades que fomenten el reconocimiento y uso de incógnitas mediante problemas que los estudiantes deben identificar y resolver para una incógnita; la generalización de patrones mediante ejercicios que requieren formular y comprobar conjeturas sobre propiedades matemáticas mediante variables; y el comprender relaciones funcionales mediante ejercicios donde se examinan funciones y se interpretan gráficamente las dependencias entre variables.

2.2.2 *Pensamiento algebraico*

El pensamiento algebraico es fundamental para que los individuos comprendan y manipulen símbolos abstractos y relaciones matemáticas. Este tipo de pensamiento no solo es crucial para resolver ecuaciones y problemas específicos, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades críticas aplicables en una amplia gama de disciplinas y contextos prácticos (Kieran, 2007).

El pensamiento algebraico implica el uso de símbolos y variables para generalizar problemas, el reconocimiento de patrones y estructuras matemáticas, la manipulación de expresiones algebraicas para resolver o simplificar problemas, y el razonamiento relacional que explora las conexiones entre los elementos de una ecuación (Kaput, 2008). Por ejemplo,

en la resolución de ecuaciones lineales, el reconocimiento de patrones permite identificar relaciones entre variables, mientras que el razonamiento relacional facilita la comprensión de cómo los cambios en una variable afectan a otra. Sin embargo, autores como Radford (2014) argumentan que el pensamiento algebraico no debe limitarse a la manipulación simbólica, sino que también debe incluir una comprensión profunda de los contextos culturales y sociales en los que se desarrolla.

Integrar el pensamiento algebraico con el aritmético y representar problemas verbales en forma algebraica puede ser un desafío para los estudiantes. Por ello, es esencial que los educadores adopten estrategias pedagógicas que fomenten la comprensión profunda de estos conceptos. Investigaciones recientes, como las de Blanton et al. (2015), han demostrado que el uso de herramientas visuales y manipulativas puede facilitar este proceso, especialmente en estudiantes de niveles iniciales.

En conclusión, el pensamiento algebraico no solo proporciona las herramientas necesarias para el razonamiento lógico y la resolución de problemas, sino que también desempeña un papel crucial en el desarrollo intelectual y práctico de los individuos. Este capítulo sienta las bases para explorar, en los siguientes apartados, cómo estas habilidades pueden ser desarrolladas y aplicadas en contextos educativos específicos.

2.3 Enfoque Curricular

En este enfoque se explora los campos curriculares que rigen y promueven la educación en Colombia en relación con el objeto de estudio: comprensión del concepto de variable. De los cuales se toman los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Se busca proporcionar una comprensión profunda de estos elementos y entender cómo influyen en la mejora del proceso de

enseñanza-aprendizaje del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

2.3.1 Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas

Los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (EBC) establecen los criterios de desempeño que los estudiantes deben alcanzar en cada nivel educativo. Están orientados a desarrollar competencias integrales que incluyen conocimientos, habilidades, actitudes y valores. Se enfocan en preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos académicos y de la vida cotidiana de manera efectiva. (MEN, 2006). En relación con el álgebra, se definen competencias específicas que están relacionadas con la comprensión y manipulación de variables. En este sentido, el presente trabajo busca profundizar en los diferentes usos que puede tomar la variable para la resolución de problemas algebraicos en diferentes contextos. Se justifica en la necesidad de desarrollar habilidades y competencias que sean relevantes para la vida cotidiana y el mundo laboral de cada ser humano. La capacidad de utilizar variables para representar situaciones reales y resolver problemas matemáticos es fundamental en campos como la ingeniería, la economía y la ciencia, por lo que es importante que los estudiantes desarrollen estas habilidades en su proceso de formación. Para esto es importante potenciar el desarrollo del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional permite a los estudiantes reconocer, identificar y caracterizar la variación y el cambio en diferentes contextos matemáticos, así como describir, modelar y representar estas variaciones en sistemas simbólicos (MEN, 2006, p. 67). El sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico. No obstante, estas variaciones también se pueden expresar a través de diferentes representaciones, como tablas, gráficas, variables, patrones y otros indicadores.

De la misma forma, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas contemplan cinco procesos generales de la actividad matemática: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 1998). Estos procesos son fundamentales y pueden ser abarcados de la caracterización de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, porque implica el uso de variables y la manipulación de expresiones algebraicas.

En este sentido, los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) explican que el pensamiento variacional está estrechamente vinculado con el álgebra. Por lo tanto, es esencial fortalecer la comprensión del concepto de variable mediante actividades que incluyan situaciones problemáticas. Estas actividades pueden ser abordadas utilizando el modelo 3uv, que abarca todos los aspectos mencionados anteriormente en el aprendizaje del álgebra escolar.

3. Metodología

En este capítulo, se detallan los elementos que se utilizaron para diseñar las tareas que conformaron la caracterización de un diseño para la comprensión del concepto de variable basado en el modelo 3UV para el aprendizaje del álgebra escolar. Según (Camargo Uribe, 2021), la metodología de investigación se define como la combinación de un enfoque, una estrategia investigativa y un conjunto de recursos que pueden guiar el desarrollo de una investigación.

Para esta investigación, se ha decidido optar por el paradigma de la investigación basada en el diseño (IBD) con la estrategia del experimento de enseñanza y un enfoque cualitativo, para esto, se realizó un diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA). A continuación, se mostrará una tabla denominada “Ficha panorámica metodológica” propuesta por (Bonelo, 2023) la cual se adaptará para esta investigación, donde se podrá analizar el enfoque, los recursos que se utilizarán con el objetivo de recolectar información para posteriormente realizar un correcto análisis de datos y la estrategia cualitativa.

Tabla 4*Ficha Panorámica Metodológica*

Ficha panorámica: metodología		
Naturaleza y Enfoque		IBD – Fenomenológico
Recursos (Información y análisis de datos)		Diseño secuencial cualitativo
Estrategia cualitativa		Experimentos de enseñanza - Trayectoria hipotética de aprendizaje.
Recursos captura de información	Escenario	Clase de matemáticas en grado noveno, en la Institución Educativa Liceo Del Saber, del sector privado de Zarzal, Valle del Cauca.
	Informantes	18 estudiantes pertenecientes al noveno grado.
	Eventos	Prueba diagnóstica. Implementación del diseño. Prueba de contraste final. Reflexión grupal.
	Recursos	Diseño de prueba diagnóstica y dos pruebas de contraste (Durante y después). Propuesta de enseñanza.
Análisis local de los datos		Descripción de la actividad. Desarrollo de la actividad. Objetivo. Análisis tabular de la información. Análisis retrospectivo. Análisis de la información.

Nota. Adaptado de Bonelo (2023).

3.1 Naturaleza de la investigación

La investigación basada en el diseño, según Molina et al. (2011) es un paradigma de investigación, de naturaleza cualitativa; el cual tiene como objetivo analizar el aprendizaje mediante la exploración y comprensión contextualizada a través del diseño y estudio sistemático de modalidades particulares de aprendizaje, estrategias y recursos de enseñanza. El diseño de ambientes de aprendizaje, en este paradigma, sirve como contexto para la investigación y, para llevar a cabo un análisis continuo y retrospectivo que posibilite las modificaciones en el diseño. Por lo anterior, se vincula este paradigma con nuestra investigación debido a que no solo se basa en la creación de diseños instruccionales para un tema en específico, sino que, permite explicar por qué el diseño propuesto funciona, al igual que sugerir cambios que pueden ser aplicados al diseño para ser adaptado en nuevas intervenciones. Analizando así las posibles variables que componen el aprendizaje de los estudiantes mediante la implementación del diseño para su caracterización.

Además, reconocemos que este paradigma es fundamental para nuestra investigación puesto que nos permitirá realizar los ajustes necesarios a la trayectoria hipotética de aprendizaje de acuerdo a la necesidades que manifiesten los estudiantes, la IBD según Molina et al. (2011) “tiene potencial para hacer progresar las teorías del aprendizaje y enseñanza en situaciones complejas, y conduce a conocimiento empíricamente fundamentado que es útil en la toma de decisiones instructivas dirigidas a promover y mejorar el aprendizaje de los estudiantes” (p.74).

3.1.1 Enfoque

En el marco de esta investigación se optó por la aproximación colaborativa social dentro del enfoque fenomenológico. Esta aproximación implica la participación de los investigadores, que también son profesores, en entornos educativos, colaborando estrechamente con estudiantes para comprender y mejorar las prácticas de enseñanza y aprendizaje en tiempo real. En una interpretación nuestra de acuerdo con Camargo (2021), los investigadores que son conscientes de las preocupaciones de los participantes en conjunto con ellos colaboran para crear una ruta para el aprendizaje facilitando una modificación del entorno social. Así los investigadores pueden adoptar dos tipos de posturas: reflexiva, que implica adoptar una actitud de exploración y cuestionamiento; o una dialéctica, que implica tomar una perspectiva opuesta a los participantes con el fin de realizar un análisis más profundo.

3.1.2 Recursos para la obtención de información y análisis de datos

De acuerdo con Camargo (2021), una estrategia metodológica se apoya en un conjunto de recursos con el propósito de realizar una indagación disciplinada, recopilar evidencia sobre el fenómeno en estudio e intervenir de manera analítica sobre los datos recolectados. Estos recursos comprenden diversas acciones investigativas, técnicas e instrumentos utilizados para registrar, depurar, construir datos, analizar y presentar los resultados obtenidos de la información.

Para esta investigación, se consideró que el diseño secuencial cualitativo-cuantitativo es pertinente, puesto que, con este diseño secuencial, los datos se analizan mediante métodos cualitativos para detectar temas fundamentales, formular conceptos teóricos e hipótesis. Estos, a su vez, pueden ser luego estudiados mediante métodos cuantitativos.

3.1.3 Estrategia cualitativa: Experimentos de enseñanza

La implementación de *Experimentos de enseñanza* implica diseñar, ejecutar y analizar actividades educativas para verificar una hipótesis sobre un aprendizaje específico. Esta estrategia se centra en comprender los significados que los individuos atribuyen a diversos aspectos de las interacciones educativas. Según Camargo (2021), esta técnica permite explorar los métodos utilizados en una clase particular y evaluar la calidad de la experiencia matemática de los estudiantes al participar en el diseño de actividades que buscan crear oportunidades atractivas e interesantes para el aprendizaje.

Los experimentos de enseñanza promueven el aprendizaje tanto de estudiantes como de profesores mediante la construcción conjunta de conocimiento a través de la interacción. Estos experimentos prueban y ajustan hipótesis basadas en los datos recogidos. La investigación sigue una estructura de la IBD y se fundamenta en una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), crucial para recopilar información que permita cumplir los objetivos propuestos y validar o rechazar las hipótesis formuladas.

En términos generales, la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) constan de tres elementos principales: la meta de aprendizaje, las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje. Esta THA ofrece una característica valiosa para la investigación, ya que proporcionan tanto a los investigadores como a los profesores una guía sobre cómo llevar a cabo el experimento de enseñanza y, una vez realizado, orientan el análisis retrospectivo (Cárcamo, 2017, p.32). Esto implica que la THA sugiere una ruta específica para el aprendizaje, en la que las hipótesis del profesor pueden ajustarse según los objetivos de la investigación, proporcionando herramientas variadas que se adaptan a las distintas fases de la IBD.

3.2 Recursos: Toma de información

3.2.1 *Escenario*

Según Bonelo (2023), en el ámbito de la investigación en Educación Matemática, el escenario está vinculado directamente con los entornos donde se imparte y se adquiere la educación matemática, ya sea de una manera formal o informal. Este incluye también los lugares donde se planifica, organiza y administra la enseñanza de matemáticas, donde se dan las interacciones entre estudiantes y profesores, donde se usan las herramientas o los diferentes materiales didácticos y donde se promueve y se evalúa el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La propuesta educativa se llevó a cabo en la sala de sistemas de la Institución Educativa Liceo Del Saber, del sector privado localizada en el municipio de Zarzal, Valle del Cauca. Allí se llevó a cabo la aplicación de la prueba diagnóstica en un formulario de Google, el cual proporcionará la información necesaria para realizar los diseños de tareas correspondientes.

3.2.2 *Informantes*

La investigación se realizó con un grupo de 18 estudiantes con edades que oscilan entre 14 y 15 años, los cuales se encuentran en grado noveno pertenecientes a la Institución Educativa Liceo Del Saber, de Zarzal, Valle del Cauca, la elección de la institución y de los estudiantes, se debe a las facilidades y colaboración que ha mostrado la institución para asistir y realizar los diferentes procesos investigativos.

3.2.3 *Eventos*

La interacción con los informantes se realizó en cuatro momentos, con el objetivo de recopilar datos, los cuales están estructurados de la siguiente manera:

1. Prueba Diagnóstica (Al iniciar la implementación)
2. Desarrollo de la propuesta de aprendizaje
3. Prueba de contraste (Al finalizar la implementación)
4. Reflexiones finales

3.2.4 *Recursos*

Para el adecuado desarrollo de esta investigación se utilizaron los siguientes recursos y técnicas de recolección de datos, las cuales se consideran pertinentes:

- **Prueba de evaluación diagnóstica:** Esta se utilizó al inicio del desarrollo de la investigación con el objetivo de comprender el contexto bajo el cual se desarrollará la propuesta de aprendizaje y determinar las nociones que los estudiantes conocen o desconocen sobre el concepto de variable y sus diferentes usos.

- **Implementación piloto:** esta se desarrolló durante la investigación con el objetivo de implementarlo en tres sesiones enfocadas a los diferentes usos de las variables de acuerdo con los parámetros propuestos por el Modelo (3UV).

