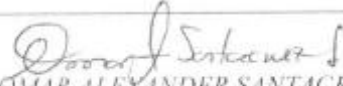


ACTA DE SUSTENTACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 28 de Agosto de 2018
ESTUDIANTE: ANDRÉS FELIPE LARA FERNÁNDEZ - CÓDIGO: 1503673
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: "UNA PROPUESTA DE AULA QUE VINCULA LA FÍSICA A LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO, DESDE EL ENFOQUE DE LA MATEMÁTICA REALISTA"
DIRECTOR DE TESIS: Profesor OMAR ALEXANDER SANTACRUZ LENIS
EVALUADORES: Profesora LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO Profesora MARITZA PEDREROS PUENTE
COMENTARIOS DE LOS JURADOS: El documento fue bien escrito, el diseño es muy bueno.
APROBADO ☒ APLAZADO ☐ RECHAZADO ☐


Prof. SANTIAGO CARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados


Prof. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO
Jurado Evaluador


Prof. OMAR ALEXANDER SANTACRUZ LENIS
Director de Tesis


Prof. MARITZA PEDREROS PUENTE
Jurado Evaluador


Prof. DIEGO GARZON CASTRO



**UNA PROPUESTA DE AULA QUE VINCULA LA FÍSICA A LA ENSEÑANZA DE LA
FUNCIÓN SENO, DESDE EL ENFOQUE DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REALISTA**

ANDRÉS FELIPE LARA FERNÁNDEZ

Código: 201503673

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, AGOSTO DE 2018**



**UNA PROPUESTA DE AULA QUE VINCULA LA FÍSICA A LA ENSEÑANZA DE LA
FUNCIÓN SENO, DESDE EL ENFOQUE DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REALISTA**

ANDRÉS FELIPE LARA FERNANDEZ

Código: 201503673

**Trabajo para optar al título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática.
Modalidad Profundización.**

Director de trabajo de grado:

OMAR ALEXANDER SANTACRUZ LENIS, MG

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI, AGOSTO DE 2018

**Dedicado a mi familia por su paciencia y apoyo en los momentos más difíciles, a mi esposa,
a mis padres que siempre han creído en mí.
A mis hermanos y amigos por sus palabras de aliento en los momentos críticos**

Agradecimientos

Gracias Dios por permitirme disfrutar de estos momentos tan grande a nivel académico, al colegio Anglo Americano, los estudiantes de grado décimo y sus directivas que creyeron en la propuesta de mi trabajo.

Al profesor Mg. Omar A. Santacruz L. por tener paciencia, guiarme en los momentos más perdidos de mi proceso en la maestría y devolverme la confianza en las tutorías, pues gracias a él se puede dar por terminada esta propuesta.

Un honor especial al maestro Octavio Augusto Pabón (RIP)... gracias por tus enseñanzas y ruega a Dios por nosotros.

Contenido

Figuras.....	2
Tablas.....	4
Capítulo 1.....	9
Aspectos generales de la propuesta.....	9
1.1. Presentación del problema	10
1.2. Objetivos	13
1.2.1. Objetivo General.....	13
1.2.2. Objetivos Específicos	13
1.3. Justificación.....	13
1.4. Antecedentes	16
1.4.1. Una propuesta de aula para la enseñanza de las funciones periódicas seno y coseno desde un enfoque variacional	16
1.4.2. Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones	17
1.4.3. Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica	18
1.4.4. La matemática en el contexto de la ciencia	19
Capítulo 2.....	21
Marco Teórico de Referencia.....	21
2.1. Aproximación al enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR)	23
2.2. Principios de la Educación Matemática Realista	24
2.2.1. Principio de Actividad	24
2.2.2. Principio de Realidad.....	25
2.2.3. Principio de Interacción.....	26
2.2.4. Principio de interconexión (estructuración)	26
2.2.5. Principio de Reinvención.....	27
2.2.6. Principio de Niveles.....	27
2.3. El uso de modelos y la Modelación Matemática.....	30
2.4. Referente curricular.....	31
2.4.1. La Modelación Matemática en los Lineamientos y los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas	34
2.4.2. El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos: el concepto de función periódica.	37

2.4.3. Coherencia vertical y coherencia horizontal	38
2.5. Referentes matemáticos.....	41
2.5.1. Definición de relación y función.	41
2.5.2. Definición de función periódica, función trigonométrica y función seno.	42
2.5.3. Descripción analítica y geométrica de la función seno.	45
Capítulo 3.....	50
La función seno en el aula	50
3.1. Diseño e implementación de la propuesta de aula	51
3.1.1. Situación 1: Reconozcamos fenómenos periódicos en nuestro sistema solar	52
3.1.2. Situación 2: Un caso de función periódica: La función seno	61
3.1.3. Situación 3. Aproximándonos a fenómenos físicos: la variación de la función seno. Los movimientos oscilatorios en la Física.....	69
3.2. Resultados y análisis de resultados	77
3.2.1. Resultados y análisis de resultados: Situación 1. Reconozcamos fenómenos periódicos en nuestro sistema solar	77
3.2.2. Resultados y análisis de resultados: Situación 2. Un caso de función periódica: La función seno.....	132
3.2.3. Resultados y análisis de resultados: Situación 3. Aproximándonos a fenómenos físicos: la variación de la función seno. Los movimientos oscilatorios en la Física	182
Capítulo 4.....	225
Conclusiones y reflexiones finales.....	225
4.1. Conclusiones generales.	226
4.2. Reflexiones finales.	231
Referentes bibliográficos.	235
Anexos	238

Figuras

Figura 1. Niveles de comprensión en el proceso de matematización progresiva	29
Figura 2. Elementos básicos de la construcción de modelos.	34
Figura 3. Representación tabular y gráfica de la función seno.	44
Figura 4. Del círculo trigonométrico a la función trigonométrica en el plano	45
Figura 6. Ángulo $\angle AOP$ de x radianes.....	47
Figura 7. Descripción geométrica de $\text{sen } x$	48
Figura 8. Respuesta 1 de la tarea 3. Reemplazo en la ecuación propuesta.	88

Figura 9. Respuesta tipo I, representación tabular agrupada en 10 columnas.	90
Figura 10. Respuesta tipo I. representación tabular realizada año por año.....	91
Figura 11. Respuesta tipo I dada en forma tabular.	92
Figura 12. Respuesta tipo II. Representaciones tabular, numérica y verbal.	93
Figura 13. Respuesta solsticio invierno para el 15 de abril de 2025.....	102
Figura 14. Respuesta de un estudiante a la tabla 2 de la tarea 2.	105
Figura 15. Solución a la tabla 3 por una estudiante	112
Figura 16. Respuesta tipo I Esquema de los solsticios y equinoccio en el hemisferio sur.	114
Figura 17. Esquema preguntas tipo II.	116
Figura 18. Respuesta tipo I: regla de tres.....	135
Figura 19. Representación tabular tipo I tabla 23.	139
Figura 20. Respuesta dada al literal a de la tabla 2.	140
Figura 21. Representación tabular para la suma de 360 grados a los ángulos de la tabla 2.	141
Figura 22. Respuesta tipo I relativa al literal d de las preguntas de la tabla 2.	144
Figura 23. Regla de tres: estrategia de resolución de las preguntas 2.....	147
Figura 24. Respuesta tipo 1 pregunta 2. Regla de tres.....	149
Figura 25. Conteo de las vueltas una a una con asignación de tiempos.	149
Figura 26. respuesta tipo II tabla 18 a través del uso de representación gráfica.....	150
Figura 27. Representación tabular de diferentes ángulos asociados a una altura determinada. .	156
Figura 28. Representación gráfica tipo I, pregunta 2.....	159
Figura 29. Respuesta tipo II, pregunta 2.	160
Figura 30. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Respuesta a pregunta 4.	164
Figura 31. Respuesta a la pregunta 6, literal a. Comparación entre lo verbal y lo gráfico.	167
Figura 32. Respuesta tipo I al literal b de la pregunta 6.	169
Figura 33. Respuesta tipo II, pregunta 6, literal b.....	171
Figura 34. Respuesta tipo III. Pregunta 6 literal b.	172
Figura 35. Respuesta para literal c de la pregunta 8.	176
Figura 36. Respuesta al numeral 9, literales a y b.	178
Figura 37. Corrección valores de la pregunta 9. $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$	179
Figura 38. Representación gráfica pregunta 1 tarea 1.....	185
Figura 39. Relación de comportamiento del sistema masa resorte. Representación gráfica.	188
Figura 40. Comparación entre la representación icónica y lo verbal. Pregunta 2 c.....	188
Figura 41. Suma de reales usando la amplificación.....	192
Figura 42. Respuesta tipo I, pregunta 6.	196
Figura 43. Respuesta tipo I relacionada con la pregunta 7.	198
Figura 44. Respuesta tipo I, pregunta 7.	199
Figura 45. Respuesta tipo II, pregunta 7.	200
Figura 46. Representación gráfica de respuesta tipo II.....	201
Figura 47. Representación gráfica respuesta tipo II.....	202
Figura 48. Respuesta tipo I, pregunta 1a.....	207
Figura 49. Respuesta tipo II, pregunta 1a.	208
Figura 50. Respuesta tipo II: representación cartesiana.....	209
Figura 51. Respuesta tipo I, pregunta 3.	213

Figura 52. Respuesta tipo III, pregunta 3.....	214
Figura 53. Respuesta a la pregunta 5d asociada a situaciones de la Física.....	220
Figura 54. Respuesta tipo I asociada a la pregunta 6.....	223

Tablas

Tabla 1. Coherencia vertical para la función seno en el pensamiento variacional.	38
Tabla 2. Coherencia horizontal para el estándar asociado al pensamiento variacional.	40
Tabla 3. Clasificación de respuestas a la pregunta 1a.....	80
Tabla 4. Clasificación de respuestas a la pregunta 1b.	81
Tabla 5. Clasificación de respuestas a la pregunta 2a.....	83
Tabla 6. Clasificación de respuestas a la pregunta 2. b.	85
Tabla 7. Clasificación de respuestas a las preguntas 3. a. y 3. b.....	86
Tabla 8. Clasificación de respuestas a las preguntas 4 a, b y c.....	96
Tabla 9. Clasificación de respuestas a las preguntas 1a. y 1b.....	98
Tabla 10. Clasificación de las respuestas de la tabla 2 de la tarea 2.....	100
Tabla 11. Clasificación de las respuestas de los estudiantes para la pregunta 3a y 3b.	109
Tabla 12. Clasificación de las respuestas de los estudiantes para la pregunta 4.....	113
Tabla 13. Clasificación de las preguntas 1a y 1b de la tarea 3.	119
Tabla 14. Clasificación de las respuestas a la pregunta 1c.	121
Tabla 15. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 2a, 2b y 2c.	123
Tabla 16. Clasificación de las respuestas a los literales 3a 3b y 3c.	125
Tabla 17. Clasificación respuestas a preguntas 4 a, b, c, d y e.	127
Tabla 18. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 5a.	128
Tabla 19. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 5b y 5c.	129
Tabla 20. Clasificación de las respuestas dada a la pregunta 1a y 1b.....	134
Tabla 21. Clasificación de las respuestas dadas al literal 1c.....	136
Tabla 22. Clasificación de las respuestas dadas al literal 1d.	137
Tabla 23. Clasificación de las respuestas dadas a la tabla 2.....	138
Tabla 24. Clasificación de las Respuestas dadas al literal c relacionado con la tabla 2.	142
Tabla 25. Clasificación de respuestas para la pregunta 1 literal d.	143
Tabla 26. Clasificación de las respuestas dadas al numeral 2.....	146
Tabla 27. Clasificación de respuestas para la pregunta 3.	148
Tabla 28. Clasificación de las respuestas dadas a la tabla 3 de la tarea 2.....	154
Tabla 29. Clasificación de las gráficas en el plano cartesiano.....	157
Tabla 30. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 3.	162
Tabla 31. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 4.	163
Tabla 32. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 6a.	166
Tabla 33. Clasificación de respuestas dada al literal b de la pregunta 6.....	169
Tabla 34. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 7, literales a, b y c.....	173
Tabla 35. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 8, literales a, b y c.....	175

Tabla 36. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 9a y 9b.	178
Tabla 37. Clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes para la pregunta 1a.	184
Tabla 38. Clasificación de las respuestas dadas al literal 1b.	184
Tabla 39. Clasificación de las respuestas dadas a los literales a, b y c de la pregunta 2	187
Tabla 40. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 3a y 3b.	189
Tabla 41. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 4a y 4b.	191
Tabla 42. Clasificación de las respuestas a la pregunta 5, literales a, b y c.	194
Tabla 43. Clasificación de las respuestas dadas para la pregunta 6.	195
Tabla 44. Clasificación de respuestas dadas al numeral 7	197
Tabla 45. Clasificación de los literales a y b asociados a la pregunta 7.	203
Tabla 46. Clasificación de respuestas dadas a la pregunta 1a de la tarea 2.	206
Tabla 47. Clasificación de las respuestas relacionadas con la tabla 3.	211
Tabla 48. Clasificación de respuestas para el numeral 3.	212
Tabla 49. Clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 4a y 4b	215
Tabla 50. Clasificación de las respuestas dadas al literal a de la pregunta 5.	216
Tabla 51. Clasificación de las respuestas dadas al literal b de la pregunta 5.	217
Tabla 52. Clasificación de las respuestas dadas al literal c de la pregunta 5.	218
Tabla 53. Clasificación de las respuestas dadas al literal d de la pregunta 5.	219
Tabla 54. clasificación de las respuestas dadas a los literales a y b de la pregunta 6.	222

Resumen

Este trabajo se centra en la problemática asociada al poco énfasis que dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las funciones trigonométricas en la educación media colombiana, particularmente de la función seno, se da al estudio de la variación y la dependencia periódica. De esta manera, se propone el diseño e implementación de una propuesta de aula en el marco del enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), que permita la caracterización y modelación de fenómenos periódicos en contextos de la física y el reconocimiento de elementos fundamentales de la función seno como caso concreto de este tipo de variación.

La implementación y el análisis de las producciones de los estudiantes de grado décimo del Colegio Anglo Americano, deja ver la apropiación de algunos aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional en torno al estudio de la periodicidad en contextos realistas adaptado de la física, tales como: el reconocimiento de las matemáticas como medio para organizar la realidad, la interpretación, uso y relación entre los sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico cartesiano y algebraico y la modelación de situaciones de naturaleza periódica. Además, desde el principio de niveles de la EMR, permitió que los alumnos se movilizaran en los distintos niveles de comprensión adjuntos a la matematización progresiva, es decir los procesos de matematización horizontal y de matematización vertical en los cuales surgen diferentes estrategias informales, modelos de –representación gráfica de la función seno- y modelos para –el conteo, la representación tabular y algebraica de esta función.

Introducción

Este trabajo centra su atención en el estudio de fenómenos de variación periódica y la función seno como caso concreto de este tipo de variación. Esta propuesta referencia algunas investigaciones (Santacruz (2016, p 6), Buendía, (2004) citada por Montiel (2005, p. 109), Montiel (2005, p. 109) y Cordero (2002, p 55)) que han determinado que la periodicidad es la propiedad analítica más relevante de las funciones trigonométricas, a través de las cuales adquiere sentido en ámbitos escolares. No obstante, Santacruz (2005, p. 130) afirma que el proceso de enseñanza de la trigonometría escolar, ha limitado lo funcional a una enseñanza estática que privilegia el enfoque de las razones o cocientes entre las medidas de las magnitudes de los lados de un triángulo rectángulo y limita estos elementos asociados directamente al estudio de la variación, la covariación y la relación funcional, por ende la propiedad de la periodicidad.

De esta forma, desde el enfoque de la EMR, los referentes curriculares colombianos (MEN (1998, 2006)) y los elementos disciplinares matemáticos, se articula una propuesta de aula que permite a los estudiantes caracterizar algunos elementos de la función seno, desde la identificación y modelación de fenómenos físicos de naturaleza periódica que les ayuda en el estudio de la variación, es decir al desarrollo del pensamiento variacional.

La implementación de las tareas asociadas a la propuesta y el análisis de resultados de las producciones de los estudiantes del grado décimo Colegio Anglo Americano del municipio de Santiago de Cali con respecto a la modelación de fenómenos de naturaleza periódica adaptados de la física hace explícito el reconocimiento de la variación periódica y el uso de diferentes estrategias que se generalizan a dos tipos de modelos, estos son: “modelo de” la representación gráfica de la función seno y “modelos para” la noción de periodo, el conteo, la representación tabular y algebraica de la función seno.

El primer capítulo muestra los aspectos generales de esta propuesta de aula. Se inicia con la presentación del problema que orienta la formulación de los objetivos de la investigación, después se realiza la justificación de la misma a partir de algunos elementos teóricos y termina con la referencia de algunas investigaciones como antecedentes del presente trabajo.

El segundo capítulo gira en torno a los referentes teóricos que orientan este trabajo y se constituyen en elementos fundamentales para la elaboración de la propuesta de aula, así como para el análisis y el planteamiento de algunas conclusiones y reflexiones didácticas a partir de los resultados de los estudiantes del grado decimo del Colegio Anglo Americano cuando resuelven las situaciones en contextos realistas tomados de la Física, que movilizan la variación periódica y pueden ser modelados por la función seno.

El tercer capítulo presenta los elementos asociados al diseño de la propuesta de aula a través de tres situaciones vinculadas desde los principios de la Educación Matemática Realista (EMR), los Lineamientos (1998), Estándares Básicos de Competencias (2006) y referentes matemáticos. Además, muestra aspectos relacionados con la implementación, aspectos relacionados con la población y la metodología utilizada durante la aplicación de la propuesta a partir del análisis de las respuestas dadas por los participantes en tablas que tipifican las preguntas con las diferentes respuestas dadas por los participantes a cada situación planteada y el análisis realizado a partir de los referentes teóricos definidos en el capítulo 2.

El capítulo 4 presenta las conclusiones, a partir de los objetivos, tanto general como específicos, el marco teórico referenciado en el capítulo 2 y el análisis de los resultados de la implementación de la propuesta de aula en el grado décimo del colegio Anglo Americano. Posteriormente, se realizan algunas reflexiones finales relacionadas con los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones periódicas, particularmente la función seno, su vínculo con situaciones en contextos propios de la física y modeladas por tal función. Al finalizar el capítulo se presentan los referentes bibliográficos.

Capítulo 1.

Aspectos generales de la propuesta

Capítulo 1. Aspectos generales de la propuesta

Este capítulo muestra los aspectos generales de esta propuesta de aula. Se inicia con la presentación del problema que orienta la formulación de los objetivos de la investigación, después se realiza la justificación de la misma a partir de algunos elementos teóricos y termina con la referencia de algunas investigaciones como antecedentes del presente trabajo.

De esta manera, la presentación del problema toma aspectos teóricos, tanto curriculares -el MEN Lineamientos (1998) y Estándares (2006)- como del enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) -sus principios y elementos didácticos desde los análisis realizados por el Grupo Patagónico de Didáctica de las matemáticas (GPDM)- con el fin de presentar una propuesta que vincule estos elementos en pro de potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Así, los objetivos sintetizan el diseño, implementación y análisis de la propuesta en tanto vincula diferentes perspectivas (curricular, didáctica y matemática) al enfoque de la EMR. Por último, la justificación y los antecedentes citan investigaciones nacionales e internacionales en torno a los procesos de enseñanza y de los procesos de aprendizaje de las funciones trigonométricas, en particular la función seno, así como el enfoque de la EMR.

1.1. Presentación del problema

Las prácticas escolares en el área de matemáticas, pese a las políticas educativas existentes en Colombia como lo son los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006), continúan asociadas a procesos de enseñanza y a procesos de aprendizaje que privilegian procedimientos mecanicistas, en la insistencia de enseñar esta disciplina como algo terminado, al poco interés en reconocer la construcción de la misma, ni tomar en consideración los saberes previos del estudiante, así como la falta de coherencia entre lo que se enseña y la realidad del estudiante.

Por el contrario, las matemáticas ha evolucionado con las necesidades del ser humano a través de la historia por medio de diversas investigaciones en la disciplina misma y en otras ciencias; por ello, se espera que las prácticas de enseñanza de la matemática escolar muestren el impacto a nivel epistemológico e histórico propios de estos saberes. En contraposición, las prácticas escolares tienen aspectos que restan importancia a elementos de tipo histórico, epistemológico, didáctico, entre otros, que han sido importantes en la construcción del saber matemático. Tal es el caso de la noción de función, la cual históricamente surge de la asignación

uno a uno en las relaciones propias del hombre; sin embargo, algunas prácticas de la enseñanza de la función inician con la definición formal de este concepto, como relación entre dos conjuntos y se deja de lado todo aspecto relacionado con el cambio, la variación y la dependencia.

Así, los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006) privilegian la conexión entre los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las matemáticas con situaciones problema de la vida cotidiana y de otras disciplinas que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. No obstante, la implementación de estas políticas muestra la falta de conexión entre lo curricular y las prácticas educativas que permean actualmente el sistema educativo. Por tanto, se hace necesario priorizar en indagaciones que potencialicen un nuevo paradigma de la Educación Matemática donde se privilegie la relación de la matemática, tanto con otras disciplinas como con la realidad de los estudiantes.

En este sentido, esta investigación se centra en los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de la función seno; en tanto el discurso escolar para las funciones trigonométricas sigue ligado a una presentación estática y tradicional que privilegia en primer lugar, la definición de la función seno desde las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, luego su redefinición a partir del círculo trigonométrico y por último, ejercicios que buscan que el estudiante logre efectuar la gráfica de la función seno con el propósito de ilustrar algunas propiedades de la misma, entre las que se encuentra la propiedad de periodicidad. (Buendía, 2004; Montiel, 2005 citadas por Santacruz 2016, p 6).

Esta postura tradicional de enseñanza para las funciones trigonométricas y el hecho de que diferentes investigaciones (Santacruz (2016, p 6), Buendía, 2004, citada por Montiel, 2005, p. 109) y Montiel (2005, p. 109)), conlleva a un escaso tratamiento del modelo funcional periódico dentro del aula, en tanto se limitan las funciones trigonométricas a las razones o cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. Así, la variación periódica se presenta como una característica de las funciones trigonométricas, siendo este tipo de función donde, como concepto, encuentra definición escolar.

En este sentido, los Estándares (2006, p 67) proponen, desde los primeros grados de escolaridad actividades que buscan llevar a los estudiantes al uso de patrones numéricos,

geométricos, de leyes y reglas de tipo natural que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras.

