



**UN ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR UN GRUPO DE
ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE
ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA**

TRABAJO DE MAESTRÍA

ADRIANA OJEDA ORDÓÑEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, MARZO DE 2018



**UN ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR UN GRUPO DE
ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE
ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA**

ADRIANA OJEDA ORDÓÑEZ
Código: 201505278

Informe final de indagación, presentado como requisito para optar al título de
Magister en Educación, énfasis en Educación Matemática

DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO:
CRISTIAN ANDRÉS HURTADO MORENO, MG
PROFESOR DEL INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, MARZO DE 2018



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACION: Cali, 05 de Abril de 2018
ESTUDIANTE: ADRIANA OJEDA ORDOÑEZ - CÓDIGO: 1505278
TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO: UN ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA
DIRECTOR DEL TRABAJO: Profesor CRISTIAN ANDRES HURTADO MORENO
EVALUADORES: Profesora JOHANA ANDREA TORRES DIAZ Profesora JENNIFER SALGADO PLAMBA
COMENTARIOS DE LOS JURADOS El trabajo de grado es una muy buena muestra de una reflexion pedagogica docente y consolidación de aspectos teoricos, los cuales recogen las recomendaciones dadas.
APROBADO ☒
APLAZADO ☐
RECHAZADO ☐

Prof. SANTIAGO A. ARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. CRISTIAN A. HURTADO MORENO
Director de Trabajo de grado

Prof. JOHANA ANDREA TORRES DIAZ
Jurado Evaluador

Prof. JENNIFER SALGADO PLAMBA
Jurado Evaluador

Prof. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO
(En representación del Subdirector de Investigaciones y posgrados)

A Dios, por tener el control de mi vida
A mi madre, por ser mi inspiración
A mi hijo, por ser mi gran bendición
A mi gran amor, por su ayuda incondicional
A mi angelito, por iluminar mis sueños
A mi familia por su paciencia.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto de investigación ha sido elaborado bajo la inducción del profesor Cristian Andrés Hurtado Moreno, a quien agradezco infinitamente en todo este proceso, por su constante dedicación, disposición y enseñanza para alcanzar los objetivos propuestos.

Gracias a cada uno de los maestros que me acompañaron y dieron de su gran experiencia y sabiduría para la elaboración de esta investigación y mi formación profesional.

Agradezco al Ministerio de Educación Nacional, por brindarme la oportunidad de crecer profesionalmente en la excelencia de esta universidad.

No está de más agradecer a todos mis compañeros que con su apoyo, escucha y consejos aportaron en mi proceso profesional.

Gracias a mis angelitos, a mi madre y a mi hermano, que seguirán siendo luz en mi camino.

Gracias a mi familia, que esperaron pacientemente en los momentos de ausencia.

Gracias a mi gran amor, que me dio una gran lección de vida, de fortaleza, de sabiduría, porque estuvo siempre en los momentos de angustia, por su entrega, por su dedicación.

Gracias a mi hijo, que dulcemente me esperó en los largos momentos de ausencia, por ser mi motivador y mi inspiración.

Y principalmente a Dios, por brindarme toda la sabiduría e inteligencia que siempre pedí y por tener el control de mi vida.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	vii
SUMMARY	viii
INTRODUCCIÓN	ix
CAPÍTULO I	1
DELIMITACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN DEL CAMPO DE ESTUDIO	1
1.1 Antecedentes	2
1.2 Presentación de la problemática de estudio	17
1.3 Objetivos	25
1.3.1 Objetivo general	25
1.3.2 Objetivos específicos	25
1.4 Justificación	25
CAPÍTULO II	29
MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL Y CURRICULAR	29
2.1 Referente curricular	30
2.1.1 Enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas	32
2.1.2 La estructura multiplicativa en los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas	40
2.2 Referente didáctico	45
2.2.1 Isomorfismo de medidas	46
2.2.1.1 Comparación multiplicativa	55
2.2.2 Producto de medida	57
2.2.3 Estructura de cantidades	60
2.2.4 Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas	63

2.3 Algunas articulaciones entre el referente didáctico y el curricular. Balance y aportes al trabajo.....	65
CAPÍTULO III.....	67
DISEÑO METODOLÓGICO.....	67
3.1 El enfoque metodológico del trabajo de indagación	68
3.2 Marco contextual.....	70
3.3 El proceso del trabajo de indagación	72
3.3.1 La población objeto de estudio	72
3.3.2 Los instrumentos de recolección de la información.....	73
3.4 Categorías de análisis.....	73
3.4.1 Categoría de análisis en torno a la relación multiplicativa de isomorfismo de medidas (C1)	74
3.4.2 Categoría de análisis en torno a la relación multiplicativa de productos de medidas (C2)	78
3.5 Diseño de la prueba.....	83
3.5.1 Las variables que se movilizan en la prueba.....	84
3.5.2. Diseño de las situaciones de la prueba.....	85
3.5.3 Implementación de la prueba	102
3.6 Análisis de los resultados	103
3.6.1 Análisis de la situación 1: Juego de goles.....	103
3.6.1.1 Primer desafío.....	103
3.6.1.2. Segundo desafío	107
3.6.1.3. Tercer desafío	113
3.6.1.4. Cuarto desafío.....	118
3.6.2 Análisis de la situación 2: Renovando la superficie de la cancha.....	131
3.6.3 Análisis de la situación 3: Diseño de manillas.....	148
3.6.4 Análisis general de las situaciones.....	152
CAPÍTULO IV.....	161
CONCLUSIONES	161
4.1 Conclusiones y reflexiones	162

REFERENCIAS.....	172
ANEXOS	177
ANEXO 1. Situación 1: Juego de goles	177
ANEXO 2. Tabla de Registro de puntuación.....	183
ANEXO 3. Situación 2: Renovando la superficie de la cancha	184
ANEXO 4. Situación 3: Diseño de manillas	186
ANEXO 5. Análisis esquemático de las estrategias usadas por los estudiantes	188
ANEXO 6. Planeación curricular de la Institución Educativa Jorge Isaacs, Tercer Grado ...	189
ANEXO 7. Planeación curricular de la Institución Educativa Jorge Isaacs, Cuarto Grado...	191
ANEXO 8. Planeación curricular de la Institución Educativa Jorge Isaacs, Quinto Grado ..	193

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Comparación de los niveles de desempeño en el área de Matemáticas entre IEJI, Valle del Cauca y Colombia, año 2014.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 2. Desempeños de los estudiantes en las pruebas Saber grado 5, según los componentes que evalúa, año 2014</i>	<i>20</i>

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1. Síntesis del número de preguntas presentadas en las pruebas Saber año 2014 en relación con las competencias y desempeños asociados en el componente numérico-variacional</i>	<i>21</i>
<i>Tabla 2. Coherencia vertical y horizontal de los Estándares entorno a la estructura multiplicativa en los primeros conjuntos de grados en la Educación Básica Primaria.</i>	<i>42</i>
<i>Tabla 3. Tipología de las estructuras de las cantidades</i>	<i>61</i>
<i>Tabla 4. Tipología de relaciones multiplicativas y estructuras de cantidades.....</i>	<i>63</i>
<i>Tabla 5. Relación entre los modelos propuestos por el MEN (1998), Vergnaud (1990, 1994,2000) y</i>	<i>66</i>
<i>Tabla 6. Categoría de análisis para los resultados obtenidos.....</i>	<i>82</i>
<i>Tabla 7. Registro General de puntuación de los desafíos</i>	<i>86</i>
<i>Tabla 8. Resultados de Juego de goles</i>	<i>95</i>
<i>Tabla 9. Configuración de la prueba en términos de las variables y objetivos que movilizan ..</i>	<i>101</i>

ÍNDICE DE IMÁGENES

<i>Imagen 1. Estrategia presentada por P13 al resolver el desafío 1 de la Situación 1</i>	<i>104</i>
<i>Imagen 2. Estrategia presentada por P14 al resolver el desafío 1 de la Situación 1</i>	<i>105</i>
<i>Imagen 3. Estrategia presentada por P8 al resolver el desafío 1 de la Situación 1</i>	<i>106</i>
<i>Imagen 4. Estrategia presentada por P7 al resolver el desafío 2 de la Situación 1</i>	<i>108</i>
<i>Imagen 5. Estrategia presentada por P11 al resolver el desafío 2 de la Situación 1</i>	<i>109</i>

<i>Imagen 6. Estrategia presentada por P14 al resolver el desafío 2 de la Situación 1</i>	<i>110</i>
<i>Imagen 7. Estrategia presentada por P9 al resolver el desafío 2 de la Situación 1</i>	<i>111</i>
<i>Imagen 8. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 2 de la Situación 1</i>	<i>112</i>
<i>Imagen 9. Estrategia presentada por P1 al resolver el desafío 3 de la Situación 1</i>	<i>114</i>
<i>Imagen 10. Estrategia presentada por P1 al resolver el desafío 3 de la Situación 1</i>	<i>114</i>
<i>Imagen 11. Estrategia presentada por P9 al resolver el desafío 3 de la Situación 1</i>	<i>115</i>
<i>Imagen 12. Estrategia presentada por la P7 al resolver el desafío 3 de la Situación 1</i>	<i>116</i>
<i>Imagen 13. Estrategia presentada por P6 al resolver el desafío 3 de la Situación 1.</i>	<i>117</i>
<i>Imagen 14. Estrategia presentada por P14 al resolver el desafío 3 de la Situación 1</i>	<i>117</i>
<i>Imagen 15. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 3 de la Situación 1</i>	<i>118</i>
<i>Imagen 16. Estrategia presentada por P11 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1 ..</i>	<i>119</i>
<i>Imagen 17. Estrategia presentada por P13 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1 ..</i>	<i>120</i>
<i>Imagen 18. Estrategia presentada por P9 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1</i>	<i>121</i>
<i>Imagen 19. Estrategia presentada por P2 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1</i>	<i>121</i>
<i>Imagen 20. Estrategia presentada por P1 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1</i>	<i>122</i>
<i>Imagen 21. Estrategia presentada por P8 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1</i>	<i>123</i>
<i>Imagen 22. Estrategia presentada por P6 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1 ...</i>	<i>124</i>
<i>Imagen 23. Estrategia presentada por P9 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1 ...</i>	<i>124</i>
<i>Imagen 24. Estrategia presentada por P10 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1 .</i>	<i>125</i>
<i>Imagen 25. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1 ...</i>	<i>126</i>
<i>Imagen 26. Estrategia presentada por P14 al resolver el desafío 4 punto 3 de la Situación 1 .</i>	<i>127</i>
<i>Imagen 27. Estrategia presentada por P10 al resolver el desafío 4 punto 3 de la Situación 1 .</i>	<i>129</i>
<i>Imagen 28. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 4 punto3 de la Situación 1</i>	<i>131</i>
<i>Imagen 29. Estrategia presentada por P7 al resolver el punto1 de la Situación 2.....</i>	<i>132</i>
<i>Imagen 30. Estrategia presentada por P4 al resolver el punto 1 de la Situación 2.....</i>	<i>133</i>
<i>Imagen 31. Estrategia presentada por P5 al resolver el punto 1 de la Situación 2.....</i>	<i>134</i>
<i>Imagen 32. Estrategia presentada por P2 al resolver el punto1 de la Situación 2.....</i>	<i>136</i>
<i>Imagen 33. Estrategia presentada por P12 al resolver el punto 1 de la Situación 2.....</i>	<i>137</i>
<i>Imagen 34. Estrategia presentada por P10 al resolver el punto1 de la Situación 2.....</i>	<i>138</i>
<i>Imagen 35. Estrategia presentada por P14 al resolver el punto 3 de la Situación 2.....</i>	<i>139</i>
<i>Imagen 36. Estrategia presentada por P6 al resolver el punto 3 de la Situación 2.....</i>	<i>143</i>

<i>Imagen 37. Estrategia presentada por P11 al resolver el punto 3 de la Situación 2</i>	<i>144</i>
<i>Imagen 38. Estrategia presentada por P9 al resolver el punto 3 de la Situación 2</i>	<i>145</i>
<i>Imagen 39. Estrategia presentada por P2 al resolver el punto 3 de la Situación 2</i>	<i>147</i>
<i>Imagen 40. Estrategia presentada por P13 al resolver el punto 3 de la Situación 2</i>	<i>147</i>
<i>Imagen 41. Estrategia presentada por P2 al resolver el punto 1 de la Situación 3</i>	<i>149</i>
<i>Imagen 42. Afirmación presentada por P5 al resolver el punto 3 de la Situación 3.....</i>	<i>149</i>
<i>Imagen 43. Estrategia presentada por P14 al resolver el punto 2 de la Situación 3</i>	<i>151</i>

RESUMEN

El presente trabajo parte de reconocer la complejidad que supone para muchos estudiantes de la Educación Básica Primaria enfrentar y resolver satisfactoriamente problemas de estructura multiplicativa. Sobre esto diferentes investigadores como Vergnaud (1990, 1994, 2000), Puig y Cerdán (1999), Obando (2015), entre otros, y la propuesta expuesta en los Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas (MEN, 1998) han aportado elementos de diversa naturaleza para comprender la complejidad que se reviste alrededor de dicha problemática, sin generar aprendizajes significativos. Para abordar este asunto desde una perspectiva local, en este trabajo se ha propuesto caracterizar las estrategias de un grupo de estudiantes de sexto grado de la Educación Básica, cuando enfrentan situaciones de isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medidas, bajo la perspectiva de Cohen & Manion (1990) la cual permite descubrir o interpretar lo *que es*.

Dentro de los principales hallazgos en este trabajo, se identificó que en los estudiantes hay mayor dificultad en solucionar situaciones de comparación multiplicativa que en las otras dos, que las estrategias de tipo aditivo son las que más se privilegian para solucionar situaciones de estructura multiplicativa y que pese al gran esfuerzo de enseñar los algoritmos básicos, estos siguen siendo de gran dificultad para ellos. Estos elementos finalmente dan pautas importantes para considerar maneras de mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa que circulan en los primeros años de escolaridad.

Palabras claves: Estructura multiplicativa, isomorfismo de medidas, producto de medidas.

SUMMARY

The present work starts by recognizing the complexity that many students of primary basic education face and successfully solve problems of multiplicative structure. About this, different researchers like Vergnaud (1990, 1994, 2000) and Puig & Cerdán (1999), Obando (2015), among others, and the proposal exposed in the curricular guidelines of the area of mathematics have contributed elements of different nature to understand the complexity that surrounds this problem, without generating significant learning. To address this issue from a local perspective, this paper has proposed characterizing the strategies of group of sixth grade students of Basic Education when faced with situations of isomorphism of measure, multiplicative comparison and product of measure, under Cohen and Maniun's perspective which allows us to discover or interpret what is.

Among the main findings in this research, it was identified that in students there is greater difficulty in solving situations of multiplicative comparison than in the other two, that additive strategies are the ones that are most privileged to solve situations of multiplicative structure and that despite the great effort of teaching the algorithms the remain of great difficulty for them. These elements finally give important guidelines to consider ways to improve both the teaching and the learning of the multiplicative structure problems that circulate in the first years of schooling.

Key words: Multiplicative Structure, isomorphism of measure, product of measures.

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática interesada tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento numérico ha sido, sin lugar a dudas, bastante robusta. Buen número de estas investigaciones ha centrado su atención, en particular, en la resolución de problemas de estructura multiplicativa, tanto desde la perspectiva de la enseñanza (centrada en el maestro) como desde el aprendizaje (centrada en los estudiantes). Toda esta investigación ha develado un panorama que pone de manifiesto la complejidad que supone en sí mismo este tipo de problemas, complejidad que atañe tanto a su estructura semántica, como a la naturaleza de las cantidades involucradas en ellos, así como también ha permitido reconocer que buena parte de las problemáticas que se revisten alrededor de este asunto se generan, en buena medida, por las formas que se privilegian para su abordaje en las aulas de clase (Aguirre, 2011; Ospina & Salgado, 2016; Botero, 2016).

Productos de estas investigaciones han insistido ampliamente durante las últimas décadas que reducir la enseñanza de la operación de multiplicación a un proceso de sumas iteradas en el cual el algoritmo de esta operación cobra especial relevancia junto con la memorización de las tablas de multiplicar, tiene un espacio importante y extenso en los currículos de los primeros grados de escolaridad en tanto que economiza dicho proceso, pues muchos problemas de estructura multiplicativa se reducen al modelo de sumas iteradas, y al uso mecánico y sin sentido del algoritmo, lo cual oscurece la relación que tiene, por ejemplo, estos problemas con la proporcionalidad (Obando, en prensa).

Además de lo anterior, centrar la atención exclusiva en estos asunto, deja de lado el estudio de elementos de capital importancia para atender los problemas de estructura

multiplicativa propios en la Educación Básica Primaria, como por ejemplo, atender al estudio de problemas tipo factor multiplicante, producto cartesiano, la relación entre conceptos como el de multiplicación, división, razón, proporcionalidad, “función”, fracción, entre otros; tal y como ha sido reconocido desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y por investigadores como Vergnaud (1983, 1990, 1994, 2000), Schwartz (1986), Puig & Cerdán (1999), Obando (2007, 2013, 2015), entre otros.

Pese a estos llamados de atención, con preocupación se evidencia desde la práctica pedagógica de la autora de este trabajo, así como desde la investigación en Didáctica de las Matemáticas, que estos cuestionamientos poco son atendidos por los maestros en las aulas de clase, y más aún por los libros de texto (Ospina & Salgado, 2011), lo cual puede afectar los desempeños de los estudiantes en los resultados de pruebas tanto internas como externas a las instituciones educativas, en los cuales el uso de un pensamiento multiplicativo se torna fundamental para atender dichas pruebas. Por supuesto, este último escenario es bastante notorio desde la práctica pedagógica de la autora, que con frecuencia se revelan un sin número de dificultades y obstáculos que enfrentan los estudiantes al momento de atender problemas de esta naturaleza, lo cual los lleva a errores de diversa índole.

Bajo este panorama, interesa en este trabajo rescatar elementos conceptuales y curriculares importantes a considerar para diseñar una prueba en torno a problemas de estructura multiplicativa, la cual es implementada con un grupo de estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Jorge Isaacs sede Santa Bárbara, del municipio de El cerrito, Valle del Cauca, para identificar y caracterizar las estrategias que los estudiantes ponen en juego al momento de dar solución a las situaciones. Desde luego, tal identificación y caracterización se hace atendiendo a los elementos conceptuales y curriculares considerados en este estudio.

Con los insumos recogidos se presentan una serie de reflexiones así como elementos conceptuales y metodológicos que favorezcan la resolución de problemas de estructura multiplicativa en los años básicos de escolaridad, de tal modo que impacte no solo en la formación de la autora del trabajo, sino también a la comunidad educativa en la cual se ubica el desarrollo del mismo, maestros y estudiantes fundamentalmente, e incluso para la comunidad académica y profesional interesada en este asunto. Dando así respuesta a la pregunta de indagación, ¿Cómo se caracterizan las estrategias que presentan un grupo de estudiantes de sexto grado en la resolución de problemas de estructura multiplicativa?

Para lograr el propósito de este trabajo, este informe se ha organizado en 4 capítulos, que atienden a diferentes aspectos, tal y como se describe a continuación:

En el **primer capítulo** se ubica la problemática de estudio partiendo de reflexiones dadas por algunos investigadores en torno a la resolución de problemas de estructura multiplicativa, de los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en este asunto tanto en las pruebas internacionales, como PISA, así como en las nacionales, y de la experiencia pedagógica de la autora del trabajo. Se presentan también en este capítulo, los objetivos que vertebran el desarrollo de este trabajo, la justificación del mismo, el marco contextual en el cual se ubica, y algunos antecedentes que aportan elementos importantes para delimitar el campo de interés y para el diseño de las situaciones que se proponen en la prueba presentada a los estudiantes.

El **segundo capítulo** versa sobre el marco de referencia conceptual y curricular abordado en este estudio, para lo cual se toma en consideración los trabajos de Vergnaud (1983, 1990, 1994, 2000), Schwarz (1986), Puig & Cerdán (1999), y Obando (2007) en torno a lo didáctico; y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias en

Matemáticas propuestos como documentos de política pública nacional por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en relación con lo curricular.

En el **capítulo tres** se presenta el diseño metodológico del trabajo, en el cual se precisan aspectos como: el enfoque y proceso del estudio que se siguen, la población objeto de estudio, los instrumentos para la recolección de los datos, las categorías de análisis que se usan en el estudio de la información recolectada, los elementos que configuran y se consideran en el diseño de la prueba, así como los análisis de los resultados obtenidos de la implementación de dicha prueba.

Finalmente en el **capítulo cuatro** se exhiben las conclusiones generadas a partir de los resultados de la prueba, así como del estudio de los elementos didácticos y curriculares, de cara a los objetivos específicos y general trazados en este trabajo.

CAPÍTULO I

DELIMITACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN DEL CAMPO DE ESTUDIO

En este capítulo se presenta la problemática de estudio a partir de reflexiones dadas por algunos investigadores en torno a la resolución de problemas de estructura multiplicativa y considerando los bajos desempeños académicos en las pruebas nacionales que tienen los estudiantes del grado sexto de la institución educativa Jorge Isaacs (IEJI) del Cerrito, Valle. Para atender a la problemática que se expone, se exhibe el objetivo general así como los específicos que direccionan este estudio, lo cual da paso a la presentación de elementos que justifiquen la importancia y pertinencia de este estudio. Se exponen además algunos antecedentes que iluminan en distintos sentidos este estudio, así como el marco contextual en el cual se inscribe el trabajo que se desarrolla.

1.1 Antecedentes

A continuación se presentan algunos trabajos que han centrado su interés en el estudio de la resolución de problemas de estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad, los cuales aportan elementos de interés para el desarrollo de este trabajo.

Ospina & Salgado (2011) estudiaron algunos libros de texto colombianos de tercer grado de la educación básica primaria en relación con la enseñanza de la multiplicación, con el fin de caracterizar sus propuestas de trabajo e identificar los fundamentos del concepto de multiplicación, a partir de los referentes conceptuales que Vergnaud ha propuesto en relación con el estudio de las estructuras multiplicativas. Teniendo como herramienta de análisis las configuraciones epistémicas propuestas por (Font & Godino, 2006), estas autoras determinaron que estos libros de textos enmarcan la multiplicación como una suma iterada y prevalecen los algoritmos, las tablas de multiplicar y el manejo de simbolismos, mostrando la multiplicación como una relación ternaria; y de una manera aislada se presentan conceptos afines a la multiplicación, tal como los relacionados con la geometría en el cálculo de áreas y volúmenes, en lo estocástico en las permutaciones y combinaciones, entre otros. De acuerdo con las autoras deja de lado el estudio amplio de la estructura multiplicativa, presentándose en estos libros de texto el estudio de la multiplicación de una forma muy limitada.

Además de la anterior investigación, Ospina & Salgado (2016) realizaron un trabajo de maestría en el cual se propuso una trayectoria de aprendizaje sobre la enseñanza de la multiplicación, aplicada a un grupo estudiantes de grado sexto de la institución educativa El Palmar-Dagua, con el fin de resignificar las prácticas pedagógicas en la escuela y proponer una perspectiva más amplia del concepto de multiplicación. Este trabajo se realizó bajo la metodología de experimentos de enseñanza, y tomando en consideración la perspectiva teórica

del análisis del discurso de Van Dijk, la teoría de las cantidades de Schwartz y los elementos que aporta Vergnaud acerca de las estructuras multiplicativas. La propuesta de enseñanza centró su interés en analizar los discursos que se movilizaban entre el profesor y los estudiantes para la conceptualización de la multiplicación como isomorfismo de medida, esto por medio del análisis semántico del discurso; a saber, identificación de macroestructura y tópicos del discurso.

Lo anterior les permitió a las autoras concluir, entre otras cuestiones, que las ideas y comprensiones en torno al objeto de estudio de algunos estudiantes comunican de mejor manera en forma oral que escrita o viceversa, además los resultados de la investigación aportaron elementos para la construcción y modificación del modelo curricular de la institución, reconociendo la importancia del discurso en la construcción de estos saberes. Así como también el análisis del discurso por parte del profesor para caracterizar y comprender las producciones de sus estudiantes.

Es válido anotar que estas autoras abordan la tematización como constructo técnico pues ahondaron en las posibilidades que dejó el estudio anterior.

Por su parte Echeverry & Cumbal (2015) analizaron en dos textos de matemáticas del grado tercero de primaria, *“Casa de las matemáticas 3”* y *“Zoom a las matemáticas 3”*, los enunciados que tematizan el concepto de multiplicación. Para ello, utilizaron la propuesta de Searle, que brinda criterios de análisis sobre los actos lingüísticos tomando en consideración los actos ilocucionarios. De acuerdo con los resultados de este trabajo, se logró identificar que en ambos libros existen elementos que permiten el estudio de la estructura multiplicativa con algunos elementos propuestos por Vergnaud. No obstante, en los libros movilizan las operaciones directas sin considerar las magnitudes y la multiplicación en relación con el uso del

algoritmo, tablas de multiplicar y la adición iterada. Con este trabajo se brindaron elementos para que los docentes logren identificar el sentido que prevalece en los libros de texto de matemáticas de grado 3 sobre la multiplicación, y a partir de ello lograr dotar de nuevo sentido su abordaje en la escuela.

Aguirre (2011) en su trabajo de investigación propuso formular una secuencia didáctica con la cual les permita a los estudiantes de grado tercero de Educación Básica Primaria, promover su conocimiento en la aplicación de estructuras multiplicativas para la resolución de problemas aritméticos, identificando a su vez las dificultades que estos estudiantes presentan. Bajo esta propuesta se identifica que una de las dificultades que tienen los estudiantes, es que no han tenido un aprendizaje significativo sobre el manejo de los campos conceptuales y las estructuras multiplicativas expuestas por Vergnaud, por lo tanto la formulación de la secuencia didáctica le permite al alumno movilizar este conocimiento en el aula.

Benavides (2008) propuso en su tesis doctoral, identificar algunas características que presentan los niños con talento entre 11 y 13 años de edad al resolver problemas matemáticos de estructura multiplicativa, siendo esta temática de gran peso para el modelo que proponen. Esta caracterización permitió comparar el rendimiento obtenido de niños con talento desde un enfoque de procesos, en términos de representaciones, procedimientos, estrategias y errores. Para este propósito el autor considera ideas de autores como Renzulli (1988), la teoría de los campos conceptuales y el desarrollo de las estructuras multiplicativas que Vergnaud propone desde los años 80.

A partir del trabajo realizado, este investigador, logró identificar que en los niños con talento predominan los procedimientos aritméticos y, entre ellos, los más empleados son la

división partitiva y la compensación aditiva, resaltando dos tipos de representación que es la verbal y la pictórica. De manera global, las mayores dificultades que presentan los niños son: el uso de los números decimales menores que la unidad, la falta de claridad entre la magnitud área y perímetro, resolución de problemas de combinación en que es relevante el orden, el uso del factor inverso. Finalmente, el autor de este proyecto recomienda, entre otras cuestiones, fomentar la representación gráfica como apoyo heurístico para la resolución de problemas, y enfatizar en los contenidos matemáticos que se han mostrado como complicados.

Puig & Cerdán (1999) realizaron un estudio acerca de las dificultades que se encuentran en resolver problemas de multiplicación y división y propusieron una organización de los conocimientos para resolver problemas de dicho tipo, como tener en cuenta la estructura de cantidades brindada por Schwartz & Kaput, las categorías semánticas expuestas por Vergnaud, a saber, el isomorfismo de medidas y producto de medidas, y la comparación multiplicativa propuesta por Nesher. Una vez considera estos estudios, los investigadores saben sobre la dificultad que presentan los problemas multiplicativos en función de lo dicho, además de reconocer que el modelo de multiplicación como producto cartesiano es más difícil que los de isomorfismos de medida tal como lo afirma Vergnaud y Hart en sus estudios. Así mismo identificaron que los problemas de partición son más fáciles que los problemas de cuotición.

A partir de Vergnaud identificaron que los problemas de isomorfismo son más fáciles cuando en una cantidad intensiva el denominador es el tiempo, así mismo cuando en una cantidad intensiva se manejan magnitudes del mismo tipo. En este mismo documento se identificó que el contexto influye en gran medida en el nivel de dificultad, dada la frecuencia con que se encuentra la multiplicación en situaciones de partición y cuotición.

Este estudio proporcionó pistas a los profesores sobre las dificultades que pueden esperar de sus alumnos y sirve de parámetro para entender por qué hacen lo que hacen.

Echeverry (2013) diseñó a partir de su investigación una propuesta de aula para promover el aprendizaje de la estructura multiplicativa por medio de la resolución de problemas de tipo verbal en estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria. A partir de su implementación, pretende identificar el tipo de estrategias didácticas que en los estudiantes promuevan el aprendizaje de esta estructura, además de determinar las debilidades y fortalezas de ellos. Por medio de la investigación cualitativa con técnicas participativas, este investigador observó que los estudiantes tienen dificultades en justificar las estrategias que usan para resolver los problemas planteados debido a la falta de argumentos que tienen quizá porque no tienen el lenguaje para comunicar lo que saben hacer. Por lo tanto este autor concluye que se hace necesario promover los procesos de argumentación, razonamiento y concertación para el desarrollo de individuos críticos y reflexivos, de tal modo que se logre una conceptualización de la estructura multiplicativa.

Jaramillo & Obando (2013) presentaron algunos antecedentes que explicitan el manejo que se le da a las situaciones de tipo multiplicativo como son el conteo iterado, el conteo iterado mediante dobles, composición aditiva y composición multiplicativa. Para esta reflexión se parte de los planteamientos de la Teoría de la Actividad (prácticas sociales en la escuela), y a partir de ello sugieren la importancia de reflexionar sobre los procesos, instrumentos y objetos de conocimiento que utilizan los estudiantes al enfrentarse a este tipo de situaciones, para establecer cómo se debe tratar esta enseñanza en la escuela y qué actividades le ayudan a comprender a los estudiantes la multiplicación como una operación que guarda relaciones proporcionales y covarianza entre sistemas de cantidades.

Por su parte Torres (2013), realizó una investigación que pretendía establecer qué procesos, instrumentos y objetos de conocimientos están presentes en el tratamiento que los estudiantes de los grados de tercero y cuarto de Básica Primaria hacen en las situaciones de isomorfismo de medida, en términos del análisis relacional tipo función. Estas acciones son analizadas bajo la Teoría de la Actividad, en el marco de una metodología cualitativa centrada en un estudio de caso. Una de las conclusiones dada por el investigador es que para movilizar este tipo de acciones el docente debe tener como apoyo una red conceptual que esté en constante transformación y le ayude a identificar los objetos y conceptos a enseñar en la situación y los que vayan emergiendo.

Gallego, Ruiz, Salgado, Sucerquia & Uribe (2004) presentaron la realización de actividades y juegos acompañados de su respectiva reflexión para contextualizar los saberes matemáticos en cuanto a las estructuras aditivas y multiplicativas. Este trabajo fue desarrollado en dos instituciones de Medellín con estudiantes de grado tercero y cuarto de Básica Primaria, enfocado en la corriente constructivista, en el cual se intentó implementar una propuesta de intervención pedagógica que facilite el desarrollo del pensamiento aditivo y multiplicativo apoyado en las teorías de Jean Piaget, Constance Kamii, Vergnaud, Carmen Gómez entre otros. La propuesta de estos autores arrojó buenos resultados relacionados con la comprensión y ampliación de los conceptos a trabajar, además de crear conciencia en cuanto a involucrar conceptos matemáticos en las actividades y que estas no eran solo un juego, sino que tenían un propósito fundamental de construir su propio saber matemático dentro de un contexto.

Castro (1994) presentó un estudio contextualizado en un ambiente escolar que se situó en el campo específico de conocimiento de la cognición matemática y el pensamiento numérico en torno a la resolución de problemas de estructura multiplicativa. Este investigador centró los

procesos cognitivos bajo la Teoría del Procesamiento de la Información propuesta por (Newell & Simón, 1972).

Mediante una metodología que retoma elementos de orden tanto cualitativos como cuantitativos, los investigadores pretendieron describir las representaciones mentales que los estudiantes construyeron al finalizar la enseñanza primaria cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa. Las implicaciones didácticas que tuvo este estudio son: que el docente debe impartir las instrucciones teniendo en cuenta las estructuras de conocimiento necesario para resolver ciertos tipos de problemas y este análisis permite una mejor comprensión de las dificultades que los alumnos tienen en los diferentes niveles.

En la investigación realizada por Botero (2006) se determina que los bajos resultados que obtienen los estudiantes en las pruebas externas del Colegio Calasanz de Medellín, es debido a la falta de conceptualización de la estructura multiplicativa, tanto en el manejo que se hace en el aula, como también en la presentación que retoman de los libros de texto, dado que en estos se encontró que fundamentan la multiplicación como suma iterada, dejando de lado la posibilidad de conceptualizar la multiplicación como otro modelo, a saber, factor multiplicante, razón, producto cartesiano o división como operación inversa, como lo determina los documentos de política pública.

Botero, presentó una investigación centrada en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo, con el fin de indagar sobre los procesos de conceptualización de las estructuras multiplicativas que tienen los niños de segundo grado del Colegio, dado a que dichas estructuras son un eje fundamental en la adquisición de múltiples conceptos, tales como la razón, la proporción, la función entre otros. Para esto se formula el problema en términos de los

elementos teóricos y las condiciones didácticas que favorecen la conceptualización de las estructuras multiplicativas, a partir de la resolución de situaciones de proporcionalidad.

En esta investigación se encontró que, familiarizar a los alumnos con la realización y el análisis de situaciones en las que se presenta covariación de dos magnitudes de forma simultánea, favorecen la conceptualización de las estructuras multiplicativas.

Obando (2015) presentó una investigación enmarcada en el razonamiento proporcional, el cual permite obtener logros tanto en la comprensión de las problemáticas relacionados con la enseñanza de razones, proporciones, proporcionalidad, números racionales, etc., como también en la consolidación del campo de la educación matemática.

Ante el contraste de esta teoría y los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas nacionales e internacionales, muestra que es necesario que la investigación enfoque su estudio en las prácticas matemáticas institucionalizadas, y es ahí en la que esta investigación cobró relevancia, dado que enfocó su estudio en dos grandes propósitos, el primero, en caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas de dos grupos de estudiantes (grado 3º y 4º) de la Educación Básica primaria, con respeto a los objetos de conocimiento matemático: razón, proporción y proporcionalidad y, el segundo, en indagar por las configuraciones epistémicas para dichos sistemas de prácticas matemáticas.

Como resultado de esta investigación el autor muestra dos principales hallazgos: el primero, la importancia de las magnitudes y la medición de las cantidades de magnitud en los procesos de estudio de las razones, proporciones y proporcionalidad, y de la noción de la razón como uno de los fundamentos para la conceptualización a lo relativo a lo multiplicativo y números racionales. El segundo, reconceptualización de las nociones de razón, proporción y

proporcionalidad a partir de los principios de lo histórico-epistemológico de estos objetos, recobrando el carácter geométrico de la razón y su función epistémica con respeto a las cantidades en relación a la razón como: medida relativa, relator o como operador, o correlator o transformador.

Vergel (2004) realizó una investigación que intentó describir y analizar por medio de las tareas, los criterios que utiliza el docente para evaluar y la forma cómo se organizan los contenidos relativos a la multiplicación en los grados de tercero, cuarto y quinto de Básica Primaria, y si las organizaciones didácticas matemáticas de estos contenidos constituyen un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje. Con un enfoque metodológico cualitativo e interpretativo, el investigador verificó que hay una concepción inmediateista del aprendizaje de la multiplicación, relacionado con la manera cómo se organizan los contenidos matemáticos relativos a la multiplicación, y con lo cual determinó que en las aulas estudiadas efectivamente la forma de organizar los contenidos matemáticos relativos a la multiplicación es un factor que determina los criterios para valorar su aprendizaje.

Castro & Hernández (2014) presentó un estudio realizado en la escuela pública de Fuenlabrada (Madrid), el cual se interesa por los problemas de estructura multiplicativa de descomposición bajo el Modelo de Instrucción Guiada Cognitivamente, orientado a estudiar cómo debe ser la instrucción que favorezca su desarrollo. El objetivo principal de esta investigación es por un lado, analizar las estrategias que utilizan los estudiantes entre 5 y 6 años de edad para resolver problemas que han sido recreados en el contexto de un cuento, y por otro lado valorar el grado de dificultad que ellos presentan en el proceso de solución de estos problemas. A partir de este trabajo, los investigadores lograron concluir que es posible el desarrollo de competencias aritméticas en la etapa infantil a través de la modelación de

problemas que involucran acciones como la de juntar y separar objetos, propios del pensamiento aritmético.

López (2015) en su investigación realizada a un grupo de estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Semilla de la Esperanza, sede Vasco Núñez de Balboa del municipio de Palmira, identificó una serie de dificultades alrededor de los procesos de razonamiento en el área de matemáticas y la aplicabilidad de las operaciones básicas en situaciones problema. Una vez identifica esta dificultad, realizó una prueba inicial con el fin de obtener resultados cualitativos y cuantitativos de los desempeños de los estudiantes al abordar situaciones problema tradicionales y compararlos con los resultados de otra prueba final después de abordar una serie de situaciones problema diseñadas para la construcción y aplicación del proceso de razonamiento, teniendo como eje articulador las estructuras multiplicativas.

En este proceso, mediante la metodología de estudio de caso, el autor identificó que se debe fortalecer el proceso de razonamiento como eje fundamental en la solución de situaciones problema contextualizadas, para lo cual diseño unas guías que permitiera afianzar habilidades de razonamiento en la aplicación de las operaciones relacionadas con la estructura multiplicativa a través de problemas de su entorno, con la característica que debían cumplir con la ejercitación, selección, modelación y argumentación de sus respuestas bajo la conceptualización del marco teórico brindadas por Castro, Rico & Castro (1999), dando como resultado un mejoramiento en sus desempeños en la temática de estructuras multiplicativas, evidenciado en los resultados de la prueba final.

Almeida (2001) realizó un estudio centrado en analizar los procedimientos de resolución de problemas verbales multiplicativos elementales, movilizados por una población de estudiantes

de quinto grado, en una escuela del estado de Sao Paulo. La reflexión que generó este investigador tomó en consideración los procedimientos canónicos propuestos por los estudiantes al atender problemas de cuarta proporcional, para lo cual tomó la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud como el enfoque teórico para el análisis de los resultados obtenidos.

Los resultados de esta investigación revelaron la heterogeneidad de procedimientos movilizados por los estudiantes para resolver este campo de problemas, así como el gran número de procedimientos no canónicos como: adición repetitiva, multiplicación con un término desconocido, multiplicaciones sucesivas, entre otros que fueron movilizados para resolver problemas elementales, lo que demuestra la complejidad de la comprensión y solución de problemas de esta estructura.

Otro de los hallazgos importantes de resaltar, producto de esta investigación, es el gran número de errores que se manifestaron por los estudiantes en la resolución de este campo de problemas, incluso en aquellos problemas que involucran tan solo una operación bien sea de división o de multiplicación. La presencia de estos errores revela la falta de comprensión que los estudiantes tienen sobre la resolución de problemas de estructura multiplicativa, lo que invita a cambiar la manera de abordar estos problemas en la actividad de aula en las clases de matemáticas.

Por su parte García & Suárez (2010), estudiaron los procedimientos que utilizan los estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria cuando resuelven problemas multiplicativos que tienen estructura de isomorfismo de medidas. Para ello se tomó en consideración un cuestionario de problemas de isomorfismo de medidas denominado PIM, dividido en tres tipos de representación, a saber, el verbal icónico, el verbal tabular y enunciado

verbal. A partir de la implementación de esta encuesta los investigadores esperaron encontrar evidencias de procedimientos escalares o funcionales dentro de una concepción de relación ternaria de la multiplicación. Una de las conclusiones para resaltar de este estudio es que los estudiantes tienden a favorecer la comprensión de las relaciones ternarias en los enunciados verbales, que en las cuaternarias.

Gómez & Contreras (2009) en su investigación reportan el trabajo realizado a dos grupos de estudiantes de 3° de Educación Secundaria en Valencia, España. Para este estudio se realizaron dos pruebas piloto, de manera sucesiva, con el propósito de indagar sobre los esquemas manifestados por los estudiantes al enfrentar un cuestionario que versa sobre problemas de tipo multiplicativo. Los esquemas considerados por estos investigadores para el análisis de los resultados de la implementación de las encuestas fueron: los cuaternarios o de regla de tres y ternario o de ley de composición, los cuales surgen del análisis teórico propuesto por Vergnaud sobre las estructuras multiplicativas y la teoría de cantidades de Schwartz.

La Tesis Doctoral de Gallardo (2004) fue dirigida a clarificar algunas cuestiones relacionadas con la comprensión del conocimiento matemático, su diagnóstico y evaluación. Para esto se construyó y aplicó una propuesta teórico-metodológica que trata de interpretar, organizar e integrar el conjunto de conocimientos, para afrontar los problemas teórico-prácticos de una manera más útil y fiable. La parte más concreta del estudio consiste en la aplicación de la propuesta o modelo teórico para el caso del algoritmo estándar (métodos clásicos a lápiz y papel para desarrollar las operaciones básicas) escrito para la multiplicación de números naturales y determinar y describir lo que un sujeto comprende y cómo lo comprende.

De manera general en la investigación realizada, se extraen algunas consideraciones de interés para distintos ámbitos en la educación matemática, algunas de estas son:

- a) Se proporciona un modelo teórico y metodológico para poder desarrollar estudios sobre la comprensión del conocimiento matemático a través de la observación, diagnóstico y valoración de lo observable.
- b) La necesidad de que el estudiante participe en una amplia variedad de actividades para una mayor comprensión de los conocimientos matemáticos aplicándola en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.
- c) Se facilita un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas para la práctica docente.

El trabajo realizado por Berrío & Gómez (2015) se centró en fortalecer el razonamiento de los estudiantes de grado tercero de Básica Primaria en situaciones que involucran estructuras multiplicativas haciendo uso de los ambientes virtuales de aprendizaje como un recurso que permite la articulación entre los conocimientos didácticos y disciplinares.

A partir del diseño curricular propuesto por los autores, que integra las tecnologías de y computación, se propone guiar a los estudiantes por un ambiente de aprendizaje virtual para el estudio de situaciones de estructura multiplicativa con el propósito de identificar las dificultades de tipo conceptual y procedimental que ellos manifiestan al enfrentar dichas situaciones. Este diseño propuesto se propuso no solo para fortalecer el razonamiento de los estudiantes en relación con las situaciones objeto de estudio, sino también para enriquecer las experiencias pedagógicas del docente cuando moviliza situaciones en el aula de clase.