- **Primera sesión:** Enfocada en la variable como incógnita
- **Segunda sesión:** Aborda la variable como número general.
- **Tercera sesión:** Destinada a la variable como relación funcional.

- Prueba de evaluación. Esta prueba reveló los resultados finales de los estudiantes que participaron en la propuesta planteada, lo que permitió determinar tanto el éxito como las falencias que se siguieron observando.
- Hoja de trabajo: se diseñó un formulario de Google como instrumento de análisis, el cual tendrá las orientaciones, preguntas y espacios para las respuestas de los estudiantes.
- La observación participante: esta técnica es incorporada a la investigación debido a que permite tener una visión clara e inicial de la hipótesis planteada. A su vez, permitiendo ver el desarrollo de la investigación, esto a partir de la participación de los investigadores en la toma registro de datos e impresiones sobre las variables de la hipótesis de investigación.

3.2.5 Análisis local de los datos

Para analizar cada formulario de Google, el cual cumple el papel de hoja de trabajo se consideraron los siguientes aspectos esenciales:

- **Descripción de la actividad:** Esta sección brinda una visión general de la actividad, destacando su propósito e intenciones específicas.
- **Desarrollo de la actividad:** Aquí se presenta un contexto detallado de la implementación de la actividad, incluyendo información sobre el entorno, los participantes y el proceso de ejecución.
- **Objetivo:** Define el propósito central de la actividad, resaltando la intención principal detrás de su diseño.

- **Análisis tabular de la información:** A lo largo del análisis, se incluirán gráficos y tablas que representan la recolección de información y los resultados obtenidos por los estudiantes. Esto permitirá visualizar claramente los hallazgos y facilitará la interpretación de los datos.
- **Análisis retrospectivo:** En esta etapa, a partir del análisis local de cada sesión, se identifican regularidades y variaciones según lo propuesto, especificando lo que se ha logrado, lo que aún no se ha alcanzado y los resultados imprevistos.
- **El análisis de la información:** Al estar esta investigación enmarcada en la Investigación Basada en el Diseño (IBD), el análisis incluye elementos tanto de análisis local como retrospectivo, características típicas de las investigaciones cualitativas que adoptan este enfoque, dando lugar a lo que se lleva a cabo en los experimentos de enseñanza.

4. Análisis local de los datos

En este capítulo se presentan los análisis derivados de las actividades realizadas para el aprendizaje de los estudiantes sobre la comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos. Estas actividades abarcan la prueba diagnóstica, la implementación del diseño y la prueba de contraste final. Todas ellas se enmarcan en el modelo 3UV y están alineadas con los objetivos establecidos al inicio de la investigación.

Para la realización del análisis, se dispone de una serie de herramientas que facilitaron la descripción, comprensión y la clasificación de las producciones escritas de los estudiantes. Entre estos instrumentos se incluyen los formularios de Google, las hojas de respuestas en Excel, tablas y gráficos, así como el diseño y las adaptaciones de las actividades, los cuales permitieron un mayor nivel de detalle y precisión en la transformación de la información general en datos significativos.

Este análisis revela las diferentes heurísticas, potencialidades y dificultades que experimentaron los estudiantes a medida que avanzaban y desarrollaban las actividades propuestas. Para estas actividades se contó con la mediación y participación del docente encargado del curso, quien colaboro en la construcción del conocimiento de los estudiantes.

4.1 Sobre la Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica se diseñó con el fin de recolectar información sobre los saberes previos de los estudiantes, permitiendo identificar su comprensión y percepción del concepto de variable y sus diferentes usos, así como también para la identificación de errores y dificultades reportados en la literatura.

Considerando el grado de escolaridad y el contexto de la institución, se decidió crear una prueba en Google Formularios, la cual consta de 15 preguntas, destinando 5 por cada uso de la variable, esto facilitó la optimización de recursos y tiempo, además ofreció una alternativa al contexto tradicional del aula al realizarse en la sala de sistemas de la institución.

La prueba se aplicó en dos sesiones de una hora cada una, dado que las limitaciones de tiempo del colegio en este día impidieron realizarla en una única sesión de dos horas. En la segunda sesión, los estudiantes retomaron la prueba desde el punto en que la habían dejado en la primera. Esta evaluación incluyó actividades adaptadas de una prueba diagnóstica basada en el modelo 3UV, junto con ejercicios diseñados específicamente para la investigación, siguiendo los parámetros de cada uso de la variable.

Los ejercicios fueron modelados a partir de situaciones de la vida real, con un formato de respuesta que incluyó preguntas de selección múltiple tipo ICFES, para familiarizar a los estudiantes con estas pruebas, así como preguntas abiertas, que permitieron explorar la génesis del pensamiento de cada estudiante, su forma de abordar, modelar y operar en la resolución de problemas. Los resultados permitieron dar un horizonte para el diseño de actividades específicas en las siguientes tres sesiones.

4.1.2 Aspectos generales de la prueba diagnóstica

La siguiente rejilla da a conocer los aspectos generales de la prueba diagnóstica aplicada.

Tabla 5*Aspectos Generales de la Prueba Diagnóstica*

Grado de escolaridad	Grado noveno
Objeto matemático y concepto	La comprensión del concepto de variable con sus diferentes usos, específicamente la variable como incógnita, la variable como numero general y la variable como relación funcional.
Pensamiento matemático	Pensamiento algebraico
Tipos de pregunta	Múltiple opción, abiertas.
Hoja de trabajo	Formulario de Google Forms.
Duración	60 minutos.
Objetivo	Recolectar información sobre los saberes previos de los estudiantes, para la obtención de un panorama que permita un acercamiento a la comprensión y percepción del concepto de variable y sus diferentes usos.
Prueba diagnóstica	https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScgMLqu2g4kKsZeb0Hx5quC0JLBjxP9vvmz-O47-emP4ZPbfA/viewform?usp=sf_link

Nota. Elaboración propia

4.1.3 Análisis de los resultados obtenidos de la prueba diagnostica

Para el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica, se hizo un conteo de las respuestas y se emplearon tablas y gráficos que facilitaron una interpretación visual y estructurada de los datos recolectados. Este análisis no solo evidenció los conocimientos previos de los estudiantes sobre el uso de la variable, sino que también aportó información clave sobre los errores y dificultades encontrados al resolver los problemas planteados.

En una primera instancia, se presenta un análisis global de las respuestas. Para una mejor comprensión se ha clasificado 4 formas de respuesta de la siguiente manera: Correctas, Incorrectas, No sé, Incompleta.

Las respuestas clasificadas como “No sé,” corresponden a aquellas en las que los estudiantes indicaron no tener conocimiento o seguridad sobre cómo resolver el problema planteado. Por otra parte, las respuestas clasificadas como “Incompleto” se refieren a aquellas que presentan una respuesta válida o correcta, pero que no cumplen con todos los requisitos establecidos en la pregunta, dejando aspectos fundamentales sin abordar. Para una revisión más detallada, las hojas de respuestas están disponibles en la sección de anexos (ver Anexo D: Datos recolectados de la prueba diagnóstica) y pueden accederse mediante el código QR proporcionado.

De esta forma, se obtiene la siguiente tabla y gráfico circular que permiten tener una mejor visualización y comprensión de los resultados.

Tabla 6

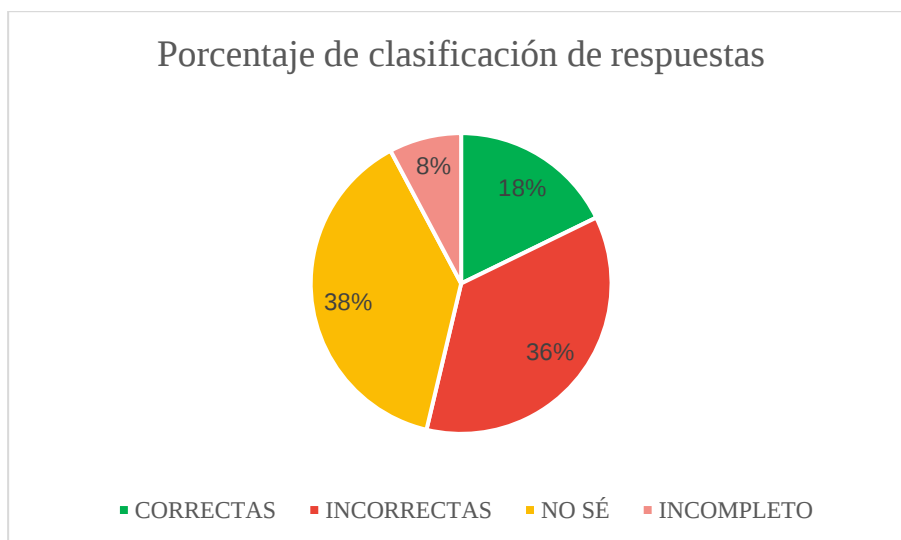
Conteo Clasificadorio de Respuestas de la Prueba Diagnóstica

CORRECTAS	INCORRECTAS	NO SÉ	INCOMPLETO	TOTAL
48	97	104	21	270

Nota. Elaboración propia

Figura 2

Porcentaje de Respuestas de la Prueba Diagnóstica



Nota. Elaboración propia

A partir de estos resultados se observa una distribución variada en las respuestas de los estudiantes. *La Figura 2* muestra el porcentaje de respuestas correctas, incorrectas, “No sé” e incompletas, permitiendo visualizar la comprensión general sobre los usos de la variable. Los datos indican que:

El 18% de las respuestas fueron correctas, reflejando un grupo que demuestra cierta comprensión en algunos de los conceptos. Sin embargo, este porcentaje relativamente bajo sugiere que es necesario fortalecer sus habilidades y conocimientos para una mejor comprensión del objeto de estudio.

El 36% de las respuestas fueron incorrectas, lo cual sugiere que una parte significativa de los estudiantes presenta dificultades y errores en los conceptos evaluados.

Con un 38% de respuestas “No sé”, esta categoría muestra que posiblemente muchos estudiantes declararon no tener conocimientos suficientes para responder.

Un 8% de las respuestas fueron consideradas incompletas, es decir, aunque presentan ideas válidas, no logran abarcar todos los aspectos requeridos por la pregunta.

Este análisis inicial resalta tanto los aciertos como las áreas de oportunidad en el aprendizaje de los estudiantes, evidenciando la necesidad de fortalecer sus conocimientos en los diferentes usos de la variable. Además, los porcentajes de respuestas incorrectas y "No sé" apuntan hacia una serie de errores y dificultades que analizaremos a continuación de manera enfocada en la comprensión de cada uso de la variable.

De esta forma, se detallan los hallazgos principales en cada una de las categorías evaluadas del modelo 3UV. Este análisis permitirá identificar áreas de fortaleza y desafío en el aprendizaje de los estudiantes, y brindará una base sólida para el desarrollo del diseño de la secuencia didáctica que abordará las necesidades específicas del grupo.

Cómo fue descrito anteriormente, esta prueba fue realizada por 18 estudiantes con un rango de edades de entre 14 y 15 años, la prueba está conformada por 15 preguntas las cuales se destinaron 5 preguntas enfocadas al uso de la variable como incógnita, 5 para el uso de la variable como número general y 5 para la variable como relación funcional. En ese orden de ideas, la prueba tuvo un total de 270 respuestas, por lo que cada enfoque de uso de la variable tuvo un total de 90 respuestas.

El documento con las respuestas obtenidas se tendrá en cuenta por medio de un código QR en la parte de anexos. Con el fin de proteger la privacidad y confidencialidad de los

estudiantes participantes en el análisis de sus respuestas, se ha decidido no utilizar sus nombres reales. En su lugar, se les asignarán identificadores numéricos; por ejemplo, 'Estudiante 1', que será abreviado como 'E.1', 'Estudiante 2', será abreviado como 'E.2' y así sucesivamente. De igual forma que para las preguntas que se presentan en el análisis se tendrán en cuenta el número de la pregunta y su categoría de uso; por ejemplo, 'Pregunta 1', uso de la variable como incógnita', será abreviado como 'P1. V.I ', 'Pregunta 2, uso de la variable como número general', será abreviado como ' P2.V.N.G ', y, 'Pregunta 3, uso de la variable como relación funcional', será abreviado como ' P3.V.R.F '

De tal manera, se hace un conteo de clasificación a las respuestas de las 5 preguntas de la prueba diagnóstica enfocada al uso de la variable como incógnita. Los resultados arrojados los muestra la siguiente tabla.

Tabla 7

Conteo de Respuestas de las Preguntas Enfocadas al Uso de la Variable Como Incógnita

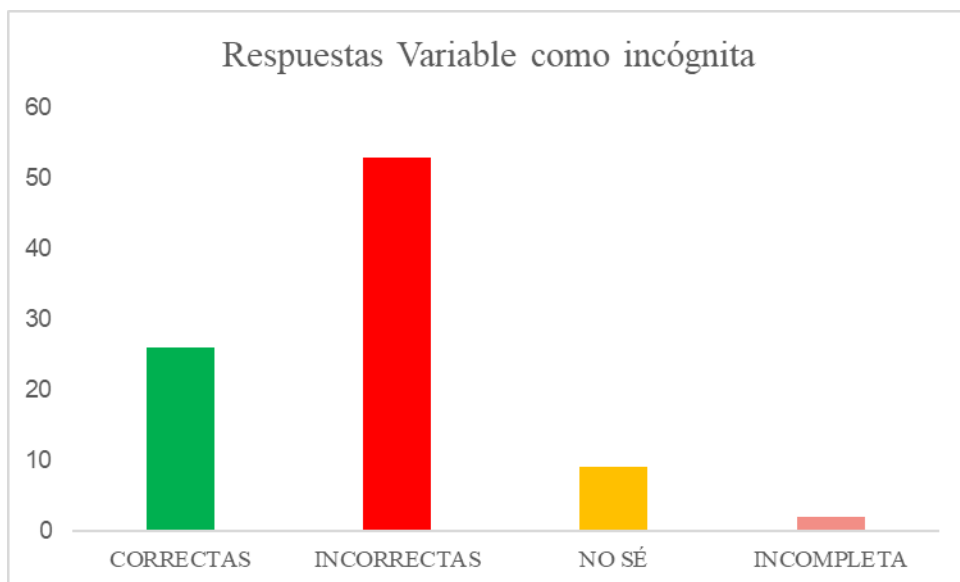
CORRECTAS	INCORRECTAS	NO SÉ	INCOMPLETA	TOTAL
26	53	9	2	90

Nota. Elaboración propia

Para una mejor visualización e interpretación de los datos se muestra el siguiente gráfico de barras.