Por tanto, dar relevancia al trabajo con la función seno desde una propuesta de aula que permita a los alumnos la matematización de diferentes contextos realistas periódicos potencializa no solo el desarrollo del pensamiento variacional, sino también de los pensamientos numérico y métrico, en tanto los estudiantes pueden reconocer, interpretar, argumentar y proponer estrategias que les ayuden a comprender la matemática y algunos aspectos variacionales relacionados con este tipo de función. De esta forma, el enfoque de la EMR aporta, desde sus principios fundamentales elementos didácticos, entre otros, a la elección de estas situaciones realistas que sean susceptibles de ser matematizadas por los alumnos; tal proceso de matematización se define como una organización de la realidad.

A su vez, diferentes indagaciones teóricas y prácticas (Buendía & Montiel 2005, 82; Israelí 1996; Boyer 1996; Israelí, 1996; Cordero, 2002; Bell, 2003 y Camarena, 2007) muestran que la física a través de la historia ha aportado a la construcción conceptual de diferentes saberes de la matemática, entre los que se destacan, la función cuadrática, el cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales y las funciones trigonométricas, particularmente la función seno. Asimismo, Israelí (1996) citado por Tigreros (2009) realiza un análisis histórico de la relación entre el desarrollo de la física y la modelación matemática de algunos saberes propios de esta disciplina; estas indagaciones parten de la explicación de fenómenos naturales, culturales o sociales y después se lleva a la construcción de modelos más formales que apuntan a generalizaciones.

En el caso histórico, en la medición y la astronomía en la edad antigua, Buendía & Montiel (2005, p 69) afirman que las prácticas iniciales fueron actividades en diversas culturas que muestran la importancia del contexto astronómico en la predicción de situaciones culturales o geográficas.

Por lo tanto, este trabajo busca resaltar la importancia de incluir situaciones realistas tomadas y adaptadas de diversos contextos de la física en la enseñanza de la función seno y analizar el proceso de matematización progresiva realizado por los estudiantes del grado décimo del Colegio Anglo Americano de Cali; desde el enfoque de la Educación Matemática Realista, propuesto por Hans Freudenthal (1973, 1991) en tanto permite entender la matemática como una

herramienta para organizar situaciones reales¹ a través del estudio de la matematización. En el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje de la función seno. Así, este trabajo se enfoca en responder el siguiente interrogante:

¿Qué elementos asociados a la variación y dependencia periódica se movilizan, desde la implementación de una propuesta de aula con estudiantes de Educación Media, que utiliza la función seno para modelar algunos fenómenos periódicos de la física, en el marco del enfoque de la EMR?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Caracterizar algunos elementos asociados a la variación y dependencia periódica que movilizan los estudiantes de grado décimo del Colegio Anglo Americano a través de la implementación de situaciones problemas, dentro de una propuesta de aula, que utiliza la función seno para modelar algunos fenómenos periódicos de la física.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Articular en una propuesta de aula políticas curriculares (Lineamientos (1998) y Estándares (2006)) y elementos disciplinares (matemáticos), bajo el enfoque de la EMR para movilizar aspectos variacionales y periódicos de la función seno.
- Identificar algunos elementos de la variación y dependencia periódica de la función seno desde el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) y los referentes curriculares (Lineamientos (1998) y los Estándares (2006)), a partir de las producciones de los estudiantes de grado décimo del Colegio Anglo Americano.
- Establecer algunas reflexiones de tipo didáctico con base en los análisis de los resultados de la implementación de la propuesta de aula, sobre la pertinencia de vincular la física como una disciplina que provee contextos realistas en los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones periódicas, en particular de la función seno.

1.3. Justificación

En la actualidad la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en Colombia son procesos orientados por diferentes políticas educativas - Lineamientos (1998) y Estándares Básicos

¹ Una situación es real o realista cuando es susceptible de ser imaginada por el sujeto.

(2006)- que buscan desarrollar en los estudiantes el pensamiento matemático y su conexión con las necesidades de la actualidad. Para ello proponen centrar la atención en las formas de enseñar la matemática y el impacto de estas prácticas en el aprendizaje de los estudiantes.

Es de aclarar que la enseñanza de la matemática es muy amplia y se estructura en diferentes conjuntos de grados de escolaridad a través de estrategias enfocadas en el trabajo con el contexto, el saber matemático y los procesos matemáticos que permitan a los alumnos comprender la realidad a partir de las estrategias matemáticas que utilizan cuando resuelven situaciones problema. Por tanto, es importante centrar esta propuesta en los elementos curriculares mencionados que se relacionan con los objetivos planteados. Así pues, esta investigación busca el diseño, implementación y análisis de una propuesta de aula que permita vincular, bajo el enfoque de la EMR, diferentes contexto realistas tomados de la física para el desarrollo del pensamiento matemático (particularmente el pensamiento variacional) a través de la matematización de fenómenos periódicos susceptibles a ser modelados por la función seno.

Es preciso señalar que el enfoque de la educación matemática realista (EMR) promueve una enseñanza de la matemática centrada en la actividad matemática de los estudiantes a través del proceso de matematización; el cual está definido como la forma en que los alumnos organizan matemáticamente la realidad, presentada por el docente en diferentes situaciones problemáticas realistas que ayuden al estudiante a desarrollar o reinventar sus estrategias empleadas para tal fin. De esta manera, es fundamental la elección de situaciones en diferentes contextos que sean utilizadas en la resolución de problemas tanto de la matemática como de su entorno y que les permitan -a los estudiantes- comprender la realidad misma y modelarla a través de sus producciones.

Asimismo, diferentes posturas (Buendía & Montiel 2005, 82; Israelí 1996; Boyer 1996; Cordero, 2002; Bell, 2003 y Camarena, 2007) muestran en sus investigaciones en cuanto a los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones trigonométricas, el impacto de la física en el desarrollo de algunos saberes matemáticos, tanto históricamente como en la inclusión de esta disciplina en la prácticas escolares. Particularmente, esta propuesta sintetiza estas indagaciones en la postura de la EMR, dado que el estudio del proceso de matematización² permite enfocar el contexto como un mensaje que es codificado por el estudiante a través de la

² Proceso definido como la organización de la realidad. Bressan (2004, p 4).

matemática (Freudenthal 1991, citado por Bressan, 2004, p 5), indagar diversos fenómenos³, recurrir a la evolución histórica de la matemática para reconocer su construcción e incluirla en el contexto siempre que los alumnos tengan la capacidad de visualizarlo o imaginarlo y procurar una orientación guiada que fomente una reinención de la matemática, dado que ni crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas.

Además, este proceso de reinención se complementa con la matematización progresiva (Treffers 1987, citado por Bressan, 2006, p 6) a través del análisis de la propia actividad matemática, lo que permite que los alumnos pasen por distintos niveles de comprensión⁴. Como afirma Bressan (2006, p 8) estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el estudiante en cada uno, sirve para monitorear sus procesos de aprendizaje. Así pues, los modelos⁵ y la reflexión colectiva se introducen como instrumentos básicos para el cambio de nivel. Ellos son las representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionar la situación dada.

Dicho de otra manera, este proceso de matematización se basa en el análisis reflexivo del trabajo oral y escrito de los estudiantes, con particular atención en los momentos claves. (Búsqueda de atajos, cambios de punto de vista, creación o apropiación de modelos más elaborados, etc.).

³ Para Freudenthal algo es considerado un fenómeno cuando se tiene una experiencia de ello e incluye como fenómenos los mismos medios de organización de la matemática (estrategias, conceptos y notaciones). Bressan (2004, p 5).

⁴ La noción de niveles de comprensión proviene en gran medida de las ideas de Van Hiele (1957), citado por Bressan (2004, p 7), ya que está estrechamente vinculada al uso externo del lenguaje y otros medios de simbolización (por ejemplo, modelos y formas de notación).

⁵ La noción de modelo que se usa en la EMR es un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada a fines de volverla susceptible de un tratamiento matemático formal (Freudenthal 1991, citado por Bressan 2004, p 8).

En definitiva, esta investigación vincula políticas educativas, la física como disciplina que aporta contexto realistas y la matematización progresiva alrededor del proceso de enseñanza de la función seno, con el fin de reconocer los diferentes niveles de comprensión, desde el enfoque de la EMR en los estudiantes del grado décimo del Colegio Anglo Americano de la ciudad de Cali a través de la implementación y el análisis de situaciones realista de variación periódica.

1.4. Antecedentes

Como se presenta anteriormente, este capítulo muestra algunos aspectos generales que diferentes posturas aportan al diseño y análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las tres situaciones -con sus respectivas tareas- implementadas en la propuesta de aula y la importancia del estudio de las variaciones periódicas, los contextos realistas, los vínculos de la matemática con otras disciplinas, la enseñanza y el aprendizaje de la función seno.

1.4.1. Una propuesta de aula para la enseñanza de las funciones periódicas seno y coseno desde un enfoque variacional

Este trabajo de maestría en educación con énfasis en educación Matemática busca movilizar en los estudiantes el estudio de situaciones periódicas en las que se reconoce la periodicidad de las funciones seno y coseno. Así, Santacruz (2016, p 88-102) propone tres situaciones diseñadas bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR). La primera, se enfoca en el reconocimiento de la periodicidad de las fases de la luna, su relación con el calendario lunar y algunos efectos en la agricultura. En la segunda, se presenta la situación de un deportista de alto rendimiento quien realiza un movimiento periódico de subir y bajar unas escaleras. Por último, presenta a los estudiantes un contexto de medición en el que moviliza, a través de diferentes representaciones – tanto icónica como verbal, tabular y gráfica- elementos que lleven a los alumnos a la identificación de la gráfica cartesiana de las funciones seno y coseno, así como la periodicidad de estas funciones. Algunos de los elementos que se resaltan de esta investigación son:

- El uso de los principios de realidad y de actividad, de la EMR en la caracterización y modelación de fenómenos periódicos en tanto permiten a los estudiantes un acercamiento a fenómenos de variación periódica que hacen parte de su realidad.

- Las estrategias de implementación de la propuesta, en tanto se generan espacios de trabajo en equipo, discusión y socialización alrededor de diferentes soluciones a las tareas tanto en la aplicación de las situaciones como en las plenarias realizadas al finalizar cada una de estas.
- La problemática reconocida en la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón en torno a los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones, particularmente de las funciones periódicas, que hace referencia a la falta de conexión con el acercamiento previo de los estudiantes a situaciones y fenómenos de cambio y variación cotidianos, así como del estudio de patrones y regularidades periódicas de forma numérica, geométrica o gráfica, desde el primer conjunto de grados de la Educación Básica, donde el énfasis se centra como lo establecen los Estándares (2006, p. 81) en la descripción cualitativa de este tipo de situaciones a través de registros de representación gráfico y lengua natural, entre otros.

La investigación resalta que a través de contextos realistas que movilicen la variación periódica se puede realizar un acercamiento no tradicional a elementos propios del pensamiento variacional en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones trigonométricas, desde el enfoque de la EMR.

1.4.2. Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones

Este artículo (Buendía, 2006) presenta una socioepistemología – o epistemología de prácticas – acerca de la periodicidad de las funciones, que tiene como aspecto principal el reconocimiento de dicha propiedad. Además, de diversas problemáticas del desarrollo de la periodicidad dentro de la escuela, donde la poca coherencia entre la existencia y la aplicabilidad de una definición matemática de periodicidad lleva a una problemática relacionada con el poco significado de la definición formal de la propiedad periódica y la asociación de esta propiedad con cualquier tipo de repetición que se presente una gráfica.

Buendía (2006, p 233) propone una situación (compuesta de dos secuencias, que a su vez se conforman por dos actividades y una última de una sola actividad) que gira en torno al

comportamiento repetitivo de gráficas de funciones que describen movimientos y retoma elementos identificados alrededor de la construcción de lo periódico. Algunos elementos que se resaltan de este artículo son:

- Los elementos principales se refieren al uso del comportamiento de la gráfica como una herramienta para la construcción significativa de lo periódico. así como a la predicción como una práctica intencional, que logra una resignificación. Con los ejemplos se pretendió dar cuenta de cómo se articulaban dichos elementos.
- Al predecir el comportamiento del móvil a través de su gráfica, hay una búsqueda de alguna unidad fundamental para comparar los estados futuros con el presente. Esta búsqueda inicia no sólo con la tarea explícita de realizar una predicción, sino desde la misma descripción del movimiento que permite entender y reconocer el tipo de movimiento en cuestión. (Buendía 2006, p 246).
- Esta necesidad de precisar el comportamiento de cada variable (tiempo distancia) en el marco de la práctica de predicción favorece una identificación útil de lo periódico dentro del contexto de las funciones, lo cual va mucho más allá de poder aplicar o no una definición para determinar el carácter periódico de un movimiento.
- lo que perciba un alumno acerca de la repetición de un movimiento se reformula para dar cabida a un reconocimiento del atributo periódico.

Por consiguiente, el uso de lo gráfico, de la predicción, el reconocimiento de variables y la identificación del cambio son elementos que se privilegian en el estudio de la periodicidad. Además de la inclusión explícita de contextos de movimiento espacio temporales ayudan a generar una realidad en la que esta propiedad logre una resignificación hacia la definición formal poco trabajada en la escuela.

1.4.3. Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica

Este estudio de doctorado en ciencias en matemática educativa (Montiel, 2005) centra su atención en el fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la función trigonométrica, donde involucra aspectos cognitivos, epistemológicos, didácticos y aporta fundamentos de carácter social para explicar el fenómeno en cuestión. Algunos elementos que se resaltan de esta investigación son:

- La vista de las funciones trigonométricas como una extensión de las razones, cuya única explicación con respecto a la unidad de medida radica en la equivalencia entre grados y radianes en el círculo trigonométrico, de lado los usos y significados que dan origen a las funciones trigonométricas y la relación de las matemáticas con otras áreas escolares que se contemplan en la formación de los estudiantes.
- La relación entre la matemática y otras áreas escolares, no se concibe como una simple aplicación (perspectiva tradicional), sino que por el contrario para el caso de la función trigonométrica, es en esas otras áreas (física, química, biología) donde se originan las nociones, ideas y conceptos matemáticos que dotan de significado, utilidad y sentido a este tipo de función.
- La matemática deben entenderse y aprenderse en la medida en que conviven en la construcción de conocimiento relacionado con otras asignaturas escolares, como se muestra históricamente.
- El enfoque clásico triángulo rectángulo $\rightarrow$ círculo trigonométrico $\rightarrow$ función trigonométrica limita el reconocimiento de las variaciones presentes en las funciones trigonométricas, la matematización de la astronomía, matematización de la física y matematización de la transferencia de calor que posibilitaron la emergencia de este tipo de función.

Por consiguiente, Montiel (2005) afirma que, tanto el reconocimiento como la aplicación de la génesis de las funciones trigonométricas y los aportes de diferentes contextos a la conceptualización de las mismas en las prácticas escolares potencializan el estudio de las variaciones de las funciones trigonométricas, de las variaciones periódicas y de la importancia que implica el estudio de diferentes contextos susceptibles a ser modelados por estas funciones.

1.4.4. La matemática en el contexto de la ciencia

Camarena (1984, 1987, 1990, 1995, 1999, 2000a, 2009), presenta la importancia de las ciencias, en particular de la física, en la actividad matemática en la escuela; así, en su teoría la matemática en el contexto de la ciencia (MCC), sostiene que la relación entre la matemática y el contexto de la ciencia se debe hacer presente en diferentes momentos de la escolaridad y realiza una comparación entre algunos elementos matemáticos con asignaturas de cursos de ingeniería electrónica:

En cuanto a las ingenierías, relaciona las ecuaciones diferenciales ordinarias y los circuitos eléctricos, el análisis de Fourier y el análisis de señales electromagnéticas; lo que muestra la asociación de casos particulares de funciones periódicas modeladas por la función seno.

La relación anterior destaca la importancia de abordar situaciones problemas, en este caso de la Física, en el desarrollo del pensamiento matemático; en particular, asociadas a la enseñanza de la función seno en la escuela. Así, esta revisión del contexto de la Física y de algunas situaciones que son modeladas por la función seno se citan también el Movimiento Circular Uniforme, Sistema Masa Resorte, Péndulo Simple, los Movimientos Armónico Simples (MAS) variaciones en la corriente alterna de un circuito, entre otras.

De esta forma, Camarena (2009, p 16), entre otras, la fase didáctica, en la que plantea la implementación de situaciones problemas que fomenten el desarrollo de habilidades a través de las cuales los estudiantes logren identificar el modelo a utilizar en la solución de las tareas, dar solución a lo propuesto e interpretar esta solución en términos del fenómeno y contexto presentado.

Por lo anterior, la MCC sustenta la elección de la física como una de las disciplinas que aportan contextos realistas a la enseñanza de la matemática.

De manera general, los antecedentes presentados muestran algunas de las investigaciones vigentes en el campo de la didáctica de las matemáticas con relación, tanto a la función seno -su estudio variacional y periódico- como al vínculo de la física en la enseñanza de las matemáticas, particularmente de este tipo de función periódica.

Capítulo 2.

Marco Teórico de Referencia

Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia

Este capítulo gira en torno a los referentes teóricos que orientan este trabajo y se constituyen en elementos fundamentales para la elaboración de la propuesta de aula, así como para el análisis y el planteamiento de algunas conclusiones y reflexiones didácticas a partir de los resultados de los estudiantes del grado decimo del Colegio Anglo Americano cuando resuelven las situaciones en contextos realistas provenientes de la Física, que movilizan la variación periódica y pueden ser modelados por la función seno.

En primer lugar, se realiza una aproximación general a algunos elementos del enfoque de la Educación Matemática Realista EMR, su definición, sus principios fundamentales y el trabajo con modelos matemáticos que propone este enfoque y su importancia en la interpretación de situaciones problemas en contextos reales. Luego, se hace una explicación detallada de los principios que define la EMR: el principio de actividad, de realidad, de interconexión, de reinención, de interacción y de niveles; estos dan lugar a las reflexiones teóricas del enfoque en lo referente a la matematización horizontal y matematización vertical.

Asimismo, se presenta el uso, reinención y generalización de los modelos en la EMR y se analiza cómo su adopción y reestructuración inicia desde la interpretación de la situación misma hasta llegar a grados mayores de formalización.

En segundo lugar, desde los Lineamientos (1998) y los Estándares (2006), se busca resaltar algunos puntos en común que tiene la investigación teóricas referenciadas anteriormente con estas propuestas curriculares de Colombia. Más aún, su relación con el desarrollo del pensamiento matemático a través de los procesos generales, conocimientos básicos y contextos (MEN 1998, p 19),

Dado que estos tres elementos y los intereses de la propuesta de aula, se centra la atención en el proceso general de modelación matemática ya que hace referencia a la manera de cómo los estudiantes logran representar mental, gestual, gráfica o simbólicamente las situaciones propuestas. (MEN 2006, p 53). Además, en los conocimientos básicos, se centra la atención, como se presenta anteriormente, en la función seno; cabe resaltar, que la enseñanza de la función seno se movilizan diferentes elementos propios del pensamientos variacional propuesto por los lineamientos (1998, p 25), en particular se analiza el estudio de la variación, las diferentes

representaciones utilizadas para dicha variación, el estudio de patrones, de regularidades gráficas cartesianas. MEN (1998, 2006).

Por último, se presenta los referentes propios de la matemática que dan lugar a las definiciones previamente usadas en el desarrollo de estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la función seno.

2.1. Aproximación al enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR)

Los aspectos generales de la EMR se adoptan de las reflexiones realizadas por el Grupo Patagónico de Didáctica de las matemáticas desde la postura que Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016) y Bressan, Zolkower y Gallego (2004) asumen de las diversas obras de Hans Freudenthal considerado el fundador de la EMR y de autores como Panhuizen, Gravemeijer y Treffers; además se consideran las reflexiones e implementaciones realizadas Santacruz (2016) y Pérez (2012).

El enfoque de la EMR surge en la década de los 70 en Holanda como respuesta al movimiento de la matemática moderna; la vigencia del enfoque se reconoce en la inclusión de este en diferentes países que promueven la actividad del docente como una actividad de investigación que busca mejorar las prácticas en el aula y motivar a los estudiantes a aprender la matemática desde su realidad con una postura activa frente a la comprensión de la misma.

Así, se pretende que la enseñanza de la matemática tenga un nuevo paradigma, que deje a un lado las prácticas de tradicionalistas centradas en la enseñanza de un saber y la desarticulación de lo enseñado con la vida cotidiana y sus posibles aplicaciones en otras disciplinas de formación y que vincule el quehacer en matemática con la realidad misma del estudiante; es decir que, el aprender esta disciplina debe ser una actividad humana incluyente que permite al estudiante tener la libertad para desarrollar elementos matemáticos nuevos, de reinventar y reformular los que ya tiene establecidos (Bressan et al. 2016, p 2).

Cabe aclarar que la definición de realidad suele ser relativa respecto al individuo y tiene diferentes acepciones; la EMR adopta el termino realidad, según Van Der Brink, (1973) citado por Van Den Heuvel-Panhuizen (2009), como las situaciones que los estudiantes puedan imaginar, incluso más allá de lo tangible y de la autenticidad de estas; aunque esto no signifique que la vida real no sea importante, esta postura elimina la restricción a estudiar solamente lo que

se pueda captar a través de los sentidos. Así amplía el espectro a la inclusión eventos imaginarios, fantasiosos o propios de la matemática misma. Este conjunto de situaciones se toman como idóneas para movilizar lo que se quiere enseñar, siempre que el estudiante tenga la capacidad de hacerlos reales en su mente y de comprenderlos.

Por tanto, tal como lo dice Freudenthal (1991, p. 32) citado por Bressan et al. (2016, p. 2): “la imagen de la matemática debe ser enmarcada dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de las matemáticas dentro de la sociedad”.

A continuación se presentan los principios de la EMR que organizan y particularizan el quehacer del docente y del estudiante en el aula cuando se está buscando enseñar y aprender matemática.

2.2. Principios de la Educación Matemática Realista

La EMR se organiza en principios relacionados entre sí con el fin de orientar el análisis de los resultados propios de las investigaciones que usan el marco teórico; sin pretender ser una teoría general de aprendizaje estos principios articulan tres elementos resaltados por Freudenthal (1993) citado por Bressan (2006, p. 2), en primer lugar, pensar la matemática como una actividad humana, de tal modo que sea una matemática incluyente; en segundo lugar, aceptar el desarrollo de la matemática en distintos niveles donde las situaciones que propician la actividad matemática como las estrategias que desarrollan los estudiantes para interpretar y solucionar lo presentado en ella tienen una relevancia fuerte y por último, la reinención guiada, como actividad de matematización, para promover la relación entre la realidad del alumno y la matemática a través de dos fuentes principales: la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas de los estudiantes.

De este modo, se describen los principios de la EMR y se caracterizan sus particularidades; así, el principio de actividad, de realidad, de reinención, de niveles, de interacción y de interconexión, da lugar a la matematización relacionándose entre sí.