En el trabajo que propuso Ángel & Candamil (2013), hizo un rediseño de una secuencia didáctica que ayude a fortalecer la comprensión del concepto de multiplicación, la cual toma en consideración los modelos operatorios de la multiplicación que proponen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN 1998), los modelos reflexivos de la multiplicación propuestos por Rico (1998) y la teoría de secuencias didácticas propuestas por Brousseau para el diseño de la misma. En este trabajo los autores evidenciaron el aporte que brindan los modelos reflexivos, dado que contribuyeron a identificar los diferentes contextos en los que se aplica la noción de multiplicación.

Para el análisis de este trabajo se desarrolló una metodología cualitativa apoyada en datos estadísticos, los cuales permitieron describir los procesos desarrollados por los estudiantes en la solución de la secuencia didáctica. Gracias a esto, se identificó que los estudiantes asocian la multiplicación como una adición iterada, relacionándolas como operaciones que tienen expresiones matemáticas equivalentes, es decir que una multiplicación resulta de abreviar una suma repetida o viceversa.

En conclusión los autores de este trabajo evidenciaron la eficacia de la aplicación de la secuencia, ya que con esta, la mayoría de niños argumentaban sus respuestas dando cuenta de la construcción del concepto de multiplicación y sus propiedades.

Estos trabajos develan que durante los últimos años ha sido de gran interés para la Educación Matemática el estudio de la estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad, y dan cuenta de la importancia de abordar estudios de este tipo, pero así mismo estas investigaciones develan grandes problemáticas, tales como: desde los libros movilizar la multiplicación como una suma repetitiva y memorización de algoritmos, aislando el aprendizaje

significativo de la estructura multiplicativa, como también, la importancia de fortalecer el razonamiento de los estudiantes desde la básica primaria en situaciones que involucran la estructura multiplicativa, o el impacto que ha tenido el discurso en el aprendizaje de esta misma, con las cuales se ve la necesidad de seguir aportando investigaciones que favorezcan la construcción del concepto de multiplicación tanto en los docentes como en los estudiantes, dado que este concepto no solo es aprender las tablas de multiplicar, sino que los estudiantes aprendan a involucrar otros conceptos propios de una relación entre dos espacios de medida dentro de una situación problema, como los que propone Vergnaud y también como los que se plantean en las investigaciones hechas por estos autores dentro de un contexto particular.

En este orden de ideas el estudio de los antecedentes presentados aporta importantes elementos para el desarrollo de este trabajo en torno, fundamentalmente, a los siguientes aspectos:

- ❖ La identificación y delimitación de un campo problemático, el cual, si bien ha sido ampliamente estudiado, aún hay cuestiones importantes que atender, como presentar la enseñanza de la multiplicación únicamente como suma iterada.
- ❖ En consonancia con lo anterior, los antecedentes ponen de relieve la importancia de seguir realizando estudios de esta naturaleza, centrados en problemáticas que no se agota, y que por el contrario parecieran cada vez aumentar. En otras palabras brinda elementos para justificar este estudio, para reivindicar propuestas como estas en las que se intente aportar de manera directa a las prácticas de aula, en analizar las estrategias que ponen en juego los estudiantes al abordar este tipo de situaciones que hacen posible realizar problemas con estructura multiplicativa.

- ❖ La identificación y estudio de elementos que favorezcan realmente la enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa, tales como: hacer énfasis en la relación cuaternaria de los problemas de isomorfismo de medidas, de la relación proporcional que se dan entre las cantidades expuestas en estos problemas, la importancia de trabajar problemas de combinación tanto en aquellos en que el orden es relevante como en los que no lo es y que estos se aborden desde situaciones de tipo multiplicativo, de trabajar problemas de proporcionalidad y variación, con lo que se ganan elementos para el diseño de la prueba que en este trabajo de indagación se contempla.
- ❖ Finalmente, y no menos importante, para ayudar a comprender la complejidad conceptual que entrañan los problemas objeto de interés aquí, se derivan entre otras cuestiones, en identificar que los problemas aunque se vean como multiplicación no son de la misma naturaleza, en identificar que hay problemas de multiplicación que atienden a una relación cuaternaria y otros a una relación ternaria.

1.2 Presentación de la problemática de estudio

Atendiendo al estado del arte y a las diferentes investigaciones aquí relacionadas en relación a la enseñanza de la estructura multiplicativa y la resolución de problemas en este mismo campo, se hace evidente la preocupación de muchos investigadores en explicar la forma en que los estudiantes interpretan las actividades que involucran este asunto. Obando (2015), afirma que si bien la investigación ha dado grandes avances en lo relativo a la didáctica de las matemáticas asociado a la enseñanza de la estructura multiplicativa, esta investigación no ha tenido el impacto en los entornos educativos.

De esta manera se resalta, la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) en tanto que ahí se indica de manera central la orientación del aprendizaje de la multiplicación, entre otras operaciones.

La NCTM (National Council of Teachers of Mathematics de Estados Unidos) ha tenido mucha influencia en estas propuestas curriculares a nivel mundial y resalta la importancia de implementar tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas que le posibilite a los estudiantes promover “el razonamiento matemático y la resolución de problemas, y que permiten que emerjan múltiples maneras de abordar los problemas y una variedad de estrategias de resolución” (NCTM, 2014).

A pesar del robusto volumen de investigación que toma como foco central la resolución de problemas y la manera de cómo abordarlos, se continúa viendo que los estudiantes poco logran poner en juego sus conocimientos matemáticos a la hora de resolverlos y plantearlos. Esto se evidencia en varios escenarios, para nombrar algunos, en los resultados de las pruebas internacionales PISA, que ubican a los estudiantes de Colombia en el puesto 62 de 65 países participantes.

No muy lejos a ello, los desempeños de los estudiantes en las pruebas externas en el ámbito nacional también muestran un panorama similar. Los resultados de las pruebas SABER revelan que más de la mitad de los estudiantes que presentaron las pruebas SABER 2014, tienen un desempeño académico insuficiente (ICFES, 2014), según la Organización para Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), “el rendimiento académico de los estudiantes colombianos tiene un atraso de unos tres años comparado con el rendimiento promedio de los estudiantes de los países miembros de la OCDE” (OCDE, 2016, p.163).

De igual manera, en los educandos de la Institución Educativa Jorge Isaacs (IEJI), se ve reflejado este bajo nivel académico, lo cual se ha convertido en un tema de discusión a nivel directivo y docente. Esta problemática se presenta desde los primeros años de escolaridad, en tanto que en los resultados de la evaluación de los aprendizajes en matemáticas, los estudiantes presentan mejor rendimiento cuando se trata de realizar algoritmos básicos de sumas y multiplicación, con un grado más de complejidad en los algoritmos de restas y división, pero se torna más crítico cuando los estudiantes se ven enfrentados a la solución de problemas de tipo multiplicativo o la ejecución de varias operaciones.

Asimismo se vio reflejado en los desempeños de los estudiantes en las pruebas SABER 2014 para el grado quinto, muestran datos preocupantes, tal como se puede apreciar en la Figura 1, puesto que el puntaje promedio de los estudiantes del establecimiento educativo es significativamente bajo, en relación con los estudiantes de las instituciones departamentales y nacionales, observándose con un 89% entre los niveles de insuficiencia y mínimo. Estos resultados dan cuenta de la gran falencia que existe en la Institución, comparada con las instituciones del Valle del Cauca y Colombia, en las competencias que evalúa las pruebas de matemáticas como: comunicación, representación y modelación, razonamiento y argumentación, y planteamiento y resolución de problemas:

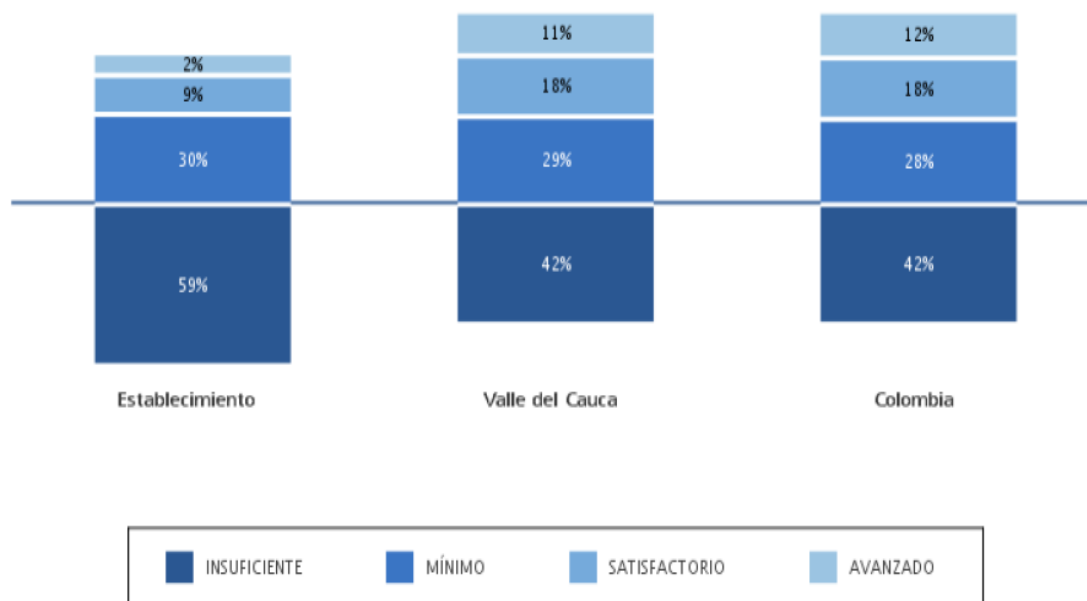


Figura 1. Comparación de los niveles de desempeño en el área de Matemáticas entre IEJI, Valle del Cauca y Colombia, año 2014

Profundizando aún más en los resultados se puede observar que una de las debilidades más notorias de los estudiantes de la IEJI, se focaliza con el pensamiento numérico-variacional mostrando desempeños por debajo de la media, tal y como se logra apreciar en la Figura 2:

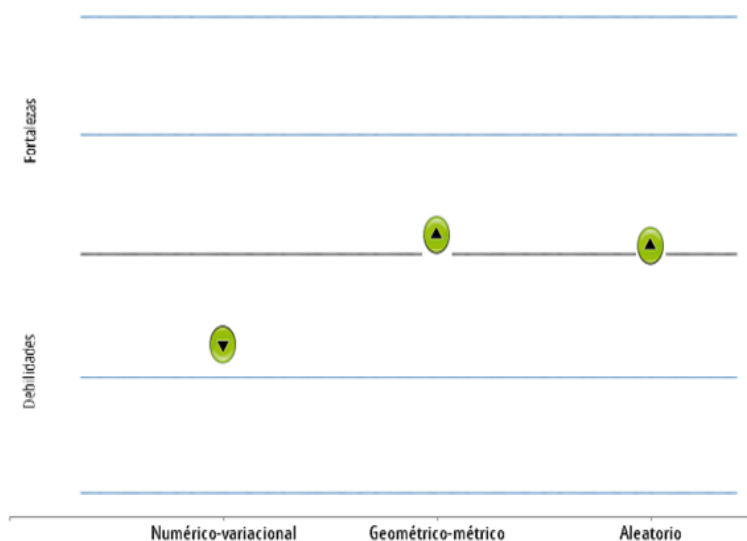


Figura 2. Desempeños de los estudiantes en las pruebas Saber grado 5, según los componentes que evalúa, año 2014

Si revisamos con cierto detalle, la debilidad presentada por los estudiantes alrededor del pensamiento numérico ocho desempeños atañen a la resolución de problemas de estructura multiplicativa, tal y como se puede observar la Tabla 1:

COMPETENCIA	NÚMERO DE PREGUNTAS	DESEMPEÑOS
Planteamiento y resolución de problemas	2	Resolver problemas aditivos rutinarios y no rutinarios de transformación, comparación, combinación e igualación e interpretar condiciones necesarias para su solución.
	2	Resolver y formular problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa.
	3	Resolver y formular problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios de adicción repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.
	1	Resolver y formular problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.
Comunicación, representación y modelación	3	Reconocer e interpretar números naturales y fracciones en diferentes contextos.
	1	Describir e interpretar propiedades y relaciones de los números y sus operaciones.
	2	Reconocer diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas.
	1	Traducir relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente.
Razonamiento y argumentación	2	Usar y justificar propiedades (aditiva y posicional) del sistema de numeración decimal.
	1	Justificar y generar equivalencias entre expresiones numéricas.
	1	Justificar propiedades y relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos.

Tabla 1. Síntesis del número de preguntas presentadas en las pruebas Saber año 2014 en relación con las competencias y desempeños asociados en el componente numérico-variacional

Tal como se observa en la tabla, son 19 preguntas enfocadas al pensamiento numérico-variacional, de las cuales ocho preguntas apuntan directamente a la modelación de la multiplicación, a saber, las relacionadas con el planteamiento y resolución de problemas.

De acuerdo a la información brindada por el ICFES (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior), se evidencia que en los resultados de las pruebas Saber presentadas en el año 2014 por los alumnos del grado quinto de IEJI, muestran falencias muy marcadas en su proceso de aprendizaje del pensamiento numérico-variacional, y teniendo como base este tipo de preguntas se identifica que estos estudiantes muestran dificultades en

desarrollar situaciones problemas de estructura multiplicativa, en tanto que se relacionan con asuntos que atañen a ella, como por ejemplo, proporcionalidad simple y compuesta, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, razón, múltiplo y divisor (Obando, 2015; García & Suarez, 2010; Obando, Vanegas & Vásquez, 2007). Este panorama pone de relieve que el estudio de situaciones de estructura multiplicativa es un foco central en las pruebas SABER, pero además, que los estudiantes de la Institución en cuestión, presentan serias dificultades para abordarlas.

Este panorama de dificultades que se deja ver en relación con los desempeños de los estudiantes en las pruebas externas también es constatado por la experiencia pedagógica propia de la autora de este trabajo. En la IEJI se ha privilegiado la enseñanza de la multiplicación desde el estudio de la multiplicación como una suma repetitiva, esto es, $\forall a, n \in \mathbb{N}; \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ veces}} = a \cdot n$ (donde a se repite n veces), lo cual ha sido ampliamente debatido por la investigación (Botero, 2016; Berrio & Gómez, 2015; López, 2015), dado que, si bien es una línea de continuidad para iniciar con la enseñanza de la multiplicación, no es la única forma de expresarla.

En la propuesta curricular de la IEJI, además, se privilegia la mecanización de las operaciones sobre los procesos lógicos de pensamiento numérico y se deja de lado el uso de propiedades dentro del conjunto numérico de referencia que circula en los primeros años de escolaridad ($\mathbb{N}$). Ahora bien, cuando se abordan problemas de multiplicación, se resuelven desde el modelo de iterar sumandos iguales y se desconocen otras estructuras semánticas, como se deja ver en la planeación curricular que se registra periodo a periodo en los grados de segundo a quinto (Ver anexo 7, 8 y 9).

En relación con la investigación en Educación Matemática que ha centrado su atención sobre la enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad, la forma como esta se aborda en la IEJI desconoce las propuestas más actuales de diferentes autores dejando de lado los casos más simples de proporcionalidad directa (Obando 2015). En este orden de ideas, Maza (1991) afirma que “desde hace largo tiempo se sabe que esta afirmación [la multiplicación no es una suma iterada] es falsa, que no se puede identificar la multiplicación con la suma reiterada” (p.17). Igualmente Vergnaud (2000) plantea que la estructura multiplicativa no debe comprenderse desde la estructura aditiva porque limita la verdadera comprensión de multiplicación y genera un obstáculo en su aprendizaje. Por lo tanto es conveniente examinar todas aquellas situaciones que implican el estudio de la estructura multiplicativa y formas adecuadas de atenderlas.

Así mismo, Obando (2015) alude a que dar la ilusión de continuidad conceptual desde la suma hasta la multiplicación genera un obstáculo para el aprendizaje de la multiplicación, ya que esconde la co-variación entre magnitudes, haciéndose énfasis solo un sistema de cantidades, lo que no permiten una comprensión adecuada de relaciones multiplicativas entre las cantidades y por tanto se deja de soslayo el potencial que tienen estas situaciones para el desarrollo del pensamiento variacional. Desde esta perspectiva, la multiplicación se presenta como una relación ternaria y no cuaternaria, sin explicitar la importancia que tiene la unidad y su relación con otra cantidad en un sistema de cantidades de diferente naturaleza al que pertenece la unidad, y con ello, sin ayudar a comprender cómo a partir de esta primera relación se producen otras relaciones (Obando, Vanegas & Vásquez, 2007).

Otra de las dificultades que se genera al presentar la multiplicación como una suma iterada en el aula de clase, es que ello deja por fuera situaciones en las cuales este modelo no

funciona, por ejemplo: el cálculo de áreas de figuras planas, se refleja el producto de dos medidas lineales, o en los casos en que las cantidades multiplicadas son fracciones menores que la unidad (Obando, 2015).

Además de lo anterior, considerar el usual modelo de suma iterada para la multiplicación, no deja ver y comprender de manera natural la relación inmediata entre la multiplicación y la proporcionalidad directa, pues aun en los problemas más simples de multiplicación están presentes las relaciones lineales de base características de toda proporcionalidad directa entre dos cantidades o magnitudes (Obando, 2015). Negar esta relación se vierte en que, por ejemplo, la multiplicación se enseña por separado de la división, dificultándose establecer “puentes” entre proporcionalidad directa e inversa.

De esta manera, la investigación arriba aludida, por solo citar algunas, devela un campo de dificultades y obstáculos que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa, los cuales, según la experiencia propia de la autora de este trabajo, se favorecen con naturalidad y frecuencia en el escenario laboral en el que se desempeña, lo que a su vez, explica en buena medida los bajos desempeños que tienen los estudiantes, en las pruebas evaluativas que presentan.

Así las cosas, tanto los desempeños de los estudiantes del grado 5 de la IEJI, como la experiencia propia de la autora del trabajo, y la investigación centrada en la enseñanza y el aprendizaje de la estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad, dejan entre otras una principal problemática, que el aprendizaje de la multiplicación la enmarcan dentro del aprendizaje algorítmico, suma iterada y a una relación ternaria, tal y como lo expresan en su

investigación Ospina & Salgado (2011), lo cual es importante y urgente atender a partir de estudios locales que permitan hacerle frente.

Por lo anterior se plantea el siguiente interrogante:

¿Cómo se caracterizan las estrategias que presentan un grupo de estudiantes de sexto grado en la resolución de problemas de estructura multiplicativa?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar las estrategias que presentan un grupo de estudiantes de sexto grado en la resolución de problemas de estructura multiplicativa

1.3.2 Objetivos específicos

- Documentar, desde una perspectiva curricular y didáctica, los distintos tipos de situaciones y conceptos en los que se presenta la estructura multiplicativa.
- Articular los elementos conceptuales abordados sobre la estructura multiplicativa en el diseño de una prueba para la identificación y caracterización de las estrategias empleadas por los estudiantes.
- Aportar algunas reflexiones didácticas que favorezcan la planeación curricular de la IEJI en torno a la enseñanza de la estructura multiplicativa, a través del análisis de los resultados obtenidos de la implementación de la prueba.

1.4 Justificación

El concepto de multiplicación y en general los conceptos asociados con la estructura multiplicativa (e.g: razón, proporción, proporcionalidad, fracción, función) han estado presentes

en las distintas renovaciones curriculares desde los años 80, dejando ver la importancia de trabajar el concepto de multiplicación y las nociones asociadas a ella desde los primeros años de escolaridad. Veinte años después en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN 1998) se continúa indicando la importancia de estos conceptos, señalando además la complejidad de la estructura multiplicativa y la necesidad de explorar varios modelos para su comprensión y aplicación, enmarcándola desde varios procesos de la actividad matemática tales como la resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; y en el marco del desarrollo de los pensamientos propios de las matemáticas, a saber, el pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y el variacional.

Asimismo, en este documento de política pública se reconoce que la multiplicación debe presentarse a través de diversas situaciones que permitan su emergencia, como por ejemplo situaciones de proporcionalidad simple, compuesta, estructura aditiva, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, fracción, razón, número racional, múltiplo y divisor. Así como también ha sido reconocido por investigadores interesados en este asunto (Obando, 2015; Obando, Vanegas & Vásquez, 2007; Vergnaud, 1990).

En las investigaciones producidas por estos autores, así como en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 1998 y 2006, respetivamente), le dan especial importancia a la enseñanza de la estructura multiplicativa como un eje articulador a través del análisis de fenómenos de variación y cambio, en el cual sea posible el estudio de diversos sistemas de representación, centrar la atención en la identificación de los cambios de distintas magnitudes, la estimación, el estudio de los patrones y

regularidades, entre otros aspectos que permiten nutrir el estudio de la multiplicación y en articulación con los pensamientos numérico, espacial, métrico y aleatorio.

Sin embargo, tal y como ya se manifestó en la problemática, las escuelas por lo general, y la IEJI en particular, desconocen los elementos que tienen que ver con el estudio de la multiplicación y de los conceptos asociados a la estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad. Quizá por esta razón los estudiantes de la Institución presentan serias dificultades en relación con problemas asociados con la estructura multiplicativa, tal y como se deja ver en los resultados de evaluación de los aprendizajes y en los resultados de las pruebas externas.

En este sentido, se ve la relevancia de caracterizar las estrategias que presentan los estudiantes en relación a la resolución de problemas de estructura multiplicativa, dado que a partir de los resultados de la prueba, se pueda reconocer elementos ligados a la estructura multiplicativa con el fin de tener una perspectiva curricular a nivel institucional. Este es un elemento más que justifica la pertinencia de este tipo de trabajo el cual brinda elementos más bondadosos que permiten reflexionar sobre el porqué los estudiantes presentan bajos desempeños a nivel institucional o pruebas externas y así mismo buscar alternativas que puedan hacerle frente a esta problemática de tal manera que las competencias de los estudiantes mejoren.

Asimismo, redimensionar la enseñanza de la estructura multiplicativa, debido a que la falta de estrategias que tienen los estudiantes para enfrentar los problemas asociados con esta estructura son en gran medida producto mismo del sistema de enseñanza y de la organización curricular que en la institución se ha venido privilegiando para la enseñanza de esta estructura. En este orden de ideas la institución y los profesores mismos deben replantear la enseñanza de la estructura multiplicativa y verla de una manera más amplia a la usual, dando lugar a nuevas

propuestas curriculares, a nuevas alternativas de trabajo en el aula, por lo que, sin lugar a dudas, los resultados de este trabajo tendría valiosos elementos que aportar en este sentido.

CAPÍTULO II

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL Y CURRICULAR

En este capítulo se presentan los referentes de orden curricular y didáctico que dirigen el trabajo, los cuales a su vez brindan elementos para analizar el desempeño de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problema asociados con la estructura multiplicativa. Con respecto al primero, toman como referentes los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) sobre el desarrollo del pensamiento matemático asociado con la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación y de sus conceptos relacionados en los primeros años de escolaridad. Con respecto al referente didáctico, este centra la atención en las teorías propuestas por Vergnaud (1983, 1994, 2000) para el estudio de la estructura multiplicativa, en la propuesta de la teoría de las cantidades de Schwartz (1986) y paralelamente a estos se ve la necesidad de considerar de manera global la investigación de dificultades y errores por Socas (1997), Astolfy (1999) y otros autores, dado que estas concepciones ayudarán a construir estrategias didácticas en función para este estudio.

2.1 Referente curricular

Dando lugar a las políticas públicas con las cuales se rige actualmente el sistema educativo colombiano, se toman en consideración los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) para delimitar el fundamento curricular del presente trabajo.

En los Lineamientos se presentan algunas consideraciones acerca de la naturaleza de las matemáticas las cuales permiten hacer una reflexión de orden filosófico sobre sus objetos de estudio y cómo estas contribuyen a la instauración del currículo. De una manera constructivista, no resaltada explícitamente en este documento, se interesa por la construcción que desarrollan los estudiantes para generar un concepto y el papel que desempeña el docente para potencializar el pensamiento matemático con situaciones problemáticas que le permitan a los estudiantes tal construcción. A partir de la propuesta curricular dada por los Lineamientos hace que se planteen orientaciones y directrices generales para que las instituciones y maestros diseñen sus programaciones curriculares locales atendiendo a las especificidades y necesidades del contexto.

En la propuesta curricular de los Lineamientos una de las propuestas que se hace es favorecer un aprendizaje en los estudiantes que les posibilite aplicar los conocimientos en un ambiente diferente al escolar y puedan explicar, comprender y tomar decisiones de fenómenos que se encuentran en la vida cotidiana.

De acuerdo a la finalidad de la propuesta de este documento de política pública, este plantea tres aspectos para organizar el currículo de una manera coherente, a saber: los conocimientos básicos, los procesos generales de aprendizaje y las situaciones problemáticas en unos contextos. Estos aspectos permiten desarrollar la capacidad para utilizar los conocimientos,

interpretar situaciones problema, plantear estrategias y procedimientos para resolverlas en un contexto determinado, con el fin de que los estudiantes desarrollen pensamiento matemático y le den ciertas competencias para actuar, interactuar y modificar el mundo que lo rodea.

En los Lineamientos Curriculares en relación con los conocimientos básicos en matemáticas se propone el desarrollo de cinco tipos de pensamiento matemático que son: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Para desarrollar un buen aprendizaje matemático, los Lineamientos Curriculares también dan lugar al desarrollo de los procesos generales, a saber: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; los cuales se trabajan dentro de cada uno de los pensamientos presentándolos y enseñándolos en un ambiente contextualizado que cobre sentido e interés para los estudiantes, permitiéndoles expresar ideas de su interpretación hablando, escribiendo, demostrando, justificando o reformulando la situación; o transformar representaciones; así como utilizar recursos manipulativas o tecnológicos (MEN, 2006).

Se entiende entonces como situación problemática a “un microambiente de aprendizaje que puede provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas y de otras ciencias” (MEN, 1998, p.19), las cuales dan sentido al quehacer matemático en el aula de clase.

2.1.1 Enseñanza y aprendizaje de la estructura multiplicativa desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

En particular con el estudio de la estructura multiplicativa esta propuesta curricular es transversal al desarrollo de las formas de pensar en matemáticas desde, y dentro los pensamientos que se describen a continuación, por lo tanto se propone trabajar esta temática desde contextos en los cuales los estudiantes puedan explorar y ampliar sus conocimientos acerca de la estructura multiplicativa, e ir avanzando sobre su estudio a través de los primeros años de escolaridad.

Es así como los diferentes significados de la multiplicación se pueden develar en los siguientes pensamientos:

En relación con el pensamiento numérico

El pensamiento numérico “se refiere a la comprensión general que tiene una persona de los números y las operaciones junto con la habilidad de usar éstos para hacer juicios matemáticos”, (Mcintosh, citado en MEN, 1998), pensamiento que se adquiere gradualmente y se va fortaleciendo en la medida que los niños potencializan su uso en contextos significativos (MEN, 1998). Para desarrollar el pensamiento numérico, los Lineamientos Curriculares indican tres ejes básicos, a saber: comprensión del número y de la numeración, la comprensión del concepto de las operaciones, cálculos con números y operaciones y aplicación de números y operaciones. En particular, con la multiplicación, desde la básica primaria se debe propiciar en los estudiantes el reconocimiento de su significado, reconocer los modelos más usuales y prácticos, comprender las propiedades matemáticas, comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre propiedades. (MEN, 1998), lo cual está estrechamente relacionado con los tres ejes básicos arriba mencionados.

De acuerdo con este documento de política pública, la conceptualización de la multiplicación puede ser más compleja que la adición y la sustracción, puesto que estas operaciones “están asociadas con situaciones en las que se combinan o disocian dos conjuntos de objetos similares mientras que en la multiplicación y la división esto no ocurre, sino que en cada caso se asocia cada uno de los elementos de uno de los conjuntos con un subconjunto equivalente del otro” (MEN, 1998, p.32), en la que la variación de una de estas magnitudes condiciona el proceso de variación de la otra magnitud¹. Es por esto que la multiplicación no se concibe de forma exclusiva como una suma de sumandos iguales, como se suele establecer comúnmente en la Educación Básica Primaria, sino que se deben plantear varios modelos para su estudio, que rescaten, entre otros aspectos, el sentido de la variación entre las cantidades involucradas.

Es así como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas proponen varios modelos para que los estudiantes desarrollen una adecuada conceptualización de la multiplicación, los cuales son: la multiplicación:

Como factor multiplicante, la multiplicación se corresponde con situaciones en que uno de los factores es un valor escalar, el cual indica el número de veces que una magnitud es mayor que otra, por ejemplo: Camilo recorrió el primer día de entrenamiento 5 km y Santiago recorrió dos veces más que Camilo. ¿Cuántos km recorrió Santiago?. En este tipo de situaciones, la cantidad dos representa que la magnitud que recorrió Santiago fue dos veces más que la que recorrió Camilo, por consiguiente al variar la magnitud del recorrido que hizo Camilo también varía la magnitud que se desplazó Santiago.

¹ La magnitud está dada por las características de los objetos a los cuales se les puede dar un atributo dentro de los fenómenos de largura, anchura, altura, pesadez, rapidez, velocidad, etc. (Obando, 2015)

La multiplicación como adición repetida, corresponde a la acumulación sucesiva de una misma cantidad para desarrollar un proceso determinado y no la comparación de las dos magnitudes para determinar la relación de una con respecto a la otra, por ejemplo: María recibió de su padre \$1500 durante 5 días ¿Cuánto dinero recibió María en los cinco días?. En esta situación hay dos espacios de medida en juego (pesos y días), y repetir cinco veces lo que recibió María de su padre permitiría responder a la pregunta planteada, viéndose así la multiplicación como una suma iterada o una acumulación sucesiva de \$1500.

La multiplicación como razón permite relacionar linealmente dos magnitudes discretas en una situación problema, por ejemplo, en una bolsa hay 24 bombones, si se compran tres bolsas, ¿Cuántos bombones se compraron?. En esta situación se indica que por cada bolsa hay 24 bombones por lo tanto la razón es 1 a 24, estableciendo una relación de covariación entre las variables, las cuales son las bolsas y los bombones².

Y la multiplicación como producto cartesiano, se presenta en situaciones en las que se involucran dos magnitudes que al combinarse originan otra magnitud con diferentes características que se componen de las dos primeras, por ejemplo: en una fábrica de dulces se producen 3 tipos de bombones de diferente sabor y de cuatro formas diferentes. ¿Qué surtido de bombones se puede producir en la fábrica? Desde esta perspectiva las dos magnitudes que se combinan, la cantidad de sabores y la cantidad de formas de los bombones, producen una nueva magnitud que es la cantidad de bombones producidos, determinando así una multiplicación.

Desde esta perspectiva, tal y como ya se señaló, es necesario que los estudiantes exploren los diferentes modelos de representación de la multiplicación con el fin de enriquecer el

² Estos dos últimos modelos se relacionan con problemas de isomorfismos de medidas en términos de Vergnaud, lo cual se ampliará y detallará más adelante.

tratamiento de la operación dentro de una situación problema y también reconocer las limitaciones que puedan tener estos modelos. Por ejemplo, pensar que la multiplicación se puede modelar como una suma iterada, crea en los estudiantes la sensación que la multiplicación incrementa las cosas, dando como resultado una interpretación en los estudiantes que en ciertas situaciones no suele ser así. Así mismo, se debe permitir a los estudiantes que encuentren diversas formas de representación de la multiplicación favoreciendo las relaciones con otras operaciones y así se le proporciona más formas para pensar y resolver problemas. No solamente para el desarrollo del pensamiento numérico sino en general para el desarrollo del pensamiento matemático.

La relación inversa entre operaciones es otra conexión valiosa que proporciona a los estudiantes otra forma de pensar sobre los problemas de la estructura en cuestión (MEN, 1998). Por lo tanto se exponen los dos tipos de problemas más usuales para la división.

Repartir: se presenta en situaciones problema de la forma: Miguel tienen 12 canicas y quiere repartirlas entre sus 4 amigos ¿Cuántas canicas le corresponde a cada amigo de Miguel? En este tipo de situaciones, los estudiantes determinan el total de las canicas y a partir de este dato repartir la misma cantidad de canicas a cada amigo, lo que los estudiantes realizan es determinar la misma cantidad de elementos para cada grupo.

Agrupamiento o sustracción repetida, corresponde a situaciones problema de la forma: Camila tiene 50 colores, y quiere organizarlos en estuches de a 5 colores en cada estuche. ¿Cuántos estuches debe conseguir para organizarlos? En esta situación, los estudiantes tratan de organizar los colores de tal forma que a cada estuche le corresponda la misma cantidad de colores, una estrategia sería formar grupos iguales de colores y preguntarse cuantos grupos se

pudo formar. O tratar de extraer la misma cantidad de elementos (colores) repetidamente hasta encontrar la solución a la situación.

Con relación al pensamiento métrico

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el pensamiento métrico va encaminado a comprender las magnitudes en general, como la construcción del concepto de magnitud, la comprensión de la conservación y estimación de magnitudes, la selección de unidades de medida, patrones e instrumentos, la diferencia entre unidad y patrón de medida, la asignación numérica y el trasfondo social de la medición (MEN, 1998). Dados estos procesos, el pensamiento métrico se debe desarrollar en un conjunto de situaciones contextualizadas desde la Educación Básica Primaria permitiéndole así a los estudiantes desarrollar la comparación y relación entre magnitudes en situaciones problemas, y en esa comparación la multiplicación toma un valor importante para establecer las relaciones entre dichas medidas, con las cuales se puede realizar conversiones o equivalencias. Esto también aporta el desarrollo del pensamiento espacial en tanto que muchas de las magnitudes que se trabajan en los procesos de medición que realizan los estudiantes dan a lugar a trabajar sobre magnitudes como la longitud, el área, el volumen y sobre figuras geométricas.

Una situación que favorece esta relación es el cálculo de áreas, en la cual la multiplicación surge como el producto de dos medidas lineales lo que permite trabajar el modelo del producto cartesiano puesto que se está generando, a partir de dos magnitudes, una tercera magnitud de naturaleza distinta a las dos que la originan, pero que se compone de ellas.

Otra situación en la que se reconoce la multiplicación en el pensamiento métrico, surge al comparar y cuantificar magnitudes entre espacios de medida, igualmente las situaciones de

relación y comparación entre magnitudes favorece la aplicación del concepto de multiplicación cuando se cuantifica, el doble de, el triple de, la mitad de, etc. Igualmente se pueden realizar equivalencias y conversiones entre unidades de medidas, como pasar de kilogramos a gramos, kilómetros a metros, centímetros cúbicos a metros cúbicos, etc.. El reconocimiento que hay entre los espacios de medida permite ver la multiplicación como un isomorfismo de medida. Como lo señala Vergnaud (1994), la multiplicación vista como un isomorfismo de medidas permite el reconocimiento de los espacios de medida, la variación inmersa en dichos espacios y las propiedades de linealidad que fundamentan las relaciones establecidas, (Ospina & Salgado, 2016).

Con relación al pensamiento aleatorio

El pensamiento aleatorio, denominado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar (MEN, 2006).

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas rescatan en el pensamiento aleatorio el espíritu de exploración y de investigación que debe tener los estudiantes para poder interpretar un fenómeno, ya sea de una ciencia exacta o de la vida diaria mediante los contenidos de probabilidad y estadística.

Para desarrollar este pensamiento las actividades pertinentes deben integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y el desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos (MEN, 1998). Este tipo de actividades permiten la integración con otras áreas del currículo además de los conocimientos sobre los números, las mediciones, las estimaciones, y las estrategias de resolución de problemas, favoreciendo en los

estudiantes la capacidad de interpretación de los datos, la toma de decisiones, hacer predicciones, desarrollar pensamiento crítico, entre otros logros que se rescatan en el aprendizaje de la estadística. Pero para desarrollar estas destrezas se hace necesario retomar definiciones formales de las matemáticas como reglas de cálculo o funciones matemáticas en las cuales están involucrados conceptos asociados con la estructura multiplicativa tales como razón, proporción, proporcionalidad. Para dar un ejemplo, Una bolsa contiene 2 bolas verdes y 5 rojas, ¿cuál es la probabilidad de extraer de la bolsa una bola verde?. Este es un tipo de situaciones de probabilidad simple que se pueden desarrollar a partir del concepto de razón, debido a que se estable una relación entre dos cantidades, y se puede complejizar la situación haciendo relaciones o combinaciones entre los datos.

Otra situación que reconoce la multiplicación en el pensamiento aleatorio se refiere a los casos de combinación en los cuales el orden tiene una relevancia, de la forma: Patricia tiene tres blusas y dos pantalones, ¿de cuántas formas diferentes puede combinar las prendas sin repetirse? Este caso está dado en la combinación de elementos mediante arreglos en el que el orden es relevante para dar la solución a la situación, no obstante debe realizarse una comprensión numérica a partir del modelo de la multiplicación.

Con relación al pensamiento variacional

El pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006).

Desde el pensamiento variacional, se analizan matemáticamente los procesos de variación y de cambio que hay entre dos o más magnitudes, los Lineamientos Curriculares indican que para lograr tener este análisis se hace necesario establecer relaciones entre los conceptos (Ej. Función, variable, ecuación) y procedimientos que permitan organizar y modelar matemáticamente situaciones problema, lo cual admite que desde, los primeros años de escolaridad, se puedan desarrollar procesos de pensamiento en torno a la variación y el cambio que abra camino hacia procesos de pensamiento más elaborados, más abstractos y generales tales como los relacionados con el álgebra, los modelos de funciones y el cálculo.

Algunos argumentos que dan fuerza al desarrollo del pensamiento variacional son: la organización de la variación en tablas, la cual le da continuidad al estudio de la función y la comprensión de las variables y las fórmulas; la aproximación numérica y la estimación, los cuales deben ser usados en situaciones problemas; el estudio de los patrones, por medio de representaciones pictóricas e icónicas; los patrones aditivos y multiplicativos; la identificación de la variable dependiente e independiente y sus relaciones; y no menos relevante el estudio del análisis escalar y funcional propuesto por Vergnaud (2000); entre otros variados aspectos. En este conjunto de argumentos que se expusieron para el estudio de los proceso de variación y cambio, la multiplicación se destaca como la base de la conceptualización de dicho pensamiento, la cual se puede ver como el caso más simple de la variación (Obando, 2015, 2017).

Situaciones que relacionan la multiplicación con el pensamiento variacional, pueden ser de la forma: Santiago compró 9 helados a \$5400 para él y sus amigos, ¿Si llegan tres amigos y les desea comprar un helado a cada uno, ¿cuánto debe pagar?, a continuación se le pide completar la tabla si son, 2, 3, 4, 5, 7, 9 y 10 amigos.

Número de Helados	2	3	4	5	7	9	10
Precio						\$5.400	

La construcción de tablas de variación favorece la comprensión y resolución de situaciones problema de multiplicación y división en tanto que beneficia la identificación de las formas de co-variación entre las cantidades de espacios de medida diferentes, de tal modo que se pueden evidenciar regularidades, patrones, comportamientos usuales e inusuales, a propósito de llegar a establecer modelos que representen estas formas de variación. De este modo, este tipo de pensamiento le permite a los estudiantes acercarse a una conceptualización sobre las estructuras multiplicativas a partir de modelos de variación lineal, cuyo núcleo es el modelo de función lineal.

2.1.2 La estructura multiplicativa en los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas

Los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, son una guía que permite orientar el desarrollo del pensamiento matemático y hacerlo potencialmente útil en la escuela desde su inicio en la Educación Básica Primaria. Este documento hace énfasis en las competencias matemáticas que los estudiantes deben alcanzar a través de situaciones de aprendizajes significativos y comprensivos, ya que estas generan contextos accesibles a los intereses y las capacidades de los estudiantes y les permite buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos (MEN, 2006). En este orden de ideas, es posible afirmar que los Estándares Básicos de Competencia guardan estrecha relación con la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se propone la enseñanza de la multiplicación desde los primeros años de escolaridad, relacionándola con la enseñanza de la variación, la razón, la proporcionalidad y conceptos afines, fortaleciendo sus conceptualizaciones progresivamente desde la Educación Básica hasta la Educación Media. Para fortalecer esta conceptualización, en los Estándares Básicos de Competencia en Matemática se organiza de manera coherente los estándares atendiendo a los contenidos que varían de un conjunto de grado a otro, a la complejidad de estos y la profundidad con que se aborda, las relaciones que guardan entre diferentes pensamientos, entre otros aspectos; por esta razón, en este documentos se reconoce la coherencia vertical, la cual indica la relación que guarda cada estándar con estándares de los diferentes conjuntos de grados, y la horizontal, la cual alude a la relación de un estándar con estándares de otros pensamientos, lo que permite develar la complejidad con que se desarrolla las matemáticas en el aula de clase, reconociendo así que la actividad de aula debe avanzar de manera gradual y sistemática y en articulación con las distintas formas de pensamiento matemático.

Se presentan los enunciados de estándares que durante la Educación Básica Primaria se movilizan en relación con problemas de tipo multiplicativo y se exhibe cómo se ubica en los diferentes pensamientos, presentando así la coherencia tanto horizontal como vertical en el concepto de la multiplicación hasta grado sexto:

CONJUNTO DE GRADOS	PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
PRIMERO A TERCERO	• Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional. • Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	• Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.		• Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
CUARTO A QUINTO	• Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. • Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa. • Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	• Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos). • Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación. • Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos. • Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos. • Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.	• Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.	• Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos. • Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. • Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales. • Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
SEXTO A SEPTIMO	• Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. • Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. • Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. • Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	• Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). • Cálculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. • Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.	• Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.	• Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). • Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

Tabla 2. Coherencia vertical y horizontal de los Estándares entorno a la estructura multiplicativa en los primeros conjuntos de grados en la Educación Básica Primaria.

En muchos de estos estándares efectivamente se llama la atención sobre la necesidad de trabajar los problemas de tipo multiplicativo desde los diferentes modelos que se han reconocido en los Lineamientos Curriculares, por ejemplo: en el conjunto de grados de primero a tercero en relación con el pensamiento numérico, el primer estándar da cuenta del trabajo con la proporcionalidad y este estaría asociado dentro del modelo de la multiplicación como razón que presentan los Lineamientos Curriculares, así mismo, en el pensamiento variacional las situaciones de cambio y variación están presentes dentro de este mismo modelo.

