El papel histórico de la representación decimal en el proceso de formalización de los números reales

Hilda Tatiana Iquinás volverás

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Maestría en Educación
Énfasis en Educación Matemática
2022

El papel histórico de la representación decimal en el proceso de formalización de los números reales

Hilda Tatiana Iquinás volverás

Trabajo de profundización presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Educación con Énfasis en Educación Matemática

Director:

PhD. Luis Cornelio Recalde Caicedo

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Maestría en Educación
Énfasis en Educación Matemática
2022

Dedicatoria

A mi querida madre.

Agradecimientos

En primera instancia a Dios, por la fortaleza y resiliencia que me proporcionó.

A mi profesor Luis Recalde por su dedicación, paciencia y enseñanzas.

A mi familia y en especial a mi querida hermana Norida por sus explicaciones y motivación. Eres un gran ejemplo de perseverancia y disciplina.

A mi gran amigo Andrés Parra por sus concejos, ánimos y explicaciones.

Y finalmente a Jimmy Uribe por su amor, dedicación, comprensión y apoyo incondicional. Gracias por creer en mí.

Resumen

En este trabajo de grado se desarrolla un análisis historiográfico en el que se muestra el papel determinante de los sistemas de representación en la evolución histórica del concepto de número; en particular, se muestra la potencia del sistema de representación decimal indo-arábigo, el cual captura diferentes aspectos de los sistemas numéricos desarrollados en las antiguas civilizaciones; en particular, se establecen algoritmos operativos que permiten el reconocimiento de algunas cantidades como números, tales como las fracciones y las raíces. La investigación hace énfasis en la construcción de los números reales de Georg Cantor, quien fundamenta su teoría por medio de las sucesiones fundamentales de números racionales. En la noción de sucesión fundamental se puede reconocer el procedimiento algorítmico para aproximar a un número irracional por medio de su representación decimal, lo que permite incorporar a los números reales por medio de sucesiones fundamentales. Esto se evidencia muy bien en el hecho de que, a partir de la incorporación axiomática de los números reales, se puede demostrar que todo número real tiene una representación decimal finita o periódica para los racionales, e infinita para los irracionales.

Palabras clave: Números reales, sistema de representación, sistema de representación decimal.

Abstract

In this degree work, a historiographical analysis is developed in which the determining role of representation systems in the historical evolution of the concept of number is shown; In particular, the power of the Hindu-Arabic decimal representation system is shown, which captures different aspects of the numerical systems developed in ancient civilizations; in particular, operational algorithms are established that allow the recognition of some quantities as numbers, such as fractions and roots. The research emphasizes the construction of real numbers by Georg Cantor, who bases his theory through the fundamental sequences of rational numbers. In the notion of fundamental sequence, the algorithmic procedure to approximate an irrational number by means of its decimal representation can be recognized, which allows real numbers to be incorporated by means of fundamental sequences. This is very well evidenced by the fact that, from the axiomatic incorporation of real numbers, it can be shown that every real number has a finite or periodic decimal representation for rational numbers, and infinite for irrational numbers.

Keywords: Real numbers, representation systems, decimal representation system

Contenido

Índice de figuras

Introducción

La noción de representación ha jugado un papel importante en el desarrollo histórico de las matemáticas, en particular en las diferentes etapas de la evolución histórica del concepto de número, ya que se necesitaron miles de años para consolidar e implementar formas efectivas de referir formalmente las actividades de ordenar, contar y medir a través de sistemas numéricos. En este largo recorrido histórico se puede observar que los múltiples sistemas de representación que se construyeron en las antiguas civilizaciones como la numeración egipcia que tenía un sistema de numeración aditivo y la numeración romana que combinaba el aditivo y decimal por nombrar algunas, lograron representar las cantidades por medio de jeroglíficos o símbolos relacionados a su cultura y a establecer algoritmos operativos con los cuales se lograban realizar las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división). Sin embargo, dichos sistemas de numeración se vieron limitados al momento de representar cantidades cada vez más grandes y al realizar operaciones con dichas cantidades, por tal motivo, era necesario un sistema de numeración más práctico, que lograra representar todos los números con la menor cantidad de símbolos posibles.

Por ende, el sistema de numeración decimal indo-arábigo que fue inventado por los hindúes y años más tarde transmitido por Europa por los árabes, produce un cambio fundamental en la evolución del concepto de número, ya que logra capturar diferentes aspectos de los sistemas numéricos desarrollados en las antiguas civilizaciones como la implementación de los agrupamientos regulares, el principio de la base 10, el valor posicional y la introducción de la cifra cero como número; permitiendo la representación de cualquier cantidad utilizando distintos numerales para los números del cero al nueve y la ejecución de algoritmos operativos para la realización de las operaciones aritméticas básicas con los números racionales (Datta y Singh, 2001). Es en este sentido, que los sistemas de representación, en particular el sistema de numeración indo-arábigo, juegan un papel determinante en el desarrollo de las matemáticas, en particular, en la construcción de los números reales, porque permite establecer algoritmos operativos para los números racionales y permite abandonar la definición del número como colección de unidades.

Posteriormente, la representación decimal se vuelve muy potente para establecer diferencias entre los números, en este caso, los números racionales de los irracionales. Para los números racionales se obtiene una representacional decimal finita o infinita periódica y para los números irracionales una representación decimal infinita no periódica. Sin embargo, esta representación no es suficiente para el reconocimiento de los números irracionales, pero puede ser un primer acercamiento a ellos, que más adelante sirve para reconocer las diferentes construcciones los números irracionales.

Por ende, el interés de este trabajo de grado es resaltar por medio de una revisión histórica, el papel determinante de algunos sistemas de representación, en particular, la potencia del sistema de representación decimal indo-arábigo en la instauración de los números reales de Georg Cantor. La revisión histórica empieza en la antigüedad griega, en el contexto de la escuela pitagórica, donde nos percatamos de la existencia de las magnitudes inconmensurables que constituyen a un antecedente lejano de los números irracionales. Gracias al algoritmo de Euclides se visualiza que las magnitudes inconmensurables tienen asidero en la representación decimal, ya que por medio de la división de Euclides se va enmarcando la representación decimal periódica y decimal infinita no periódica. Posteriormente, en los estudios de Euler se identifica una contribución significativa al aspecto operativo estableciendo la teoría de las fracciones continuas. Se muestra que las fracciones continuas guardan información sobre la naturaleza de los números; permitiendo bosquejar una construcción de los números reales, al mostrar que todo número racional se puede representar con una fracción continua finita y que todo número irracional se puede representar con una fracción continua infinita, lo cual guarda relación directa con la representación decimal.

En este sentido, las fracciones continuas se pueden considerar como un elemento de causalidad muy importante para los desarrollos posteriores realizados por Cantor y Dedenkind sobre los números reales. Sin embargo, la investigación hace énfasis en la construcción formal de los números reales de Georg Cantor, quien fundamenta su teoría por medio de las sucesiones fundamentales de los números racionales, donde se evidencia que la sucesión muestra un procedimiento algorítmico para aproximar a un número irracional por medio de su representación decimal, lo que permite incorporar a los números reales por medio de sucesiones fundamentales.

Por tal motivo, es pertinente formular la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es la importancia histórica de la representación decimal en el proceso de formalización de los números reales?

Para dar respuesta a la pregunta aquí planteada, se consideraron los siguientes objetivos:

Objetivos

Objetivo general: Analizar el rol histórico de la representación decimal en el proceso de formalización de los números reales.

Objetivos específicos

1. Establecer un desarrollo historiográfico de diversas representaciones de algunos sistemas numéricos.
2. Analizar la potencia de la representación decimal en el establecimiento de algoritmos operativos.
3. Describir una línea de desarrollo conceptual que lleve de la representación decimal a las construcciones de los números reales de Georg Cantor.

Metodología

Para dar respuesta al problema de investigación y a los objetivos planteados anteriormente, se hizo la revisión de múltiples documentos, los cuales fueron analizados teniendo en cuenta el método hermenéutico, el cual consiste en la lectura, análisis e interpretación de fuentes primarias que fueron seleccionadas por su relación y pertinencia con el problema y objetivos de la investigación. Se utilizaron fuentes secundarias para complementar la comprensión y análisis de las fuentes primarias. La lectura y análisis de los diferentes documentos se realizó teniendo como referencia la noción de representación, pues se trataba de evidenciar que se podría establecer elementos de causalidad y de síntesis teórica, a partir de las diversas representaciones que históricamente se pueden reconocer.

En la siguiente tabla, se presentan las fuentes primarias, el aporte a la investigación, las fuentes secundarias principales que se utilizaron para la complementación y el objetivo específico que se quiere abordar con los documentos.

Tabla 1. Fuentes primarias y secundarias

<table>
<tr><th>Objetivo</th><th>Fuente primaria</th><th>Autor</th><th>Aporte a la investigación</th><th>Fuentes secundarias</th></tr>
<tr><td>Apunta al primer objetivo específico.</td><td>Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales</td><td>Raymond Duval (2004)</td><td>Sustenta la idea que las representaciones semióticas se pueden considerar como herramientas para producir nuevo conocimiento.</td><td>• (Duval, 1993)
• (Kaput, 1987)
• (Radford, 2013)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apuntan al segundo objetivo específico.</td><td>Las cifras. Historia de una gran invención</td><td>Georges Ifrah (1985)</td><td>Contribuye a la construcción de la historiografía de los sistemas numéricos, con el fin de resaltar la importancia de la representación decimal en la instauración de algoritmos operativos.</td><td rowspan="2">• (Guadi, 2000)
• (Kline, 1992)
• (López, 2010)
• (Ugarte, 2011)</td></tr>
<tr><td>Elementos</td><td>Euclides (1991)</td><td>Es uno de los tratados más importantes que logra sintetizar los trabajos realizados por los griegos; contribuyen a comprender los inicios de la historia de las matemáticas. En el libro X, que trata sobre las magnitudes inconmensurables, se rastrea algunas</td></tr>
</table>

			intuiciones sobre los números irracionales, dando algunas bases para la formalización de los números reales	
Apuntan al tercer objetivo específico.	*Curso de análisis*	Agustín Cauchy (1821)	Establece formalmente la noción de convergencia de sucesiones. Plantea la convergencia de las sucesiones fundamentales, llamadas así por Cantor, pero que luego se denominarán “sucesiones de Cauchy”.	• (Recalde & Vargas, 2009) • (Mora & Torres, 2004) • (Recalde & Arbeláez, 2011) • (Recalde, 2018)
	Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen	Georg Cantor (1872)	Fundamenta su teoría de los números reales, en sucesiones de números racionales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, las cuales denominó sucesiones fundamentales.	

Por ende, la investigación se realizó mediante un estudio historiográfico, el cual se analizó por medio de las múltiples representaciones que surgieron en la evolución histórica de los números reales, siendo la representación decimal el hilo conductor de la investigación.

La tesis se encuentra dividida en seis capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el capítulo 1, se menciona la noción de representación desde algunas posturas filosóficas referenciando a Kant, Von Glasersfeld, Leibniz y Helmholtz y desde un enfoque didáctico a James Kaput y Raymond Duval quienes aterrizan el concepto de representación en la Educación Matemática, este último considera que la representación semiótica se puede considerar una herramienta muy potente para la comprensión del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos.

En el capítulo 2, se hace un recorrido histórico por algunas civilizaciones antiguas (egipcios, griegos y romanos), con el fin de identificar los sistemas de numeración que empleaban para representar los números y los algoritmos operativos que utilizaban para realizas las operaciones aritméticas básicas. **En el capítulo 3**, se realiza un recorrido histórico por la cultura hindú y árabe para mencionar sus principales aportes al desarrollo de las matemáticas partiendo de la instauración del sistema de numeración decimal indo-arábigo o sistema de representación decimal como herramienta conceptual para el establecimiento de algoritmos operativos

En el **Capítulo 4**, se presentan algunos antecedentes a la construcción formal de los números reales por Georg Cantor. Se comienza con la representación en fracciones continuas de $\frac{4}{\pi}$ que proporciona John Wallis, luego se hace referencia a Euler con su teoría de las fracciones continuas, resaltando la diferencia entre las fracciones continuas finitas y las fracciones continuas infinitas y su relación con la representación decimal. Posteriormente, se presenta el análisis de Cauchy sobre los números reales, el cual concluye que los números reales no son completos porque existen sucesiones de racionales que convergen a un número que no es racional, sin embargo, no realiza una demostración sobre este aspecto. Por tal motivo se menciona a Charles Méray quien denomina límites o números ficticios a los límites de las sucesiones fundamentales que convergen a un número que no es racional, es decir a los números irracionales.

En el **Capítulo 5**, se presenta la construcción formal de los números reales por Georg Cantor, quien propone una construcción compuesta por tres momentos o niveles. En el primer nivel los números racionales se consideran como un cuerpo numérico ordenado, en el segundo nivel, se ubican todas las sucesiones fundamentales de números racionales y en el tercer nivel se construyen paquetes o clases de equivalencia con todas las sucesiones fundamentales que convergen al mismo número.

En el **capítulo 6,** se presenta la axiomática de los números reales, en la cual se define una relación de orden y las operaciones de suma (+) y producto (.), a partir de 10 axiomas: 6 axiomas de cuerpo, 3 axiomas de orden y el axioma de completitud. Se resalta la importancia el axioma 10 de completitud, ya que permite introducir los números irracionales, en un proceso ligado directamente con la representación decimal. Por último, se establecen las conclusiones. Se menciona que la representación decimal juega un papel muy importante como herramienta conceptual para establecer diferencias entre los números racionales e irracionales. Gracias a los diversos sistemas de representación y algoritmos operativos que se fueron consolidando con ayuda de la representación decimal, cada número irracional se empieza a reconocer como objeto matemático. Por ende, las múltiples representaciones de los números en la gradual construcción y formalización del sistema de los números reales permiten establecer un paralelo con la teoría de las representaciones semióticas de Duval (2016).

Capítulo 1: La representación en matemáticas

En el presente capítulo, se mencionará la noción de representación que ha sido estudiada desde diferentes ámbitos, ya que, no solo atañe al conocimiento matemático, sino al problema del conocimiento en general (Radford, 2008). Por tal motivo, se hará mención a Kant, Von Glasersfeld, Leibniz y Helmholtz, desde algunas posturas filosóficas y a Kaput y Duval, desde lo didáctico, ya que son pensadores que hablan de la representación, enfocados en la educación matemática.

Aunque se puede hacer evidente una relación directa de las matemáticas con el mundo de la experiencia, los objetos matemáticos no pertenecen al mundo fenomenológico; esto significa que en las matemáticas se trabaja con objetos puros del pensamiento, lo que implica el uso de múltiples representaciones para acceder a su naturaleza abstracta; sin embargo, ninguna representación puede describir completamente al objeto matemático. Es por esto, que la representación, juega un papel fundamental en los procesos de adquisición y construcción de los conceptos matemáticos. Como dice Duval (2004) "no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (pág. 25).

En Kaput (1987), se plantea que para hablar de representación se debe tener en cuenta la diferencia entre el mundo representativo y el mundo representado; sin embargo, el filósofo alemán Von Glasersfeld (2001), a través de un argumento Kantiano, sostiene que se debe tener cuidado con la idea de mundo representado, ya que los seres humanos podemos conocer los objetos de acuerdo con nuestras propias experiencias con ellos.

En este sentido, Kant en La Crítica de la Razón Pura (1928), afirma que: "No hay duda de que todo conocimiento comience con la experiencia, no por eso surge todo él de la experiencia" (pág. 23). Es decir, establece la construcción de una teoría del conocimiento, que tenga como punto de partida la experiencia o las actividades sensoriales del sujeto, pero, al mismo tiempo, no comparte la idea de que el conocimiento procede únicamente de la experiencia. Kant descarta la idea de que el conocimiento es innatos al sujeto, pero, acepta la existencia de **conocimientos puros** o categorías, que se forman gracias al entendimiento humano que tiene la capacidad de formar conocimiento por sí mismo, independiente de la experiencia, pero que va adquiriendo significado a medida que tiene contacto con la experiencia (Sarango, 2015).

Kant establece la diferencia entre el conocimiento relativamente a priori y el conocimiento absolutamente a priori (conocimiento puramente a priori), donde resalta su interés en enfocarse en el conocimiento puramente a priori, es decir, el conocimiento que es independiente a la experiencia. Dice que en el conocimiento humano existen los juicios de un valor necesario y en el caso más estricto, también universales; que adquieren los juicios intelectuales cuando se logra evolucionar de una simple intuición perceptiva, al concepto puro.

Kant consideró que los principios del entendimiento puro son los responsables de poder comunicar el conocimiento, porque son universales y necesarios, y no meras imágenes subjetivas. A estos principios, los denominó **juicios sintéticos a priori**. Son sintéticos, porque ayudan a expandir o aumentar el contenido del concepto por la percepción que se obtiene de la experiencia de un fenómeno, es decir la contingencia y particularidad de un juicio (elemento sintético) y son a priori, porque son independientes de la experiencia, es decir, contienen el juicio universal y necesario (elemento a priori), es decir que los juicios sintéticos a priori son una mezcla de lo que se puede conocer por medio de los sentidos y la razón. Kant analiza la naturaleza de los juicios sintéticos a priori por medio de la división: analíticos y sintéticos.

> El juicio analítico es un mero examen de nociones, fundado solamente en el principio de contradicción, y cuya esencia es una relación de identidad. Por tal razón, este juicio apenas produce la aclaración de un concepto, pero de ninguna manera amplía nuestro conocimiento. El juicio sintético, por razón de las dos cualidades que posee, la sintética particular y contingente y la apriorística universal y necesaria, amplia nuestro conocimiento y le proporciona una nueva noción que, según él observa, por ser necesaria y universal, no puede estar ni haber estado antes en el objeto contingente y particular, motivo del juicio, sino que debe corresponder a una función a priori, y como tal, independiente y anterior a toda experiencia (Escobar, 2020, pág. 56 y 57).

En este sentido, al considerar que todo lo que sea universal y necesario es a priori, y que científicamente ningún juicio es válido, si no es sintético u obtenido por medio de la experiencia, según su teoría, las matemáticas son un conocimiento sintético a priori, porque, utiliza recursos (símbolos o signos) provenientes de la intuición o de la experiencia, como figuras, diagramas, dibujos, para apoyar al razonamiento lógico.

Por lo tanto, Kant argumenta que la matemática está dialécticamente relacionada a la representación; para trabajar con las matemáticas, ya sea desde la práctica de los matemáticos profesionales o de los estudiantes de las escuelas, se involucra el trabajo con las representaciones. Por ende, si los seres humanos solo podemos conocer a los objetos desde nuestras experiencias sensibles y concretas; el conocimiento lo adquirimos por medio de la experiencia, por lo tanto, no tenemos acceso a los objetos como realmente son, lo cual constituye para Kant, los límites de la razón humana.