2.2.1. Principio de Actividad

Este principio presenta que la matemática debe ser pensada como una actividad humana incluyente y sostiene que la mejor forma de hacer matemática es haciéndola; es decir, que el

estudiante debe descubrir la matemática desde su proceso de construcción más no como un producto ya terminado. En esta vía, Freudenthal (1993, IX) citado por Bressan (2006, p. 2) dice: “las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma”. Lo que invita a pensar el hacer matemática como el centro más allá del aprendizaje del contenido acabado. Por tanto, Freudenthal (1991), citado por Bressan (2006, p. 2) sostiene que lo significativo no es aprender algoritmos, sino el proceso de algoritmización, no el álgebra sino la actividad de algebrizar, no las abstracciones sino la acción de abstraer, no la forma y la estructura sino el formalizar y el estructurar.

Igualmente, la educación matemática, en este enfoque, se centra en que la matemática debe ser para todos, sin la pretensión de hacer matemáticos a todos los estudiantes, la finalidad de la enseñanza de esta disciplina es llegar a la mayoría de los alumnos y lograr que ellos reconozcan su importancia en la comprensión de situaciones reales propias de la cotidianidad y susceptibles a ser matematizadas.

2.2.2. Principio de Realidad

El principio de realidad destaca que la matemática surge como el hecho de matematizar la realidad, el cual debe originar el aprendizaje de esta disciplina; es decir, la realidad no solo es vista como lo tangible, sino como toda situación apta para que el estudiante la imagine, la realice y la razone. Se busca que el alumno sea capaz de resolver situaciones que se enmarcan en la vida diaria y use su sentido común, procedimientos del cálculo y que tome el contexto como punto de partida para la actividad matemática.

De esta manera, se debe fortalecer el proceso de elección del contexto y lograr que este en lugar de ser una fachada que el estudiante ha de eliminar para llegar al algoritmo ya establecido, sea una herramienta que aporte a la interpretación de la situación y que este inherente a la situación problema misma; también que aporte al mensaje que será codificado en términos matemáticos al iniciar a interpretarse con las herramientas que posee el estudiante, algunas tales como el uso del sentido común, de estrategias informales, algoritmos aprendidos anteriormente, entre otras que le posibiliten avanzar a niveles de mayor formalización por sus propios medios de acuerdo con las exigencias del contexto y de la situación misma.

Una situación será realista o no si tiene en cuenta la experiencia previa de los estudiantes y su capacidad de imaginarla o visualizarla para llegar al posible uso de muchas de estas

situaciones como modelos mentales que les facilitan recordar las estrategias de resolución de estas.

2.2.3. Principio de Interacción

La EMR toma la matemática como una actividad social, esto hace que la discusión acerca de las interpretaciones de la situación problema, distintas clases de estrategias y justificaciones de solución y de la adecuación y eficiencia de los mismos tenga un lugar central en el enfoque.

La interacción lleva a la reflexión, lo que permite que los estudiantes reconozcan algunas de sus habilidades asociadas a diferentes niveles de comprensión, algunos básicos y otros más elevados. Esto se potencializa a través de clases heterogéneas donde las situaciones propuestas dotan diferentes espacios para que se utilicen estas habilidades. Lo que permite lograr que puedan trabajar en equipo y que cada uno adquiera un papel principal en su aprendizaje y logre tomar sus propias decisiones en el momento de mostrar sus destrezas al interpretar las situaciones problema, lo que propicia un docente guía u orientador y unos estudiantes autónomos al momento de presentar sus habilidades para interpretar, resolver y, si se logra, generalizar lo propuesto en la situación de aula.

2.2.4. Principio de interconexión (estructuración)

Para la EMR el principio de interconexión hace referencia a la relación entre los distintos ejes curriculares; para lo que el enfoque no hace fuertes distinciones entre ellos. Por el contrario, busca la interrelación entre las diferentes disciplinas ya que, según Bressan (2011) lo importante es permitir la coherencia entre la enseñanza y los distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, para lograr concordancia a través del currículo. Freudenthal (1991) propone que la interrelación debe realizarse tan pronto, tan fuertemente y con tanto tiempo como sea posible. Justamente la interpretación de situaciones problemáticas realista a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y manejo en algunas herramientas matemáticas.

“Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación” (Freudenthal, 1982).

2.2.5. Principio de Reinención

Este principio de reinención resalta el rol del estudiante y el docente en la construcción del conocimiento matemático. Desde la EMR, Pérez (2012, p. 67) la matemática es considerada como una forma de sentido común solo que más organizada. El enfoque sostiene que el sentido común es la base para llegar a una matemática que sea más organizada y con un nivel más alto de formalización, lo que permite que al constituir la base para una matemática de orden aun mayor se revela una jerarquía tremenda y constituida por un notable interjuego de fuerza”.

Este principio lleva al docente a propiciar diferentes oportunidades orientadas a reinventar la matemática y resaltar el reconocimiento de esta disciplina en el aula, donde no se crea ni se descubre, sino que se reinventa a través de modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas, donde el educador se convierte en el mediador entre los alumnos y las situaciones problemas. A esto se le llama reinención guiada y se presenta de manera discontinua y relativa a los intereses de los estudiantes.

Por tanto, este principio hace explícito el papel, las responsabilidades del docente y de los estudiantes en la interacción llamada reinención guiada que para Freudenthal (1991), citado por Pérez (2012, p. 68), no es más que un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar.

2.2.6. Principio de Niveles

Como complemento para el principio de reinención, Freudenthal (1991) toma de Treffers (1978, 1987) la matematización progresiva como el proceso que realizan los estudiantes cuando interpretan la situación en particular; este se hace presente, en primera instancia, cuando se analiza un contenido o tema de la realidad para complementar el análisis de su propia actividad matemática. Esta matematización se estudia desde dos aspectos: la matematización horizontal y la matematización vertical.

Así, la matematización horizontal consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva. Además, los estudiantes pueden identificar y describir la matemática que yace en el contexto, reconocer regularidades y relaciones, analogías con otros problemas, etcétera.

Por otra parte, matematización vertical se define en la matemática misma y es caracterizada por el ajuste de los modelos, la esquematización conceptual y formalización progresiva. De esta manera, conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización prueba, simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

La EMR argumenta que en la matematización Progresiva los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión y estos ayudan a tipificar el proceso de aprendizaje de los estudiantes quienes presentan sus producciones activas cuando comprenden una situación real y devela elementos como el desarrollo de modelos, su evolución y el uso de lenguaje de distintas categorías cognitivas; de esta forma, en estos elementos se puede reconocer el paso de “modelo de” a “modelo para”. Bressan (2016, p.4) sostiene que “modelo de” porque es relativo a una situación particular y se busca llegar a “modelo para” que ya son para razonar matemáticamente en situaciones diversas dentro y fuera de la matemática misma.

Específicamente, estos niveles son: situacional, referencial, general y formal; los cuales están ligados al uso de estrategias, modelos y diferentes interpretaciones que se presentan en diferentes categorías cognitivas sin querer llegar a una jerarquía estrictamente ordenada. A continuación se realiza una breve descripción de cada uno.

En el nivel situacional se da la interpretación, por parte de los estudiantes, a la situación problema y se hacen explícitas las estrategias vinculadas al contexto de la misma al apoyarse en los conceptos informales, el sentido común y la experiencia. Es un nivel vinculado al contexto de la situación en el que los alumnos pueden reconocer analogías con otros problemas, formular el problema de otras maneras, descubrir relaciones y regularidades, entre otros.

El nivel referencial ya aparecen los modelos gráficos materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación en particular. En este nivel los modelos emergen como “modelos de” puesto que están intrínsecos a la situación que les dio origen.

El nivel general inicia de lo movilizado en el nivel anterior y logra explorarlo, reflexionarlo y generalizarlo, enfocándose en las estrategias matemáticas que superan al contexto, de allí que

se hable de “modelo para” porque aporta a la resolución de las situaciones problemas planteadas y las homologas; es decir surgen aspectos generalizables.

Por último en el nivel formal se comprende y se actúa con los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales propias de la matemática con que se está trabajando.

En síntesis, en la figura 1, tomada de Santacruz (2016. P 29) se muestra el proceso de matematización progresiva dividido en matematización horizontal y vertical en términos de los niveles de comprensión descritos.

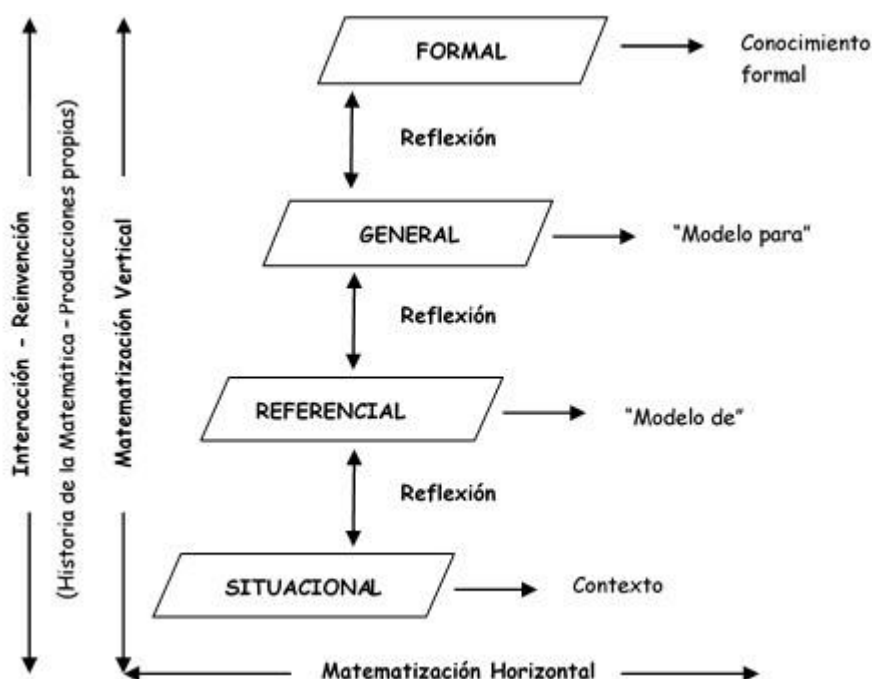


Figura 1. Niveles de comprensión en el proceso de matematización progresiva⁶

En la figura 1 se muestra el nivel situacional asociado a la matematización horizontal, pues su naturaleza es relacionar las producciones del estudiante con la situación propuesta en el contexto. Los niveles, referencial, general y formal, están asociados estrictamente al proceso de matematización vertical, proceso en el cual la reflexión sobre la propia actividad, tiene un papel decisivo para realizar adecuadamente un cambio de nivel.

⁶ Figura referenciada por Bressan (2016, p. 7), Santacruz (2016, p. 29), et al. Como niveles de *matematización* desde el enfoque de la Educación Matemática Realista.

Freudenthal, citado por Goffree (1993, p 16.), sostiene que la reflexión en el proceso de aprendizaje es el reconocimiento por parte de los alumnos de qué están haciendo y lo que es aún más importante, de tener la oportunidad de pensar sobre lo que ellos y sus pares han hecho.

2.3. El uso de modelos y la Modelación Matemática

Los modelos en el enfoque de la EMR, como lo afirma Panhuizen (2003, 4), son la manera en que se representan las situaciones problemas que refleja aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas; es decir, son las estrategias que toma el estudiante y pueden ser: gráficas, tablas, dibujos, esquemas, símbolos u otras formas de interpretar lo presentado; asimismo, los modelos reúnen al menos dos características: estar arraigados en contextos realistas imaginables y ser flexibles para ser aplicados en diferentes niveles de comprensión; así, estos modelos permiten al estudiante realizar una matematización horizontal y matematización vertical.

De esta forma, en la matematización horizontal, se espera que interprete la situación y algunos elementos de la misma, para después, en la matematización vertical se ubique en los niveles de comprensión previamente analizados, situacional, referencial, general y formal a través de la reflexión.

Esta importancia en el cambio de nivel y en la inclusión de la reflexión del estudiante mismo como elemento central en los procesos de matematización busca privilegiar el rol activo del alumno en su proceso de aprendizaje a través del reconocimiento de estos modelos; de esta manera, estos modelos deben ser reinventados y puestos a prueba en diferentes situaciones donde se haga explícito como responden a las necesidades asociadas a la misma.

Estos cambios de nivel de comprensión referenciados anteriormente a través de la reflexión y en el uso de los modelos, son los que la EMR llama “modelos de” y “modelos para”. Es decir, como se inicia el aprendizaje en la interpretación de la situación problema para obtener modelos de la misma a través de la experiencia del estudiante y de sus saberes previos, y como este modelo se constituye en relación estrecha con el problema en cuestión; también, si este modelo se puede llevar a grados de mayor generalización y desligarlo de la situación particular entonces ya no solo es modelo de la situación, sino modelo para organizar situaciones que no guardan relación específica sino que reflejan algo más general.

Estos modelos, inventados o adaptados por los estudiantes mismos, deben ser promovidos por ambientes de aprendizaje, que son el conjunto de actividades, problemas y contextos situados en escenarios o trayectorias, guiados por el docente que propicien la reinención guiada de los mismos. Por tanto, la reinención guiada ayuda a que los estudiantes tengan la iniciativa, lo que permite que los modelos surjan y evolucionen de modo natural, a fin de que estos abran el camino a niveles más altos de comprensión para los estudiantes.

De esta forma, las actividades y situaciones donde se privilegie los ejercicios matemáticos centrados en movilizar saberes aislados a la realidad de los estudiantes y operaciones mecanicistas sin un objetivo claro no son elementos a tener en cuenta al momento de diseñarlas; ya que, como afirma Panhuizen (2003, 6) estas situaciones deben movilizar la necesidad de inventar o reinventar modelos, como planear y ejecutar etapas de solución, generar explicaciones, identificar semejanzas y diferencias y hacer predicciones con el fin de que los estudiantes reconozcan estructuras y saberes matemáticos en diferentes niveles de complejidad.

Por tanto, el enfoque de la EMR adopta la matematización como el proceso que inicia en la situación planteada en un contexto real y busca ascender en diferentes niveles de comprensión que van dando lugar al proceso de generalización en la matemática misma. Así, la matematización horizontal, que es la relativa a la situación problema planteada y devela “modelos de”; la matematización vertical, que se asocia al paso del “modelo de” la situación al “modelo para” representar, generalizar y, si se logra, formalizar el conocimiento matemático en juego. De esta forma se permite que el estudiante tome un papel activo en su proceso de aprendizaje y pueda cambiar de nivel de comprensión siempre que lo requiera la situación.

2.4. Referente curricular

Los documentos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, Lineamientos (1998) y los Estándares (2006), promueven el análisis del quehacer docente y dan lugar a una serie de investigaciones didácticas, epistemológicas, históricas, entre otras, que centran el acto de enseñar matemática en la actividad del estudiante y busca superar el paradigma impuesto por la matemática moderna, hasta la década de los 70's, donde se pensaba que enseñarla era memorizar una serie de contenidos y ejercitarse en ellos.

De esta forma, se privilegia una nueva visión que muestra la matemática como una construcción humana y como un resultado de la actividad grupal, la cual está condicionada por la

historia y la cultura (p 49). Así, los Lineamientos (1998, p 19) proponen tres aspectos generales que orientan la actividad académica en el aula:

Los procesos generales que se relacionan directamente con el aprendizaje, tales como razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Los conocimientos básicos, se enmarcan en el desarrollo del pensamiento matemático por medio de procesos específicos propios de las matemáticas, y a su vez propenden por desarrollar el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros. Asimismo, se relacionan con sistemas como lo son: los sistemas numéricos, geométricos, de medida, de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

El contexto, tiene que ver con los ambientes en que el estudiante está inmerso y puede imaginar una situación real que le dé sentido al quehacer matemático.

En lo relativo a los pensamientos matemáticos, centrar el interés en uno de ellos delimita la indagación acerca de los modelos que adoptan los estudiantes cuando resuelven una situación problema; así no se elimina la importancia de los otros pensamientos. Por lo anterior se hace énfasis en el pensamiento variacional, ya que está directamente asociado con el concepto de función y los diferentes cambios presentes en el estudio de la misma, sea cual sea la naturaleza de la variación.

En cuanto a los procesos matemáticos generales, se privilegia la modelación matemática definida por el MEN (2006, p 53) como una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella. Esta elección se fundamenta en la relación directa entre su definición, el desarrollo del pensamiento variacional y el vínculo de este proceso con diferentes contextos, particularmente de las ciencias. Es de resaltar que los Estándares (2006, p 53) toman como sinónimos los términos modelación matemática y matematización.

De igual manera, los Estándares (2006, p 53) resaltan que la modelación matemática tiene diferentes acepciones desde diversas perspectivas didácticas. Particularmente, para el enfoque de la EMR, matematización es diferente a Modelación Matemática, ya que la matematización en la EMR se presenta en dos formas: matematización vertical y matematización horizontal, a

diferencia del proceso de modelación que se toma como el paso de los elementos que desarrolla el estudiante para interpretar la situación (matematización horizontal) que es el uso de “modelos de” la situación para llegar a elementos de mayor nivel de comprensión que están asociados a los modelos para explicar otras situaciones y llegar ya sea a la generalización o la formalización de los mismos.

En cuanto los Estándares (2006, p 16) sostienen que la relación entre los pensamientos mencionados anteriormente se presenta a través de la coherencia horizontal, lo que permite la relación entre el saber y el hacer en elementos para desarrollar las habilidades del estudiante para interpretar, resolver y modelar diferentes situaciones. Por tanto, la coherencia horizontal es la relación entre los pensamientos asociados al pensamiento matemático y que se vinculan en un mismo grupo de grados.

En otro sentido, el MEN (2006, p 15) propone los siguientes grupos: de primero a tercero, de cuarto a quinto, de sexto a séptimo, de octavo a noveno y de décimo a undécimo; con el fin de garantizar un mejor desarrollo de las habilidades de los estudiantes. Específicamente, esta propuesta se enmarca en el grupo de décimo a undécimo.

Por último, respecto a los contextos que movilizan los saberes previos en diferentes situaciones ya sean de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas o de otras disciplinas, se aborda lo propuesto por el enfoque de la EMR: se presenta una situación real que permita al estudiante tomar elementos de ella para interpretar lo que necesite. Lo que significa que la elección de este contexto es vital para el desarrollo del pensamiento matemático, pues un contexto no familiar al estudiante se puede convertir en una barrera para el aprendizaje en lugar de un elemento que promueva la actividad matemática.

Por lo tanto, se hace prioritario incluir en esta propuesta de aula la relación entre estos tres elementos del currículo Colombiano y analizar algunos elementos de la modelación matemática, pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos y la física como una de las disciplinas que aporta situaciones en contextos realistas a los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, se caracterizan a continuación los elementos curriculares de esta implementación que se hacen explícitas por el MEN (1998; 2006).

2.4.1. La Modelación Matemática en los Lineamientos y los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas

Los Lineamientos (1998) afirman que la actividad matemática en la escuela se destaca porque los estudiantes aprenden matemáticas “haciendo matemáticas”; esta tendencia, sustentada por el enfoque de la EMR, se presenta cuando los estudiantes se enfrentan a la interpretación de una situación problema planteada en un contexto real y puede usar libremente sus saberes previos para buscar solucionarla.

El proceso que permite la relación entre las situaciones del mundo real y los diferentes modelos matemáticos que se asocian a estas se le define como modelación matemática. En la figura 2 se hacen presentes los elementos que están en juego en el proceso de Modelación Matemática visto como la construcción de modelos.

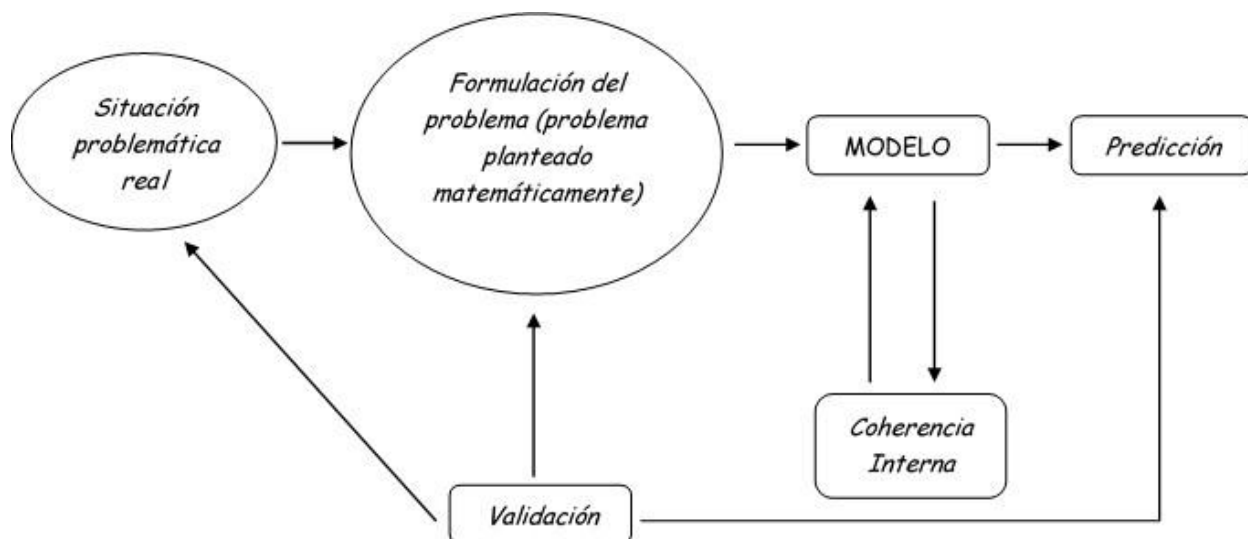


Figura 2. Elementos básicos de la construcción de modelos⁷.

En la figura 2, los Lineamientos (1998, 97), resalta que la definición de Modelación Matemática tiene su inicio en una situación real y llega a su término cuando se reconoce un modelo matemático o varios modelos matemáticos que respondan a la exigencia que la situación requiera y que pueda resolver situaciones asociadas al mismo modelo matemático.

⁷ Fuente: Lineamientos (1998, p 76)

Así, esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, debe precisarse más, de acuerdo a los intereses de quien resuelve la situación; esto permite que se pueda formular un problema y después aproximarse a través de medios matemáticos. Igualmente, buscar esquematizar matemáticamente e interpretar la situación son elementos esenciales para una situación problema real.

De este modo y al citar a Treffers y Goffree, los Lineamientos (1998, p 98) definen la Modelación Matemática como: “una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas”.

De igual manera, este proceso de modelación matemática hace referencia no sólo a una imagen mental simplificada sino también a los Modelos Matemáticos que estructuran y crean un pedazo de realidad, dependiendo del conocimiento, intereses e intenciones del que resuelve el problema.