En el conjunto de grados de cuarto a quinto, dentro del pensamiento numérico se puede observar que el último estándar podría estar asociado al modelo de la multiplicación como adición repetitiva, y nuevamente está presente en los estándares la variación lo que se relaciona con espacios de medida dentro del modelo de la multiplicación como razón tanto en el pensamiento numérico, métrico y variacional, igualmente dentro del pensamiento métrico en el estándar que exhibe el cálculo de áreas o volúmenes de figuras o sólidos se relaciona al modelo de producto cartesiano en el cual dos magnitudes que al combinarse producen otra magnitud de diferentes características.

Y en el grupo de grados de sexto a séptimo en relación al pensamiento métrico, se exhibe la resolución de problemas que involucran factores escalares los cuales dan cuenta al modelo de factor multiplicante que alude los Lineamientos Curriculares, en el cual indica cuantas veces una magnitud es mayor que otra, por ejemplo la construcción de maquetas a escala.

Nótese además, que las relaciones no son solamente horizontales, sino que también con claridad se presentan estrechas relaciones de forma vertical entre los estándares. Así por ejemplo, dentro del pensamiento numérico, el estudio de la proporcionalidad avanza de manera progresiva

desde la identificación de variaciones de esta naturaleza, pasando por el estudio de problemas de proporcionalidad simple y directa, hasta llegar, en sexto grado, al uso de diversas representaciones que de manera articulada den cuenta de este tipo de problemas.

Estos son algunos casos de muchos, que se vislumbra la riqueza conceptual que tiene la multiplicación además de la diversidad de estrategias con las cuales se puede abordar para aportar al desarrollo de diferentes pensamientos.

Tal como se observa en los documentos de política pública aquí estudiados, se hace referencia a la enseñanza de la estructura multiplicativa desde los diferentes pensamientos y desde los primeros años de escolaridad con el fin de que se contextualice desde los diferentes modelos, potencializando las diversas estrategias de cálculo, el uso de diversas formas de representación, y las relaciones numéricas tal, como lo plantea Vergnaud en el estudio de las estructuras multiplicativas.

En síntesis, el estudio de estos dos documentos de orden curricular aportan elementos fundamentales para pensar el diseño de la prueba de aula, elementos que serán considerados en ella, tales como: la necesidad de partir de situaciones problemas en contextos variados y significativos para los estudiantes, los diferentes modelos para el estudio de la multiplicación y la división (los cuales se recogerán como se verá a continuación desde planteamientos conceptuales de investigadores en didáctica de las matemáticas), la necesidad de estudiar los problemas de esta estructura en relación con lo variacional, lo métrico y lo geométrico, entre otros aspectos.

2.2 Referente didáctico

En este apartado se presentan diferentes conceptualizaciones de orden didáctico sobre la multiplicación y su relación con la variación, la razón y la proporcionalidad, teniendo en consideración los aportes dados por Vergnaud (1983, 1990, 1994, 2000); Schwarz (1986) y Puig & Cerdán (1999).

En relación con los aportes de Vergnaud, este autor enfatiza que la adquisición del conocimiento se da a través de situaciones, las cuales no pueden ser analizadas con un solo concepto sino que se hace necesario varios conceptos para hacerles frente. Ante el conocimiento intuitivo que tienen los estudiantes y llevarlo hacia el conocimiento formal de las diferentes clases de situaciones y procedimientos a partir de las expresiones verbales y escritas producidas por ellos, Vergnaud (1994) afirma que la escuela sobreestima el conocimiento formal y subestima o devalúa el conocimiento intuitivo y alude de la necesidad de considerar situaciones en las cuales los estudiantes puedan adquirir y formalizar el conocimiento espontáneo a uno más teórico.

En la propuesta desarrollada por este autor sobre la estructura multiplicativa³, esta se muestra como el conjunto de situaciones en las cuales implica la aplicación de una o varias multiplicaciones o divisiones, además de conceptos y teoremas matemáticos que permitan analizar situaciones de funciones lineales, bilineales (y n -lineal), proporción, tasa, fracción, números racionales, análisis dimensional, aplicación lineal, combinaciones lineales de magnitudes, etc., desde esta perspectiva, la multiplicación está relacionada con la división, y para

³ En este trabajo cuando se habla de problemas de estructura multiplicativa se está pensando en problemas que se solucionan mediante multiplicaciones y divisiones bien sea una o varias de estas, tanto de forma conjunta o aislada, es decir, los problemas que curricularmente se ubican en la Educación Básica Primaria.

estudiar situaciones de esta naturaleza, este autor plantea dos grandes tipos de relaciones: el *isomorfismo de medida y el producto de medidas*⁴.

2.2.1 Isomorfismo de medidas

Para poder entender esta relación, es necesario reconocer que la multiplicación no es una relación ternaria en tanto no comporta tres términos: $a \cdot b = c$, sino que debe ser vista fundamentalmente por una relación cuaternaria, lo que permitirá reexaminar el concepto de multiplicación.

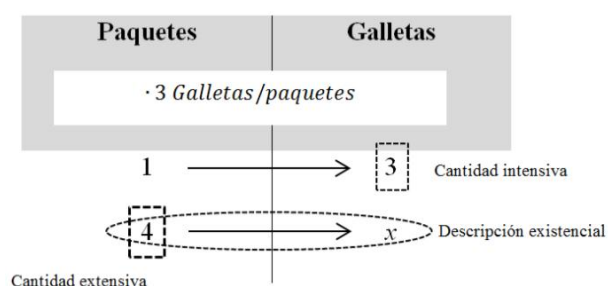
Desde esta perspectiva, el isomorfismo de medidas consiste en una proporción simple directa entre dos espacios de medida, que “describe un gran número de situaciones de la vida ordinaria y técnica, como son el reparto equitativo (personas y objetos), precios constantes (bienes y costo), la velocidad uniforme o el promedio constante de velocidad (duración y distancia)” (Vergnaud, 1983, p.129).

De acuerdo con lo anterior, una relación multiplicativa es una relación entre cuatro magnitudes, dentro de las cuales dos de ellas son de la misma naturaleza (o de un mismo espacio de medida) y las otras dos son de otra naturaleza (de otro espacio de medida), las cuales guardan una relación directamente proporcional. Así, es posible iniciar las relaciones entre estas cantidades a partir de la correspondencia entre ellas, esto deja ver que la multiplicación es un caso particular de la proporcionalidad simple directa (Obando, Vanegas & Vásquez, 2007). Un ejemplo que ilustra estas relaciones cuaternarias se presentan a continuación:

Situación 1: En la alacena hay 4 paquetes de galletas. Si hay 3 galletas por cada paquete.
¿Cuántas galletas hay en la alacena?

⁴ Puig & Cerdán a este tipo de relaciones lo denominan categorías semánticas.

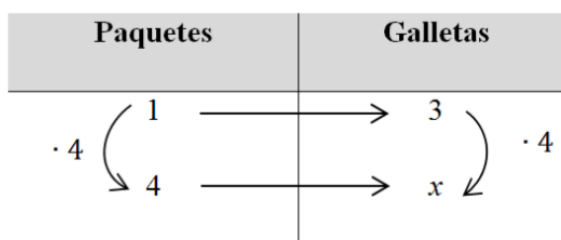
Esta situación da cuenta de la relación que tienen las cantidades dentro de un espacio de medida con las cantidades de otro espacio de medida, en las que se ponen en juego dos magnitudes, a saber, cantidad de paquetes y cantidad de galletas, en el que x designa la cantidad buscada. A partir de considerar cómo varía una cantidad con respecto a otra dentro de un mismo espacio de medida o entre los espacios de medidas conjuntos, se puede dar respuesta a la pregunta de la situación, y encontrar el valor de x . Cuando se presentan este tipo de situaciones, se está ante un *problema de multiplicación* (Vergnaud, 2000, p.200). En términos de Puig & Cerdán (1999) es utilizar la cantidad la extensiva⁵ y la intensiva para encontrar el valor de x , es decir la otra cantidad extensiva, de tal modo que se pueda hallar la descripción existencial.(p.130)



Para dar solución a esta situación, se analiza el conjunto de relaciones teniendo en cuenta que las cantidades de paquetes, 1 y 4, son medidas de una misma naturaleza, y las cantidades galletas 3 y x , también representan medidas pero de otra naturaleza. Para encontrar el valor de x , se puede proceder fundamentalmente de dos maneras, una de ellas es haciendo un *análisis vertical*, que consiste en aplicar el operador $\cdot 4$, el cual no tiene dimensión, a la cantidad inicial de paquetes, y de manera análoga hacer lo propio en el otro espacio de medida, lo que produce que se pase de una línea a otra en el mismo espacio de medidas. En otras palabras, tratándose de una

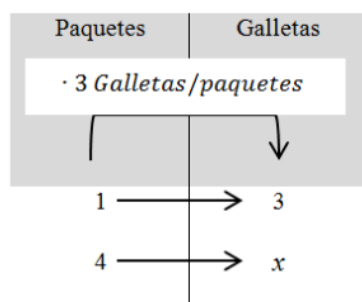
⁵ Este término utilizado por Schwartz & Kaput (1986), se precisará con más detalle cuando se haga el estudio de la tipología de cantidades que tiene presencia en estos problemas de estructura multiplicativa.

situación de proporcionalidad directa, igualmente se puede aplicar el operador $\cdot 4$ a la cantidad 3 para encontrar la cantidad de galletas solicitadas, como se observa en el siguiente esquema.



Así, este operador, denominado operador escalar, permite pasar de una línea a otra en la misma naturaleza de medidas multiplicando por el operador fraccionario representado por la razón $\frac{\text{punto de llegada}}{\text{punto de partida}}$ (Vergnaud, 2000, p.207), que en algunos casos resulta un operador simple (es decir, un entero) como lo vemos en este ejemplo, $\frac{4}{1} = 4$.

Otra forma de abordar el problema es mediante un *análisis horizontal*, esto es, analizando cuál es el operador que a partir de 1 paquete de galletas permite llegar a 3 galletas, lo cual implica considerar que se está pasando de un espacio de medidas a otro, es decir, que se abordan en una misma relación magnitudes de distinta naturaleza, por lo tanto, este operador que en este caso es $\cdot 3$ arrastra una dimensión la cual es, en este caso, $\text{Galletas}/\text{Paquetes}$. A este operador se le denomina operador función. (Vergnaud, 2000, p.209).



Haciendo este análisis se puede verificar que no es equivalente multiplicar $4 \cdot 3$ o $3 \cdot 4$, porque no se obtendrían la misma naturaleza de medidas. Este análisis centrado en la noción de función, hace pasar de una naturaleza de medidas a otra aplicando la razón:

$$\frac{\text{punto de llegada}}{\text{punto de partida}} = \frac{3}{1} = 3, \text{ encontrar esta relación hace que se facilite comprender que aplicar este}$$

operador es encontrar el valor unitario para pasar de una naturaleza de medidas a otra.

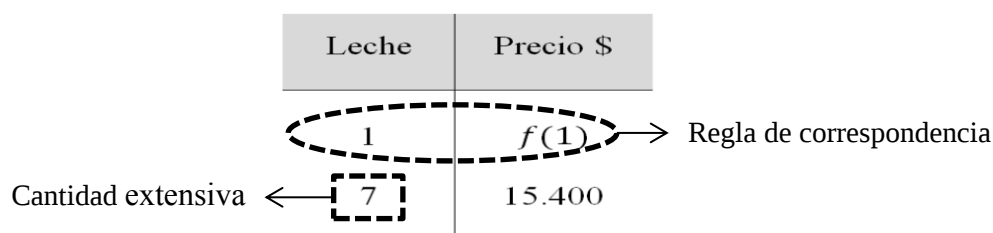
Así la relación cuaternaria se puede abordar de dos maneras, en forma proporcional, *x galletas son a 3 galletas lo que cuatro paquetes de galletas son a un paquete*, y *x galletas son a 4 paquetes lo que 3 galletas son a un paquete*. Obteniendo de esta manera una forma simplificada de la regla de tres, en que se puede visualizar de forma completa las relaciones entre las cuatro cantidades en la que una de ellas es la unidad (Vergnaud, 2000, p.203).

Además de la situación expuesta existen otras en las cuales ninguna de las cuatro cantidades es la unidad; sin embargo, no implica que no se puedan hacer los mismos tipos de análisis para dar solución a ella. Aunque no es tan trivial como la anterior, esta plantea distintas dificultades, como cuando el operador vertical sea un fraccionario, o que la regla de tres finalice a un término irreducible, o que sea una división.

Atendiendo a lo anterior, se presentan otras situaciones que establece la relación entre dos espacios de medida favoreciendo el isomorfismo de medidas, en la cuales se exhibe lo que da lugar a establecer una tipología de situaciones, algunas de las cuales corresponden a multiplicación, otras a división y otras a la composición de estas:

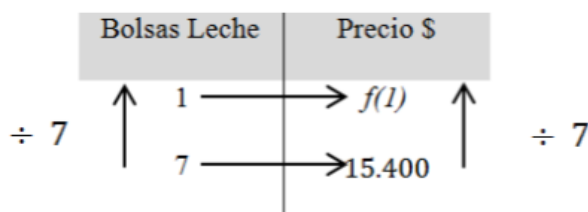
Situación 2: Camila compró 7 bolsas de leche por \$15400. ¿Cuánto le costó una bolsa de leche?

Esta situación es distinta a la anterior, debido a que en esta ocasión se busca el valor de la unidad. Puig & Cerdán (1999) adoptan para la relación entre este valor desconocido, el cual es el que se pretende hallar, y la unidad, el término de Nesher: *regla de correspondencia*. Teniendo en cuenta la relación de estas cantidades se presenta el siguiente esquema:



Por lo tanto, cuando se pide encontrar $f(1)$, es decir, el valor que corresponde con la unidad, no se está ante la presencia de una multiplicación sino de una *división de tipo partitiva* (Puig & Cerdán, 1999), entre otras cosas porque las cantidades involucradas son números enteros. Dicho de otro modo, una división de tipo partitiva tiene lugar cuando la regla de correspondencia no se da en el problema, sino que justamente se solicita hallarla a partir de la identificación de la cantidad extensiva, (Puig & Cerdán, 1999, p.130) a la cantidad $f(1)$.

Utilizando el operador escalar, para pasar de la segunda a la primera línea entre las cantidades conocidas, la correspondencia sería: $\frac{\text{punto de llegada}}{\text{punto de partida}} = \frac{7}{1} = 7$



Este análisis deja ver que la división se realiza como inversa de un operador escalar multiplicativo. Así mismo, utilizando el operador funcional, se establece la relación,

$$f(1) = 1 \cancel{\text{bolsa leche}} * \frac{15400 \cancel{\text{pesos}}}{7 \cancel{\text{bolsas leche}}}$$

$$\frac{\text{punto de llegada}}{\text{punto de partida}} = \frac{15.400 \text{ pesos}}{7 \text{ bolsas de leche}} =$$

$2200 \text{ pesos} / \text{bolsas de leche}$; y aplicando este operador funcional a la relación queda:

$$\frac{f(1)}{1 \text{ bolsa leche}} = \frac{15.400 \text{ pesos}}{7 \text{ bolsa leche}}, \text{ multiplicando en ambos miembros de la igualdad por } 1 \text{ bolsa de leche,}$$

se llega a lo que es igual a tener $1 \text{ bolsa de leche} \cdot 2200 \text{ pesos} / \text{bolsas de leche}$. Se simplifican pues las dimensiones *bolsa leche* para obtener pesos.

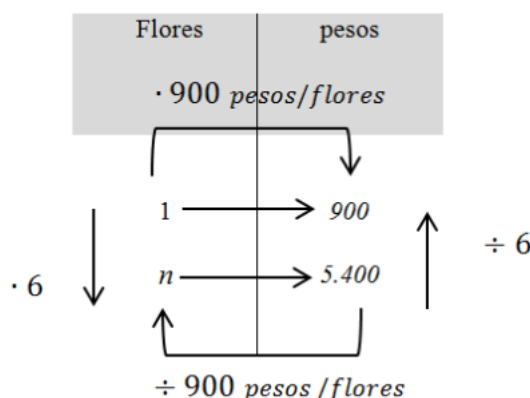
Situación 3: Juan tiene \$ 5.400 y quiere comprar flores para sus amigas, cada flor de cuesta \$900. ¿Cuántas flores puede comprar?

La relación entre las cantidades manifestadas da lugar al siguiente esquema.



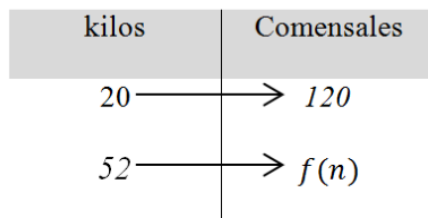
En este caso el valor que se debe buscar es n , es decir, el valor que le corresponde a los \$5.400, lo que implica realizar una *división de tipo cuotitivo* (Puig & Cerdán, 1999, p.131), que corresponde a hallar el valor de n unidades cuando se tiene una cantidad determinada. Esto es, en términos Puig & Cerdán (1999) utilizar la *cantidad intensiva* del problema de tal modo que se pueda hallar *la descripción existencial*. (p.131)

Al igual que en la situación anterior surge la división como la operación inversa a la multiplicación, bien sea mediante un análisis vertical en los que aparecen los operadores $\cdot 6$ y $\div 6$ o bien sea mediante un análisis horizontal, de izquierda a derecha, en el que surge el operador función $\cdot 900 \text{ pesos/flores}$ o la operación $\div 900$ como la función inversa de la función directa, dando lugar al siguiente esquema.



Situación 4: Si 20 kilos de carne alcanzan para 120 comensales. ¿52 kilos para cuántos comensales alcanzarán?

Este tipo de situaciones igual que las anteriores da cuenta de una relación cuaternaria, con la diferencia que en este caso ninguna de las cuatro cantidades es la unidad, como se observa en el siguiente esquema.



En la búsqueda de la solución del problema, mediante un análisis vertical se plantea la necesidad de llevar las 20 kilos de carne a la unidad, lo cual se logra dividiendo entre 20, y posteriormente la unidad llevarla a 52, para lo cual se debe multiplicar entre 52, de ahí que se obtenga el operador escalar $\frac{52}{20}$, considerando también la aplicación sucesiva de los dos operadores multiplicativos, una división ($\div 20$) y una multiplicación ($\cdot 52$), comenzando ya sea por la multiplicación o por la división (Vergnaud, 2000, p.205). Se observa que en este análisis vertical cobra especial relevancia el ir hacia la unidad, para una vez conocida esta volver hacia la cantidad total a la cual se le solicita su correspondiente. Este operador se emplea análogamente

en los dos espacios de medida. A este tipo de problemas Vergnaud (1994) los considera como *problemas de composición o regla de tres*. (p.203)

Ahora bien, mediante un análisis horizontal se puede encontrar primero el valor de la unidad aplicando la razón $\frac{120 \text{ comensales}}{20 \text{ kilos}}$ para luego, mediante un operador funcional, multiplicar 52 kilos de carne $\cdot 6 \text{ comensales/kilos}$, para pasar de cantidad de kilos de carne a comensales.

De acuerdo a las situaciones anteriores se puede observar que la multiplicación forma parte de la proporcionalidad simple, tanto en los casos cuando se conoce el valor de la unidad como en los casos en los que no. En la proporcionalidad simple directa se puede modelar en un caso general así:

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$X \longrightarrow f(x) = k \cdot x$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Tal modelo de función cumple las *propiedades de linealidad*:

$$1. f(x) + f(y) = f(x + y)$$

$$2. f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

Dado que la solución de las situaciones puede estar dada bien por un análisis vertical o uno horizontal, también se puede realizar dando cuenta las propiedades de la linealidad arriba citadas (Vergnaud, 1983, 1994, 2000). Para realizar un análisis de la puesta en acto de estas propiedades se toma como ejemplo la siguiente situación:

En el siguiente esquema se relaciona la cantidad de borradores y el precio de ellos.

	Borradores		Pesos	
	1		100	
x	$\leftarrow 2$		200	$\rightarrow f(x)$
y	$\leftarrow 3$		300	$\rightarrow f(y)$
	5		500	

Utilizando la primera propiedad, en términos de la situación se puede evidenciar su manejo:

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

$$200 + 300 = f(2 + 3)$$

$$500 = f(5)$$

La segunda propiedad, en términos de la misma situación, se presenta tal como sigue. Siendo, por ejemplo, $\lambda = 2$ (la constante de proporcionalidad) y el mismo x del esquema anterior, entonces:

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

$$f(2 \cdot 2) = 2 \cdot 200$$

$$f(4) = 400$$

En síntesis, la mirada a la estructura multiplicativa desde el isomorfismo de medidas, deja ver que existe una tipología de problemas, a saber, los de multiplicación, los de división partitiva, los de división cuotitiva y los de composición o de regla de tres como indica Vergnaud (de multiplicación y división simultáneamente). Además se deja ver dos tipos de análisis que permiten dar solución a la situación, el análisis vertical y el análisis horizontal, igualmente es posible responder a estas situaciones haciendo uso de las dos propiedades de la linealidad.

Estos elementos serán fundamentales no solamente para el diseño de las situaciones que serán propuestas a los estudiantes en relación con la tipología de problemas, sino también para

analizar los resultados una vez se haya implementado el trabajo con los estudiantes a partir de las distintas formas que hay de acercarse a estas situaciones.

2.2.1.1 Comparación multiplicativa

Es necesario precisar que en muchos de los problemas que se presentan en la escuela, la regla de correspondencia no suele ser explícita y se presenta en términos de comparación, que de alguna forma oscurece semánticamente la relación entre los dos espacios de medida. Así, por ejemplo, si se tiene que: “Daniel tiene 12 canicas. María tiene 6 veces tantas canicas como tiene Daniel. ¿Cuántas canicas tiene María?” (Tomado de Puig & Cerdán, 1999, p.132). Nótese que aunque no se explícita en el enunciado la regla de correspondencia como se hace por ejemplo en los problemas de multiplicación, el término *6 veces* está indicando que por cada canica que tiene Daniel maría va a tener 6. Ciertamente el término *n veces* está indicando tal regla de asociación. Nesher, (citado por Puig & Cerdán, 1999), ha considerado este tipo de problemas como un campo distinto del isomorfismo de medidas, al cual han llamado problemas de *comparación multiplicativa*, en la que hay una función escalar que se usa para comparar dos cantidades extensivas del mismo tipo de magnitud y en el cual también considera otro tipo de enunciado en la que aparece una proposición que es una descripción existencial, como en los isomorfismos de medidas.

Es importante notar, dos cuestiones, por un lado, que semánticamente los problemas de comparación multiplicativa y los problemas de isomorfismo de medidas son distintos, aunque en términos estructurales guardan la misma naturaleza, dado que constituyen una relación cuaternaria y por otro lado, que dependiendo de cómo se relacionen las cantidades en esta tipología de problemas, se puede tener problemas de comparación multiplicativa de multiplicación, división, cuotitiva y partitiva.

De acuerdo a la estructura semántica del problema de comparación multiplicativa, se establece la relación cuaternaria, así en el ejemplo citado anteriormente, el enunciado del problema de: “Daniel tiene 12 canicas. María tiene 6 veces tantas canicas como tiene Daniel. ¿Cuántas canicas tiene María?” sugiere una relación cuaternaria en la que su solución es por medio de una multiplicación. El siguiente esquema ofrece una visión de la relación cuaternaria, la cual no está de forma explícita en el enunciado.

Canicas de Daniel	Canicas de María
1	6
12	x

Como se puede observar, la regla de asociación, la cual no es explícita en el enunciado, se puede determinar así: que por cada canica que tiene Daniel, María tiene 6 canicas. Luego ante la expresión, si Daniel tiene 12 canicas, ¿cuántas tiene María?, la descripción existencial no está determinada, por lo tanto, se debe hacer uso de una multiplicación para hallar la cantidad de canicas que tiene María.

Ahora bien, si tenemos este tipo de enunciado: “Daniel tiene 12 canicas. María tiene 72 canicas. ¿Cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?” (Tomado de Puig & Cerdán, 1999, p.132), sugiere una solución que está la presencia de una división partitiva, tal y como se presenta en el siguiente esquema cuaternario.

Canicas de Daniel	Canicas de María
1	x
12	72

La expresión sintáctica del enunciado muestra la descripción existencial, puesto que, por cada 12 canicas que tiene Daniel, María tiene 72. Ante esto, la regla de asociación no está presente, por lo tanto esta situación se resuelve con una división de tipo partitivo para hallar la cantidad intensiva.

Por último, el enunciado: “María tiene 72 canicas. María tiene 6 veces tantas canicas como tienen Daniel. ¿Cuántas canicas tiene Daniel?” (Tomado de Puig & Cerdán, 1999, p.132). Nótese que la expresión sintáctica determina la regla de asociación, puesto que establece que María tiene 6 veces tantas canicas como tiene Daniel, como se puede observar en el siguiente esquema cuaternario.

Canicas de Daniel	Canicas de María
1	6
x	72

Además se pregunta por la cantidad extensiva, lo cual indica que su solución es por medio de una división cuotitiva.

Por lo tanto, de acuerdo a la estructura semántica de los problemas de comparación multiplicativa se pueden encontrar tres posibilidades de solución, formalizándolo desde una relación cuaternaria, ya sea por medio de una multiplicación, división partitiva y división cuotitiva, esto dependiendo de cuál de las cantidades sea la incógnita.

2.2.2 Producto de medida

Este tipo de relación, denominado también producto cartesiano, consiste en la relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una de ellas es el producto de las otras dos. Esta relación puede ser aplicada tanto en el plano numérico como en el plano dimensional, desde esta

perspectiva dos medidas elementales se combinan para dar cuenta de una tercera medida de diferente naturaleza, la cual sería el producto medida. La representación más usual para este tipo de relaciones es el esquema cartesiano (Vergnaud, 1983, 2000).

Esta gran forma de relación multiplicativa es susceptible de diversos contextos como son las situaciones concernientes a producto cartesiano, área, volumen, trabajo, fuerza y muchos otros conceptos de física que surgen de la multiplicación de dos magnitudes. Además da cuenta principalmente de dos tipos de problemas dado que, de acuerdo a Puig & Cerdán (1999) esas dos medidas son semánticamente conmutables. Estos dos tipos son: los de multiplicación que surgen cuando se debe encontrar la *medida producto*, cuando se conocen las otras dos llamadas *medidas elementales* que lo componen, y los de división, que surgen cuando se deben encontrar una de las dos medidas elementales que componen la medida producto, conociendo la otra medida elemental y la medida producto. A continuación se ilustra mediante dos contextos una de combinación en el que el orden es relevante y otra en el campo de la geometría particularmente en el cálculo del área.

Situación 1: En el aula de clase, la profesora de danza quiere saber cuántos pasos de danza se pueden realizar para la coreografía, entre 3 hombres y 4 mujeres. Cada hombre debe realizar un paso de danza con cada una de las mujeres. ¿Cuántos pasos se pueden presentar en la coreografía?

Designando el grupo de hombres por {A,B,C}, y el grupo de mujeres por {E,F,G,H}, el conjunto de pasos por pareja es la asociación de cada elemento del primer grupo por cada elemento del segundo grupo, dando como resultado, *número de pasos por pareja = 3 hombres * 4 mujeres*. Como se presenta en el siguiente cuadro cartesiano.

		Hombres		
		A	B	C
Mujeres	E	AE	BE	CE
	F	AF	BF	CF
	G	AG	BG	CG
	H	AH	BH	CH

En el plano dimensional, se debe encontrar la *dimensión producto*, a partir de las *dimensiones simples* que lo componen, como son los casos de áreas y volúmenes, el cual es el producto de las medidas de las dimensiones involucradas. Para el área (m^2) = *largo* (m) · *ancho* (m) y el volumen (cm^3) = *alto* (cm) · *sección del área* (cm^2), por ejemplo:

Situación 2: Se requiere hallar la longitud del lado de una superficie rectangular de $42m^2$ cuyo ancho tiene 6 metros.

Esta situación permite ver que la división entre la *dimensión producto* que es $42m^2$ y una de sus *dimensiones simples* $6m$ da lugar a encontrar la otra dimensión simple, por lo tanto:

$$x \text{ metros} = 42m^2 \div 6m$$

$$x \text{ metros} = 7m$$

Profundizando en el análisis dimensional a la noción de volumen, se puede hacer dos reflexiones, el primero es que el volumen es el producto de un área por una longitud, con lo cual se puede establecer que $m^3 = m^2 \cdot m = m \cdot m \cdot m$. Segundo, que se puede llegar a la noción de razón y proporción.

Recapitulando desde la propuesta teórica dada por Vergnaud, se puede decir que las estructuras multiplicativas no solo se dan en el plano numérico sino también en el dimensional, y en este último que su énfasis se desarrolla en el producto de medida.

2.2.3 Estructura de cantidades

Considerando el análisis de las estructuras multiplicativas, Schwartz & Kaput (1986), consideran clasificar los problemas de tipo multiplicativo en función de los tipos de cantidades, dado que puede ser de gran ayuda para analizar el nivel de dificultad, el tipo de dificultad y el tipo de errores que cometen los alumnos cuando se enfrentan a la solución de situaciones con dichas estructuras (Puig & Cerdán, 1999, p. 125).

Estos autores consideran que “Una cantidad es un par ordenado (x, u) en la que x es un número y u es una unidad de magnitud (Puig & Cerdán, 1999, P.125), como por ejemplo: 6 lapiceros, 5 litros, 80 m/s . Igualmente consideran principalmente dos tipos de cantidades: *las extensivas* y *las intensivas*. Las cantidades extensivas, expresan la extensión de una entidad y se refieren a un conjunto con la particularidad de ser aditivas en el sentido que el número expresado en la cantidad se puede sumar pero la unidad de magnitud se mantiene igual. Esquemáticamente esto se puede representar como: $(x, u) + (x', u) = (x + x', u)$, a su vez pueden ser discretas o continuas, las discretas son de la forma 6 lapiceros, en la que la unidad es el mismo objeto y las continuas se relacionan a un conjunto de esa unidad como 5 litros en tanto que la magnitud puesta en juego es el volumen.

Las cantidades intensivas, son la composición entre dos cantidades extensivas, lo que da lugar a una razón, por ejemplo: velocidad, densidad, dinero por días; una característica de estas cantidades en su expresión verbal, que está dada por la partícula “*por*” como dinero *por* días, sin embargo, no siempre ocurre esto, dado que hay ciertas unidades de medida que implícitamente dan cuenta de una comparación entre dos cantidades como por ejemplo, los nudos, que es una unidad de medida para la velocidad la cual está dando cuenta de la comparación entre millas náuticas por hora.

Como las cantidades intensivas son la composición de dos cantidades extensivas, estas pueden ser de tipo *discreta/discreta*, *discreta/continua*, *continua/discreta*, *continua/continua*. En el caso de que las dos cantidades extensivas sean de la misma magnitud forman un escalar, que al multiplicar por ellas no cambian la unidad de medida, como lo es el caso de los escalares. A partir de estas consideraciones se presenta la Tabla 3, en cual se ve la clasificación y ejemplificación de las estructuras de cantidades.

ESTRUCTURA DE CANTIDADES	TIPOS	EJEMPLOS
Extensivas	<i>Discretas</i>	4 Galletas, 3 canicas, 4 Cuadernos, 7 Botella...
	<i>Continuas</i>	3 Litros, 5 kilómetros, 9 horas...
Intensivas	<i>Discretas/Continuas</i>	4 Botella/2 Litros
	<i>Continuas/Discretas</i>	6 Litros/2 Botella
	<i>Continuas/Continuas</i>	30 Kilometro/Hora 6 Metros/2 Metros → forman un escalar
	<i>Discretas/Discretas</i>	10 Galleta/2 Paquetes Canica/Canica → forman un escalar

Tabla 3. Tipología de las estructuras de las cantidades

Puig & Cerdán (1999), enmarcan la posibilidad de combinar las estructuras de cantidades Extensivas(E) e Intensivas(I) y considerando los problemas de multiplicación y división surgen las siguientes relaciones: $E \cdot E, E \cdot I, I \cdot E, I \cdot I, E/E, E/I, I/E, I/I$, de las cuales solo se van a hacer referencia en relación con las dos relaciones multiplicativas que ha propuesto Vergnaud.

A continuación se expondrán los tipos de relaciones:

1. $E \cdot E$, representa el modelo de multiplicación como producto de medidas como lo expone Vergnaud (1994), como lo son los problemas de áreas y problemas combinatorios.
2. $E \cdot I$ e $I \cdot E$, en este tipo se relacionan los problemas cuando los datos son tiempo y velocidad o cantidad y precio unitario, para este caso se hace necesario que el denominador de las cantidades intensivas sea de la misma naturaleza que las unidades de la cantidad extensiva, con el fin que el resultado sea una cantidad extensiva con las unidades del numerador.
3. E/E , un caso de situaciones en que se establece esta relación puede ser cuando las cantidades son *discretas/discretas*, como se ilustra en el siguiente ejemplo: tengo 18 canicas para repartir entre 3 niños. ¿cuántas canicas le corresponde a cada niño?, esta situación muestra una repartición, lo cual indica que pertenece a una división partitiva, porque se pregunta por el tamaño de cada parte. En un caso particular cuando las cantidades son de la misma magnitud da una cantidad escalar.
4. E/I , esta relación puede verse en las situaciones que requieren cantidades dadas de la siguiente forma: Tengo 18 canicas y quiero dar 3 canicas por niño. ¿Cuántos niños pueden tener la misma parte?. Por lo tanto la relación esta dada por $18 \text{ canicas} / 3 \text{ canicas por niño}$, dado que se pregunta por el número de partes representa una división cuotitiva.

De acuerdo con estos autores las relaciones $I \cdot I$, I/I , I/E , son consideradas dentro de situaciones de mayor complejidad para los estudiantes y por lo cual no se tomarán en cuenta este trabajo dado al nivel de los estudiantes en estudio.

A partir de estas consideraciones se detallará la relación de las categorías propuestas por Vergnaud (1994), y los tipos de estructuras de cantidades de Schwartz que enuncian Puig y Cerdán (1999), en la siguiente tabla:

TIPOS DE RELACIONES MULTIPLICATIVAS	TIPOLOGIA DE SITUACIONES	ESTRUCTURA DE CANTIDADES
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	$I \cdot E = E$
	División partitiva	$\frac{E}{E}$
	División cuotitiva	$\frac{E}{I}$
	Regla de tres	$I \cdot E = E \wedge \frac{E}{E}$
Producto de medidas	Multiplicación	$E \cdot E = E'$
	División	$\frac{E}{E}$

Tabla 4. Tipología de relaciones multiplicativas y estructuras de cantidades

2.2.4 Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas⁶

En el campo de la educación matemática la investigación sobre dificultades, obstáculos⁷ y errores ha sido un asunto de interés para múltiples investigadores como Brousseau (1983), Bachelard (1938), Radatz (1980), Movshovitz (1987), Rico (1995), Astolfi (1999), Socas (1997), entre otros, debido a la amplia investigación que se ha realizado en este campo, muchos de estos investigadores coinciden que conocer sobre las dificultades y los errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas es una valiosa fuente de información porque

⁶ Aunque esta temática no va a ser objeto de estudio en este trabajo, se reconoce su importancia para el campo de la educación matemática.

⁷ El término de obstáculo fue introducido por primera vez por Bachelard (1938) dentro del contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico, el cual identifica varias clases de los mismos que surgen desde: la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas, la tendencia a generalizar y el lenguaje natural. Para Brousseau, “un obstáculo es una concepción que ha sido, en principio, eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro” (Franchi & Rincón, 2004, p.66)

indica qué tanto han aprendido los estudiantes y cómo lo ha aprendido y, de esta manera, permite establecer estrategias en las planeaciones de los docentes. En relación con la estructura multiplicativa no es ajena la presencia de diferentes dificultades y errores que los estudiantes muestran cuando se enfrentan a situaciones que requieren la aplicación de una o varias multiplicaciones o divisiones, además de otros conceptos. Algunas de estas dificultades se originan en la adquisición de conocimiento en la escuela o la falta de experiencia en situaciones que favorezcan el aprendizaje desde un ambiente contextualizado.

Según Socas (1997), estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas y se evidencian en los alumnos mediante errores. De acuerdo a esto, el autor señala que los errores en el aprendizaje de las matemáticas están dados a ciertas dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos del pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza en el aprendizaje de las matemáticas, al los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, o las asociadas a las actitudes físicas y emocionales, asimismo afirma que el error es la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente una consecuencia de una falta específica de conocimiento o despiste.

De forma similar Radatz (1980) indica que el error no es solo la ausencia de respuesta correcta, ni el resultado de un accidente; sino que es más bien un producto de la experiencia previa. Franchi & Rincón citando a Brousseau (1997), indica que para él el error además de ser un efecto de la ignorancia, de la inseguridad, del azar, puede surgir como resultado de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado.

El estudio de los errores en la educación matemática para estos y muchos otros autores, deja claro que conocer el tipo de error que cometen los estudiantes al enfrentarse a cualquier tipo de situación es relevante para la adquisición de un nuevo conocimiento, ya que pueden revelar malentendidos ya instaurados y consolidados. Rico (1995), señala que al estudiar los errores, de acuerdo con las dificultades encontradas por los alumnos, también se debe reconocer que éstos van en función de otras variables del proceso educativo, a saber: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables; así mismo, los errores en el aprendizaje de las matemáticas son el resultado de procesos muy complejos. Por lo tanto, delimitar las causas posibles de un error dado o una explicación de cada uno de estos con la posibilidad de actuar sobre él, es bastante difícil debido a que hay una fuerte interacción entre las variables del proceso educativo y, a menudo, es muy difícil aislar relaciones.

En este marco de referencia, la investigación de las dificultades y errores presentada por los autores mencionados permite en cierta medida abordar con más precisión al origen del error que presentan los estudiantes al iniciar el grado sexto en la IEJI sede Santa Bárbara, cuando se enfrentan con situaciones de tipo multiplicativo y de acuerdo al propósito del trabajo aportar reflexiones didácticas que favorezcan la planeación curricular en torno a esta temática.

2.3 Algunas articulaciones entre el referente didáctico y el curricular. Balance y aportes al trabajo

En el marco de referencia conceptual, se ha expuesto, además de otros elementos, los modelos de multiplicación desde los documentos de política pública emanados por el MEN y los tipos de relaciones multiplicativas bajo la perspectiva de Vergnaud (1990, 1994, 2000) y de Nesher (citado por Puig & Cerdán, 1999). A partir de estos elementos se presenta una

correspondencia entre la perspectiva curricular y la didáctica, permitiendo ver en algunos casos de manera implícita y en otros de manera explícita los diferentes tipos de relaciones que proponen los referentes, tal y como se logra apreciar en la Tabla 5:

<i>PERSPECTIVA CURRICULAR</i>	<i>PERSPECTIVA DIDÁCTICA</i>
Modelos de la Multiplicación	Tipos de relaciones multiplicativas
Factor multiplicante	Comparación multiplicativa
Adición repetitiva	Isomorfismo de medidas
Como razón	Isomorfismo de medidas
Producto cartesiano	Producto de medidas
Repartir	Isomorfismo de medidas
Agrupamiento o sustracción repetida	Isomorfismo de medidas

Tabla 5. Relación entre los modelos propuestos por el MEN (1998), Vergnaud (1990, 1994, 2000) y Nesher (citado por Puig & Cerdán, 1999)

Además de lo anterior, también se logra evidenciar que los tipos de relaciones multiplicativas son abordables no solamente desde lo numérico, sino también, tal y como ya se indicó e ilustró, desde lo variacional, lo métrico, lo estocástico y lo geométrico; de este modo, el abordaje de esta estructura posibilita el desarrollo de estos pensamientos matemáticos, lo cual se refleja claramente en las relaciones entre diferentes estándares propuestos que atañen al estudio de esta estructura.

En síntesis, la presentación de los elementos conceptuales expuestos en este capítulo brindan elementos importantes tanto para el diseño de la propuesta de aula, como para establecer las categorías de análisis con las cuales se examinarán los resultados obtenidos de la implementación de dicha propuesta con el grupo objeto de estudio. Estas consideraciones serán presentadas en detalle en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta el diseño metodológico del trabajo, para esto se divide en tres secciones que pretende dar cuenta del enfoque metodológico del trabajo de indagación, el diseño de la prueba y las categorías de análisis, lo que permitió realizar registros acerca de las dificultades y errores que presentaron un grupo de estudiantes de grado sexto ante la solución de situaciones de tipo multiplicativo, entendiéndose que son situaciones en que su solución se hace necesario el uso de una o varias multiplicaciones y divisiones tal y como se presentó en el Capítulo II. A continuación se describen aspectos metodológicos considerados para la realización de este proyecto.

3.1 El enfoque metodológico del trabajo de indagación

De acuerdo con el propósito de este trabajo, este se inscribe dentro del paradigma de investigación cualitativo de corte descriptivo, lo que suele ser propio en las investigaciones realizadas en el campo de la educación. Desde la perspectiva de Cohen & Manion (1990), este tipo de investigación se caracteriza por tratar de descubrir o interpretar lo *que es*, a partir de observar a individuos, grupos, instituciones métodos y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, clasificar analizar e interpretar los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación.

Es así como el presente trabajo se inscribe dentro de este tipo de investigación, dado que interesa aquí describir y analizar las estrategias que un grupo de estudiantes de sexto grado de la IEJI sede Santa Bárbara realizan al enfrentar situaciones de estructura multiplicativa, además de identificar la emergencia de dificultades y errores que se pueden detectar en dichas estrategias, tomando en consideración los referentes teóricos presentados en el capítulo anterior. Todo esto para aportar reflexiones didácticas y propuestas metodológicas conceptuales que favorezcan la resolución de problemas de estructura multiplicativa desde la Educación Básica Primaria. Para ello, este trabajo se estructura en cuatro fases, las cuales se presentan a continuación.

Fase 1: en esta fase se delimitó la problemática objeto de interés en este estudio, la cual se centró en tres focos fundamentales, la experiencia pedagógica propia del autor del trabajo, la investigación en didáctica de las matemáticas interesada en la resolución de problemas de estructura multiplicativa, y los desempeños de los estudiantes de la institución en la que se realizó la implementación en las pruebas SABER en los primeros años de escolaridad, en particular en lo que refiere a las situaciones asociados a tipo de estructuras objeto de interés aquí. Además de esto se delimitaron los objetivos que guían el trabajo, así también se propuso la justificación y un

marco de referencias que brindan antecedentes de interés para este estudio, en tanto que aportan elementos en distintos sentidos para su desarrollo.