Figura 3

Representación Gráfica del Conteo de las Respuestas de las Preguntas Enfocadas en el Uso de la Variable Como Incógnita



Nota. Elaboración propia

De acuerdo con las respuestas por parte de los estudiantes, conforme al uso de la variable como incógnita, se observa que 26 de las respuestas fueron correctas, 53 respuestas incorrectas, 9 respuesta de “No sé” y 2 respuestas incompletas.

En este análisis se centra exclusivamente en las respuestas incorrectas e incompletas, porque son precisamente estas, las que son de interés conocer y las que aportan valor a la investigación. Además, se expondrá las preguntas a las que los estudiantes no pudieron responder o respondieron con un 'no sé'. Este enfoque permitirá identificar dificultades y errores de los estudiantes teniendo en cuenta los objetivos planteados.

De esta manera, se observa que más del 50% de las respuestas fueron incorrectas. Estas se evidencian en las respuestas de los estudiantes E.5, E.6 y E.7. Esta pregunta plantea un problema de edades en el que la suma de la edad actual de una mamá y su hija es 70 años, y dentro de 5 años, la mamá tendrá tres veces la edad de la hija.

Figura 4

P.4 V.I.

La mamá y su hija tienen una relación interesante con sus edades.

Pista 1: La suma de sus edades hoy es 70.

Pista 2: Dentro de 5 años, la edad de la mamá será tres veces la de la hija.

Escribe una expresión que creas que permita resolver el problema y escribe los años de la mamá y la hija.

Nota. Elaboración propia.

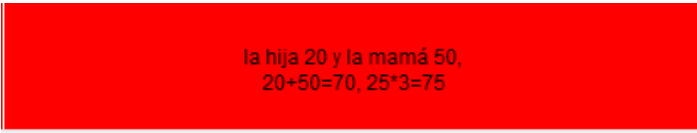
Respuesta E.6

sería escribir 3 veces la edad de la hija si la mama tiene 70 y en 5 años tendría 75 se divide en 3 la edad de la mama daría 25

Respuesta E.7

la expresión de la operación sería $A=70-50\%=35$ $35+15=50$ por lo tanto la edad sería 50 años

Respuesta E.8 y E.9



la hija 20 y la mamá 50,
 $20+50=70$, $25*3=75$

Estas muestras evidencian una serie de errores que reflejan una falta de comprensión en el uso de la variable como incógnita. Los estudiantes, en lugar de representar las incógnitas mediante variables y resolver el problema mediante ecuaciones, tienden a realizar cálculos numéricos directos. Además, se observan errores en la estructuración de las expresiones algebraicas, aplicando operaciones sin una lógica algebraica coherente. Los estudiantes no logran establecer una relación lógica entre las edades de la madre y la hija que satisfaga ambas pistas del problema, lo cual sugiere dificultades para abordar problemas de manera organizada y en pasos estructurados.

Así mismo, se evidencian 2 respuestas incompletas, una de ellas de la pregunta expuesta en la figura 5, la cual plantea una situación en la que Pedro, para realizar un viaje, necesita reunir un presupuesto total de 3,500,000 pesos, de los cuales ya cuenta con un préstamo de 500,000 pesos. El objetivo es que el estudiante calcule cuántos meses le tomará a Pedro completar el dinero restante si ahorra 200,000 pesos cada mes y formule una expresión matemática que represente este cálculo.

Figura 5

P.5. V.I.

Pedro está organizando un viaje a Santa Marta y ha establecido un presupuesto total de 3.500.000 pesos. Su amigo Daniel le presta 500.000 pesos. Pedro planea ahorrar 200.000 pesos cada mes para completar el monto necesario.

¿ En cuántos meses Pedro completa el monto necesario para irse a Santa Marta si hace el ahorro suficiente? Plantea la expresión matemática.

Nota. Elaboración propia.

Respuestas E.4 y E.5

$$200000 \cdot x = 3000000$$

La ecuación está correctamente planteada. La expresión representa que Pedro necesita alcanzar los 3,000,000 pesos restantes mediante un ahorro de 200,000 pesos cada mes. Aquí, x representa el número de meses necesarios para llegar a esa cantidad. Pero es Incompleta en términos de respuesta final porque no se resuelve la ecuación para encontrar el valor de x .

Por otra parte, hubo estudiantes que optaron por responder "No sé" en 9 de las 90 respuestas posibles, esto se puede observar en preguntas como la siguiente.

Figura 6

P.1 V.I.

Imagina que eres dueño de una tienda de electrónica y has notado que el precio de un teléfono inteligente se incrementa con el tiempo. Actualmente, el precio de un teléfono es de **850.000 pesos** pero cada mes, el precio aumenta en **15.000 pesos**.
Pregunta: ¿Cuál será la expresión matemática que representa el precio del teléfono después de x meses?

La pregunta plantea un problema sobre el precio de un teléfono inteligente que se incrementa con el tiempo. El precio inicial es de 850,000 pesos, y aumenta 15,000 pesos cada mes. Se les pide a los estudiantes una expresión matemática que represente el precio del teléfono después de x meses.

Estas respuestas podrían indicar que los estudiantes no han desarrollado plenamente las habilidades necesarias para resolver problemas algebraicos, lo cual puede deberse a un desconocimiento de las técnicas adecuadas o a la falta de práctica en la simbolización de incógnitas y en la formulación de ecuaciones que representen relaciones lógicas entre los datos del problema. Por lo tanto, es fundamental fortalecer su comprensión conceptual y brindarles más oportunidades para aplicar estrategias de resolución paso a paso.

Del mismo modo, se realiza un análisis a los datos obtenidos de las preguntas destinadas al uso de la variable como número general. A continuación, se presenta la siguiente tabla con el conteo de las respuestas y un respectivo grafico de los datos.

Tabla 8

Conteo de las Respuestas de las Preguntas del Uso de la Variable Como Número General

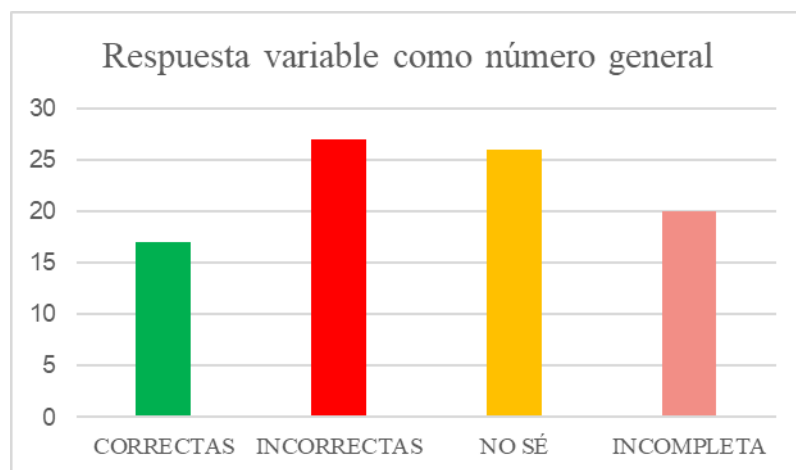
CORRECTAS	INCORRECTAS	NO SÉ	INCOMPLETA	TOTAL
17	27	26	20	90

Nota. Elaboración propia

A partir de estos datos, se elabora la *Figura 7*, la cual ofrece una representación gráfica del conteo de las respuestas para facilitar la visualización y comprensión.

Figura 7

Representación Gráfica del Conteo de las Respuestas de las Preguntas Enfocadas en el Uso de la Variable como Número General



Nota. Elaboración propia

Los datos revelan que solo una pequeña parte de los estudiantes entiende el uso de la variable como número general, mientras que la mayoría muestra respuestas incorrectas, seguido de respuestas como “No sé” o respuestas incompletas. Estos resultados señalan la

falta de comprensión y la oportunidad para fortalecer el aprendizaje de este concepto en el grupo.

En este sentido, la mayoría de las respuestas a las preguntas fueron incorrectas como se puede visualizar a continuación en las respuestas de los estudiantes de la siguiente pregunta.

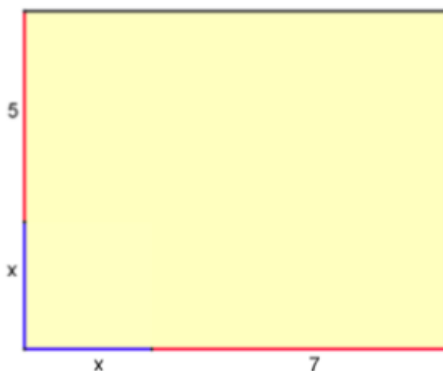
La pregunta pide que los estudiantes escriban una expresión algebraica que represente el área de un jardín rectangular. Se especifica que el ancho del jardín es $5+x$ metros y el largo es $x+7$ metros. Para resolver esto, se requiere que los estudiantes apliquen la fórmula del área de un rectángulo (ancho por largo) utilizando las expresiones dadas.

Figura 8

P2. V.N.G.

Estás colaborando con tu padre en el diseño de un jardín rectangular. El ancho del jardín es $5+x$ metros y el largo es $x+7$ metros.

Escribe la expresión algebraica que representa el área de este jardín.



Nota. Elaboración propia.

Respuesta E.1 y E.2

$$\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Respuesta E.12

Sería 12 y 35 por que $5+7=12$ y $7 \times 5=35$

Como se puede evidenciar, ambas respuestas presentan errores. La primera utiliza incorrectamente la fórmula del área de un triángulo, dividiendo entre dos, en lugar de aplicar la fórmula correspondiente al área de un rectángulo, que solo requiere multiplicar la base por la altura. Esto indica una confusión en la identificación de fórmulas geométricas. La segunda respuesta, por su parte, calcula valores numéricos específicos (12 y 35) al sumar y multiplicar los valores constantes, 5 y 7, sin considerar la variable x que define el problema; en lugar de construir una expresión algebraica generalizada, el estudiante reduce el problema a operaciones numéricas concretas. Ambas respuestas reflejan confusiones en el uso de procedimientos algebraicos y geométricos, lo que indica una comprensión baja de la variable como número general.

También, se encontraron respuestas incompletas las cuales se pueden analizar y hablar un poco de lo visto en aplicación de esta prueba diagnóstica. Como la siguiente.

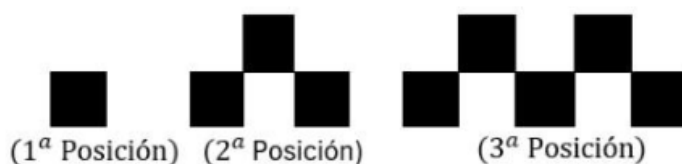
La próxima pregunta se centra en la identificación de patrones y la generalización a través de expresiones matemáticas, lo cual es fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico. El objetivo era que los estudiantes reconocieran la regularidad en la secuencia de figuras y formularan una expresión que les permita calcular el número de cuadros negros en cualquier posición dada.

Figura 9

P.1 V.N.G.

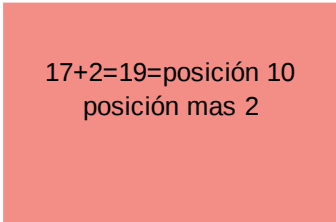
Según la secuencia de la imagen, ¿Cuántos cuadros negros habrán en la posición número 10? *

¿Cuál crees que es la expresión matemática general para encontrar una posición determinada n ?



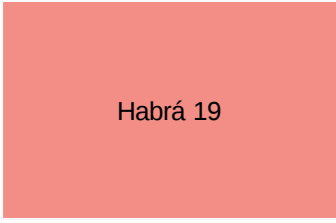
Nota. Elaboración propia.

Respuesta E.1 y E.2



$17+2=19=\text{posición } 10$
posición mas 2

Respuesta E.10 y E.11



Habrá 19

Algo importante para compartir de lo que se observó en el acompañamiento de la prueba en este problema, fue que muchos estudiantes empezaron a contar de forma manual los cuadros correspondientes a cada posición hasta llegar a la posición número 10. Este enfoque les tomó mucho tiempo y por lo cual también les impidió formular una expresión general para la secuencia como correspondía. Este método que aplicaron es muy común hacerlo y es su vez ineficiente, porque si la pregunta hubiera pedido el número de cuadros en la posición 100 probablemente no hubieran sido capaz de realizar el conteo de esta misma forma.

El segundo mayor número de respuestas (26) corresponden a “No sé” por parte de los estudiantes, en preguntas como la siguiente. La pregunta evalúa la habilidad de los estudiantes para identificar un patrón numérico en una secuencia aritmética y formular una

expresión general que relacione el nivel del videojuego con la cantidad de enemigos que aparecen. Les pide observar el incremento constante en cada nivel, derivar una fórmula general en función de una variable, y aplicarla a casos específicos.

Figura 10

P.5 V.N.G.