De esta manera, es pertinente preguntar: ¿Qué representan los signos de la actividad matemática? Para el filósofo alemán Von Glasersfeld, que utiliza un argumento Kantiano, sostiene que los signos representan el conocimiento humano, el cual refleja los esfuerzos por adaptarse al mundo exterior; considerar que, si el conocimiento es fruto de las experiencias personales, conduce a un problema muy importante desde la perspectiva educativa, y es el problema de la comunicación, ya que ¿se podría comunicar dichas ideas a otra persona? Von Glaserdfeld (2001), argumenta en una entrevista que las personas "interpretan lo que digo de acuerdo con tus propias experiencias y no de acuerdo con mis experiencias" (Glasersfeld, 2001).

Leibniz, quien logró articular de la mejor forma la concepción representacional del conocimiento en el siglo XVII, estableció una relación entre el orden de las cosas y el orden de las ideas. Imaginó un lenguaje donde los signos o caracteres y sus respectivas combinaciones dieran como resultado un pensamiento claro y una manipulación de silogismos y juicios que denomino **característica universal**[1]. Leibniz considera los signos matemáticos como una especie de modelo de característica universal, por ende, se esforzó en encontrar un método para asignar caracteres o signos a nuestro pensamiento, como una especie de cálculo (Radford, 2013).

Helmholtz que fue esencialmente Kantiano, plantea en *The Facts of Perception* (1878) dos enfoques. El primero se basa en la existencia de dos mundos diferentes: el mundo de los noúmenos y el mundo de los fenómenos. El mundo de los noúmenos hace referencia a los

[1] "Permite construir caracteres lingüísticos que son representaciones transparentes de pensamiento inteligible, algo que los signos de los lenguajes naturales no suelen serlo, y reducir el razonamiento lógico a un procedimiento mecánico basado únicamente en una sustitución de caracteres formales" traducción de (Radford, 2013, pág.3).

conceptos puros del pensamiento, es decir, los conocimientos que se producen por medio del pensar, que son independientes de la experiencia. El mundo de los fenómenos representa a los objetos construidos por medio de las experiencias del sujeto.

El segundo enfoque, se basa en una explicación matemática de las representaciones, la cual, describe como mapas que preservan (parcialmente) la estructura entre dos reinos (el mundo de los noúmenos y los fenómenos). Helmholtz dice que las representaciones no describen el mundo tal como es, sino que contienen reglas para interactuar con él. El papel de las representaciones no se limita a registrar de manera coherente y económica lo que ya se conoce empíricamente, sino que también deben predecir eventos del futuro. Las representaciones no nos dicen como son las cosas en sí mismas, sino en la jerga Kantiana, determinan "nuestras concepciones de las cosas", son construcciones hipotéticas para captar la realidad (Mormann, 2018).

El recorrido anterior muestra las múltiples y diversas perspectivas, en torno a la noción de representación, que han establecido diferentes pensadores, desde hace más de doscientos años, y que han venido permeando a la Educación Matemática, desde la década de los 80 del siglo XX, gracias a los aportes realizados por autores como Janvier (1987), Hilbert y Carpenter (1992), Duval (1993, 1995) y Kaput (1985) por mencionar unos cuantos.

En los párrafos siguientes se presentará las perspectivas de James Kaput (1987), quien fue uno de los primero en interesarse por introducir la noción de representación en la Educación Matemática y Raymond Duval (2004, 2018), quien estudia los procesos de adquisición de conocimiento matemático y menciona que "son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques. Los más predominantes, y a veces opuestos, son el enfoque epistemológico y el educativo. Pero ellos tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren en cualquier proceso de conocimiento o que lo constituyen” (Duval, 2016, pág. 61).

Kaput (1987), considera que el concepto de **representación** hace referencia a dos mundos: El **mundo de los objetos representados** (de operaciones mentales que siempre es hipotético, es decir, el concepto) y el **mundo de los objetos representantes** (de operaciones físicas que frecuentemente son abstracciones, es decir los símbolos o representaciones), los cuales están relacionados de manera implícita, pero tienen funciones diferentes. En este sentido, Kaput considera que la noción de representación involucra los objetos representados (los conceptos matemáticos), los objetos representantes (los símbolos o representaciones de los conceptos matemáticos) y la relación entre dichos mundos. Los dos primeros, implican considerar los aspectos del mundo representado que se están representado, ya que un mismo objeto matemático tiene múltiples representaciones y cada una de ellas, proporciona características diferentes del objeto matemático. También, se debe considerar los aspectos del mundo representante que permiten la representación, ya que, todas las representaciones son parciales, es decir que, no todos los aspectos o características del objeto, pueden ser representadas en una única representación. Por ejemplo, el concepto de función se puede representar de forma tabular, pero si la función evoca al continuo, la representación tabular no logra capturar totalmente el concepto de función.

En la figura 1 se puede observar que los procesos que van del mundo de las operaciones físicas al mundo de las operaciones mentales tienen el objetivo de comprender fenómenos mentales por medio de material físico y así contribuir al propio pensamiento. Los procesos que van del mundo de las operaciones mentales al mundo de las operaciones físicas tienen el objetivo de comunicar o validar los contenidos cognitivos y producir nuevas estructuras.

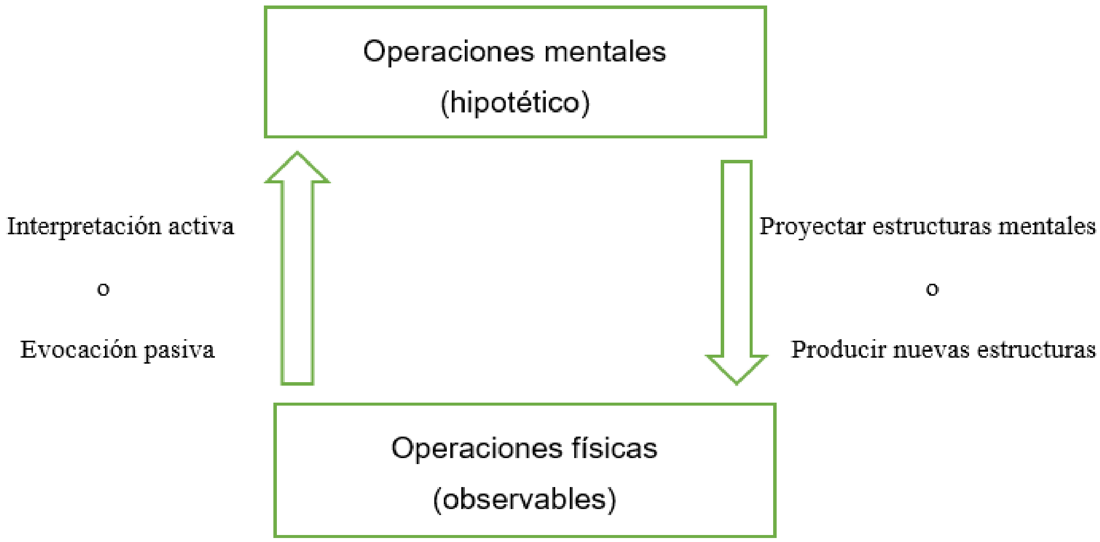


Figura 1. Relación entre operaciones mentales y físicas.

Kaput delimita el mundo de los objetos representantes y las operaciones físicas, por medio de los **sistemas de notación** que contienen reglas, permitiendo identificar o crear caracteres, hacer operaciones con ellos y establecer relaciones entre dichos caracteres, por ejemplo, el sistema de números reales, que permite realizar las operaciones de suma, sustracción producto y división e involucran la relación de orden. Los caracteres o notaciones pueden ser letras, dígitos, gráficos, diagramas y objetos físicos como ábacos, que pertenecen al mundo que el sujeto ha construido por medio de su experiencia con el mundo exterior y ayudan en la organización de los procesos de pensamiento del sujeto, pero no son representaciones mentales de un mundo externo. En otras palabras, "Los sistemas de notación son artefactos culturales o lingüísticos materiales, compartidos por una comunidad cultural o lingüística" (Kaput, 1992). Más adelante el termino sistema de notación se reemplaza por **sistema de representación**, ya que los sistemas de notación se usan para representar o reemplazar alguna entidad (objeto) o algún aspecto de este (Romero & Rico, 1999).

Un sistema de representación involucra el mundo de los objetos representados, el mundo de los objetos representantes y una regla de correspondencia específica. Un ejemplo particular son los **sistemas de símbolos** que contienen un esquema de símbolos[2], un campo de referencia[3] y una regla sistemática de correspondencia entre ellos que no necesariamente es bidireccional (Kaput, 1987). Es decir que, los símbolos ($\leq$, $\geq$, $<$, $=$, $>$) son el mundo representante, la estructura de orden de los números reales es el mundo representado y la asignación de significado de cada símbolo es la relación de correspondencia. En muchas ocasiones, la estructura matemática representada en un sistema de símbolos que sirve para representar otro sistema de símbolos. Por lo tanto, los objetos matemáticos necesitan de una representación externa para su comunicación y de una representación interna para poder pensar en las ideas matemáticas.

Kaput (1992) considera un mundo de operaciones mentales y un mundo de operaciones físicas como se presentó anteriormente, mientras que Duval (1993) menciona la existencia de un mundo de representaciones mentales y uno para las representaciones semióticas y sostiene que las representaciones mentales se dan por una interiorización de las representaciones externas, es decir:

> Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (…)

---

[2] Un esquema de símbolos es una colección concreta de caracteres juntos con reglas más o menos explicitas para identificarlos y combinarlos. Ejemplo, los números arábigos-hindúes, los romanos, los egipcios y sus concatenaciones, traducción de (kaput, 1987, pág. 162).

[3] El campo de referencia está asociado a una estructura matemática, por ejemplo, el sistema de posición de base 10 para contar números utilizando el esquema de símbolos hindú-árabe. (kaput, 1987).

> Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas (Hiebert & Carpenter, 1992, pág. 66).

En *Semiosis y Pensamiento humano* (2016), Duval menciona que, para caracterizar las representaciones, se utilizan generalmente dos oposiciones clásicas: La oposición consciente/no-consciente y la posición externa/interno.

La oposición consciente/no-consciente, involucra lo consiente; es decir, cuando un sujeto logra reconocer "algo" que observa y ese "algo" toma el estatus de objeto para el sujeto que observa, y lo no-consciente, que se refiere a lo que el sujeto no logra observar. Cuando hay un paso de lo no-consciente a lo consciente, "*el sujeto logra descubrir por sí mismo aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otro se lo hubiera explicado"* (Duval, 2016, pág. 33)*;* esté proceso se denomina **objetivación.** Las representaciones conscientes tienen un carácter intencional y cumple con la función de objetivación.

La oposición externa/interno, hace referencia a lo que, un sujeto, organismo o sistema puede visualizar u observar y lo que no. Esto permite dividir las representaciones en externas e internas. Las representaciones externas, producidas por el sujeto o por el sistema, por medio de la aplicación de un sistema semiótico, son por naturaleza, **representaciones semióticas**. Estas son accesibles para los sujetos que manejan el sistema semiótico utilizado. Las representaciones internas son las que pertenecen al sujeto y no son comunicadas a otros, por medio de la producción de una representación externa. Las representaciones externas cumplen la función de comunicar y las funciones cognitivas de objetivación y tratamiento.

Se puede concluir que la oposición externa /interno no pueden aceptarse entre sí, es decir, una representación interna puede ser consciente o no-consciente, mientras que una representación consciente puede ser exteriorizada o no. El cruce de estas dos oposiciones (consciente/no-consciente y externo/interno), da lugar a las representaciones semióticas, representaciones mentales y las representaciones computacionales. En este escrito me voy a centrar en las dos primeras que cumplen la función de objetivación, expresión y tratamiento.

Las representaciones mentales, son representaciones conscientes e internas que cumplen la función de objetivación y permiten "mirar al objeto" sin recurrir a un significante que se perciba con los sentidos. Las representaciones mentales no solo involucran los conceptos, las nociones, las idea, sino también, todo aquello que logre reflejar los conocimiento y valores que un sujeto quiera comunicar ante un grupo de personas, o así mismo.

Las representaciones semióticas, son representaciones conscientes y externas, que cumplen las funciones cognitivas de objetivación, expresión y tratamiento. Permiten que los sujetos tengan una "mirada del objeto" por medio del reconocimiento de estímulos que tiene el valor de "significantes". Las representaciones semióticas se conforman por signos agrupados (figuras, esquemas, gráficos, lenguaje natural, escritura numérica, escritura simbólica, etc.), donde un mismo objeto matemático puede estar representado por diversas representaciones semióticas, que proporcionan diversas características del objeto representado.

Para Duval, el sistema semiótico está conformado por el conjunto de signos (que pertenecen a un sistema semiótico ya construido y utilizado por otros) que contiene unas reglas de conformidad que permiten la realización de operaciones, combinación o agrupación de signos, los cuales, pueden ser reemplazados por otros signos independientemente del objeto que se esté representado, dicha sustitución no depende del contenido de los objetos representados, sino, del sistema semiótico. Todos los sistemas semióticos tienen sus formas particulares de representar, lo que implica el uso de otros sistemas semióticos para ampliar el contenido del objeto representado.

> Una representación jamás puede ser considerada y analizada sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producida. Las especificidades de sistema (físico, orgánico o semiótico) que permitieron la producción de una representación son las que determinan la relación entre el contenido y el objeto representado. El contenido de las representaciones de un mismo objeto cambia en función del sistema por el cual fueron producidas (Mormann, 2018, págs 18-19).

Para destacar propiedades diferentes de un mismo objeto, en el caso de las matemáticas, Duval reconoce que el uso de más de un sistema de representación y la posibilidad de realizar transformaciones entre los diferentes sistemas resulta ser una exigencia cognitiva y fundamental; considera que un sistema semiótico de representación puede considerarse como un registro de representación semiótica cuando cumple las siguientes tres actividades cognitivas de representación:

1. La actividad referida a la formación de una representación semiótica en un registro de representación, la cual requiere de una selección de caracteres y de la determinación de lo que se quiere representar; estos caracteres deben conservar las reglas del sistema semiótico utilizado. Por ejemplo, en algunas civilizaciones antiguas, los números fueron representado por palabras, signos, cifras o por símbolos como se evidencia en la representación egipcia y romana. Los romanos desarrollaron un sistema numérico aditivo donde utilizaban símbolos de letras mayúsculas que se leen de izquierda a derecha, de mayor a menos, donde el valor del número se obtiene

sumando los valores de los símbolos que lo componen, excepto cuando el número de la derecha es mayor que el de la izquierda, en este caso se restan como se muestra en la figura 2.

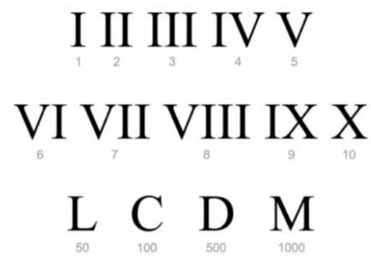


Figura 2. Sistema de numeración romano.

Los egipcios inventaron un sistema de numeración escrita de tipo aditivo, pero no posicional utilizando jeroglíficos basados en la flora y fauna del Nilo, donde se representaba las primeras 6 potencias de 10, formando números hasta el millón como se muestra en la figura 3.

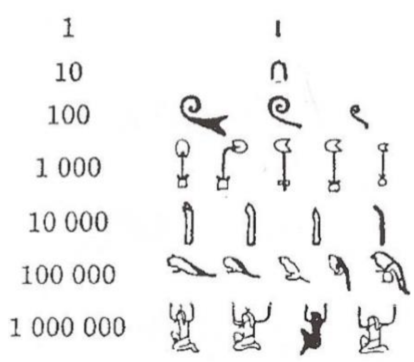


Figura 3. Sistema de numeración egipcio.

2. Una transformación al interior de un registro produce un ***tratamiento, que es la transformación de la representación interna a un registro***; es decir, dada la transformación de una representación inicial, se obtiene otra representación en el mismo registro de representación inicial. Por ejemplo, calcular, utilizando la escritura

jeroglífica o la romana, es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica, donde se transforma la escritura de los números en un mismo registro de representación. En el caso de los romanos, tenía reglas para manipular las representaciones y obtener otra en el mismo registro, por ejemplo, para obtener la representación del número 90 utilizaban dos representaciones, la X= 10 y C=100, entonces 90 = XC, la regla consiste en que si se coloca a la izquierda un signo de menor cantidad se debe hacer una resta. Para representar el número 1.100 se utiliza la representación del 1.000 = M y 100 = C, entonces 1.100 = MC, en este caso como la C se coloca a la derecha de la M que representa un número mayo, se suma y así se obtiene la representación en números romanos del 1.100.

3. Una transformación de un registro de representación a otro registro se conoce como *la conversión, que es una transformación externa relativa al registro de representación de partida*; es decir, que la transformación produce un cambio en el registro de la representación inicial, ampliando o conservando de manera total o parcial el contenido de la representación inicial. La conversión requiere que se perciba el contenido de una representación y lo que esta representa; sin tener en cuenta la anterior diferenciación, la conversión es casi imposible o incomprensible. Por ejemplo, en la escritura de un número se debe diferenciar **la significación operatoria (los procedimientos de tratamiento) vinculada al significante** y **el número representado**, lo que supone una coordinación entre los distintos registros de representación, es decir, poder establecer relación entre las diversas representaciones del objeto matemático en cuestión y así poder mejorar o completar la información sobre sus propiedades; esto implica una mejor comprensión del objeto matemático.

En este sentido, la representación puede ser “*algo que se pone en lugar de otro algo*” (Duval, 2016, pág. 1), por ende, es pertinente preguntarnos ¿Cuál es la naturaleza de las representaciones de un objeto matemático? Para responder, es necesario tener claro desde que perspectiva se quiere abordar: Las representaciones en relación a un individuo concreto y sus experiencias (un enfoque socio/cultural o educativo), las estructuras mentales (enfoque cognitivo) o los objetos del conocimiento con sus requisitos epistemológicos (enfoque epistemológico), es así como la representación puede ser considerada como las creencias, concepciones verdaderas o erróneas de los individuos que acceden a ellas por medio de producciones verbales o esquemáticas (Duval, 2016).

Lo anterior muestra la variedad de enfoques que pueden estar involucrados en los procesos de adquisición del conocimiento matemático; los más utilizados y a veces opuestos son el enfoque epistemológico y el educativo, aunque, “*ellos tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómeno que ocurre en cualquier proceso de conocimiento o que lo constituya*” (Duval, 2016, pág. 1).

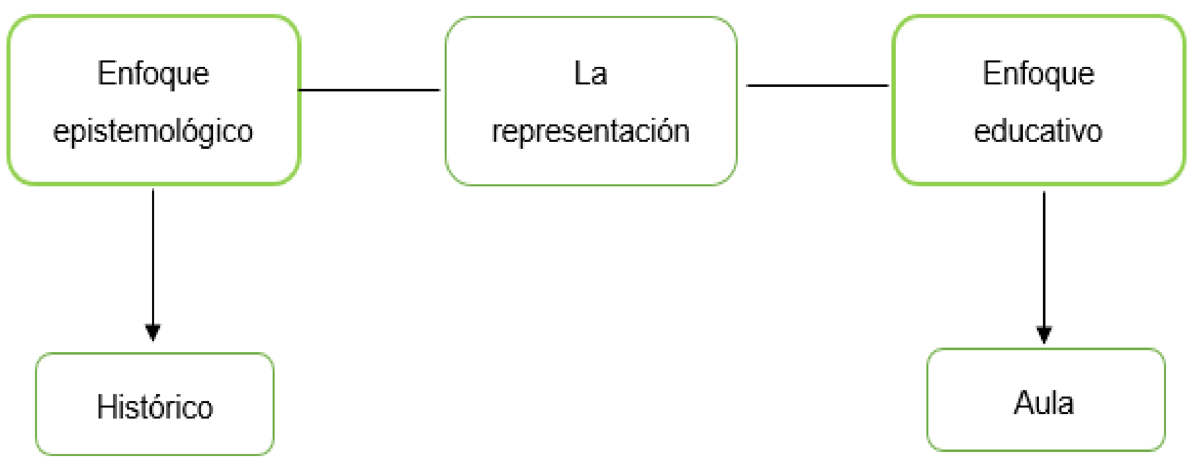


Figura 4. Relación entre el enfoque epistemológico y el educativo.