Fase 2: se presentan los elementos teóricos que fundamentan este estudio, para ello se han delimitado dos perspectivas, a saber: la curricular, que requiere el estudio de los documentos de política pública como son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencia, para dar una mirada a cómo estos documentos asumen ciertas posiciones en torno a la enseñanza de la estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad; y la perspectiva didáctica, que retoma algunos elementos claves de Vergnaud (1983, 1990, 1994, 2000), Obando (2015), Puig & Cerdán (1999), Maza (1991), Rico (1995), Movshovitz et al. (1987), Astolfi (1999), principalmente para delimitar el campo de situaciones que permiten el estudio de la estructura multiplicativa. Estos elementos teóricos permitieron establecer las variables para el diseño de la prueba y las categorías de análisis de los resultados fruto de la implementación.

Fase 3: En esta fase se diseña la prueba a la luz de los referentes teóricos tomados en la fase anterior, ajustándola con situaciones que permiten develar el tratamiento que los estudiantes le dan a este tipo de situaciones, es así como esta fase consta del diseño e implementación de la prueba.

Fase 4: En esta última fase se analizan los resultados obtenidos de la implementación de la prueba con los estudiantes tomando como referente los elementos teóricos desarrollados en la fase dos para dicho análisis. Una vez analizados estos resultados, se proponen conclusiones que favorecen la movilización de la enseñanza de esta estructura multiplicativa tanto en la IEJI, como en general, igualmente se aportan reflexiones que dan lugar a los objetivos del trabajo.

3.2 Marco contextual

La Institución Educativa Jorge Isaacs fue constituida en septiembre del año 2002, con la fusión de ocho (8) escuelas, siete (7) del sector urbano, que son: sede principal (Antiguo Colegio “Jorge Isaacs”), sede Santa Barbará, sede Cincuentenario, sede Pedro Vicente Montaña, sede Carlos A. Sardi Garcés, sede José Celestino Mutis, sede José Ignacio Rengifo y una del sector rural, la sede Simón Bolívar, ubicada en la vereda Guacanal; todas ubicadas en el municipio de El Cerrito Valle. Las sedes urbanas se encuentran ubicadas estratégicamente en el municipio permitiéndole a la institución tener gran influencia al ofrecer el servicio educativo y poder proyectar la finalidad del Proyecto Educativo Institucional (PEI).

Este proyecto educativo se fundamenta en la prestación de los servicios educativos en Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria y Media, bajo las normas legales nacionales que le permiten garantizar a los estudiantes el desarrollo integral de su personalidad y ser promotora del cambio social. Con el propósito fundamental de educar hombres y mujeres con formación integral, resaltando valores como el amor, la colaboración, el respeto, la responsabilidad, la solidaridad, la confianza, el compromiso, la tolerancia, el compañerismo, la amistad, para que adquieran un compromiso consciente consigo mismo y con los demás. Es así como da origen a la Misión de la institución, la cual es formar ciudadanos capaces de construir su propio proyecto de vida, ser competentes para el desempeño laboral y social fundamentado en valores.

En cuanto a la cobertura estudiantil la institución educativa atiende a 2400 estudiantes en las diferentes sedes. La sede principal que cuenta con tres jornadas, atiende en la jornada de la mañana a jóvenes de grado sexto a once, en la jornada de la tarde a estudiantes de sexto grado hasta octavo grado y en la jornada nocturna atienden a adultos en los diferentes ciclos. En la sede del Cincuentenario atienden a estudiantes en las dos jornadas, en la mañana básica primaria y en

la tarde básica secundaria desde sexto grado a octavo grado. En las sedes anexas como la sede de Pedro V. Montaña, Mutis y la Rengifo, atienden a estudiantes de básica primaria. La sede del Guacanal tiene una atención especial por ser una población de vereda por lo cual se está trabajando la modalidad de escuela nueva. Y la sede de Santa Bárbara, en la cual se desarrolló en este trabajo atiende a estudiantes del grado sexto hasta grado octavo.

La sede Santa Bárbara se ubica en los límites del municipio; físicamente, la sede está dotada con una sala de profesores, la oficina de coordinación, seis salones, una biblioteca, un comedor, una cocina, dos baterías sanitarias, y una sala de informática con 20 computadores de mesa y dos maletas con 20 computadores personales.

En su comunidad se verifica que en su gran mayoría es una población afrodescendiente, seguida por la población mestiza e indígena. Toda esta población no es oriunda del municipio de El Cerrito y tienden a ubicarse en este sector por la facilidad y economía de vivienda, esto es debido a la situación social que se encuentran las familias, que en algunos casos es el desplazamiento obligatorio por los problemas de orden público existentes, escasas fuentes de empleo, poca accesibilidad a bienes y servicios, escasos recursos económicos y la búsqueda de oportunidades. Por este motivo es considerada una población fluctuante, de familias muy numerosas, en las que se observa violencia intrafamiliar y familias disfuncionales.

Es así como algunas familias en el afán de sostenerse, tienden a buscar oportunidades económicas inmediatas que en algunos casos son ocupaciones ilícitas involucrando incluso población estudiantil que se atiende. Pero también hay familias que luchan en medio de este entorno por lograr una buena calidad de vida, trabajando en las curtiembres, en los ingenios, en

empresas privadas, en casas de familia como empleadas domésticas ya sea en el municipio, en haciendas o en las ciudades cercanas.

Teniendo en cuenta el panorama contextual antes referido, se puede decir que gran parte de los estudiantes se encuentran en un estado de vulnerabilidad ante tres situaciones relevantes, que son: la falta de acompañamiento continuo por parte de padres o madres cabezas de hogar, debido a sus actividades laborales, por las condiciones sociales de su entorno, esto es: consumo de sustancias psicoactivas, microtráfico, barreras invisibles y demás ligadas a estas problemáticas, y por violencia intrafamiliar. Ante esto se deduce que este contexto ejerce influencia directa sobre los estudiantes, desarrollando costumbres ligadas a su comunidad y por ende generan poco interés por el aprendizaje, lo cual es uno de los factores que afectan a los desempeños, tal y como se evidencia en la problemática de este estudio.

3.3 El proceso del trabajo de indagación

3.3.1 La población objeto de estudio

La población objeto de estudio es el grupo de estudiantes de grado sexto de la IEJI de la sede Santa Bárbara del Cerrito Valle. Los 28 estudiantes matriculados en este grado, 18 hombres y 10 mujeres, tienen edades entre 10 y 15 años. El 60% de los estudiantes viven en el barrio Santa Bárbara, el 30% en barrios cercanos a la sede y el 10% en las veredas del municipio, esta población pertenece a un estrato socioeconómico entre 1 y 2. De la población objeto de estudio, veintidós estudiantes cursaron su educación básica primaria en la misma institución educativa, sede José Ignacio Rengifo, ubicada en el mismo sector de Santa Bárbara; los seis estudiantes restantes llegaron de otros lugares, tres estudiantes de Cali, dos de Buenaventura y uno de un pueblo cercano llamado Santa Helena.

3.3.2 Los instrumentos de recolección de la información

En virtud de registrar una serie de observaciones que permitan dar respuesta a nuestro interrogante se requiere principalmente el uso de registros fílmicos, los apuntes realizados por la maestra que guía el desarrollo de la prueba (quien es la misma autora de este trabajo), y las hojas de trabajo en las que los estudiantes desarrollan de manera escrita cada una de las situaciones. Para los registros fílmicos, se utilizarán las categorías de análisis (más adelante presentadas) que permiten revisar la información que en ellos se presenta de acuerdo al objeto de estudio trazado, lo cual posibilita maneras más detalladas de entender el porqué de las respuestas de los estudiantes que las ofrecidas en las hojas de trabajo.

En las hojas de trabajo, los estudiantes presentarán estrategias que tienen para desarrollar las situaciones de estructura multiplicativa, este instrumento permite revisar de manera clara el proceso utilizado por ellos para dar solución a cada una de las situaciones.

3.4 Categorías de análisis

En este trabajo se han delimitado dos categorías de análisis, que permiten identificar el tipo de estrategias que los estudiantes objeto de estudio ponen en juego al enfrentar las situaciones de estructura multiplicativa propuestas. La primera categoría de análisis permite dar cuenta de las estrategias que utilizan los estudiantes al enfrentarse con situaciones en torno a la relación multiplicativa de isomorfismo de medidas según Vergnaud (1994, 2000), Obando (2015), Puig & Cerdán (1999) y comparación multiplicativa según Nesher, (citado por Puig & Cerdán, 1999) y el segundo tipo de categorías permiten dar cuenta o analizar el tipo de estrategias en torno al producto de medidas.

A continuación se presentan las subcategorías que hacen parte de las categorías (C1 y C2), las cuales surgen atendiendo a tres cuestiones fundamentales, la primera tomando como base los referentes propios de la teoría dada por Vergnaud (1994, 2000), Obando (2015) y Puig & Cerdán (1999), la segunda pensando a priori en las distintas alternativas en que los estudiantes podrían hacerle frente a los problemas de estructura multiplicativa que se les propone y la tercera dichas subcategorías se definen atendiendo a mayores niveles de sofisticación o complejidad.

Para la presentación de las categorías se hace uso del siguiente ejemplo:

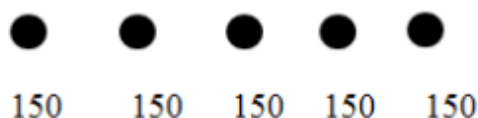
Si una bola cuesta \$ 150 ¿Cuál es el costo de 5 bolas?

3.4.1 Categoría de análisis en torno a la relación multiplicativa de isomorfismo de medidas (C1)

Subcategoría uno (S_1): no se identifica los espacios de medida ni las relaciones entre ellos. Una posible estrategia que hace parte de esta categoría es que hace factible evidenciar que el estudiante no logra reconocer los espacios de medida que hay dentro un problema, sino que toman las cantidades arbitrariamente y opera con ellas mediante una suma, multiplicación o una división, pero no hay una conciencia real de la naturaleza de estas cantidades y de sus relaciones. Una certeza de esta categoría es que por ejemplo el estudiante suma las cantidades 150 y 5 sin reconocer que una de estas representa dinero y la otra la cantidad de bolas, de este modo aunque el estudiantes reconoce que estas cantidades son importantes no identifica la relación que hay entre ellas.

Subcategoría dos (S_2): se identifican los espacios de media y se trabaja desde modelos aditivos. En esta subcategoría intervienen todas las estrategias que el estudiante haga uso del pensamiento aditivo para realizar adiciones de una misma cantidad y llegar así al valor solicitado, así se

identifican los espacios de medida. Para ello se puede hacer uso de esquemas gráficos y sumas sucesivas de las cantidades, por ejemplo, atendiendo al problema propuesto se obtendría que:



O bien

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$150 + 150 + 150 + 150 + 150 = 750$$

Se resalta en esta subcategoría que hay una identificación de la relación entre los espacios de medida identificándolo por medio de sumas sucesivas, dando cuenta de una única suma iterada dentro de un espacio de medida.

Subcategoría Tres (S_3): se identifica que hay dos espacios de medida y una variación en cada uno de estos espacios, haciendo explícito las variaciones que hay en cada uno de estos, por lo tanto lo resuelven efectuando:

- a. Sumas iteradas, relacionando los dos espacios de medida.
- b. Una multiplicación o una división teniendo en cuenta los espacios de medida y sus relaciones.

Así por ejemplo, un estudiante realizaría la siguiente estrategia:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ y por tanto $150 + 150 + 150 + 150 + 150 = 750$, de este modo el valor de las cinco canicas puede obtenerse sumando de forma repetida el valor de cada una de ellas. La diferencia de esta subcategoría con la anterior es que aquí hace uso de la doble

suma iterada, lo que cognitivamente de acuerdo con Obando (2015), es propio del pensamiento multiplicativo y no del aditivo, en la que juega una sola suma iterada.

También el estudiante puede realizar una estrategia que haga uso de relaciones multiplicativas de la siguiente forma $150 \cdot 5 = 750$. Por lo tanto en esta subcategoría se identifica un análisis escalar en términos multiplicativos.

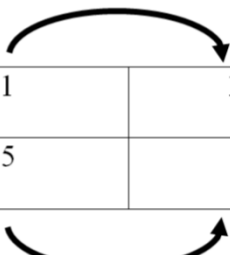
Subcategoría cuatro (S_4): se identifica la relación de covariación entre los espacios de medida, mediante:

- Registro en tablas de correspondencia.
- Análisis horizontal (uso de operador función).

Esta subcategoría requiere que el estudiante reconozca la relación funcional entre dos espacios de medida logrando realizar una estrategia haciendo un análisis horizontal, por ejemplo:

Análisis horizontal

Cantidad de Bolas pequeñas	Precio de Bolas pequeñas
1	150
5	?



En el análisis horizontal la relación se hace entre las bolas y el precio de cada bola que es $150 \frac{\text{pesos}}{\text{bolas}}$.

Subcategoría cinco (S_5): se identifica la relación de covariación entre los espacios de medida mediante las propiedades de la linealidad propias de los problemas de proporcionalidad directa simple.

En esta subcategoría los estudiantes hacen uso de estrategias en las que aplican dichas propiedades, por ejemplo: Para este caso de situaciones puede ser modelado por una tabla de correspondencia que permite ver la dependencia de las variaciones de las cantidades de un espacio de medida con respecto al otro espacio de medida y así permitir acercarse a las propiedades de linealidad. Por lo tanto, se trata de averiguar un valor desconocido $f(z)$, en este caso el valor de 5 bolas, dados los valores $x, f(x)$, y $y, f(y)$, donde $z = x + y$ y $f(z) = f(x) + f(y)$.

	Cantidad de Bolas pequeñas	Precio de Bolas pequeñas	
	1	150	
$x \leftarrow$	2	300	$\rightarrow f(x)$
$y \leftarrow$	3	450	$\rightarrow f(y)$
$z \leftarrow$	5	?	$\rightarrow f(z)$

Simbólicamente para la primera propiedad se obtendría que:

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

$$300 + 450 = f(2 + 3)$$

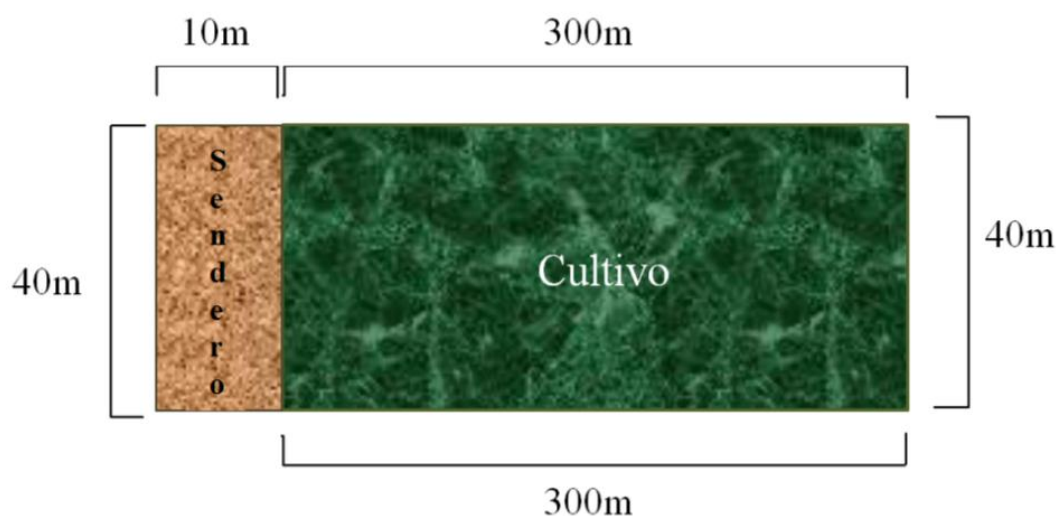
$$7500 = f(5)$$

3.4.2 Categoría de análisis en torno a la relación multiplicativa de productos de medidas (C2)

Tal como se anotó en el capítulo anterior los problemas de producto de medidas atienden a tanto a las magnitudes geométricas como a las combinaciones. Para cada uno de estos dos tipos de problemas se plantean las siguientes subcategorías, las cuales se ilustran mediante un ejemplo.

Situaciones problemas con magnitudes geométricas:

Ejemplo: Carlos trabaja en un cultivo de caña de azúcar y debe realizar la fumigación contra plagas en un terreno con las medida que se ilustra en la gráfica, ¿Qué área de cultivo va a fumigar Carlos?



Subcategoría uno (G_1): los estudiantes no reconocen que las cantidades son de diferente dimensión⁸ y de naturaleza distinta. No se identifica las dimensiones ni las relaciones entre ellas o entre las cantidades. Una posible estrategia en la que se evidencie esta subcategoría es cuando los estudiantes no hacen la distinción entre largo y ancho de la superficie, es decir que la dimensión ancho tiene menor longitud que la dimensión largo y toma las cantidades involucradas

⁸ Este término se entiende como la medida de un espacio, “existen pues dimensiones simples, dimensiones-producto o dimensiones-cociente” (Vergnaud, 2000, p. 217).

en la representación gráfica y las opera de manera arbitraria como por ejemplo: $40 + 10 + 300 + 40 + 300$ y por ende no reconocen la relación que hay. O si se desea hallar el valor del ancho dándole el valor del área $12000m^2$ y el largo $300m$, no logran definir la relación para encontrar dicho valor.

Subcategoría dos (G_2): se identifican las dimensiones simples y el área, pero no se relacionan para obtener la dimensión producto o para obtener el valor de una dimensión simple. En esta subcategoría los estudiantes hacen la distinción de las dos dimensiones, identificando su largo, su ancho y al hacer la relación entre las dos magnitudes realiza una operación distinta al producto de medidas, por ejemplo, las relaciona por medio de sumas así: $300 + 40$. En el caso de encontrar una de las dimensiones, teniendo la otra dimensión y el área, las relaciona por ejemplo, por medio de una resta, así: $12000 - 40$.

Subcategoría Tres (G_3): se identifican las dimensiones simples o las medidas elementales y por medio de estas se realiza el producto que establece su composición, o a partir de ellas hallan el valor de una dimensión simple, ya sea por medio de una multiplicación o una división. Una estrategia propuesta por los estudiantes puede ser dibujar la ilustración del terreno para poder hacer la relación entre las dos dimensiones, o simplemente hallar la relación por medio del producto de medida, así por ejemplo los estudiantes identifican que el largo mide 300 m y el ancho 40 m y al hacer la relación lo hace mediante la multiplicación entre 300 y 40 , hallando el área en m^2 . En esta subcategoría al contrario de la anterior los estudiantes logran identificar las dimensiones y el área y a partir del área y una de sus dimensiones encuentra la relación para hallar el valor de la otra dimensión. Por ejemplo si el área es $12000m^2$ y una de sus dimensiones 300 m , los estudiantes pueden hacer una multiplicación encontrando el factor escalar, en este

caso el valor requerido, que es 40 y multiplicarlo por 300 para comprobar el área o bien realizar una división entre 12000 y 300 y así también obtener la dimensión requerida.

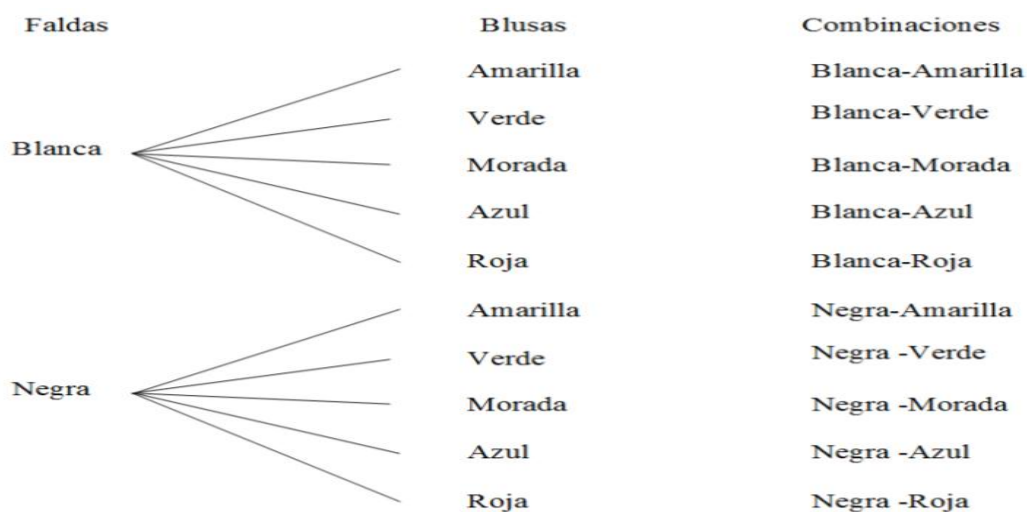
Situaciones problema de producto cartesiano:

Ejemplo: Una mujer tiene 5 blusas y 2 faldas de colores diferentes. ¿Cuántas combinaciones posibles para vestir diferente puede hacer la mujer?

Subcategoría (M₁): *no se identifica las relaciones entre las cantidades y se operan arbitrariamente.* En esta subcategoría una de las posibles estrategias utilizadas por los estudiantes es que toman las cantidades enunciadas en el ejemplo y realizan operaciones arbitrarias con ellas, como por ejemplo puede hacer una suma entre 5 y 2 y concluir con que son 7 combinaciones posibles teniendo en cuenta el orden de los colores de las chaquiras.

Subcategoría (M₂): *se identifica una sola cantidad y a partir de ella se obtiene el total de combinaciones posibles.* En esta subcategoría los estudiantes identifican una cantidad como la más significativa para desarrollar la situación; de acuerdo con el ejemplo enunciado, los estudiantes pueden tomar el 5 para establecer que son cinco combinaciones posibles o en su defecto decir que son dos combinaciones.

Subcategoría (M₃): *se identifican las cantidades, sus relaciones y se aborda mediante gráficos o material concreto.* Se identifican las cantidades y las relaciones entre ellas, y se establecen las combinaciones uno a uno mediante esquemas gráficos, numéricos o mediante material manipulable, para establecer la cantidad total de combinaciones. Una estrategia que pueden tomar los estudiantes es realizar la representación gráfica de las blusas y las faldas y por medio de flechas indicar las posibles combinaciones, como lo ilustra el siguiente diagrama:



Subcategoría (M_4): se identifican las cantidades y se relacionan por medio de producto de medidas. En esta categoría los estudiantes identifican las cantidades, para el ejemplo enunciado toma 5 como la cantidad que representa las blusas y 2 la cantidad que representa las faldas y las relaciona por medio del producto de las dos cantidades $5 \cdot 2$, obteniendo así el total de combinaciones posibles.

Considerando la posibilidad de estrategias presentadas por los estudiantes, se presentan en la Tabla 6 las categorías de análisis que permiten clasificar.

Categoría de análisis en torno a la relación multiplicativa de isomorfismo de medidas (C1)	Categoría de análisis en torno a la relación multiplicativa de productos de medidas (C2)
Subcategoría uno (S_1): no se identifica los espacios de medida y las relaciones entre ellos.	Situaciones problemas con magnitudes geométricas:
	Subcategoría (G_1): Los estudiantes no reconocen que las cantidades son de diferente dimensión y de naturaleza distinta. no se identifica las dimensiones ni las relaciones entre ellas o entre las cantidades.
Subcategoría dos (S_2): se identifican los espacios de medida y se trabaja desde modelos aditivos.	Subcategoría (G_2): se identifican las dimensiones simples ilustrándolo o no mediante esquemas gráficos pero no se relacionan para obtener la dimensión producto o para obtener el valor de una dimensión simple.
Subcategoría tres (S_3): se identifica que hay dos espacios de medida y una variación en cada uno de estos espacios, haciendo explícito las variaciones que hay en cada uno de estos, por lo tanto lo resuelven efectuando: a. Sumas iteradas, relacionando los dos b. espacios de medida mediante covariaciones entre sus cantidades. c. Una multiplicación o una división teniendo en cuenta los espacios de medida y sus relaciones.	Subcategoría (G_3): se identifican las dimensiones simples o las medidas elementales y por medio de estas se realiza el producto que establece su composición o a partir de ellas hallan el valor de una dimensión simple, ya sea por medio de una multiplicación o una división.
	Situaciones problema de producto cartesiano
	Subcategoría (M_1): no se identifica las relaciones entre las cantidades y se operan arbitrariamente.
	Subcategoría (M_2): se identifica una sola cantidad y a partir de ella se obtiene el total de combinaciones posibles.
Subcategoría cuatro (S_4): se identifica la relación de covariación entre los espacios de medida mediante: a. Registro en tablas de correspondencia. b. Análisis horizontal (uso de operador función).	Subcategoría (M_3): se identifican las cantidades sus relaciones y se aborda mediante gráficos o material concreto.
Subcategoría cinco (S_5): se identifica la relación de covariación entre los espacios de medida mediante las propiedades de la linealidad. a. $f(x) + f(y) = f(x + y)$ b. $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$	Subcategoría (M_4): se identifican las cantidades y se relacionan por medio de un producto de medidas.

Tabla 6. Categoría de análisis para los resultados obtenidos

3.5 Diseño de la prueba

La prueba está configurada por tres grandes situaciones hipotéticas, las cuales responden a los tipos de relaciones multiplicativas presentadas en el capítulo II (Ver anexo 1, 3 y 4). La primera situación, denominada *juego de goles*, presenta 4 desafíos, cada uno de los cuales toma en consideración un mismo escenario: atinar bolas de colores en una cancha miniatura para obtener una puntuación determinada. En cada desafío se desarrollan actividades que develan la tipología de situaciones dentro de isomorfismo de medidas tal como se describe a continuación:

- El primer desafío intenta proponer relaciones de tipo multiplicativo poniendo en juego cuatro cantidades, presentados en dos espacios de medida diferentes: la cantidad de goles anotados y el valor por cada bola de color, obteniendo así un caso simple de multiplicación, en la que se presenta el valor correspondiente a la unidad.
- El segundo desafío toma en consideración los problemas de regla de tres, que pretende buscar el valor correspondiente a la cantidad total de goles anotados conociendo la descripción existencial pero desconociendo el valor correspondiente con la unidad, esto es, $f(1)$.
- El tercer desafío presenta una actividad que permite a los estudiantes desarrollarlo en el marco de división cuotitiva, en este caso los estudiantes deberán hallar la cantidad de goles ($f(n)$) que satisface una condición dada, es decir, hallar la descripción existencial, para lo cual se da a conocer el valor de cada gol anotado (la regla de correspondencia).
- El cuarto desafío moviliza actividades que les permite a los estudiantes realizar comparaciones multiplicativas a partir del término *veces*, en la que no es explícito la relación de correspondencia, por lo tanto los estudiantes deberán hallar la relación por

medio de una comparación de dos cantidades de un mismo tipo de magnitud, dando lugar a desarrollar problemas de comparación multiplicativa de multiplicación, división partitiva y división cuotitiva.

La segunda situación denominada *renovando la superficie de la cancha*, ha sido diseñada para abordar el tipo de relaciones multiplicativas en torno al producto de medidas, para ello se toma en consideración magnitudes geométricas en las que se pone a los estudiantes, en primera instancia, a encontrar el área de la cancha de la sede de la institución, midiendo las magnitudes simples, y luego a encontrar una de las dimensiones simples de la cancha cuando se ha dado la otra y además el área.

La tercera situación presentada como *el diseño de manillas*, responde a una relación de producto de medidas a partir de la combinación de tres conjuntos en el que el orden es relevante, en esta actividad los estudiantes deben hallar el total de manillas que se pueden hacer con cuatro chaquiras en dos colores diferentes.

Una vez concluida cada sesión de las situaciones, se contempla realizar una plenaria, en la cual los estudiantes deben exponer las estrategias individuales y plantear sus puntos de vista ante sus compañeros para dar solución a cada una de las situaciones.

Cada situación está diseñada considerando las siguientes variables a partir del marco conceptual abordado en el capítulo II.

3.5.1 Las variables que se movilizan en la prueba

A continuación se presentan las variables consideradas en el diseño de la prueba:

- Tipo de relaciones multiplicativas: isomorfismo de medidas: considerando los tipos de situaciones multiplicativas, división partitiva, división cuotitiva, comparación multiplicativa y producto de medidas. Lo que corresponde que en algunas situaciones se pregunte por la regla de correspondencia y en otras por la descripción existencial, dado que en algunas se darán a conocer el valor de la unidad y otras no, lo que implica en estas últimas la regla de tres.
- Campo numérico: números enteros no negativos.
- Cantidades intensivas y extensivas, asociadas al tipo de situaciones consideradas en el capítulo anterior.

3.5.2. Diseño de las situaciones de la prueba

Situación 1: Juego de Goles

Descripción de la situación 1

Los estudiantes del grado sexto de la sede Santa Bárbara, inician el periodo académico en el área de matemáticas con un juego competitivo, llamado *juego de goles*, determinado por desafíos, cada desafío será jugado por parejas y a cada pareja se les proporcionará una cancha en miniatura con bolas de colores con el fin de realizar lanzamientos y atinar goles. Al finalizar todos los desafíos se dará a conocer la puntuación obtenida por cada pareja con el fin de establecer la pareja ganadora.

Desarrollo metodológico de la situación

Para el desarrollo de esta situación a cada pareja de estudiantes se les proporcionará la guía de los cuatro desafíos, se explica punto a punto las reglas de juego, los cuales se detallarán a continuación. Cada desafío tendrá una pareja ganadora, esta obtendrá tres (3) puntos y las parejas

que no cumplan el desafío obtendrán solo un (1) punto; esta información se irá registrando por la docente en la Tabla 7, para obtener así el puntaje total de los desafíos realizados.

Parejas	Desafío 1	Desafío 2	Desafío 3	Desafío 4	Puntaje Total
1 Pareja					
2 Pareja					
3 Pareja					
4 Pareja					
5 Pareja					
6 Pareja					
7 Pareja					
8 Pareja					
9 Pareja					
10 Pareja					
11 Pareja					
12 Pareja					
13 Pareja					
14 Pareja					

Tabla 7. Registro General de puntuación de los desafíos

Una vez organizadas las parejas, en un aula se ubicarán las mesas de juego con los recursos necesarios para su ejecución, como son: la cancha, las bolas y hojas de trabajo. Concluido el trabajo se desarrolla una plenaria evaluando las estrategias puestas en el juego por los estudiantes para desarrollar cada una de las actividades y el resultado final, para así presentar el registro general de puntuación de los desafíos.

Recursos necesarios para el desarrollo de la situación

14 Cancha en miniatura de dimensiones
 14 bolas de color azul
 14 bolas de color negro
 14 bolas de color rojo
 14 bolas de color verde
 112 bolas de color blanco
 Hojas de trabajo, lápiz, borrador, sacapuntas.

Primer desafío

Objetivo del desafío

Presentar una situación de isomorfismo de medidas de tipo de multiplicación, a partir de lanzamientos de bolas, con puntuaciones determinadas por cada color de bola, para analizar las estrategias que ponen en juego los estudiantes al enfrentar dichas situaciones.

Variables movilizadas en el desafío

- El desafío se presenta en el contexto de isomorfismo de medidas en el caso de multiplicación, lo que implica conocer el valor correspondiente a la unidad, dado que se da la regla de correspondencia.
- El campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades grandes. Como se incluye el 0 se tendrá en cuenta el teorema del factor nulo⁹.
- Uso de cantidades extensivas por cantidades intensivas.

El desafío

En este desafío la docente proporcionará a cada pareja de estudiantes, una cancha y cuatro bolas de color azul, rojo, negro y verde. Los estudiantes harán ocho lanzamientos hacia la cancha, dos por cada bola de color (azul, rojo, negro y verde) tratando de atinar las bolas en la cancha, para luego anotar cuántos goles hicieron por cada bola y dar el resultado final por pareja.

⁹ Teorema del factor nulo: $\forall a \in \mathbb{N}, a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

Reglas de juego

Teniendo en cuenta que las bolas tienen diferentes valores dependiendo del color (ver tabla de valores), los estudiantes deben calcular el puntaje total que se registró por pareja. Así mismo registrar todos los procedimientos necesarios para calcular el resultado final.

Color de la bola	Valor de la bola
Azul	4010
Rojo	3874
Negro	5050
Verde	2346

Lo que se espera

Que los estudiantes registren el puntaje total por cada color de bola, suponga por ejemplo los siguientes datos:

Estudiante	Bola Azul	Bola Roja	Bola Negra	Bola Verde
E1	0	0	2	1
E2	0	2	2	2
TOTAL	0	2	4	3

Una vez registrado y totalizado, la pareja podría resolver la situación haciendo sumas iteradas teniendo en cuenta el valor de cada bola o identificar los espacios de su medida y de su variación. Así por ejemplo supuestos los datos presentados en la tabla anterior, para el caso de las bolas amarillas se tendría que:



$$5050 + 5050 + 5050 + 5050 = 20.200 \text{ puntos}$$

O considerando estos mismos valores por medio del análisis vertical o el análisis horizontal se tendría que:

Bola azul	Puntos	Bola Roja	Puntos	Bola Amarilla	Puntos	Bola Verde	Puntos
1 →	4010	1 →	3874	1 →	5050	1 →	2346
0 →	?	2 →	?	4 →	?	3 →	?

Segundo desafío

Objetivo del desafío

Presentar una situación de estructura multiplicativa de tipo regla de tres, para analizar las estrategias que pone en juego los estudiantes al enfrentar dichas situaciones.

Variables movilizadas en el desafío

- La situación se presenta en el contexto de un isomorfismo de medida en el caso de regla de tres, lo que implica no conocer el valor correspondiente a la unidad, en estas situaciones se da conocer la descripción existencial y se pregunta por $f(n)$ teniendo el valor de n .
- El campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades grandes.
- Uso de cantidades intensivas por cantidades extensivas o cantidades extensivas sobre cantidades extensivas.

El desafío

En este desafío cada estudiante hará dieciséis lanzamientos hacia la cancha con las bolas de color blanco, tratando de atinar estas en la cancha para luego registrar la cantidad de goles realizados por pareja.

Reglas de juego

- a. La condición en este segundo desafío es que por cada cuatro goles anotados tendrá un puntaje de 6032 puntos, en caso de no completar el grupo de cuatro goles, los estudiantes deben averiguar el valor correspondiente a cada gol.
- b. Los estudiantes deben determinar el puntaje total obtenido por pareja y regístralos en el modelo de la siguiente tabla. Así mismo deben realizar todos los procedimientos necesarios para calcular el resultado final.

Pareja 1	
Estudiante	Número de Goles anotados
TOTAL GOLES POR PAREJA	

Lo que se espera

Pretendiendo el objetivo del desafío, los estudiantes deberían identificar los espacios de medida y la relación de covariación que se presentan en ellos ya sea efectuando un análisis horizontal o vertical bien sea para encontrar el valor de la unidad en caso de ser necesario u obtener el total de puntos realizados por parejas, o una vez hallado el valor de la unidad por medio de este análisis realicen una tabla de correspondencia uno a uno para hallar el valor total de puntos correspondiente a la pareja. Suponga por ejemplo los siguientes registros de goles y las posibles estrategias representativas para su solución.

Pareja 1	
Estudiante	Cantidad de Goles anotados
E1	2
E2	10
TOTAL GOLES POR PAREJA	12

Una primera estrategia que los alumnos pueden emplear es hallar el valor correspondiente a la unidad, para luego encontrar el valor total de goles atinados, lo cual se puede representar de manera esquemática de la siguiente forma.

Cantidad de Goles		puntos
1	→	?
4	→	6032

Una segunda estrategia puede ser que los estudiantes empleen la regla de tres para encontrar el puntaje obtenido por los goles anotados, lo cual se puede representar de la siguiente forma.

$$x \text{ puntos} = \frac{12 \text{ goles anotados} \cdot 6032 \text{ puntos}}{4 \text{ goles anotados}}$$

$$x \text{ puntos} = \frac{12 \cdot 6032 \text{ puntos}}{4}$$

$$x \text{ puntos} = \frac{72384 \text{ puntos}}{4}$$

$$x \text{ puntos} = 18096 \text{ puntos}$$

La tercera estrategia puede ser que los estudiantes hagan una relación de correspondencia ayudándose con la tabla de correspondencia de tal forma que la variación uno a uno en la cantidad de goles se corresponda con la variación en los puntos obtenidos tal como se presenta en el siguiente esquema.

Cantidad de goles	puntos
1	1508
2	3016
3	4524
4	6032
5	7540
6	9048
...	...
12	18096

Tercer desafío

Objetivo

Presentar una situación de estructura multiplicativa de tipo división cuotitiva, para analizar las estrategias que ponen en juego los estudiantes para desarrollarla.

Variables

La situación se presenta el contexto de isomorfismo de medida en el caso de división cuotitiva, conociendo el valor correspondiente a la unidad. En estas situaciones se da conocer la regla de correspondencia y se pregunta por la cantidad extensiva.

Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades grandes.

Uso de cantidades extensivas sobre cantidades intensivas.

El desafío

En este desafío el mecanismo de trabajo es diferente, ya que en primera instancia cada pareja de estudiantes debe averiguar la cantidad de goles que deben atinar considerando las reglas de juego para luego realizar los lanzamientos correspondientes a su respuesta. Los resultados obtenidos se registrarán en la tabla de registro general de puntuación de los desafíos. A partir de estas consideraciones los estudiantes deberán realizar los siguientes puntos:

1. Registrar cuantos goles se deben anotar para poder ganar el desafío. Desarrolla todos los procedimientos necesarios para hallar tu respuesta.
2. Una vez identificado el número de goles cada pareja pasará al frente con la docente e intentará realizar las anotaciones.

Reglas de juego

Para el desarrollo de este desafío se debe tener presente las siguientes consideraciones:

- a. La pareja de estudiantes debe determinar cuántos goles debe hacer para obtener un puntaje exacto a 173.600 puntos, considerando que cada gol anotado tiene un valor de 12.400 puntos.
- b. Cada participante por pareja podrá lanzar hasta 10 veces una bola de color blanco.
- c. Gana el desafío la pareja que logre anotar un puntaje exacto de 173.600 puntos.
- d. La pareja que identifique el número de goles que debe hacer, tendrá 2 puntos adicionales y la que logre hacer los goles para obtener el puntaje exacto tendrá 3 puntos.

Lo que se espera

Para dar solución a esta situación los estudiantes pueden emplear las siguientes estrategias:

1. Dar solución por medio de sumas iteradas, es decir sumando los puntos por cada gol anotado hasta llegar al puntaje necesario para ganar el desafío.
2. Haciendo un análisis vertical tratando de encontrar por qué valor se multiplica los 12.400 para lograr los 173.600 puntos y de igual manera la unidad multiplicarla por este valor.
3. Haciendo una tabla de correspondencia uno a uno.
4. Haciendo un análisis horizontal entre los espacios de medida considerados, aplicando el operador función.

Cuarto desafío

Objetivo

Presentar una situación de estructura multiplicativa del tipo comparación multiplicativa dada por el término *veces*, con el fin de analizar qué tipos de estrategias emplean los estudiantes para su solución ya sea por medio de una multiplicación, una división partitiva o cuotitiva.

Variables

- La situación se presenta en el contexto de desarrollo de comparación multiplicativa. Que en su enunciado más común aparece en una proposición con una descripción existencial y en otra expresa la regla de asociación para comparar las cantidades, en la que su solución puede ser por medio de una multiplicación, división partitiva o división cuotitiva.
- Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades pequeñas.
- Uso de cantidades extensivas por cantidades intensivas, cantidad extensiva sobre intensiva y extensiva sobre extensiva.

El desafío

En este desafío se desarrollaron tres preguntas, cada una tendrá un valor de 3 puntos para las parejas que la desarrollen correctamente y un punto para las que no lo logren hacer, estas preguntas se basarán en un juego realizado previamente en otra sede considerando la siguiente situación: En el grado sexto de la sede principal jugaron el juego de goles obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla 8, tal y como se observa no se registra la puntuación de los jugadores E y F, por lo tanto, aquí las parejas de estudiantes deberán averiguar los puntajes de los jugadores faltantes a partir de la información suministrada y determinar el ganador. Cada pareja debe realizar todos los procedimientos necesarios para calcular el resultado final.

Puntuación de Jugadores	
Jugador A	3456 puntos
Jugador B	2533 puntos
Jugador C	2654 puntos
Jugador D	1357 puntos
Jugador E	
Jugador F	
Jugador G	7599 puntos

Tabla 8. Resultados de Juego de goles

Reglas de juego

Considerando la situación, la pareja de estudiantes solucionará las siguientes preguntas para ganar el desafío.

1. Si se sabe que el jugador E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el jugador D. ¿Cuántos puntos registró el jugador E?
2. El jugador A realizó seis veces tantos puntos como los hizo el jugador F. ¿Cuántos puntos realizó el jugador F?
3. ¿Cuántas veces tiene el jugador G los puntos que tiene el jugador B?

Lo que se espera

En esta situación se espera que los estudiantes realicen una interpretación hacia el tipo de multiplicación, que efectúe sumas iteradas, o que identifique los dos espacios de medida y la relación que se da entre ellos, bien sea para que realicen una división de tipo cuotitivo o partitivo.

Situación 2: Renovando la superficie de la cancha.

Objetivo de la situación

Presentar una situación de estructura multiplicativa en torno al producto de medidas, a partir del estudio de magnitudes geométricas, tales como longitud y área., con el fin de analizar las estrategias que emplean los estudiantes para su solución.

Descripción de la situación

En vista de que la Institución Educativa Jorge Isaacs será sede de los juegos intercolegiales, la rectora y el consejo directivo en una reunión acordaron la instalación de pasto sintético a la cancha de microfútbol de la sede Santa Bárbara, esto con el fin de tener mejores condiciones para el desarrollo de los juegos, por lo tanto solicita la medida exacta de las dimensiones y superficie o área de la cancha para realizar el pedido de la grama necesaria para esta. Para esta tarea se les ha solicitado a los estudiantes del grado sexto obtener las dimensiones y superficie o área de la cancha.

Una vez organizados por parejas, en cada hoja de trabajo tratarán de explicar los siguientes puntos:

1. Escriban una estrategia que consideren pertinente para hallar la superficie o área de la cancha.
2. Desarrollen la estrategia expuesta en el punto anterior para determinar así la superficie o área de la cancha.
3. Igualmente la rectora solicita las dimensiones y el área de todas las canchas de cada una de las sedes de la institución. Ante esta solicitud la sede Rengifo le ha enviado la información mediante la siguiente ilustración.



Al ver la rectora el informe enviado por la sede, se ha percatado de que está incompleto dado que le hace falta una de las dimensiones de la cancha. Ayúdale a la sede a encontrar la dimensión que hace falta de la cancha a partir de la información presentada en la ilustración.