*

Imagina que estás diseñando un nuevo videojuego. Para que el juego sea más divertido, quieres que los enemigos aparezcan en diferentes cantidades según el nivel que el jugador haya alcanzado.

Nivel 1: Aparecen 10 enemigos.

Nivel 2: Aparecen 15 enemigos.

Nivel 3: Aparecen 20 enemigos.

¿Cómo puedes expresar de manera general la cantidad de enemigos que aparecerán en cualquier nivel "n"?

¿Cuántos enemigos aparecerán en el nivel 10? ¿En qué nivel aparecerán 50 enemigos?

Nota. Elaboración propia.

Es probable que los estudiantes respondieran "no sé" debido a una dificultad para identificar la relación matemática entre el nivel del videojuego y la cantidad de enemigos. Aunque la pregunta proporciona ejemplos específicos (10 enemigos en el nivel 1, 15 en el nivel 2, y 20 en el nivel 3), los estudiantes no tuvieron la capacidad para reconocer el patrón de incremento que les permitirá responder las preguntas planteadas en el problema.

Por último, se hace un análisis a los datos obtenidos de las preguntas destinadas al uso de la variable como relación funcional. A continuación, se presenta la siguiente tabla con el conteo de las respuestas y un respectivo grafico de los datos que permite una interpretación más clara del desempeño general de los estudiantes en este uso de la variable.

Tabla 9

Conteo de las Respuestas de las Preguntas del uso de la Variable Como Relación Funcional

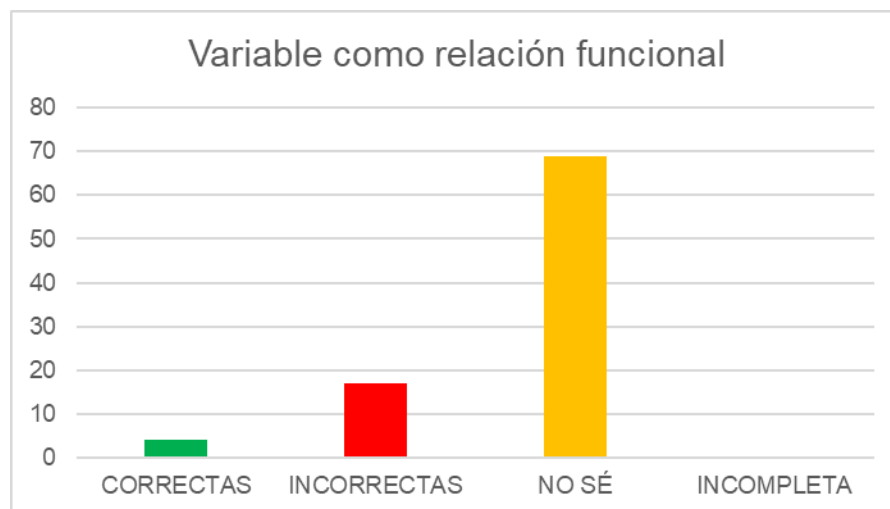
CORRECTAS	INCORRECTAS	NO SÉ	INCOMPLETA	TOTAL
4	17	69	0	90

Nota. Elaboración propia

A partir de estos datos, se elabora la *Figura 11*, la cual ofrece una representación gráfica del conteo de las respuestas.

Figura 11

Representación Gráfica del Conteo de las Respuestas de las Preguntas Enfocadas en el Uso de la Variable Como Relación Funcional.



Nota. Elaboración propia.

La gran mayoría de respuestas, 69, corresponde a estudiantes que optaron por la respuesta "no sé". Solo 4 estudiantes respondieron correctamente, mientras que 17 dieron

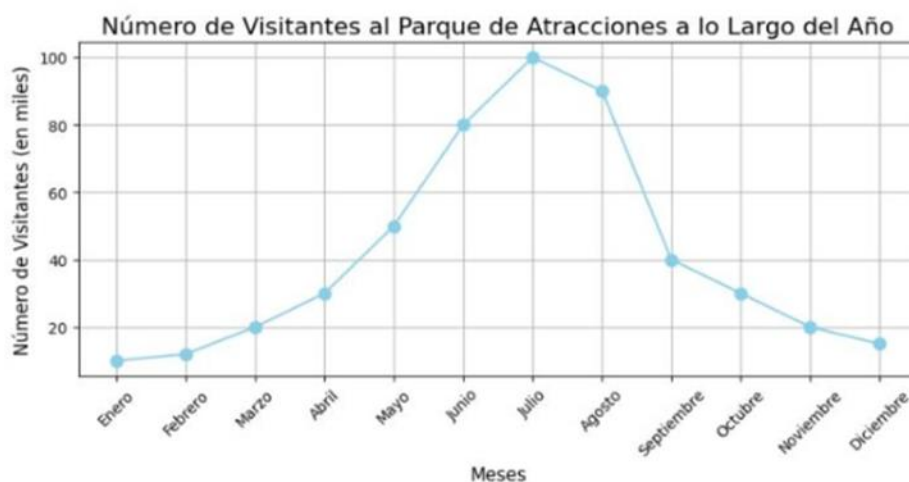
respuestas incorrectas y 0 preguntas incompletas. Estos datos reflejan que la mayoría de los estudiantes enfrentaron problemas para comprender o aplicar el concepto requerido en las cinco preguntas realizadas.

Observemos una de las preguntas que los estudiantes respondieron de forma incorrecta. La pregunta invita a los estudiantes a analizar una gráfica de visitantes a un parque de atracciones a lo largo del año y a identificar el intervalo de mayor crecimiento en el número de visitantes. Para los estudiantes responder, deben observar en qué mes se da el incremento más pronunciado en la cantidad de visitantes y justificar su respuesta con base en los datos de la gráfica.

Figura 12

P.4 V.R.F.

Según la gráfica, ¿En qué mes se observó el intervalo de crecimiento más grande en el número de visitantes ? **Justifica tu respuesta**



Nota. Elaboración propia.

Respuesta E.12

En julio y agosto ya
que se ven que son
las más altas

Respuesta E.18

El mes de julio
La línea que conecta los puntos de
junio y julio es la más inclinada de
todo el gráfico, lo que indica un
aumento más rápido en el número
de visitantes durante este intervalo.

En la primera respuesta el estudiante tiene una mala interpretación de la pregunta. Se enfoca en los valores absolutos más altos de la gráfica (julio y agosto), en lugar de analizar el cambio en el número de visitantes entre meses.

Aunque la segunda respuesta parece bien argumentada, contiene un error en la identificación del intervalo de crecimiento más alto. El estudiante señala el intervalo de junio a julio como el de mayor crecimiento, pero en realidad el intervalo más grande en el número de visitantes ocurre de mayo a junio.

Por otro lado, se registraron 69 respuestas clasificadas como "No sé", el número más alto en esta categoría entre todos los usos de la variable evaluadas. Además, hubo una

pregunta específica en la cual ninguno de los 18 estudiantes encuestados proporcionó una respuesta distinta a esta y por ende se presenta a continuación.

Figura 13

P.3 V.R.F.

Según el grafico presentado, la altura de una planta depende del tiempo que ha pasado desde que comenzó a crecer. Sin embargo, el crecimiento no es constante, ya que al principio la planta crece más rápido y luego su crecimiento se desacelera. La relación entre la altura (h) de la planta en centímetros y el tiempo (t) en días puede describirse con la fórmula: $h(t) = 10 * \ln(t+1)$

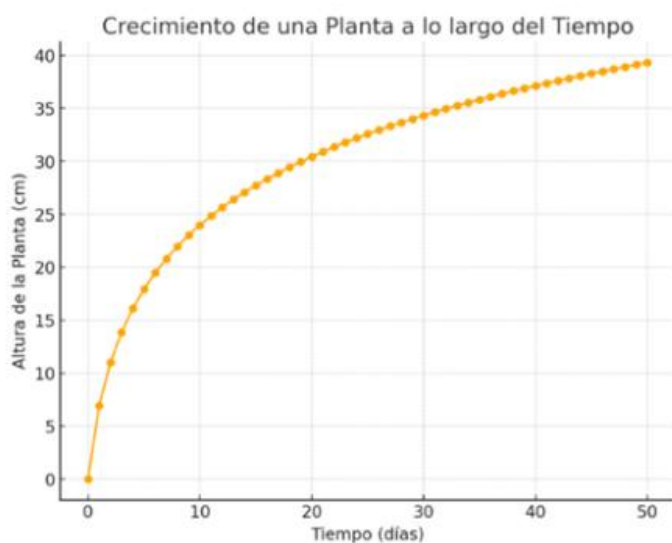
Responde:

¿Cómo se interpreta el término $\ln(t+1)$ en la fórmula?

¿Puedes describir cómo será la altura de la planta después de 10 días y después de 100 días?

¿Cómo justificarías la diferencia en el crecimiento?

Si quisiéramos que la planta creciera de manera constante, ¿cómo debería cambiar la fórmula?



Nota. Elaboración propia.

La pregunta plantea una situación de crecimiento de una planta cuya altura depende del tiempo transcurrido desde que comenzó a crecer, el crecimiento de la planta es logarítmico, lo cual implica que crece rápidamente al principio y luego su velocidad de crecimiento disminuye con el tiempo. La fórmula que describe la altura $h(t)$ de la planta en función del tiempo t (en días) es: $h(t) = 10 \times \ln(t+1)$. Pero como se mencionó anteriormente, ningún estudiante se atrevió a responderla.

El análisis realizado a las respuestas incorrectas e incompletas, así como a las preguntas que obtuvieron respuestas como “No sé “de la prueba diagnóstica, permitió identificar errores y dificultades en la comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos que tienen los estudiantes. Así mismo genera abundante visión para la caracterización del diseño didáctico que será aplicado con los estudiantes con el fin de fortalecer la comprensión del concepto de variable y sus diferentes usos.

4.1.4 Identificación de errores y dificultades en las respuestas de la prueba diagnóstica

En el marco de la presente investigación, los resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de grado 9 evidencian significativas dificultades y errores en la comprensión y uso de las variables.

Según Robayna (2008) los errores pueden emplearse como instrumentos de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. Es importante entender que los errores suelen manifestarse en el trabajo de los estudiantes, especialmente cuando se enfrentan a conocimientos nuevos que les demandan revisar, ajustar o reestructurar lo que

ya saben. Así mismo, identificar los errores puede proporcionar una comprensión más profunda y completa del contenido matemático de estudio.

Por otro lado, las dificultades que surgen pueden analizarse desde distintas perspectivas, como su relación con los métodos de enseñanza empleados, el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes y el diseño del currículo de matemáticas.

En el presente análisis se identificaron los errores más recurrentes, los cuales están relacionados con la incapacidad para plantear ecuaciones que modelen situaciones problemáticas de manera correcta, errores en la abstracción y formulación de expresiones algebraicas a partir del reconocimiento de determinados patrones, y las limitaciones al interpretar tablas y gráficas, particularmente en la identificación y comprensión de las relaciones entre las variables independientes y dependientes. Asimismo, se observó una alta proporción de respuestas incompletas y es evidente que existen dificultades para responder algunas preguntas, una mayor parte de las respuestas fueron con un "no sé" lo cual pone de manifiesto una falta de comprensión del objeto de estudio y por ende en el pensamiento algebraico de los estudiantes. Estos hallazgos subrayan la necesidad de implementar estrategias didácticas que promuevan un aprendizaje significativo para el fortalecimiento de los tres usos de la variable según el modelo 3UV.

4.2 Caracterización del diseño

Teniendo en cuenta los primeros resultados de la intervención, y los parámetros que otorga el modelo 3uv para cada uso de la variable, se caracteriza un diseño didáctico

secuencial de acuerdo con la metodología de trabajo, con el fin de contribuir al fortalecimiento de la comprensión del objeto de estudio.

De tal manera, se elaboraron tres formularios de Google, cada uno diseñado específicamente para abordar un uso particular de la variable. Cada formulario incluye tres preguntas cuidadosamente estructuradas basadas en el modelo 3UV y repitiendo algunas de la prueba diagnóstica que en su momento se obtuvieron respuestas críticas. Por consiguiente, estas preguntas fueron resueltas de manera conjunta en clase con la participación de los estudiantes. Este enfoque permitió no solo despejar dudas, sino también fomentar la interacción y la discusión sobre conceptos clave. Asimismo, se aprovechó la dinámica para retroalimentar los conocimientos algebraicos previos de los estudiantes, reforzando su comprensión conceptual y fortaleciendo su habilidad para aplicar estos conceptos en diferentes contextos matemáticos.

Tabla 10

Estructuración del Diseño

Diseño de la variable	Objetivo	N.º de Clases, Sesiones (tiempo)	Parámetros abordados
Variable como Incógnita	Fortalecer la comprensión del concepto de variable de los estudiantes aplicando y reconociendo adecuadamente el uso de la variable como incógnita en diversos problemas algebraicos.	Clase 1. Sesión 1. Duración: 40 minutos.	L1, L2, L3, L4, L5.
Variable como Número General	Fortalecer la comprensión del concepto de variable de los estudiantes aplicando y reconociendo adecuadamente el uso de la variable como número general en diversos problemas algebraicos.	Clase 1. Sesión 2. Duración: 40 minutos.	G1, G2, G3, G4, G5.

Variable como Relación Funcional	Fortalecer la comprensión del concepto de variable de los estudiantes aplicando y reconociendo adecuadamente el uso de la variable como relación funcional en diversos problemas algebraicos.	Clase 2. Sesión 1. Duración: 40 minutos.	F1, F2, F3, F4, F5, F6.
----------------------------------	---	--	-------------------------

Nota. Los parámetros abordados corresponden a los criterios específicos de cada uso de variable.