La figura 4 muestra que la noción de representación se puede considerar como un puente entre el enfoque epistemológico (procesos históricos) y el educativo (procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas) dando luz a nuevas formas de analizar los estudios históricos. Para complementar esta relación, Duval nos proporciona lo siguiente:

> Las representaciones también pueden ser signos y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas y que permite la descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos. Allí las representaciones semióticas, incluido cualquier lenguaje, aparecen como herramientas comunes para producir nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental particular (Duval, 2016, págs. 9-10).

En este sentido, concluimos que las representaciones semióticas que generalmente se utilizan como herramienta conceptual para estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se pueden considerar también como una herramienta conceptual para analizar el desarrollo histórico de los conceptos matemáticos, pues diferentes representaciones semióticas de un mismo objeto matemático resaltan distintas características de este, lo que puede permitir vislumbrar propiedades hasta el momento desconocidas sobre los mismos. En este sentido, el acceso a nuevas formas de representación de un mismo objeto matemático configura una oportunidad para expandir la comprensión que se tenga sobre este. En este sentido, Duval (2016) resalta que "*Basta con revisar la historia del desarrollo de las matemáticas para ver que el desarrollo de las representaciones semióticas fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático*" (Duval, 2016, pág. 3).

Capítulo 2: Desarrollo de algunos sistemas numéricos

La humanidad tardo miles de años en poder descubrir los números, es decir, de pasar del concepto cualitativo de cantidad a su representación numérica. Los números que representan la cantidad de los objetos se introdujeron cuando el hombre tuvo problema para capturar una cantidad grande de objetos directamente con los sentidos. Los números aparecen entonces, como herramienta teórica para contar dichos objetos y dejar huella de la cantidad. En principio se recurrió a marcas en huesos, piedras, madera e incluso se tomó como referencia casi todas las partes del cuerpo (dedos de las manos y los pies, brazos y piernas, el torso y la cabeza, las falanges y las articulaciones) para poder recordar la cantidad. Debió pasar mucho tiempo para que a las marcas se les asignara un nombre que se compartía socialmente (Guedj, 2000). Las diferentes representaciones tomaron formas y empezó la conformación de los sistemas numéricos que permitieron la constitución de una de las construcciones más importantes de la humanidad: La numeración.

La numeración, es un sistema que permite dos actividades cognitivas: la representación de cantidades y los cálculos entre cantidades. Esto significa que contamos con una trilogía de representación: visual, oral y escrito que fundamenta las numeraciones figuradas, habladas y escritas.

> Las numeraciones figuradas son numeraciones concretas, constituidas por un sistema de marcas físicas materializadas sobre soportes duros. Las numeraciones habladas se encargan de atribuir un nombre a cada número y las numeraciones escritas, utilizan símbolos ya existentes o nuevos para representar los números (Guedj, 2000, pág. 27).

En las numeraciones figuradas cada número está representado por un signo físico; por ejemplo, marcas en soportes, objetos naturales u objetos fabricados como el ábaco. Las más sencillas de estas numeraciones figuradas, tiene un posicionamiento inmóvil; las más complejas, utilizan desplazamientos de los objetos. El cálculo se puede dar, pero es complicado de modificar, es decir, se puede hacer un cálculo sin reversa.

Las numeraciones habladas pertenecen a un sistema de denominación de los números que emplea nuestra lengua natural; por ejemplo, la palabra “mil”. Las palabras que se encargan de nombrar a los números se llaman *numerales*, también están los *cardinales* que se refieren a la cantidad y los *ordinales* que se refieren al orden cuando los números se desarrollan en sucesión natural. De esta manera, para poder nombrar todos los números, se precisan algunos que servirán de base para nombrar a los demás; por ejemplo, los numerales que se refieren a las unidades: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve; los numerales que se refieren a las decenas: diez, veinte, treinta, cuarenta y luego, los que se refiere a las centenas, unidades de mil, decenas de mil y así sucesivamente.

Las numeraciones escritas no están vinculadas a nuestro lenguaje de comunicación; la idea es asociarle a cada número una designación que sea única, que no tenga relación con otras ya existentes. Dicha designación debe permitir identificar la cantidad que le corresponde al número. Para nombrar los números más grandes se utilizan combinaciones de palabras de los más pequeño; ejemplo, dieciocho es la suma de diez más ocho.

La numeración escrita de los números surge de necesidades administrativas que exigían una contabilidad más rigurosa del imperio: tierras, rebaños, riquezas, entre otras posesiones. A medida que transcurría el tiempo, acumular estos datos se volvía algo cada vez más complejo de registrar. Así nació la numeración escrita de los números. Los signos numéricos eran específicos y solo se utilizaban para representar los números, dichos signos numéricos tomaron el nombre de cifras. “Las cifras son números particulares a los que se les confía la tarea de representar los números y se les designan con símbolos especiales" (Guedj, 2000). Por ejemplo, las cifras denominadas arábigas como el 0, 1, 2…9 y las que se utilizan en la numeración egipcia: la flor de loto o la rana.

La numeración es un sistema que emplea el concepto de **base** para poder reducir la cantidad de números de palabras (numeraciones habladas) o símbolos (numeraciones escritas) cuando se va a representar los números. En vez de contar por unidades, se cuenta por paquetes, lo que permite establecer una escala en la sucesión de los números y definir unidades de primer orden, de segundo, de tercero…etc. "Una base numérica es por tanto un número: El número de unidades de determinado orden reunidas para formar una unidad del orden inmediatamente superior" (Guedj, 2000). La base puede estar compuesta de cualquier cantidad de unidades a partir del dos, pero entre menor sea la base, más larga será la escritura de los números. Históricamente existen varios ejemplos significativos, como la base sexagesimal (base 60), la binaria (base dos), pero la que se impuso fue la base 10, ya que el objeto más inmediato que ha tenido el hombre para contar son los dedos de las manos.

Los historiadores Genevieve, Guitel y Georges Ifranh clasificaron los distintos procedimientos que se utilizan para representar los números en: numeraciones aditivas, numeraciones hibridas y numeraciones de posición. Dichos procedimientos utilizan las operaciones aritméticas para componer los números por medio de las cifras.

Las **numeraciones aditivas** emplean la operación de adición para determinar el valor del número, sumando el valor de cada símbolo utilizado para representar dicho número. Este sistema es perfecto para cantidades pequeñas, pero, para cantidades grandes se ve muy limitado. Por ejemplo, el sistema de numeración romano y el sistema de numeración egipcio eran aditivos.

Las **numeraciones híbridas** es un sistema que utiliza simultáneamente las operaciones de adición y multiplicación. Busca evitar las excesivas repeticiones de los símbolos, como ejemplo esta la numeración china.

En las anteriores numeraciones, la potencia de la base se representa de manera explícita en la escritura de los números, ya que, cada una de ellas se representa por una cifra, esto implica que a medida que se trabajará con cantidades cada vez más grandes, se deban añadir nuevas cifras (nuevos símbolos) para lograr representar todas las cantidades, por tal motivo, estos sistemas de numeración eran muy limitados al momento de representar cantidades grandes (Guedj, 2000).

Es por esto, que se requería de un sistema de numeración que no tuviera dicha limitación, por tal motivo, surge la **numeración posicional,** donde el valor de las cifras que representan al número depende de la posición que ocupan en la escritura del número, es decir, que cada posición vale según la potencia de la base, la cual no está explícitamente representada por una cifra en la escritura de los números. Por ejemplo, si vamos a escribir dos mil trescientos setenta y uno, no lo escribimos así: 2.000 300 70 1; sino, 2.371. Es así como los sistemas de numeración posicional son muchos más efectivos que los aditivos y los híbridos, ya que, en ellos, se pueden representar cantidades cada vez más grandes, sin necesidad de crear símbolos diferentes para poder representarlos.

Pero ¿qué pasa si la posición de las decenas está vacía? En ese caso, la existencia del cero es una necesidad, ya que por una parte informa que la posición no cuenta y por otra, que la siguiente posición existe. Por ejemplo, en el número 2003, las decenas y las centenas no cuentan porque esas posiciones están representadas por el cero, entonces, esté ayuda a reconocer que el 3 está en la posición de unas unidades y el 2 en las unidades de mil. Esta idea se ampliará en el capítulo 3.

Ahora, se hará un recorrido histórico por algunas civilizaciones antiguas con el propósito de identificar como fueron desarrollando sus sistemas de numeración y así, dar una posible respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cómo se representan los números en los egipcios, griegos y romanos? ¿Qué tipo de representación utilizaban? y ¿Cómo operaban con las representaciones de los números?

2.1 Los egipcios

La civilización egipcia se destacaba por sus grandes avances marítimos y tecnológicos que permearon a sus actividades administrativa s y comerciales. Esto desnudó las limitaciones de la transmisión oral, dando lugar al registro escrito no sólo como memoria histórica, sino también en la representación de cantidades. De esta forma, inventaron un sistema de numeración escrita, utilizando jeroglíficos basados en la flora y la fauna del Nilo; grabándolos o esculpiéndolos por medio de un cincel y un martillo sobre monumentos de piedra, o trazándolos sobre pedazos de roca, trozos de cerámica u hojas de papiros con un junco con la punta aplastada y mojado en un material colorante.

Desde su origen, la numeración jeroglífica egipcia involucra las 6 primeras potencias de 10, (lo que indica una base decimal), formando los números hasta el millón como se nuestra en la figura 3 del capítulo 1.

Los símbolos de esta numeración jeroglífica se combinan para representar los números intermedios como se muestra en la figura 5, teniendo en cuenta que la escritura es de derecha a izquierda y que es un sistema de base 10 de tipo aditivo.

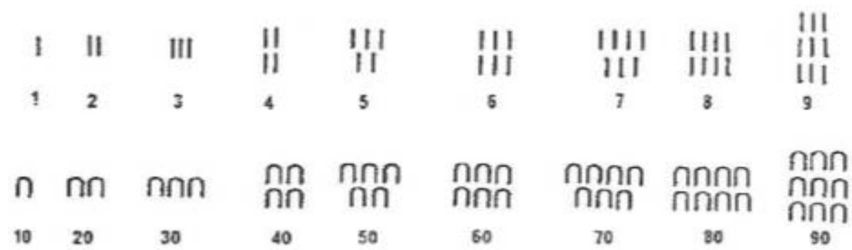
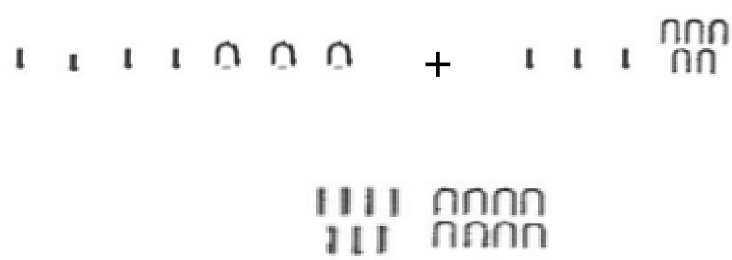


Figura 5. Números intermedios con jeroglíficos

Es decir que para representar el número 34, los egipcios lo hacían de la siguiente forma:

Sin embargo, como el sistema es aditivo, si lo representan a la inversa, también da como resultado 34, ya que basta con sumar la cantidad que representa cada jeroglífico para obtener el resultado.

La aritmética empleada por los egipcios es de tipo aditivo, ya que el procedimiento para realizar las sumas y restas consistía en combinar o quitar los símbolos hasta obtener el resultado concreto y las operaciones de multiplicación y división se convertían en procesos aditivos (Kline, 1992). Por ejemplo, para sumar 34 + 53, se reagrupan los jeroglíficos iguales y se sumaba la cantidad representada por cada jeroglífico.



Para calcular 45 x 24 se deben formar dos columnas: La columna **A** (primera columna) y la columna **B** (segunda columna). La columna A comienza con el jeroglífico del número 1 y en la columna B es debe escribir alguno de los dos números que se van a multiplicar (45 o 24), en este caso vamos a representar el número 45 en la columna B.

A **B**

Luego, se duplican los primeros números de la columna A, hasta obtener un número que se aproxime, pero que no sea mayor al otro número que se quiere multiplicar; en este caso el número 24. En la columna B, duplicamos el número 45, la misma cantidad de veces que duplicamos en la columna A. Por ende, en la columna A, tenemos los jeroglíficos que representan los números 1, 2, 4, 8 y 16 y en la columna B, tenemos los jeroglíficos que representan los números 45, 90, 180, 360 y 720, como se muestra en la figura 6.

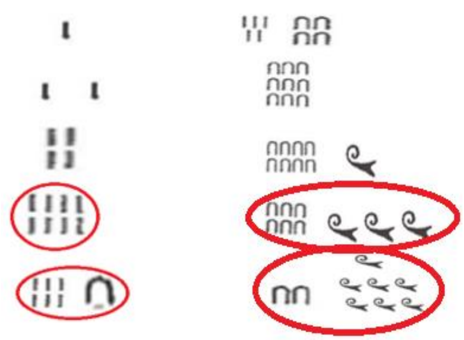


Figura 6.Multiplicación egipcia.

Luego, seleccionamos de la columna A, los números de mayor a menor que sumados den 24, en este caso, los números que estas encerrados de color rojo (16 y el 8). De la columna B tomamos los números que están al frente, es decir, los que están encerrados (720 y el 360). Para obtener el resultado, se realiza el siguiente calculo:

$$16 + 8 = 720 + 360 = 1.080 = 45 \times 24$$

Para dividir 328 / 15, se debe proceder de manera similar a la multiplicación, sin embargo, el primer número de la columna B debe ser el divisor, en este caso el número 15. Posteriormente, seleccionamos de la columna A los números de mayor a menor que sumados den un resultado igual o lo más próximo al dividendo (328), pero que no se pase y de la columna B los números que estén al frente como se muestra en la figura 7.

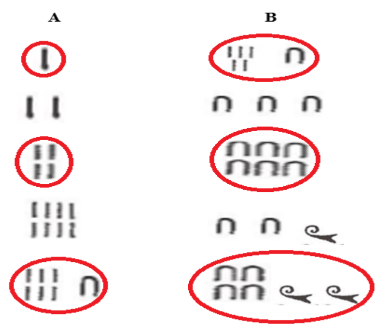


Figura 7.División egipcia.

Para obtener el cociente de la división, sumamos los números marcados de la columna A, es decir 16 + 4 + 1 = 21 y para encontrar el residuo, sumamos los números marcados de la columna B, es decir, 240 + 60 + 15 = 315, y luego hacemos una resta entre el dividendo (328) y el anterior resultado (315), es decir 328 – 315= 13, entonces 13 es el residuo de la división.

Por ende, la multiplicación y la división se pueden reducir a procesos aditivos porque todos los números se pueden representar como la suma de distintas potencias de dos y se puede aplicar la propiedad distributiva.

Los egipcios no concebían a las fracciones como números, sino como acciones de reparto; es por lo que trabajan solo con fracciones unitarias (las fracciones cuyo denominador es 1 y el denominador es un número entero positivo). En los monumentos y papiros egipcios estaban plasmados los jeroglíficos que utilizaban para representar las fracciones unitarias, en ellos se observa que utilizaban el símbolo  (se pronuncia como ro) y debajo, colocaban un número con jeroglíficos para indicar el denominador de la fracción unitaria, como se muestra en la figura 8.

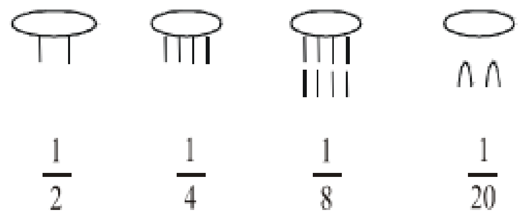


Figura 8. Ejemplos de fracciones impropias en la numeración egipcia.

Tenían símbolos especiales para las fracciones $\frac{1}{2}$ =  , $\frac{2}{3}$ =  y $\frac{1}{4}$ =

Y en el papiro de Rhind[4] se muestra que, para representar las demás fracciones, se hace una descomposición con sumas de fracciones unitarias distintas.

Por ejemplo $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, $\quad \frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$, $\quad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

Los egipcios realizaban las cuatro operaciones aritméticas con las fracciones utilizando las fracciones unitarias, pero eran cálculos muy complicados y la misma representación de fracciones no facilitaba la operatividad, lo que tal vez ocasionó que los egipcios no desarrollasen una aritmética avanzada (Kline, 1992).

2.2 Los griegos

Los griegos que tienen sus raíces en la Grecia antigua hicieron aportes muy importantes en el desarrollo de las matemáticas occidentales modernas, pero esto no niega que antes existiera

---

[4] También conocido como Papiro de Ahmes en honor a su autor, es un documento extenso que contiene problemas matemáticos (escritos por los escribas) y las soluciones (Kline, 1992).

una actividad matemática; la diferencia radica en que las matemáticas egipcias, romanas y babilónicas tenían un enfoque más pragmático, relacionadas a los problemas de construcción, conteo y la administración de sus territorios, algo más contextualizado a las necesidades de la población de esa época. Mientras que los griegos, lograron construir un universo de objetos matemáticos independientes a las necesidades cotidianas de la población, ya que reconocieron que los objectos matemáticos son abstracciones del pensamiento lo que los hace especiales y diferentes a los objetos físicos. Por lo tanto, los griegos se enfocaron en la necesidad de demostrar, por ende, la demostración matemática, es el legado de la matemática antigua griega (Recalde L. C., 2018).