El proceso que lleva de la situación real al planteamiento matemático según los lineamientos citados por Santacruz (2016, p 39) es a lo que Freudenthal ha definido como Matematización Horizontal y muestran que algunas actividades que pueden ayudar a este proceso son:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Esquematizar, formular y visualizar un problema en diferentes formas.
- Descubrir relaciones y regularidades.
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático.
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.

Después de este proceso de Matematización Horizontal Freudenthal propone una Matematización Vertical que consiste en la búsqueda de herramientas matemáticas que respondan a actividades como:

- Representar una relación en una fórmula.
- Probar o demostrar regularidades.
- Refinar y ajustar modelos.

- Utilizar diferentes modelos.
- Combinar e integrar modelos.
- Formular un concepto matemático nuevo.
- Generalizar.

Así, la generalización se posiciona como el grado más alto de Modelación Matemática.

Asimismo, los Estándares (2006, 54) toman como sinónimos la Modelación Matemática y matematización -aunque realizan una diferenciación desde el enfoque de la EMR, los toma como el mismo proceso desde una forma básica-; es de notar que, desde el principio de interconexión, se hace la diferencia entre ambos procesos ya que la matematización, tanto matematización horizontal como matematización vertical, se adopta como el proceso de interpretación de la situación real hasta la generalización y formalización propias de la matemática, por otra parte, la Modelación Matemática se adopta como aquel que recoge los elementos del proceso de matematización progresiva desde la interpretación del contexto, el desarrollo de habilidades, el paso a los “modelos de” y “modelos para” hasta el reconocimiento del modelo matemático utilizado o desarrollado.

Esta diferenciación se resalta cuando se analizan las diferentes herramientas que utilizan los estudiantes cuando interpretan una situación problema y permite ubicar sus respuestas en niveles de comprensión, desde el enfoque de la EMR, que ayudan al estudiante a pasar de herramientas necesariamente sujetas a la situación⁸.

Por tanto, en este trabajo se toma la modelación matemática como el proceso que abarca tanto la Matematización Horizontal como la matematización vertical.

Por otra parte, los Estándares Básicos de Competencias (2006, p 54) resaltan la relación entre Modelación Matemática y el pensamiento variacional puesto que esta se interesa por el reconocimiento de patrones, variaciones y las relaciones entre variables para conseguir estructuras matemáticas perdurables.

De esa manera, los Estándares (2006, p 66) afirman que: este pensamiento cumple un papel muy importante cuando se resuelven situaciones problemas que centran su atención en el estudio

⁸El enfoque de la EMR le denomina “modelos de” a las habilidades de los estudiantes presentes en la *Matematización Horizontal*.

de la variación y el cambio, en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. Es así que el proceso de Modelación Matemática aporta a los elementos de este trabajo cuyo interés es la variación y en el reconocimiento de la periodicidad de la función seno en la escuela.

Además, el pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos como se amplía a continuación.

2.4.2. El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos: el concepto de función periódica.

Según los Lineamientos (1998, 49), la enseñanza de la matemática ha superado la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y busca privilegiar el estudio de conceptos y procesos estructurados entre sí; esto permite reconocer la variación por medio de cantidades y magnitudes en situaciones tanto de la vida práctica como en un contexto científico; asimismo, la variación se muestra en las dependencias entre variables o de una sola variable que cambia. Por lo anterior, se busca que el estudiante documente, explore, utilice lenguaje matemático, entre otras habilidades que considere necesarias para analizar la situación de variación propuesta.

El estudio del cambio y la variación, según los Lineamientos (1998, p 49) son las ideas claves que orientan el estudio del pensamiento variacional y le hacen transversal a los otros pensamientos matemáticos y busca que los estudiantes logren analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones problemas en diferentes actividades prácticas del hombre, su vida cotidiana, las ciencias y la matemática misma.

Además, los Estándares (2006, p 66) afirman que el desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón.

De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. Esta descripción del pensamiento variacional estrechamente sujeta al proceso de modelación hace que el estudio de los elementos de variación y de periodicidad de la función seno tenga mayor sentido cuando se realiza en la escuela, particularmente, cuando se vinculan contextos como los de la vida cotidiana, los de la matemática misma y los de otras disciplinas.

2.4.3. Coherencia vertical y coherencia horizontal

Es así como estos elementos curriculares enfocados al desarrollo del pensamiento matemático, particularmente el pensamiento variacional está estrechamente relacionados con el concepto de función. Esta correlación se presenta a través de todos los conjuntos de grados en diferente nivel de complejidad. (Estándares 2006, p 79) y se le llama coherencia vertical.

La coherencia vertical, conecta los saberes matemáticos en juego con diferentes formas, representaciones, niveles y estrategias. En la tabla 1 se presenta la coherencia vertical de diferentes Estándares propuestos por el MEN (2006 79-89) para desarrollarse a lo largo de la actividad matemática escolar en el aula enfocada en la enseñanza de la función seno.

Tabla 1. Coherencia vertical para la función seno en el pensamiento variacional.

Coherencia vertical pensamiento variacional relacionado con la función seno	De 10° a 11° Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.
	De 8° a 9° Análisis en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
	De 6° a 7° Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones

verbales generalizadas y tablas).
De 4° a 5° Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
De 1° a 3° Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.

Es de aclarar que lo presentado en la tabla 1 corresponde a una relación propuesta desde los Estándares (2006, p 79) que da razón de lo que los estudiantes deben alcanzar en cada uno de los conjuntos de grados con el desarrollo del pensamiento variacional en relación con la función seno. Asimismo, este desarrollo de la matemática esta enriquecido por la modelación matemática, entre otros procesos y por diferentes contextos, como lo son la matemática misma, la vida cotidiana y otras disciplinas.

Por otra parte, el pensamiento variacional, se relaciona con los otros pensamientos, a través de la coherencia horizontal, propuesta por los Estándares (2006, p 79) como una forma de relación entre Estándares de diferentes pensamientos en un mismo conjunto de grados. Cabe recordar que los Estándares (2006, p 57) y los lineamientos (1998, p 25) realizan la subdivisión del pensamiento matemático en pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Para esta propuesta de aula centrada en la enseñanza y en el aprendizaje de la función seno se realiza un análisis de los Estándares de los grados décimo y undécimo relativos a los diferentes tipos de pensamientos matemáticos con el fin de rastrear la coherencia horizontal asociada a este saber en cuestión. En la tabla 2 se presenta un estándar del pensamiento variacional y la correlación de este con uno o varios Estándares de los otros pensamientos mencionados anteriormente.

Tabla 2. Coherencia horizontal para el estándar asociado al pensamiento variacional.

De 10° a 11°	
Pensamiento variacional. Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas	Pensamiento numérico: Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.
	Pensamiento métrico: Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.
	Pensamiento espacial: Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
	Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.
Coherencia horizontal	

La tabla 2 deja ver que las políticas educativas promueven el desarrollo del pensamiento matemático a través de diferentes pensamientos, entre ellos el pensamiento variacional; por ellos es fundamental diseñar una propuesta de aula que dejen ver la conexión entre diferentes situaciones de contexto, pensamientos matemáticos referenciados y procesos matemáticos que permitan al estudiante el reconocimiento de sus saberes previos y como utilizarlos en la resolución de determinado tipo de tareas.

2.5. Referentes matemáticos

Además de los elementos didácticos y curriculares ya presentados, en este apartado se consideran los aspectos disciplinares que orientan, en primer lugar, el planteamiento y diseño de esta propuesta de aula y en segundo lugar, el análisis y las conclusiones de los resultados de la implementación de la propuesta con los estudiantes de grado décimo del colegio anglo americano. Es de notar que el diseño de la propuesta toma diferentes saberes que aportan al desarrollo del pensamiento matemático, particularmente, lo variacional y el desarrollo del concepto de función. además que se abordan conceptos matemáticos formales que delimitan los saberes a movilizar a través de las situaciones planteadas, tales como el concepto de relación, función, dominio, rango, función periódica, función seno y sus representaciones.

2.5.1. Definición de relación y función.

Para Apóstol (1981, p 41) una relación es un conjunto de pares ordenados, que se define a partir de un conjunto A de dos elementos $\{a, b\}$ donde:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

(a, b) se le llama par ordenado. De la anterior expresión se comprueba el siguiente teorema:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y solo si, } a = c \text{ y } b = d$$

El anterior teorema hace referencia a una función; según Apóstol (1988, p 63-67), una función f es el conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento. El conjunto de todas las x se le conoce como dominio de f y el conjunto de todas las y se le conoce como rango.

Es decir que para cada elemento x del dominio de f existe uno y sólo un elemento y tal que:

$$f(x) = y$$

Lo que implica que (x, y) pertenece al conjunto f .

2.5.2. Definición de función periódica, función trigonométrica y función seno.

2.5.2.1. Definición de función periódica:

Apóstol (1988, p 117) define una función periódica f como:

$$f(x) = f(x + p) \text{ para todo } x \text{ que pertenece al dominio de } f$$

Es de notar, tal como lo afirma Takeuchi (1985, p 5), que f tiene periodo en p , así como en $2p$, $3p$, $-2p$ y en general kp , donde k es un entero diferente de cero. Por tanto, el periodo p se denomina al $p > 0$ para el cual se cumple la expresión anterior. Las funciones periódicas más comunes son las funciones circulares y las funciones trigonométricas. Por ejemplo, la función seno es una función periódica, cuyo periodo es 2π ; donde π es el área del círculo unitario (de radio 1).

Apóstol (1988, p 117) resalta la importancia de la física en el desarrollo histórico de la noción de periodo y toma como ejemplos diferentes situaciones: vibraciones, movimiento planetario y ondas; lo anterior con el fin de mostrar que en la génesis de la función seno, los aportes que la física como disciplina ha realizado al desarrollo del concepto de función periódica han sido significativos a través de la historia. Tal es el caso del sonido, corrientes eléctricas alternas, ondas electromagnéticas, etc. (Takeuchi 1985, p 5).

2.5.2.2. Acercamiento a las funciones trigonométricas:

Takeuchi (1985, p 49) llama a la correspondencia entre medidas de ángulos y elementos del conjunto de los números reales, funciones trigonométricas. Además realiza el estudio de las unidades de medida de los ángulos: el sistema sexagesimal, que toma la circunferencia en 360 partes y el radian. Que divide la circunferencia en 2π . De lo que se obtiene la equivalencia: $360 \text{ grados} = 2\pi$.

Apóstol (1985, p 117) cita las 6 funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, como funciones que comparten la propiedad de periodicidad y resalta que las funciones seno y coseno son la base del análisis matemático de diferentes situaciones tomadas de movimientos planetarios, vibraciones y ondas.

Existen diferentes formas de introducir la definición de cada una de las funciones trigonométricas mencionadas; para el interés de este trabajo, se toma en consideración la definición de la función seno.

2.5.2.2. La función seno:

Takeuchi (1985, p. 17) define la función seno a partir de la definición de punto geométrico: $p(t) = (x, y)$, con t igual a la medida del arco desde $(1, 0)$ hasta p y a cada número real t , la función coordenada asocia un par de números reales (x, y) tales que:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Entonces, si a cada número real t se le asocia la segunda componente del punto $p(t)$, se obtiene una nueva función denominada función seno; definida como:

$$\text{funcion seno} = \{(t, y)/p(t) = (x, y)\}$$

seno: $t \rightarrow y$ donde y es la ordenada de $p(t)$ y la imagen t bajo la función seno es $\text{seno}(t)$. La cual se escribe $\text{sen } t$.

Se sabe, por definición, que el dominio de la función seno son todos los números reales y el rango se obtiene al analizar la expresión de la función seno; de lo que resulta que:

$$\text{rango de seno} = \{y: -1 \leq y \leq 1\}$$

Es decir, los valores de $\text{sen } t$ varían entre -1 y 1.

Dado que la función seno tiene como periodo 2π , se restringe el estudio de la gráfica a los valores del intervalo abierto $(0, 2\pi)$. Es de notar que la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ se obtiene al repetir la gráfica obtenida para $x \in (0, 2\pi)$. La figura 3 muestra la representación gráfica de la función seno en el intervalo $(0, 2\pi)$.

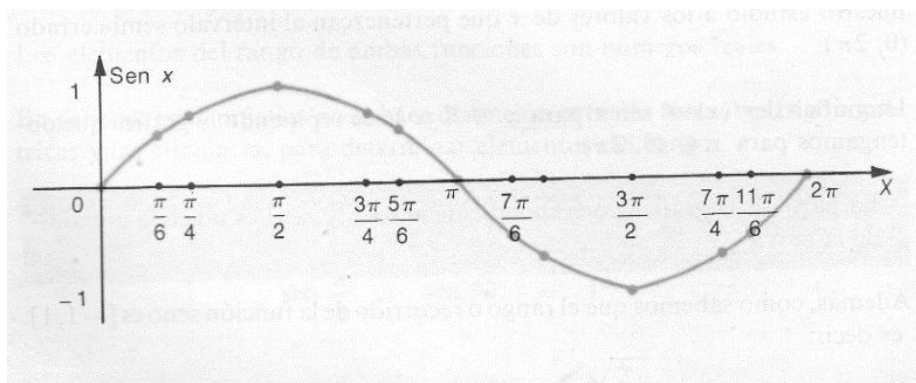


Figura 3. Representación tabular y gráfica de la función seno.

Es de notar que la tendencia de la representación gráfica mostrada en la figura 3 está dada por el teorema: la función seno es estrictamente creciente en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ y los valores dados por la expansión en serie de Taylor presentada en el siguiente apartado (2.5.3).

Por otra parte, Montiel (2005, p 118) presenta la figura 4 como una relación entre la circunferencia unitaria (circulo trigonométrico) y la representación gráfica cartesiana de la función seno.

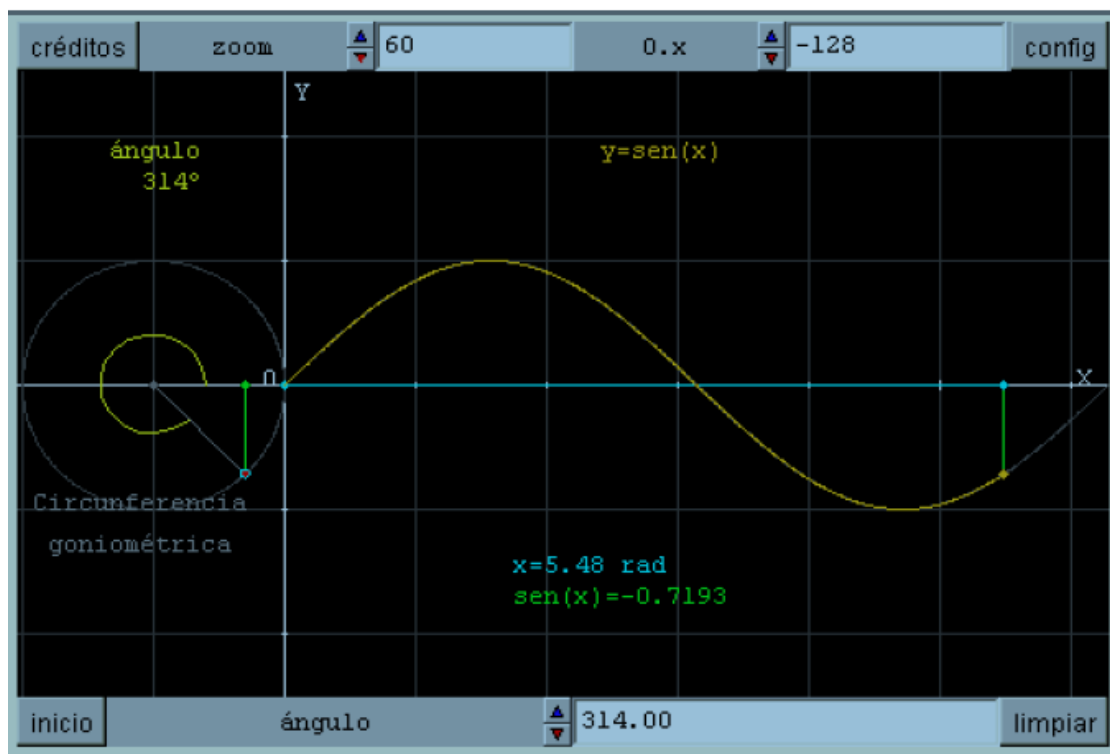


Figura 4. Del círculo trigonométrico a la función trigonométrica en el plano⁹

La figura 4 deja ver el paso de los grados (color amarillo asignado al ángulo en la circunferencia) a los radianes (color amarillo presentado en la representación cartesiana). Además la relación entre la circunferencia unitaria y la representación cartesiana de la función.

2.5.3. Descripción analítica y geométrica de la función seno.

La descripción analítica se realiza con base al capítulo 11 de Apóstol (1985, p 532): Sucesiones y series de funciones (citado por Santacruz (2016, p 54-57)) respecto a la función seno y su expansión en series de Taylor.

Apóstol (1985, p 528) afirma que cada serie real de potencia define una función suma cuyo valor en cada x del intervalo de convergencia está dado por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

⁹ Tomado de Montiel (2005, p 118).

Donde la función f es representada por la serie en el intervalo de convergencia $(a - r, a + r)$. Entonces se tiene que la derivada $f'(x)$ existe para cada x del intervalo de convergencia y se expresa por:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$$

De esta demostración se logra que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Propiedad que se puede formular como un teorema de unicidad para los desarrollos en series de potencias y a esta se le llama serie de Taylor generada por f en a .

De la convergencia de la serie de Taylor se presenta como condición suficiente que:

“Si f es infinitamente derivable en un intervalo abierto $I = (a - r, a + r)$, y si existe una constante positiva A tal que $|f^n(x)| \leq A^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, y todo x de I , entonces la serie de Taylor generada por f en a converge hacia $f(x)$ para cada x de I ” (Apostol, 1988, p. 533).

Lo anterior permite el desarrollo en series de potencias del seno para:

$$A = 1 \text{ si } f(x) = \text{sen } x$$

De lo que se obtiene la expansión en serie:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \forall x \in R.$$

Válida para todo x real. De lo que sigue que las propiedades de la función seno se pueden deducir de forma analítica y extrapolarse a las demás funciones trigonométricas. Algunas de estas son:

$$\text{sen } 0 = 0; \text{ sen } (-x) = -\text{sen } x; (\text{sen } x)' = \cos x$$

Así, la descripción analítica de la función seno surge de las expansiones en serie de potencia trabajadas. Con respecto a la descripción geométrica se cita a Apóstol (1985)

En una circunferencia de radio r y centro en el origen, se asigna el punto $A = (r, 0)$ y P a cualquier otro punto de esta. Los segmentos rectilíneos OA y OP determinan el ángulo AOP , representado por el símbolo $\angle AOP$ (ver figura 6).

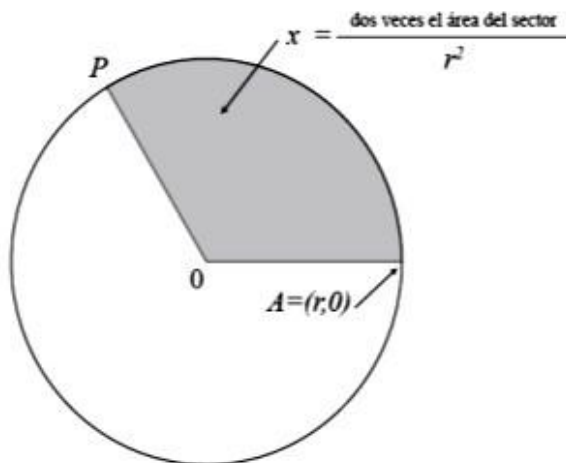


Figura 5. Ángulo $\angle AOP$ de x radianes

Se quiere asignar a este ángulo un número real no negativo x que pueda verse como medida de su magnitud. El proceso consiste en considerar la circunferencia unitaria y llamar x a la longitud del arco AP , descrito en el sentido contrario a las manecillas del reloj y decir que la medida de $\angle AOP$ es x radianes.

Para obtener una medida independiente de la unidad de distancia se toma la medida del $\angle AOP$ como el doble del área del sector AOP dividida por el cuadrado del radio. Esta unidad de medida obtenida recibe el nombre de radian, así se tiene que la medida de un $\angle AOP$ es x radianes si $\frac{x}{2}$ es el área del sector AOP determinado en el disco circular unidad.

Dado que π designa el área de un disco circular unidad, “cuando $P = (-1,0)$, el sector AOP es un semicírculo de área $\frac{\pi}{2}$, de modo que subtiende un ángulo de π radianes. El disco completo es un sector de 2π radianes. Si inicialmente P está en $(1,0)$ y se desplaza una vez alrededor de la circunferencia en sentido contrario al de las agujas del reloj el área del sector AOP crece de 0 a π , tomando todos los valores del intervalo $[0,\pi]$ exactamente una vez” (Apostol, 1988, p. 127).

El seno queda definido en términos de un número más que de un ángulo, de tal manera que esta función está determinada sobre la recta real. Para esto, se considera un número x ($0 < x < 2\pi$) y un punto P de la circunferencia unitaria tal que el área del sector AOP sea igual a $\frac{x}{2}$, donde (a, b) son las coordenadas de P (figura 7).

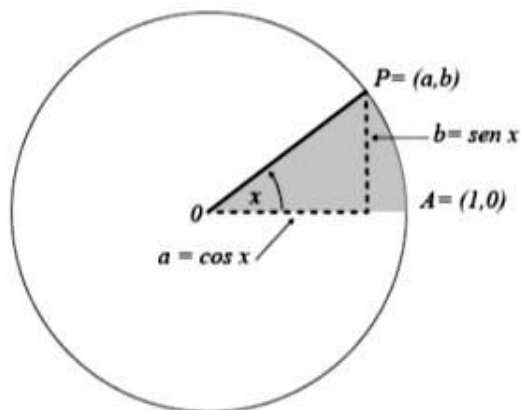


Figura 6. Descripción geométrica de $\text{sen } x$

Los números a y b están completamente definidos por x . En consecuencia, se tiene que: $\text{sen } x = b$ es decir $\text{sen } x$ es su ordenada.

La determinación del seno como función definida en el intervalo $(0, 2\pi)$ se realiza mediante la asignación de valores a x :

Cuando $x = \pi$, $P = (-1, 0)$ de tal manera que $\text{sen } \pi = 0$.