4.3 Análisis de la aplicación del diseño

A continuación, se presenta el análisis local de la aplicación del diseño didáctico implementado, el cual se estructura de manera secuencial para reflejar el desarrollo progresivo de las actividades. Este análisis se enfoca en tres secuencias específicas que constituyen los pilares del diseño: variable como incógnita, variable como número general, y variable como relación funcional. Cada una de estas etapas se describe y analiza detalladamente, abordando tanto los objetivos planteados como algunos de los resultados obtenidos en el trabajo con los estudiantes. Este enfoque permite identificar no solo los avances en la comprensión del objeto de estudio, sino también hacer un seguimiento que evidencie los avances o las dificultades en comparación a las respuestas de la prueba diagnóstica. De esta manera, se busca ofrecer una visión integral que no solo evalúe el impacto del diseño, sino que también aporte recomendaciones para su perfeccionamiento y futuras aplicaciones en contextos educativos similares. El presente apartado está compuesto por factores importantes que dan ideas claras sobre el diseño de la variable, descripción de la actividad y análisis de la actividad.

4.3.1 Sobre el Diseño de la Variable Como Incógnita

El diseño de la actividad enfocada en la variable como incógnita se diseñó con el propósito de que los estudiantes desarrollen de manera significativa los parámetros establecidos por el modelo 3UV, facilitando así una comprensión más sólida y profunda del concepto central. Esta actividad fue estructurada para que los estudiantes identifiquen, representen y resuelvan problemas contextualizados, promoviendo el razonamiento algebraico a través de situaciones reales. Además, se buscó que los estudiantes no solo simbolizaran las cantidades desconocidas, sino que también comprendieran su relación dentro del contexto planteado, logrando conectar estas representaciones con el significado del objeto de estudio

4.3.2 Descripción de la actividad

Durante la actividad se desarrolló el diseño de uso de la variable como incógnita, se evidencio que, a raíz de la explicación y resolución de los problemas planteados en el diseño, los estudiantes demostraron una comprensión significativa del objeto de estudio, así como de la formulación de expresiones algebraicas y el manejo de incógnitas.

Después de la explicación y resolución conjunta del primer ejercicio, se observó que los estudiantes se sentían motivados por saber del siguiente problema, de tal manera que algunos se adelantaban al siguiente problema, ya los estudiantes empezaban a identificar variables, a comprender la situación, a formular ecuaciones, a realizar preguntas, a sustituir valores y por ende intentar llegar a la respuesta correcta, de tal forma que algunos estudiantes resolvían de manera correcta lo pedido por la pregunta, otros se acercaban a la respuesta y

un menor porcentaje no entendían, hasta que los estudiantes argumentaban, defendían y explican las respuestas correctas y eso hacía que la mayoría de estudiantes logran entender y corregir sus respuestas.

Esta experiencia permitió que los estudiantes hicieran un tratamiento de las situaciones concretas en representaciones algebraicas precisas, se evidencio un desarrollo claro de habilidades matemáticas en el pensamiento algebraico. Además, el énfasis en la contextualización del problema y la relación lógica entre las variables resultó ser una estrategia efectiva para fomentar el aprendizaje conceptual y fortalecer las competencias prácticas. La actividad alcanzó los objetivos pedagógicos propuestos, promoviendo un avance significativo en el desempeño y la confianza de los estudiantes al trabajar con el diseño de la variable como incógnita.

4.3.3 Análisis de la actividad

De esta forma, se presenta un análisis detallado del seguimiento a las respuestas de los estudiantes que evidenciaron errores y dificultades en la prueba diagnóstica. Este análisis permite identificar patrones de comprensión, dificultades persistentes y posibles avances en el aprendizaje. Para una revisión más detallada, las hojas de respuestas correspondientes se encuentran en la sección de anexos (ver Anexo D: Datos recolectados del diseño de la variable como Incógnita) y pueden consultarse a través del código QR incluido.

Tabla 11*Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Incógnita Actividad N° 1*

Actividad Tipo de pregunta	Problema de la actividad	Seguimiento a las respuestas de los estudiantes	Análisis a las respuestas de acuerdo con los parámetros del modelo 3uv
Act. 1 Pregunta abierta.	Situación: Estás diseñando una casa de campo con una sala de juegos, una cocina y tres habitaciones. El costo inicial de cada habitación es \$8,000,000. La sala de juegos cuesta el doble que una habitación. La cocina cuesta el triple del costo de una habitación. Para reducir el costo total de la casa de campo, decides aplicar un descuento del 25% al costo de cada habitación. Pregunta: ¿Con este ajuste, el costo total de construir la casa de campo se ajusta al presupuesto de \$50,000,000? Sugerencia: Construye una expresión matemática que	E1: 3 habitaciones que valen cada una 8mill $(8,000,000 \times 3) = 24\text{mill}$ queda en 18 millones con descuento de 25%. 1 sala de juegos que cuesta el doble de 8mill $(8,000,000 \times 2) = 16\text{mill.}$ 1 cocina que vale el triple de 8mill $(8,000,000 \times 3) 24\text{mill.}$ Expresión: $3[(8.000.000 \times 0.75)] + 2$ $[(8.000.000)] + 3$ $[(8.000.000)] =$ $18.000.000 + 16.000.000 + 24.000.000 = 58.000.000$ no alcanza el presupuesto.	El E1. Presenta una respuesta correcta. Se puede evidenciar que el estudiante primeramente logra identificar la situación problema (I1), determinado las cantidades desconocidas que aparecen en el enunciado y separando sus ideas para dar un procedimiento claro para formar su respuesta (I4). Seguidamente el estudiante simboliza las cantidades desconocidas (I5) y forma una ecuación con un enunciado verdadero que representa la situación problema (I3), y posteriormente resuelve de manera correcta, lo que le permite deducir y comprender que el presupuesto que se tiene desde un comienzo no alcanza para la construcción de la casa como se plantea en el enunciado. El E1. En la prueba diagnóstica de la sesión de preguntas destinadas al uso de la variable como incógnita presenta 4 respuestas incorrectas y 1 con un “No sé”. De

te permita
resolver esta
situación

tal forma se evidencia
una mejora significativa
en su comprensión del
objeto de estudio, dando
una respuesta solidad de
acuerdo con lo esperado
en la caracterización del
diseño.

Nota. Elaboración propia

Figura 14

Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Incógnita Actividad N° 2

Ana ha asistido a un taller de cocina cuyo costo total es de **\$600,000** pesos, que cubre tanto la tarifa del instructor como el costo de los ingredientes.

Se sabe que la tarifa del instructor es **4 veces** el costo de los ingredientes.

Pregunta: ¿Cuál de las siguientes expresiones matemáticas te permitirá calcular el costo de los ingredientes?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

En esta actividad, cuyo propósito fue contribuir al fortalecimiento de la comprensión del concepto de variable como incógnita, los estudiantes debían identificar la expresión

matemática correcta para calcular el costo de los ingredientes en un taller de cocina. El resultado muestra que el 100% de los estudiantes seleccionó correctamente la ecuación $5x = 600,000$ evidenciando un sólido avance de los parámetros de identificación del modelo 3UV, los estudiantes identifican x como la incógnita que representa la cantidad desconocida (I1), adicionalmente, los estudiantes lograron simbolizar el enunciado del problema a una expresión algebraica coherente (I5). Durante el desarrollo de la actividad, aunque no se incluyó un espacio explícito para resolver la ecuación, todos los estudiantes resolvieron correctamente $x = 120,000$ de manera implícita, lo que sugiere que los estudiantes determinan la cantidad desconocida que está en el problema (I4). Asimismo, la capacidad de interpretar la relación entre las partes del problema y organizar las cantidades involucradas evidencia el uso del parámetro estructural.

Es importante destacar que, durante la sesión, las intervenciones realizadas sirvieron para reforzar conocimientos algebraicos que contribuyeron a clarificar el procedimiento para todos los estudiantes. Este resultado sugiere que el diseño de la actividad, al contextualizar el problema en un escenario práctico y significativo, facilitó la comprensión y aplicación del concepto evaluado.

Tabla 12*Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Incógnita Actividad N° 3*

Actividad Tipo de pregunta	Problema de la actividad	Seguimiento a las respuestas de los estudiantes	Análisis a las respuestas de acuerdo con los parámetros del modelo 3uv
Act. 1 Pregunta abierta.	Imagina que eres un comprador y vas a una tienda de electrodomésticos y has notado que el precio de un televisor aumenta cada trimestre. Actualmente, el precio de un televisor es de 1,200,000 pesos, y cada trimestre el precio sube en 50,000 pesos. Pregunta: ¿Cuál crees que es una posible expresión matemática que permita representar el precio en cualquier determinado número de trimestres?	E6: Expresión matemática: $P(t) = 1.200.000 + 50.000t$ Prueba para el primer trimestre: $1.200.000 + 50.000 * 1 = 1.250.000$	El estudiante presenta una respuesta correcta. Se puede evidenciar que primeramente logra identificar (I1) la situación problema, el estudiante simboliza las cantidades desconocidas y plantea una expresión matemática $P(t) = 1,200,000 + 50,000 * t$ que le permite comprender que puede conocer el precio del televisor en cualquier determinado número de trimestres (I5). Seguidamente se observa que el estudiante sustituye el valor de variable t por 1 el cual indica el primer trimestre (I3). Así mismo, el estudiante determina el valor del tv en el primer trimestre al operar de manera correcta (I4). Se evidencia un avance positivo en el estudiante, ya que, en la prueba diagnóstica, el estudiante presenta errores al plantear ecuaciones de manera

correcta de acuerdo con la situación, esto debido al tener una baja interpretación y determinación de las cantidades desconocidas.

Nota. Elaboración propia

4.3.4 Sobre el Diseño de variable como número general

El diseño de la actividad enfocada en la variable como número general se llevó a cabo con el propósito de que los estudiantes desarrollen de manera significativa los parámetros establecidos por el modelo 3UV, Esta actividad fue diseñada para que los estudiantes identifiquen y reconozcan patrones y regularidades en diferentes contextos matemáticos, utilizando la variable como una herramienta para representar generalizaciones de propiedades y relaciones. Asimismo, se buscó que los estudiantes comprendieran la importancia de la variable en la abstracción de reglas generales y la vincularan con su capacidad para establecer conexiones funcionales entre diferentes elementos de un problema.

4.3.5 Descripción de la actividad

En el desarrollo de la actividad, después de resolver conjuntamente el primer problema, los estudiantes mostraron interés y curiosidad por los siguientes ejercicios, lo que incentivó la participación y motivación. Muchos de ellos lograron identificar patrones rápidamente y formular expresiones generales de manera adecuada, mientras otros realizaban preguntas y despejaban dudas de algunas. La discusión grupal desempeñó un

papel fundamental, ya que permitió que los estudiantes argumentaran, contrastaran y defendieran sus razonamientos, lo que llevó a una mayor comprensión.

Esta experiencia destacó la importancia de la contextualización en los problemas planteados, porque los estudiantes pudieron vincular los patrones identificados con contextos reales, lo que reforzó su capacidad para comprender las relaciones matemáticas. La actividad alcanzó los objetivos establecidos, de modo que fue notable como se promovió el desarrollo del pensamiento algebraico, y se fortaleció la confianza de los estudiantes para abordar problemas abstractos relacionados con la variable como número general.

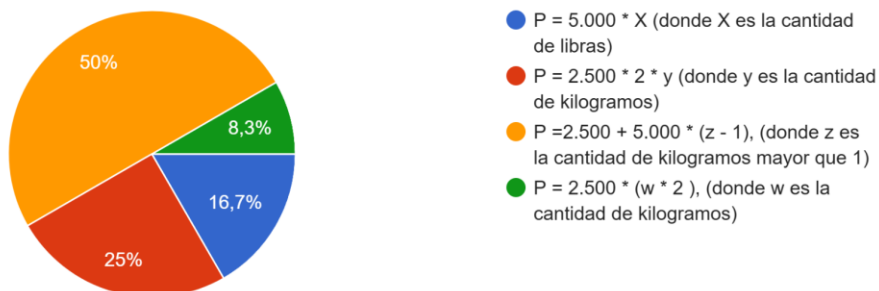
4.3.6 Análisis de la actividad

A continuación, se expone la tabla 14, que facilita el seguimiento de algunas respuestas de los estudiantes que manifestaron errores y dificultades en la prueba diagnóstica. El presente análisis tiene como objetivo identificar avances y mejoras logrados durante el desarrollo de las actividades. Para mayor visualización, las hojas de respuestas correspondientes a esta actividad se encuentran disponibles en la sección de anexos (ver Anexo D: Datos recolectados del diseño de la variable como Número General) y pueden consultarse a través del código QR incluido.

Figura 15*Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Número General Actividad N° 1*

En la tienda de Doña Josefa, se vende azúcar de alta calidad, y el precio varía según la cantidad que compres. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones NO funcionaría para saber el precio?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

En esta actividad, se planteó el problema sobre la venta de azúcar en la tienda de Doña Josefa, donde los estudiantes debían analizar cuatro ecuaciones propuestas y determinar cuál no funcionaría para calcular el precio en función de la cantidad.

Los resultados de esta actividad muestran que solo el 50% seleccionó la respuesta correcta (opción naranja). Este resultado evidencia que no todos los estudiantes pudieron identificar correctamente la relación entre las cantidades establecidas con el precio del azúcar según su peso, ni comprender cómo se estructura la ecuación para calcular el precio. Por otra parte, se observa que hay cierta mejoría con respecto a la prueba diagnóstica, donde

los estudiantes intentaban analizar la pregunta, en base a su capacidad, y a la explicación previa, llegando a una respuesta del problema.