El sistema de numeración griego es decimal de tipo aditivo y alfabético, ya que utiliza las letras para representar los números como se muestra a continuación:

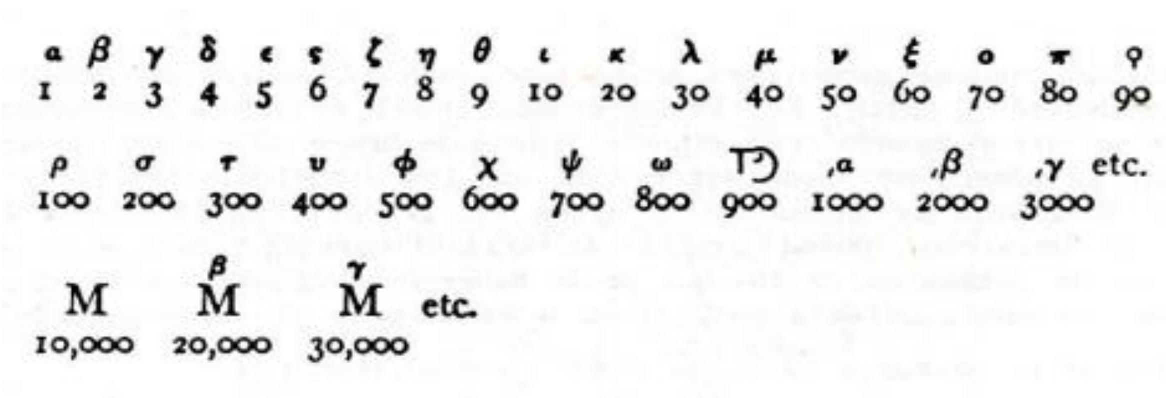


Figura 9: Numeración griega

A partir del 1.000, el alfabeto empezaba de nuevo, pero le colocaban una coma delante del símbolo con el fin de evitar confusiones. Los griegos carecían del cero y realizaban las operaciones de adición, sustracción e incluso multiplicación utilizando el ábaco.

La matemática griega tiene sus inicios en el siglo VI a.C con Tales y Pitagoras, los cuales son muy importantes en el pensamiento occidental. Se conoce poco de los desarrollos conceptuales que hicieron dichos autores, sin embargo, por medio de algunos antiguos historiadores como Proclo, Aristóteles y Platón sabemos de su existencia.

De Tales se dice que es el “padre de la geometría”, siendo el primero en desarrollar las siguientes demostraciones: El diámetro divide al círculo en dos partes, los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, los ángulos opuestos por el vértice son iguales y los triángulos que tengan dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido entre ellos también iguales, son congruentes.

De Pitágoras se conoce que fue el primero en ver a la matemática de una manera libre, que no solo se practica por necesidad, sino por placer. En la escuela pitagórica se desarrolló la primera teoría abstracta de los números y también se descubrieron las magnitudes inconmensurables. Los estudios de Tales y Pitágoras se complementan más adelante con los estudios de Euclides.

Los pitagóricos representaban a los números como arreglos geométricos que clasificaban de acuerdo con las formas que se construían según la distribución.

Así, los números 1, 2, 3, 6, 10, … los llamaban triangulares porque al distribuir los puntos se forma un triángulo equilátero como se muestra en la figura 10.

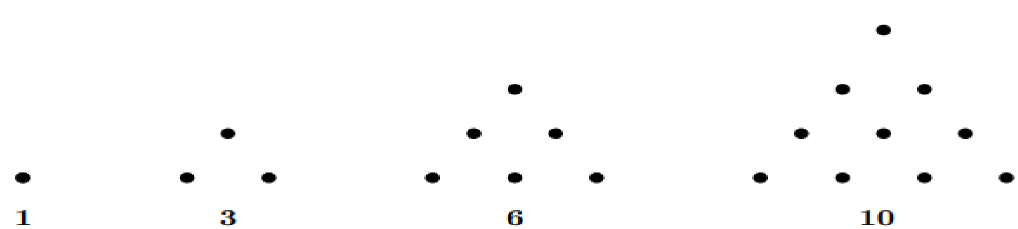


Figura 10.Números triangulares

Los pitagóricos probaron que al sumar el numero con sus antecesores podían formar todos los números triangulares, es decir:

$1, 1 + 2 = 3,\ \ 1 + 2 + 3 = 6,\ \ 1 + 2 + 3 + 4 = 10,\ \ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \ldots$

Al seguir sumando obtenemos lo siguiente:

$$a_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Los números 1, 4, 9, 16… son llamados cuadros porque sus puntos se pueden distribuir formando un cuadrado como se muestra en la figura 11.

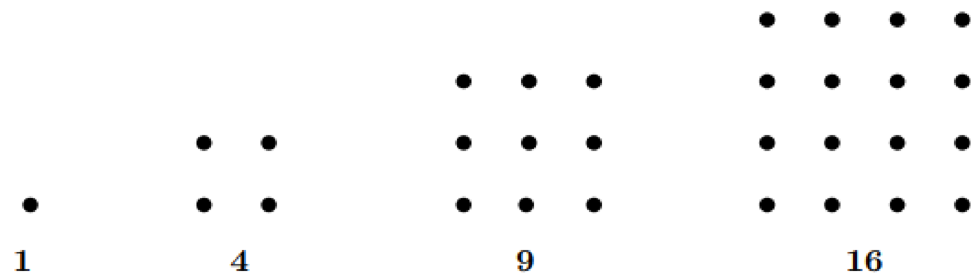


Figura 11.Números Cuadrados

Entonces, si partimos del número cuadrado 1 y a este le agregamos el gnomon 3 y después el gnomon 5 y así sucesivamente, obtenemos que un número cuadrado es de la forma

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Si queremos pasar de un número cuadrado al siguiente, lo podemos hacer de la siguiente forma:

$$1^2 + 1 + 2 = 4 = 2^2$$

$$2^2 + 2 + 3 = 9 = 3^2$$

$$3^2 + 3 + 4 = 16 = 4^2$$

$$4^2 + 4 + 5 = 25 = 5^2$$

Y si seguimos haciendo los anteriores pasos, obtenemos que:

$$n^2 + n + (n+1) = (n+1)^2$$

El número 12 se llama oblongo porque al distribuir los puntos, el número de columnas es mayor al número de filas, es decir, que su arreglo geométrico forma un rectángulo, como se muestra en la figura 12.

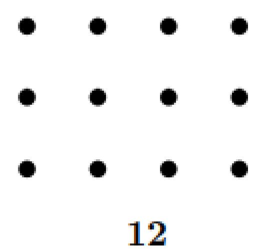


Figura 12.Números oblongo

De la representación figural de los números, los pitagóricos lograron establecer propiedades muy importantes como obtener los numero cuadrado o que los números cúbicos son siempre iguales a la suma de números impares consecutivos por nombrar unas cuantas.

Los pitagóricos establecen una teoría para las magnitudes conmensurables e inconmensurables (convirtiéndose este último en los primeros antecedentes de los números irracionales), estableciendo las siguientes definiciones:

Definición: Un segmento A mide a otro segmento B, si se tiene que $B = nA$, para algún número n que pertenece a los números naturales.

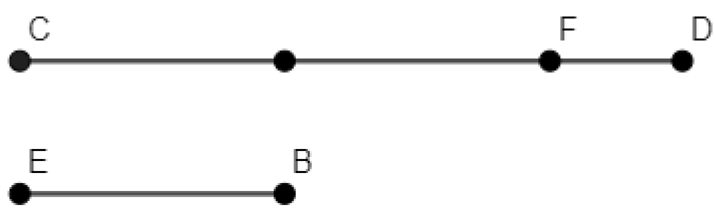
Definición: Dos segmentos (magnitudes) AB y CD se dicen conmensurables, si existe números n y m, tales que $nAB = mCD$, o lo que es lo mismo: los segmentos AB y CD son conmensurables si se puede hallar otro segmento EF tal que: $AB = nEF \ y \ CD = mEF$, donde n y m son números naturales. Cuando dos segmentos no son conmensurables se dicen inconmensurables.

Por ejemplo, sean los segmentos AB y CD.

Si comparamos CD con AB, se observa que CD no cabe en AB una cantidad exacta, sobra el segmento EB, por tanto

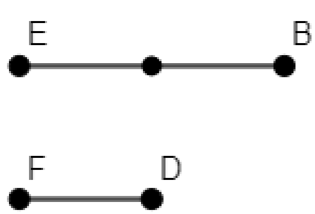
$AB = 3CD + EB$ (1)

Ahora, vamos a comparar EB con CD



Vemos que EB tampoco cabe exactamente en CD, entonces $CD = 2EB + FD$ (2)

A continuación, vamos a comparar EB y FD



Observamos que FD mide a EB, es decir, $EB = 2FD$ (3)

Finalmente, si reemplazamos EB en (2), se obtiene que:

$$CD = 2(2FD) + FD$$

$$CD = 5FD \text{ (4)}$$

Ahora, reemplazamos (3) y (4) en (1) y se obtiene:

$$AB = 3(5FD) + 2FD$$

$$AB = 17FD$$

Por lo tanto, los segmentos AB y CD son conmensurables, porque existe un tercer segmento FD que permite medir a AB y CD al mismo tiempo, es decir que:

$$AB = 17FD\ y\ CD = 5EF$$

El anterior procedimiento es lo que Euclides (330 a.C. – 275 a.C.), un matemático y geómetra griego, denomina *antiphairesis*, o algoritmo de Euclides, que es un método para calcular el MCD (máximo común divisor). Ahora, si al hacer el procedimiento, no se logra encontrar una magnitud que mida a las anteriores, las magnitudes iniciales serán inconmensurables.

Euclides considera importante incorporar una teoría formal de los números y las magnitudes por medio de definiciones, axiomas, postulados y proposiciones que muestran una organización deductiva. Es así, como construye su obra, los *Elementos*, que es uno de los tratados más importantes que logra sintetizar los trabajos realizados por los griegos y contribuyen a comprender los inicios de la historia de las matemáticas.

En los *Elementos* que son el derrotero de la actividad matemática, se plantea la teoría de las cantidades; que consta de 13 libros: Los libros VII, VIII, IX que se centran en la aritmética, es decir en los números y los demás libros, que se enfocan en las magnitudes. En el libro X, que trata sobre las magnitudes inconmensurables, se rastrea algunas intuiciones sobre los números irracionales, dando algunas bases para la formalización de los números reales (Pineda & Ñañez, 2018).

Gran parte del programa euclidiano se inscribe en la filosofía aristotélica. Esto es importante tenerlo presente, para comprender en su totalidad la teoría de los *Elementos*. De acuerdo con Aristóteles, en los *Elementos*, se evidencian dos líneas teóricas: Los números y las magnitudes. Los números se entienden, como aquello que se puede dividir en partes no continuas y se considera una pluralidad, compuesta por la unidad (el número uno), es por esto, que el número 1, no era considerado como número, ya que no puede medirse a sí mismo y el número 0, tampoco era considerado como número porque no cumplía la definición.

Euclides no da una definición de las magnitudes, pero las concebía como aquellas que se pueden dividir en partes continuas, las cuales, cumplen la propiedad de continuidad; propiedad importante para la construcción de los números reales. Aristóteles mencionaba que los números y las magnitudes se relacionaban por medio de la medida y que el conjunto numérico que empleaban los griegos, eran los números naturales, excepto el uno y el cero (Pineda & Ñañez, 2018).

Por lo anterior, Euclides en los *Elementos*, define al número en términos de la unidad, ya que concibe a la unidad como el principio de los números, la cual no puede dividir. La unidad se puede representar con una raya horizontal o vertical, pero dicha representación no significa que sea un segmento que se pueda dividir.

En el libro V de los *Elementos* se introduce los conceptos de razón y proporción, con el fin de establecer relación de cantidad entre magnitudes (abarcando a las magnitudes inconmensurables), partiendo del hecho de que se puede sumar, restar y comparar magnitudes.

Euclides define que una razón es una relación entre dos magnitudes A y B de la misma naturaleza, la cual se representa como $A\colon B, \frac{A}{B}$ *o* $^{A}/_{B}$. El símbolo $A\colon B$, "*prefigura al cociente* $a \div b$ *o* $\frac{a}{b}$*, pero el cual posee un status ontológico diferente a las "razones". Más concretamente, la "razón" es un proceso de comparación entre magnitudes"* (Recalde & Arbeláez,2011, pág. 58). Luego define a las proporciones como aquellas magnitudes que guardan la misma razón.

En el libro X se menciona que si A y B son magnitudes homogéneas, serán conmensurables si se puede hallar otro segmento C tal que: $A = nC \ y \ B = mC$, donde n y m son números naturales. Euclides dice que C sería la parte alícuota común y que para ciertos números naturales m y n, se podría establecer los siguientes:

$$A/B = nA/mB = n/m$$

Es decir que, las magnitudes conmensurables A y B se puede expresar mediante la razón de dos números naturales n/m (el recíproclo también es válido), pero las razones de magnitudes incomensurables, no pueden expresarse como razón de números natruales, y por esto, se denominaron irracionales; sin embargo, en el libro V de los *Elementos*, se establece una teoria para las razones, la cual, involucra a las razones de magnitudes conmensurables e inconmensurables. Por tal motivo, las razones se pueden considerar como un aporte muy valioso para la incorporación de los números reales, ya que establece una teoría para trabajar con razones de magnitudes inconmensurables que representan a los irracionales.

2.3 Los romanos

El sistema de numeración de los romanos utiliza símbolos que conservan algunas características del sistema de numeración griego y el babilónico. Los romanos al igual que los griegos, utilizaron algunas letras del alfabeto para representar los números; sin embargo, repetían dichos símbolos para formar los números como en el sistema babilónico. Los romanos inventaron símbolos para cada aumento de 5 unidades, diferente a los babilónicos que tenían un símbolo diferente para cada incremento de 10 unidades.

1	I	11	XI	50	L
2	II	12	XII	100	C
3	III	13	XIII	500	D
4	IV	14	XIV	1000	M
5	V	15	XV		
6	VI	16	XVI		
7	VII	17	XVII		
8	VIII	18	XVIII		
9	IX	19	XIX		
10	X	20	XX		

Figura 13.Numeración romana

Para representa el sistema de numeración de los romanos, se utilizaba como base los símbolos que se observan en la figura 13 y algunas reglas que permiten sumar, restar o repetir una cantidad determinada los símbolos. Al ser un sistema de tipo aditivo, para representar los números, se iban adicionando los respectivos símbolos para luego sumar sus respectivas cantidades. Esto se evidencia al momento de representar el 1, 2 y 3, ya que la unidad la representan con I y para el dos, adicionan otra unidad y se obtiene el II; para el 3 utilizan el símbolo III.

Para el número 5 emplearon el símbolo V y con base en este símbolo y en la regla que establece que un símbolo de menor cantidad ubicado a la izquierda de un símbolo de mayor cantidad; a este último, se le debe restar el símbolo de menor cantidad., por ende, IV representa el número 4.

Para el 10, utilizaron la X, para el 50 la L para el 500 la D y para el 1.000 la M. Con estos símbolos lograron representar números como el **mil novecientos sesenta y tres** de la siguiente forma: MCMLXIII. Como es un sistema aditivo, el orden como se escribe el número no altera el resultado, ya que para saber el número que se está representado, basta con sumar la cantidad o valor numérico que representa cada símbolo, teniendo en cuenta las reglas que inventaron para cuando sumar o restar la cantidad de los símbolos, sin embargo, por convención los números se escriben y se leen de izquierda a derecha, no se acepta restar más de un número, ni repetir un símbolo más de cuatro veces (Kline, 1992).

Con los símbolos que utiliza el sistema de numeración romano, se puede llegar a representar hasta el número Cuatro mil novecientos noventa y nueve, el cual sería MMMMDCCCCLXXXXVIIII o simplificando se obtendría MMMMCMXCIX. Para representar el cinco mil, como no es permitido repetir un símbolo más de 4 veces, entonces, los romanos decidieron colocar una barra horizontal para representar los miles. En este sentido, cinco mil sería $\overline{V}$, pero también recurrieron a los símbolo más primitivo del mil (I), es decir que diez mil seria ((I)) y cien mil (((I))) (Kline, 1992).

El sistema de numeración romana ofrece métodos para representar los números así necesite emplear muchos símbolos cuando se trate de números muy grandes, sin embargo, para realizar las operaciones aritméticas, dicha representación no ofrece suficiente apoyo, ya que las operaciones se vuelven muy tediosas al tener que manipular tantos símbolos. Por esta razón, los romanos decidieron hacer uso de recursos auxiliares que le permitieron hacer operaciones con mayor facilidad. Uno de estos recursos es el ábaco romano, conocidos como abacus.

El ábaco romano podía ser de madera, metal, marfil o cualquier material resistente. Se conformaba por 6 columnas o ranuras, que representaban a las potencias de 10: I, X, C, M, $\overline{M}$, $\overline{C}$. Estos valores numéricos se ubicaban de tal forma que dividían al ábaco en dos partes.

Las columnas más cortas que están encima de los valores numéricos representan el espacio para las agrupaciones de 5 unidades, 5 decenas, 5 centenas, etc.; mientras que las columnas de abajo se ubican las unidades que corresponde al valor de cada columna (Torres, 2019).

Para realizar la suma entre MCCCIX (1.309) y DCCCLXXIV (874), los romanos utilizaban, piedras u objetos pequeños para representar cada número en el ábaco y tenían dos procesos de reducción. El primero mencionaba que cada vez que se agrupan cinco piedras en la parte baja de un columna, estas eran reemplazadas por una única piedra en la parte superior de dicha columna y el segundo proceso mencionaba que, si se alcanza el valor de 10 en una columna, se retiraban todos las piedras de la columna y se reemplazaba con una única piedra en la parte inferior de la columna siguiente (Torres, 2019). En este trabajo se utilizarán puntos rojos para representar el número MCCCIX y puntos verdes para representar el número DCCCLXXIV.

Para representar el número MCCCIX en el ábaco romano, colocamos un punto rojo en la parte bajo de columna de M, tres puntos rojos en la parte de abajo de la columna de C y como IX representa 9 unidades; la columna de X, queda vacía. Para representar el IX, colocamos un punto rojo en la parte superior de la columna I y 4 en la parte de abajo. Para representar el número DCCCLXXIV, colocamos un punto verde en la parte superior de la columna C y tres puntos verdes en la parte de debajo de la misma columna. Luego, colocamos un punto verde en la parte superior de columna X y dos puntos en la parte baja de la misma columna. Para terminar, se coloca 4 puntos en la parte de debajo de la columna I, como se observa en la siguiente figura.

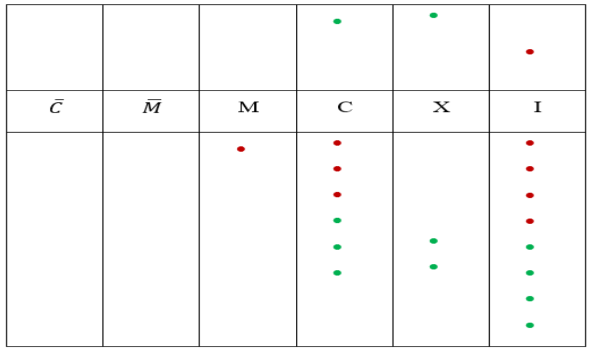


Figura 14.Representación de los números MCCCIX y DCCCLXXIV en el ábaco romano.

Para encontrar el resultado, se suma los puntos de cada columna comenzando por las unidades I , luego se procede a realizar las reducciones pertinentes, como se muestra en la siguiente ilustración. La resta tiene el mismo procedimiento, pero a la inversa.

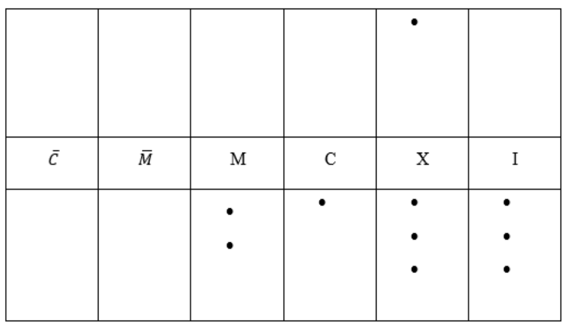


Figura 15.Suma de los números MCCCIX y DCCCLXXIV en el ábaco romano.