La extensión de la función seno a todo el eje real se hace por medio de igualdades y expresiones que involucran la propiedad de periodicidad de esta función.

$$\text{sen } 0 = 0, \quad \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x$$

Takeuchi (1985, p 62) analiza estos resultados a través de los intervalos de crecimiento y decrecimiento; los clasifica así:

para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la curva es creciente

para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la curva es decreciente

para $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ la curva es creciente

Estos referentes matemáticos que resaltan la función desde una relación conjuntista, de una correspondencia variacional y covariacional se relacionan en este trabajo a través de la propuesta de aula diseñada para que los estudiantes logren movilizar la noción de dominio y rango de la función, la dependencia entre las variables relacionada en determinada situación susceptible a ser modelada por la función seno y que los estudiantes reconozca en esta relación funcional diferentes elementos geométricos, numéricos y variacionales de la función seno: representación gráfica, intervalos de crecimiento y decrecimiento,

Por tanto, todos los elementos del capítulo 2 sustentan el diseño de la propuesta de aula que busca potenciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional a partir del estudio de estos elementos matemáticos y curriculares desde una mirada del enfoque de la EMR. Así, las tres situaciones que componen la propuesta de aula articulan el enfoque de la EMR, desde sus principios, los Lineamientos (1998) y Estándares (2006) -desde la caracterización del pensamiento variacional-, los diferentes sistemas de representación tabular, gráfico, verbal y algebraico y el contexto de las situaciones de la física adaptadas para promover el desarrollo de modelos y el proceso general de modelación. Con el fin de suscitar en los estudiantes el estudio de las definiciones, conceptos, representaciones analíticas, algebraicas y cartesianas, que constituyen las diversas tareas que componen la propuesta de aula y aportan tanto al análisis como a las reflexiones didácticas finales generadas en el presente trabajo.

Capítulo 3.

La función seno en el aula

Capítulo 3. La función seno en el aula.

Este capítulo presenta los elementos asociados al diseño la propuesta de aula a través de tres situaciones vinculadas desde los principios de la Educación Matemática Realista (EMR), los Lineamientos (1998), Estándares Básicos de Competencias (2006) y referentes matemáticos. Además, muestra aspectos relacionados con la implementación, aspectos relacionados con la población y la metodología utilizada durante la aplicación de la propuesta.

Por último, se analizan las respuestas dadas por los participantes en tablas que tipifican las preguntas con las diferentes respuestas dadas por los participantes a cada situación planteada. De la misma manera, se presenta el análisis y algunas conclusiones realizadas desde las políticas educativas y el enfoque de la EMR.

3.1. Diseño e implementación de la propuesta de aula

El diseño de las tres situaciones que contiene esta propuesta de aula se fundamenta en los referentes teóricos que se describen en el capítulo 2, tales como los principios de la EMR, Lineamientos (1998), Estándares (2006) y algunos referentes propios de la matemática.

La primera situación, reconozcamos fenómenos periódicos en nuestro sistema solar, se divide en tres tareas y busca resaltar la presencia de fenómenos periódicos en la realidad del estudiante. Es por ello que centra la atención en los principios de actividad y de realidad de la EMR ya que el principio de actividad sostiene que el estudiante aprende matemáticas cuando se enfrenta a situaciones problemas¹⁰ de diferentes contextos que ayudan al desarrollo de diferentes estrategias a través de sus saberes previos; además, el principio de realidad sostiene que se deben proponer al estudiante situaciones problemas que sean susceptibles de ser imaginadas por él.

Según los Lineamientos (1998, p 24) el contexto es preponderante en las diferentes fases de la enseñanza y del aprendizaje, lo que permite que los estudiantes puedan hacer el descubrimiento o una reinención de la matemática. Por su parte, los Estándares (2006, p 66) en lo que concierne al pensamiento variacional, presentan que la caracterización e identificación de la variación y el cambio se debe asociar a diferentes contextos, así como su descripción,

¹⁰ Situación problema se asume, desde el enfoque de la EMR, como los elementos del contexto que aportan a la realidad del estudiante y que le proveen elementos que hagan explícitas las estrategias que utiliza en su aprendizaje.

modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos; características determinantes en el diseño de la situación 1.

Cabe añadir que, según Montiel (2005, p 70), se presentan históricamente diferentes conexiones entre lo periódico y la astronomía, por ejemplo los egipcios, a través de observaciones, predecían fenómenos naturales que afectaban su actividad agrícola, entre otras.

Por consiguiente, se plantean tres tareas que vinculan estos elementos para movilizar la propiedad matemática de periodicidad la cual cobra sentido en el aula solamente a través de las funciones trigonométricas, particularmente asociada a la función seno; como se muestra a continuación.

3.1.1. Situación 1: Reconozcamos fenómenos periódicos en nuestro sistema solar

La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones

La Tierra que está en continuo movimiento, presenta 4 tipos de movimientos: la traslación, la rotación, la precesión y la nutación. La traslación es el movimiento orbital que describe una trayectoria elíptica debido a la gravitación, alrededor del sol (ver figura 1) que realizan los planetas. Por su parte, la Tierra tarda 365 días, 5 horas y 57 minutos, equivalente a 365,2422 días en darle la vuelta al sol. Este tiempo que tarda el planeta Tierra en completar una vuelta alrededor del sol se conoce como un año. Así, el año del calendario usado hoy tiene 365 días y se realiza un ajuste cada cuatro años para compensar el tiempo que tarda en darle la vuelta al sol. En la figura 1 se muestra la traslación de la tierra alrededor del sol, así como los solsticios y equinoccios generados por este movimiento.

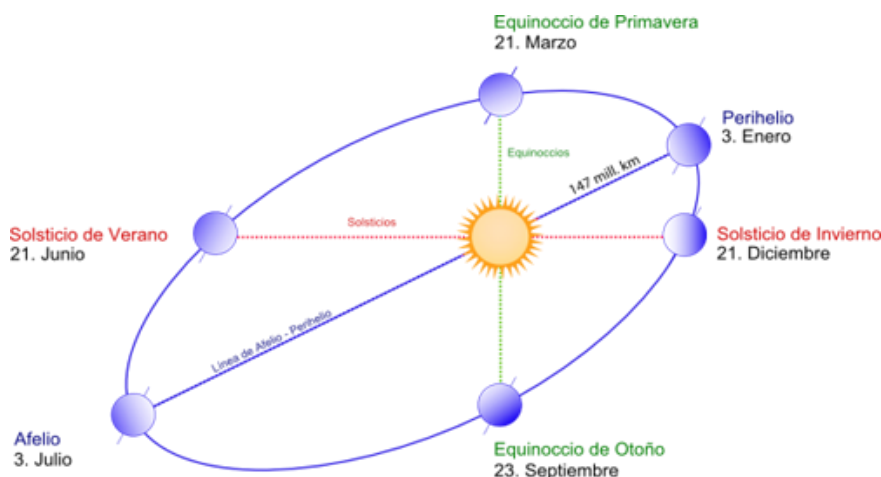


Figura 1. Solsticios y equinoccios en el hemisferio norte de la tierra, según su ubicación en la órbita alrededor del sol¹¹.

De acuerdo con la figura 1, al lugar de la órbita donde la Tierra se encuentra más alejada del sol se le conoce como afelio y ocurre el día 3 de Julio; y al lugar de la órbita donde la Tierra se encuentra más cerca al sol se le conoce como Perihelio y ocurre el día 3 de Enero.

Así, este movimiento y el grado de inclinación del eje de rotación de la Tierra (ver figura 2), generan los fenómenos naturales y climáticos que dan lugar a las cuatro estaciones del año; así, a los días cuando se evidencian los cambios de estaciones se les llama solsticios o equinoccios, es decir, son dos solsticios y dos equinoccios. De esta forma, para el hemisferio norte el solsticio de invierno se presenta el día 22 de diciembre con el cambio de otoño a invierno y el solsticio de verano se presenta el día 21 de junio; además, el equinoccio de otoño se presenta el día 23 de septiembre y el equinoccio de primavera se presenta el día 21 de marzo (ver figura 1).

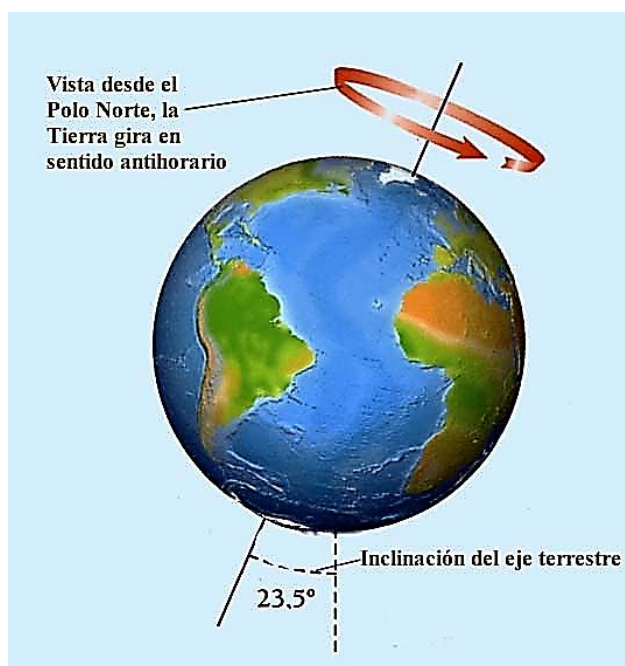


Figura 2. Inclinación del eje de rotación de la Tierra¹²

La figura 2 muestra que el grado de inclinación de la tierra es de $23,5^\circ$ respecto al eje vertical, por lo que se evidencia que mientras que en el solsticio de invierno (ver figura 1) el hemisferio norte está más alejado del sol, el hemisferio sur se encuentra cercano al mismo; así, la ocurrencia del solsticio de verano en el hemisferio sur es el mismo día que ocurre el solsticio de

¹¹ Tomada de <http://www.microsiervos.com/archivo/ciencia/por-que-ano-empieza-1-enero.html>. Referenciada el día 14 de marzo de 2017.

¹² Tomada de <http://juanbascon.blogspot.com.co/2010/09/blog-de-recursos-y-material-de-estudios.html>. Referenciada el 13 de marzo de 2017.

invierno para el hemisferio norte. Del mismo modo ocurre con los equinoccios, mientras que el hemisferio norte el día 23 de septiembre se encuentra en equinoccio de otoño, el hemisferio sur se encuentra en equinoccio de primavera.

Tarea 1: Interpretando la traslación de la tierra

Teniendo en cuenta la información dada en el texto: **La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones** y las figuras 1 y 2, responda las siguientes preguntas:

1. a. En qué consiste el movimiento de traslación de la tierra.
b. Explique qué es un año bisiesto.
2. a. Complete la siguiente tabla, tomando como referencia que el año 1600 fue bisiesto.

Año	1789	1880	1900	1980	1990	2010	2016	2022	2030
Bisiesto									
No bisiesto									

Tabla 1

- b. Explique cómo determinó la clasificación de cada año.
3. a. Indique los años bisiestos comprendidos entre 1579 y 2021.
b. Explique los aspectos que tuvo en cuenta para determinar los años bisiestos.
4. Indique verdadero (V) o falso (F). Justifique sus respuestas.
 - a. Todo año bisiesto es par ().
 - b. Todo año par es bisiesto ().
 - c. Si 1580 es bisiesto, entonces 1600 es bisiesto ().

Tarea 2. Estableciendo relaciones entre los hemisferios y las estaciones.

1. De acuerdo con el texto “**La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones**” y las figuras 1 y 2, determine:
 - a. Qué días se presenta el solsticio de verano y el solsticio de invierno para un país ubicado en el hemisferio sur.
 - b. Explique cómo determino estos días.
2. a. Indique para cada una de las fechas dadas, si el país se encuentra en un solsticio de invierno o en un equinoccio de primavera.

Países	21 de septiembre de 2019	15 de abril de 2025	22 de diciembre de 2030	21 de junio de 2031	23 de septiembre de 2028

Canadá					
Chile					
Francia					
España					
Sudáfrica					

Tabla 2

b. Explique la manera como estableció la relación entre las fechas, los solsticios y los equinoccios para cada país.

3. a. Complete la tabla 3 e indique la estación en la que se encuentra cada país.

Fechas	24 de marzo	16 de junio	15 de febrero	25 de diciembre	30 de julio	29 de septiembre	10 de octubre
Países	Estaciones del año						
Canadá							
Chile							
Francia							
España							
Sudáfrica							
Madagascar							
Japón							
India							

Tabla 3

b. Explique cómo estableció la estación para cada uno de los países en las fechas indicadas.

4. De acuerdo el texto “**La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones**” y la figura 1, realice un esquema de los solsticios y los equinoccios en la tierra para el hemisferio sur.

Tarea 3. Reconociendo regularidades periódicas

1.
 - a. Si los años 2000, 2008, 2012 y 2016 fueron años bisiestos, determine 5 años que vayan a ser bisiestos.
 - b. Explique la manera como predijo estos años.
 - c. Determine el tiempo que transcurre entre dos años bisiestos consecutivos. Justifique su respuesta.
2.
 - a. Determine el tiempo que transcurrido entre cada solsticio de invierno para una persona que se encuentre en el hemisferio norte.
Explique su respuesta.
 - b. Compare el tiempo transcurrido entre cada solsticio de invierno y tiempo transcurrido entre cada solsticio de verano. Realice algunas conclusiones al respecto.
 - c. Transcurre entre cada solsticio de invierno (entre cada solsticio de verano) en el hemisferio sur, el mismo tiempo que en el hemisferio norte. Explique a que se debe esta regularidad de tiempo transcurrido.
3.
 - a. Transcurre el mismo tiempo entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos para el hemisferio norte. Justifique su respuesta.
 - b. Transcurre el mismo tiempo entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos para el hemisferio sur. Justifique su respuesta.
 - c. Se puede decir que el tiempo que transcurre entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos es el mismo. Explique su respuesta.
4. Identifique la regularidad (en meses, días transcurridos) que se puede asociar a la variación de:
 - a. Los años bisiestos.
 - b. Los solsticios de verano
 - c. Los solsticios de invierno
 - d. Los equinoccios de primavera
 - e. Los equinoccios de otoño.
5.
 - a. Explique qué entiende por fenómeno periódico.
 - b. Determine cuáles de fenómenos mencionados en el punto 4, son periódicos. Explique su respuesta.
 - c. Para aquellos que señalo como periódicos, establezca el periodo.
 - d. Cite tres ejemplos de fenómenos periódicos diferentes a los aquí expuestos.

La primera tarea se centra en la traslación de la Tierra como fenómeno de la naturaleza periódico que da lugar al calendario y al año bisiesto, para lo que se implementa una lectura acompañada de una figura que ilustra los puntos espacio temporales en la órbita terrestre donde se presentan los cambios de estaciones a lo largo de la órbita de traslación de la Tierra alrededor del sol. Esta información está orientada a que el estudiante reconozca la periodicidad del año bisiesto y lo asocie a la periodicidad de este movimiento de la Tierra.

Puesto que, una de las características de lo periódico es que permite predecir un suceso esta tarea propone al alumno preguntas en las que se debe precisar que se entiende por año bisiesto, que categoricen algunos años como bisiesto o no, incluso que busquen recurrencias para identificar si un año determinado fue, es o va a ser bisiesto. En otras palabras, que logren predecir, lo que va a ocurrir o reconocer lo que ocurrió, a través de una variación periódica.

Las condiciones para definir si un año es bisiesto o no en el contexto de la situación corresponde a modificaciones en el calendario. Es importante resaltar que entre los diferentes calendarios (Chino, Hindú, Musulmán, Hebreo, Juliano, Gregoriano, entre otros) existentes se tienen en cuenta el Gregoriano y el Juliano; el primero se propone en el año 1582 para realizar una modificación en el existente y así, después del Jueves 4 de Octubre de 1582 se pasa al Viernes 15 de Octubre de 1582 (estos 10 días eliminados corresponden al acumulado de 1600 años durante los cuales solo se intercalaron cada cuatro años) y el segundo es el calendario que estaba vigente desde el año 46 Antes de Cristo hasta la instauración del calendario Gregoriano.¹³.

La información dada por la situación para la identificación del año bisiesto corresponde al calendario juliano es decir que el año bisiesto ocurre cada cuatro años iniciados en un año bisiesto dado; por otro lado, en el calendario Gregoriano, además de la condición dada para el calendario anterior, se excluyen los años múltiplos de 100 que no sea divisible por 400, por ejemplo 1900 es múltiplo de 100, por ende divisible por 4, pero no es divisible por 400, lo que hace que no sea un año bisiesto.

De este modo se realiza esta elección para movilizar lo periódico asociado en el año bisiesto en el calendario Juliano con el fin de llevar al estudiante a interpretar y reconocer en la

¹³ Tomado de <http://www.surastronomico.com/not-735-el-ano-bisiesto.html>. Referenciado el día 26 de julio de 2017.

realidad diferentes estrategias y habilidades movilizadas por las condiciones iniciales de la situación.

La segunda tarea centra su atención en la periodicidad de los solsticios y equinoccios que dan lugar al cambio de estación en los hemisferios norte y sur. Aunque las estaciones ocurren por el grado de inclinación del eje de rotación de la Tierra, la existencia de los equinoccios y solsticios se da por la traslación del planeta; es por ello que esta tarea busca que los estudiantes reconozcan la periodicidad de las estaciones del año, de los equinoccios y solsticios asociados a un hemisferio específico.

A través de una lectura y una figura, se presentan conceptos como equinoccio, solsticio hemisferio, eje de rotación y grado de inclinación; por otra parte, se aclara que las estaciones de la Tierra son un efecto del grado de inclinación del eje de rotación de la Tierra y no de la traslación misma; así se resalta lo presentado en los Estándares (2006, p 67) acerca de los elementos de periodicidad y de regularidad que son representados en tablas y gráficas, lo que relaciona al pensamiento variacional con las representaciones de diferentes sistemas; asimismo, el estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones. Además se seleccionan algunos países que no tienen estaciones para llevar al estudiante a un proceso de indagación y decisión respecto a la solución de la tarea en particular. Por ejemplo la inclusión de Madagascar, que es un país que no presenta las cuatro estaciones y la India, que presenta las estaciones invierno, otoño y monzón como países que poseen las mismas estaciones relacionadas con el hemisferio al que pertenecen. Esta inclusión aporta al desarrollo de la matemática en diferentes contextos y resalta que su enseñanza no es algo aislado, por el contrario, toma elementos de la vida cotidiana y de diferentes contextos del estudiante.

La tercer tarea retoma los diferentes elementos presentados anteriormente y pretende que el estudiante haga explícitas las estrategias que desarrolla, adopta o reinventa a partir del contexto realista y de sus saberes previos. En consecuencia, el estudiante realiza comparaciones de lo trabajado en las tareas anteriores y vincula lo constante, lo que varía, cómo lo hace y propone algunas caracterizaciones matemáticas del periodo.

Se espera que la reflexión hecha por los estudiantes muestre estrategias usadas y que se puedan reinventar en diferentes situaciones; no obstante, esta primera situación busca movilizarlas en el marco de la Matematización horizontal¹⁴ donde estas estrategias se consideran modelos de la situación y asociados particularmente a la misma.

Para la segunda situación, un caso de función periódica: la función seno, se elige como contexto real la noria más alta del mundo ubicada en la ciudad de Chicago llamada ferris Wheel. Con las dos tareas que la componen, se busca movilizar la relación entre la variación del ángulo que barre la Cápsula de la noria con la altura de esta, a través de la circunferencia unitaria, la función seno y sus representaciones¹⁵ gráficas cartesianas o tabulares, elementos que los Estándares (2006, 67) proponen como intermediarios en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducir un saber matemático. Además, proponen la modelación de situaciones de la vida cotidiana a partir de la matematización de las mismas; este proceso es importante desde el diseño mismo de la situación.

Por ende, a las situaciones problemas desde el enfoque de la EMR, particularmente desde el principio de realidad, se les realizan adaptaciones que respondan al saber matemático en juego, siempre y cuando los estudiantes estén en la capacidad trabajar e imaginar los elementos del contexto sin que estos sean una información adicional que se debe omitir.

Es por ello que el contexto de la ferris Wheel se ajusta para que sea modelada por la función seno; puesto que es una noria de 196 pies de altura se le adiciona 4 pies de altura a la noria, para obtener un total de 200 pies de altura –de diámetro de la noria- y se inserta un patrón de medida llamado unidad de altura denotada por la letra U a través del cual se lleva al estudiante al reconocimiento de la equivalencia: $1 U = 100$ pies. En total la altura máxima de la noria medida desde el piso es de 200 pies (en unidades de altura tendría 2 U).

¹⁴ Interpretación de la realidad o de la situación presentada al estudiante en términos de la matemática asociada a sus saberes previos.

¹⁵ Diferentes registro de representación o representaciones se adopta desde los Estándares (2006, p 51) cuando resaltan que Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir, que el estudiante logre dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos.

Además, se hace la aclaración que las medidas de altura se realizan desde el nivel dado por una plataforma que se encuentra a 100 pies de altura (es decir 1 U del piso); así se controla que las alturas de la Cápsula de la noria estén entre 100 pies por debajo del nivel (-1 U) y 100 pies por encima del mismo (1 U). Inclusive, se define un sistema de coordenadas en el centro de la noria y se plantea que el inicio del movimiento de la cápsula se realiza desde el cero del eje de las ordenadas.

En definitiva, esta situación es controlada para que los estudiantes manipule la función seno en sus diferentes representaciones, su variación periódica y realice predicciones a través de estrategias matemáticas asociados a la situación y empiece a mostrar cuales de estas se convierten en “modelos de” la situación o “modelos para” implementarse en otras situaciones modeladas por la función seno.

Cabe añadir que el interés de este trabajo es resaltar la importancia de incluir situaciones realistas tomadas y adaptadas de la física en la enseñanza de la función seno y el análisis del proceso de matematización progresiva realizado por los estudiantes, lo que hace pertinente el ajuste a la circunferencia unitaria para modelar la función seno; por lo contrario, se entra a un análisis más general de funciones asociadas a una familia de funciones de la forma $f(\theta) = A \sin(\omega\theta + \varphi)$ donde A , ω y φ son números reales (en términos generales podrían asociarse a cantidades que varían y f sería una función que depende no solo de θ , sino también de A , ω y φ), con θ en grados.

Al controlar los parámetros A , que es el asociado al rango de la función f , con el trabajo en unidades de altura, el desplazamiento φ con la plataforma como el lugar de inicio del movimiento de la Cápsula de la noria y la relación de la altura de la Cápsula de la noria con el ángulo barrido por la misma se garantiza que ω corresponda 1 tenemos una situación real que es susceptible a ser modelada por la función seno.

En relación con lo anterior, Montiel (2006, p 819) afirma que la construcción social de la función trigonométrica seno, lleva como anticipación el manejo de la misma en grados para después relacionar esta variación con los números reales que es el paso de los grados a los radianes y se logren cambios en las variables para al final, si se alcanza, interpretar la función seno en tiempo real. Es decir, esta modificación de la noria retoma los elementos de variaciones

periódicas trabajados en la situación 1 y busca dotar a los estudiantes de estrategias tanto propias como reinventadas para resolver la situación 3 enmarcada en la variación de la función seno en términos de una variable temporal que explicita el paso de los grados a los radiales, es decir de los ángulos a los números reales. Lo cual, desde el enfoque de la EMR, el principio de interacción sustenta que los estudiantes socialicen sus resultados con sus pares cuando modelan la función seno desde diversos contextos con las estrategias que desarrollan cuando solucionan las tareas propuestas.