Desarrollo metodológico de la situación

Para el desarrollo de esta situación los estudiantes deben formar parejas y se les entregará la guía de la situación, seguidamente se trasladarán a la cancha donde tratarán de poner en juego las estrategias propuestas para hallar la superficie o el área de cancha, en la medida de que ellos vean la necesidad de utilizar el metro, se les brindará el recurso para su ejecución. Una vez concluido los tres puntos de la situación se desarrolla una plenaria con el fin de revisar las estrategias empleadas por los estudiantes, las herramientas utilizadas y los resultados obtenidos.

Recursos necesarios para el desarrollo de la situación

14 Metros

Hojas de trabajo

Lápiz, borrador, sacapuntas.

Variables movilizadas en la situación

- La situación se presenta el contexto de desarrollo de producto de medidas en el caso de multiplicación y división partitiva.
- Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades pequeñas.
- Cantidades extensivas por extensivas y cantidades extensivas sobre cantidades extensivas.

Lo que se espera

En esta actividad se espera que cada pareja de estudiantes identifique inicialmente un patrón de medida para determinar el área de una cancha, bien sea determinando el largo y su ancho para obtener posteriormente así el producto de estas tanto en términos de su cantidad como en su dimensión ($l \times l = l^2$); o bien mediante la superposición de un patrón de medida arbitrario sobre la superficie de la cancha para determinar su largo y ancho y el producto entre ellos o hacer el conteo uno a uno de cuantas veces cabe el patrón en toda la cancha.

Situación 3: Diseño de manillas

Objetivo de la situación

Presentar una situación de producto de medidas en términos de una combinación en el que el orden es relevante, en el contexto de producción de manillas con chaquiras, para analizar las estrategias que emplean los estudiantes para desarrollarla.

Descripción de la situación

Para la celebración del día de la mujer, la sede Santa Bárbara de la I.E.J.I ha decidido realizar manillas elaboradas con chaquiras, las cuales están diseñadas por un cordón y en el centro llevarán cuatro chaquiras de color blanco y negro, tal y como se muestra a modo de ejemplo en la ilustración.



Para esta tarea se ha encomendado a los estudiantes del grado sexto elaborarlas.

A partir de esta situación desarrolla los siguientes puntos:

1. Se necesita saber cuántas combinaciones de colores de chaquiras se pueden hacer para elaborar las manillas de acuerdo a las condiciones para su diseño. Escribe una estrategia para determinar la cantidad de manillas que resultan.
2. Inventa una estrategia distinta a la expuesta en el punto anterior, para determinar la cantidad de manillas que resultan de acuerdo a las condiciones para su diseño.
3. Realiza la construcción de las manillas de acuerdo a tu explicación.

Desarrollo metodológico de la situación

Para el desarrollo de esta situación los estudiantes deben formar parejas y se les entregará la guía de la situación con los recursos necesarios para su ejecución como son los cordones, las chaquiras de color blanco y negro y las hojas de trabajo. Una vez organizados, en cada hoja de trabajo tratarán de explicar el proceso para hallar de cuantas formas diferentes puede combinar los colores de chaquiras para construir las manillas y así ejecutar su estrategia. Una vez concluido los dos puntos de la situación se desarrolla una plenaria con el fin de revisar las estrategias empleadas por los estudiantes y el resultado final.

Recursos necesarios para el desarrollo de la situación

- 16 Cordones de 32 cms
- 32 Chaquiras de color blanco
- 32 Chaquiras de color negro

Variables movilizadas en la situación

- La situación presenta en el contexto de desarrollo de producto de medidas en el caso de combinación en que el orden es relevante.

- Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades pequeñas.
- Cantidades extensivas por extensivas.

Lo que se espera

Se espera que los estudiantes realicen las combinaciones con los colores de las chaquiras para establecer la cantidad de producción, lo podrán hacer de una manera aleatoria por medio de la construcción de cada manilla verificando que no se repita la misma combinación teniendo en cuenta el orden o efectuar la multiplicación entre los grupos de colores para cada ubicación así:

Sea C el grupo de colores de chaquiras posibles (blanco y negro), siendo los mismos para las cuatro ubicaciones y M la cantidad de manillas a producir, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c}
 \text{Ubicación} \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 M = C \cdot C \cdot C \cdot C \\
 M = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
 M = 16
 \end{array}$$

Obteniendo así la cantidad de combinaciones posibles para las manillas.

Consideraciones finales

De acuerdo a las consideraciones que se han tenido para el diseño de cada una de las situaciones de la prueba, a continuación se presenta en la Tabla 9 una descripción sintética de la configuración de ella, en la que es posible observar las variables y objetivos que se movilizan.

CONFIGURACIÓN DE LA PRUEBA			
Situaciones	Desafíos	Objetivos	Variables que se movilizan
Situación 1: Juego de Goles	Primer desafío	Presentar una situación de isomorfismo de medidas de tipo de multiplicación, a partir de lanzamientos de bolas, con puntuaciones determinadas por cada color de bola, para analizar las estrategias que ponen en juego los estudiantes al enfrentar dichas situaciones.	• El desafío se presenta en el contexto de isomorfismo de medidas en el caso de multiplicación, lo que implica conocer el valor correspondiente a la unidad, dado que se da la regla de correspondencia. • El campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades grandes. Como se incluye el 0 se tendrá en cuenta el teorema del factor nulo. • Uso de cantidades extensivas por cantidades intensivas.
	Segundo desafío	Presentar una situación de estructura multiplicativa de tipo regla de tres, para analizar las estrategias que ponen en juego los estudiantes al enfrentar dichas situaciones.	• La situación se presenta en el contexto de un isomorfismo de medida en el caso de regla de tres, lo que implica no conocer el valor correspondiente a la unidad, en estas situaciones se da conocer la descripción existencial y se pregunta por $f(n)$ teniendo el valor de n. • El campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades grandes. • Cantidades intensivas por cantidades extensivas o cantidades extensivas sobre cantidades extensivas.
	Tercer desafío	Presentar una situación de estructura multiplicativa de tipo división cuotitiva, para analizar las estrategias que ponen en juego los estudiantes para desarrollarla.	• La situación se presenta el contexto de isomorfismo de medida en el caso de división cuotitiva, conociendo el valor correspondiente a la unidad. En estas situaciones se da conocer la regla de correspondencia y se pregunta por la cantidad extensiva. • Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades grandes. • Cantidades extensivas sobre cantidades intensivas.
	Cuarto desafío	Presentar una situación de estructura multiplicativa del tipo comparación multiplicativa dada por el término veces, con el fin de analizar qué tipos de estrategias emplean los estudiantes para su solución ya sea por medio de una multiplicación, una división partitiva o cuotitiva.	• La situación se presenta el en contexto de desarrollo de comparación multiplicativa. En su enunciado más común aparece en una proposición con una descripción existencial y en otra expresa la regla de asociación para comparar las cantidades, en la que su solución puede ser por medio de una multiplicación, división partitiva o división cuotitiva. • Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades pequeñas. • Cantidades extensivas por cantidades intensivas, cantidad extensiva sobre intensiva y extensiva sobre extensiva.
Situación 2: Renovando la superficie de la cancha	No aplica	Presentar una situación de estructura multiplicativa en torno al producto de medidas, a partir del estudio de magnitudes geométricas, tales como longitud y área., con el fin de analizar las estrategias que emplean los estudiantes para su solución.	• La situación se presenta el contexto de desarrollo de producto de medidas en el caso de multiplicación y división partitiva. • Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades pequeñas. • Cantidades extensivas por extensivas y cantidades extensivas sobre cantidades extensivas.
Situación 3: Diseño de manillas	No aplica	Presentar una situación de producto de medidas en términos de una combinación, en el que el orden es relevante, en el contexto de producción de manillas con chaquiras, para analizar las estrategias que emplean los estudiantes para desarrollarla.	• La situación presenta en el contexto de desarrollo de producto de medidas en el caso de combinación en el que el orden es relevante. • Campo numérico comprende los enteros no negativos, con cantidades pequeñas. • Cantidades extensivas por extensivas.

Tabla 9. Configuración de la prueba en términos de las variables y objetivos que movilizan

3.5.3 Implementación de la prueba

La prueba fue dada para que los estudiantes se enfrenten a situaciones que les permitieron desarrollar diferentes estrategias de solución, por lo tanto, se realizó en el aula de clase, la cual dispone de 14 mesas bipersonales con su respectiva silletería, estas fueron ubicadas a los laterales del aula con el fin de dar una mejor distribución al desarrollo de trabajo por parejas, así mismo permitió al docente encargado de su implementación, un mayor acercamiento a cada equipo de trabajo y la facilidad de visualización del tablero en los momentos de socialización de los resultados, se finalizó con plenarias en cada uno de los desafíos o situaciones.

La prueba fue desarrollada en dos sesiones de clases distintas, en una de ellas se abordó solamente la primera de las situaciones, mientras que la en la segunda se desarrolló la segunda y tercera situación, tal y como se describe a continuación:

La primera situación, correspondiente a los cuatro desafíos se realizó en una sesión de 3 horas reloj (60 minutos). El primer desafío se desarrolló en 40 minutos, el segundo en 30 minutos, el tercer desafío tuvo una duración de 25 minutos y el último en 25. Luego de terminado cada uno de los desafíos se dio un tiempo de 15 minutos para abrir una plenaria en la que se discutieron las estrategias dadas por los estudiantes generando debates e institucionalizando ideas.

En una segunda sesión, después de 9 días del desarrollo de la primera situación, se desarrolló la segunda y tercera situación en un tiempo de 2 horas, de la siguiente manera: la segunda situación correspondiente a “*Renovando la superficie de la cancha*”, se abordó en un primer momento en la cancha de la sede, lo que permitió a los estudiantes la exploración de la superficie de dicha cancha mediante acciones reales sobre ella, para ello se emplearon 40

minutos. Posteriormente, se terminó la situación dentro del aula, para lo cual se emplearon 30 minutos adicionales, concluyendo finalmente con la plenaria de 10 minutos.

La tercera y última situación denominada “*Diseño de manillas*”, se desarrolló dentro del aula de clases en un tiempo de 30 minutos y con un tiempo adicional de 10 minutos para el desarrollo de la plenaria.

3.6 Análisis de los resultados

En este apartado se exponen los análisis de las estrategias presentadas por los estudiantes en el desarrollo de las tres situaciones propuestas en la prueba, para lo cual se emplean las categorías presentadas en el apartado 3.3. Para presentar los resultados de los estudiantes se clasifican las respuestas de estos formando grupos de categorías que conserven estrategias comunes, identificando dentro de estos análisis a cada pareja de estudiantes como $P1, P2, P3 \dots P14$, manteniendo siempre a cada pareja representada por el mismo Pi . Además, para los análisis se emplean cuadros de diálogo obtenidos de los protocolos de los videos de grabación como apoyo para realizar los análisis, para ello, se usan en estos cuadros de diálogo las siguientes etiquetas, M (Maestra) y E_i (i -ésimo estudiante).

3.6.1 Análisis de la situación 1: Juego de goles

3.6.1.1 Primer desafío

Las estrategias empleadas por las catorce parejas de estudiantes fueron diversas, así por ejemplo es posible evidenciar que tres de estas parejas ($P4, P9$ y $P13$) no logran identificar las relaciones que hay entre los espacios de medida, puesto que no relacionan la cantidad de anotaciones realizadas con los valores de cada una de las bolas según su color, es decir, si la pareja de estudiantes hizo dos anotaciones con la bola del color azul sabiendo que tiene un valor

de 4010 puntos, la pareja considera solamente una vez este valor al registrar el puntaje obtenido, esto se puede evidenciar a modo de ejemplo en la Imagen 1:

2 goles con la bola azul	38740
2 goles con la bola rojo	5050.
2 goles con la bola negro	+ 2346.
2 goles con la bola verde	4010.
2 goles con la bola azul	38740
2 goles con la bola rojo	5050.
2 goles la bola negro	2346.
2 goles la bola verde	<u>36450</u>

Imagen 1. Estrategia presentada por P13 al resolver el desafío 1 de la Situación 1

Nótese en esta imagen cómo cada uno de los dos integrantes de esta pareja de estudiantes anota dos goles por cada color de bola, empero el valor registrado solamente corresponde a una sola bola por cada color, lo que evidencia que no hay una correspondencia entre la cantidad de goles anotados con el valor de cada bola. De acuerdo con el proceder de estos estudiantes, estas estrategias se ubican dentro de la subcategoría S_1 .

Ahora bien, en particular en el procedimiento empleado por estas parejas de estudiantes, es posible evidenciar la presencia de tres errores, el primero de ellos se debe al algoritmo empleado para hacer la suma, poniendo en evidencia un error con el cálculo de cantidades. El segundo error se presenta en el momento de calcular el puntaje total obtenido debido a datos mal utilizados o no utilizar algún dato para dar la solución, y el tercer error se presenta cuando P9 usa datos que no corresponden con las condiciones del desafío presentado.

Por su parte, diez de las catorce parejas (P1, P2, P3, P5, P6, P7, P10, P11, P12 y P14), hacen uso de una estrategia de tipo aditivo, relacionando cada acierto de gol con el valor

correspondiente al color de la bola, tantas veces el valor anotado, tal y como se observa a modo de ejemplo en la Imagen 2:

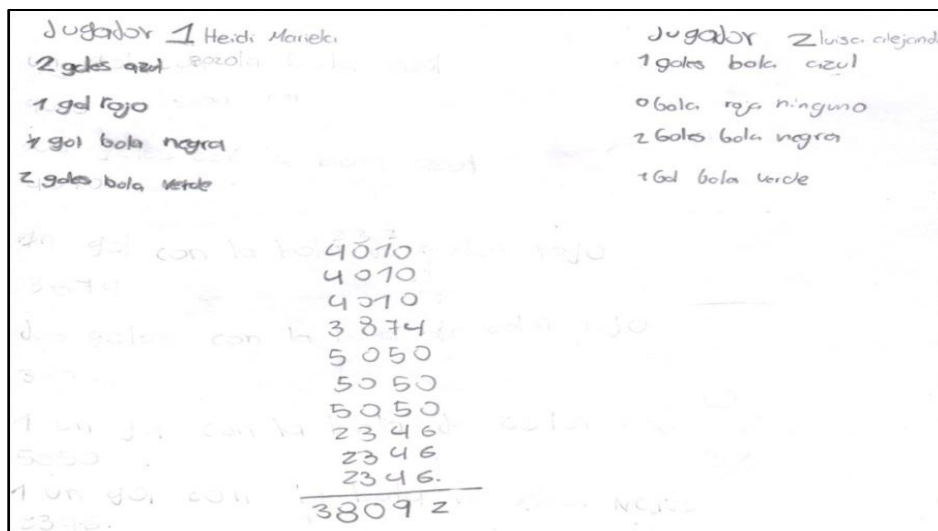


Imagen 2. Estrategia presentada por P14 al resolver el desafío 1 de la Situación 1

Obsérvese en la imagen cómo cada uno de los integrantes de esta pareja de estudiantes, registra los goles anotados por cada color de bola en la parte superior y en la parte inferior realiza las sumas de los valores correspondientes a la cantidad de goles anotados según el color de la bola. De este modo la estrategia empleada por esta pareja suma iteradamente dichas cantidades tantas veces como se anotaron entre ambos, obteniendo correctamente el puntaje total. Por lo tanto estas estrategias se clasifican dentro de la subcategoría S_2 .

Cabe anotar que siete parejas tienen diferentes tipos de errores tales como: realizar procedimientos algorítmicos errados, omitir datos o utilizar mal los datos para obtener el puntaje total.

Por su lado $P8$, realiza una multiplicación entre el valor de la bola y la cantidad de goles anotados por cada color de bola, obteniendo así la cantidad de puntos parciales, y finalmente

mediante la suma de los resultados parciales obtenidos llegan al puntaje total, tal y como se logra apreciar en la Imagen 3:

Color	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
verde 1	2346	2346	3974	3974	5050	5050	4010
negro 2	4692	4692	7948	7948	10100	10100	4010
rojo 2							
azul 1							
Maria del Carmen							
azul 2							
verde 2							
rojo 2							
negro 2							
total							22636

Imagen 3. Estrategia presentada por P8 al resolver el desafío 1 de la Situación 1

De esta manera, P8 identifica los dos espacios de medida y la relación que hay entre las cantidades de cada uno de los espacios de medida, reconociendo así que por cada gol anotado le corresponde un valor asociado de acuerdo al color de la bola y, mediante una multiplicación, obtiene el puntaje parcial de cada color de la bola, es decir, si tuvo dos aciertos con la bola de color azul multiplican el valor de dicha bola con 2, que corresponde a la cantidad de goles anotados, tal y como se observa en la Imagen 3. Finalmente, esta pareja obtiene el puntaje total sumando los resultados parciales obtenidos por cada color de bola. En virtud de que esta pareja de estudiantes logra establecer la relación entre los espacios de medida y mediante un proceso tipo multiplicativo encuentra los resultados parciales por color de bola, esta estrategia se clasifica dentro de la subcategoría S₃.

Ahora bien, P8 incurre en dos errores, el primer error ocurre cuando al realizar el registro para sumar los resultados parciales, la pareja pasa por alto dos resultados parciales para dar la solución y el segundo error se presenta al realizar el algoritmo de la suma de los resultados parciales.

En el desarrollo de este desafío se refleja que los alumnos en su gran mayoría emplean estrategias de orden aditivo para resolverlo, esto es haciendo uso de sumas iteradas de cantidades en un mismo espacio de medida. Durante la plenaria se ratificó el uso de esta estrategia para el desarrollo del desafío, solo una pareja de estudiantes se acercó a realizar multiplicaciones y al ser expuesta con los demás compañeros, estos reconocieron que era más conveniente realizar las multiplicaciones que sumar iteradamente tantas veces los valores de cada bola según los aciertos obtenidos. Tal y como se logra apreciar en las intervenciones de los estudiantes.

M: ¿Si hicieron dos goles con la bola azul, cómo hicieron ustedes para saber, la cantidad de puntos?
Empezamos por ahí (la maestra señala el estudiante que levanta la mano), ¿que hiciste?
E: Cogemos el número...por ejemplo el azul, entonces cogemos cuatrocientos diez, dos veces.
M: ¿Cuatrocientos diez?... ¿cuatrocientos diez?, ¿es así? (escribiendo el valor correspondiente a cuatrocientos diez)
E₂: Cuatro mil diez.
M: ¡Ahhh, cuatro mil diez!...(escribe el valor cuatro mil diez) y ¿qué más?
E: Abajo lo vuelve y lo coloca.
 .
 .
M: Si yo hago cuatro goles con el color azul, entonces ¿yo tendría que hacer esto?(escribe en el tablero cuatro mil diez, cuatro veces), ¿sí?, eso es lo que hicieron algunos, ¿cierto...?
E: Sí, yo lo hice así.
M: Pero, en la forma en que las niñas lo hicieron (refiriéndose a P8)¿cómo hicieron?
E: Por el número que hicieron los goles...
M: ¿Por el número que hicieron los goles?, entonces escribieron cuatro mil diez, y ¿cómo hicieron luego?
E: Por cuatro.
 .
 .
M: Entonces son formas que ustedes deben mirar...¿qué es más fácil hacer?, ¿será que es más fácil hacer una suma así? (señalando la suma iterada) o ¿será que es más fácil hacer una multiplicación así? (señalando la multiplicación).
E: La multiplicación.

3.6.1.2. Segundo desafío

En el segundo desafío, el cual se desarrolló en el mismo contexto de anotación de goles se encontraron diversas estrategias empleadas por los estudiantes para su solución, así como también parejas que no lo resolvieron. Es así como las estrategias empleadas por diez parejas de estudiantes (P1, P2, P3, P4, P6, P7, P8, P11, P12 y P13) se clasifican dentro de la subcategoría S₁, dado que los estudiantes no logran reconocer la relación que hay entre los dos espacios de

medida o no desarrollaron estrategias para su solución, puestos en consideración en el desafío 2. Ahora bien tres de estas parejas (P2, P7 y P13), realizan la dinámica de la situación registrando la cantidad de goles atinados pero no atienden a alguna estrategia para resolver el problema, es decir, no relacionan esta cantidad de goles con el valor asociado a dicha cantidad, tal y como se aprecia en la Imagen 4:

Pareja	
Estudiante	Cantidad de goles Anotados
x <i>Michael Montaño</i>	15
x <i>Jander Varguez</i>	15
TOTAL GOLES POR PAREJA	30
TOTAL PUNTAJE OBTENIDO	60

Imagen 4. Estrategia presentada por P7 al resolver el desafío 2 de la Situación 1

Así por ejemplo, esta pareja tal y como se aprecia en la Imagen 4, obtiene el total de goles sumando la cantidad de goles anotados por cada uno y, aunque no se ve con claridad en dicha imagen, esta pareja de estudiantes había colocado que el puntaje total es de 60, quizás porque sumaron las tres cantidades registradas. Ante este procedimiento de los estudiantes la profesora trata de cuestionar porqué lo realizaron así, tal y como se aprecia a continuación:

M: Si por cuatro goles tienen este valor (señalado en el taller a seis mil treinta y dos), ¿treinta, va a tener este valor?(señalando el sesenta).
E: Sí, así es, así es, así es.

Nótese cómo los estudiantes realmente no exponen una justificación clara y válida para indicar porqué surge el 60 y al finalizar la prueba entregan su producción habiendo borrado el 60.

Ahora en relación a P1, P3, P4, P6, P8, P11 y P12, identifican dos espacios de medida pero hacen una relación incorrecta entre estos espacios, es decir, realizan una multiplicación entre el

valor correspondiente a los cuatro goles (6032) y la cantidad total de goles atinados por pareja, dando lugar a una mala interpretación de la relación, tal y como se muestra en la Imagen 5:

Pareja		
Estudiante	Cantidad de goles Anotados	
Daniela	10	
Fernanda	09	
TOTAL GOLES POR PAREJA	39	
TOTAL PUNTAJE OBTENIDO	60.920	

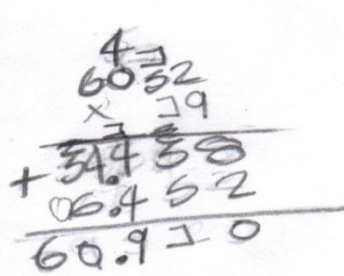


Imagen 5. Estrategia presentada por P11 al resolver el desafío 2 de la Situación 1

Nótese cómo los estudiantes creen que es un problema de multiplicación y no toman en consideración que el valor dado es por cuatro goles y no por unidad de gol, olvidando la condición que es determinante en este desafío y que hace que no se resuelva como tipo isomorfismo de medidas.

Dentro de este grupo de parejas se observa, en las producciones escritas, cometen errores en sus procedimientos algorítmicos básicos de la suma y multiplicación.

Por otro lado P5, P9, P10 y P14 desarrollan una estrategia dentro de la subcategoría S₃, pero cada una con una particularidad en su solución:

Cada uno de los estudiantes de P14 registra la cantidad de goles anotados, uno de ellos anota 7 goles, mientras que el otro anota 11 goles, obteniendo así 18 goles en total, presentándolos en la tabla que se les da dentro del desafío, tal y como se logra apreciar en la parte superior de la Imagen 6:

① Jugador
1 gol
1 gol
1 gol
0 goles
1 gol
1 gol
1 gol
1 gol

6032
6032
6032
6032
3016
27144

② Jugador
0 goles
2 gol
2 goles
2 goles
2 goles
1 gol
1 gol
2 goles

b. Determine el puntaje total obtenido de acuerdo a la cantidad de goles anotados por pareja y anótenlo en la siguiente tabla. Realicen todos los procedimientos necesarios para calcular el resultado final.

24128
+ 30163
27144

Pareja	
Estudiante	Cantidad de goles Anotados
Heidi Mariela	7
Luisa Alejandra	11
TOTAL GOLES POR PAREJA	18
TOTAL PUNTAJE OBTENIDO	27144

Imagen 6. Estrategia presentada por P14 al resolver el desafío 2 de la Situación 1

Ahora, para hallar el total del puntaje obtenido, la pareja sumó iteradamente 6032 y adicionalmente aparece un 3016 que corresponde la mitad de 6032. Esta estrategia deja ver que los estudiantes mantienen una suma iterada del valor de los cuatro goles, relacionando la cantidad de goles anotados con el valor correspondiente a cuatro goles, tal y como lo manifiesta en su proceder:

M: ¿Ustedes como lo hicieron? (señalando a P14)
E: Bueno, yo hice siete goles y luisa hizo once goles, en total fue dieciocho.
M: El total de goles de la pareja fue dieciocho. Y ¿cómo hallaron el total del puntaje obtenido?
E: Sacándole cuatro a todo. Lo hicimos.
M: Ella dice, escuchen bien, sacándole cuatro goles a todos los goles que hicieron, o sea que... digamos... ¿cuántas veces le "saco" los goles?, no sé cómo lo hiciste.
E: Cuatro veces.
M: ¿Cuatro veces?
E: Sí.
M: Entonces, dice que ella sacó cuatro goles, cuatro veces de estos goles (señalando el dieciocho), ¿que valen cuánto?
E: Seis mil treinta y dos (la maestra escribe cuatro y al frente seis mil treinta y dos)
M: Entonces... ¿otro cuatro que vale?
E: Seis mil treinta y dos (la maestra vuelve a escribir cuatro y al frente seis mil treinta y dos)
M: Otros cuatro.
E: Seis mil treinta y dos (la maestra vuelve a escribir cuatro y al frente seis mil treinta y dos). (los estudiantes al unísono repiten con la maestra)
M: Y otros cuatro seis mil treinta y dos (la maestra vuelve a escribir cuatro y al frente seis mil treinta y dos).
Sí... cuatro veces seis mil treinta y dos,

Duván, ¿Cuántos goles hay aquí? (Señalando la relación que se escribió en el tablero) ¿Cuántos goles hay aquí? en estos.
 E₂: Dieciséis.
 M: Pero...¿ella hizo?
 E₂: Dieciocho.
 M: Dieciocho, me hace falta ¿cuántos goles?
 E₂: Dos.
 M: Dos, y ¿cómo hizo para hallar el valor de los dos goles?
 E: No lo he hecho.
 :
 :
 M: ¿Alguien sabe cómo completar esos dos goles?, ¿alguien lo hizo...?
 E: ¡Profesora!, y si parto seis mil treinta y dos a la mitad.
 M: ¡Ahhh!, esa es una muy buena posibilidad. O ¿no es así?...

Finalmente, la pareja realiza la suma correspondiente a cuatro veces 6032 más los 3016, obteniendo el resultado final, tal y como se observa en la Imagen 6. Por lo tanto, esta estrategia se clasifica dentro de la subcategoría S₃.

Una estrategia parecida es empleada por P9 y P10, salvo que ellos no tienen la necesidad de encontrar el valor de una cantidad de goles que no son múltiplo de cuatro, en virtud de que la cantidad total de goles por pareja obtenido y por cada uno de ellos es un múltiplo de cuatro, en este caso 12 y 24, tal y como se aprecia en la Imagen 7:

Fabian 12 de 16 tiros marcó 12 goles
 Brayan 12 goles marcó 12

603296 + 6032
 6032 + 6032
 6032
 18096

b. Determine el puntaje total obtenido de acuerdo a la cantidad de goles anotados por pareja y anótenlo en la siguiente tabla. Realicen todos los procedimientos necesarios para calcular el resultado final.

Pareja	
Estudiante	Cantidad de goles Anotados
Brayan	12
Fabian	12
TOTAL GOLES POR PAREJA	24
TOTAL PUNTAJE OBTENIDO	48

Imagen 7. Estrategia presentada por P9 al resolver el desafío 2 de la Situación 1

En las producciones de estas dos parejas se observa que cometen errores debidos a datos mal utilizados y al desarrollo de los procesos algorítmicos.

Finalmente la pareja 5 desarrolla una estrategia dada por multiplicaciones, toman 6032 y lo multiplican por 7 y al lado derecho realizan otra multiplicación entre 1508 y 3, tal y como se observa en la Imagen 8:

Pareja	
Estudiante	Cantidad de goles Anotados
Juan Pablo Montoya	15
Santiago Jose Figueroa	16
TOTAL GOLES POR PAREJA	31
TOTAL PUNTAJE OBTENIDO	31

$$\begin{array}{r} 6032 \\ \times 7 \\ \hline 49.224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1508 \\ \times 3 \\ \hline 4524 \end{array}$$

Imagen 8. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 2 de la Situación 1

Dado que en la hoja de trabajo no es explícita la estrategia dada por ellos se retomó la argumentación registrada en el video, que se detalla en el siguiente diálogo.

M: Ustedes (la maestra se acerca a P5)
E: (Mostrando la prueba a la docente dicen...) como son siete veces, entonces, lo multiplique por siete.
M: ¿Por qué siete veces?
E: Como hice treinta y un puntos, entonces...multiplique cuatro, ocho, doce, dieciséis, veinte, veinticuatro, veintiocho. Darían siete (relacionando un dedo con cada una de las cantidades) y faltarían tres.
M: ¡Ahh bueno!, y para hallar el valor de esos tres, ¿cómo los haría?
E: Como... dividiendo esto por tres (señalando a seis mil treinta y dos), seis mil treinta y dos dividiéndolo por tres.
M: ¿Por tres?, y ¿porqué por tres?, si son cuatro... el valor total es cuatro goles...
E: (silencio)

De acuerdo a lo expuesto por la pareja se evidencia que toman la tabla del 4 para hallar el valor más aproximado a 31, lo que corresponde multiplicar 4 por 7 y de esta manera multiplican el valor correspondiente a cuatro goles que es 6032 por 7, realizando teóricamente un análisis escalar, dado que determinan que para cada grupo de cuatro goles es 6032 entonces para siete grupos de cuatro goles es 49.224. Terminando el desafío entregan su taller y se ve registrado la segunda multiplicación que está al lado derecho de la Imagen 8. Quizás ellos deducen que por

medio de la división entre cuatro pueden hallar el valor de un gol, esto se deriva de su última intervención en el diálogo, ya que el valor 1508 equivale a un gol y lo multiplican por los tres goles que le faltaban, como se observa en la *Imagen 8*, dado a las estrategia expuestas por *P5*, esta se clasifica en la subcategoría S_3 .

Como se puede observar en los registros, cuando la pareja realiza el proceso algorítmico de la multiplicación de 6032 y 7 presenta un error de cálculo, además le falta realizar la suma de los dos resultados de las multiplicaciones, teniendo aquí un error debido a la falta de utilizar los datos para dar la solución.

De acuerdo a las estrategias observadas en este desafío se refleja que la mayoría de parejas no identifican la relación que hay entre los espacios de medida, realizando una multiplicación entre el valor de los cuatro goles por la cantidad de goles atinados por lo tanto en el desarrollo de la plenaria se hace énfasis en que los cuatro goles tiene un valor de 6032 y, por tal razón, deben averiguar cuál es el valor de un gol.

3.6.1.3. Tercer desafío

En este desafío los estudiantes presentaron diversas estrategias para dar solución a la situación propuesta, las cuales fueron agrupadas de acuerdo a los procedimientos comunes por parejas de estudiantes. Es así como una pareja (*P1*) no logra establecer los dos espacios de medida y realizan operaciones arbitrarias, tal y como se muestra en la *Imagen 9* capturada del video.

$$\begin{array}{r} 173,600 \\ + 12,400 \\ \hline 186,000 \end{array}$$

Imagen 9. Estrategia presentada por P1 al resolver el desafío 3 de la Situación 1

Como se muestra en la Imagen 9, P1 inicia con una suma de 173.600 con 12.400. Esta pareja luego de desarrollar este procedimiento llama a la docente para justificar su estrategia tal y como se logra apreciar en el siguiente diálogo:

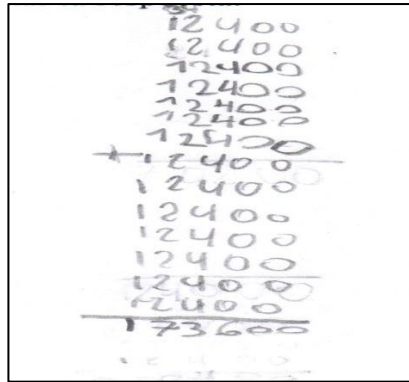
M: ¿Por aquí me llamaron?
E: Profe, son ciento ochenta y seis.
M: ¿Ciento ochenta y seis... goles?
E: Sí.
M: ¿Sí?, ¿ciento ochenta y seis goles?
E: Noooo.
M: Yo les digo ¿cuántos goles tienen que hacer para llegar a ese puntaje?. Ciento setenta y tres mil seiscientos.
E: (Rascándose la cabeza dice) ¡está duro!.
M: ¿Está duro?
E: (No justifican más procedimientos)

Al entregar sus producciones, se evidencia en la Imagen 10 que esta pareja borra el procedimiento anterior y realiza multiplicaciones entre el valor correspondiente a un gol (12.400) con varios valores, los cuales no son muy legibles; el último registrado, es una multiplicación con 31, las otras multiplicaciones las borran, ubicándose así en la subcategoría S₁, además no realiza un buen algoritmo de la operación.

$$\begin{array}{r} 12,400 \\ \times 31 \\ \hline 384,400 \end{array}$$

Imagen 10. Estrategia presentada por P1 al resolver el desafío 3 de la Situación 1

La segunda estrategia, presentada por P3, P8, P9 y P12, está basada en realizar sumas iteradas, sumando el valor de 12.400 tantas veces hasta llegar al valor solicitado que es 173.600.



P9, inicia haciendo una suma reiterada, siete veces el valor correspondiente a un gol, luego aumentan a 12 veces, finalmente suman 14 veces 12.400, dándole como resultado el valor solicitado 173.600 puntos. Pero no relacionan cuántos goles deben hacer, como se evidencia en el siguiente diálogo:

Tal y como se observa, $P9$ realiza sumas iteradas con el fin de llegar al valor solicitado, pero no determina exactamente los goles que deben hacer, por lo cual se evidencia que no hay una correlación entre el valor de cada gol y la cantidad de goles que tienen que atinar. Es así como estas estrategias se enmarcan dentro de la subcategoría S_2 .

Este grupo, compuesto por 9 parejas ($P2, P4, P5, P6, P7, P10, P11, P13$ y $P14$) se clasifican dentro de la subcategoría S_3 , dado que presentan estrategias en las cuales identifican los dos espacios de medida y lo resuelven por medio de sumas iteradas, relacionando los dos espacios de medida como lo presentan $P7, P10$ y $P13$. O bien efectuando una multiplicación tal como lo muestran las producciones de siete parejas ($P2, P4, P5, P6, P8, P11$ y $P14$).

Así por ejemplo $P7$, registra el valor de un gol y al frente coloca 1 gol, en la segunda línea vuelve a colocar el valor de un gol y al frente escribe 2 goles, tal y como se observa en la Imagen 12:

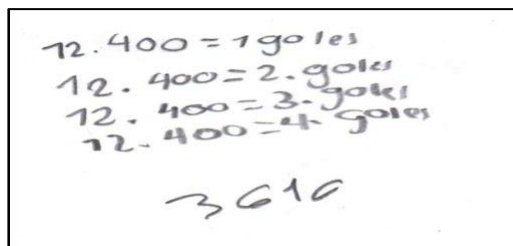


Imagen 12. Estrategia presentada por la $P7$ al resolver el desafío 3 de la Situación 1

Esta pareja llega hasta relacionar 4 goles, pero incurre en un error debido a la falta de verificación en la solución, igualmente $P10$ y $P13$ incurren en este mismo error.

Las otras siete parejas ($P2, P4, P5, P6, P8, P11$ y $P14$) desarrollan una multiplicación entre el valor de un gol 12.400 y la cantidad de goles que deben hacer para llegar al puntaje solicitado, así por ejemplo, $P6, P8$ y $P11$ inician su estrategia realizando sumas iteradas para luego desarrollar una multiplicación, tal y como se muestra en la Imagen 13:

Imagen 13. Estrategia presentada por P6 al resolver el desafío 3 de la Situación 1.

De acuerdo con las estrategias presentadas en el tercer desafío, se observó que aunque 5 parejas ($P3, P5, P6, P9$ y $P14$) llegaron a encontrar la cantidad de puntos solicitados en el desafío, ya sea por medio de sumas o multiplicaciones, solo $P5$ y $P14$, lograron reconocer la cantidad exacta de goles que debían realizar para obtener el valor solicitado; por ejemplo, $P14$ presentó la estrategia que se observa en la Imagen 14:

Imagen 14. Estrategia presentada por P14 al resolver el desafío 3 de la Situación 1

M: ¿Cómo lo hiciste?, ¿cómo llegaste a este valor?
E: Multiplicamos catorce por esto. (Señalando el doce mil cuatrocientos) y nos dio el resultado.
M: Pero... ¿cómo...supiste que era catorce?
E: Pues, nosotras fuimos multiplicando de abajo hacia arriba hasta que llegamos a catorce.
M: ¿Fuimos multiplicando de abajo hacia arriba....?
E: Hasta que llegamos a catorce y nos dio el resultado.
M: ¡Ahh ok!

Así mismo la P5 realiza en una hoja aparte, (la cual no entregan pero queda registrado en el video) multiplicaciones entre el valor correspondiente a un gol por valores inferiores a 14. En la hoja de trabajo registran las dos últimas multiplicaciones entre 13 que les da una respuesta errada, cometiendo un error técnico de cálculo, y luego multiplican por 14 llegando al valor solicitado, como se observa en la Imagen 15:

$$\begin{array}{r} 12,400 \\ \times 13 \\ \hline 37200 \\ 124000 \\ \hline 191200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12400 \\ \times 14 \\ \hline 49600 \\ 124000 \\ \hline 173600 \end{array}$$

Imagen 15. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 3 de la Situación 1

A partir de las soluciones presentadas en este desafío, se observa que la mayoría de estrategias inician haciendo sumas iteradas, tres de ellas sin hacer una correlación entre los espacios de medida, seis parejas logran establecer una correlación entre el valor de cada gol y la cantidad de goles. También se observa que las parejas que realizan una multiplicación establecen la relación entre los dos espacios de medida, pero solo dos de ellas logran llegar a la cantidad de goles que debían atinar para obtener el puntaje. Se concluye que en ningún caso se vio la estrategia del desarrollo de una división, lo cual era el objetivo del desafío.

3.6.1.4. Cuarto desafío

Este desafío fue diseñado en el mismo contexto de toda la situación, pero bajo una condición hipotética: los estudiantes deben definir la cantidad de puntos obtenidos por un estudiante a partir de la comparación con la puntuación de otro estudiante. En la solución de este desafío los estudiantes se enfrentaron a tres problemas de estructura multiplicativa, lo que dio a lugar a distintas producciones por parte de ellos, las cuales se analizan a continuación.

En el primer punto del cuarto desafío, se encontró que *P11*, *P12* y *P13* realizan sumas no lógicas, es decir que toman algunos valores que se presentan en la situación y los operan de forma arbitraria, tal y como se muestra a modo de ejemplo en la Imagen 16:

Puntuación de Jugadores	
Estudiante A	3456 puntos
Estudiante B	2533 puntos
Estudiante C	2654 puntos
Estudiante D	1357 puntos
Estudiante E	20296 Puntos
Estudiante F	20727 Puntos
Estudiante G	7599 puntos

Observa que para dos de los estudiantes (E y F) no se conocen la cantidad de puntos obtenidos cuando realizaron el juego. A partir de esta información realiza los siguientes puntos.

1. Si se sabe que el estudiante E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el estudiante D. ¿Cuántos puntos registró el estudiante E?

Handwritten calculation:

```

23 3
7599
4599
7599
7599
-----
30396
  
```

Imagen 16. Estrategia presentada por P11 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1

Por ejemplo, *P11* realiza una suma iterada de un valor que si bien se toma en consideración en el marco de la situación, en tanto que este valor corresponde a los puntos obtenidos por el estudiante G, en la pregunta se establece una comparación entre los puntajes obtenidos por los estudiantes E y F. Sin embargo, *P11* toma el valor indicado y lo suma cuatro veces, dado que en la pregunta la comparación de los puntajes considerados en ella se hace a través de esta cantidad, es decir la cantidad de veces que suma *P11* el valor que consideran, se debe a la emergencia explícita de la cantidad que permite la comparación entre los puntos de los estudiantes. La manera de proceder de esta pareja deja ver la emergencia de un error debido a un dato mal utilizado. Asimismo, *P12* haciendo uso de la misma estrategia incurriendo en el mismo error, de efectuar un mal procedimiento algorítmico. En cuanto a *P13* presenta una estrategia con un matiz distinto, utiliza diferentes cantidades y, con ellas, realiza sumas sin sentido incurriendo

en los dos mismos tipos de errores arriba mencionados, tal como se puede observar en la Imagen 17:

Siete estudiantes de la sede principal han participado en el juego de goles obteniendo los puntajes que en la siguiente tabla se presentan.

Puntuación de Jugadores	
Estudiante A	3456 puntos
Estudiante B	2533 puntos
Estudiante C	2654 puntos
Estudiante D	1357 puntos
Estudiante E	
Estudiante F	
Estudiante G	7599 puntos

Observa que para dos de los estudiantes (E y F) no se conocen la cantidad de puntos obtenidos cuando realizaron el juego. A partir de esta información realiza los siguientes puntos.

1. Si se sabe que el estudiante E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el estudiante D. ¿Cuántos puntos registró el estudiante E?

Imagen 17. Estrategia presentada por P13 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1

En la estrategia empleada por P13 deja ver el uso arbitrario de las cantidades para atender el problema, al igual que las dos parejas anteriores. Así mismo incurre en errores al hacer uso del algoritmo de la suma, en las cuales no hacen uso posicional de las cifras de acuerdo a las unidades del sistema de numeración decimal (SND), alineando las cifras a la derecha y posiblemente sumando en ese mismo sentido, como también no tienen en cuenta las cantidades de decenas, centenas, unidades de mil, etc., que deben ser “llevadas” de una cantidad a otra para continuar con el proceso.

Por otro lado la estrategia presentada por P9, se basa en realizar una multiplicación entre 3425 y 2, valores que no se encuentran registrados en la tabla de puntuación presentada en este desafío. Nótese como esta pareja de estudiantes toma valores arbitrarios que no se corresponden con cantidades explícitas en el contexto del desafío y realizan un mal algoritmo de la

multiplicación ($3425 \cdot 2$), al multiplicar el 2 con el 5 escribe como resultado 1 sin tener en cuenta las decenas que “lleva” en agrupaciones y desagrupaciones en el SND (ver Imagen 18):

Cuarto Desafío

Siete estudiantes de la sede principal han participado en el juego de goles obteniendo los puntajes que en la siguiente tabla se presentan.