Para la multiplicación y división, se menciona otro tipo de ábaco más usual entre el pueblo romano. En este ábaco, las columnas eran varillas que se prolongaban por encima de signos indicadores (valores numéricos). Para representar los números se desplazaban las fichas hacia arriba, ya que cada las fichas se introducían en las varillas.

Para hacer la multiplicación, los romanos tenían la dificultad de saber en qué posición quedaría el resultado, por tal motivo, “para hallar el número de lugares del producto se suman los de ambos factores y se le resta 1 de la suma. Por ejemplo, si vamos a multiplicar 400 x

200, al sumar las posiciones obtenemos 6 y a 6-1= 5, por tal motivo, el producto estará en la quinta columna del ábaco.

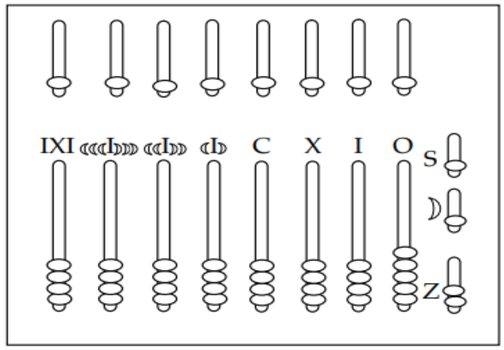


Figura 16.Otro tipo de ábaco romano

Se puede observar que los egipcios, romanos y griegos construyeron sistemas de numeración de tipo aditivo y de base 10. En los tres sistemas de numeración no concebían la existencia del cero como número, es decir, no era posicional; lo que produjo limitaciones al momento de representar cantidades cada vez más grandes y para establecer algoritmos operativos para las operaciones aritméticas básicas, recurría al uso de ayudas o herramientas físicas como los dedos, tablas o ábaco para realizar las operaciones. Por ende, se requiere de un sistema de numeración que lograra representar cualquier cantidad numérica con la menor cantidad de símbolos y que permitiera establecer algoritmos operativos sin requerir de ayudas o herramientas físicas.

Es así como vemos que los sistemas de numeración desarrollados en las antiguas civilizaciones contribuyeron como un antecedente al sistema de numeración decimal indo-arábigo o representación decimal o sistema de representación, quien logra capturar diferentes aspectos de los sistemas de numeración de las antiguas civilizaciones.

Por otro lado, en los griegos se presenta un antecedente lejano de los números irracionales con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.

Capítulo 3: Sistema de representación decimal.

Teniendo en cuenta que los sistemas de numeración griegos y romanos requerían de herramientas físicas como el ábaco para realizas operaciones, en este capítulo se resalta el papel de la representación decimal como herramienta conceptual para el establecimiento de algoritmos operativos, el cual permitió escribir sobre el papel el paso a paso del algoritmo, lo que no se lograba hacer con el ábaco.

Se empieza con un recorrido histórico por la cultura hindú y árabe con el fin de mostrar sus principales aportes al desarrollo de las matemáticas, partiendo de la construcción del sistema de numeración decimal indo-arábigo o representación decimal.

3.1 El surgimiento de la representación decimal: la tradición hindú y árabe.

3.1.1. Hindúes

Se sabe con respecto a la civilización hindú que en el período de Sulvasutra, el cual comienza a partir del 800 a. C. hasta el año 200, había algún tipo de producción matemática rudimentaria. Además, aproximadamente a partir del siglo III a. C. empiezan a aparecer símbolos numéricos, como se puede observar en la figura 17.

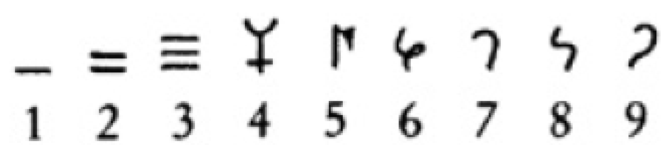


Figura 17. Símbolos de Brahmi

Se puede observar que existe un símbolo individual para las unidades de primer orden, es decir, para los números entre el 1 y el 9, sin embargo, aún no existía un símbolo para el cero y no había notación posicional. Fue hasta el año 600 cuando el sistema de numeración de los hindúes adopto la notación posicional en base 10 y el cero fue considerado como número. Los hindúes le dieron el estatus de numero al cero con el fin de que representara la ausencia de una cifra en el sistema de numeración posicional y para representar una cantidad nula. Con estas características, se puede decir que los hindúes lograron construir un sistema de numeración que facilitó la representación de cantidades grandes y la realización de algoritmos operativos que no requieran de una herramienta física como el ábaco para su ejecución.

El matemático Mahavira consideraba que la multiplicación de un número por cero da cero y que la sustracción de cero no disminuye el valor del número, lo cual coincide a como lo consideramos actualmente. No obstante, asevera que, al dividir un número por cero, su valor permanece invariable.

Por su parte, el matemático Bhaskara, al hablar de una fracción cuyo denominador es cero, afirmando que:

> Dicha fracción permanece invariable, aunque se añada o sustraiga cualquier cantidad, así como no sufre ningún cambio la inmutable divinidad cuando se crean y destruyen los mundos. Un número dividido por cero añade, se designa como una cantidad infinita (Kline, 1992, pág. 380).

Para las fracciones, los hindúes en la astronomía usaban la notación posicional sexagesimal. Para otras finalidades utilizaban una razón de enteros, pero sin la barra. Más aún, las operaciones aritméticas eran muy parecidas a las que utilizamos hoy en día, por ejemplo, el matemático Mahavira proporciona la regla habitual de división por una fracción, es decir, la de invertir y multiplicar.

También, los hindúes introdujeron los números negativos para indicar deudas. Aproximadamente en el año 628, el matemático Brahmagupta, da las reglas de las cuatro operaciones para los números negativos. De otro lado, con respecto al concepto de raíz cuadrada, el matemático Bhaskara menciona que la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo, además identifica que no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Algo muy relevante que consideraron los matemáticos hindúes fue el hecho de calcular con números irracionales, estos últimos eran tratados como si fueran números enteros, lo cual permitió la obtención de métodos útiles para operar con algunos números irracionales, pero sin ser demostrados. En (Kline, 1992) se expone:

> Su interés en el cálculo les hizo pasar por encima de consideraciones filosóficas, o cuestiones que los griegos creían eran fundamentales. No obstante, al aplicar alegremente a los irracionales métodos semejantes a los usados con los racionales ayudaron al progreso de las matemáticas. Además, toda su aritmética fue completamente independiente de su geometría (Kline, 1992, pág. 383).

Por ejemplo, Bhaskara para sumar dos irracionales, a estos números los trataba como si fueran enteros, es decir, que la suma de los dos irracionales $\sqrt{3}$ y $\sqrt{12}$ es:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{(3 + 12) + 2\sqrt{3 \times 12}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, para sumar dos irracionales de la forma $\sqrt{x}$ con $x \in \mathbb{N}$, los matemáticos hindúes generalmente aplicaban lo siguiente:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}}.$$

En consecuencia, la matemática que se desarrolló en la civilización hindú es menos sofisticada que la elaborada por los griegos, porque no se detuvieron a detectar la naturaleza y la lógica que guarda los números irracionales. Los matemáticos hindúes sólo se preocupaban por calcular, lo cual resultó un progreso de las matemáticas, esto debido a que su aritmética empleada quedó totalmente independiente de su geometría.

3.1.2. Árabes

Con respecto a los árabes, se conoce que utilizaban un sistema decimal que se había desarrollado y pulido en la India. Tomaron y mejoraron los símbolos numéricos desarrollados por los matemáticos hindúes, usándolos para representar los números enteros y las fracciones, a éstas últimas le añadieron una barra.

Más aún, los árabes operaban con los números irracionales de la misma forma que lo hacían los hindúes, sin embargo, los números negativos fueron rechazados, a pesar de conocer los resultados dados por la civilización hindú.

En el libro *De numero indorum* de Musa Al-KhowArizmi que fue escrito alrededor del año 820, se consolido las características del sistema de representación decimal indo-arábigo y su operatividad, la cual permitió aumentar la precisión de los cálculos, ya que el uso de las cifras arábigas en los cálculos facilito la posibilidad de obtener mejores resultados. Un ejemplo es la aproximación que obtuvo Al-Kasi del número π=3.1415926535358979 (López, 2010).

Por otro lado, con relación al álgebra, los árabes proporcionaron diversos resultados, una de sus grandes contribuciones fue producida sobre el año 830, por el astrónomo Mohammed ibn Musa Al-KhowArizmi en su libro Al-jabr w'al muqábala. Según Kline:

> El álgebra de al-Khowárizmi está basada en el trabajo de Brahmagupta, pero muestra también influencias babilonias y griegas. Al- Khowárizmi ejecuta algunas operaciones exactamente igual que Diofanto (Kline, 1992, pág. 396).

En el trabajo de Al-KhowArizmi, él resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas, pero considera las seis formas distintas, por ejemplo, las del tipo $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$ y $ax^2 = bx + c$, siendo a, b, c números positivos. Al- Khowárizmí reconoce que una ecuación cuadrática puede tener dos raíces, pero sólo le interesa las que son reales y positivas.

Además, para justificar sus procesos se apoyaban de la geometría, lo que significa que para sus demostraciones utilizaban métodos geométricos. En este sentido, podemos decir que los árabes fueron influenciados por los griegos en el álgebra geométrica, esto es porque "aritmetizaban el problema, debían pensar que la demostración había que hacerla con métodos geométricos" (Kline, 1992, pág. 396).

Por ejemplo, Al-KhowArizmi para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$, lo que hace es:

> Tomemos la mitad del número de raíces, esto es, en este caso, cinco, y multipliquemos esta cantidad por sí misma y el resultado es veinticinco. Añadámosla a treinta y nueve, lo que da sesenta y cuatro; tomemos su raíz cuadrada, u ocho, y restémosle la mitad del número de raíces, precisamente cinco, y queda un resto de tres. Esta es la raíz (Kline, 1992, pág. 397).

Lo cual es equivalente al método de completar un cuadrado. Más aún, para justificar sus pasos Al-KhowArizmi apoyó su procedimiento aritmético en la siguiente la figura:

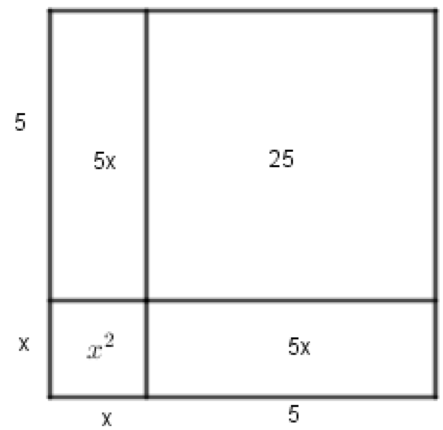


Figura 18. Solución de ecuación cuadrática

También, en el trabajo de Al-KhowArizmi, se evidencia que los árabes no usaron ninguna clase de simbolismo, dado que su álgebra es completamente retórica. En consecuencia, tal hecho representa un retroceso si se compara por el simbolismo utilizado por los matemáticos indios, como también lo empleado por parte de Diofanto.

Por lo tanto, se puede decir que los árabes no produjeron un avance significativo en las matemáticas, porque lo que hicieron fue aprender lo producido por las matemáticas griegas y las desarrolladas por la civilización hindú, además de conservarlas y trasmitirlas por Europa.

No obstante, es importante destacar que, gracias a la aceptación de números irracionales por parte de los árabes, se hizo posible asignarle valores numéricos a todos los segmentos lineales y a las figuras de dos y tres dimensiones. Concluyendo así que los árabes dieron un gran paso en exhibir que el álgebra y la geometría mostrando que las dos ramas podían existir sin llegar a contradicciones, es decir, podían coexistir.

3.2 La introducción de la representación decimal en Europa por medio de Fibonacci

Entre los años 1100 y 1450, la actividad matemática se basó en lo desarrollado en la literatura griega y árabe. Uno de sus grandes contribuyentes fue Leonardo de Pisa (1170-1250), también conocido como Fibonacci, quien viajo por los países del Mediterráneo para lograr estudiar con los matemáticos árabes.

Él observó que las técnicas operativas realizadas por los árabes con el sistema de numeración decimal eran más eficaces y sencillas, que las utilizadas en los países europeos, ya que estos últimos, utilizaban en su mayoría el sistema de numeración romano. Por ende, Fibonacci aprendió a realizar las operaciones aritméticas básicas empleando números indo-arábigos y posteriormente, escribió el paso a paso de las operaciones en papel; lo que no permite hacer el sistema de numeración romano ya que requiere del uso del ábaco para realizar cálculos.

En 1202, Leonardo escribió su libro Liber abaci o *El libro del ábaco*, el cual consistía en una compilación de materiales árabes y griegos (que además fueron traducidos al latín) que contribuyo en la introducción del sistema decimal indo-arábigo en Occidente, ya que la gente en esa época utilizaba los números romanos y no hacían uso del cero porque no lo entendían. Entonces, gracias al libro de Leonardo de Pisa que explicaba cómo se podían representar los números con el sistema decimal y el funcionamiento de las operaciones, se ejerció una gran influencia en el método incorporado por la civilización hindú en Occidente, con respecto al cálculo con números enteros, la divisibilidad, las proporciones, las fracciones, las raíces cuadradas y cúbicas, y la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado (Ugarte, 2011).

Tanto en *El libro del ábaco* como en el Líber Quadratorum (1225) o Libro de los cuadrados, Leonardo trabajó en el álgebra. Partió de los trabajos realizados por los árabes, así que usó palabras en lugar de símbolos y basó el álgebra en métodos aritméticos. Expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primero y segundo grado, así como algunas ecuaciones cúbicas. Él creía que las ecuaciones cúbicas no podían ser resueltas algebraicamente.

Algo importante para atribuirle a Leonardo de Pisa es "la observación de que la clasificación de Euclides de los irracionales en el libro X de los Elementos no incluía todos los irracionales. Leonardo mostró que las raíces de $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ no pueden construirse con regla y compás" (Kline, 1992, pág. 431). Lo anterior fue un gran indicio de que existían otro tipo de números a los considerados por los griegos.

En *El libro del ábaco* Leonardo introduce lo que hoy se conoce como sucesiones de Fibonacci, que consisten en que cada término es la suma de los dos precedentes, es decir

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, a_n, \dots$$

Donde $a_1 = a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$, si $n \geq 3$. Dicha sucesión cumple la propiedad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, puede que Fibonacci no haya logrado establecer un algoritmo para la solución de ecuaciones cubicas, sin embargo, es importante resaltar el hecho de mostrar la existencia de soluciones no racionales de ecuaciones que no corresponden a raíces cuadradas.

Además, él explicó los principios del valor posicional, describiendo las formas de los numerales y mostrando cómo escribir números grandes (ya sea colocando un punto encima de cada centena y debajo de cada mil, o uniendo grupos de tres numerales con un pequeño trazo curvo llamado vírgula).

También en su libro, Fibonacci muestra un procedimiento para calcular con los dedos, el cual fue ampliamente utilizado por los eruditos y comerciantes medievales, y que se consideraba la forma más fácil y rápida de realizar cálculos. Leonardo de Pisa proporcionó tablas de suma y multiplicación para consultarlas o memorizarlas a fin de facilitar los cálculos.

En los capítulos 6 y 7 de su libro, Fibonacci desarrolla lo que hoy se llama números mixtos, números que comprenden tanto un número entero como una parte fraccionaria. Leonardo explicó que para calcular números mixtos lo primero que hay que hacer es cambiarlos a su forma fraccionaria (lo que hoy llamaríamos "fracciones impropias"), después se calcula con ellos y luego se convierte la representación obtenida de nuevo a forma mixta.

El uso de la representación decimal permitió establecer algoritmos operativos que no requerían de una herramienta física como el ábaco para su ejecución. Dichos algoritmos eran muy parecidos a lo que usamos en la actualidad. Por ejemplo, Mahavira proporción la regla que utilizamos para la división de fracciones: invertir y multiplicar. Brahmagupta proporciona reglas para realizar las cuatro operaciones básicas con los números negativos, Bhaskara indica que las raíces cuadras de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo, sin embargo, solo se centra en las raíces positivas ya que considera que las raíces negativas no representan números cuadrados.

Otro aporte importante para el establecimiento de algoritmos operativos es el valor aproximado que se encontró del número π=3.1415926535358979, gracias al uso de las cifras indo-arábigas. El matemático y astrónomo hindú Aryabhata escribió una obra denominada *Aryabhatiya* donde se establecen "*abundantes reglas de cálculo, fórmulas para progresiones* *aritméticas, áreas, volúmenes y una tabla de senos, mostrando su familiaridad con el sistema decimal*" (López, 2010, pág. 51).

Gracias a la representación decimal los algoritmos para resolver ecuaciones cuadráticas, cubicas, dan lugar a establecer soluciones aproximadas tanto como se quiera, ya que se puede establecer representaciones de los radicales cada vez más grandes, es decir, gracias a la representación decimal podemos establecer diferencias entre $\sqrt{2}, \sqrt{3},$ entre otros.

Capítulo 4: Algunos antecedentes a las construcciones formales de $\mathbb{R}$

En este capítulo se presentan algunos antecedentes a la construcción formal de los números reales por Georg Cantor. Se menciona los números irracionales como fracciones continuas, mostrando la representación aproximada que John Wallis hace de $\frac{4}{\pi}$, plantea que dicha representación no muestra la naturaleza del número $\frac{4}{\pi}$, pero indica que existen otros números que no son racionales. Posteriormente se presenta los aportes de Euler con la teoría de las fracciones continuas, donde se resalta la diferencia que establece entre las fracciones continuas finitas y las fracciones continuas infinitas. Luego, se presenta los estudios de Cauchy que introduce el concepto de límite de una sucesión de números racionales, con el fin de introducir los números reales; mencionando que los números racionales no son completos, ya que existen sucesiones de racionales que convergen a un número que no es racional. Por último, se menciona a Méray, quien denomina límites o números ficticios a los límites de dichas sucesiones de números racionales que no convergen a un racional, es decir, los números irracionales.

4.1. La representación en fracciones continuas

Por su parte, el matemático inglés John Wallis (1616-1703) consideraba a los irracionales como números, es decir, "*aceptaba los irracionales como números en sentido estricto, basado en la idea de que el libro V de los Elementos era un libro de naturaleza esencialmente aritmética.*"[5] Además, realiza importantes avances en el cálculo y resuelve el problema de la cuadratura del círculo.

[5] Lecturas de historia de las matemáticas (Recalde, 2018).

Wallis, en su libro *La Aritmética del infinito* (1655), le otorga a 4/π la siguiente representación:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \ldots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \ldots},$$

dicha expresión, aunque no dice mucho de la naturaleza de π, proporciona la idea de que hay números no racionales diferentes a las raíces.