Es importante subrayar que, en el transcurso de la sesión, las acciones ejecutadas ayudaron fortalecer la comprensión del objeto de estudio en todos los alumnos. Este hallazgo indica que el diseño de la actividad, al situar el problema en un contexto práctico y relevante, favoreció la interpretación y uso del concepto.

Tabla 13

Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Número General Actividad N° 2

Actividad Tipo de pregunta	Problema de la actividad	Seguimiento a las respuestas de los estudiantes	Análisis a las respuestas de acuerdo con los parámetros del modelo 3uv
Act. 2 Pregunta abierta.	11 jugadores de un equipo de baloncesto chocan sus manos unos con otros antes de comenzar el partido. ¿Cuántas palmadas dan en total? Pistas: Busca una expresión que determine el número de palmadas según el número de jugadores que muestra la tabla.	E8: Cada jugador puede dar una palmada con otro jugador, ya sea con una sola mano o las dos a la vez, entonces: $X =$ a número de palmadas y $A =$ a número de jugadores: $X = A - 1$ Ejemplo: $X = 2 - 1$ $X = 1$ Tabla: $2 = 1$, $3 = 2$ $4 = 3$, $5 = 4$, $6 = 5$, $7 = 6$, $8 = 7$, $9 = 8$, $10 = 9$, $11 = 10$ Esto si cada jugador puede dar solo una palmada. En otro caso, si cada jugador pudiera darle una palmada a cada otro jugador, sin importar el modo o las veces que se haga, será infinito.	La respuesta del estudiante muestra un enfoque inicial para comprender cómo una variable puede representar un número general en un contexto específico. Esta respuesta evidencia el cumplimiento de los parámetros establecidos en el modelo 3uv. por ejemplo, (G1) el estudiante reconoce patrones y reglas generales en secuencias numéricas. (G2), el estudiante manipula un símbolo para simplificar expresiones algebraicas. En este caso, el estudiante

plantea dos situaciones sobre las palmadas entre jugadores, utilizando las variables (X) para el número de palmadas y (A) para el número de jugadores. En la primera situación, establece que cada jugador puede dar una única palmada con otro jugador, y modela la relación mediante la ecuación $X=A-1$. Este razonamiento se apoya en un ejemplo y en una tabla que muestra cómo, al incrementar el número de jugadores (A), el número de palmadas (X) crece linealmente. Por otro lado, el estudiante explora una segunda situación donde cada jugador puede dar una palmada a cada otro jugador sin restricciones, concluyendo que en este caso el número de palmadas sería infinito, lo que refleja un pensamiento más abstracto sobre las posibilidades ilimitadas de interacción. Este análisis evidencia una progresión en la comprensión del uso

de variables para generalizar y modelar relaciones en diferentes contextos.

Nota. Elaboración propia

Tabla 14

Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Número General Actividad N° 3

Actividad Tipo de pregunta	Problema de la actividad	Seguimiento a las respuestas de los estudiantes	Análisis a las respuestas de acuerdo con los parámetros del modelo 3uv
Act. 3 Pregunta abierta.	Dos librerías compiten ofreciendo promociones en la compra de cuadernos para el regreso a clases. La Librería A ofrece la promoción: “Compra cuatro cuadernos y obtén el quinto a mitad de precio”. La Librería B tiene la oferta: “Compra dos cuadernos y obtén el tercero a mitad de precio”. ¿En cuál de las dos librerías, es más económico realizar la compra? Justifica tu respuesta y explica tu razonamiento paso a paso. Considera que ambas librerías tienen el mismo	E12: Valor de cuaderno: $A=10000$ $B=10000$ Juanes fue a las dos librerías y compro 4 cuadernos en cada una de ellas y comparó los precios, sacando el valor de cada libro independientemente: $A: 10000 \cdot 4 + 10000/2 = 45000$ valen los 5 cuadernos, $45000/5 = 9000$ cada cuaderno vale nueve mil. B: $10000 \cdot 4 = 40000 + 5000 \cdot 2 = 50000/6 = 8333.33$. Según esto, Juanes compro cuadernos más baratos en la librería B se llevó 6 por 8333.33.	La respuesta del estudiante muestra un manejo básico de las operaciones aritméticas y un intento por conceptualizar la variable como número general. Sin embargo, podría fortalecerse mediante una representación algebraica clara de las cantidades involucradas, para verificar la validez de los cálculos y las conclusiones. Teniendo en cuenta los parámetros, se logra evidenciar, que el estudiante intenta interpretar la variable como un ente de que puede

precio base por cada cuaderno.	tomar cualquier valor (G2), e intenta desarrollar la idea de método general (G4).
--------------------------------	---

Nota. Elaboración propia.

4.3.7 Diseño de variable como relación funcional

El diseño de la actividad centrada en la variable como relación funcional tuvo como propósito fortalecer en los estudiantes la comprensión del concepto, alineándose con los parámetros del modelo 3UV, a través de esta actividad, se buscó que los estudiantes pudieran interpretar la variable no solo como un símbolo que representa un número, sino también como un elemento clave que expresa y describe la relación entre dos conjuntos de valores, facilitando así un entendimiento más profundo y significativo del objeto de estudio.

4.3.8 Descripción de la actividad

En esta actividad, cuyo propósito fue fortalecer la comprensión de la variable como relación funcional, los estudiantes trabajaron en analizar y representar la correspondencia entre cantidades a través de diferentes representaciones, logrando avances significativos evidenciados en los parámetros del modelo 3UV. En primer lugar, reconocieron la correspondencia entre cantidades en sus diversas formas de representación, como tablas, gráficas y expresiones analíticas, a partir de esta comprensión, determinaron los valores de la variable dependiente cuando se conocían los de la variable independiente, también encontrando los valores de la variable independiente a partir de los de la variable dependiente. Además, los estudiantes lograron identificar la variación conjunta de las

variables en diferentes formatos, lo que les permitió interpretar y relacionar patrones en sus representaciones. Como parte del análisis, también determinaron los intervalos de variación, estableciendo cómo los cambios en una variable afectan los de la otra. Finalmente, simbolizaron las relaciones funcionales de manera tabular, gráfica y analítica, estructurando representaciones precisas a partir del análisis de los datos proporcionados.

4.3.9 *Análisis de la actividad*

A partir de la actividad de implementación, se realizó un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes, comparando los resultados con los obtenidos en la prueba diagnóstica inicial. Este análisis permitió identificar los errores y dificultades persistentes, así como las fortalezas y avances logrados durante el proceso. Para mayor detalle, las hojas de respuestas correspondientes a esta actividad se encuentran disponibles en la sección de anexos (ver Anexo D: Datos recolectados del diseño de la Variable como Relación Funcional) y pueden consultarse a través del código QR incluido.

Tabla 15

Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Relación Funcional Actividad N°

1

Actividad Tipo de pregunta	Problema de la actividad	Seguimiento a las respuestas de los estudiantes	Análisis a las respuestas de acuerdo con los parámetros del modelo 3uv
Act. 1 Pregunta abierta.	Yonathan trabaja en una heladería muy popular en tu ciudad y ha recopilado datos sobre las ventas de helados, expresadas en litros, y la temperatura diaria, medida en	E10: Por cada cinco grados de temperatura las ventas de helado aumentan 8 litros. La temperatura anterior era de 40 y los litros vendidos	En la respuesta se puede observar que el estudiante tiene un buen reconocimiento de los datos, donde se relaciona el primer parámetro como el reconocimiento de la

grados Celsius, durante un periodo de 6 días. ¿El día 6 tuvo una temperatura de 45 grados Celsius, cuántos helados crees que vendió Yonathan en ese día según el gráfico? Justifica tu respuesta.	eran 64. Entonces: $X = \text{Número de litros vendidos}$ $X = 64 + 8$, $X = 72$	correspondencia en diferentes representaciones (F1), donde solo le faltó ser más claro con la cuestión de saber cuál era la variable dependiente y la independiente, a pesar de eso, el estudiante desarrollado su comprensión en relación con los parámetros que corresponden a la variable como relación funcional, ya que relaciona distintos aspectos que asume la variable en el contexto del álgebra. También podemos analizar que el estudiante aplica parcialmente los parámetros (F4) y (F6), ya que el estudiante reconoce implícitamente que existe una variación conjunta entre las variables y ha intentado determinar el valor de la variable dependiente, a partir de un valor conocido.
--	---	--

Nota. Elaboración propia

Tabla 16*Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Relación Funcional Actividad N°*

2

Actividad Tipo de pregunta	Problema de la actividad	Seguimiento a las respuestas de los estudiantes	Análisis a las respuestas de acuerdo con los parámetros del modelo 3uv
Act. 2 Pregunta abierta.	Según el gráfico presentado, la altura de una planta depende del tiempo que ha pasado desde que comenzó a crecer. Sin embargo, el crecimiento no es constante, ya que al principio la planta crece más rápido y luego su crecimiento se desacelera. La relación entre la altura (h) de la planta en centímetros y el tiempo (t) en días puede describirse con la fórmula: $h(t) = 10 * \ln(t+1)$ Responde: ¿Cómo se interpreta el término $\ln(t+1)$ en la fórmula? ¿Puedes describir cómo será la altura de la planta después de 10 días y después de 100 días? ¿Cómo justificarías la diferencia en el crecimiento? Si quisiéramos que la	E14: En caso de necesitar saber la altura en el día 10 se debe reemplazar la incógnita t en la operación y operar en la calculadora. Ejemplo: $10 * \ln(10+1) = 24\text{cm}$ $10 * \ln(100+1) = 46\text{cm}$ La diferencia es que cada día que pasaba desde el momento 0 al momento 10 creció 0.24 centímetros por día y desde el momento 24 al momento 100 creció 0.6 cm por día.	El estudiante identifica correctamente la relación entre las variables altura (h) y tiempo (t). Además, describe cómo cambia el crecimiento de la planta en función del tiempo y utiliza tanto la expresión verbal como la fórmula matemática lo que significa que cumple el parámetro (F1). Sin embargo, hay errores conceptuales en la interpretación de la tasa de crecimiento, ya que una función logarítmica no presenta una variación lineal. El estudiante aplica la fórmula dada para calcular valores específicos de la altura después de 10 y 100 días, usando la función logarítmica natural

planta creciera de
manera constante,
¿cómo debería
cambiar la fórmula?

ln (t+1). Aunque
realiza un cálculo
aproximado con la
calculadora, el
proceso y los
resultados son
correctos. Podemos
decir que el
estudiante aplica los
parámetros (F1, F2
y F6) de manera
correcta, mientras
que (F4 y F5) se
cumplen
parcialmente. El
parámetro (F3) no
se aborda en la
respuesta.

Nota. Elaboración propia

Tabla 17

Análisis de la Secuencia Didáctica de la Variable como Relación Funcional Actividad N°

3

Actividad Tipo de pregunta	Problema de la actividad	Seguimiento a las respuestas de los estudiantes	Análisis a las respuestas de acuerdo con los parámetros del modelo 3uv
Act. 3 Pregunta abierta.	Según la gráfica, ¿En qué mes se observó el intervalo de crecimiento más grande en el número de visitantes? Justifica tu respuesta	E15: De mayo a junio ya que es el más grande que se ve a simple vista por lo tanto hay más diferencia entre los dos datos.	El estudiante ha identificado correctamente que el intervalo de mayor crecimiento se encuentra entre los meses de mayo y junio. Al observar la gráfica, es evidente que la línea que representa el número de visitantes experimenta un ascenso más pronunciado entre estos dos puntos en comparación con otros intervalos. En general, la respuesta del estudiante es correcta y demuestra una buena comprensión de cómo interpretar una gráfica.

Nota. Elaboración propia

El análisis realizado a las actividades diseñadas para abordar los tres usos de la variable según el modelo 3UV permitió identificar que los estudiantes avanzaron de manera significativa en su comprensión de este concepto. En el caso de la variable como incógnita,

los estudiantes demostraron una sólida capacidad para identificar y simbolizar la incógnita en ecuaciones, lo que les permitió resolver problemas algebraicos de manera coherente. En cuanto al uso de la variable como número general, se evidenció un mayor dominio de los estudiantes para manejar expresiones algebraicas y generalizar propiedades y relaciones matemáticas en diferentes contextos. Finalmente, las actividades centradas en la variable como relación funcional favorecieron el entendimiento de cómo las variables se interrelacionan, permitiendo a los estudiantes representar y analizar estas relaciones en forma tabular, gráfica y analítica. Aunque se presentaron algunas dificultades, especialmente en la interpretación y en la representación gráfica en algunos de los estudiantes, se lograron avances considerables en cada uno de los usos de la variable. En conjunto, estas actividades contribuyeron al fortalecimiento de las competencias matemáticas y al desarrollo de una comprensión más profunda y aplicada de la variable en sus diversos contextos.

4.4 Prueba Final

La prueba final fue diseñada como una herramienta de evaluación para medir el desarrollo y la comprensión de los estudiantes en torno a los tres aspectos fundamentales abordados durante las secuencias didácticas del diseño: variable como incógnita, número general y relación funcional. Cada uno de estos conceptos se evaluó mediante cuatro preguntas de selección múltiple con única respuesta, presentadas a través de un formulario de Google Forms.

En esta primera parte, se analizan los resultados obtenidos en las preguntas correspondientes. Las respuestas de los estudiantes se registraron automáticamente en gráficos circulares, lo que permitió una interpretación clara de la frecuencia y porcentajes de respuestas correctas e incorrectas para cada pregunta. El análisis preliminar revela que la mayoría de los estudiantes logró seleccionar la respuesta correcta en la mayoría de las preguntas, lo que evidencia un avance significativo en su capacidad para identificar y representar matemáticamente situaciones problema que involucran los diversos usos de las variables.