Puntuación de Jugadores	
Estudiante A	3456 puntos
Estudiante B	2533 puntos
Estudiante C	2654 puntos
Estudiante D	1357 puntos
Estudiante E	
Estudiante F	
Estudiante G	7599 puntos

Observa que para dos de los estudiantes (E y F) no se conocen la cantidad de puntos obtenidos cuando realizaron el juego. A partir de esta información realiza los siguientes puntos.

1. Si se sabe que el estudiante E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el estudiante D. ¿Cuántos puntos registró el estudiante E?

$$\begin{array}{r} 3425 \\ \times 2 \\ \hline 6841 \end{array}$$

Imagen 18. Estrategia presentada por P9 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1

En este primer punto, dos parejas ($P2, P7$) no abordan el problema, exponiendo en sus escritos que no entendían, sin exponer estrategias para su solución (ver Imagen 19):

Puntuación de Jugadores	
Estudiante A	3456 puntos
Estudiante B	2533 puntos
Estudiante C	2654 puntos
Estudiante D	1357 puntos
Estudiante E	5408 puntos
Estudiante F	20
Estudiante G	7599 puntos

Observa que para dos de los estudiantes (E y F) no se conocen la cantidad de puntos obtenidos cuando realizaron el juego. A partir de esta información realiza los siguientes puntos.

1. Si se sabe que el estudiante E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el estudiante D. ¿Cuántos puntos registró el estudiante E?

No Entendi

Imagen 19. Estrategia presentada por P2 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1

Por lo tanto, estas seis parejas ($P2, P7, P9, P11, P12$ Y $P13$) no logran reconocer que para atender a este problema se debe centrar la atención únicamente en los puntajes obtenidos por dos de los estudiantes, aquellos sobre los cuales recae la atención y que se establece una relación de comparación entre estos puntajes a partir de cuatro veces; es decir, que por cada

punto obtenido por el estudiante D, el estudiante E obtiene 4 puntos. De este modo es posible afirmar que estas parejas no identifican los espacios de medida ni las relaciones entre ellos, por lo que se emplean estrategias considerando cantidades y operaciones arbitrarias, es así como se clasifican dentro de la subcategoría S_1 .

Ahora bien, $P1, P4$ y $P10$, presentan una estrategia fundamentada en la suma iterada en un solo espacio de medida, esto es, la cantidad de puntos realizados por el estudiante D (1357) y utiliza el término cuatro veces para iterar dicha cantidad extensiva, es decir, que reconocen la variación en un solo espacio de medidas, como se observa en la Imagen 20:

Puntuación de Jugadores	
Estudiante A	3456 puntos
Estudiante B	2533 puntos
Estudiante C	2654 puntos
Estudiante D	1357 puntos
Estudiante E	5428 puntos
Estudiante F	
Estudiante G	7599 puntos

Observa que para dos de los estudiantes (E y F) no se conocen la cantidad de puntos obtenidos cuando realizaron el juego. A partir de esta información realiza los siguientes puntos.

1. Si se sabe que el estudiante E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el estudiante D. ¿Cuántos puntos registró el estudiante E?

Handwritten calculation:

```

  1357
+ 1357
+ 1357
+ 1357
-----
  5428
  
```

Imagen 20. Estrategia presentada por $P1$ al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1

En esta estrategia claramente se identifican la suma iterada en un solo espacio de medida, que es la cantidad de puntos del estudiante D, sin hacer una relación de comparación con la cantidad intensiva. Por lo tanto, estas estrategias corresponden a la subcategoría S_1 .

Finalmente cinco parejas ($P8, P5, P14, P3$ y $P6$) realizan el algoritmo de la multiplicación sin reconocer fundamentalmente los dos espacios de medida, quizá de manera arbitraria por tener un término veces realizan la multiplicación entre los puntos del estudiante D(1.357) y las tantas veces como se indica en el problema (4 veces). En este orden de ideas, estas parejas de estudiantes identifican en el término veces como una multiplicación pero sin

relacionar los dos espacios de medida, ubicándose así dentro de la subcategoría S₁. Lo anterior se ilustra a modo de ejemplo en una de las producciones de estas parejas, ver Imagen 21:

Puntuación de Jugadores	
Estudiante A	3456 puntos
Estudiante B	2533 puntos
Estudiante C	2654 puntos
Estudiante D	1357 puntos
Estudiante E	2428
Estudiante F	
Estudiante G	7599 puntos

Observa que para dos de los estudiantes (E y F) no se conocen la cantidad de puntos obtenidos cuando realizaron el juego. A partir de esta información realiza los siguientes puntos.

1. Si se sabe que el estudiante E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el estudiante D. ¿Cuántos puntos registró el estudiante E?

$$\begin{array}{r}
 1212 \\
 1357 \\
 + 1111 \\
 \hline
 2428
 \end{array}$$

Imagen 21. Estrategia presentada por P8 al resolver el desafío 4 punto1 de la Situación 1

Solo esta pareja incurrió en un error debido a procedimientos algorítmicos básicos en la multiplicación.

El segundo punto de este desafío tiene cierto nivel de complejidad en cuanto a la enunciación de la relación.

Así, por ejemplo, P6 suma dos veces el valor correspondiente al estudiante A (3456). La estrategia de esta pareja deja ver que si bien, toma en consideración las cantidad extensiva que son los puntos obtenidos por el estudiante A, para poder obtener los puntos del estudiante F, no logra identificar la regla de asociación dada por la cantidad intensiva seis veces, hasta el punto que desprecia esta cantidad siendo una cantidad explícita en el problema. Este proceder nos permite afirmar que esta pareja no reconoce la relación entre estas cantidades, realizando una suma que no es coherente con el enunciado del problema, (ver Imagen 22).

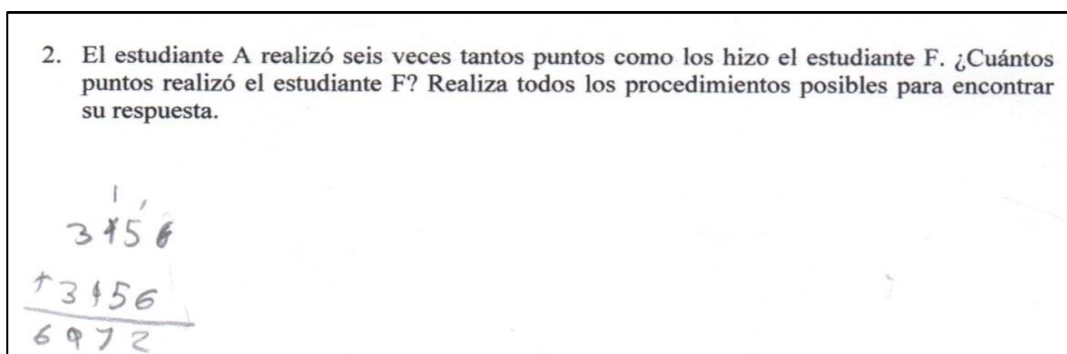


Imagen 22. Estrategia presentada por P6 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1

Ahora bien, una estrategia que se considera distinta a la planteada por la pareja anterior es la planteada por la pareja P9, en virtud de que esta pareja no reconoce el tipo de cantidades que se consideran en este problema: toma los puntos realizados por el estudiante C, puntos que por ningún momento se indagaban en el problema, pero además esta pareja sí usa la cantidad dada en la regla de asociación establecida por 6 veces, pero la usa de una forma equivocada, dado que el uso de esta cantidad no lo hizo a partir de identificar la regla de asociación entre los dos espacios de medida que está dando el término seis veces, es decir no identificó que por cada punto que realizó el estudiante F, el estudiante A hace 6 puntos. Es así como esta pareja realiza una multiplicación entre 2654 y 6 (ver Imagen 23).

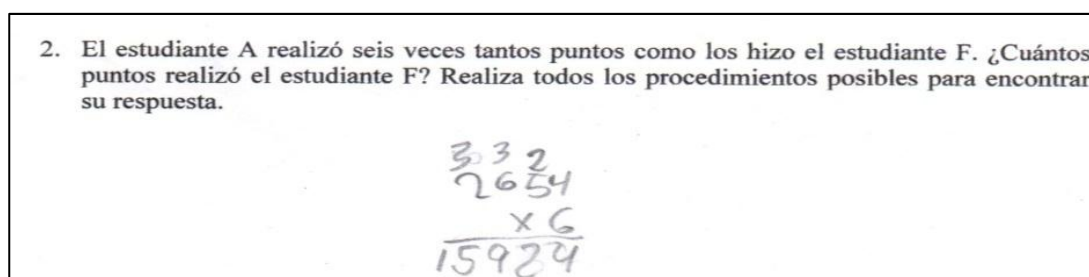


Imagen 23. Estrategia presentada por P9 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1

Por su parte, cinco parejas (P4, P8, P10, P11 y P12), realizan una suma iterada de la cantidad correspondiente a los puntos realizados por el estudiante A (3456) seis veces. Estas parejas distinguen dos cantidades, pero no identifican la relación que se establece entre ellas,

dado que no toman en consideración que los puntos obtenidos por el estudiante A son mayores que los puntos obtenidos por el estudiante F y por lo tanto no es posible que el estudiante F haya realizado más puntos que el estudiante A, tal y como se observa a modo de ejemplo en la estrategia empleada por P10 en la Imagen 24:

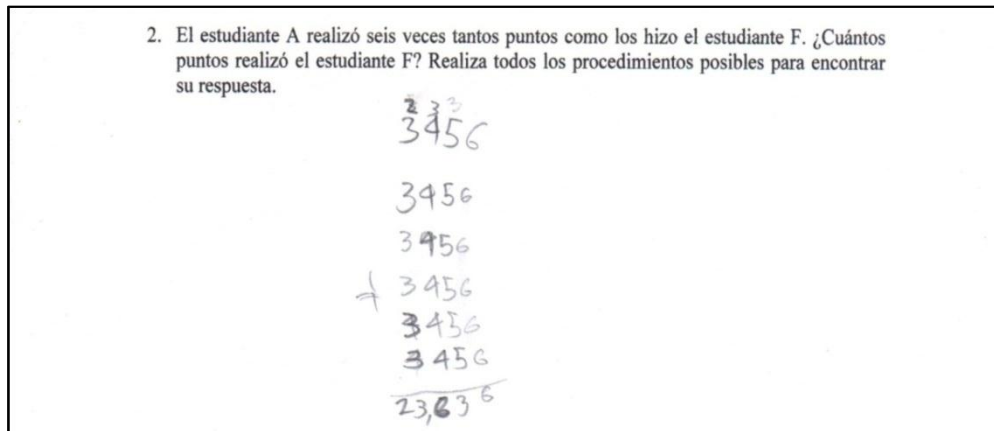


Imagen 24. Estrategia presentada por P10 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1

Lo que dejan ver estas estrategias es que los estudiantes no identifican la regla de asociación dada por el término seis veces y esta falta de identificación no les permite reconocer que es el estudiante F quien realiza menos puntos que el estudiante A, y por lo tanto no es posible que los puntos obtenidos por el estudiante F sean mayores que los puntos obtenidos por el estudiante A, porque van en contradicción con la regla de asociación. Se observa además que al sumar las seis cantidades presentan un error de procedimiento algorítmico básico de la suma, cometiendo un error en el conteo de las centenas y unidades de mil, tal como se observa en la Imagen 24.

Por su lado, tres parejas (P3, P5 y P14) interpretan el problema de la misma manera que el grupo anterior, es decir usan las cantidades, pero sin dar cuenta de lo que significa en términos del problema el seis; es decir, lo usan como dato numérico aislándolo de aquello que evoca sin establecer la relación de asociación, pero resuelven la situación empleando una estrategia basada

en la multiplicación, es así como realizan una multiplicación entre la cantidad correspondiente a los puntos del estudiante A (3456) y 6. En esta estrategia usan las dos cantidades como dato numérico, pero no hay una lectura adecuada de la significación de seis veces, que les indica la regla de asociación permitiéndoles hallar los puntos del estudiante F por medio de una división y no de una multiplicación (ver *Imagen 25*):

2. El estudiante A realizó seis veces tantos puntos como los hizo el estudiante F. ¿Cuántos puntos realizó el estudiante F? Realiza todos los procedimientos posibles para encontrar su respuesta.

$$\begin{array}{r}
 233 \\
 3456 \\
 \times 6 \\
 \hline
 20756
 \end{array}$$

Imagen 25. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 4 punto 2 de la Situación 1

En las estrategias presentadas por estas últimas ocho parejas de estudiantes (P4, P8, P10, P11, P12, P3, P5 y P14) si bien es posible afirmar que distinguen las cantidades, en tanto que identifican que para encontrar los puntos del estudiante F deben usar el dato conocido de los puntos obtenidos por el estudiante A y la cantidad de seis, empero no comprenden la naturaleza de esa relación, lo que los llevó finalmente a producir sumas iteradas o multiplicaciones entre estas cantidades lo que no refleja una relación coherente de acuerdo con las condiciones del problema.

Finalmente, las cuatro parejas restantes (P1, P2, P7 y P13) no resolvieron la situación y aludieron en sus escritos a no entender, sin desarrollar estrategias de solución.

Es así como en este segundo punto las catorce parejas no hallaron la cantidad extensiva que da cuenta de los puntos obtenidos por el estudiante F, dado que tal y como ya se indicó, no

lograron reconocer que son más puntos los obtenidos por el estudiante A que por el estudiante F. Por tal razón, las estrategias de estas catorce parejas se ubican dentro de la subcategoría S_1 .

En el tercer problema del cuarto desafío, al igual que en el anterior, la enunciación de la relación comparativa tiene cierto de complejidad en su interpretación, en tanto que la relación de asociación entre las cantidades de ambos espacios de medida no es una relación explícita y se solicita hallar la regla de asociación en términos comparativos, lo que implica que sea una división de tipo partitivo, para este problema se encontraron diversas estrategias presentadas por los estudiantes para solucionarla.

Es así como $P14$ dentro de su estrategia realiza una resta entre el valor correspondiente a los puntos del estudiante G y los puntos realizados por el estudiante B, identificando las dos cantidades como valores importantes para la solución, lo que permite dar cuenta que esta pareja de estudiantes reconocen las dos cantidades que se ponen en juego; sin embargo, esta pareja no logra identificar que lo que se pregunta es por la regla de asociación que hay entre estos espacios de medida y dicha regla esta dada en términos de una comparación entre las cantidades de estos espacios, a través del término *veces* y no a través de una diferencia tal y como ellos lo identifican, de acuerdo con esto quizás esta pareja este interpretando es que se pregunta por la diferencia entre los puntos de los estudiantes considerados, lo que los lleva finalmente a restar estas cantidades tal y como se observa en la Imagen 26:

3. ¿Cuántas veces tiene el estudiante G los puntos que tiene el estudiante B? Realiza todos los procedimientos posibles para encontrar su respuesta. 5

$$\begin{array}{r} 7599 \\ - 2533 \\ \hline 5066 \end{array}$$

Imagen 26. Estrategia presentada por $P14$ al resolver el desafío 4 punto 3 de la Situación 1

Cinco parejas (P4, P6, P8, P11 y P12) identifican las dos cantidades dadas en el enunciado, pero al contrario de la pareja anterior, realizan una suma entre esas dos cantidades 7599 y 2533, tal y como se presenta en el siguiente registro:

M: ¿Cuántas veces tiene el estudiante G los puntos que tiene el estudiante B? Realiza todos los procedimientos posibles.
Aquí sumaste..., (señalando en la hoja siete mil quinientos noventa y nueve), este es el valor del estudiante G, y ¿este es el valor del estudiante?... (Señalando en la hoja dos mil quinientos treinta y tres).
E: B.
M: ¿Por qué los sumaste?
E: Porque....para que me diera el valor de los dos estudiantes.
M: El valor de los dos estudiantes, ¿eso crees que te lo preguntan aquí? (señalando la pregunta).
¿Esa es la pregunta que te están haciendo?... ¿Qué te preguntan ahí?
E: Que cuánto tiene el estudiante G y cuánto tiene el estudiante B.
M: ¿Eso es lo que te están preguntando?, ¿qué cuánto tiene el estudiante G y cuánto tiene el estudiante B?
E: Sí señora.

De acuerdo con esta estrategia es posible ver la falta de comprensión sobre la regla de asociación por la cual se indaga en el problema, y toman en consideración las dos cantidades explícitas dentro de ella para operarlas, sin hacer una adecuada significación del término veces, proponiendo así una adición entre dichas cantidades.

Por su parte, P10 toma en consideración únicamente una cantidad extensiva, los puntos realizados por el estudiante G (7599) y lo suma seis veces. Posiblemente este hecho se debe a que en el problema anterior se utilizó esta cantidad (6 veces) como regla de asociación. Esta pareja de estudiantes, en su estrategia, deja de lado la otra cantidad, que son los puntos obtenidos por el estudiante B (2533), lo cual es fundamental para hallar la cantidad intensiva por la cual se indaga en el problema, esto es la relación de comparación entre estas dos cantidades, Además, incurre en un error de cálculo al efectuar el algoritmo de la suma (ver Imagen 27):

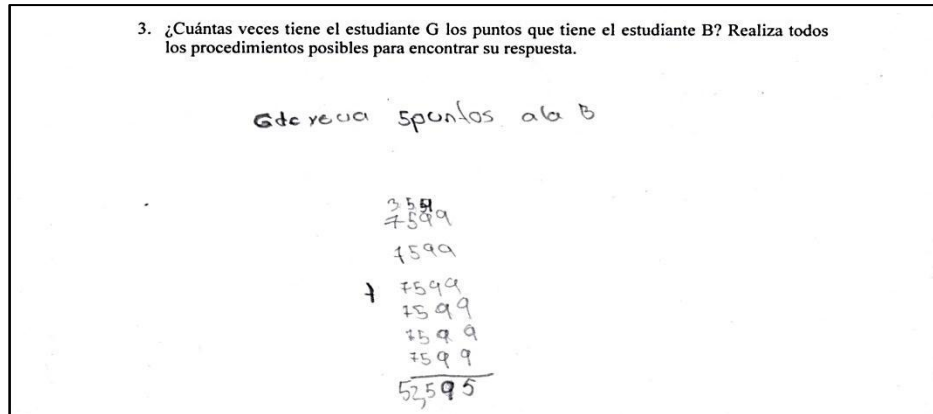


Imagen 27. Estrategia presentada por P10 al resolver el desafío 4 punto 3 de la Situación 1

De la misma manera, P9 destaca una cantidad importante en el enunciado que corresponde a los puntos realizados por el estudiante G (7599), pero determina intuitivamente que son siete veces las que se debe repetir esta cantidad realizando una multiplicación entre 7599 y 7. Cuando se indaga en la estrategia, esta pareja justifica el hecho de hacerlo “a la carrera”, tal y como se deja ver en el siguiente diálogo:

(La maestra luego de leerle el enunciado del tercer problema del cuarto desafío a la pareja P9, pregunta)
M: ¿Por qué hiciste esto? (señalando la multiplicación en la hoja de trabajo)
 ¿Por qué colocaste este número? (señalando el número 7).
E: Mmm..., porque profesora, es que lo estábamos haciendo a la carrera.
M: Porque lo estaban haciendo a la carrera...
 ...entonces recuerda... ¿porque hicieron este así? (nuevamente se señala la multiplicación en la hoja de trabajo).
E: Yo no sé profesora.

Por otro lado cinco parejas (P1, P2, P3, P7 y P13) no comprendieron el enunciado y escribieron en sus producciones “no entendí”, sin hacer algún tipo de procedimiento. Lo anterior refleja que los estudiantes no logran identificar las cantidades expuestas en el problema, ni la relación comparativa por el cual se indaga en el.

Por lo cual seis parejas de estudiantes (P4, P6, P8, P11, P12 y P14) logran identificar los dos espacios de medida considerados en el problema, a saber la cantidad de puntos que tienen los

estudiantes G y B, pero no establecen la relación de comparación entre dichas cantidades la cual está dada por el término *veces*, lo que los lleva a realizar sumas o restas entre dichas cantidades. Dos parejas (P9 y P10), solo llegan a identificar un solo espacio de medida, que son los puntos obtenidos por el estudiante G, lo que los llevan a no reconocer relación de comparación que se intenta establecer entre estos espacios, y las cinco parejas restantes (P1, P2, P3, P7 Y P13) no realizaron estrategias. De lo anterior se puede decir que este problema supone una complejidad para los estudiantes en tanto que, en primera instancia no está explícita la regla de asociación sino que en este caso se indaga por ella, además el término *veces* para ellos pareciera no significar una relación de tipo multiplicativo lo cual hace que se dificulte su comprensión. Todos estos hechos hacen plenamente que las estrategias empleadas por estas parejas de estudiantes para atender el problema se ubiquen en la subcategoría S₁.

No obstante, hay una pareja que emplea una estrategia que no se ubica dentro de la subcategoría S₁, en tanto que ellos logran identificar las dos cantidades extensivas dadas por los puntos del estudiante G y los puntos del estudiante B, la relación de comparación que se hacen entre las cantidades de estos espacios y la naturaleza de tipo multiplicativo de dicha relación, todos estos elementos lo lleva finalmente a obtener la respuesta correcta, tal y como se observa en el siguiente diálogo con esta pareja de estudiantes:

(El estudiante se aproxima a la docente y le muestra su producción y lee el enunciado de situación)
E: ¿Cuántas veces tiene el estudiante G los puntos que tiene el estudiante B? Realiza todos los procedimientos posibles para encontrar su respuesta. Entonces yo multipliqué la del B dos mil quinientos treinta y tres por dos y luego por tres para... y me dio lo mismo que le da a la G. siete mil quinientos noventa y nueve.
M: Pero ahí te está preguntando ¿cuántas veces?, entonces las veces ¿serían tres?
E: Sí, tres.
M: ¡Ahh, listo!

Nótese en el diálogo que cuando ellos dicen “entonces yo multiplique” se reconoce claramente la naturaleza de la relación de comparación que se da entre las dos cantidades; pero, además logran reconocer que es justamente la cantidad intensiva el valor desconocido, en tanto que justamente es la que mediante la estrategia del tanteo pone a variar, esperando que le dé la cantidad del otra cantidad extensiva.

Finalmente la pareja de estudiantes mediante su producción escrita verifica lo que ha realizado, mostrando cómo el producto entre la cantidad de veces encontradas por el método del ensayo y el error, y los puntos obtenidos del estudiante B, le da los puntos obtenidos por el estudiante G, tal y como se observa en la Imagen 28 ubicándose así en la subcategoría S₂:

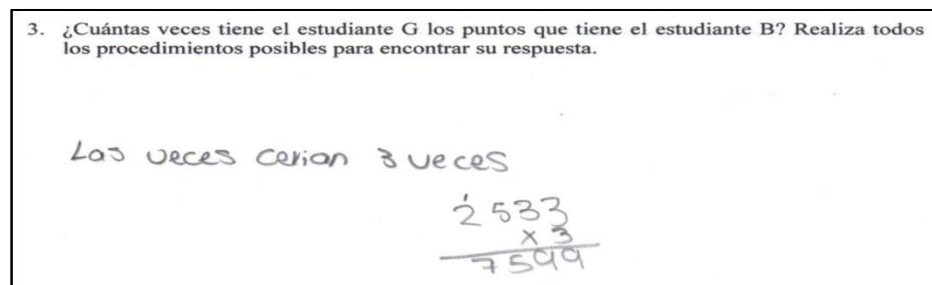


Imagen 28. Estrategia presentada por P5 al resolver el desafío 4 punto3 de la Situación 1

3.6.2 Análisis de la situación 2: Renovando la superficie de la cancha

El desarrollo de la situación tuvo lugar en el aula de clase y luego en la cancha de la institución, esto con el fin de poner en juego las estrategias que los estudiantes describieron en el primer punto de la situación con el propósito de medir las dimensiones de la cancha y determinar el producto para establecer su composición a fin de hallar el área de la misma.

Las estrategias presentadas por las 14 parejas se categorizaron de acuerdo a sus procedimientos de la siguiente forma:

Dos parejas se ubican en la subcategoría G_3 . $P3$ y $P7$ realizan la medición de las dimensiones simples tomando como patrón de medida los pasos de uno de los integrantes de la pareja, determinando así la cantidad de medida del largo y ancho de la cancha y a partir de estas cantidades realizan su composición tratando de obtener el área de la cancha por medio de una multiplicación. Aunque son muy similares las estrategias presentadas por estas dos parejas, hay unos matices diferentes, por ejemplo, $P7$ identifica las cantidades de las dos dimensiones de la cancha y las tiene en consideración para hacer el producto que establece su composición realizando la multiplicación entre 25 y 37, pero en este proceso se observa un error derivado del mal procedimiento algorítmico, tal y como se observa en la Imagen 29:

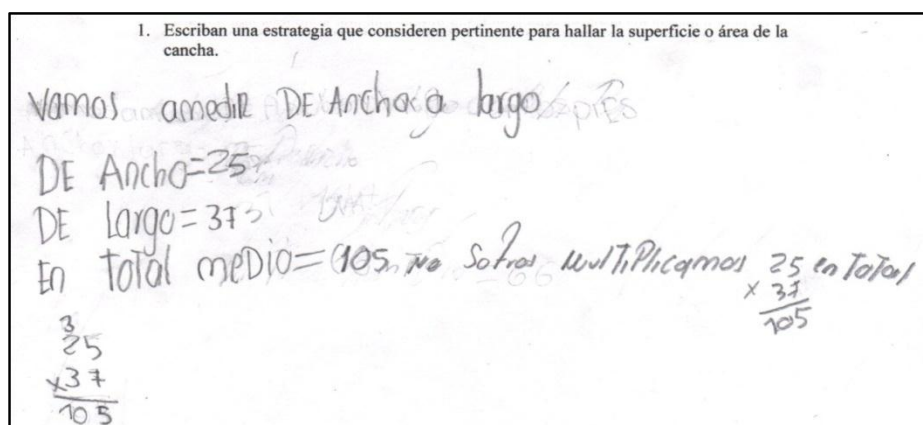


Imagen 29. Estrategia presentada por $P7$ al resolver el punto 1 de la Situación 2

Por su parte, los estudiantes de $P3$, obtuvieron 33 pasos de ancho y 72 de largo, pero en el momento de hacer explícita la relación entre las cantidades aparece una multiplicación entre 33 y 20, tal y como lo indican los estudiantes al parecer fue dado más por un despiste de parte de ellos de no identificar bien la cantidad de la dimensión del largo, pero reconocen este error y hacen la corrección, tal y como se deja ver en el siguiente diálogo:

(La maestra lee la producción de $P3$, e indaga sobre las medidas obtenidas)

...

M: Luego dicen: que la superficie es midiendo sus ambos lados. Y luego toman treinta y tres...y ¿este veinte de dónde sale? (señalando con el dedo la multiplicación de treinta y tres y veinte).
E: Eso es lo que yo no he podido entender. ¡Ahí!, ¡ahí, tenía que ser setenta y dos! (señalando el veinte).
M: ¿Ahí tenía que ser setenta y dos?, ¿no sabes de donde sale este veinte?
E: No.

De acuerdo al desarrollo de las estrategias de estas dos parejas, se puede observar que ambas parejas (P7 y P3) identifican que es necesario tener en cuenta las dos dimensiones de la cancha (largo y ancho) para obtener su área y, una vez se sepa la medida de estas dimensiones, establecer una multiplicación entre estas dos magnitudes para saber la cantidad de superficie de la cancha. Por lo tanto, estas estrategias se ubican dentro de la subcategoría G₃.

Cuatro parejas de estudiantes P4, P6, P8 y P11, se ubican dentro de la subcategoría G₂, con distintos patrones de medida dan cuenta de las cuatro dimensiones de la cancha y suman las cantidades obtenidas, tal y como se observa a modo de ejemplo en la producción de P4:

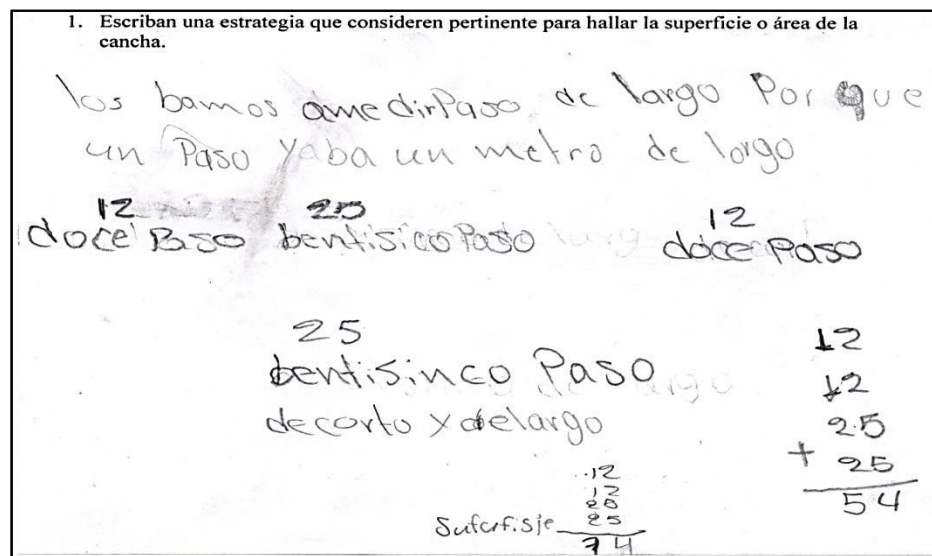


Imagen 30. Estrategia presentada por P4 al resolver el punto 1 de la Situación 2

Nótese como P4 toma como patrón de medida “el paso” y así realiza las medidas de cada una de las dimensiones de la cancha, obteniendo 12 pasos y 25 pasos; aunque no es explícito en las producciones escritas, en su proceder dejan ver que se refieren al ancho y largo de la cancha

respectivamente, tal y como ellos lo escriben “de corto y largo”. Luego, realizan una suma con estas medidas ($12 + 12 + 25 + 25$) indicando que el resultado es la superficie de la cancha (74), sin especificar unidad de medida.

De igual manera *P6, P8 y P11* emplea la misma estrategia que *P4*, permitiéndoles encontrar el perímetro de la cancha y no el área, que es lo que se les pedía. Por lo tanto, de acuerdo con las estrategias expuestas por *P4, P6, P8 y P11* se puede observar que reconocen las dimensiones de la cancha, pero no establecen una relación adecuada entre dichas dimensiones para obtener el área de ella, ya que no tienen en consideración las dos dimensiones simples para realizar el producto de medidas, ubicándose así dentro de la subcategoría G_2 .

Por su parte *P5 y P14*, en su estrategia determinan la cantidad de medida que tiene el largo y ancho de la cancha en centímetros:

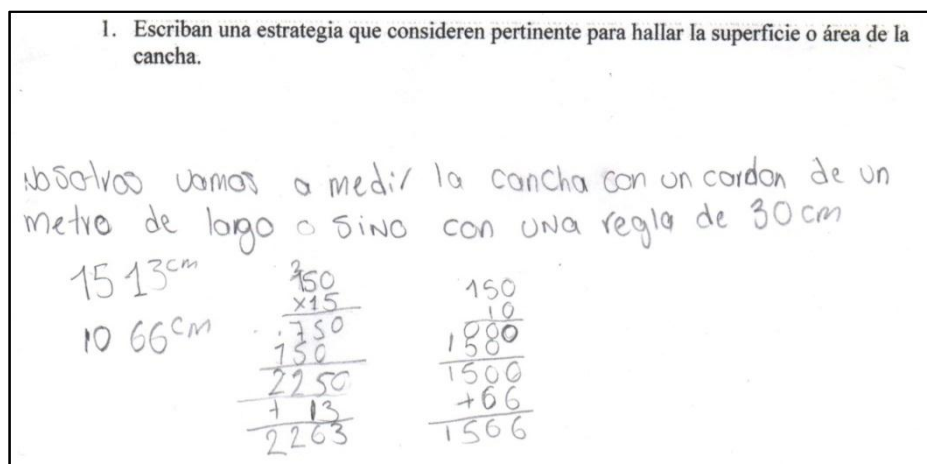


Imagen 31. Estrategia presentada por *P5* al resolver el punto 1 de la Situación 2

Nótese como en la producción escrita de los estudiantes hacen uso de un par de multiplicaciones, lo cual se precisa en el siguiente diálogo.

M: Explicame... dicen que van a medir la cancha con un cordón de un metro de largo o sino con una regla de treinta centímetros. ¿Cómo lo midieron al fin?

E: Lo medimos con un metro de ciento cincuenta centímetros, un metro y medio.

M: ¿Un metro de ciento cincuenta?

E: Sí, sí. (Refiriéndose al instrumento del metro)

M: ¿Entonces este quince qué significa? (señalando el quince de la primera multiplicación)
E: Que quince veces se midió la cancha así, de largo (mostrando las veces que midió el largo con el instrumento del metro).
M: ¿Ese es de largo? (señalando el mil quinientos trece)
E: Sí.
M: ¿Y este diez que significa? (señalando el diez de la segunda multiplicación)
E: De ancho (las veces que midieron el ancho de la cancha)
M: ¿O sea que este resultado?... (Señalando la multiplicación entre quince y ciento cincuenta) ¿Es de multiplicar por ciento cincuenta centímetros y los trece centímetros que te sobran los sumaste acá? (señalando el final del procedimiento de la primera multiplicación)
E: Sí, profe.
M: Y acá son las diez veces (señalando la multiplicación entre diez y ciento cincuenta) y los sesenta y seis que te sobraron acá, los sumaste (señalando el final del procedimiento de la segunda multiplicación).
E: Sí.
M: ¿Calculaste el área, la superficie?
E: No sé...
M: Porque la idea era hallar la superficie o el área de la cancha, ¿lo hicieron?
E: No, profe.
M: ¿Cuál es el área?
E: No sé...

De acuerdo al procedimiento realizado por esta pareja de estudiantes, se observa que la cantidad 1513 está representando 15 veces la longitud del metro (en el que cada metro está compuesto por 150 cms) y 13 cms adicionales, por su parte la cantidad 1066 está representando 10 veces el metro que usaron y 66 centímetros adicionales. Nótese cómo los estudiantes en las multiplicaciones lo que hacen es un esfuerzo por pasar estos metros a centímetros, multiplicándolos por los 150 que tengan cada uno de ellos para obtener así finalmente tal y como ya se indicó el largo y ancho de la cancha en centímetros. Se observa que esta pareja identifica claramente las dos dimensiones y halla con cierta exactitud la medida de cada una de ellas expresada en centímetros, pero no efectúan un proceso que los lleve a encontrar el área de la cancha, como se observa al final del diálogo.

De manera similar P14 hace la misma estrategia, con la única diferencia que como patrón de medida no usa el metro, sino los pasos de uno de los integrantes de la pareja, intentando establecer en centímetros la longitud de cada paso, para finalmente pasar la cantidad de pasos obtenidos del largo y ancho a centímetros.

Al igual que las estrategias empleadas por las parejas anteriores, estas parejas (P5 y P14) también se ubican en la subcategoría G_2 , en tanto que se hallan la cantidad de medida de estas dos dimensiones, pero no se halla el producto de medidas entre ellas a fin de encontrar el área de la cancha.

Por su lado P1, P2 y P9 logran identificar las dimensiones simples que componen la cancha y especifican el valor correspondiente al largo y al ancho de ella de acuerdo al patrón de medida usado (centímetros). Pero al realizar la composición entre estas dos dimensiones realizan una suma entre las medidas de las dos dimensiones que no conducen al producto de medidas.

Veamos a modo de ejemplo la Imagen 32:

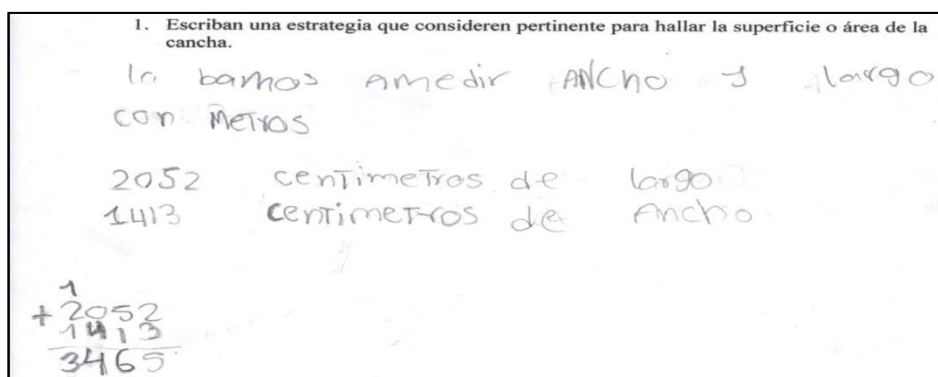


Imagen 32. Estrategia presentada por P2 al resolver el punto 1 de la Situación 2

Conforme a las estrategias expuestas por P1, P2 y P9 dejan ver claramente que reconocen las dos dimensiones necesarias para hacer una relación, que son largo y ancho, pero su proceder no conduce a realizar la relación que conlleve a hallar el área de la cancha, ubicándose así en la subcategoría G_2 .

Las últimas tres parejas (P10, P12 y P13) desarrollan un tipo de estrategia que se ubica en la subcategoría G_1 . Para P12 y P13, si bien identifican que es necesario tomar en consideración las dos dimensiones simples de la cancha (largo y ancho), en su estrategia alteran

el patrón de medida usado para obtener la cantidad de medida de estas dos dimensiones, como se observa en la Imagen 33:

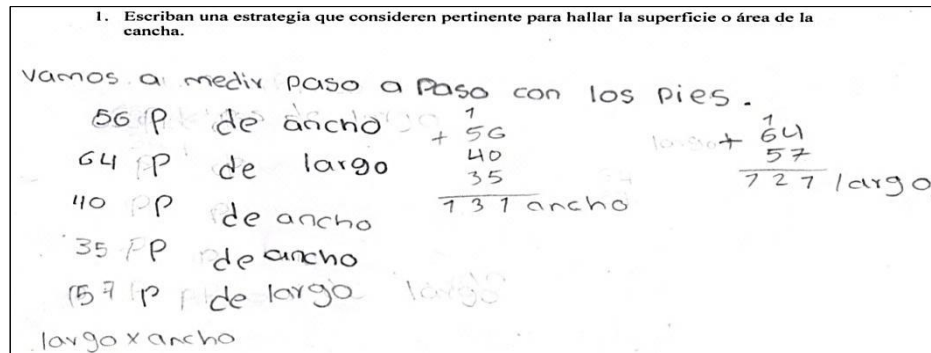


Imagen 33. Estrategia presentada por P12 al resolver el punto 1 de la Situación 2

En este proceder se observa que esta pareja obtiene tres medidas para el ancho de la cancha y dos medidas para el largo, aunque esta pareja usa el mismo patrón de medida, que son los pasos de un integrante de la pareja, no tiene en consideración que los pasos deben guardar la misma distancia uno con respecto al otro, para que no se vea alterado dicho patrón. En el siguiente diálogo, los estudiantes dejan ver que efectivamente alteran el patrón de medida seleccionado:

...

M: ¿Y por qué hay tantas medidas?

E: Porque esas son de la cancha.

M: ¡Por eso!... ¿cuánto mide?... o sea ¿Qué midieron?. Estas medidas, ¿Qué medidas son?

E: De la cancha...del este de acá (señalando con su mano el ancho de la cancha), y del este de acá (señalando con su mano el largo).

M: Ustedes dicen: “nosotros íbamos a medir largo y ancho de la cancha”, pero yo quiero que me expliquen el procedimiento, ¿cómo lo hicieron?

E: Paso a paso.

M: O sea que cincuenta y seis “p”, significa los pasos de ancho y sesenta y cuatro “p”, son los pasos de largo. Y cuando ustedes vuelven a repetir estos cuarenta pasos de ancho, ¿a qué se refieren?

E: Que lo habíamos hecho más cortos.

M: Y esos treinta y cinco pasos de ancho, ¿a qué se refieren?

E: Más cortos.

M: ¡Aún más cortos!... (Hacen movimientos con la cabeza asintiendo que sí), y con estos cincuenta y siete pasos de largo, o sea ¿volvieron a medir el mismo largo?

E: (Hacen movimientos con la cabeza asintiendo que sí)

M: Pero con los pasos ¿más...?

E: Largos.

M: Y luego ¿qué hicieron con este? (señalando las sumas realizadas en su escrito), porque aquí hay varios anchos y dos largos. ¿Qué hicieron con esos resultados?

E: Lo sumamos.

M: Lo sumaron, entonces, ¿ese es el total del ancho? (indicando la suma de las tres cantidades que hacen referencia al ancho).

E: Sí.

M: Y... ¿este es el total del largo? (indicando la suma de las dos cantidades que hacen referencia al largo).

E: Sí.

Este hecho hizo que al medir el largo y el ancho en distintas oportunidades obtuvieran distintas cantidades de medida, tal y como se muestra en Imagen 33. Para finalmente terminar por sumar todas las cantidades que dan cuenta del ancho y todas las que dan cuenta del largo de la cancha.

En las estrategias presentadas por estas dos parejas dejan ver claramente que se hace un uso inadecuado de los patrones de medida en los procesos de medición, dado que constantemente lo están alterando tal y como ya se señaló. Así mismo ninguna de las dos parejas llega a acercarse a obtener el área de la cancha, ya que se limitan simplemente en intentar obtener la cantidad de medida de las dimensiones simples de la cancha sin percatarse de la relación de las dimensiones, dando al ancho una cantidad de medida mayor que al largo de la misma.

Finalmente P10 en su estrategia determina la cantidad de medida del largo y la cantidad de medida del ancho de la cancha utilizando dos patrones distintos, en un caso usan el metro y en el otro usan “los pies” tal y como se logra apreciar en su producción escrita en la Imagen 34:

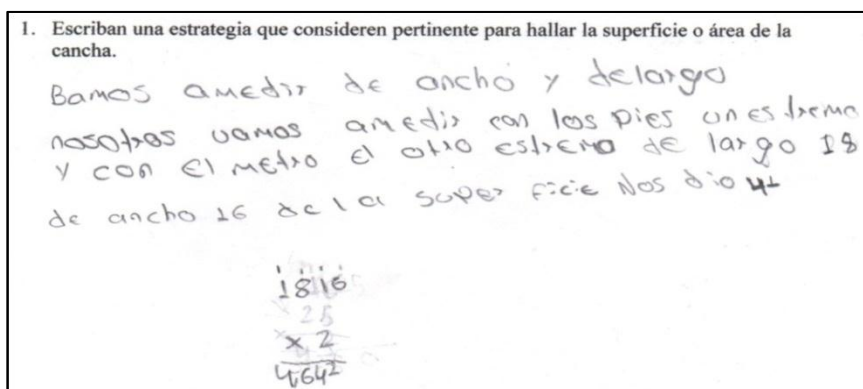


Imagen 34. Estrategia presentada por P10 al resolver el punto 1 de la Situación 2

Una vez los estudiantes obtienen la cantidad de medida de estas dos dimensiones 18 y 16, juntan estas dos cantidades para formar una sola, 1816. Al parecer esta cantidad la multiplican por dos, en tanto que esta surge de dos dimensiones distintas.