También, Wallis en su trabajo comenta que fue William Brouncker quien encontró esta expresión para su fórmula, la cual viene siendo una fracción continua:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}.$$

Sin embargo, Brouncker no da ninguna argumentación de como obtuvo el resultado, a lo que Wallis se propone a hacerlo. En (Recalde & Vargas, 2009) se expone que Wallis se dio cuenta de que $1 \times 3 = 2^2 - 1$, $3 \times 5 = 4^2 - 1$, $5 \times 7 = 6^2 - 1$, …, es decir, que dos números impares consecutivos es igual al cuadrado del par intermedio menos uno. Entonces, según Wallis, Brouncker lo que quería era buscar valores que se deban sumar a los factores para que el producto sea el cuadrado y no el cuadrado menos uno, es decir, encontrar $A, B, C, D, \ldots$ tal que: $A \times B = 2^2$, $B \times C = 4^2$, $C \times D = 6^2, \ldots$

Así, Wallis encuentra que los valores $A, B, C, D, \ldots$ son las fracciones continúas dadas a continuación:

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}}\ , \qquad B = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cdots}}}\ , \qquad C = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{3^2}{10 + \cfrac{5^2}{10 + \cdots}}},$$

$$D = 7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{3^2}{14 + \cfrac{5^2}{14 + \cdots}}}, \qquad E = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{3^2}{18 + \cfrac{5^2}{18 + \cdots}}},$$

$$F = 11 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{3^2}{22 + \cfrac{5^2}{22 + \cdots}}}, \cdots$$

En consecuencia, Brouncker puedo haber razonado de la siguiente forma para hallar la fórmula de 4/π:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \ldots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \ldots} = 2 \times \frac{1 \times (3 \times 3) \times (5 \times 5) \times \ldots}{(2 \times 2) \times (4 \times 4) \times (6 \times 6) \ldots}$$

$$= \frac{(2 \times 2) \times (6 \times 6) \times (10 \times 10) \times \ldots}{(4 \times 4) \times (8 \times 8) \times (12 \times 12) \times \ldots.} = \frac{AB \times CD \times EF \times \ldots}{BC \times DE \times FG \times \ldots} = A.$$

Lo desarrollado anteriormente induce otro tipo de cantidades numéricas, las cuales vienen siendo las que conocemos como cantidades trascendentes. En consecuencia, las fracciones continuas empiezan a tomar un papel importante en las matemáticas, pues por primera vez se muestra un número irracional no algebraico como una fracción continua.

4.2 Las fracciones continuas y los números reales en Euler

Uno de los antecedentes importantes, en el proceso de formalización de los números reales, se puede localizar en los desarrollado del matemático suizo Leonard Euler (1707-1783), con respecto a las fracciones continuas. Euler clasifica en dos tipos las fracciones continuas, las que son finitas y las que son infinitas, las cuales se pueden expresar respectivamente como:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \quad \text{y} \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ son números enteros positivos, así que Euler sólo se preocupa por los números positivos.

Por ejemplo:

a. Para encontrar la fracción continua de $\frac{29}{6}$, realizamos el siguiente procedimiento:

- Dividimos 29 entre 6. Por el algoritmo de la división de Euclides tenemos que:

$$29 = 6 \cdot 4 + 5$$

- Dividimos entre 6 y obtenemos que: $\frac{29}{6} = \frac{6 \cdot 4}{6} + \frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$
- Ahora, dividimos 6 entre 5 y obtenemos que $6 = 5 \cdot 1 + 1$
- Dividimos entre 5 y obtenemos que: $\frac{6}{5} = \frac{5 \cdot 1}{5} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{5}$
- Elevamos a ambos lados por -1: $\left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^{-1}$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

- Al reemplazar el valor de $\frac{5}{6}$, obtenemos que:

$$\frac{29}{6} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

Como la fracción continua es finita, $\frac{29}{6}$ es un número racional.

A continuación, se muestra que la fracción continua finita de $\frac{29}{6}$ se puede representar por medio de la representación decimal.

$$\frac{29}{6} = 4 + \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = 4 + \frac{1}{\frac{6}{5}} = 4 + \frac{5}{6} = 4 + 0.83333333333333$$

$$= 4{,}0.8333333333333333$$

Es decir, que gracias al algoritmo de Euclides se va enmarcando la representación decimal de una fracción continua finita.

Para el caso de las fracciones continuas infinitas, el procedimiento es más complicado, sin embargo, se proporciona el siguiente ejemplo.

b. Fracción continua del número $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\dots}}}}$$

Como la fracción continua de $\sqrt{2}$ es infinita, entonces $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Por ende, para encontrar su representación decimal, tómanos los primeros cuatro términos como se muestra a continuación:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + 0.4 = \mathbf{1{,}4}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\frac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} \approx \mathbf{1{,}41}66$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}} = 1 + \frac{12}{29}$$

$$\approx \mathbf{1{,}41}3793$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}}} =$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{12}{29}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{12}{29}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{70}{29}} = 1 + \frac{29}{70} \approx \mathbf{1{,}414}28571$$

Se observa que entre más términos se tomen, se podrá obtener una mejor aproximación del número irracional $\sqrt{2}$.

Para una fracción continua se definen sus convergentes o convergentes parciales como los números racionales dados por la expresión $\frac{p_n}{q_n}$. Para $n = 0$, $p_0 = a_0$ y $q_0 = 1$; si $n = 1$, entonces $p_1 = a_0 a_1 + 1$ y $q_1 = a_1$. Para $n \geq 2$, p_n y q_n son dadas por la siguiente ley de recurrencia:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Así, podemos ver que

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0$$

$$\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1+\frac{1}{a_n}}}}}}.$$

Ahora, si consideramos la sucesión de convergentes $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$, dicha sucesión dependiendo de cómo sea la fracción continua, vamos a tener una sucesión finita o infinita. Así, si α es un número real positivo, entonces

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}.$$

Algunos de los resultados más importantes dados por Euler en relación con las fracciones continuas, es que las fracciones continuas finitas representan números racionales y que todo número racional se puede representar como una fracción continua finita. También demostró que todo irracional se representa como una fracción continua infinita, pero no mostró el recíproco; así que Euler no garantizó la convergencia de la fracción continua. Sin embargo, en (Recalde & Vargas, 2009), se evidencia que con lo establecido por Euler se puede probar que una fracción continua infinita representa un número irracional. En consecuencia, se cumple el hecho de que toda fracción continua representa a un número real α. Gracias a la teoría de las fracciones continuas obtenemos otro tipo de representación para los números racionales e irracionales y, además, podemos diferenciarlos, es decir que las fracciones continuas guardan información sobre la naturaleza del número.

Además, como se menciona en: *Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales* (Recalde & Vargas, 2009), las fracciones continuas permiten dimensionar una construcción de los números reales, esto es porque gracias a ellas, a los racionales se les asocia las fracciones continuas finitas y a los irracionales, las fracciones continuas infinitas.

4.3. Los números reales en el análisis de Cauchy

Este apartado tiene dos propósitos; el primero, establecer la diferencia entre el número, la cantidad numérica y cantidad variable y el segundo, estudiar cómo se introduce el concepto de límite de una sucesión con el fin de introducir los números reales y el concepto de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Para esto, vamos a tener como referencia principal lo establecido por el francés Agustín- Louis Cauchy en el libro *Curso de análisis* de año 1821.

En los preliminares del libro, se menciona que los ***números*** nacen de la medida absoluta de las magnitudes; la ***cantidad*** la emplea para distinguir entre cantidades positivas (los números precedidos por el signo +) y cantidades negativas (los números precedidos por el signo menos), las cuales pueden representar incrementos o disminuciones. Las ***cantidades variables*** que se simbolizan usualmente con las últimas letras del alfabeto representan diferentes valores sucesivos que se le atribuyen y las ***cantidades constantes*** representan valores fijos, las cuales se simbolizan con las primeras letras del alfabeto (Cauchy, 1994).

Las cantidades son iguales cuando tienen el mismo signo y valor numérico, siendo este último el número base de la cantidad (el valor absoluto). Las cantidades opuestas, serán las que tiene el mismo valor numérico, pero con signo contrario; lo que permite efectuar múltiples operaciones con las cantidades (Cauchy, 1994).

Las anteriores definiciones se convierten en los conceptos fundamentales que permitieron la introducción del concepto de límite de una cantidad variable de manera retorica:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabarán por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el *límite* de todos los demás (Cauchy, 1994, pág. 76).

Es decir, que el límite de una sucesión, es el valor fijo al cual se acerca o tienden los valores numéricos atribuidos de manera sucesiva a la variable; después, Cauchy, establece la relación entre el concepto de límite y el infinito (Recalde L. C., 2018), definiendo las ***cantidades infinitamente pequeñas*** como aquellas cantidades variables que tienden a cero; es decir, cuando los valores numéricos que decrecen indefinidamente son más pequeños que cualquier número dado, por ejemplo, la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ es una cantidad infinitamente pequeña, pues corresponde a una cantidad variable que tiene como límite. Las ***cantidades infinitamente grandes*** son aquellas cantidades variables que toman valores numéricos que crecen de manera sucesiva, tomando cada vez valores mayores que cualquier número dado. La sucesión 1, 2, 3, … *n*, …, que representa al conjunto de números naturales es un ejemplo de cantidad infinitamente grande. Por consiguiente, las ***cantidades infinitas*** son aquellas donde los valores numéricos de una misma variable crecen, de manera que ascienden por encima de cualquier número dado, es decir que los valores atribuidos a la variable tienden al infinito positivo (∞). En sentido contrario, si los valores numéricos descienden por debajo de cualquier número, la variable tiende al infinito negativo (-∞) (Cauchy, 1994, pág. 76).

Posteriormente, Cauchy introduce el concepto de sucesión convergente como:

Definición: Una sucesión $\{x_n\}$ es convergente, cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N$, se cumple que $|x_n - x_m| < \varepsilon$. En esta definición, Cauchy está suponiendo que el espacio es continuo, es decir, que toda sucesión que cumple dicha propiedad converge. Esto modernamente se conoce como sucesión de Cauchy.

De acuerdo con su definición de límite, (Cauchy, 1994) establece una de las primeras aproximaciones sobre el número real, por medio de la noción de límite, al afirmar que *"(...) un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más próximos de él"* (Cauchy, 1994, pág. 76).

Por ejemplo: Dado $x_1 = 2 \ y \ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a $\sqrt{2}$.

Ahora, sea $x_1 = 1$ y para $n > 1$, se tiene que $x_n = 1 + \frac{1}{1+x_{n-1}}$. La sucesión $\{x_n\}$ también converge a $\sqrt{2}$. Es decir que dos o más sucesiones de racionales convergen al mismo número irracional $\sqrt{2}$.

Ahora, las sucesiones de número racionales $\{\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{30}{11}, \frac{144}{53}, \dots\}$ y $\{\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{16}{6}, \frac{65}{24}, \frac{326}{120} \dots\}$ convergen al número irracional e.

Lo anterior ejemplifica que no toda sucesión de números racionales converge a un número racional y que pueden existir infinitas sucesiones de racionales que convergen a un mismo número. Esto nos lleva a concluir que el conjunto de los números racionales Q, no es completo. Metafóricamente hablando tiene "huecos", los cuales se "llenan" con sucesiones de números racionales que cumplen las condiciones de convergencia de Cauchy, pero que no son racionales. En este sentido, Cauchy establece que el número al cual converge una sucesión de números racionales es un número real que no necesariamente es un número racional (Mora & Torres, 2004).

Aunque Cauchy no logro una formalización culminada de los números reales, la forma en como manejo el concepto de límite, implica que utilizó de cierta forma la noción del continuo. ya que, se evidenció en sus demostraciones que lograba utilizar de manera implícita varias propiedades, particularmente, el axioma de completitud de los números reales y algunas consecuencias de dicho axioma, como las siguientes: Las propiedades de las sucesiones monótonas y el criterio de comparación (Recalde L. C., 2018).

4.4. Construcción de los reales desarrollada por Charles Méray

Charles Méray fue un matemático francés, quien publicó los primeros estudios para el desarrollo aritmético de los sistemas numéricos (Collette, 2000). Proporciona en el año 1869, aportes importantes para la construcción de una teoría formal de los números reales en su obra, *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limite á des variables données* (Observaciones sobre la naturaleza de las cantidades definidas por la condición de servir de límites a variables dadas), donde nombra algunas inconsistencias que tenían las teorías de los matemáticos de la época, en especial Cauchy, en relación con los números reales. Hace mención del "error lógico" de Cauchy, el cuál asumía que el espacio era continuo, sin definir a los números irracionales; es decir que "el concepto de límite había sido construido asumiendo la existencia de los números reales, lo que lógicamente era incorrecto" (Ruiz, 2003, pág. 452). También, emplea el uso de las series o sucesiones de números racionales, al igual que Cauchy, pero introduciendo la existencia de nuevas cantidades μ, a las cuales denomino números ficticios. Estos serían los límites de las sucesiones de números racionales que no convergen a racionales, es decir, los números irracionales (Ruiz, 2003).

En el libro *Historia de las Matemáticas II* de Jean Paul Collette del año 2000, se hace referencia a lo establecido por Méray para la construcción de los números reales.

> Méray emplea la palabra $\ll número \gg$ para designar el número racional, y una cantidad μ es llamada $\ll variable\ progresiva \gg$ si puede tomar un número infinito de valores sucesivos de un conjunto $\{\mu_n\}$; Méray define a continuación la convergencia de la variable progresiva μ en términos de $\left|\mu_{n+p} - \mu_n\right| \rightarrow 0\ con\ \frac{1}{n}$, cualquiera que sea el valor asignado al límite. Así, existen dos tipos de sucesiones convergentes. La primera verifica la condición de que existe un N tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n tal que para todo $m \leq n, |N - \mu_m| < \varepsilon \rightarrow \left|\mu_{n+p} - \mu_n\right| \rightarrow 0\ con\ \frac{1}{n}$, y la segunda corresponde a la condición siguiente: el N definido anteriormente no existe y μ no tiene límite, pero puede verificarse $\left|\mu_{n+p} - \mu_n\right| \rightarrow 0\ con\ \frac{1}{n}$. Las sucesiones convergentes sin límite se llaman $\ll límites\ ficticios \gg$ y, en términos de números, Méray las llama $\ll números\ ficticios \gg$ (Collette, 2000, pág. 365).

En este sentido, el aporte que hizo Méray a la construcción de los números reales, es la definición de límites o números ficticios, que representan los límites de las sucesiones de racionales que no convergen a un número racional, los cuales, no estaban lógicamente fundamentados en Cauchy. Méray establece entonces, dos tipos de sucesiones de racionales convergentes. Una sucesión de racionales que converge a un número que pertenece al conjunto de números racional y otra sucesión de racionales, que converge a un número que no es racional, es decir a un número ficticio, los cuales se pueden ordenar y se conocen como los números irracionales (Ruiz, 2003).

Capítulo 5: Construcción de los números reales por Cantor

Georg Cantor (1845-1918) publicó su teoría sobre los números reales en la primera sección de un artículo sobre series trigonométricas (Cantor, 1872), donde fundamentó su teoría de los números reales, en sucesiones de números racionales $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, las cuales denominó sucesiones fundamentales (sucesiones de Cauchy como se conocen actualmente) en términos modernos).

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ de números racionales, se llama una sucesión fundamental, si para todo racional positivo ε, existe un número entero positivo, N, tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, para todo m y $n > N$.

Dado que los elementos de $\{a_n\}$ son números racionales, Cantor no puede asegurar que la sucesión tenga límite. En este sentido, como la idea de Cantor era construir los números irracionales, no podía introducirlos como límites de estas sucesiones, pues aún no tenían existencia efectiva. Al respecto, Cantor dice que una sucesión de $\{a_n\}$, que satisfaga esta condición, tiene un límite referencial b, el cual aún no se puede considerar un número como tal. Cantor considera estos límites definidos únicamente como símbolos formales, asociados con secuencias fundamentales.

Los planteamientos que establece Cantor se deben al reconocimiento, en la época, de la existencia de sucesiones fundamentales de números racionales que no convergen a números racionales. Por ejemplo, la sucesión $e(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ que, al tomar valores naturales muy grandes, los términos de la sucesión empiezan a delinear un número decimal con infinitas cifras decimales no periódicas, lo que indica que tiende a un número que no es racional. Por tal motivo, surge la idea de completar $\mathbb{Q}$, de tal forma que se puedan incluir los números a los que converge dichas sucesiones fundamentales, sin que $\mathbb{Q}$ pierda su estructura algebraica y su estructura ordenada (Recalde & Arbeláez, 2011).

Para esto, Georg Cantor propone una construcción de los números reales que consta de tres momento o niveles, que representan los "saltos" epistemológicos que se dieron durante su construcción. En la figura 19, se representan los 3 niveles.

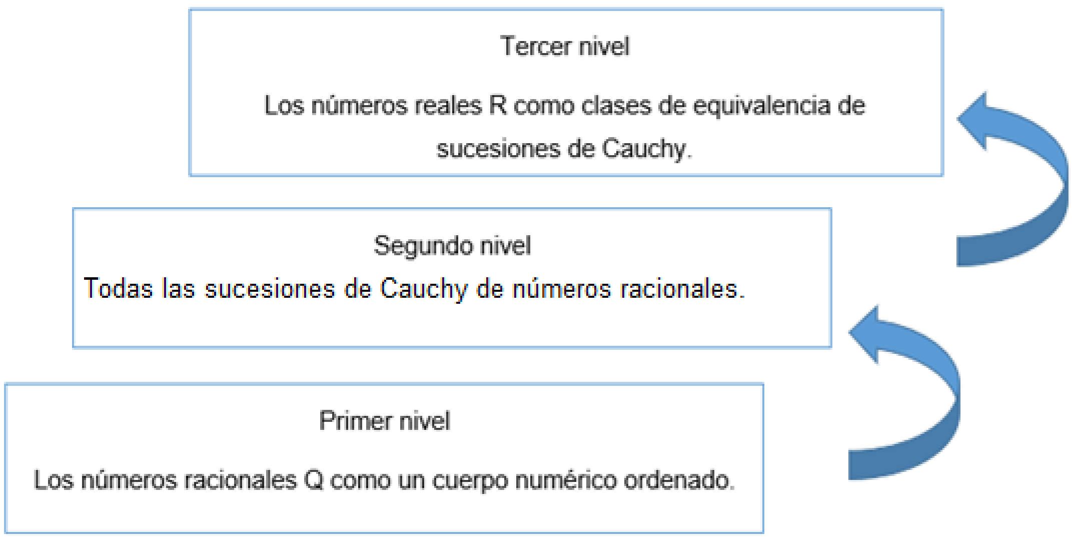


Figura 19. Construcción de los números reales por Cantor.