3.1.2. Situación 2: Un caso de función periódica: La función seno

La ferris Wheel de Chicago

Chicago tiene un largo historial en cuanto a ruedas de la fortuna se refiere, la primera fue inaugurada en 1893 como parte de la legendaria exhibición universal. Actualmente, en el Navy pier se encuentra la ferris Wheel de Chicago que mide aproximadamente 200 pies de altura (196 pies). Esta rueda hace parte de una serie de atractivos que posee la ciudad de Chicago a orillas del lago Michigan que es uno de los lagos más grandes de Estados Unidos. En la figura 1 se muestra una toma de esta noria¹⁶.



Figura 1. Vista de la Ferris Wheel de Chicago¹⁷

¹⁶ noria es un artilugio de feria consistente en una gran rueda con asientos que gira verticalmente. Tomado de <http://dle.rae.es/?id=QcCVyi3>. Citado el 30 de marzo de 2017

¹⁷ Tomado de: Fuente: <https://navypier.com/centennial-wheel/>. Citado el 30 de marzo de 2017.

Este atractivo tiene como fin disfrutar de una vista de 360° del lago Michigan y de la ciudad de Chicago por ello la velocidad de la noria es lo suficientemente baja para que los turistas puedan abordarla sin que esta se detenga. Esta velocidad es tal que en 1 minuto la noria gira 10 grados. Este giro lo realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Tarea 1: Representando la situación

La figura 2 muestra un esquema de la noria y una estructura que se encuentra a la derecha de esta, la cual tomará como plataforma donde los turistas abordan la ferris Wheel para su recorrido por los aires de Chicago.

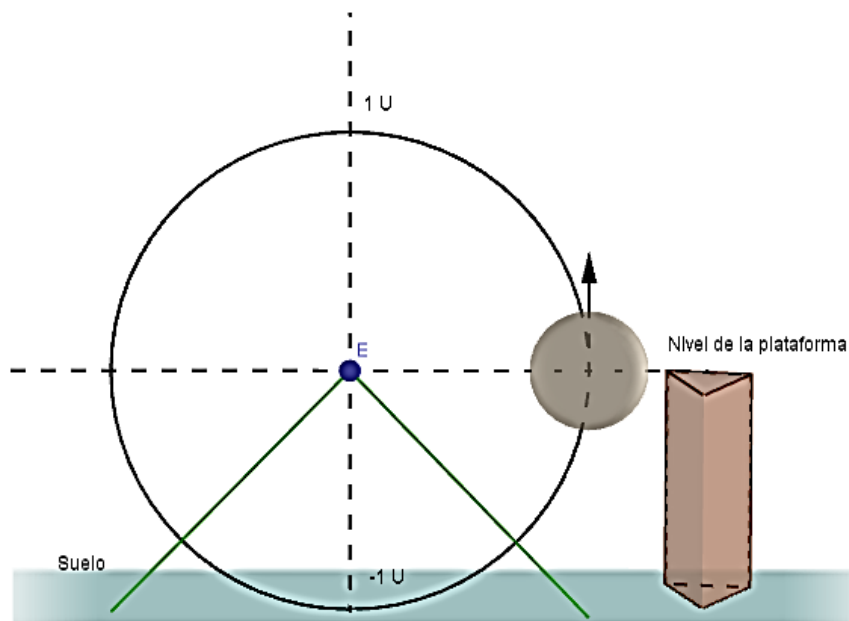


Figura 2. Esquema de abordaje de los pasajeros a la noria.

Teniendo como referencia la figura 2, para una persona que aborda la cápsula de la noria: sea t el tiempo transcurrido (en minutos) desde que inició el recorrido y h la altura (en pies) que alcanza la cápsula sobre el nivel de la plataforma. Tenga en cuenta que la altura de la cápsula está determinada con respecto al nivel de la plataforma.

Por tanto, la posición de la cápsula por debajo del nivel de la plataforma, se tomará como: $-h$. Así, la altura máxima para la cápsula sería de 100 pies y la altura mínima para la cápsula sería de -100 pies. A cada 100 pies se le llamará 1 Unidad de altura y se denotará como U .

1. a. Complete la siguiente tabla realizando la equivalencia entre la altura en pies y la unidad de altura U .

Tabla 1. Conversión de unidades: pies a unidades de altura.

Altura [pies]	100		48,5	-75				65	-65,4
Unidad de altura[U]		0,25			1	0,8	-1		

- b. Explique cómo completó la tabla 1 para los valores de la altura en pies y en unidades de altura U .

- c. Explique cuáles son los valores asociados a la altura máxima y a la altura mínima que alcanza la cápsula de la noria durante el recorrido, en unidades de altura U .
- d. Determine para qué valores de tiempo (en minutos) y para qué ángulos la cápsula de la noria alcanza la altura máxima y la altura mínima. Explique cómo determinó estos valores.

La tabla 2 relaciona las medidas realizadas de diferentes alturas en unidades de altura U con el ángulo que ha recorrido la cápsula de la noria durante una vuelta.

Tabla 2. Relación entre altura y el ángulo recorrido por la cápsula de la noria

<i>Altura</i> (U)	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,50	-0,87	-1,00	0,00
<i>Ángulo</i> (grados)	0	30	45	60	90	135	150	180	210	240	270	360

- a. Para 2 vueltas completas de la noria determine los diferentes valores de los ángulos asociados a las alturas h de la cápsula, dadas en la tabla 2.
 - b. Determine como identificó los valores de estos ángulos.
 - c. Explique cómo determinaría los diferentes ángulos asociados a la misma altura h para la cápsula, cuando la noria realice 4 vueltas.
 - d. Describa el comportamiento de la noria a partir de la relación de dependencia entre la altura de la cápsula de la noria y los ángulos asociados a esta. Explique su respuesta.
2. Cuanto tiempo tarda la cápsula de la noria en realizar una vuelta completa. Justifique su respuesta.
 3. Si la noria funciona de 9:00 AM a 6:00 PM, cuantas vueltas dará la cápsula de la noria. Justifique su respuesta.

Tarea 2: Reconociendo elementos periódicos de la noria

Para el recorrido de la cápsula de la noria, de 9 am a 6:00 pm, se tiene en cuenta que el valor inicial para el ángulo es cero y se sigue sumando hasta que se detiene a las 6:00pm, así se puede tener ángulos mayores de 360° en el recorrido de la cápsula de la noria, medidos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

1. a. Complete la tabla 3 para 6 vueltas de la cápsula de la noria.

Tabla 3. Relación entre alturas y ángulos barridos por la cápsula de la noria.

Altura cápsula [U]	Ángulo barrido (°)		Altura cápsula [U]	Ángulo barrido (°)		Altura cápsula [U]	Ángulo barrido (°)	
0,5000			0,7071			-1,0000		
1,0000			0,8660			-0,7071		
-0,5000			-0,8660			0,0000		

- b. Explique qué elementos tuvo en cuenta para completar la tabla.
- c. Identifique la regularidad asociada a los ángulos para los cuales la cápsula de la noria se encuentra a la misma altura. Explique su respuesta.
2. En un plano cartesiano realice una gráfica que relacione la altura de la cápsula con el valor del ángulo barrido, para 3 vueltas de la noria.
3. Determine el intervalo mínimo para el cual se repite la gráfica.
4. Explique en qué intervalos la gráfica crece o decrece.
5. Halle el valor máximo y el valor mínimo de la gráfica resultante.

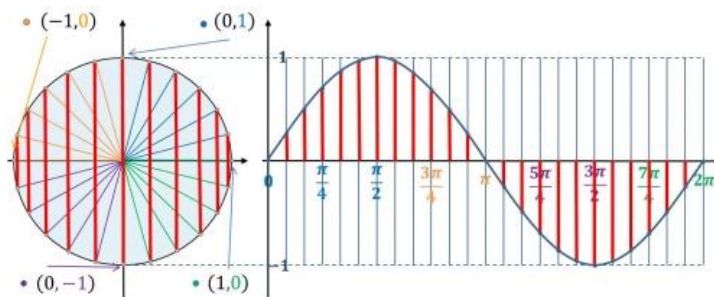
6. Una función es la relación ordenada entre dos conjuntos A y B; donde A se le llama dominio y B se le llama rango. La representación gráfica de una función f en el plano cartesiano se reconoce porque para cada valor del eje x (elemento del dominio de la función llamado pre imagen) existe un elemento ÚNICO del eje y (elemento del rango de la función llamado imagen).
- De acuerdo con la representación gráfica del punto 2 y la tabla 3, muestre si a un valor fijo de ángulo barrido por la cápsula de la noria se le puede asociar más de un valor de su altura.
 - Determine si la representación gráfica resultante en la pregunta 2 corresponde a una función. Justifique su respuesta.

Una función f es periódica si para todo x que pertenece al dominio se cumple que:

$f(x) = f(x + p)$, donde $p \in \mathbb{R}^+$ (es decir, p es un real mayor que cero) se conoce como el periodo de la función. En otras palabras, la representación gráfica de una función periódica se repite para un determinado intervalo, al menor intervalo en el cual se repite la gráfica se le llama periodo de la función.

- De acuerdo con la definición anterior determine si la representación gráfica resultante es una función periódica. Explique su respuesta.
- Establezca el periodo de la función. ¿Cómo determinó este periodo?
- ¿Se puede afirmar que el movimiento de la noria es periódico? Justifique su respuesta. En caso de ser periódico cual es el periodo del movimiento de la noria. En caso de NO ser periódico explique por qué.

Sea un punto P en el plano cartesiano de coordenadas (x, y) , tal que la distancia de P al punto O de coordenadas $(0,0)$ sea constante e igual a 1. La función seno se define como el conjunto de las parejas ordenadas (a, b) tales que la coordenada “a” hace referencia al ángulo medido en sentido anti horario y la coordenada b corresponde al cada uno de los valores asociados a la coordenada y del punto P . La coordenada inicial del punto P es la coordenada $(1, 0)$ ¹⁸. De esta forma, la representación gráfica de la función seno sería:



¹⁸ Adaptada de la definición de la función seno dada por Takeuchi (1985, p 17)

Figura 3. Representación gráfica de la función seno¹⁹

8. Compare la representación gráfica obtenida en la pregunta 2 (tarea 2), con la representación gráfica dada de la función seno.
 - a. Corresponde la representación gráfica que realizó con la representación gráfica dada de la función seno en la figura 3.
 - b. Si corresponde, se puede afirmar que el movimiento de la cápsula de la noria es modelado por medio de la función seno. Si no corresponde, describa los elementos que diferencian estas representaciones gráficas.
 - c. Realice una explicación de la representación gráfica de la función seno, en términos de la posición de la cápsula o movimiento de la noria.
9. ¿A partir de la relación entre las dos representaciones gráficas se puede concluir que la función seno es una función periódica? Justifique su respuesta.
 - a. Determine el periodo de la función seno.
 - b. Compruebe para diferentes valores de la variable x que se cumple la igualdad $f(x) = \text{sen}(x) = \text{sen}(x + p)$ donde x pertenece a los números reales y p es el periodo de la función seno.

En la primera tarea se busca que el estudiante realice conversiones a través de un patrón de medida propuesto -en la tabla 1- de pies a unidades de altura para determinados valores. Después que realicen un acercamiento informal de los valores máximos y mínimos de la altura de la cápsula de la noria y el tiempo que tarda alcanzar esta posición.

Luego, en relación con la tabla 2, se indaga a los estudiantes acerca de la relación entre la altura y el ángulo recorrido por la cápsula de la noria para dicha posición; en este sentido, se pretende que los estudiantes a través de conocimientos informales identifiquen otros valores de ángulos para las vueltas siguientes.

La segunda tarea -reconociendo elementos periódicos de la noria-, hace explícitas características matemáticas propias de las funciones como lo son su dominio, rango, máximos, mínimos y periodo a través del uso de diferentes representaciones tanto tabulares, como gráficas cartesianas, iconografías, elementos en lenguaje formal y expresiones algebraicas, a través de las cuales se estudian las características de las funciones, que por definición matemática son un tipo particular de relaciones entre dos conjuntos que tiene como elementos parejas ordenadas (Para el

¹⁹ Tomado de <https://matematicaspr.com/image/12dj/blog/graficas-funciones-trigonometricas/grafica-funcion-seno.jpg> . referenciado el día 17 de mayo de 2017.

caso de este contexto, la función seno dependiente del ángulo de barrido por la cápsula noria y de la altura de la misma). Desde los Estándares (2006, p 67) vincular estos sistemas de representación promueven el desarrollo del pensamiento matemático, particularmente el pensamiento variacional dado que se clasifican como una de las actividades que proponen desde los primeros grados de escolaridad.

En términos de los principios de la EMR, el desarrollo de esta segunda tarea pretende en primera instancia movilizar una matematización horizontal; es decir llevar al estudiante al reconocimiento y uso de saberes matemáticos conocidos anteriormente y asociados a la situación planteada. Luego que, a través de una reinención guiada por el docente, avance a niveles de comprensión más generales en los que se pueda analizar el uso de elementos matemáticos usados en la situación 1 y, cuáles de estos, puedan llegar a ser modelos para explicar la situación u otras situaciones modeladas por la misma función. Por último, analizar estas estrategias que han sido recurrentes en las situaciones se doten de generalización, lo que da lugar a una matematización vertical en tanto el estudiante se empieza a mover en términos, intuiciones, definiciones, algoritmos, entre otros, cada vez más generales.

En otras palabras, que se logre reflexionar acerca de las estrategias que utilizan en distintas tareas e identificar cuáles de estas quedan ligadas solo a la situación -sea la 1 o la 2- o cuales se reinventan para dar respuesta a preguntas que se enmarquen en niveles más generales. Desde el enfoque de la EMR, este análisis permite reconocer en los niveles tanto referencial como el general, como el estudiante utiliza las habilidades mostradas en situaciones futuras tomadas de diferentes contextos de la física y que con la función seno como función trigonométrica y como función periódica se modelan sus elementos variacionales vinculados a las diferentes representaciones citadas anteriormente.

Al final de la tarea dos –en la pregunta 8- se realiza un acercamiento a los radianes a través de la equivalencia de $360^\circ = 2\pi\text{rad}$. Con el fin de introducir el trabajo con los números reales en la función seno. Vale destacar que los aspectos matemáticos movilizados hasta el momento en la situación 2 respecto a la función trigonométrica se asocian a la variación del ángulo en grados y a la altura en unidades de altura (U) y el paso de los grados a los radianes busca que los alumnos logren la identificación de la variable independiente en un contexto

diferente a la circunferencia unitaria –como se puede reconocer en la situación 3 en lo relativo a los movimientos armónicos simples- y que relacione las variables desplazamiento y tiempo.

Puesto que el enfoque de la EMR sostiene que los contextos son realistas siempre que el estudiante los pueda imaginar, la Física se aborda como disciplina que aporta al potenciamiento del análisis matemático de las situaciones reales²⁰ presentadas por los estudiantes.

Finalmente para la elección de la situación 3, sustentada por diversas investigaciones (Camarena (1984, 1987, 1990, 1995, 1999, 2000a, 2009), Cordero (2002) e Israelí (1996)) que vinculan la Física a los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de la función seno en cuanto Cordero (2002, p 57) analizan contextos como el péndulo simple, el sistema masa resorte y el movimiento circular uniforme a través de sus relaciones con la segunda ley de Newton²¹ resalta la presencia de esta disciplina en la modelación de diferentes saberes matemáticos.

En cuanto a la función seno, Montiel (2005, p 69) realiza un análisis histórico en el que se reconoce como las funciones trigonométricas surgen de las observaciones astronómicas de fenómenos periódicos celestes; además, en los trabajos de Robert Hooke, Newton, Bourbaki y Euler se presenta el vínculo en la interpretación de situaciones tales como la cuerda vibrando, el sistema masa resorte, movimiento circular uniforme y resolución de ecuaciones de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} \text{ Donde } u = u(x, t) \text{ conocida como la ecuación de onda unidimensional.}$$

Por tanto la tercera situación se compone de dos movimientos armónicos simples, el sistema masa resorte y el péndulo simple en los que se han definido las condiciones iniciales para que sean modelados por la función seno. es así que se dividen ambos movimientos en dos tareas que buscan identificar en los estudiantes que estrategias heredan de las situaciones anteriores y adquieran mayor generalización. Es decir que los estudiantes puedan modelar diferentes tareas

²⁰ Desde el enfoque de la EMR, una situación real (o realista) es aquella que es susceptible de ser manipulada, trabajada e imaginada por el estudiante

²¹ Cordero (2002, p 58) muestra la ecuación $f = ma$, que formula una ecuación diferencial de segundo orden con características singulares, esta ecuación genera un sistema de predicción local y global, y a su vez genera una familia de soluciones de funciones de seno con la propiedad de ser periódica. Consecuencia por la que se controlan los contextos para generar la función:

$f(x) = \text{sen } x$.

de diferentes contextos a través de la estrategia establecida como un “modelo para” explicar las diversas situaciones modeladas por la función seno.

3.1.3. Situación 3. Aproximándonos a fenómenos físicos: la variación de la función seno. Los movimientos oscilatorios en la Física

La traslación y la rotación de la Tierra, el movimiento de un electrón orbitando el núcleo de un Átomo, el movimiento de un péndulo, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, las ondas electromagnéticas tales como la luz y las ondas de radio, la corriente eléctrica en los circuitos de corriente alterna y otros más, son algunos ejemplos de movimientos oscilatorios que están asociados al desplazamiento alternante que caracteriza el objeto en acción.

Un caso particular de los movimientos oscilatorios son los Movimientos Armónicos Simples (MAS) los cuales presentan una periodicidad, es decir, que el movimiento se repite en un intervalo mínimo llamado periodo. El péndulo simple y el sistema masa resorte son los casos más conocidos de MAS en la Física.

La figura 1 muestra un esquema de un sistema masa resorte y un péndulo simple.

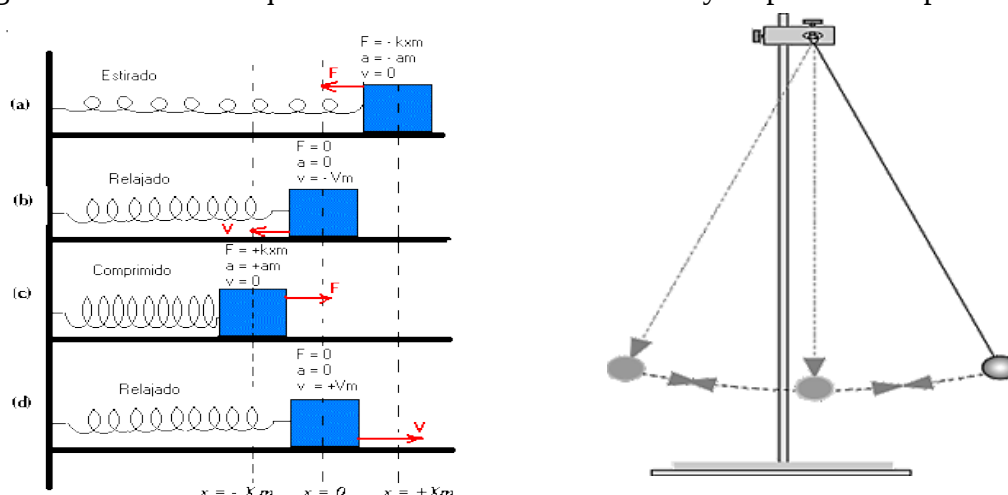


Figura 1. Masa resorte y péndulo simple.

Tarea 1: El sistema masa resorte

Un sistema masa resorte consta de un resorte que se encuentra fijo en uno de sus extremos y una masa m unida al otro extremo del resorte. Un resorte se caracteriza por una constante de elongación K dada en $[N/m]$. Cuando es deformado una distancia x de su posición de equilibrio responde a una fuerza de restauración igual a: $F = -Kx$.

Una de las características de los MAS es que sus oscilaciones generan un movimiento periódico, es decir, que se repite en un intervalo de tiempo llamado periodo. Así, la ley de la conservación de la energía permite idealizar un sistema masa resorte cuando se desprecia la acción de la

Fuerza de Fricción o Fuerza de Rozamiento. La Frecuencia Angular ω de este movimiento se relaciona con las cantidades físicas k y m , por medio de la siguiente expresión algebraica:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

La figura 2 muestra un sistema masa resorte horizontal en una superficie ideal (sin fricción).

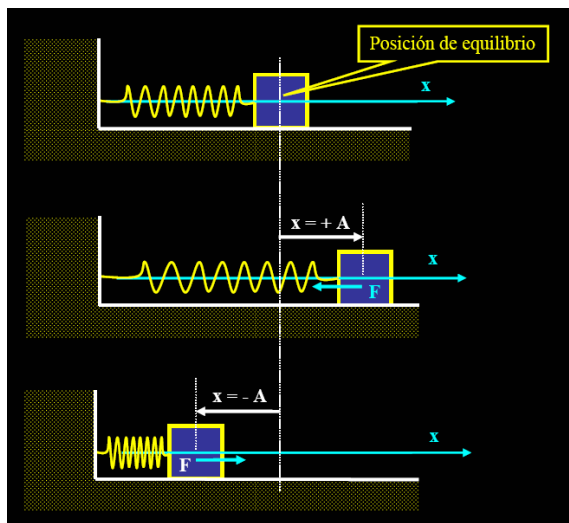


Figura 2. Sistema masa resorte ideal²²

El sistema masa resorte de esta situación consta de una masa de 1 Kg que está unida a un resorte de constante 1 N/m. La deformación máxima $-A$ en la figura 2 – que sufre el resorte es de 1 m (la deformación se mide horizontalmente desde el punto de equilibrio). Después que la masa está oscilando, se toma la posición de equilibrio del resorte como punto inicial, teniendo en cuenta que la masa sigue su recorrido hacia la derecha.

1. a. Realice una representación gráfica del movimiento de la masa mostrando algunas características dadas para el sistema masa resorte.
b. Explique qué elementos consideró en la elaboración de la representación gráfica anterior.
2. El periodo, denotado por la letra T , se define como el intervalo mínimo de tiempo en que se realiza una oscilación completa y está dado por una expresión que relaciona la masa y la constante de elasticidad del resorte, así:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- a. Identifique el tiempo aproximado que tarda una masa de 1 Kg en realizar una oscilación.

²² Imagen tomada de http://www.fatela.com.ar/trabajo_final_svg/5pag3.htm referenciada el 21 de mayo de 2017.