4.4.1 Estructuración de la prueba final

A continuación, se presentan los aspectos generales de la prueba final.

Tabla 18

Aspectos Generales de la Prueba Final

Grado de escolaridad	Grado noveno
Pensamiento matemático	Algebraico
Tipo de pregunta	Selección múltiple
Objetivos	• Identificar el nivel de consolidación de los aprendizajes en cada uno de los usos de la variable: incógnita, número general y relación funcional. • Evaluar el éxito del diseño didáctico implementado en función de las mejoras observadas en los estudiantes. • Reflexionar sobre la efectividad de la metodología empleada y proponer ajustes futuros.
Hoja de trabajo	Formulario de Google Forms.
Duración	60 minutos
Prueba final	https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSc3-XpPj_6QraaVscYSl8-BZjZo1rBDCmS-elGLHYZyYDUy-g/viewform?usp=pp_url

Nota. Elaboración propia

4.4.2 Análisis de los resultados de la prueba final

La evaluación consistió en 12 preguntas de selección múltiple con única respuesta, organizadas de cuatro preguntas por cada uso de la variable. El correspondiente análisis se centra en presentar una muestra de dos preguntas representativas de cada categoría, las preguntas restantes se encuentran detalladas en los anexos, junto con los gráficos y resultados completos para su consulta.

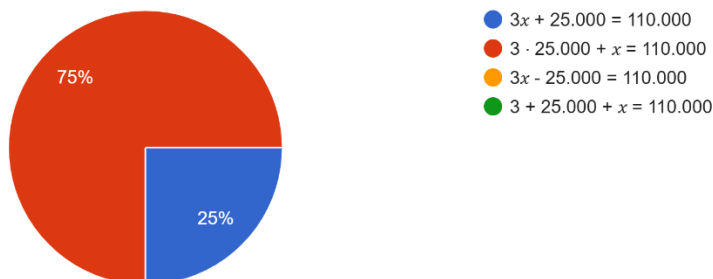
A continuación, se presentan las preguntas seleccionadas, acompañadas de sus respectivas respuestas y gráficos generados por Google Forms, los cuales permiten una mejor comprensión y visualización de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba final.

Figura 16

Gráfico Circular de la Pregunta N°1 de la Variable como Incógnita

En una tienda, Pedro compró 3 camisetas y un pantalón. Cada camiseta cuesta \$25.000, y el costo total fue de \$110.000. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa correctamente el costo del pantalón?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

La pregunta plantea un problema algebraico en el que se debe determinar la expresión que representa correctamente el costo de un pantalón, dado que Pedro compró 3 camisetas a \$25.000 cada una y el costo total fue de \$110.000.

Respecto a los resultados, la opción correcta es ($3x + x = 110.000$) la cual fue elegida por el 75% de los estudiantes. Esto indica que la mayoría de los estudiantes identificó que el costo del pantalón era un dato desconocido que podía determinarse, que interpretaron adecuadamente la variable x como el valor del pantalón y $3x$ como el costo de las camisetas. Así mismo estos estudiantes demostraron que están en capacidad de reconocer y plantear una ecuación determinada.

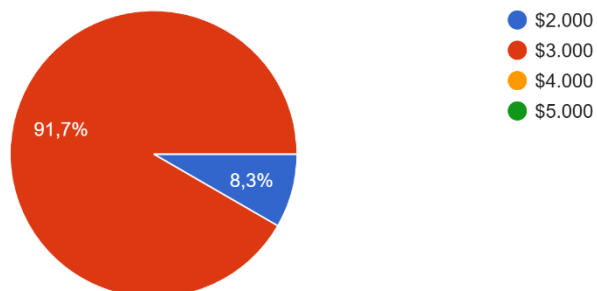
Por otro lado, un 25%. Seleccionó la opción incorrecta ($3x - 25.000 = 110.000$) lo cual muestra que aún hay un grupo que aun presenta dificultades para relacionar e interpretar de forma clara los datos del problema con la incógnita planteada.

Figura 17

Gráfico Circular de la Pregunta N°2 de la Variable como Incógnita

En un supermercado, dos manzanas y tres peras cuestan \$15.000 en total. Si una manzana cuesta \$3.000, ¿Cuánto cuesta una pera?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

La pregunta plantea un problema en el que se debe determinar el costo de una pera, dado que dos manzanas y tres peras tienen un costo total de \$15.000, y el precio de cada manzana es de \$3.000.

Respecto a los resultados, la opción correcta es \$3.000, la cual fue elegida por el 91,7% de los estudiantes. Esto evidencia que la gran mayoría de los estudiantes logró identificar que el costo de la pera era un dato desconocido que podía determinarse. Además, estos estudiantes interpretaron la variable x como el costo de una pera y demostraron su capacidad para realizar las operaciones algebraicas necesarias para encontrar la incógnita planteada.

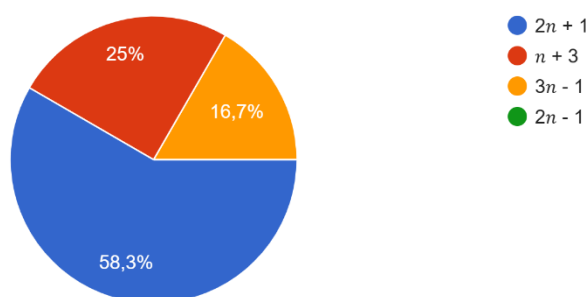
Así mismo, una cantidad muy pequeña que representa un 8,3% de los estudiantes seleccionó la opción incorrecta \$2.000, lo que evidencia que este grupo todavía presenta dificultades al interpretar la relación entre los datos del problema y la incógnita.

Figura 18

Gráfico Circular de la Pregunta N°1 de la Variable como Número General

Considere una serie de triángulos formada por palitos de madera. Cada triángulo tiene n lados, donde n representa el número de triángulos en la serie. ¿Cuál es la cantidad total de palitos utilizados en función de n ?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

La pregunta plantea un problema en el que se debe deducir una regla general para representar la cantidad total de palitos utilizados en función del número de triángulos (n) en una serie.

Respecto a los resultados, la opción correcta es $2n + 1$, seleccionada por el 58,3% de los estudiantes. Lo cual indica que más de la mitad de los estudiantes identificó el patrón en la secuencia de números (3, 5, 7,...) y dedujo correctamente que la diferencia entre términos consecutivos es 2, con un valor inicial de 3. Los estudiantes demostraron que interpretaron

la variable n como una entidad general que puede asumir cualquier valor y simbolizaron adecuadamente la regla general para representar la cantidad total de palitos.

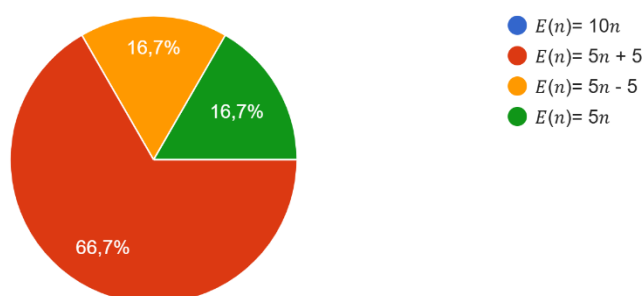
Por otro lado, un 25% de los estudiantes seleccionó la opción incorrecta $n + 3$, lo que sugiere que este grupo reconoció la relación entre los números, pero simplificó erróneamente el patrón al asumir un crecimiento lineal diferente, probablemente sumando el primer término de la secuencia a la variable n sin considerar el patrón completo. Un 16,7% eligió la opción $3n - 1$, lo cual muestra que estos estudiantes pueden haber confundido el factor multiplicativo al relacionar los términos con la variable, interpretando incorrectamente el patrón como un incremento más rápido del número de palitos por triángulo.

Figura 19

Gráfico Circular de la Pregunta N°4 de la Variable como Número General

Imagina que estás diseñando un nuevo videojuego. Para que el juego sea más divertido, quieres que los enemigos aparezcan en diferentes cantidad...enemigos que aparecerán en cualquier nivel " n "?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

La pregunta presenta un problema relacionado con patrones en secuencias numéricas, donde se espera deducir una expresión matemática general que represente la cantidad de enemigos que aparecerán según el nivel del jugador en un videojuego.

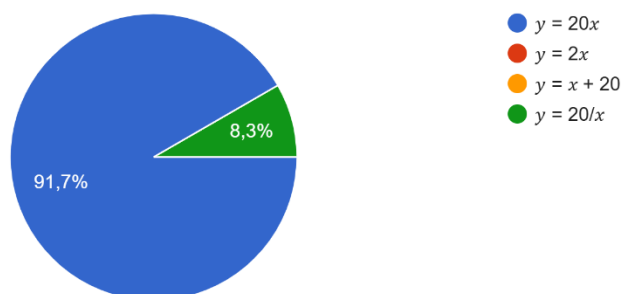
La expresión correcta es $E(n) = 5n + 5$, seleccionada por el 66,7% de los estudiantes. Esto indica que la mayoría logró identificar el patrón numérico en los datos: el número de enemigos aumenta en 5 con cada nivel y el primer nivel comienza con 10 enemigos. Además, este grupo de estudiantes demostró una adecuada interpretación de la variable simbólica como una entidad general que permite calcular la cantidad de enemigos para cualquier nivel. Este resultado evidencia que los estudiantes pudieron deducir una regla general que describe el patrón en la secuencia presentada.

Un 16,7% de los estudiantes seleccionó la opción $E(n) = 5n - 5$, lo que indica que identificaron el crecimiento constante de 5 enemigos por nivel, pero no interpretaron correctamente el punto de partida del patrón (10 enemigos en el nivel 1). Otro 16,7% eligió la opción $E(n) = 5n$, mostrando que reconocieron el incremento constante, pero omitieron el término independiente (+5), lo cual refleja una comprensión parcial del patrón y deja en claro que existen dificultades para ajustar la fórmula general al contexto del problema.

Figura 20*Gráfico Circular de la Pregunta N°1 de la Variable como Relación Funcional*

La siguiente gráfica muestra la relación entre los litros de gasolina (x) que un carro consume y la distancia recorrida (y) en kilómetros. Según la gr...¿Cuál es la expresión matemática de este problema?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

La pregunta exhibe una relación funcional representada gráficamente entre la cantidad de gasolina consumida (variable independiente, x) y la distancia recorrida (variable dependiente, y) de un auto. La expresión correcta es $y = 20x$, la cual fue seleccionada por el 91,7% de los estudiantes. Esto demuestra que la mayoría logró reconocer la relación lineal directa entre las variables y entender que, por cada litro de gasolina consumido, el carro recorre 20 kilómetros. Esto implica que los estudiantes aplicaron correctamente parámetros como reconocer la correspondencia entre las cantidades en representación gráfica y determinar el valor de la variable dependiente en función de la independiente, así mismo reconocieron la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en

cualquiera de sus formas de representación, es decir, comprendieron la gráfica y la leyeron correctamente.

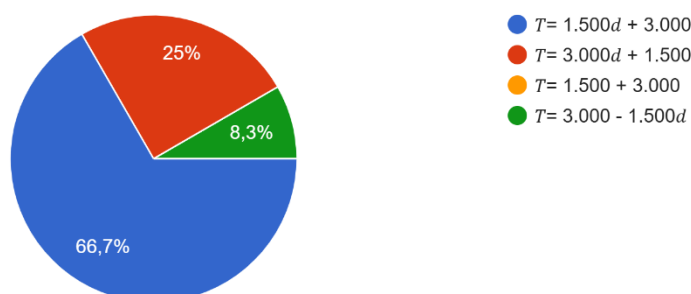
Por otro lado, el 8,3% seleccionó la opción incorrecta $y = 20/x$, lo que muestra una confusión en la interpretación de la gráfica. Este error refleja que aún siguen existiendo dificultades con reconocer la variación conjunta de las variables en una representación gráfica, ya que no identificaron que la gráfica muestra una proporcionalidad directa en lugar de inversa.

Figura 21

Gráfico Circular de la Pregunta N°5 de la Variable como Relación Funcional

Un taxi cobra \$3.000 como tarifa base y \$1.500 por cada kilómetro recorrido. Si representamos la tarifa total (T) en función de la distancia recorrida (d), ¿Cuál es la expresión matemática correcta?

12 respuestas



Nota. Gráfico generado por Google Formularios. Elaboración propia basada en datos recopilados.

La pregunta plantea una situación funcional donde se relaciona la tarifa total de un taxi con la distancia recorrida, teniendo en cuenta que existe una tarifa base fija y un costo proporcional por kilómetro recorrido.

Con base a los resultados, el 66,7% de los estudiantes seleccionó correctamente la opción $T = 1.500d + 3.000$, lo cual indica que la mayoría identificó adecuadamente la relación funcional entre las variables y comprendió que el término constante (\$3.000) representa la tarifa base, mientras que el término $1.500d$ corresponde al costo variable dependiente de la distancia. Este grupo demostró un mejoramiento en las competencias respecto a reconocer correspondencia entre cantidades, determinar la variable dependiente a partir de la independiente y simbolizar relaciones funcionales de forma analítica.

Por otro lado, el 25% de los estudiantes eligió la opción incorrecta $T = 3.000d + 1.500$, lo que sugiere confusión entre el término constante y el término dependiente de la variable. Este error indica que persisten dificultades en reconocer la variación conjunta de las variables, ya que confundieron el costo proporcional con la tarifa base.

Finalmente, el 8,3% seleccionó $T = 3.000 - 1.500d$, una expresión que no representa la relación funcional del problema, mostrando una interpretación incorrecta de la relación entre las variables y dificultades para establecer que la tarifa aumenta con la distancia.