En el primer nivel, tomamos a los números racionales $\mathbb{Q}$, como una estructura de cuerpo numérico totalmente ordenado, sobre el cual se definen las dos operaciones: suma $(+)$ y producto $(\cdot)$; dos operaciones binarias definidas sobre $\mathbb{Q}$. El sistema $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo puesto que se cumplen las siguientes propiedades:

1. La propiedad asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2. La propiedad conmutativa: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$
3. La existencia del elemento neutro para la suma: $0 + a = a$
4. La existencia del elemento neutro para el producto: $1 \cdot a = a$
5. La existencia de los inversos multiplicativos: para todo $a \neq 0$, existe a^{-1}, tal que $a^{-1} \cdot a = 1$.
6. La existencia de elementos opuestos: Para todo a, existe $-a$, tal que $-a + a = 0$
7. La propiedad distributiva por la izquierda sobre la primera operación $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

   La propiedad distributiva por la derecha sobre la primera operación $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

$\mathbb{Q}$ es cuerpo ordenado puesto que existe un subconjunto no vacío $\mathbb{Q}^+$ (llamado subconjunto de racionales positivos) tal que:

i. Si $a, b \in \mathbb{Q}^+, entonces, a + b \in \mathbb{Q}^+$ (cerrada para la adición).

ii. Si $a, b \in \mathbb{Q}^+, entonces, a \cdot b \in \mathbb{Q}^+$ (cerrada para el producto).

iii. Para cualquier $a \in \mathbb{Q}^+$, se cumple exactamente uno de los siguientes: $a \in \mathbb{Q}^+$, $-a \in \mathbb{Q}^+$, o $a = 0$ (Ley de la tricotomía).

Teniendo en cuenta esta propiedad se define la relación de orden:

Definición: Dados dos números racionales *p*, *q*, decimos que *p* < *q*, si y sólo si $q - p \in \mathbb{Q}^+$.

Cantor sabe que $\mathbb{Q}$ no es un cuerpo completo, en el sentido que existen sucesiones de Cauchy, de números racionales que no convergen a un número racional. Este aspecto le lleva a dar un “salto” epistemológico que permite representar a los números racionales como sucesiones fundamentales o sucesiones de Cauchy y también acoger las sucesiones de Cauchy de racionales que no convergen a un racional.

Un número racional *r*, se puede representar, en primera instancia, como la sucesión constante $\{r\}$. Sin embargo, no es la única sucesión que podría representar al número racional *r*, pues existen muchas sucesiones que también convergen a *r*, por ejemplo:

$$\left\{r+\frac{1}{n}\right\},\left\{r+\frac{1}{2n}\right\},\left\{r+\frac{1}{n^2}\right\}.$$

De esta forma, existen infinitas sucesiones de racionales que convergen a cada número racional. Pero además existen también infinitas sucesiones de Cauchy, de números racionales que no convergen a los racionales. Entonces, en el segundo nivel, se ubican todas las sucesiones fundamentales números racionales (Recalde & Arbeláez, 2011).

Posteriormente, se construyen "paquetes" o clases, con todas las sucesiones fundamentales que convergen al mismo número, es decir, que tengan el mismo límite, en el caso de las sucesiones que convergen a números racionales,

se identifican con el mismo número racional. Sin embargo, existen paquetes de sucesiones de racionales compuestos por sucesiones de Cauchy que no convergen a un número racional. Estos paquetes se definen con base a la noción de clase de equivalencia, de la siguiente forma:

Definición: Dos sucesiones fundamentales $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, de números racionales, son equivalentes $\{x_n\} \approx \{y_n\}$, sí y solo si, para todo $\varepsilon > 0, con\ \varepsilon \in Q$, se puede encontrar un número entero $N > 0$, tal que para $n > N$, entonces $|x_n - y_n| < \varepsilon$. "Las clases de equivalencia entrarían a representar los nuevos números, los cuales tendrían un representante; por ende, una vez se haya demostrado la clase de equivalencia y se cuente con el representante, podemos subir al tercer nivel" (Recalde & Arbeláez, 2011).

En el tercer nivel, vamos a pensar que cada número racional *r*, está representado por la clase de equivalencia $[r]_{\approx}$, formada por todas las sucesiones fundamentales que convergen al número *r*.

Pero, existen sucesiones de Cauchy que no convergen en $\mathbb{Q}$, como la sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$, con $a_1 = 1$ es convergente al número que no pertenece al conjunto de los números racionales

Para demostrar que la sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$ es convergente en $\mathbb{R}$, primero, debemos demostrar que es una sucesión de Cauchy, es decir, la sucesión $\{a_n\}$ cumple que existe un número natural *N*, tal que

$$|a_m - a_n| < \epsilon \text{ para todo } m, n > N.$$

Para todo *n* se obtiene que $|a_{n+1} - a_n| < \epsilon$, es decir que:

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{1+a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}\right)\right| = \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right|$$

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{a_{n-1} - a_n}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

Si se aplica el anterior proceso a la expresión $|a_n - a_{n-1}|$ se tiene que:

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{\left||a_{n-1} - a_{n-2}|\right|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})(1+a_{n-1})(1+a_{n-2})}$$

Al realizar el anterior procedimiento, de forma reiterada, se obtiene:

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{|a_2 - a_1|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})^2(1+a_{n-2})^2\ldots(1+a_2)^2(1+a_1)}$$

Como $(1 + a_n)(1 + a_{n-1}) = 1 + a_{n-1} + a_n + a_{n-1}a_n > 3$, ya que el término más pequeño es $a_1 = 1$ entonces:

$$\frac{1}{(1 + a_n)(1 + a_{n-1})} < \frac{1}{3},$$

para todo número *n*, que pertenece al conjunto de los números naturales; por ende, $|a_{n-1} - a_n| < \frac{1}{3^{(n-1)}}$ y como la expresión $\frac{1}{3^{(n-1)}}$ se aproxima a cero, cuando *n* tiende a $+\infty$, se puede concluir que $|a_{n+1} - a_n| < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$.

Si tomamos $m = n + p$, donde *p* es un número natural, se tiene que:

$$|a_m - a_n| = |a_{n+p} - a_n|.$$

Utilizando la desigualdad triangular, obtenemos que:

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n|$$

Entonces,

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_2 - a_1| \left[\frac{1}{3^{(n+p-1)}} + \frac{1}{3^{(n+p-2)}} + \frac{1}{3^{(n+p-3)}} + \ldots + \frac{1}{3^{(n-1)}}\right]$$

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_2 - a_1| \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2|a_2 - a_1|}{3^{n-1}} = \frac{2\left|\frac{1}{2}\right|}{3 3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}.$$

La última expresión, tiende a cero cuando n toma valores cada vez más grandes, entonces,

$|a_m - a_n| = |a_{n+p} - a_n| < \epsilon, \forall m, n > N,$ que es un número natural dado.

Por lo tanto, es una sucesión de Cauchy de números racionales, la cual no converge a un número racional.

Ahora, si suponemos que converge a un número real L, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}\right) = 1 + \frac{1}{1 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}}.$$

De esta forma:

$$L = 1 + \frac{1}{1 + L}$$

$$L = \frac{(1 + L) + 1}{1 + L}$$

$$L = \frac{2 + L}{1 + L}$$

$$L(1 + L) = 2 + L$$

$$L + L^2 = 2 + L$$

$$L^2 = 2$$

Pero no existe ningún número racional que elevado al cuadrado sea 2. Por lo tanto, la sucesión converge a un número que no es racional, el cual se representa como $\sqrt{2}$.

La construcción de los reales por Cantor pasa por tres niveles. El primer nivel donde se toma al conjunto de los números racionales como un cuerpo numérico totalmente ordenado; el segundo nivel, cuando se ve a los números racionales como sucesiones de Cauchy y el tercer nivel, donde aparecen los números reales como clases de equivalencia de las sucesiones de Cauchy definidas en el segundo nivel. Las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy forman un cuerpo numérico ordenado y, además, cuenta con una copia exacta de los números racionales $\mathbb{Q}$, ya que:

> Cada número racional r está representada por la clase de sucesión constante $\underline{r}$ y de valor r, y por la construcción de las operaciones y el orden en el nuevo cuerpo, resulta obvio que para las representaciones de todos los racionales (vistos ahora como clases de equivalencia) las operaciones y el orden constituyen una fiel copia de las que se tenían en $\mathbb{Q}$. Este hecho es habitualmente referido diciendo que se tiene una inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (Recalde & Arbeláez, 2011, pág. 181).

De esta manera, desde la construcción de Cantor, el conjunto de los números reales corresponde al conjunto de todas las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, y cada número real es una clase de equivalencia. Las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy que no tienen como límite un número racional, tales como $\sqrt{2}$ o e, entre otras, representan a los números irracionales. Los números reales, construidos por Cantor, constituyen la versión aritmética del continuo geométrico.

La tradición histórica de evolución formal de los números muestra la representación de los números racionales en la recta numérica a partir de la elección de un punto determinado, el cero, y un segmento unidad, que sirve de referencia para la representación de los números racionales mediante el teorema de Tales. Pero los números racionales no "cubren" completamente la recta geométrica. Esos vacíos son cubiertos por los números irracionales. Cantor pensó que podía demostrar la biyección entre los números reales, construidos vía sucesiones de Cauchy, y los puntos geométricos. Sin embargo, dada esta imposibilidad, Cantor lo señala como un axioma. De esta forma, las sucesiones de Cauchy se convierten en la herramienta teórica para formalizar la completez no sólo de $\mathbb{R}$, sino de cualquier espacio: *Un cuerpo ordenado es completo, si toda sucesión fundamental, converge a hacia un elemento del cuerpo*.

Entonces, como los números reales son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales; una vez se definen las clases, se pueden construir la estructura básica, que contiene las operaciones de suma, producto y el orden.

Dado que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ ha sido establecido en un proceso constructivo, hay que demostrar que conserva la estructura de cuerpo y, además, a diferencia del cuerpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, que es completo. Las operaciones de suma y producto para $\mathbb{R}$ se definen de la siguiente manera:

Suma y producto: Sea $x, y \in \mathbb{R}$, entonces, existen dos clases de equivalencia $x = [\{x_n\}]$, $y = [\{y_n\}]$, donde $\{x_n\}$ un representante de x y $\{y\}$, un representante de y, entonces la suma sería:

$$[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x + y\}]\,,$$

y el producto sería,

$$[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}]$$

Ejemplo, sea la sucesión de racionales $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ un representante de $[0]$, la clase de equivalencia del cero y $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ un representante de $[1]$, la clase de equivalencia del uno. La suma y el producto, quedaría así:

$$\left[\left\{\frac{1}{n}\right\}\right] + \left[\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}\right] = \left[\left\{\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n}\right\}\right] = \left[\left\{1 + \frac{2}{n}\right\}\right] = [\{1\}]$$

$$\left[\left\{\frac{1}{n}\right\}\right] \cdot \left[\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}\right] = \left[\left\{\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}\right] = \left[\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right\}\right] = [\{0\}]$$

La relación de orden la definen de la siguiente forma:

Definición de orden: Sean los números reales $x = [\{x_n\}]$, $y = [\{y_n\}]$ y las sucesiones fundamentales $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ representantes de x y y, respectivamente, entonces, se dice que $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$ sí existe un $\varepsilon \in \mathbb{Q}+$ y un número natural N, tal que $[\{y_n\}] - [\{x_n\}] > \varepsilon$ para todo $n > N$.

Ahora, se debe probar que los números reales son un cuerpo completo. Pero antes, es pertinente mencionar la definición de convergencia y de sucesión de Cauchy, con el fin de mostrar que toda sucesión convergente, es de Cauchy.

Definición de convergencia: sea $\{\mathcal{X}_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces, $\forall \varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $si\ n > n_0\ entonces, |\mathcal{X}_n - L| < \varepsilon$, donde L es el valor al cuál converge la sucesión.

Definición de sucesión de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $si\ n, m > n_0\ entonces, |\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_m| < \varepsilon$

Una sucesión que sea convergente implica que es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\{\mathcal{X}_n\}$ es convergente, entonces se tiene que para todo $\varepsilon' > 0\ existe\ un$ $n'_0 \in \mathbb{N}$, tal que, si $n > n'_0$, entonces, $|\mathcal{X}_n - L| < \varepsilon'$.

Y si, $\varepsilon' > 0\ existe\ un$ $n'_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m > n'_0$, entonces $|\mathcal{X}_m - L| < \varepsilon'$.

Sumando, se obtiene que, $|\mathcal{X}_n - L| + |\mathcal{X}_m - L| < 2\varepsilon'$

Por desigualdad triangular se tiene que,

$$|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_m| = |\mathcal{X}_n - L + (L - \mathcal{X}_m)| \leq |\mathcal{X}_n - L| + |L - \mathcal{X}_m| < 2\varepsilon'$$

$$|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_m| < 2\varepsilon'$$

Si se toma $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces, $|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_m| < \varepsilon$.

Así, si se toma $n = n'_0$, por tanto $\mathcal{X}_n$ es de Cauchy.

Pero la implicación contraria (Si la sucesión es de Cauchy, entonces es convergente) no se obtiene de manera directa. Por lo tanto, para demostrar que los números reales ℝ son un cuerpo completo, debo demostrar que toda sucesión de Cauchy converge a un número real ℝ. Para esto, se requiere el siguiente teorema:

Teorema: Si una sucesión es acotada y no decreciente (o no creciente) entonces converge.

Teniendo en cuenta el anterior teorema, vamos a demostrar los siguientes ítems:

a. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Se debe demostrar que existe un $M > 0$, tal que, $\{\mathcal{X}_n\} < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $\varepsilon = 1 > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, si $n, m > n_0$, entonces,

$$|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_m| < 1$$

Tomando en particular un número $m = n_0 + 1 > n_0$ fijo, entonces por desigualdad triangular, tenemos que:

$$|\mathcal{X}_n| - |\mathcal{X}_{n_0+1}| \leq |\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n_0+1}| < 1$$

$$|\mathcal{X}_n| < 1 + |\mathcal{X}_{n_0+1}|$$

Así, $M = máx\{1 + |\mathcal{X}_{n_0+1}|, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots \mathcal{X}_{n_0}\}$, por lo tanto, $\{\mathcal{X}_n\}$ es acotada.

b. Toda sucesión (en particular de Cauchy) tiene una subsucesión no decreciente.

Una subsucesión de $\{\mathcal{X}_n\}$ seria $\{\mathcal{X}_{n_k}\}$ donde $n_1 < n_2 < n_3 <\ldots< n_k <\ldots$

También se puede **definir la convergencia de una subsucesión** de la siguiente manera:

$\forall \varepsilon > 0,$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que, si $k > k'$ entonces, $|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_m| < \varepsilon$

Consideremos el siguiente conjunto de números $A \subseteq \mathbb{N}$ con esta propiedad:

Si n $\in A$, entonces $\mathcal{X}_m < \mathcal{X}_n$ para todo $m > n, m \in \mathbb{N}$.

Para esto, se tiene dos opciones:

1. A es infinito y cumple que, si $A = \{n_k\}, k \in \mathbb{N}$, entonces $n_1 < n_2 < n_3 <\ldots$ implica que $\mathcal{X}_{n1} > \mathcal{X}_{n2} > \mathcal{X}_{n3} >\ldots$ (se tiene ya que, por definición de A, como $n_k < n_{k+1}$ con $n_k \in A$, entonces $\mathcal{X}_{n_{k+1}} > \mathcal{X}_k$ con $n_{k+1} \in A \subseteq \mathbb{N}$).

   Por lo tanto, $\{\mathcal{X}_{n_k}\}$ es una subsucesión no creciente.

2. A es finito, entonces $A = \{m_k\}, k$=1, …, N y $n_1 > m_k$ para k=1, …, N. Como $n_1 \notin A$, entonces, existe n_2 tal que, $n_1 < n_2$ y $\mathcal{X}_{n1} \leq \mathcal{X}_{n2}$. Nuevamente, como $n_2 \notin A$, entonces, existe un n_3, tal que, $n_1 < n_2 < n_3$ y $\mathcal{X}_{n1} \leq \mathcal{X}_{n2} \leq \mathcal{X}_{n3}$. Así se tiene que $\{\mathcal{X}_{n_k}\}$ es una subsucesión no decreciente.

   Ahora bien, si la sucesión inicial $\{\mathcal{X}_n\}$ es acotada, entonces, $\{\mathcal{X}_{n_k}\}$ también lo será, por lo tanto $\{\mathcal{X}_{n_k}\}$ sería una subsucesión convergente (se cumple en particular cuando $\{\mathcal{X}_n\}$ es una sucesión de Cauchy).

c. Toda sucesión de Cauchy es convergente.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Por b, sabemos que existe una subsucesión $\{\mathcal{X}_{n_k}\}$ convergente, esto significa que para $\varepsilon' > 0$, existe un $k' \in \mathbb{N}$ tal que, si $k > k'$ entonces, $\left|\mathcal{X}_{n_k} - L\right| < \varepsilon'$ (1).

Como $\{\mathcal{X}_n\}$ es de Cauchy, para $\varepsilon'' > 0$, existe un $k'' \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m > k''$, entonces, $|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_m| < \varepsilon''$ (2).

Sea k = máx $\{n_{k'},\ k''\}$. Así, considerando N = $máx\{n_{k'+1},\ k''+1\}$ y tomando $\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}$, se cumple que por (1) $|\mathcal{X}_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ y por (2), se obtiene $|\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_N| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sumando obtenemos que $|\mathcal{X}_n - L| \leq |\mathcal{X}_N - L| + |\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_N| < \varepsilon$

Así $\{\mathcal{X}_n\}$ es convergente y converge al mismo límite que $\{\mathcal{X}_{n_k}\}$.

Algo adicional que se obtiene es que si otra subsucesión $\{\mathcal{X}_{n_{k'}}\}$ converge a un L', entonces $L' = L$, puesto que la sucesión de Cauchy tiene el mismo límite que toda subsucesión convergente suya (y dicho límite es único).

Con esto se concluye que toda sucesión, en particular las sucesiones de Cauchy convergen en los números reales, lo que implica que el sistema de los números reales, el cual fue construido por medio de sucesiones de Cauchy de número racionales, cumple con las propiedades de cuerpo (se define las operaciones de suma, producto y la relación de orden) y es completo.

También se observa que, en la construcción formal de los números reales de Georg Cantor se observa que las sucesiones muestran un procedimiento algorítmico para aproximar a un número irracional por medio de su representación decimal, lo que permite incorporar a los números reales por medio de sucesiones fundamentales

La sucesión nos muestra un procedimiento algorítmico para aproximar $\sqrt{2}$ a partir de su representación decimal:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1 + a_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1 + a_2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{1 + a_3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}} = \frac{17}{12} = 1.416$$

$a_5 = 1 + \frac{1}{1+a_4} = 1 + \frac{1}{1+\frac{17}{12}} = \frac{42}{29} = 1.4137$ y así sucesivamente

Otro ejemplo es la sucesión $e(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, la cual es una sucesión de Cauchy, pero que no converge a un número racional. Para ello se demuestra que es una sucesión creciente y acotada superiormente. Algunos valores de aproximación se calculan a continuación:

$$e(1) = 2$$

$$e(2) = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$e(3) = \frac{64}{27} = 2.37037\ldots$$

$$e(4) = \frac{625}{256} = 2.441406\ldots$$

Capítulo 6: La presentación axiomática de los números reales.