- b. Explique en términos del sistema masa resorte, qué representa este valor de tiempo calculado.
- c. Relacione la gráfica que realizó en la pregunta 1a con el valor numérico del periodo calculado en la pregunta 2a, de esta tarea. Qué puede concluir a partir de esta relación.
3. a. A partir de las condiciones dadas para el sistema masa resorte, determine la posición máxima y la posición mínima de la masa en relación con la figura 2.
- b. Explique si es posible determinar la posición de la masa oscilante después de iniciado su movimiento, respecto al punto de equilibrio, para cualquier instante de tiempo.
4. La tabla 1 relaciona las medidas realizadas de diferentes desplazamientos de la masa en metros con el tiempo transcurrido.

Tabla 1. Relación entre desplazamiento y tiempo transcurrido de la masa del sistema.

<i>Desplazamiento</i> [m]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87	-1,00	0,00
<i>Tiempo</i> [s]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- a. Para una segunda oscilación completa de la masa determine los valores de tiempo asociados a cada desplazamiento dado en la tabla 1.
- b. Explique cómo identificó estos valores.
5. a. Complete la tabla 2 usando diferentes tiempos asociados a cada desplazamiento dado de la masa del sistema masa resorte.

Tabla 2. Relación entre desplazamiento y tiempo transcurrido de la masa oscilante.

Desplazamiento X[m]	Tiempo transcurrido t [s]		Desplazamiento X[m]	Tiempo transcurrido t [s]		Desplazamiento X[m]	Tiempo transcurrido t [s]	
0,5000			0,7071			-1,0000		
1,0000			0,8660			-0,7071		
-0,5000			-0,8660			0,0000		

- b. Justifique como completó la tabla.
 - c. ¿Cuántas oscilaciones tuvo en cuenta para completar la casilla de tiempo transcurrido asociada a cada desplazamiento dado?
6. Explique la relación entre el desplazamiento de la masa desde el punto de equilibrio y el tiempo transcurrido.
7. En un plano cartesiano realice la representación gráfica de la tabla 2.
 - a. Explique por qué esta representación gráfica corresponde a una función.
 - b. Caracterice algunos elementos de la función mostrada en la representación gráfica de la pregunta 7a.

Tarea 2: El péndulo simple

El péndulo simple consta de una masa, medida en kilogramos, atada al extremo libre de una cuerda que está sujeta en un soporte, como muestra la figura 3. Esta cuerda (de masa despreciable) de longitud l está medida en metros. Las oscilaciones de la masa muestran un movimiento periódico (cuando se desprecia el aire y se realizan las oscilaciones con un ángulo menor de 30°) gracias al efecto de la fuerza de gravedad de la tierra, o el planeta donde se quiera imaginar la situación ideal del péndulo simple. La gravedad se toma como $9,8 \text{ m/s}^2$. La frecuencia angular de este movimiento está dada por la relación:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La figura 3 muestra un péndulo simple (sin tener en cuenta la fricción).

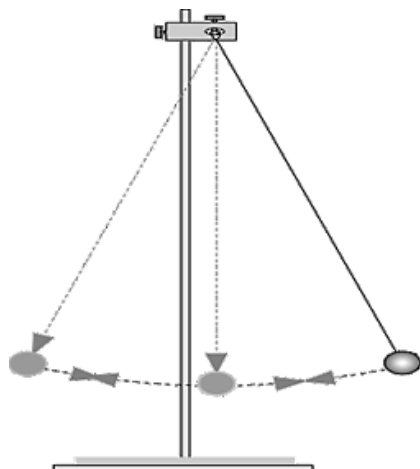


Figura 3. Péndulo simple ideal²³

Condiciones iniciales del péndulo simple: Para esta situación se va a imaginar un péndulo simple compuesto por una cuerda de 9,8 m de longitud atada de uno de sus extremos a un soporte (como muestra la figura 3) y con una masa de 3 Kg atada en su extremo libre. Se pone a oscilar el péndulo simple idealizado, buscando no sobrepasar los 30° sugeridos para este tipo de movimiento.

De esta manera, el máximo ángulo desplazado hace referencia a los extremos del péndulo simple (puntos de la trayectoria más alejados del punto de equilibrio). Cuando la variación del ángulo se realiza en sentido de las manecillas del reloj (es decir, la masa oscila hacia la izquierda) se dice que la variación es negativa y viceversa. Después de tener el péndulo simple oscilando se mide el tiempo en que realiza una oscilación. Para ello, se inicia a medir el tiempo cuando la masa se encuentra en el punto más bajo del recorrido y moviéndose en sentido contrario de las manecillas del reloj (es decir, positivo).

El periodo del péndulo simple se define como el tiempo que tarda la masa en realizar una oscilación completa y depende exclusivamente de la longitud de la cuerda y de la gravedad. Este periodo se representa por medio de la siguiente expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

1. a. Realice una representación gráfica del movimiento de la masa del péndulo simple relacionando los elementos dados en las condiciones iniciales de la situación.
- b. compara esta representación gráfica del péndulo simple con la representación gráfica realizada para el sistema masa resorte en la pregunta 1a.

²³ Imagen tomada de http://www.fatela.com.ar/trabajo_final_svg/5pag3.htm referenciada el 21 de mayo de 2017.

2. En la tabla 3 se presenta la relación entre el ángulo desplazado y el tiempo transcurrido en una oscilación del péndulo simple.

Tabla 3. Relación entre ángulo desplazado y tiempo transcurrido para el péndulo simple.

Ángulo desplazado [A]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87	-1,00	0,00
tiempo [s]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- Para una segunda oscilación, encuentre los valores de tiempo transcurrido para los ángulos propuestos es la tabla 3.
 - Se puede afirmar que el movimiento del péndulo simple corresponde a la misma relación matemática que modela el sistema masa resorte. Justifique su respuesta.
- En un plano cartesiano realice una representación gráfica del ángulo desplazado respecto al tiempo transcurrido para 2 oscilaciones del péndulo simple. Explique qué elementos tuvo en cuenta para elaborar esta representación gráfica.
 - Explique porque el periodo de rotación de la capsula de la noria, el periodo de oscilación del sistema masa resorte y el periodo de oscilación del péndulo simple, corresponden a un mismo valor numérico.
 - Después de haber realizado las situaciones propuestas, describa:
 - Qué es una función periódica.
 - Qué es la función seno.
 - ¿Por qué la función seno es una función periódica?
 - ¿Qué tipo de fenómenos físicos pueden ser modelados a través de la función seno?
 - Puesto que la función seno, $f(x) = \text{sen } x$, es periódica y modela el movimiento de la cápsula de la noria, el péndulo simple y el sistema masa resorte, halle:
 - Para qué valor de p se cumple que: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + p\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donde $p \in \mathbb{R}^+$, si se conoce que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - Otros valores de x que verifiquen la expresión: $f(x) = \text{sen } x = \text{sen}(x + p)$ donde p es el periodo de la función.
 - Realice algunas conclusiones matemáticas que vinculen el trabajo realizado en las tres situaciones (años bisiestos, estaciones del año, movimiento de la capsula de la noria, sistema masa resorte y péndulo simple).

La primera tarea hace énfasis en el sistema masa resorte y la fuerza restauradora de la ley de Hooke: $f(x) = -kx$ donde k es la constante de elasticidad del resorte y x es el desplazamiento de la masa respecto al punto de equilibrio del resorte; las condiciones iniciales se presentan para que, al igual que en la situación dos, el estudiante reconozca a través de sus

herramientas matemáticas -tanto generadas por las situaciones anteriores como de sus conceptos informales y el sentido común- la periodicidad del movimiento en términos de la relación entre el desplazamiento de la masa (respecto a su punto de equilibrio) y el tiempo transcurrido para ello

Con el uso de tablas y representaciones gráficas se pretende que el estudiante relacione el desplazamiento de la masa respecto al punto de equilibrio con el tiempo transcurrido, tome alguna de las estrategias que utiliza en las situaciones 1 y 2, las movilice matemáticamente para generar modelos para explicar lo que ocurre en tareas diferentes modeladas por la función seno.

La segunda tarea centra que su atención en el péndulo simple requiere que el estudiante tenga un manejo de las estrategias que ha mostrado en las tres situaciones, compare los elementos comunes de las mismas y logre dar respuesta a través de diversas estrategias asicadas a elementos matemáticos generales movilizados por los contextos trabajados y por las características matemáticas de la función seno, particularmente su periodicidad.

De esta manera, se busca que el estudiante compare lo trabajado en las situaciones anteriores, los diferentes contextos que pueden aportar al trabajo con la función seno y conjeturar sobre el trabajo realizado en cuanto a la periodicidad de diferentes fenómenos o situaciones que hacen explícita la periodicidad de la función seno como una de las propiedades más importantes de la misma, la cual cobra sentido en el aula solamente a través del estudio de las funciones trigonométricas (Santacruz 2016, p 4).

En cuanto a la implementación de la propuesta de aula, se realiza en el grado décimo del Colegio Anglo Americano ubicado en la calle 22b No 121-111, barrio Pance; institución educativa de carácter privado del municipio Santiago de Cali. Este grado es conformado por 9 estudiantes entre los 15 y los 18 años de edad; adscritos al barrio Pance de la ciudad, estrato 5; sin embargo la institución cuenta con estudiantes de los estratos 3, 4 y 5. La elección de este grado obedece a que las propuestas curriculares del MEN (1998, 2006) establecen la enseñanza de la función seno en el conjunto de grados décimo y undécimo y que el PEI del colegio ubica la enseñanza de la misma en el grado décimo, donde el docente investigador es el mismo docente que orienta las áreas de matemáticas y física. Cabe aclarar que los estudiantes ya habían trabajado con las funciones trigonométricas desde una mirada tradicional (Montiel 2005, p 57) al iniciar con las razones trigonométricas, la circunferencia unitaria y las funciones trigonométricas.

La propuesta se implementa entre los meses de mayo y septiembre de 2017, se cuenta con la autorización de coordinación académica y del jefe de área de matemática para articular los elementos propios de la propuesta de aula con el plan de área de matemática. La metodología implementada en la aplicación fue el trabajo colaborativo en el que el estudiante resuelve las situaciones propuestas individualmente, después se genera espacios de discusión en los que el docente actúa como guía en el debate, mientras los estudiantes exponen sus argumentos con el fin de hacer explícitas sus ideas.

Estos espacios de plenaria realizados al final de las tareas de cada situación fueron guiados por el docente quien propone a los estudiantes que socialicen sus producciones en la implementación de la tarea y que se abra un debate acerca de las diferentes estrategias y elementos matemáticos que se movilizan en cada situación. Así, el docente orienta la plenaria y registra (en algunas ocasiones con grabaciones de audio) estas interacciones con los estudiantes. Dado que, desde el enfoque de la EMR, esto hace de la matemática una actividad incluyente y social. Los tiempos implementados para ello fueron los mismos de las clases de física y matemática que define el colegio y los espacios de plenaria se propiciaron después de cada una de las tareas de las situaciones.

Algunas dificultades en la implementación de la propuesta; por una parte, se asocian a ensayos relacionados con una actividad artística institucional. La participación de los estudiantes en estos ensayos hizo que la aplicación de la propuesta se extendiera al mes de septiembre y que uno de los 9 estudiantes no terminara la propuesta dado a su retiro de la institución.

Además, el compromiso académico de dos estudiantes que tenían comprometida su promoción al año siguiente lo cual fue un aspecto a tener en cuenta en sus interpretaciones de la propuesta. Esta complejidad se maneja desde las clases de matemáticas y física ya que se valora cuantitativamente el desarrollo de las situaciones.

3.2. Resultados y análisis de resultados

Los resultados analizados de las producciones de los alumnos se clasifican en tablas que relacionan la respuesta dada, los diferentes tipos de respuestas y el número de estudiantes vinculado a determinado tipo; además, se realiza desde los referentes teóricos presentados en el capítulo dos, a través de las observaciones del docente y de los espacios de discusión que se propiciaron para socializar lo trabajado de manera individual.

Algunas de las respuestas dadas por los estudiantes se escanean para validar y justificar el análisis dentro de cada una de las situaciones implementadas. Para facilitar la interpretación se organizan las situaciones por tarea y se describe cada tabla con su respectiva pregunta.

Al finalizar el análisis de cada tarea, se realiza una recopilación de los aspectos más relevantes del mismo desde los referentes teóricos propuestos en el capítulo 2, enfoque de la EMR, propuestas curriculares y disciplinares relativos a la matemática.

3.2.1. Resultados y análisis de resultados: Situación 1. Reconozcamos fenómenos periódicos en nuestro sistema solar

La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones

La Tierra que está en continuo movimiento, presenta 4 tipos de movimientos: la traslación, la rotación, la precesión y la nutación. La traslación es el movimiento orbital que describe una trayectoria elíptica debido a la gravitación, alrededor del sol (ver figura 1) que realizan los planetas. Por su parte, la Tierra tarda 365 días, 5 horas y 57 minutos, equivalente a 365,2422 días en darle la vuelta al sol. Este tiempo que tarda el planeta Tierra en completar una vuelta alrededor del sol se conoce como un año. Así, el año del calendario usado hoy tiene 365 días y se realiza un ajuste cada cuatro años para compensar el tiempo que tarda en darle la vuelta al sol. En la figura 1 se muestra la traslación de la tierra alrededor del sol, así como los solsticios y equinoccios generados por este movimiento.

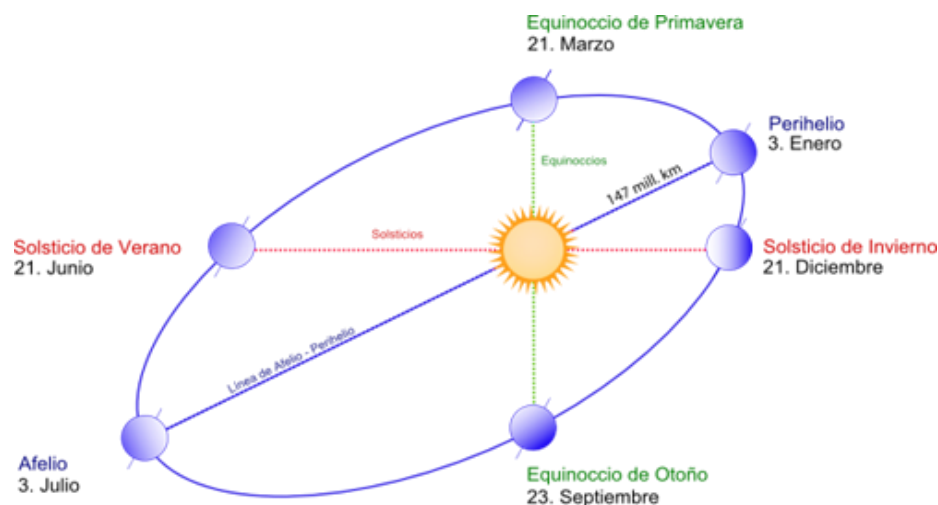


Figura 1. Solsticios y equinoccios en el hemisferio norte de la tierra, según su ubicación en la órbita alrededor del sol²⁴.

De acuerdo con la figura 1, al lugar de la órbita donde la Tierra se encuentra más alejada del sol se le conoce como afelio y ocurre el día 3 de Julio; y al lugar de la órbita donde la Tierra se encuentra más cerca al sol se le conoce como Perihelio y ocurre el día 3 de Enero.

Así, este movimiento y el grado de inclinación del eje de rotación de la Tierra (ver figura 2), generan los fenómenos naturales y climáticos que dan lugar a las cuatro estaciones del año; así, a los días cuando se evidencian los cambios de estaciones se les llama solsticios o equinoccios, es decir, son dos solsticios y dos equinoccios. De esta forma, para el hemisferio norte el solsticio de invierno se presenta el día 22 de diciembre con el cambio de otoño a invierno y el solsticio de verano se presenta el día 21 de junio; además, el equinoccio de otoño se presenta el día 23 de septiembre y el equinoccio de primavera se presenta el día 21 de marzo (ver figura 1).

²⁴ Tomada de <http://www.microsiervos.com/archivo/ciencia/por-que-ano-empieza-1-enero.html>. Referenciada el día 14 de marzo de 2017.

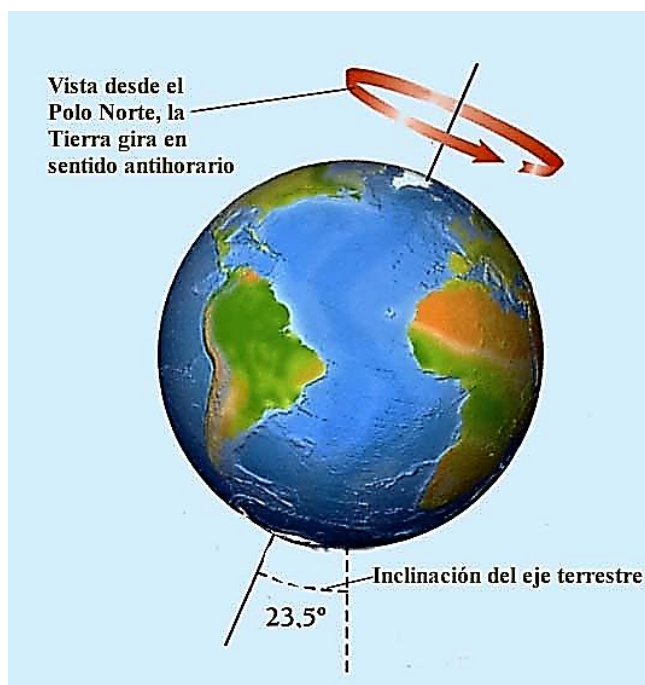


Figura 2. Inclinación del eje de rotación de la Tierra²⁵

La figura 2 muestra que el grado de inclinación de la tierra es de $23,5^\circ$ respecto al eje vertical, por lo que se evidencia que mientras que en el solsticio de invierno (ver figura 1) el hemisferio norte está más alejado del sol, el hemisferio sur se encuentra cercano al mismo; así, la ocurrencia del solsticio de verano en el hemisferio sur es el mismo día que ocurre el solsticio de invierno para el hemisferio norte. Del mismo modo ocurre con los equinoccios, mientras que el hemisferio norte el día 23 de septiembre se encuentra en equinoccio de otoño, el hemisferio sur se encuentra en equinoccio de primavera.

²⁵ Tomada de <http://juanbascon.blogspot.com.co/2010/09/blog-de-recursos-y-material-de-estudios.html>. Referenciada el 13 de marzo de 2017.

Tarea 1: Interpretando la traslación de la tierra

Teniendo en cuenta la información dada en el texto: La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones y las figuras 1 y 2, responda las siguientes preguntas:

1. a. En qué consiste el movimiento de traslación de la tierra.

Tabla 3. Clasificación de respuestas a la pregunta 1a.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Definición del movimiento de traslación de la Tierra dado en la lectura.	La traslación de la tierra es el movimiento orbital que realiza el planeta en una trayectoria elíptica debido a la gravitación.	9

La tabla 3 deja ver la definición de movimiento de traslación de la Tierra presentada por los estudiantes donde incluyen conceptos tanto físicos como matemáticos tales como, órbita, forma elíptica, gravitación y trayectoria; los que aportan a la identificación y la caracterización de algunos elementos propios del contexto como la dependencia del movimiento de la Tierra a los efectos físicos de la gravedad y la trayectoria del planeta; Desde el enfoque de la EMR, el principio de interconexión sustenta la elección de este tipo de situaciones provenientes de la física como disciplina que brinda contextos realistas para favorecer el inicio del proceso de matematización.

Es de aclarar que el contexto se define desde Van Den Heuvel- Panhuizen (1994, p. 243) citada por Bressan (2016, p 3) como un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos y los conduce a usar los saberes matemáticos de su experiencia proveyéndole significado concreto, apoyo para las relaciones y operaciones relevantes al proceso de matematización de esta situación.

Los Lineamientos (1998, p 22) realzan la importancia de volver a la historia del desarrollo de los conceptos para reconocer las preguntas que les dieron origen, de lo que se evidencian

elementos físicos que dan lugar a una matemática eminentemente humana. Así pues, el espacio de plenaria con los alumnos deja ver su interés por la lectura, la conexión que realizan entre las características del contexto y su sentido común a través de estrategias como la comparación entre lo elíptico y el movimiento planetario, los modelos planetarios, la traslación de la Tierra, la distancia de la Tierra al sol, conceptos como elipse y gravedad. Esta correlación presentada entre los saberes de la física y de la matemática revela lo propuesto por los Lineamientos (1998, p 22) cuando argumentan que la matemática no se enseña como un saber aislado de la realidad del estudiante.

Por tanto, la discusión con los estudiantes acerca de la trayectoria y órbita de la Tierra alrededor del sol reafirma que esta situación hace parte de la realidad de los estudiantes en cuanto les permite el desarrollo de estrategias tales como la comparación de sus saberes previos con lo presentado en la lectura, cómo el movimiento de traslación de la Tierra depende de la interacción gravitatoria entre el planeta y la estrella. Además, pese a que los alumnos poseen sus saberes previos para argumentar, la discusión gira en torno a la lectura desde la cual toman las respuestas presentadas.

1. b. Explique que es un año bisiesto.

Tabla 4. Clasificación de respuestas a la pregunta 1b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Definición de año bisiesto asociada a la duración del año.	Un año bisiesto es un lapso de tiempo de 366 días que ocurre cada cuatro años con el fin de compensar el tiempo que tarda la tierra en darle la vuelta al sol.	6
Tipo II	Definición de año bisiesto relacionada con el día adicional cada cuatro años.	Un año bisiesto es aquel donde hay 366 días para compensar el 0.2422 días redondeado al aproximar los años anteriores a 365 días.	3

Los dos tipos de respuesta presentadas en la tabla 4 dados por los estudiantes muestran la definición que corresponde a un año bisiesto; por su parte, en las respuestas tipo I los estudiantes se refieren a una compensación al tiempo que tarda la tierra en darle la vuelta al sol; por otro lado, en las respuestas tipo II se hace manifiesto el año bisiesto como una corrección al calendario para compensar el error dado por la aproximación de 365 días por año.

Las respuestas tipo I dejan ver la interpretación que realizan los 6 alumnos de la situación a partir del tiempo que tarda la Tierra en darle la vuelta al sol; es decir, para los estudiantes en el año bisiesto -de 366 días- la Tierra tarda un día más en hacer este trayecto y que se repite cada cuatro años depende de las variaciones del planeta respecto a su movimiento de traslación. En este sentido los estudiantes no solo reconocen el fenómeno periódico asociado a esta tarea, además movilizan la noción de periodo y la predicción ligada a fenómenos de naturaleza periódica.

Por otra parte, del tipo II se analiza la compensación de tiempo al calendario dado que el año de 365 días es una aproximación de los 365,25 días que tiene un año, según la lectura. Es de señalar que la discusión con los estudiantes cuya respuesta se categoriza como tipo II se enfoca en el reconocimiento del tiempo de traslación de la Tierra como una constante de la que depende la asignación del día adicional cada cuatro años. Por lo anterior, se reconocen elementos matemáticos del dominio de los estudiantes como los múltiplos, el conteo por grupos de cuatro y la aproximación de números decimales como causa del error que genera este día adicional.