Con este proceder se puede identificar un aprendizaje deficiente de conceptos previos para realizar las mediciones y consecuentemente hallar el área.

En el segundo punto de la situación 2, los estudiantes se enfrentaron a una pregunta en la cual ya no debían hallar la composición de las dos dimensiones simples sino que a partir de una de ellas y su composición, encontrar la dimensión simple no dada. De esta manera los estudiantes presentaron diversas estrategias de solución, las cuales fueron agrupadas de acuerdo a los procedimientos comunes dentro de cada subcategoría.

Dentro de la subcategoría G_3 , se presenta a la pareja $P14$, que logra identificar las dimensiones dadas en la situación (una de las simples y la compuesta) y propone una estrategia tal y como se muestra en la *Imagen 35*:

3. Igualmente la rectora solicita las dimensiones y el área de todas las canchas de cada una de las sedes de la institución. Ante esta solicitud la sede Rengifo le ha enviado la información mediante la siguiente ilustración.



Al ver la rectora el informe enviado por la sede, se ha percatado de que está incompleta dado que le hace falta una de las dimensiones de la cancha. Ayúdala a la sede a encontrar la dimensión que hace falta de la cancha a partir de la información presentada en la ilustración.

nosotras multiplicamos de uno hasta el nueve y nos dio el resultado

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

Imagen 35. Estrategia presentada por P14 al resolver el punto 3 de la Situación 2

De esta manera, P14 relaciona el largo de cancha con medidas aleatorias hasta encontrar el factor que verifica la composición (el producto) de las dos dimensiones, tal y como lo manifiestan en el siguiente diálogo:

*M: ¿Por qué nueve?
E: Nosotros fuimos multiplicando de abajo hacia arriba hasta que nos dio.
M: ¿Cómo así?
E: Nosotros multiplicamos este (señalando el dieciocho) del 1 hacia el nueve y nos dio.
M: Y ¿por qué nueve?, ¿por qué no diez, once?
E: Multiplicamos por uno y no nos dio, por el dos y no nos dio, después por nueve y si nos dio.
M: ¿Y qué le tiene que dar?
E: Nos dio ciento sesenta y dos.
M: ¿Le tiene que dar ciento sesenta y dos?
E: Sí.*

Por lo tanto, de acuerdo a su proceder y a la argumentación de la estrategia empleada por esta pareja, se observa que haciendo uso del método del ensayo y error buscan la medida que hace falta en la cancha y, a partir de estas dos cantidades, establecen una relación tipo multiplicativo para verificar la medida del área por medio de una multiplicación. Esta estrategia deja ver que esta pareja reconoce que la cantidad de área de una superficie está dada por la relación multiplicativa de las dos dimensiones simples de dicha superficie. Por lo tanto se clasifica dentro de la subcategoría G₃.

A continuación se presentan todas las estrategias de las parejas que se ubican dentro de la subcategoría G₂, y se describen agrupándolas de acuerdo a los procederes comunes, particularizando en los razonamientos que son diversos.

En la estrategia presentada por P10 se deja ver la presencia de una multiplicación tratando de encontrar una relación para hallar el ancho de la cancha: P10 realiza una multiplicación entre 11 y 1, y cuando se indaga el porqué de su proceder lo justifica así:

*Cuando la maestra se acerca a la pareja P10, inmediatamente ellos intervienen y dicen:
E: Nosotros sumamos uno por uno...*

M: ¿Pero, por qué once? (señalando el once en su taller).
E: Uno por uno, uno; uno por uno, uno.
M: ¿Y por qué once y por qué uno?
E: Once porque... acá (señalando el largo de la cancha)... porque acá eee esteee, porque este hay dieciocho y como este pedazo es más pequeño (señalando el ancho de la cancha) once.
M: ¿Lo hiciste por tanteo?
E: ...Pues sí.
M: ¿Sí?... ¿Y no hiciste ninguna operación?
E: Veo primero hice... la multipliqué, entonces me dio muy alto, entonces, yo la sume... la multipliqué otra vez pero por uno.
M: ¿Pero por qué por uno, no te entiendo?
E: Porque por uno es más bajo entonces puede dar once.
 para mí es once.

En el proceder de esta pareja deja claro que identifica que la cancha tiene dos dimensiones simples y para hallarla centra su atención en el largo de la cancha, y no usa como dato importante el área dada de la cancha para determinar la dimensión que falta, además logran reconocer que la medida de la dimensión simple que hace falta, esta tensionada por el hecho que en la figura se muestra que dicha longitud es menor que el largo (se apoya en el registro figural para hallar la cantidad de la dimensión, por lo que él busca una cantidad que sea menor que el largo), pero no identifican la relación que hay entre la medida de una de sus dimensiones y la superficie de la cancha, infiriendo medidas por simple tanteo, esto se deja ver cuando ellos en el diálogo indican que porque es más pequeño entonces le ponen 11, dificultándoseles dar una explicación lógica ante este resultado (llama la atención la relación multiplicativa quizá como un procedimiento para verificar que la medida que él colocó no supera el largo de la cancha).

En las estrategias presentadas por P3 y P5, hay una particularidad en su proceder ya que proponen realizar una división. Por ejemplo, P3 indica que realiza la división entre 18 y 2 aludiendo a que 9 es la mitad de 18, como se observa en el siguiente diálogo:

M: Ahora aquí, me dice que tenemos que hallar el ancho, sabiendo que el largo es dieciocho y el área es ciento sesenta y dos, sí.
 Ahora, ¿cómo hallaron ese nueve? (señalando el 9 que se encuentra ubicado en el ancho del lado derecho de la cancha).
E: Porque dieciocho, porque dieciocho es... nueve es la mitad de dieciocho.
M: ¿Simplemente porque era la mitad?

E: Sí.

Asimismo P5 realiza una división, pero en este caso la hace entre 162 y 2; en su explicación lo justifica de la siguiente manera:

M: Aquí dice que el área es ciento sesenta y dos metros cuadrados, y el largo dieciocho metros, había que hallar el ancho.

¿Cómo pensaron hacerlo ustedes? (señalando la división entre ciento sesenta y dos y dos)

E: Dividirlo entre dos.

M: ¿Por qué dividirlo entre dos?

E: Porque yo vi estos dos lados. (Señalando las dos dimensiones del ancho)

Entonces traté de dividirlo entre estos dos.

M: ¿Y eso le dio el ancho?

E: No me dio, me dio ochenta y uno.

M: ¿Y cómo sabes que te dio o no te dio?

E: Porque... no sabía... porque aquí decía dieciocho metros (señalando el largo de la cancha) y acá decía ochenta y uno, entonces no sabía.

M: ¿Tú sabes hallar el área?

E: Mmm.. no.

Aunque ambas estrategias tienen un elemento común que es utilizar una división en el que el divisor es dos, los razonamientos dados por estas parejas para realizar esta operación es de naturaleza distinta. Si bien reconocen dos de las dimensiones, en el primer caso el largo y el ancho y que este debe ser la mitad del largo, en el segundo caso reconocen el área y una de las dimensiones simples, pero se relacionan en maneras no adecuadas, además los estudiantes tienen en consideración que la cantidad de medida del ancho de la cancha no debe ser mayor que la cantidad de medida del largo de la cancha; por eso, ellos mismos reconocen en su discurso que la respuesta de 81m para el ancho de la cancha es errada y al no saber qué hacer dejan el trabajo ahí.

Por su parte, P6, P7, P8 y P12, relacionan las medidas propuestas en el problema por medio de una multiplicación, teniendo en cuenta dos de las medidas presentadas en el contexto de la situación, es así como realiza una multiplicación entre el área de la cancha y la medida del largo de esta:

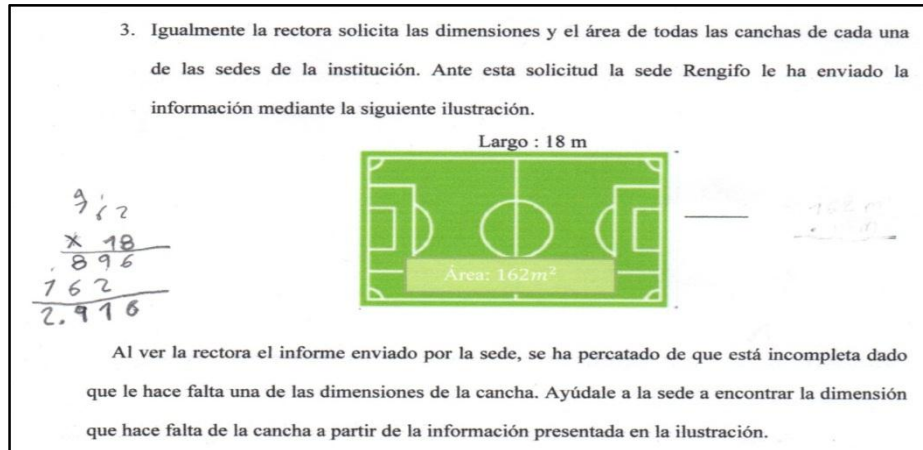


Imagen 36. Estrategia presentada por P6 al resolver el punto 3 de la Situación 2

Al indagar sobre este proceder ellos responden de acuerdo al siguiente diálogo:

M: Para hallar el ancho, hay un área de ciento sesenta y dos metros cuadrados y hay un largo de dieciocho metros, sí. Entonces ¿por qué hicieron una multiplicación aquí?... ¿es una multiplicación?

E: Sí.

M: ¿Con esta multiplicación que van hallar?

E: El ancho de la cancha.

M: ¿El ancho?

E: Sí.

M: ¿Y el ancho es todo esto? (señalando el resultado de la multiplicación)

E: No.

M: ¿Por qué no?

E: Porque nos dio mucho.

M: ¿Les dio mucho?...¿por eso no lo pusieron aquí? (señalado la línea del ancho de la cancha)

E: No.

M: ¿Y no pensaron en otra manera de hallarlo?

E: No.

En el proceder de estas parejas se deja ver que identifican las dimensiones y la composición de estas, pero operan arbitrariamente estas cantidades sin hallar la medida de la dimensión simple que se pregunta (ancho de la cancha).; sin embargo, es importante caer en cuenta de que para estos estudiantes el registro figural se limita a dar una respuesta que desborde la cantidad de medida del ancho de la cancha, dado que la cantidad de medida para el ancho de cancha no debe ser mayor que la cantidad de medida del largo de la cancha, Identificando así la relación entre el largo y ancho.

Las cinco estrategias que se presentan a continuación se clasifican dentro de la subcategoría G_1 , puesto que dentro de sus estrategias no se encuentra una relación correcta entre las cantidades de medida de las dimensiones de cancha, para hallar el ancho de la misma, dada la medida del área y la del largo de la cancha.

P11 realiza una multiplicación entre el largo de la cancha dado y una cantidad que toman para el ancho de la cancha, tal y como se observa en la siguiente Imagen 37:

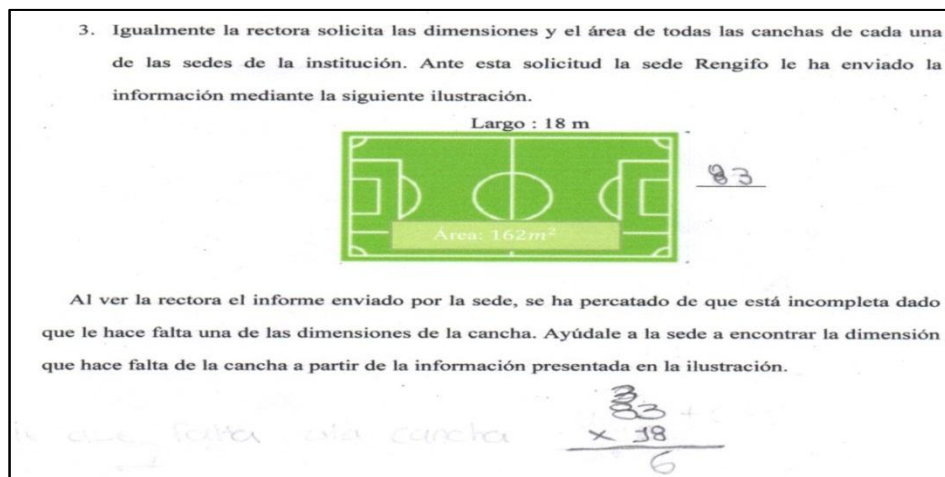


Imagen 37. Estrategia presentada por P11 al resolver el punto 3 de la Situación 2

Al indagar sobre este proceder los estudiantes expresan lo siguiente:

M: Aquí en esta situación, nos dicen que tenemos que hallar el ancho de la cancha y nos dan el largo y el área.
E: ¿Cómo hallaron este ochenta y tres?, ¿de qué manera lo hallaron?
M: Sumando el ancho que medimos.
E: Sumando el ancho que medimos.
M: ¿El ochenta y tres es el ancho de acá atrás? (mostrando el punto anterior de la situación 2)
E: Sí.
M: ¿Y este dieciocho?, ¿lo iban a multiplicar por dieciocho?
E: Sí.
M: Y porque lo iban a multiplicar.
E: Porque pensábamos que era así y nos había quedado malo.
M: ¡Ahh! y ¿lo iban a multiplicar para hallar el área?
E: ¿Sí? ¿Sí?
E: (Con duda responden) sí.

Aunque parezca que el 83 dado por los estudiantes para el ancho de la cancha, no tiene alguna explicación, el dialogo deja ver que sí, dado que retoman el valor asignado del ancho de la cancha del punto anterior y lo usan en esta situación (recuérdese que a esta pareja le había

dado 83 pasos en la medida del ancho de la cancha en el punto 1 de situación 2). Los estudiantes tratan de comprobar que la relación entre las dos dimensiones da el área y como el resultado no es igual al asignado en el esquema asumen que el proceso está mal elaborado. Cabe anotar que para esta pareja, la gráfica no les comunica la relación de la longitud de las dos dimensiones de la cancha.

En el proceder de las parejas $P1, P2, P4$ y $P9$, dejan claro que identifican la medida simple de la cancha que es dada y la medida de la superficie de ella y las toman en consideración para establecer entre ellas una relación de tipo aditivo en unos casos por medio de sumas y en otros casos por medio de restas; a modo de ejemplo, se presenta la Imagen 38:

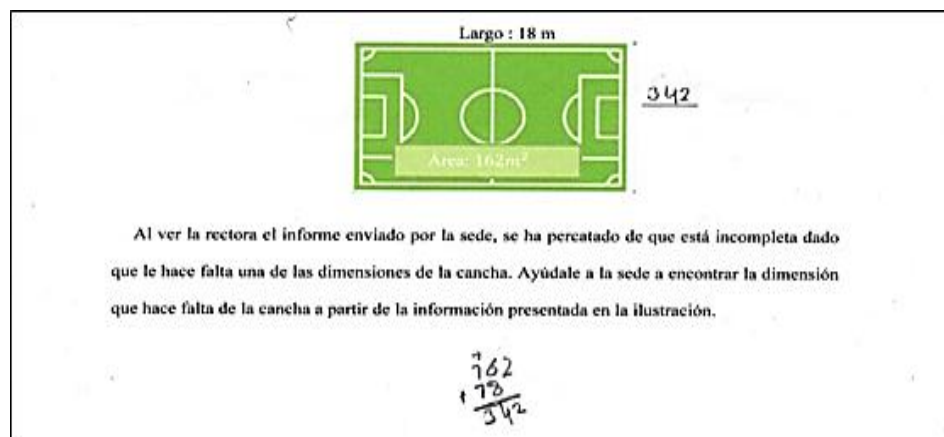


Imagen 38. Estrategia presentada por $P9$ al resolver el punto 3 de la Situación 2

Como se puede observar $P9$ establece una relación aditiva entre la superficie y el largo de la cancha, considerando esenciales las dos medidas dadas en el contexto de la situación para encontrar el ancho de la cancha, en este orden de ideas pareciera ser que el lenguaje gráfico no les comunica información alguna, apareciendo de esta forma completamente neutro, en tanto que la gráfica deja ver que la longitud del ancho es menor que la longitud del largo. Se observa además en la estrategia de esta pareja que no tienen claro el algoritmo de la suma.

Las parejas $P1$, $P2$ y $P4$ realizan una estrategia similar a la anterior con la diferencia que lo relaciona por medio de una resta. Por ejemplo, $P1$ realiza una resta entre 162 que equivale al área de la cancha y 81, dándole como resultado 81. En la plenaria $P1$ lo justifica de la siguiente manera:

La maestra pregunta en plenaria cómo hallarían la medida del ancho de la cancha

E: Restando

M: ¿Restando? Y por qué restando.

...

E: Profe... ciento sesenta y dos menos ochenta y uno

M: Él me dice porque restamos ciento sesenta y dos menos...

E: Ochenta y uno

M: ¿Por qué ochenta y uno?

E: Porque es la mitad.

Obsérvese cómo esta pareja de estudiantes asume que la cantidad de medida del ancho de la cancha es exactamente la mitad que la cantidad de medida del área de ella, razón por la cual proceden de esta forma.

Por su parte, $P2$ y $P4$ realizan una resta entre el largo de la cancha y su área así: $18 - 162$, estableciendo de este modo el ancho solicitado, además incurren en un error de procedimiento algorítmico básico de la resta, en tanto que a un minuendo menor le resta un sustraendo mayor¹⁰, al mismo tiempo no hacen uso posicional de las cifras de acuerdo a las unidades del SND, obsérvese la Imagen 39:

¹⁰ Es importante anotar que para los estudiantes este tipo de operaciones no es válido hasta el momento, dado que el conjunto numérico en el cual ellos están trabajando es exclusivamente de los números naturales, por lo que el resultado de este tipo de operaciones $18-182$, escapa de este conjunto numérico.

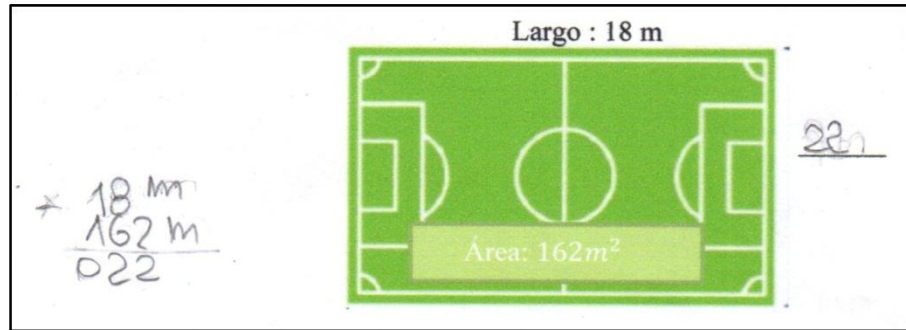


Imagen 39. Estrategia presentada por P2 al resolver el punto 3 de la Situación 2

Finalmente, P13 registra en su producción que el ancho del lado derecho de la cancha es 45m^2 y en el ancho del lado izquierdo es 18m^2 , tal y como se presenta en la Imagen 40, pero no se observa alguna operación que lo conduzca a establecer estas medidas, por lo tanto se indaga a la pareja sobre este proceder, la cual lo justifica como lo describe en el diálogo.

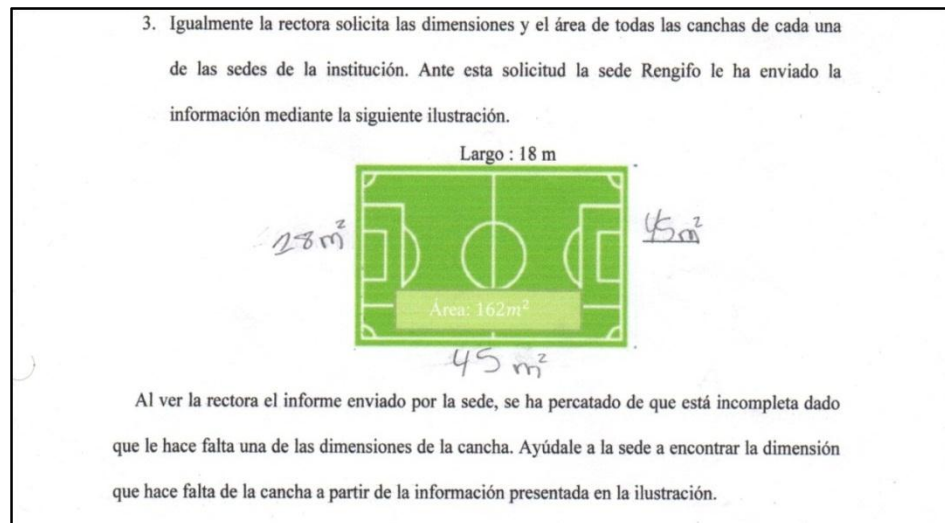


Imagen 40. Estrategia presentada por P13 al resolver el punto 3 de la Situación 2

M: ¿Tenemos que hallar el ancho, cierto?, nos daban el largo que es dieciocho metros y el área que es ciento sesenta y dos metros cuadrados. ¿Por qué cuarenta y cinco (señalando el ancho del lado derecho), ¿y por qué dieciocho? (señalando el ancho del lado izquierdo)... ¿De dónde sacaron el cuarenta y cinco?

E: Es que nosotros lo medimos como nos enseñaron en cuarto. Que cuarenta y cinco acá (señalando el ancho del lado derecho) y cuarenta y cinco acá (señalando el largo de la parte inferior). Y dieciocho acá (señalando el largo de la parte superior) y dieciocho acá (señalando el ancho del lado izquierdo). Bueno el número que nos colocaran acá (señalando el largo de la parte superior) lo colocábamos también allá (señalando el ancho del lado izquierdo).

M: Bueno, entonces porque aquí estaba dieciocho (señalando el largo de la parte superior), ¿colocaste dieciocho acá? (señalando el ancho del lado izquierdo).

E: Sí.

M: Bueno, y el cuarenta y cinco ¿por qué?, de donde sale ese cuarenta y cinco.
E: (Silencio, no justifican esta medida)
M: Yo veo que ustedes hacen una suma (se encuentra borrosa en la hoja de trabajo) ¿y esto de qué es? ¿De dónde salieron estos números?
E: De lo que nosotros medimos en la cancha.
M: ¡Ahhh! ustedes tomaron los valores de acá (haciendo énfasis en el primer punto de la situación 2. 56, 64, 40, 35, 57.)
E: Sí.
M: Y sumaron todo eso y ¿les dio cuarenta y cinco?
E: Sí.
M: Pero cincuenta y seis más sesenta y cuatro da más que cuarenta y cinco, no crees...
E: (Silencio...)

De acuerdo a la exposición realizada por P13, se puede inferir que no hay una claridad en relación con las relaciones de las dimensiones simples de la cancha, dado que no tienen en consideración que la medida del largo de la cancha no puede ser igual que la medida del ancho de la misma. Además infiere un valor de 45 para el ancho ubicado al lado derecho de la Imagen 40, medida según la pareja la obtienen de la medida del ancho de la cancha del punto anterior, lo cual no corresponde a lo expresado en su escrito.

3.6.3 Análisis de la situación 3: Diseño de manillas

En el desarrollo de esta situación los estudiantes se ven enfrentados a un problema de relación multiplicativa, producto de medidas. Para su solución fue común para los estudiantes no realizar algún tipo de procedimiento matemático, sino ejecutar directamente su estrategia con el material de trabajo, con el fin de hallar la cantidad de manillas que se producen de acuerdo a los criterios dados en la situación. No obstante, las estrategias empleadas por los estudiantes tienen matices distintos dados por los argumentos que exponen en el proceso de desarrollar la situación, los cuales se presentan a continuación.

P1, P2, P3, P5, P6, P10 y P12 explicaron en su estrategia inicial que solo podían resultar cuatro manillas debido a que solo había cuatro chaquiras, tal y como se observa en la Imagen 41:

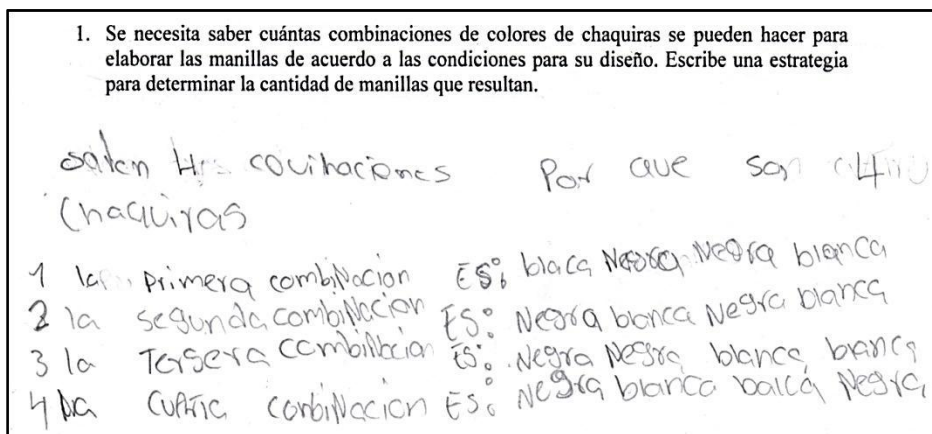


Imagen 41. Estrategia presentada por P2 al resolver el punto 1 de la Situación 3

Las estrategias presentadas por este grupo de parejas tienen en común que asumen que por el hecho de tener solo 4 chaquiras se pueden hacer cuatro combinaciones, es decir, establecen una relación uno a uno entre la cantidad de chaquiras y la cantidad de manillas, obteniendo así cuatro de estas últimas. Sin embargo, es importante resaltar que una vez los estudiantes pasan a la ejecución de su estrategia con el material manipulable entregado por la maestra (16 cordones, 32 chaquiras de color blanco y 32 chaquiras de color negro) arman sobre la mesa las manillas organizándolas una contiguo a la otra para asegurarse de no repetir las combinaciones de las chaquiras, dado que el orden de los colores de las chaquiras tienen relevancia, lo que los lleva a darse cuenta que es posible hacer más de las manillas que inicialmente habían indicado. Lo anterior se puede evidenciar a modo de ejemplo en la Imagen 42:

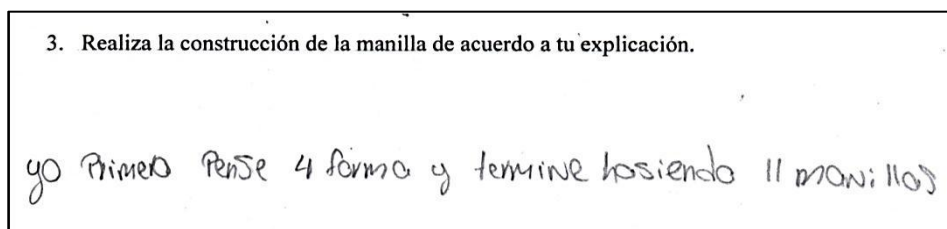


Imagen 42. Afirmación presentada por P5 al resolver el punto 3 de la Situación 3

Estas parejas de estudiantes en su estrategia identifican una sola medida elemental para dar solución al problema, esto es, la cantidad de chaquiras que debe haber en cada manilla, y a partir de ella obtienen el total de manillas posibles. Solo al ejecutar su plan se dan cuenta de que hay más combinaciones posibles.

El siguiente grupo de parejas no expusieron un argumento claro para indicar la cantidad de manillas posibles, solo detallan una cierta cantidad de combinaciones en virtud de considerar que la cantidad de manillas son tantas como lo están indicando; por ejemplo, las parejas P7 y P11 indican en sus producciones que solo pueden salir dos manillas, por su parte las parejas P8, P4 y P14 dicen que salen tres, mientras que las parejas P9 y P13 exponen que salen seis. Inicialmente estas siete parejas indican que se pueden construir la cantidad de manillas que manifestaron en la primera pregunta, pero al realizar una a una las manillas con el material entregado por la maestra, se dan cuenta que salen más de la cantidad dada en sus respuestas. Lo expuesto aquí se puede evidenciar en el dialogo con P14:

M: En este ejercicio tenían que hallar la cantidad de combinaciones de manillas que salen con cuatro chaquiras de dos colores. Inicialmente, ¿Cuántas manillas creen que salían?
E: Nosotras pensábamos que nada más salían dos, pero después seguimos haciendo, seguimos haciendo, haciendo y haciendo, y nos quedaron como diez, pero nosotras no las anotamos todas, porque nosotras las hacíamos y luego las íbamos a anotar al final.
M: ¡Ahhh listo!, o sea ¿ustedes hicieron las manillas?
E: Sí.
M: ¿Y comprobaron que salieron más manillas?
E: Sí.
M: ¡Ok!

Como se puede observar esta pareja de estudiantes solo al hacer uso del material manipulable para construir las manillas, se da cuenta de que salen más combinaciones que las que inicialmente creían; pero con plena certeza no sabían la cantidad total de manillas, tal y como se presenta en el diálogo de la plenaria:

M: Miremos que inicialmente ustedes me decían que... ¿cuántas manillas salían?

E: (Algunos estudiantes toman la palabra y dicen...) cuatro!
M: Bueno...inicialmente me decían que salían cuatro manillas, ¿cierto?
E: Sí.
M: ¿Y ahora cuántas llevan...?
E: Diez.
E₂: Once.
E₃: Doce.
M: Entonces, ¿cuántas manillas será que salen de ahí?
E: Dieciséis.
M: ¿Y por qué dieciséis?
E: Porque yo conté los cordones y hay dieciséis.

Obsérvese que los estudiantes no saben realmente la cantidad total de manillas que salen haciendo las distintas combinaciones posibles; y aunque una pareja de estudiantes afirma que hay 16 manillas, se guían por la cantidad de cordones entregada por la maestra y no hacen las combinaciones posibles.

Ante la segunda pregunta de esta situación, cinco parejas de estudiantes evocan a otra posible combinación que no habían contemplado antes, empero, usando la misma estrategia (ver Imagen 43):

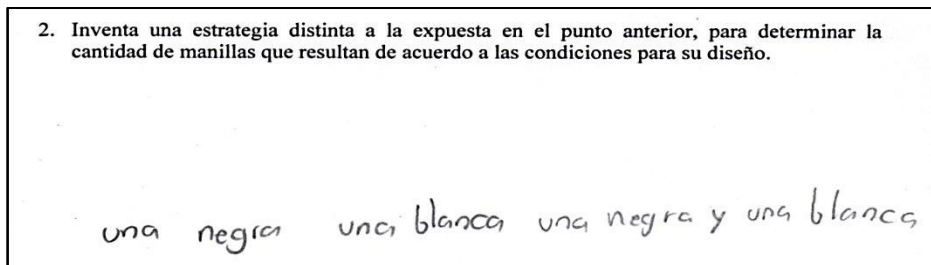


Imagen 43. Estrategia presentada por P14 al resolver el punto 2 de la Situación 3

Por su parte, once parejas no realizan acciones. En ambos casos se refleja la falta de estrategias para atender a la situación.

Ahora bien, cuando se intenta indagar a los estudiantes si tienen algún conocimiento matemático que les permita responder la situación, se observa claramente que no reconocen una manera “formal” de atenderla, tal y como se observa en el siguiente diálogo:

M: ¿Alguien me puede decir si matemáticamente pueden saber cuántas combinaciones salen?..(Silencio).¿qué operación será que uno hace, para saber cuántas manillas salen?
E: Una multiplicación.
E₂: Una suma.
M: ¡Una multiplicación, una suma!... ¿pero por qué una multiplicación o por qué una suma?
E: Multiplicando por cuatro.
E₂: Sumando con cuatro.
M: ¿Quién más me dice?... ¿Cómo se hace matemáticamente la operación?
E: (Silencio)
M: ¿No saben cómo hacerla?
E: (Silencio)

Nótese cómo en el diálogo se hace evidente, que al parecer los estudiantes no logran atender este tipo de situaciones haciendo uso de estrategias propiamente matemáticas, que les permita responder la cantidad total de manillas, esto es, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

De acuerdo con lo expuesto, tanto los estudiantes que argumentan que hay tantas manillas por cantidad de chaquiras por manilla, como aquellos que no dan argumento, hacen uso del material manipulable que se les entrega, pero ninguna pareja llegó a deducir la cantidad total de manillas posibles. Por esta razón y de acuerdo a la naturaleza de las estrategias presentadas por las catorce parejas, se ubican dentro de la subcategoría M₃.

3.6.4 Análisis general de las situaciones

En este apartado se detallará una síntesis general de los análisis descritos en el apartado anterior, esto con el fin de ver cuestiones longitudinales o transversales de las estrategias presentadas por los estudiantes a lo largo de las tres situaciones. De forma sintética, además, en los anexos 4 y 5 se presentan las estrategias empleadas por los estudiantes en cada una de las situaciones, así como los errores emergentes en ellas.

Con relación a la situación de isomorfismo de medidas

En el desarrollo del primer desafío de esta situación se presentó el primer caso de isomorfismo de medida, el de tipo multiplicación. Aunque en las estrategias presentadas por los

estudiantes no representan un esquema análogo al presentado por Vergnaud (2000), esto es, una correspondencia entre las cuatro cantidades que intervienen en el problema, diez parejas realizan la correspondencia entre los dos tipos de cantidades (la cantidad de goles y el valor de la bola). De esta manera, estos estudiantes identifican la regla de correspondencia y la descripción existencial, permitiéndoles establecer una estrategia para encontrar el valor de $f(n)$ dado n , pero generalizan esta correspondencia haciendo una adición reiterada. Además se observa que estas parejas retoman una estrategia que no es propia de la estructura multiplicativa sino de naturaleza aditiva, en tanto que toman una cantidad del mismo espacio de medidas y reiteradamente la suman.

Por su parte, tres parejas de estudiantes obvian la cantidad extensiva, esencial para hallar el puntaje final, esto es, la cantidad de goles anotados. Es así como tienen en cuenta solo la regla de correspondencia de cada color de bola para hallar el total del puntaje, es decir, consideran una anotación por cada color de bola.

Ahora bien, solo una pareja de estudiantes además de identificar la regla de correspondencia dada para cada color de bola y la cantidad extensiva, esto es, la cantidad de goles anotados por cada color de bola, hallan la descripción existencial a partir de una relación multiplicativa entre las cantidades que se relacionan (La cantidad de goles anotados por el valor de cada color de bola) para así determinar finalmente el puntaje total mediante la suma de los productos obtenidos.

Dentro de estrategias, se observó dos errores reiterativos, uno en el proceso algoritmo propio de la suma y otro se presentó al omitir la cantidad extensiva para hallar el puntaje total, es decir, no sumaron el valor unitario tantas veces como lo indica dicha cantidad.

En el segundo desafío se presentó una situación de regla de tres, dentro de las estrategias que presentaron los estudiantes, diez parejas no logran identificar la regla de correspondencia y asumen la descripción existencial dada en el problema como dicha regla, es decir, el valor de las cuatro bolas dado en el desafío lo asumen como el valor de una sola bola, de esta manera realizan una multiplicación entre este valor y la cantidad de goles anotados (segunda cantidad extensiva presentada en el problema), Así, estas diez parejas incurren en un error al efectuar un proceso inadecuado para encontrar el total del puntaje.

Se puede observar también, que en estas diez estrategias, en seis se presenta un error de cálculo al efectuar el algoritmo de la multiplicación.

Ahora bien, las cuatro parejas restantes identifican la descripción existencial dada para la situación y toman esta descripción para realizar una suma iterada tantas veces como la cantidad de goles anotados lo sugiere (en grupos de cuatro). Este tipo de estrategias refleja el empleo de la adición reiterada. Dentro de estas cuatro parejas solo una hace una división para determinar la cantidad intensiva, es decir, el valor de un gol, esto debido a que le faltaba completar para llegar a la otra cantidad extensiva o al total de goles realizados. Así mismo, se observa que en dos de estas estrategias cometen errores al hacer uso del algoritmo de la suma y en tres estrategias se omiten cantidad de goles anotados de tal modo que se consideran solo múltiplos de cuatro, para así evitar hallar el valor de un gol.

La situación dada para el tercer desafío se fundamenta en el desarrollo de una división cuotitiva, esto es, hallar la cantidad extensiva. Dentro de estas estrategias se presentan seis parejas en las que reconocen la cantidad intensiva o regla de correspondencia y este valor lo multiplican por un valor escalar tratando de encontrar por medio del ensaño y error, la

descripción existencial. De otra forma, tres parejas identificando esta regla de correspondencia y haciendo una relación uno a uno entre los dos espacios de medidas, tratan de llegar a la cantidad extensiva con el fin de cumplir con la descripción existencial. Dentro de estos procedimientos se identificaron en cinco estrategias un error debido a la falta de verificación para llegar a la solución de la situación y así comprobar la descripción existencial.

De una manera similar cuatro parejas suman iteradamente el valor de la unidad hasta llegar al valor solicitado, con la diferencia que estas parejas no hacen la correlación partiendo de la regla de correspondencia. Solo una pareja incurre en dos errores, uno debido a la inferencia no válida lógicamente en el momento de pasar de una suma iterada a la multiplicación y el segundo es que no verifica la operación para dar la respuesta a la situación.

Por otro lado solo una pareja no logra identificar la regla de correspondencia y por tanto no determina la cantidad extensiva que interviene en la descripción existencial, es así como realiza operaciones arbitrarias entre las cantidades dadas en la situación, esto es $f(1)$ y $f(n)$. Por lo tanto en esta estrategia se presenta un error debido al uso de procesos inadecuados.

Es importante señalar que al enfrentar este desafío en ningún caso las parejas de estudiantes manifestaron estrategias que pusieran en consideración realizar la división de tipo cuotitivo.

En el desarrollo del cuarto desafío se identificó que la expresión verbal dada por el término *veces* se comprenden como un tipo de multiplicación. En el primer problema de este desafío se observó que cinco parejas de estudiantes asumieron una multiplicación, entre la cantidad intensiva (el valor de $f(1)$) y la cantidad extensiva, pero no identificaron significativamente los dos espacios de medida.

Las nueve parejas restantes no lograron identificar la regla de asociación, debido a que estas expresiones son confusas en los estudiantes puesto que esta regla puede interpretarse de distintas formas, de ahí a que conlleve a que no identifican la relación entre las cantidades involucradas dentro de la comparación multiplicativa (los puntos obtenidos por el estudiante D, respecto a los obtenidos por el estudiante E), lo cual lleva a estas parejas de estudiantes a realizar operaciones arbitrarias entre la cantidad escalar y la extensiva. Tres de estas parejas toman la cantidad extensiva y la suman tantas veces como lo indica el termino veces, dejando de lado la variación entre las dos cantidades, esto por supuesto es propio de estrategias de tipo aditivo.

Dentro de estas estrategias se observó que prevalecen errores en los procesos algorítmicos de sumas y multiplicaciones y hacen uso de datos que no hacen parte de la situación.

En el segundo problema de este desafío los estudiantes no identificaron la regla de asociación dada por la expresión verbal, ni lograron identificar que se les preguntaba por la cantidad extensiva, ante lo cual realizan operaciones arbitrarias entre el escalar y $f(n)$, esto se observó en tres estrategias. Otras cinco parejas asumen una adición iterada de $f(n)$ tantas veces como la cantidad escalar lo denota, lo cual dejó ver que estas cinco parejas no comprendieron que el puntaje obtenido por el estudiante A era mayor que el puntaje obtenido por el estudiante F. Por su parte una pareja realiza operaciones arbitrarias sumando dos veces $f(n)$, otra pareja toma datos no registrados dentro del problema y lo multiplica por la cantidad escalar, y las 4 parejas restantes no desarrollaron ninguna estrategia.

Lo anterior deja ver la complejidad que presentó para los estudiantes este problema, complejidad que parte de no haber identificado la regla de asociación. Así mismo se identificó

que ocho parejas presentaron errores debidos a realizar inferencias no válidas tales como asumir una multiplicación entre $f(1)$ y $f(n)$ para hallar la cantidad extensiva o realizar sumas iteradas de $f(n)$ y en cuatro de estas últimas estrategias se encontraron errores en el momento de realizar los procesos algorítmicos de la suma y la multiplicación.

En el tercer problema de este desafío, en el cual se indagaba por el valor de $f(1)$, se encontró que trece parejas no establecieron la relación comparativa que se presenta entre los puntos obtenidos por el estudiante G y por el estudiante B, por lo tanto, no identificaron que en el problema se pregunta por la cantidad escalar dada la descripción existencial. De estas parejas, cinco de ellas desarrollaron una suma entre las cantidades presentadas (n y $f(n)$); una pareja realizó una resta entre estas cantidades; otra optó por desarrollar una suma iterada del valor de $f(n)$ seis veces, y otra pareja realizó una multiplicación entre la cantidad extensiva (el valor de n) y un valor escalar arbitrario. Las cinco parejas restantes no realizaron ninguna estrategia para solucionar el problema.

De este modo, ocho parejas de estas trece que realizaron algún procedimiento para intentar solucionar el problema presentan errores debido a que dichos procedimientos son inadecuados, además de este error otros presentes fueron el uso de datos que no corresponden a la situación y el empleo inadecuado del algorítmico de la multiplicación.

Finalmente la pareja restante sí logró identificar la descripción existencial dentro del enunciado del problema, y reconoció que se le preguntaba por la cantidad escalar, ante lo cual realizó una multiplicación entre la cantidad extensiva y valores escalares arbitrarios, comprobando la validez de cada escalar por medio de ensaño y error hasta lograr obtener el correcto.

Con relación a la situación de producto de medidas empleando magnitudes geométricas

En el análisis de las estrategias de esta situación se observó que en su gran mayoría (once parejas) identifican las dimensiones simples en el plano geométrico, haciendo uso de unidades de medida antropométricas, a saber, los pies, pasos, como también el metro. Dentro de estas estrategias solo dos parejas establecen una relación multiplicativa entre las dos dimensiones simples para encontrar la dimensión producto, por su parte, las nueve restantes (de estas once) aunque identifican las dimensiones simples de la cancha (largo y ancho), cuatro de estas parejas hallan el perímetro de la cancha, tres parejas realizan una suma con las dos dimensiones simples y las últimas dos parejas no realizan ninguna relación entre las cantidades simples. De acuerdo a lo anterior se puede deducir que nueve parejas de estudiantes no determinan que la medida de la superficie es el producto de las dimensiones simples, teniendo una confusión entre el concepto de longitud y superficie.