A partir de las construcciones de los números reales de Cantor y Dedenkind, se establece versiones axiomáticas de los números reales. En este sentido, Hilbert afirma la existencia de dos métodos de introducir los números reales:

- El método genético: Por sucesivas extensiones del campo numérico hasta llegar a la cortadura o sucesión fundamental.
- El método axiomático: Partiendo de un dominio de objetos, en principio vacíos de contenido, que cumplen un sistema de axiomas propios de los sistemas numéricos.

El método genético es considerado por Hilbert como un método importante para la didáctica; mientras que el método axiomático, lo considera como el más indicado para la investigación lógica de los conceptos matemáticos. Sin embargo, en este trabajo hemos mostrado la importancia de los métodos constructivos en las diversas etapas del desarrollo de los números reales.

No obstante, en la escolaridad se suelen introducir los números reales de manera axiomática, sin hacer ninguna alusión al método genético. Por ejemplo, en (Apostol, 1988) se introducen los números reales por medio de un sistema axiomático y no de forma constructiva. Se parte de la existencia de un conjunto de objetos, llamado conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, en el cual se define una relación de orden y las operaciones de suma (+) y producto (.), a partir de 10 axiomas: 6 axiomas de cuerpo, 3 axiomas de orden y el axioma de completitud.

Axiomas de cuerpo

Se establece que en el conjunto $\mathbb{R}$, se definen dos operaciones denominadas: adición y producto.

Axioma 1: $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$ (propiedad conmutativa).

Axioma 2: $x + (y + z) = (x + y) + z,\ x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$ (propiedad asociativa).

Axioma 3: $x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (propiedad distributiva).

Axioma 4: Existencia de un elemento neutro para la adición y el producto.

$$0 + x = x + 0 = x, \qquad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

Axioma 5: Para todo número real x, existe un número real y tal que:

$$x + y = y + x = 0 \text{ (existencia de negativos)}$$

Axioma 6: Para todo número real $x \neq 0$, existe un número real y tal que:

$$x \cdot y = y \cdot x = 1 \text{ (existencia del reciproco)}$$

A partir de estos axiomas se introducen los números naturales, los números enteros y los números racionales.

Axiomas de orden

En $\mathbb{R}$.se cumplen los siguientes axiomas, que determinan una relación de orden.

Axioma 7: Si x e y pertenecen a los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, el resultado de sumar $x + y$ o multiplicar $x \cdot y$, también va a pertenecer a $\mathbb{R}^+$.

Axioma 8: Para todo número real $x \neq 0$, o $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.

Axioma 9: $0 \notin \mathbb{R}^+$.

A partir de estos axiomas se introduce la relación de orden, simbolizada como "<" en los números reales.

Definición: Se dice que $x < y$, si $y - x \in \mathbb{R}^+$. $x < y$ también se representa como $y > x$. $x \leq y$ se interpreta como $x < y$ o $x = y$; de igual manera, $x \geq y$ se interpreta como $x > y$ o $x = y$.

Axioma del extremo superior (axioma de completitud).

Axioma 10: Todo conjunto no vacío *S* de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es; existe un número real *B* tal que *B*= sup *S*.

El Axioma 10 permite introducir los números irracionales, en un proceso ligado directamente con la representación decimal. De esta manera, a partir del cero, 0 y del uno, 1, los cuales se incorporan en los axiomas 4 y 5, se empiezan a generar los números enteros positivos, $\mathbb{Z}^+$, los enteros negativos, $\mathbb{Z}^-$y los enteros no negativos, $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, los números racionales, $\mathbb{Q}$. Esto nos permite retomar la representación decimal como herramienta de reconocimiento y de operatividad de los números reales, a través de la siguiente definición:

Definición: Sea el número real *r*:

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde a_0 es un número entero no negativo, $y\ a_1, a_2, \ldots a_n$ son números enteros que cumplen la condición:

$$0 \leq a_i \leq 9, \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

entonces *r* se expresa de la forma:

$$r = a_0 . a_1 a_2 a_3 \cdots a_n,$$

la cual se denomina *la representación decimal finita* de r.

A partir de la representación decimal finita podemos establecer la representación de cualquier número real, tomando como referencia el Axioma 10, del extermo superior.

Teorema: Sea $r \geq 0$; entonces, para todo número entero $n \geq 1$, existe un decimal finito $r_n = a_0.a_1a_2a_3 \cdots a_n$ tal que

$$r_n \leq r < r_{n+1}.$$

Para la demostración se recurre al axioma del extremo superior: Sea,

$$P = \{a \in \mathbb{Z}_0^+ : a \leq x\}.$$

P es diferente de vacío y acotado superioremente, pues $0 \in P$ y x es una cota superior. Por el Axioma 10, existe $a_0 = \sup S$, donde $a_0 \in P$, entonces a_0 es un entero no negativo, el cual se denomina el mayor entero contenido en x y se denota como $a_0 = [x]$. De esta forma se tiene que:

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

Se define $a_1 = [10x - 10a_0]$, donde $0 \leq 10x - 10a_0 < 10$, entonces $0 \leq a_1 \leq 9$ y,

$$a_1 \leq 10x - 10a_0 < a_1 + 1.$$

De esta forma, a_1 es el mayor entero que satisface:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1+1}{10}.$$

Utilizando inducción matemática, si suponemos el proceso para $a_0.a_1a_2a_3 \cdots a_{n-1}$, el mismo método establece la existencia de a_n tal que,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n},$$

donde $0 \leq a_n \leq 9$. Por lo tanto:

$$r_n \leq r < r_{n+1},$$

donde, $r_n = a_0.a_1a_2a_3 \cdots a_n$.

Podemos obtener dos aproximaciones del número irracional r tomando n lo suficientemente grande: Una aproximación por exceso y la otra por defecto. Por consiguiente, basta con tomar un n lo suficientemente grande para lograr obtener una buena aproximación del número r.

Por ejemplo, si consideramos a $x = \sqrt{2}$, podremos calcular tantos dígitos como se quiera de su aproximación decimal. Para ello, vamos a partir de la siguiente desigualdad:

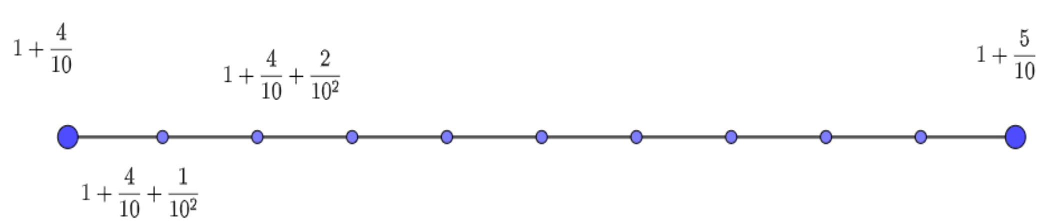
$$(1.4)^2 < 2 < (1.5)^2$$

Lo cual implica que:

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$$1 + \frac{4}{10} + < \sqrt{2} < 1 + \frac{5}{10}$$

Entonces, si subdividimos en 10 partes iguales al segmento que va de $1 + \frac{4}{10}$ a $1 + \frac{5}{10}$, obtenemos intervalos de medida $\frac{1}{10^2}$, como se muestra a continuación.



Para encontrar el intervalo en donde se encuentre $\sqrt{2}$, vamos a considerar la siguiente desigualdad:

$$\left(1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}\right)^2 < 2 < \left(1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}\right)^2.$$

Lo que implica que $(1.41)^2 < 2 < (1.42)^2$ y al resolver los cuadrados, obtenemos que $1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$, por consiguiente, el número 2 se encuentra entre $(1.41)^2$ y $(1.42)^2$ y se cumple que,

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42.$$

Si deseamos más dígitos de la representación decimal de $\sqrt{2}$, basta con repetir el anterior procedimiento una cantidad finita de veces, donde se obtiene una sucesión de intervalos de longitud $\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \ldots$, respectivamente. Cada intervalo está contenido en el anterior, por ende, cada uno de los intervalos contiene a *x*.

Es así, como se pueden obtener las primeras tres aproximaciones sucesivas del número irracional $\sqrt{2}$.

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42,\qquad 1.414 < \sqrt{2} < 1.415,\qquad 1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$

Si el número es racional, la expansión decimal es finita o periódica, lo que significa que es posible establecer completamente su representación. El problema se presenta para los números irracionales. El teorema nos muestra que es posible aproximarlo, tanto como se quiera, a través de racionales, es decir, a través de una sucesión de racionales, que justamente corresponde al proceso seguido por Cantor para la construcción de los números reales.

Conclusiones

De acuerdo con las diferentes etapas de la evolución histórica del concepto de número, presentadas en el capítulo 2 y 3, se puede observar que los sistemas de representación jugaron un papel determinante en el desarrollo de las matemáticas, en particular, en la construcción de los números reales. Los sistemas de representación permiten establecer no solo algoritmos operativos, sino también algunos elementos conceptuales que van delineando la instauración de los números reales como la versión aritmética del continuo geométrico.

La representación decimal captura diferentes aspectos de los sistemas numéricos que se desarrollaron en las antiguas civilizaciones, tales como la implementación de los agrupamientos regulares, el principio de la base 10 y el valor posicional. La acción de “agrupar” cantidades, contribuye a la “economía de pensamiento”, propia de toda representación. El principio de la base ayuda a establecer el valor numérico de los agrupamientos regulares (del mismo tamaño), a partir de diez dígitos, con los cuales se puede representar cualquier número. Históricamente, a diferencia de los antiguos griegos, para la adopción de esta representación fue necesario darle carácter numérico al cero y al uno.

Gracias a la instauración de la representación decimal se logran establecer algoritmos operativos que no requerían de una herramienta física como el ábaco para ejecutar las operaciones aritméticas básicas, ya que la misma representación decimal se utiliza como herramienta conceptual para realizar todo tipo de cálculos aritméticos gracias a las bondades que ofrecer ser un sistema decimal posicional que incluya al cero como número.

Esto permite aumentar la precisión de los cálculos, ya que el uso de las cifras arábigas en los cálculos facilita la posibilidad de obtener mejores resultados en el cálculo con números enteros, fracciones, raíces cuadradas y cubicas y en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Es decir, gracias a la representación decimal se logra encontrar valores aproximados tan grande como se quiera, permitiendo establecer diferencias entre los números, en particular, entre las fracciones que representan las expresiones decimales finitas o periódicas y los radicales que representan las expresiones decimales infinitas, es decir, entre los números racionales e irracionales.

La formalización del concepto de número real se dio en un proceso largo que hunde sus raíces en la antigüedad griega. En el contexto de la escuela pitagórica, nos percatamos de la existencia de ciertas cantidades que desbordaban a las cantidades conmensurables, denominadas magnitudes inconmensurables. Dichas magnitudes constituyen a un antecedente lejano de los números irracionales. Euclides en el libro V de los *Elementos*, construye una manera de trabajar con las magnitudes conmensurables e inconmensurables por medio de la teoría de las razones y proporciones, dando un primer acercamiento de los números racionales e irracionales como entidades separadas, pero cuantitativamente relacionadas. Más adelante, por medio del algoritmo de Euclides, se va visualizando que dichas cantidades tienen asidero en la representación decimal, ya que por medio de la división de Euclides se va enmarcando la representación decimal periódica y decimal infinita no periódica. A partir de la división de Euclides, el cual conlleva a una representación decimal de los números, las razones van adquiriendo un estatuto de cantidades numéricas.

Mas adelante, en el marco de la cuadratura del círculo, John Wallis, proporciona una representación para $4/\pi$. En dicha representación no se evidencia su naturaleza, pero se empieza a pensar sobre la existencia de números diferentes a los enteros, a las fracciones y a las raíces.

En los estudios de Euler, se identifica una contribución significativa al aspecto operativo, estableciendo una teoría sobre las fracciones continuas, en donde se muestra que las fracciones continuas guardan información sobre la naturaleza de los números; esto permite dimensionar una construcción sobre los números reales, al demostrar que todo número racional se puede representar como una fracción continua finita y que todo número irracional se puede representar con una fracción continua infinita. Por otro lado, las fracciones continuas dan lugar a una representación decimal al momento de realizar las divisiones de sus términos como se mostró en el capítulo 4. Para las fracciones continuas finas, se obtiene un resultado exacto, mientras que, para las fracciones continuas infinitas, se obtendrá una mejor aproximación del número irracional entre más términos de la fracción continua se tome. Es en este sentido, que las fracciones continuas se pueden considerar como un elemento de causalidad muy importante para los desarrollos posteriores realizados por Cantor y Dedenkind sobre la construcción de los números reales.

El trabajo de formalización de los números reales empieza en el siglo XIX, cuando Cauchy establece la necesidad de introducir un universo numérico completo, al caer en cuenta que el sistema de los números racionales no es completo; metafóricamente hablando, tiene "huecos", porque no toda sucesión de racionales converge a un número racional. Cauchy, por medio de su definición de límite, establece que dichos valores serían los números irracionales; pero no realiza una fundamentación suficientemente rigurosa sobre esta idea. Desde ese momento, muchos matemáticos emprendieron la tarea de establecer un proceso formal de construcción de los números reales, sin embargo, las construcciones más reconocidas fueron las de Cantor y Dedenkind.

En este trabajo, nos centramos en la construcción de Georg Cantor, quien logró fundamentar la teoría de los números reales por medio de sucesiones fundamentales de números racionales. Cantor continuo con la idea de Cauchy, sobre la existencia de sucesiones fundamentales de números racionales que no convergen en $\mathbb{Q}$, como la sucesión:

$$e(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

la cual, empiezan a delinear un número decimal con infinitas cifras decimales no periódicas:

$$e(1) = 2$$

$$e(2) = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$e(3) = \frac{64}{27} = 2.37037\ldots$$

$$e(4) = \frac{625}{256} = 2.441406\ldots$$

Aunque este proceso no demuestra que la sucesión aproxime a un número que no es racional, va abriendo la posibilidad de lo irracional. La sucesión nos muestra un procedimiento algorítmico para aproximar e por medio de su representación decimal, dando muestra de la potencia de la representación decimal. Estos procesos algorítmicos que se visualizan en la representación decimal son los que permiten incorporar a los números irracionales a partir de sucesiones fundamentales, tal como lo hace Cantor.

Lo anterior muestra que la representación decimal juega un papel importante como herramienta conceptual para establecer diferencias entre los números racionales e irracionales. Gracias a los diversos sistemas de representación y algoritmos operativos que se fueron consolidando con ayuda de la representación decimal, cada número irracional se empiezan a reconocer como objeto matemático.

A lo largo de esta tesis se ha destacado el papel de las múltiples representaciones de los números en la gradual construcción y formalización del sistema de los números reales, permitiendo establecer un paralelo con la teoría de representación semiótica de Duval (2016), quien se preocupa por el papel de las diversas representaciones en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Es decir, que la teoría de la representación semiótica se puede considerar como una herramienta muy potente para la comprensión del desarrollo histórico del concepto matemático, ya que como se menciona en el capítulo 1 "*el desarrollo de las representaciones semióticas son una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático*" (Duval, 2016, pág. 3), es decir, para el desarrollo histórico de los conceptos matemáticos. En este sentido, lo novedoso de este trabajo de grado es que se ha aplicado la teoría de representaciones semióticas, procedentes de las teorías didácticas, para establecer el desarrollo histórico de los números reales. De esta forma, se abren nuevas perspectivas respecto al papel que puede jugar el conocimiento sobre la historia de las matemáticas para futuros maestros en el aula.

Referencias

Apostol, T. M. (1988). *Calculus .* Bogotá : Reverté colombiana S.A. .

Arboleda, L. C. (2015). Objetividad matemática, historica y educación matemática. *ResearchGate*, 7.

Bell, J. L. (2020). The Continuum and the Evolution of the Concept of Real Number. En J. L. Bell, *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice.* (pág. 13). Springer, Cham .

Calderón, N. (2014). Diferentes construcciones del número real . *Diferentes construcciones del número real* . Bógota , Colombia : Universidad Nacional de Colombia .

Cantor, G. (1872). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, 5, 123-132.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis.* (C. Alvarez, Trad.) México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas II.* México : Siglo ventiuno editores, sa de cv .

Duval, R. (1993). Registro de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. . *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 37-65.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento humano. Registro semiótico y Aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del valle.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. *funes.uniandes* .

Escobar, G. (2020). Los Juicios Sintéticos a Priori de Kant . *Revista Institucional Universidad Pontificia Bolivariana*, 56-57.

Euclides. (1991). *Elementos.* Barcelona: Gredos.

Glasersfeld, V. (21 de August de 2001). Constructing Communication . (A. Pitasi, Entrevistador)

González, N. (2017). Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones. . *Las fracciones egipcias como herramienta* *didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones.* . Bogotá , Colombia : Universidad Nacional de Colombia. .

Guedj, D. (2000). *El imperio de las cifras y los números .* Barcelona : Biblioteca de bolsillo CLAVES.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning .* Reston, Virginia : National Council of Theachers of Mathematics.

Ifrah, G. (1985). *Las cifras. Historia de una gran invención.* Madrid: Alianza Editorial .

Kant, I. (1928). *Crítica de la razón pura.* Madrid: Edición digital basa en la edición de Madrid, Librería General de Victoriano Suárez.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol use in Mathematics. En C. Janvier, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (págs. 159- 193). Montreal : Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 515-556). New York: MacMillan Publishing Company.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días .* Madrid : Alianza editorial .

López, M. (2010). Los números base de la ciencia y de la transmisión actual de la información . *XI programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica*, 51-52.

Mora, L., & Torres, J. (2004). El número real a través de la historia . En L. Mora, & J. Torres, *Concepciones de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas sobre números reales* (págs. 48- 50). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional .

Mormann, T. (2018). Structure-preserving representations, constitution, and the relative a priori. *Modeling and Representation* .

Mormann, T. (2018). Structure-Preserving representations, constitution, and the relative a priori. . *Springer*, 5.

Pineda, D., & Ñañez, Y. (2018). Intuiciones, visualizaciones y formalizaciones en el desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales. *Intuiciones,* *visualizaciones y formalizaciones en el desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales*. Cali , Colombia : Universidad del Valle .

Radford, L. (2004). Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 5.

Radford, L. (2008). The Ethics of being and Knowing: Towards a Cultural theory of learning . En L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger, *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture.* (págs. 215- 234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2013). On the rol of representations and artefacts in knowind and learning . *Educ. Stud Mathe (2014)*.

Recalde, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas .* Cali : Universidad del Valle .

Recalde, L., & Arbeláez, G. (2011). *Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico - epistemológica .* Cali : universidad del Valle .

Recalde, L., & Vargas, V. (2009). Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales.

Romero, I., & Rico, L. (1999). Representación y Comprensión del concepto de Número Real. Una experiencia Didáctica en secundaria. . *Revista Ema*, 117-151.

Ruiz, Á. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas .* Costa Rica : Universidad Estatal a Distancia .

Sarango, J. (2015). Sobre los fundamentos de los juicios sintéticos a priori de la aritmética de Kant. *Sobre los fundamentos de los juicios sintéticos a priori de la aritmética de Kant*. Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal.* Barcelona : Editorial Reverté, S.A. .

Torres, R. I. (2019). *Los secretos de la multiplicación: De los Babilonicos a los ordenadores. .* Madrid : Los libros de la catarata. .

Ugarte, A. (2011). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci.* Lulu.com.