En conclusión, los resultados reflejan un avance significativo en la comprensión de los tres usos de la variable por parte de los estudiantes. En la prueba diagnóstica inicial, se observó que solo el 17.8% de las respuestas fueron correctas (48 de 270), mientras que el 35.9% fueron incorrectas (97 de 270) y el 38.5% correspondieron a respuestas de "No sé" (104 de 270). Además, el 7.8% de las respuestas estuvieron incompletas (21 de 270), lo que evidenció un alto nivel de incertidumbre y dificultad, especialmente en el uso de la variable como relación funcional. Sin embargo, después de la implementación del modelo 3UV, se observó una mejora notable: el porcentaje de respuestas correctas aumentó

significativamente, mientras que las respuestas incorrectas y las de "No sé" disminuyeron. Este progreso es evidente en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas que involucran los tres usos de la variable, demostrando un manejo más claro y preciso de los conceptos.

Este avance reafirma la efectividad del diseño y la implementación de la investigación, demostrando que el enfoque pedagógico utilizado ha tenido un impacto positivo. Sin embargo, aún hay aspectos que requieren reforzarse para consolidar una comprensión más sólida en ciertos casos. Los resultados obtenidos son alentadores y notables, así mismo muestran que se ha logrado un progreso real en la comprensión y aplicación del concepto de variable. En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de esta investigación.

5 Conclusiones y recomendaciones

En esta sección se presentan las conclusiones y recomendaciones de la investigación, resaltando los avances y desafíos encontrados en el diseño de actividades orientadas a mejorar la comprensión de los tres usos de la variable: como incógnita, como número general y como relación funcional. Las conclusiones abordan tanto los objetivos específicos del estudio como la pregunta de investigación planteada, considerando reflexiones finales sobre la identificación de conocimientos previos, dificultades conceptuales, y el impacto del diseño en el aprendizaje. Asimismo, se analizan los resultados obtenidos y se destacan aspectos clave para fortalecer la enseñanza de la variable en el ámbito educativo. A continuación, se detallan los hallazgos más relevantes y las recomendaciones derivadas de este proceso

5.1 Objetivo específico 1

Diseñar y aplicar una prueba diagnóstica para identificar saberes previos, errores y dificultades en relación con los parámetros asociados a los usos de la variable.

La aplicación de la prueba diagnóstica permitió realizar un análisis inicial sobre los saberes previos de los estudiantes respecto a los tres usos de la variable: como incógnita, como número general y como relación funcional. Este instrumento fue fundamental para evidenciar los principales errores y dificultades, así como el nivel de interpretación y comprensión de los conceptos que los estudiantes manejaban al inicio del estudio.

En los tres usos de la variable, se detectaron dificultades y errores recurrentes que indicaron una falta de comprensión sólida en diversos aspectos: en el caso de la variable como incógnita, los estudiantes presentaron dificultades para interpretar, plantear y resolver

ecuaciones, así como para sustituir valores para validar soluciones (I3 e I4). También se observó en algunos casos confusión al establecer los pasos necesarios para despejar una incógnita en problemas más complejos.

En cuanto a la variable como número general, los errores más comunes incluyeron la incapacidad para identificar patrones generales o expresar relaciones algebraicas que representaran dichos patrones (G1 y G5). Los estudiantes mostraron tendencia a enfocarse en valores numéricos específicos, sin reconocer la naturaleza de las fórmulas generales (G2, G3). También se evidenciaron errores en la Manipulación de la variable simbólica para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas (G4).

Finalmente, en el uso de la variable como relación funcional, las principales dificultades se centraron en la interpretación de gráficos y tablas como representaciones de relaciones entre variables (F1), así como en la determinación de valores de una variable dependiente o independiente (F2 y F3). También fue evidente la confusión al simbolizar relaciones funcionales de forma analítica a partir de datos presentados de manera tabular o gráfica (F6). Los hallazgos en los resultados en esta sesión como relación funcional, los resultados fueron más bajos, con respuestas incorrectas o indicaciones y con mayormente desconocimiento "no sé".

Estos hallazgos de la prueba diagnóstica constituyeron una guía valiosa para la caracterización del diseño, ya que permitieron identificar las áreas de mayor debilidad y ajustar las actividades diseñadas para atender las necesidades específicas de los estudiantes.

Esto sentó las bases para un diseño didáctico enfocado a una comprensión más amplia, maximizando las oportunidades de aprendizaje en los tres usos de la variable.

5.2 Objetivo específico 2

Estructurar una secuencia didáctica basada en el modelo 3UV teniendo en cuenta el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica.

El diseño de la secuencia didáctica se fundamentó en los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica, permitiendo estructurar actividades orientadas a fortalecer la comprensión en los tres usos de la variable. El modelo 3UV (variable como incógnita, como número general y como relación funcional) sirvió como guía para la elaboración de una secuencia didáctica que contribuyó el aprendizaje progresivo y significativo de los estudiantes.

Para el uso de la variable como incógnita, se diseñaron actividades enfocadas en el reconocimiento e interpretación de la incógnita en problemas y situaciones contextuales, así como en la sustitución y validación de soluciones (I1, I3). Estas actividades incluyeron ejercicios de resolución de ecuaciones y problemas en los que los estudiantes debían plantear, interpretar y simbolizar ecuaciones a partir de situaciones cotidianas (I2, I4, I5).

En el caso de la variable como número general, las actividades buscaron enfatizar el reconocimiento de patrones y la generalización de relaciones matemáticas (G1, G3). Se propusieron ejercicios en los que los estudiantes Interpretaran la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que asume cualquier valor. (G2). Manipularan y simbolizaran la variable para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas. (G4 y G5).

Para la variable como relación funcional, se diseñaron actividades que integraron tablas, gráficos y expresiones analíticas para explorar la variación conjunta entre variables (F1, F4). Estas actividades incluyeron la interpretación de gráficas contextuales, el análisis de datos tabulares y la simbolización de relaciones funcionales (F2, F3 y F5), permitiendo a los estudiantes establecer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas.

Finalmente, la secuencia didáctica fue estructurada de manera que cada actividad estuviera interrelacionada, favoreciendo una transición gradual entre los diferentes usos de la variable. Este enfoque promovió un aprendizaje integral de los tres usos de la variable. De esta manera, el diseño no solo respondió a las necesidades de los estudiantes, sino que también proporcionó una base sólida para el desarrollo del razonamiento matemático.

5.3 Objetivo específico 3

Estudiar el vínculo entre el concepto de variable y las capacidades básicas que plantea el modelo 3UV.

Este objetivo permitió analizar cómo las capacidades básicas del modelo 3UV se conectan con el desarrollo del concepto de variable en los estudiantes. Dichas capacidades o parámetros, asociados a los tres usos de la variable representan un marco conceptual esencial para fortalecer la comprensión.

En relación con la variable como incógnita, se identificó que las capacidades de reconocer algo desconocido y determinar valores que hacen verdadera una ecuación están directamente vinculadas con la construcción de habilidades para plantear y resolver

problemas. Esto evidencia que el aprendizaje de la variable en este uso no se limita a procesos mecánicos, sino que fomenta la interpretación de situaciones contextuales y la validación de resultados.

En el uso de la variable como número general, las capacidades de identificar patrones y generalizar relaciones resaltaron como herramientas clave para comprender la estructura subyacente del objeto de estudio. El vínculo subraya la importancia de promover actividades que permitan a los estudiantes abstraer y representar regularidades, fortaleciendo así su razonamiento lógico y algebraico.

Finalmente, en el uso de la variable como relación funcional dentro de las capacidades de interpretar y simbolizar relaciones entre variables fueron fundamentales para establecer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas.

El análisis de estos vínculos permitió reflexionar sobre la manera en que el concepto de variable se convierte en un eje articulador entre los diferentes usos y capacidades planteados en el modelo 3UV. Asimismo, los hallazgos destacan la relevancia de integrar estas capacidades en actividades didácticas, dado que su desarrollo favorece una comprensión más amplia y profunda del concepto de variable y su aplicabilidad en diversos contextos matemáticos. En este sentido, se evidencia que el modelo 3UV organiza de forma coherente los usos de la variable, y que también brinda una base sólida para el diseño de propuestas pedagógicas que potencien el aprendizaje integral del objeto de estudio.

5.4 Recomendaciones

Para futuras investigaciones, se sugiere profundizar en el desarrollo de estrategias que ayuden a superar las dificultades observadas en los usos de las variables. Específicamente, recomendamos trabajar en el planteamiento de problemas que motiven a los estudiantes a interpretar y validar soluciones, ya que esta habilidad constituye una base esencial para el razonamiento algebraico.

Asimismo, proponemos diseñar herramientas de evaluación más específicas que permitan identificar con mayor detalle los errores y obstáculos de los estudiantes en los tres usos de la variable, y explorar en un ambiente dinámico.

Del mismo modo, los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, la implementación y la prueba final evidencian que el uso de la variable como Relación Funcional representa el mayor desafío para los estudiantes en comparación con los otros dos usos. Por ello, se recomienda que futuras investigaciones profundicen en la identificación de las posibles causas de esta dificultad.

Adicionalmente, sería valioso diseñar e implementar estrategias didácticas apoyadas en el uso de tecnologías educativas, que permitan a los estudiantes experimentar de forma dinámica y visual la relación funcional entre variables.

Finalmente, destacamos la importancia de integrar el modelo 3UV en la formación docente, ya que este enfoque ofrece un marco claro y coherente para trabajar el concepto de variable en diferentes niveles educativos. Una capacitación adecuada en este modelo puede contribuir significativamente a mejorar la enseñanza de la matemática y, por ende, los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

6 Referencias

A continuación, se presentan las referencias que fundamentan el presente proyecto de grado. En estas fuentes se encuentran documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, artículos de investigación, libros, trabajos de pregrado y posgrado a nivel nacional e internacional en didáctica de las matemáticas. Todo ello ha sido seleccionado por su relevancia y pertinencia para el análisis y desarrollo del objeto de estudio.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015).

A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.

Bonelo, Y. (2023). Operaciones visuales y estructuras de control asociadas a la construcción de conjeturas geométricas mediante el Uso de Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio de Caso de Educadores Matemáticos en Formación. (No publicado) [Doctoral]. Universidad del Valle.

Cárcamo Bahamonde, A. (2017). Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio

generado. (Tesis Doctorado en Educación), Universidad Autónoma de Barcelona.

<http://hdl.handle.net/10803/458629>

Camargo Uribe, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática Recursos para la captura de información y el análisis. Universidad de Antioquia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar.

González Trujillo, E. S. (2012). Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas (Doctoral dissertation).

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.),

Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707–762).
Information Age Publishing.

López, D. N. L., y Pineda, A. L. L. (2011, March). Empleo del Modelo 3UV en Álgebra Temprana (CO). In XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Marino, T., & Isla, D. (2018). USOS DE LA VARIABLE, SENTIDO SIMBÓLICO Y METACOGNICIÓN: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental. *Revista Paradigma*, 39(1), 246-266.

Meléndez Juárez, A. E. (2016). Dificultades del uso algebraico de la variable en el nivel medio superior (Master's thesis, Tesis (MC)--Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Departamento de Matemática Educativa.).

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, D. C.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá, D. C.

- Molina, M.; Castro, E.; Molina, J. L.; Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 75-88. <http://hdl.handle.net/10481/23887>
- OCDE. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, lectura y ciencias. Ministerio de Educación.
- Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM Mathematics Education*, 46(3), 349-361.
- Robayna, M. M. S. (2008). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. In *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM*, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007 (pp. 19-52). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Rojas Garzón, P. J., y Vergel Causado, R. (2014). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, 17(2), 688-694. <https://doi.org/10.14483/23448350.7753>
- Sánchez, F. V. (2022). ANÁLISIS DE LA EMERGENCIA DE LOS USOS DE LA VARIABLE ENTRE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA UTILIZANDO EL

MODELO 3UV (Doctoral dissertation, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada).

Trigueros, M., Ursini, S., y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*, 12(2), 27-48.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. *CBMS issues in mathematics education*, 12, 1-29.

Ursini Legovich, Sonia. (1993). Pupils' approaches to different characterizations of variable in Logo. Thesis submitted in fulfilment of the requirement for the Ph. D. Degree of the University of London.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa. México: Trillas.

Wagner, S., & Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12* (pp. 328-340). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Anexos

En esta sección se incluyen los recursos digitales utilizados en el desarrollo de la investigación, los cuales consisten en códigos QR y enlaces de acceso a las pruebas aplicadas y las respuestas recopiladas de los participantes. Este material complementario tiene como finalidad proporcionar al lector información que respalda los procesos metodológicos y los resultados obtenidos, asegurando la transparencia y facilitando la replicabilidad del estudio. Se recomienda a los lectores utilizar un dispositivo móvil o computadora con conexión a internet para escanear los códigos QR o acceder a los enlaces proporcionados.

A. Hoja de trabajo prueba diagnóstica



[Código QR con enlace a la prueba diagnóstica.](#)

B. Hojas de trabajo caracterización del diseño



[Código QR con enlace al diseño de la Variable como Incógnita](#)



[Código QR con enlace al diseño de la variable como Número General](#)



[Código QR con enlace al diseño de la variable como Relación Funcional](#)

C. Anexo: Prueba Final



[Código QR con enlace a la Prueba Final](#)

D. Anexo: Datos recolectados

[Código QR con enlace a los Datos recolectados de la Prueba Diagnostica](#)



[Código QR con enlace a los datos recolectados del diseño de la variable como
Incógnita](#)



[Código QR con enlace a los datos recolectados del diseño de la variable como Número](#)

[General](#)



[Código QR con enlace a los datos recolectados del diseño de la variable como
Relación Funcional](#)



[Código QR con enlace a los datos recolectados de la Prueba Final](#)