Por su parte, las tres parejas restantes no lograron identificar las dimensiones simples de la cancha presentando además errores en sus procesos de medición, dado que no le dan un significado al patrón y a la unidad de medida, alterando constantemente los patrones utilizados por ellos y quedándose con unidades de medida antropocéntricas, sin tener cuidado del tamaño de las unidades.

De la misma manera que en la situación anterior, estas estrategias presentan errores por el empleo de procesos inadecuados, errores en el momento de realizar procesos algorítmicos de la suma y la multiplicación, e involucrar cantidades que no se presentan en la situación. Además se puede precisar que los estudiantes no tuvieron un proceso de estimación tanto de la longitud como del área de la cancha que dejen ver un avance en el proceso de medición de estas.

En el segundo punto de esta situación, en el que el objetivo es hallar una de las dimensiones simples (el ancho de la cancha), cuando se conoce la otra dimensión simple y la dimensión producto, se observó que solo una pareja logra identificar estas cantidades y a partir de una multiplicación, usando el método de ensayo y error, logra encontrar la dimensión simple solicitada.

Por su parte, una pareja toma en consideración la dimensión simple dada y la opera con una medida arbitraria que involucran en el problema, dos parejas hallan la mitad del largo de la cancha y asumen el resultado como el ancho de ella. Cuatro parejas relacionan las medidas dadas en la situación por medio de una multiplicación, pero se identifica que logran una comparación entre las dos dimensiones, es decir, la relación entre el más largo y el más corto, reconociendo que el resultado obtenido no corresponde con el ancho de la cancha, por lo que la descartan como posible respuesta, empero no realizan ninguna otra estrategia.

Las seis parejas restantes, no identifican las dimensiones simples de la cancha, puesto que toman las medidas dadas en la situación y las relacionan por medio de sumas y restas para obtener el ancho de cancha solicitado. En ambos casos (tanto los que suman como los que restan), no se apoyan en el registro figural para reconocer que la dimensión faltante debe ser de menor longitud que el largo de la cancha.

Ante las trece últimas estrategias expuestas, se observa que presentan un error cuando realizan un proceso inadecuado que les permita dar solución a la situación, además cuatro de ellas incurren en errores de procesos algorítmicos de la suma, resta y multiplicación, evidenciando con esto, que no desarrollaron procesos de estimación de las medidas de la dimensión dada y del área, para poder hallar la medida de la dimensión faltante.

Con relación a la situación de producto de medidas

Para el desarrollo de esta situación se presentó una única estrategia por parte de las catorce parejas de estudiantes, la cual fue emplear el material manipulable para elaborar las manillas y por lo tanto indicar la cantidad resultante. Es así como el uso del material tangible dado a los estudiantes fue fundamental para obtener sus respuestas.

Es importante resaltar que, por un lado, ninguna de las parejas de los estudiantes dio la cantidad total de manillas que resultan de acuerdo a las condiciones de la situación, y por otro, que dado a las estrategias empleadas en el desarrollo de esta situación no se presentó errores.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones y algunas reflexiones que se derivan de los análisis de las estrategias desarrolladas por los estudiantes en la prueba de estructura multiplicativa, centrando la atención en aquellos aspectos que responden a la pregunta del trabajo de indagación, esto con el propósito de responder a cada uno de los objetivos específicos que se trazaron para dar cuenta del objetivo general.

4.1 Conclusiones y reflexiones

De acuerdo con los objetivos, tanto específicos como el general, planteados en este trabajo, se presentan las siguientes conclusiones:

En relación con el primer objetivo específico

- La documentación curricular y didáctica permitió reconocer que los problemas de estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad no solamente se ciñen a problemas de multiplicación o división, sino que más allá de esto, hay toda una complejidad semántica que amerita y necesita ser analizada por los maestros, lo que permite reconocer, en principio, que en buena parte de los problemas de estructura multiplicativa no hay una relación ternaria entre cantidades, sino que se presentan cuatro cantidades que se relacionan en tanto problemas de isomorfismos de medidas, lo que hace posible abordar el estudio de la variación y el cambio para relacionar este tipo de situaciones con los casos más simples de proporcionalidad directa, y con ello, las razones, las proporciones, las fracciones, entre otros elementos (Vergnaud, 2000). Tal reconocimiento pone de relieve, por un lado, la limitada presentación que se hace cuando la multiplicación se aborda como una suma iterada, y por otro lado, que dependiendo de la forma como se relacionan estas cuatro cantidades, se abren otras clases de problemas, a saber: de división cuotitiva, división partitiva, regla de tres y los de multiplicación; lo cual, sin lugar a dudas, tensiona las formas como son abordados por los estudiantes.

- Así también, el análisis de los problemas de estructura multiplicativa en el referente didáctico presentado en este trabajo, permitió identificar que hay otros tipos de problemas, los de comparación multiplicativa y producto de medidas, los cuales tampoco deberían ser abordados desde el tradicional modelo de sumas iteradas, aun cuando en estos últimos, se presenta una relación exclusivamente ternaria. Esto se fundamenta en que abordar estas clases de problemas

desde este modelo dificulta, por ejemplo, establecer relaciones entre la multiplicación y casos de combinación, entre el área y el producto de medidas lineales, entre el término n veces y la razón, entre la multiplicación y la razón, entre multiplicación y la división, otros muchos aspectos. En general, limitar el abordaje de los problemas de estructura multiplicativa al modelo de multiplicación de sumas iteras, presenta, desde todo punto de vista, más obstáculos que bondades.

- De la misma manera, el estudio de estos referentes permitió reconocer que dependiendo de la manera cómo se dispongan las cantidades en un problema de isomorfismo de medidas estas asumen un status diferente, es decir, no todas las cuatro cantidades en estos problemas son de la misma naturaleza, en tanto que unas pueden ser extensivas y otras intensivas; incluso, que las relaciones que se manifiestan entre esas cantidades son distintas, unas existenciales y otras de correspondencia (Puig & Cerdán, 1999). El reconocimiento de estos aspectos son vitales para comprender, por ejemplo, las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando en un problema se les pregunta por una u otra cantidad, pues, tal y como se puso de manifiesto en las producciones de los estudiantes, no es lo mismo preguntar por la cantidad extensiva que por la intensiva.

- Otra conclusión a considerar, es que cuando se puso en una dialéctica la propuesta curricular y la didáctica en este trabajo adoptadas para el estudio de la estructura multiplicativa en los primeros grados de escolaridad se puso de manifiesto la coherencia que guardan entre sí, dado que las orientaciones expuestas en los Lineamientos en torno a los modelos para la enseñanza de la multiplicación se articulan tanto con los problemas de isomorfismo de medidas, con los de producto de medidas, como con los de comparación multiplicativa. Así mismo, estos referentes permitieron identificar que la enseñanza y el aprendizaje de la estructura multiplicativa

es un asunto transversal, tanto entre los distintos tipos de pensamiento matemático señalados en los documentos de política pública nacional, como entre los distintos grados de escolaridad; desde esta perspectiva el abordaje de esta estructura no es un asunto exclusivo ni del pensamiento numérico ni de los primeros grados de escolaridad.

- En relación a las dificultades y errores, el estudio del referente didáctico permitió poner en consideración aquellos errores producto de diversas dificultades que son frecuentemente sistemáticos en los estudiantes al resolver problemas propuestos, lo que permite usar esta información como un recurso valioso para potencializar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general y de la estructura multiplicativa en particular en la Educación Básica Primaria.

En relación con el segundo objetivo específico

- En el diseño de la prueba se logra cristalizar gran parte de los elementos teóricos recogidos fruto de los referentes estudiados, lo que posibilitó que en la prueba se exploraran los distintos tipos de problemas de estructura multiplicativa dentro del isomorfismo de medidas, productos de medidas y comparación multiplicativa. De este modo, haber contemplado en el diseño la tipología de problemas señalados dio importantes elementos para prever posibles estrategias de solución para dichos problemas, lo que a su vez favoreció el análisis de las estrategias presentadas por los estudiantes.

- La puesta en juego de situaciones contextualizadas en el diseño de la prueba y el acercamiento de los estudiantes a resolver estas situaciones en problemas recreados, posibilitó procesos de pensamiento diversos e impulsó a estos a emplear estrategias informales y de sentido común para abordarlos, despertando en ellos la creatividad, lo cual se vio, por ejemplo, de forma preponderante en la situación 3, “*diseño de manillas*”, como también en la situación “*renovando*

la superficie de la cancha”. En general, el abordaje de estos problemas desde un escenario real permitió a los estudiantes ser creativos y desarrollar la capacidad de analizar el problema de manera más asequible. A su vez esto, atiende al llamado que hacen desde los documentos de política pública en trabajar las matemáticas a partir de situaciones contextualizadas para el desarrollo de los pensamientos matemáticos y procesos generales de aprendizaje.

- Tal y como se enuncia en el referente didáctico, conocer sobre las dificultades y los errores es una valiosa fuente de información para la planeación de los maestros, por lo tanto, esto se convierte en información valiosa para establecer estrategias didácticas que permitan hacerle frente.

En relación con el tercer objetivo específico

Se exponen a continuación algunas reflexiones didácticas, las cuales surgen, principalmente, del análisis de las estrategias presentadas en la prueba, para aportar elementos que colaboren en la planeación curricular de la IEJI en torno a la enseñanza de la estructura multiplicativa.

- El desarrollo de este trabajo permitió reconocer que la planeación curricular de la Institución Educativa Jorge Isaacs (IEJI) en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la estructura multiplicativa en los primeros grados de escolaridad, la cual se concretiza en el plan de aula (ver anexo 7, 8 y 9), pone al margen los aportes generados tanto por la didáctica de las matemáticas interesadas en este asunto, como por las orientaciones curriculares generadas por el Ministerio de Educación Nacional. En efecto, ello es así en tanto que se aborda la multiplicación desde el modelo de sumas iteradas, como una relación exclusivamente ternaria, aún en los casos en los que realmente es una relación cuaternaria, separada de la división, con énfasis en los

procedimientos algorítmicos y en la mecanización de las tablas de multiplicar, sin relación con el estudio de las razones, la proporción y proporcionalidad, y aislada del estudio de fenómenos de variación y cambio, de combinación en que el orden es relevante, y de aspectos métricos, y por tanto, con el desarrollo del pensamiento variacional, estocástico y métrico.

- Aunque en la planeación curricular de la IEJI, se toma en consideración los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, y se nota un esfuerzo por integrar la formulación, el análisis y la resolución de problemas de multiplicación en ambientes contextualizados, en dicha planeación no se hace una alusión a los tipos de problemas que se deben abordar para el estudio de estructura multiplicativa, fundamentados en elementos conceptuales y curriculares que ayuden a nutrir y redimensionar la planeación, posibilitando formas de aprendizaje más enriquecedoras para los estudiantes sobre este asunto.

- Así mismo, la planeación curricular debe permitir generar ambientes que se potencialice las diferentes formas de representación de problemas de estructuras multiplicativas, tales como, expresiones verbales, simbólicas, gráficas, entre otras, esto conduce a que los estudiantes busquen regularidades en sus estrategias de tal manera que puedan formular y validar las soluciones.

- Dentro de la disposición curricular se deben reconocer los elementos presentados en el marco de referencia conceptual y retomarlos, dado que, las operaciones de multiplicación y división no se deben enseñar de forma aislada, y en este sentido, empezar a hacer las articulaciones entre ellas, haciendo explícito las relaciones y diferencia que hay entre estas operaciones, propias de una misma estructura, la multiplicativa.

- Es preciso anotar que los estudiantes le dan mucha relevancia a expresar por medio de sumas iteradas situaciones en las cuales encuentren una relación de tipo multiplicativo, ante

esto los docentes deben potencializar esta estrategia dándoles la posibilidad de analizar la forma en cómo co-varían las cantidades a partir de una relación cuaternaria (en el caso de los problemas de isomorfismos de medidas), de tal manera que le permita los estudiantes avanzar hacia estrategias de tipo multiplicativo tales como: el análisis escalar, el análisis funcional o el empleo de las propiedades de linealidad. Así mismo, cuando los estudiantes empleen estrategias como el ensayo y error, los docentes deben favorecer otro tipo de estrategias más “sofisticadas”, es decir, propias de la estructura multiplicativa para atender este tipo de problemas, los cuales serán más eficaces para solucionar problemas de mayor nivel de complejidad.

- El abordaje de los problemas de estructura multiplicativa no debe limitarse exclusivamente al tratamiento de algoritmos, comúnmente sin sentido para los estudiantes, sino que es necesario que se les acompañe en el proceso de comprender la estructura de ellos, y con esto, maneras de abordarlos. Tales problemas deben no solamente considerar para su solución el uso del pensamiento numérico, sino también movilizar otros tipos de pensamientos como el métrico, espacial o variacional. De esta manera los docentes deben hacer un acompañamiento oportuno para el desarrollo articulado de estos pensamientos en los estudiantes, de tal modo que se logre superar dificultades que puedan presentarse en el desarrollo de estos, como por ejemplo, aquellas que el desarrollo de este trabajo puso de manifiesto en relación con: la selección y usos de patrones para realizar procesos de medición, el tratamiento de la unidad de medida, el desarrollo mismo de los procesos de medición, la distinción de las dimensiones, largo y ancho, de una figura rectangular, entre otros; lo cual está íntimamente relacionado con lo métrico y espacial.

- Si bien es cierto que la actividad procedimental es importante, y de hecho está contemplada dentro de los Lineamientos como uno de los procesos que ayudan a la construcción

y refinamiento del conocimiento conceptual, el trabajo sobre multiplicación y división en primaria no puede quedarse relegado solamente hacer algoritmos de estas operaciones. Es necesario promover ambientes de aprendizaje en los cuales los estudiantes puedan enfrentarse a problemas de diferentes tipologías, a identificar las cantidades y especialmente la manera como estas se relacionan; lo cual se logra cuando el maestro tiene una conciencia de la diversidad de problemas que se puede presentar para el estudio de la estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad.

- Una reflexión que se deriva de este estudio es que pese al gran esfuerzo y empeño que suele ponerse en la educación básica primaria por enseñar los procesos algorítmicos de la suma, resta, multiplicación y división, a tal punto que gran parte de esta educación centra toda su atención en ello obviando con esto otros aspectos importantes para el desarrollo del pensamiento matemático, el análisis de los resultados de este estudio resaltan la falta de apropiación de este proceso algorítmico por parte de los estudiantes, pues muchos de los errores que los estudiantes presentaron al abordar las situaciones atañen al uso inadecuado de algoritmos. Ante esto es necesario privilegiar que los estudiantes interpreten el algoritmo, comprendan las leyes y propiedades propias de este, y que su enseñanza no se presente como una cuestión mecánica, de tal modo que esto conlleve a que los estudiantes, por ejemplo, tomen conciencia en que expresiones como “llevo 1”, denotan llevar una decena, centena, etc., dependiendo de la posición en el que se encuentre la cifra, por lo cual debe también tomar conciencia de la importancia de la organización de las cifras de un número en la construcción del algoritmo.

- Ante las dificultades y errores que presentaron los estudiantes al abordar aspectos del pensamiento métrico necesarios en la solución de problemas que se les solicitaba medir las dimensiones de un espacio rectangular y el cálculo del área, se hace inevitable que desde la

Educación Básica Primaria se aborden elementos propios del pensamiento espacial y métrico, en la que los estudiantes avancen en procesos de medición y no se queden con patrones antropométricos y no estandarizados. Por tal motivo los docentes deben hacer énfasis en que los estudiantes comprendan cuáles son los atributos medibles, a saber, longitud, área, capacidad, peso, etc. y dar significado al patrón y unidad de medida, a partir de la exploración activa y modelación del espacio.

- Por último, una reflexión no menos importante en este trabajo, es en el desarrollo de las planeaciones de la enseñanza de la estructura multiplicativa en los primeros años de escolaridad. En relación con esto se reconoce que los profesores no pueden tomar como único criterio para la enseñanza de esta estructura la distinción entre los problemas que son de multiplicación y los que son de división, sino que más allá de esto el profesor debe ser consciente de la complejidad que hay detrás de estos problemas, complejidad que se esclarece cuando él empieza a analizar las cantidades que se involucran en estos y la forma cómo se relacionan esas cantidades, a reconocer que las relaciones de estas marcan problemas de naturaleza distinta, lo que genera dificultades de diversa índole, y por tanto su enseñanza tiene que dar cuenta de esa naturaleza.

En relación con el objetivo general

A continuación se caracterizan las principales estrategias que presentaron los alumnos de grado sexto de la IEJI en torno a la resolución de problemas de estructura multiplicativa.

- De acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba, fue notorio que buena parte de los estudiantes no interpretan adecuadamente el rol de las cantidades expuestas en las situaciones propuestas en la prueba, por lo cual se considera necesario que los docentes posibiliten a sus

estudiantes escenarios en los que se favorezca la comprensión tanto de la identificación de las cantidades en un problema como sus relaciones, dado que si se logra esta comprensión en ellos será más fácil identificar, por ejemplo, el tipo de operación correspondiente a la clase de problema tipo multiplicativo.

- Dentro de los problemas de isomorfismo de medidas se observó que los estudiantes tienen mayores dificultades en enfrentar los problemas de regla de tres que los de multiplicación o los de división, en este orden de ideas, es importante que los docentes en el aula de clase favorezcan el abordaje de estos problemas en los primeros años de escolaridad, sin reducirlo al uso exclusivo del proceso algorítmico de la regla de tres, sino que logre que los estudiantes comprendan la relación de co-variación entre las cantidades presentes, de tal forma que los estudiantes sean conscientes de que la relación que se presenta entre las magnitudes es propia de la proporcionalidad simple directa.

- El desarrollo de este trabajo permitió evidenciar que en los problemas de combinación el material manipulable tensiona las estrategias presentadas por los estudiantes, a tal punto de solo emplear estrategias basadas en la manipulación del material para darle solución a las situaciones de esta naturaleza, dejando de lado la relación multiplicativa entre las cantidades involucradas. Por este motivo, se ve la necesidad de trabajar problemas de combinación con estudiantes, tanto en los que el orden tiene su relevancia como en los que no lo tienen, en que ellos puedan avanzar hacia estrategias de tipo multiplicativo propias del producto de medidas para desarrollarlos.

- En este estudio se pone de relieve que los estudiantes presentan más dificultad en solucionar los problemas de comparación multiplicativa que los problemas de isomorfismo de medidas o producto de medidas, puesto que en estos problemas la regla de asociación pareciera

ser invisible, tales dificultades se agudizan cuando se trabajan problemas de división partitiva y división cuotitiva. Es preciso señalar que los estudiantes limitan la palabra clave “veces” solamente asociándolo a la multiplicación, por tal razón realizan con menos dificultad los problemas de tipo multiplicativo. En este orden de ideas los docentes debe proponer un conjunto de problemas verbales correspondientes al esquema de comparación multiplicativa haciendo referencia en las expresiones de comparación, tales como, “ x veces tantos puntos como”, “Cuántas veces”, “tanto...como” o en la que la expresión insinúe pertenencia o existencia (Castro, 1994), de tal modo que se pueda distinguirse la regla de asociación con la descripción existencial, así mismo identificar si la cantidad comparada es mayor que la otra cantidad extensiva, con el fin de determinar la operación a realizar.

REFERENCIAS

- Aguirre, D. (2011). Aplicación de las estructuras multiplicativas en la resolución de problemas aritméticos dirigido a tercer grado de educación básica (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Almeida, I. (2001). Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional a diversidade de procedimentos de resolução (Tesis de maestría). Pontificia Universidade Católica, Sao Paulo. Brazil.
- Ángel, K. & Candamil, M. (2013). Una secuencia didáctica para fortalecer el concepto de multiplicación de números naturales en el grado segundo de la educación básica. (Tesis de pregrado), Universidad del valle, Yumbo, Colombia.
- Astofi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Díada Editora. Sevilla.
- Benavides, M. (2008). Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Berrío, W. & Gómez, V. (2015). Multiaplicatic: una estrategia para el razonamiento de situaciones que involucran estructuras multiplicativas (Tesis de maestría). Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.
- Botero, O. (2016). Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación (Tesis de maestría). Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.
- Brousseau, G. (1983) Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.4.núm. 2, pp.165-198.
- Castro, C., & Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil.

- Castro, E. (1994). Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Castro, E. & Castro, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. Competencia numérica y cálculo mental. Uno, revista de didáctica de las matemáticas. Barcelona, España.
- Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Una empresa docente, Colombia. & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. México.
- Cohen, L. & Manion, L. (1990). Métodos de investigación educativa. La Muralla, Madrid, España.
- Echeverry, H (2013). Estrategias didácticas que promueven el aprendizaje de la estructura multiplicativa a partir de la resolución de problemas (Tesis de maestría). Universidad nacional de Colombia, Palmira, Colombia.
- Echeverry, M. & Cumbal, A. (2015). Análisis discursivo de dos libros de texto de matemáticas del grado tercero de primaria en torno al campo conceptual multiplicativo (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Fillooy, E. (1999). Aspectos Teóricos de Algebra Educativa. México: Iberoamérica.
- Franchi, L. & Rincón. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Investigación arbitrada, No. 24, 63-71. La universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería Departamento de Matemática.
- Gallardo, J. (2004). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales (Tesis doctoral). Universidad de Málaga, Málaga, España.
- Gallego, M., Ruiz, Y. Salgado, L., Sucerquia, A. & Uribe, L. (2004). La construcción de la estructura multiplicativa en los niños. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- García, M. & Suárez, A. (2010) Procedimientos de resolución de problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas. Universidad San Buenaventura.

- García, J. & González, D. (2010). Dificultades en el aprendizaje de la numeración y el cálculo. <http://fresno.pntic.mec.es/rarguis/Intro%20a%20las%20dificultades%20en%20matematicas.pdf>
- Gómez, B. & Contreras, M.(2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones.
- Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and Division. Multiplicative Reasoning. State University of New York.
- Institución Educativa Jorge Isaacs. (2013). Proyecto Educativo Institucional –PEI. El Cerrito Valle.
- Jaramillo, T. & Obando, G. (2013). Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas una mirada del isomorfismo de medida. Universidad de Antioquia, Antioquia, Colombia.
- Kaput, J.J. (1986) “Quantity structure of algebra Word problems: A preliminary analysis”. Southeastern Massachusetts University, manuscrito.
- Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L.(1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas, Educación matemática, Errores y dificultades de los estudiantes, Resolución de problemas, Universidad de Granada.
- López, R. (2015). Influencia del razonamiento matemático en las estructuras multiplicativas. Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia.
- Maza, C. (1991). Enseñanza de la multiplicación y división. Editorial Síntesis. Vallehermoso, Madrid.
- Ministerio de Educación y Ciencia [MEC]. Subdirección general de perfeccionamiento del profesorado (1985). La enseñanza de la matemática al debate, España, Madrid.
- ICFES, Mineducación (2014). Cuadernillo de pruebas saber 5º, Bogotá, Co.
- ICFES, Mineducación (2014). Resultados pruebas saber grado quinto. Institución educativa Jorge Isaacs en el área de matemáticas, Bogotá, Co.

- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Movshovitz, N.; Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*.
- National Council Teachers Mathematics, (2014). Principios para la acción, Resumen ejecutivo. Principles to Action, NCTM, 2014. Traducción de Claudia Matus-Zúñiga.
- Obando, G., Vanegas, M. & Vásquez, N. (2007). De la multiplicación a la proporcionalidad. Pensamiento numérico y sistemas numéricos. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
- Obando, Z., G., (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica (tesis doctoral). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- OCDE, (2016). Revisión de políticas nacionales de educación, La educación en Colombia. Education in Colombia, OCDE, 2016. Traducción de Ministerio de educación nacional.
- Ospina, M. & Salgado, J. (2011). Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Ospina, M. & Salgado, J. (2016). La enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: aproximación discursiva (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Puig, L & Cerdán, F. (1999). Problemas aritméticos escolares, problemas de una etapa: multiplicación y división. Universidad de Valencia, Editorial síntesis, España.
- Radatz, H. (1980). Students errors in the mathematical learning process, *For the Learning of Mathematics*, 1, 1, pp. 16-20.

- Rico, L (1995) Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico. Iberoamericano.
- Schwartz, J. (1988). “Intensive quantity and referent transforming arithmetic”. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Socas, M. (1997): “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria”, cap. 5., pp. 125-154, en RICO, L., y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Ed. Horsori, Barcelona.
- Torres, M. (2013). Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Trigo, (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN.
- Vergel, R. (2004) Organizaciones didácticas matemáticas y criterios de evaluación en torno a la multiplicación (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Vergnaud, G. (1983). Acquisition of mathematics concepts and processes. Academic press, inc. New York.
- Vergnaud, G (1990) La teoría de los campos conceptuales. CNRS y Université René Descartes. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170, 1990.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why?. Multiplicative Reasoning. State University of New York.
- Vergnaud, (2000). El niño las matemáticas y la realidad. México: Editorial Trillas.

ANEXOS

ANEXO 1. Situación 1: Juego de goles

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS
SEDE SANTA BARBARA
EL CERRITO-VALLE



Docente: Adriana Ojeda Ordóñez **Grado** 6to **Fecha:** _____

Estudiante 1: _____ **Estudiante 2:** _____

SITUACIÓN 1: JUEGO DE GOLES

Los estudiantes del grado sexto de la sede Santa Bárbara, iniciarán el periodo académico en el área de matemáticas con un juego competitivo, llamado *Juego de Goles*, el cual está determinado por distintos desafíos; cada desafío será jugado por parejas y a cada pareja se les proporcionará una cancha en miniatura con bolas de colores con el fin de realizar lanzamientos y atinar goles. Cada desafío tendrá una pareja ganadora, esta obtendrá tres (3) puntos y las parejas que no cumplan el desafío obtendrán solo un (1) punto. Al finalizar todos los desafíos se dará a conocer la puntuación obtenida por cada pareja con el fin de establecer la pareja ganadora. A partir de estas consideraciones realiza los siguientes desafíos.

Primer Desafío

- La docente les proporcionará una cancha y una bola de color azul, rojo, negro y verde.
- Cada estudiante debe hacer ocho lanzamientos hacia la cancha, dos por cada color de bola (dos lanzamientos con la bola de color azul, dos lanzamientos con la bola de rojo, dos con la bola de negro y dos con la bola de verde) y anotar cuántos goles hicieron por cada color de bola.

- c. Teniendo en cuenta que las bolas tienen diferentes valores dependiendo del color de acuerdo con la siguiente tabla:

<i>Color de la bola</i>	<i>Valor de la bola</i>
Azul	4010
Rojo	3874
Negro	5050
Verde	2346

Determinen el puntaje total obtenido de acuerdo a las anotaciones realizadas en el ítem anterior. Realicen todos los procedimientos necesarios para calcular el puntaje final.

Grado 6to

b. Determine el puntaje total obtenido de acuerdo a la cantidad de goles anotados por pareja y anótenlo en la siguiente tabla. Realicen todos los procedimientos necesarios para calcular el resultado final.

Pareja	
<i>Estudiante</i>	<i>Cantidad de goles Anotados</i>
TOTAL GOLES POR PAREJA	
TOTAL PUNTAJE OBTENIDO	



Docente: Adriana Ojeda Ordóñez Grado 6to

Tercer Desafío

Para el desarrollo de este desafío se debe tener presente las siguientes consideraciones:

- a. La pareja de estudiantes debe determinar cuántos goles debe hacer para obtener un puntaje exacto a 173.600 puntos, considerando que cada gol anotado tiene un valor de 12.400 puntos.
- b. Cada participante por pareja podrá lanzar hasta 10 veces una bola de color blanco.
- c. Gana el desafío la pareja que logre anotar un puntaje exacto de 173.600 puntos.
- d. La pareja de estudiantes que tan solo identifiquen el número de goles que deben hacer, tendrá 2 puntos y si logran hacer la cantidad de goles identificados para obtener el puntaje exacto solicitado tendrá 3 puntos.
- e. Los resultados obtenidos se registrarán en la tabla de registro general de puntuación de los desafíos.

A partir de estas consideraciones realiza los siguientes puntos:

1. Registrar cuantos goles se deben anotar para poder ganar el desafío. Desarrollen todos los procedimientos necesarios para hallar tu respuesta.

2. Una vez identificado el número de goles, cada pareja pasará al frente con la docente e intentará realizar las anotaciones con las bolas en la cancha

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS
SEDE SANTA BARBARA
EL CERRITO-VALLE**



Docente: Adriana Ojeda Ordóñez

Grado 6to

Cuarto Desafío

Siete estudiantes de la sede principal han participado en el juego de goles obteniendo los puntajes que en la siguiente tabla se presentan.

Puntuación de Jugadores	
Estudiante A	3456 puntos
Estudiante B	2533 puntos
Estudiante C	2654 puntos
Estudiante D	1357 puntos
Estudiante E	
Estudiante F	
Estudiante G	7599 puntos

Observa que para dos de los estudiantes (E y F) no se conocen la cantidad de puntos obtenidos cuando realizaron el juego. A partir de esta información realiza los siguientes puntos.

1. Si se sabe que el estudiante E hizo cuatro veces tantos puntos como los que hizo el estudiante D. ¿Cuántos puntos registró el estudiante E?

2. El estudiante A realizó seis veces tantos puntos como los hizo el estudiante F. ¿Cuántos puntos realizó el estudiante F? Realiza todos los procedimientos posibles para encontrar su respuesta.

3. ¿Cuántas veces tiene el estudiante G los puntos que tiene el estudiante B? Realiza todos los procedimientos posibles para encontrar su respuesta.

ANEXO 2. Tabla de Registro de puntuación

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS
SEDE SANTA BARBARA
EL CERRITO-VALLE



Docente: Adriana Ojeda Ordóñez

Grado 6to

Registro General de la puntuación de los desafíos

Pareja de Estudiantes	Desafío 1	Desafío 2	Desafío 3	Desafío 4	Puntaje Total
1 Pareja					
2 Pareja					
3 Pareja					
4 Pareja					
5 Pareja					
6 Pareja					
7 Pareja					
8 Pareja					
9 Pareja					
10 Pareja					
11 Pareja					
12 Pareja					
13 Pareja					
14 Pareja					

ANEXO 3. Situación 2: Renovando la superficie de la cancha

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS
SEDE SANTA BARBARA
EL CERRITO-VALLE**



Docente: Adriana Ojeda Ordóñez Grado 6to Fecha: _____

Estudiante 1: _____ **Estudiante 2:** _____

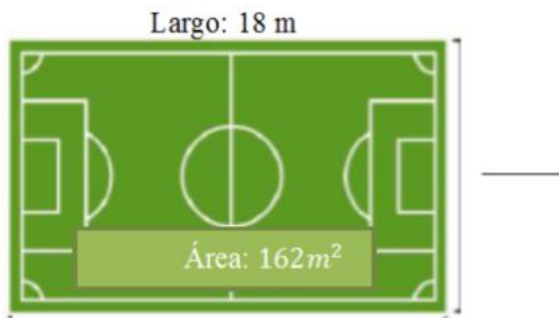
RENOVANDO LA SUPERFICIE DE LA CANCHA

En vista de que la Institución Educativa Jorge Isaacs será sede de los juegos intercolegiales, la rectora y el consejo directivo en una reunión acordaron la instalación de pasto sintético a la cancha de microfútbol de la sede Santa Bárbara, esto con el fin de tener mejores condiciones para el desarrollo de los juegos, por lo tanto solicita la medida exacta de las dimensiones y superficie o área de la cancha para realizar el pedido de la grama necesaria para la cancha. Para esta tarea se les ha solicitado a los estudiantes del grado sexto obtener las dimensiones y superficie o área de la cancha.

Una vez organizados por parejas, en cada hoja de trabajo tratarán de explicar los siguientes puntos:

1. Escriban una estrategia que consideren pertinente para hallar la superficie o área de la cancha.

2. Desarrollen la estrategia expuesta en el punto anterior para determinar así la superficie o área de la cancha.(se pueden guiar por la línea blanca de marcación).
3. Igualmente la rectora solicita las dimensiones y el área de todas las canchas de cada una de las sedes de la institución. Ante esta solicitud la sede Rengifo le ha enviado la información mediante la siguiente ilustración.



Al ver la rectora el informe enviado por la sede, se ha percatado de que está incompleta dado que le hace falta una de las dimensiones de la cancha. Ayúdale a la sede a encontrar la dimensión que hace falta de la cancha a partir de la información presentada en la ilustración.

ANEXO 4. Situación 3: Diseño de manillas

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS
SEDE SANTA BARBARA
EL CERRITO-VALLE



Docente: Adriana Ojeda Ordóñez

Grado 6to

Fecha: _____

Estudiante 1: _____ **Estudiante 2:** _____

DISEÑO DE MANILLAS

Para la celebración del día de la mujer, la sede Santa Bárbara de la I.E.J.I ha decidido regalar a las estudiantes manillas elaboradas con chaquiras, las cuales están diseñadas por un cordón y en el centro llevarán cuatro chaquiras de color blanco y negro, tal y como se muestra en la ilustración.



Para esta tarea se ha encomendado a los estudiantes del grado sexto elaborarlas.

A partir de esta situación desarrolla los siguientes puntos:

1. Se necesita saber cuántas combinaciones de colores de chaquiras se pueden hacer para elaborar las manillas de acuerdo a las condiciones para su diseño. Escribe una estrategia para determinar la cantidad de manillas que resultan.

3. Realiza la construcción de la manilla de acuerdo a tu explicación.

ANEXO 5. Análisis esquemático de las estrategias usadas por los estudiantes

Situación 1: Juego de goles																															
PAREJA	PRIMER DESAFÍO					SEGUNDO DESAFÍO					TERCER DESAFÍO					CUARTO DESAFÍO															
	Subcategorías					Subcategorías					Subcategorías					1 PROBLEMA					2 PROBLEMA					3 PROBLEMA					
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	
P1		X				X					X					X					X					X					
P2		X				X							X			X					X					X					
P3		X				X						X				X					X					X					
P4	X					X							X			X					X					X					
P5		X						X					X			X					X						X			X	
P6		X				X							X			X					X					X					
P7		X				X							X			X					X					X					
P8			X			X						X				X					X					X					
P9	X							X				X				X					X					X					
P10		X						X					X			X					X					X					
P11		X				X							X			X					X					X					
P12		X				X						X				X					X					X					
P13	X					X							X			X					X					X					
P14		X						X					X			X					X					X					

PAREJA	Situación 2: Renovando la superficie de la cancha						Situación 3: Diseño de manillas			
	1 PROBLEMA			2 PROBLEMA			M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
	G ₁	G ₂	G ₃	G ₁	G ₂	G ₃				
P1		X		X					X	
P2		X		X					X	
P3			X		X				X	
P4		X		X					X	
P5		X			X				X	
P6		X			X				X	
P7			X		X				X	
P8		X			X				X	
P9		X		X					X	
P10	X				X				X	
P11		X		X					X	
P12	X				X				X	
P13	X			X					X	
P14		X				X			X	

ANEXO 6. Planeación curricular de la Institución Educativa Jorge Isaacs, Tercer Grado

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS		
MATRIZ DE MATEMÁTICA - GRADO 3º		
PRIMER PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Describo, comparo y cuantifico situaciones con números en diferentes Contextos y con diversas representaciones. • Desarrollo habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio. • Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, Peso y masa) y, en los eventos, su duración. • Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar. • Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.	• Reconocer características de nuestro sistema de numeración y generalizar la obtención de unidades de orden superior. • Reconocer números mayores que mil y emplear algunas de sus representaciones. • Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente.	• Lee y escribe números hasta de 7 dígitos. • Utiliza adecuadamente el valor posicional. • Agrupa y completar seriaciones de números. • Utiliza los símbolos básicos del sistema de numeración Romana
SEGUNDO PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Reconozco significados del número en diferentes contextos (Medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros). • Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales. • Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. • Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto. • Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos. • Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. • Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto.	• Desarrollar habilidades en procedimientos operativos aritméticos y geométricos. • Familiares con conceptos básicos de la matemática. • Adquirir precisión verbal y familiarizarse con el lenguaje y expresiones simbólicas.	• Reconoce y aplica las propiedades de la multiplicación. • Realiza multiplicaciones abreviadas por dos y tres cifras. • Formula, analiza y resuelve problemas de multiplicación. Identifica los múltiplos y divisores de un número.

TERCER PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas. • Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes. • Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia. • Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición. • Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, Pictogramas y diagramas de barras. • Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual.	• Interpretar la realidad a través de modelos matemáticos. • Utilizar la Matemática para interpretar y solucionar problemas de la vida cotidiana, la tecnología y de la ciencia. • Identificar el conjunto de los números naturales, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva, sustractiva y multiplicativa	• Formula, analiza y resuelve problemas de división. • Reconoce patrones de medida y ángulos equivalentes. • Realiza ejercicios de conversión con las medidas
CUARTO PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal. • Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional. • Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro. • Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	• Adquirir habilidades para el cálculo aritmético mental y escrito. • Adquirir habilidades y destrezas para formular, planear y resolver problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos. • Identificar diferentes sistemas métricos y ejercitar las conversiones de unidades.	• Identifica la circunferencia y sus líneas. • Realiza procesos de recolección de datos y representarlos en diagramas sencillos.

ANEXO 7. Planeación curricular de la Institución Educativa Jorge Isaacs, Cuarto Grado

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS		
MATRIZ DE MATEMÁTICA - GRADO 4º		
PRIMER PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. • Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. • Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos). • Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). • Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.	• Relacionar un número con la forma como se lee y escribe números naturales. • Relacionar el nombre de la propiedad de la adición con su definición. • Resolver problemas relacionados con la sustracción de números naturales. • Dar significado a la multiplicación y/o abreviadamente • Reconocer las propiedades de la multiplicación • Realizar divisiones entre números naturales e identifica sus términos	• Resolver problemas aplicando las propiedades de la adición • Verificar sustracciones utilizando el algoritmo tradicional. • Realiza operaciones entre números naturales (sumas, restas, multiplicaciones de números de máximo 4 cifras por una cifra o de tres cifras por dos cifras) • Analizar secuencias que requieren de la división. • Aplicar criterios para determinar la divisibilidad por 2, 3, 4, etc.
SEGUNDO PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos • Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas • Seleccione unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones. • Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). • Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica gráfica.	• Identificar los divisores de un múltiplo • Clasificar números en primos y compuestos • Identificar el MCD de dos o más números. • Definir lo que son las medidas de longitud.	• Hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números • Calcular el MCD en forma abreviada • Resolver situaciones en las que se requiere hallar el MCD de dos o más números. • Calcular el MCM de dos o más números, en forma abreviada • Recolectar datos. • Reconocer los múltiplos y submúltiplos del metro.

TERCER PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. • Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales. • Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación. • Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, Diagramas circulares). • Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.	• Identificar la fracción representada en una grafica • Determinar cuando dos fracciones son equivalentes • Relacionar una adicción de fracciones con su resultado • Resolver problemas que requieren de la adición de fracciones • Sustraer fracciones con igual denominador • Elegir unidades de medida de volumen • Nombrar objetos a los que se les puede calcular el volumen	• Escribir expresiones en forma de fracción • Traducir a tablas de información representada en graficas. • Calcular el volumen de un cuerpo en unidades cúbicas • Establecer equivalencias entre unidades de medidas de volumen • Identificar el área de la base y la altura de un prisma para calcular su volumen
CUARTO PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes. • Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.	• Reconocer fracciones decimales aplicando el proceso de amplificación • Adicionar números decimales • Resolver sustracciones con números decimales. • Dividir números naturales para hallar un cociente decimal.	• Comparar y ordena números decimales en forma ascendente. • Aplicar el algoritmo de la multiplicación de números de números decimales • Aplicar el proceso para la división de números decimales

ANEXO 8. Planeación curricular de la Institución Educativa Jorge Isaacs, Quinto Grado

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ISAACS		
MATRIZ DE MATEMÁTICA - GRADO 5º		
PRIMER PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. • Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas. • Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican. • Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	• Realizar adiciones utilizando el algoritmo adecuado • Realizar sustracciones utilizando el algoritmo tradicional • Resolver problemas de multiplicación de números naturales. • Identificar los términos de la división. • Reconocer los términos de la potenciación. • Descomponer un numero en factores primos. • Medir y clasificar ángulos. • Identificar características de los datos de una grafica.	• Hallar el MCM de dos o más números • Calcular el MCM de dos o más números, en forma abreviada • Hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números • Identificar el MCD de dos o más números • Calcular el MCD en forma abreviada • Observar características de un producto de factores primos. • Resolver problemas en los que se aplica los criterios de divisibilidad. • Realizar una encuesta entre sus compañeros / as de clase
SEGUNDO PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
• Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. • Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. • Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas. • Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparación la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos. • Analizo y explico relaciones de dependencia entre	• Establecer relaciones de orden entre dos o mas fracciones • Expresar números mixtos como fracciones impropias • Identificar la representación grafica de una fracción decimal. • Identificar rectas paralelas	• Aplicar el algoritmo de la adición y sustracción en operaciones con fracciones. • Demostrar la Adición y sustracción de fracciones homogéneas • Representar la Multiplicación de fracciones. • Aplicar la división de fracciones • Aplicar la multiplicación y la división de fracciones • Construir rectas paralelas • Construir rectas perpendiculares

cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas.		
TERCER PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
- Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos. - Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.	- Identificar fracciones decimales y números decimales - Comparar números decimales. - Realizar divisiones donde intervienen números decimales - Aplicar la división de números decimales para realizar repartos. - Identificar y aplica el algoritmo de la adición y de la sustracción de números decimales - Comprender el procedimiento para resolver Sustracciones. de números decimales. - Aplicar el concepto de la multiplicación con números decimales. - Aplicar el concepto de división para desarrollarlo con números decimales. - Comprender el concepto de perímetro. - Definir lo que es moda y frecuencia.	- Identificar y escribe fracciones - Clasificar fracciones propias e impropias - Expresar una fracción impropia como numero mixto - Identificar fracciones equivalentes en situaciones problema - Usar el producto cruzado para identificar fracciones equivalentes - Obtener fracciones equivalentes por simplificación - Comparar y ordena fracciones - Resolver problemas comparando fracciones - Aplicar el concepto en situaciones cotidianas (perímetro). Identificar en graficas la moda y la frecuencia
CUARTO PERIODO		
Estándares de Competencias	Evidencias de aprendizaje	
	Específicos	Procedimental
- Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad. - Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.	- Reconocer magnitudes proporcionales - Identificar la magnitud a la que corresponde una cantidad dada. - Definir lo que son medidas de capacidad e identifica sus múltiplos y submúltiplos. - Organizar la información con lo que respecta a la moda y el promedio.	- Relacionar razones que forman proporciones - Completar tablas de magnitudes inversamente proporcionales - Establecer proporcionalidad inversa entre magnitudes, para resolver problemas. - Ejecutar el procedimiento adecuado para establecer la información.