Cabe aclarar que cada 400 años se excluyen los años múltiplos de 100 que no sea divisible por 400, por ejemplo el 1900. Esta condición no es dada en la lectura puesto que el propósito de la misma es llevar a los estudiantes a la periodicidad de un fenómeno y para ello se realiza la aproximación correspondiente a los 365,25 días para un año. Desde el principio de realidad de la EMR que define una situación real como aquella que pueda ser imaginada, por ello el año bisiesto, fenómeno cuyo periodo es cuatro años aporta al reconocimiento de fenómenos periódicos en general. Por otra parte, el principio de interacción, que motiva la disposición de espacios de discusión que generan la reflexión, aprueba el trabajo en grupo guiado por el docente donde los estudiantes socializan la interpretación dada a conocer: incluir un día adicional cada cuatro años.

Además, en esta plenaria con los estudiantes respecto a la propiedad de periodicidad de los años bisiestos y otros fenómenos periódicos presentes en la naturaleza se concluye que se pueden aproximar sucesos periódicos sin serlo; es así como se reconoce la inexactitud en los fenómenos periódicos cotidianos.

2. a. Complete la siguiente tabla, tomando como referencia que el año 1600 fue bisiesto.

Año	1789	1880	1900	1980	1990	2010	2016	2022	2030
Bisiesto									
No bisiesto									

Tabla 1

Para la interpretación de la tabla 1 de la tarea 1 se realiza el registro de la cantidad de respuestas por año en la tabla 5 bajo la característica de ser bisiesto o no.

Tabla 5. Clasificación de respuestas a la pregunta 2a.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
1789	No bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	9
1880	Bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	9
1900	Bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	8
	No bisiesto	Confusión entre el calendario juliano y el gregoriano	1

1980	Bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	9
1990	No bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	9
2010	No bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	9
2016	Bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	8
	No bisiesto	Error de cálculo en la división por 4	1
2022	No bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	9
2030	No bisiesto	Dividen el año por 4; si su resultado es entero entonces es bisiesto	9

La tabla 5 se caracteriza por presentar dos tipos de respuestas, el ser bisiesto o no, condición dada por los elementos de la lectura. Es de notar que para el año 1900 se presenta un alumno con respuesta diferente a los demás; es de notar que este año entra en la condición de ser bisiesto desde lo planteado por la situación; no obstante, si se analiza este año fuera de la adaptación realizada del contexto, 1900 no es bisiesto. Al indagar al estudiante sobre los parámetros bajo los cuales se define si un año es o no bisiesto, argumenta que ocurre cada cuatro años y que este año no es bisiesto pues no es múltiplo de 4, lo cual se categoriza como un error en el procedimiento algorítmico de dividir por 4.

El uso de una representación tabular –tabla 1- ayuda a los alumnos a clasificar los diferentes años dados y a reconocer las propiedades de un año desde la variación de las cifras que le permite al estudiante especificar cuáles cumplen o no con la propiedad de ser múltiplo de 4 o no, es decir ser bisiestos; además se hace presente la comparación entre los sistemas de

representación presentes, la verbal, (lectura), la icónica y la tabular lo que permite a los estudiantes una mejor comprensión del contexto y las herramientas matemáticas a utilizar.

2. b. Explique cómo determinó la clasificación de cada año.

Tabla 6. Clasificación de respuestas a la pregunta 2. b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Relación
Tipo I	Divisiones por 4 de los años presentados en la tabla 1.	A partir de la definición, se tiene que un año bisiesto ocurre cada cuatro años, entonces, si el año lo divido entre 4 y da un número entero entonces es bisiesto, si no da entero entonces no es bisiesto.	9

La tabla 6 muestra que todos los estudiantes responden que los años bisiestos se dan cada cuatro años. Las respuestas de los estudiantes no solo giran alrededor de enunciados verbales que aluden a la definición de año bisiesto dada en la lectura “traslación, inclinación de la Tierra y sus estaciones”, sino que además justifican a través estrategias numéricas tales como: el uso de los múltiplos del cuatro, los divisores de un número, el conteo de cuatro en cuatro y enunciados verbales que citan la definición y clasificación de números enteros y racionales desde la operación división.

Es así como el vínculo de estos resultados con las clasificaciones realizadas en las tablas 4 y 5, desde lo propuesto por Bressan (2016, p 2), se constituye en una organización, a través de medios matemáticos, de la realidad; en otras palabras, los estudiantes reflexionan sobre el descubrimiento de características comunes entre los años bisiestos o no, los comparan con los múltiplos de cuatro, revisan que el cuatro sea un divisor de ellos, y realizan predicciones de otros años bisiesto.

3. a. Indique los años bisiestos comprendidos entre 1579 y 2021.

3. b. Explique qué aspectos tuvo en cuenta para determinar los años bisiestos.

Tabla 7. Clasificación de respuestas a las preguntas 3. a. y 3. b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	111 años bisiestos.	Organización en una representación tabular que muestra los años bisiestos.	5
Tipo II	175 años bisiestos	Conteo de años bisiestos entre 1580 y 1680. Resultado 25 años bisiestos; se realiza una secuencia hasta llegar al 2020.	3
Tipo III	Respuesta verbal. No señalan la cantidad de años bisiestos	No determinan el número de años. Como el año inicial no es múltiplo de 4 entonces se busca el siguiente múltiplo de cuatro y se le suma 4 hasta llegar al 2020. Se sigue el patrón.	1

En la tabla 7 se clasifican las respuestas dadas a las preguntas 3a y 3b en tanto esta última presenta los argumentos considerados por los estudiantes para determinar la cantidad de años bisiestos. Es pertinente resaltar que al analizar las respuestas dadas por los estudiantes se hacen explícitos diferentes sistemas de representación tales como: el tabular, el verbal, el numérico y algebraico; lo anterior según Freudenthal (1973, 1991) citado por Bressan (2016, p 3) deja ver que los estudiantes utilizan diversas estrategias desde sus saberes previos, las citan y reformulan a partir de su interpretación de la tarea dada en el contexto realista.

En este sentido, el vínculo de esta pregunta con el desarrollo del pensamiento matemático, particularmente con el pensamiento variacional, revela como los estudiantes realizan el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente (MEN 2006, p 66); es decir, muestran en sus respuesta la recurrencia de 4 años de los años bisiestos y la utilizan para dar razón de los interrogantes asociados a la tarea. Asimismo este análisis deja ver que la organización de la variación en tablas la usan los estudiantes en el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto en la solución de la tarea involucran procesos aritméticos, lo que les permite también el inicio de la comprensión de la variable y de las fórmulas. (MEN 1998, p 50).

Por tanto el uso del sistema de representación tabular es una estrategia que aporta al desarrollo del pensamiento variacional a través del reconocimiento de la variación, la variable y el cambio. Tal como lo sustenta el enfoque de la EMR, los estudiantes toman la situación realista propuesta para desarrollar diversas estrategias que lo llevan a interpretar la situación, reconocer los fenómenos, su recurrencia y los cambios presentes en ella.

Tal es el caso de las respuestas tipo I –clasificadas en la tabla 7- donde los estudiantes utilizan representaciones tabulares para presentar los años bisiestos que hay desde el año 1579 al 2021; es así como afirman que 1579 no es bisiesto ya no es divisible por 4, luego buscan el siguiente año bisiesto e inician con el conteo cada 4 años dando como resultado el conjunto de años bisiestos entre 1579 y 2021.

Una de las estudiantes compara lo presentado en esta tarea con la regularidad de dígitos 0, 4, 8, 12 y 16 lo que se reconoce como una estrategia que contribuye al reconocimiento de la característica ser bisiesto; en discusión con la estudiante surge la definición de sucesión como una secuencia que continúa y que puede ser identificada a partir de una relación general controlada con una variable que pertenece a los números naturales, para ello propone la expresión:

$$4n + \text{año bisiesto} = \text{año bisiesto}$$

donde $n \in \mathbb{N}$

En contraste con la pregunta 1 de la tarea 3, la estudiante realiza algunos reemplazos para comprobar la validez de la expresión, su dependencia de la cantidad n , del año bisiesto dado y la efectividad de la estrategia para responder a preguntas posteriores, como se presenta en la figura 3.

Handwritten work on grid paper showing the equation $4n + \text{Año bisiesto} = \text{Año bisiesto}$ and several numerical substitutions for n :

$$4 \cdot 3 + 2016 = 2028$$

$$4 \cdot 7 + 2016 = 2044$$

$$4 \cdot 10 + 2016 = 2056$$

$$4 \cdot 23 + 2016 = 2108$$

$$4 \cdot 5 + 2016 = 2036$$

Figura 7. Respuesta 1 de la tarea 3. Reemplazo en la ecuación propuesta.

Este proceso de validación realizado por la estudiante le permite conjeturar que sus resultados son coherentes y que la expresión propuesta responde tanto a la situación como al contexto de los años bisiestos. Cabe mencionar que en dicha expresión no se hace diferencia entre los dos años bisiestos escritos, pero en el reemplazo les da un tratamiento diferente.

Es decir en la figura 7 se reconoce como la estudiante asume la n como una variable independiente, puesto que es aquella que puede tomar un valor dado y no depende de otros valores de la expresión. Además, para el año bisiesto escrito al lado izquierdo de la igualdad sumado al $4n$ ella argumenta que es un año bisiesto dado, por tanto, una cantidad constante. En cambio, el año bisiesto de la derecha de la ecuación hace referencia a la variable que depende del valor de n , por tanto, es la variable dependiente.

En conclusión, para esta estudiante la relación entre los años bisiestos es lineal y responde a la ecuación dada en la figura 7 donde para calcular un año bisiesto basta con tener un año bisiesto conocido y encontrar el valor de la variable n asociado a dicho año.

Lo anterior deja ver que la situación: reconozcamos fenómenos periódicos en nuestro sistema solar, moviliza en la estudiante una estrategia de conteo sustentada verbalmente a través de la suma de cuatro o un múltiplo del cuatro a un año bisiesto para obtener otro bisiesto cualquiera y por los reemplazos realizados que se muestran en la figura 7.

Por otra parte, el análisis de esta ecuación planteada por la estudiante permite relacionarla con la definición de función real periódica que responde a la expresión:

$$f(x + p) = f(x)$$

Donde x es cualquier número real y p es un número real mayor que cero, llamado periodo. De este modo, al tener un año de inicio que sea bisiesto puede hacer predicciones de años bisiestos siguientes al sumar el valor de 4 años (o un múltiplo de 4). En términos de la definición de función periódica, dado cualquier año bisiesto, se le suma el periodo -4 años- y el resultado sería un año bisiesto.

Es así como esta estrategia hace explícito un reconocimiento de la variación de los años bisiestos, lo cual desde el enfoque de la EMR, permite reconocer que el proceso de matematización de la situación aporta una estrategia en el nivel referencial puesto que es un procedimiento que no se desliga del contexto en el que se plantea el problema y está referido a la situación de los años bisiestos.

El análisis de las otras 4 respuestas categorizadas en el tipo I -la tabla 7- deja ver que dos estudiantes acuden al conteo de los años bisiestos desde el año 1580 al año 2020 agrupados en 10 columnas, que a su vez muestra filas de dos características particulares como se presenta en la figura 4 (una que muestra la secuencia de los números naturales y la otra el año bisiesto desde el primero sucesivamente cada 4 años).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1580	1584	1588	1592	1596	1600	1604	1608	1612	1616
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1620	1624	1628	1632	1636	1640	1644	1648	1652	1656
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1660	1664	1668	1672	1676	1680	1684	1688	1692	1696
									40
									1736
									50
									1776
									60
									1816
									70
									1856
									80
									1896
									90
									1936
									100
									1976
									110
									2016
									120
111									
2020									

Figura 8. Respuesta tipo I, representación tabular agrupada en 10 columnas.

La figura 8 exhibe una tabla donde las filas impares (contadas de forma descendente) son la cantidad de años bisiestos que van en el conteo desde el año 1580 y las filas pares al año. A su vez, cuando completan hasta la fila 6, ambos estudiantes centran la estrategia en la columna 10 y hacen explícitos los años relativos a la cantidad correspondiente hasta llegar al año 2016 que equivale a la cantidad de 110 años bisiestos y complementan con el año que falta para completarlos hasta el 2021. Esto deja ver que logran reformular su estrategia inicial de conteo de cuatro en cuatro para simplificar el problema y propone una secuencia de 10 en 10 asociadas a la variación de 40 años bisiestos transcurridos.

Así, esta elección de ambos estudiantes busca atajos, abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales para esquematizarlas en la representación tabular, algoritmizarlas a través del conteo con el uso de múltiplos de 4 y de 10; y simbolizarlas en la columna 10 al escribir los años

bisiestos y explicitar el total; sus reflexiones acerca de la actividad matematizadora lleva a identificar que consideran los fenómenos de cambio de los años bisiestos. (Freudenthal (1991, p. 30, pp. 35-36), citado por Bressan (2016, p 3)). Por tanto la respuesta numérica, la agrupación en la representación tabular y el reconocimiento de un patrón de cambio es el resultado de su interpretación del contexto, del uso de sus conocimientos previos y de su capacidad de matematizar la realidad.

Por otra parte, el análisis de las otras dos respuestas asociadas a la tabla 7 deja ver dos representaciones tabulares mostradas en las figuras 9 y 10.

Para la figura 9, la estudiante construye una representación tabular de los años bisiestos y no bisiestos a través del conteo.

	1579	1580	1581	1582	1583	1584	1585	1586	1587	1588
Bisiesto		X				X				X
NO Bisiesto	X		X	X	X		X	X	X	
	1589	1590	1591	1592	1593	1594	1595	1596	1597	1598
Bisiesto				X				X		
NO Bisiesto	X	X	X		X	X	X		X	X
	1599	1600	1601	1602	1603	1604	1605	1606	1607	
Bisiesto		X				X				
NO Bisiesto	X		X	X	X		X	X	X	
	1608	1609	1610	1611	1612	1613	1614	1615	1616	
Bisiesto	X				X				X	
NO Bisiesto		X	X	X		X	X	X		
	1617	1618	1619	1620	1621	1622	1623	1624	1625	
Bisiesto				X				X		
NO Bisiesto	X	X	X		X	X	X		X	
	1626	1627	1628	1629	1630	1631	1632	1633	1634	
Bisiesto			X				X			
NO Bisiesto	X	X		X	X	X		X	X	
	1635	1636	1637	1638	1639	1640	1641	1642	1643	
Bisiesto		X				X				
NO Bisiesto	X		X	X	X		X	X	X	

Figura 9. Respuesta tipo I. representación tabular realizada año por año.

La figura 9 deja ver dos filas que referencian los años del 1579 al 2021 donde la estudiante marcan si el año es bisiesto o no. Así, la caracterización de los años a través del conteo se

establece como una estrategia para resolver este interrogante. Además, explica que no logra predecir cuántos años hay entre dos años bisiestos tan separados temporalmente y que la única estrategia que implementa es hacerlos uno a uno como se muestra en la figura 9.

De igual modo, otra estudiante recurre a la representación tabular –figura 10- de los años bisiestos; no obstante, llega hasta el año 2060 y no responde a la cantidad de años que se requiere en la pregunta.

0-4-8-12-16.

1579-2021

	DD	MM	AA
1579			
1580	1700	1820	1940
1584	1704	1824	1944
1588	1708	1828	1948
1592	1712	1832	1952
1596	1716	1836	1956
1600	1720	1840	1960
1604	1724	1844	1964
1608	1728	1848	1968
1612	1732	1852	1972
1616	1736	1856	1976
1620	1740	1860	1980
1624	1744	1864	1984
1628	1748	1868	1988
1632	1752	1872	1992
1636	1756	1876	1996
1640	1760	1880	2000
1644	1764	1884	2004
1648	1768	1888	2008
1652	1772	1892	2012
1656	1776	1896	2016
1660	1780	1900	2020
1664	1784	1904	2024
1668	1788	1908	2028
1672	1792	1912	2032
1676	1796	1916	2036
1680	1800	1920	2040
1684	1804	1924	2044
1688	1808	1928	2048
1692	1812	1932	2052
1696	1816	1936	2056
			2060

Figura 10. Respuesta tipo I dada en forma tabular.

Es de notar que al indagar sobre su respuesta, la alumna expresa que basta con realizar un conteo de los años bisiestos que ella escribe en su tabla -hasta lo sugerido en la pregunta- para obtener la cantidad requerida por este interrogante; además, afirma que siempre se puede calcular la cantidad de años y saber si es bisiesto o no a través de esta representación tabular.

Por tanto, las respuestas tipo I dejan ver como estrategia la representación tabular, y así adquiere una importancia central en el proceso de matematización dado que, desde la EMR, la tarea 1 moviliza en los estudiantes asociados a las respuestas tipo I una Matematización horizontal; es decir, los estudiantes logran vincular los elementos propios de la situación con su realidad, desarrollar una estrategia para interpretar la tarea propuesta y permiten el análisis de la misma a través de los diversos niveles de comprensión –principio de niveles-en tanto se identifica qué tipo de matematización realizan los alumnos.

Así, el análisis de esta habilidad mostrada –representación tabular- permite al estudiante la interpretación de los elementos de la situación; desde la EMR, definidos como estrategias que toman características que reflejen aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que sean relevantes para solucionar la situación dada. (Bressan, 2004, p 8).

En cuanto a las respuestas tipo II donde se sigue la misma estrategia de resolución desde la representación tabular y se utiliza el patrón de 4 años como se muestra en la figura 7.

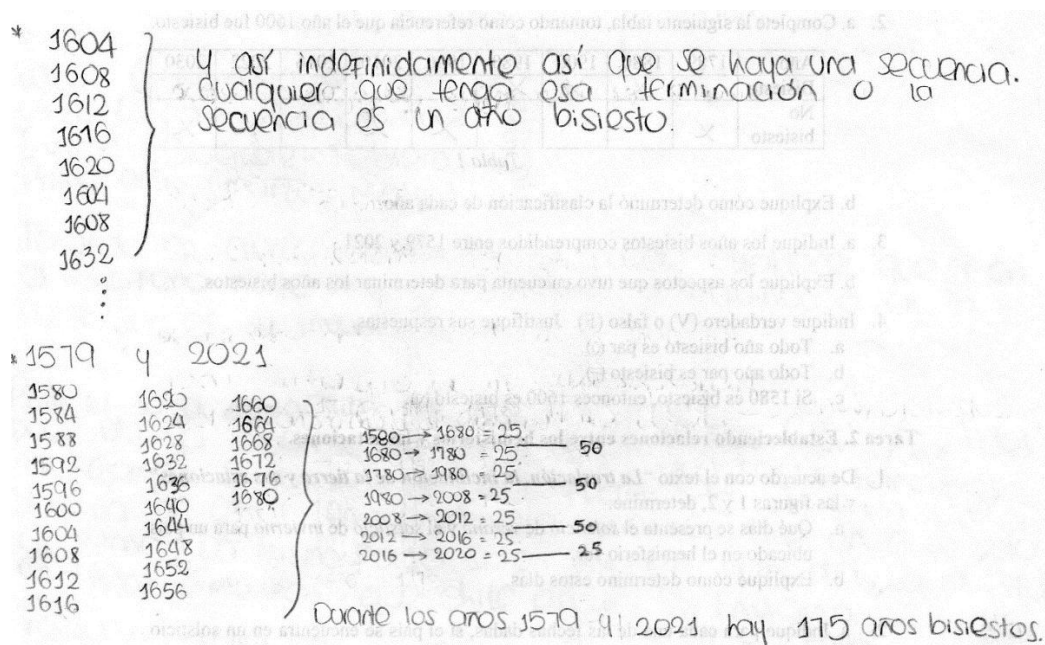


Figura 11. Respuesta tipo II. Representaciones tabular, numérica y verbal.

La figura 11 muestra que la estudiante utiliza tres representaciones: la tabular, la numérica y la verbal para dar razón de lo preguntado. En relación con la numérica, realiza un proceso de conteo y presenta que cada 100 años hay 25 años bisiestos; luego sigue la secuencia de 100 en 100 años. No obstante, cambia esta asignación al tomar que de 2008 a 2012, 2012 a 2016 y 2016 a 2020 hay 25 años bisiestos igual, para un total de 175 años bisiestos, resultado numérico que no corresponde al total. Es necesario recalcar que la respuesta tipo II muestra que el estudiante presenta una estrategia de agrupación de años bisiestos dados inicialmente y después busca elementos que le permitan predecir los años que sigue sin necesidad de hacerlos uno a uno; es decir, utiliza el conteo como su estrategia para interpretar y predecir lo que ocurren en la tarea propuesta.

La figura 11 deja ver que el estudiante reconoce las variaciones de los años bisiestos, lo que se mantiene constante a través tiempo pese a su equivocada asignación de años (mostrado anteriormente) en el proceso de agrupación, muestra una simplificación de la estrategia del conteo a través de la agrupación de años bisiestos.

En las respuestas tipo III los tres estudiantes no generan una respuesta numérica a la situación; sin embargo presentan explicaciones verbales que responden a la solución de la pregunta. Los tres estudiantes citan la importancia de la recurrencia, es decir de la existencia de un año bisiesto cada 4 años siempre que se inicie desde un año bisiesto. Es de notar que una de las respuestas tipo III hace referencia a la siguiente expresión:

$$1580 + 4 = \text{año bisiesto}$$

Además, en la discusión propiciada con el estudiante, sustenta que: se puede sumar un múltiplo de 4 para obtener cualquier año bisiesto en adelante; estrategia que debe ser repetida hasta llegar al año 2020. Por consiguiente, propone una nueva expresión que da razón de los años bisiestos siguientes:

$$1580 + 4n = \text{año bisiesto}$$

Lo anterior muestra que el estudiante reconoce un patrón de variación en el que el número anterior más cuatro años es el número siguiente y este es un año bisiesto. Esta expresión se relaciona con la figura 3 que presenta una interpretación de la situación desde los elementos de la realidad del estudiante y su experiencia; es así como ambos estudiantes muestran estrategias que

lo ubican en un nivel referencial en cuanto escriben de forma algebraica y verbal los conceptos propios de la situación planteada. En otras palabras, los estudiantes no muestran un valor numérico de los años bisiestos entre 1579 y 2021, sin embargo conjetura acerca de los siguientes años bisiesto, el uso de la expresión algebraica y las justificaciones verbales en plenaria que sustentan la elección de estos años.

El análisis de las expresiones algebraicas propuestas por los dos estudiantes predicen años bisiestos siguientes, desde lo planteado en el enfoque, se sostiene que después de reformular el conteo presentado, la representación algebraica se categoriza como un “modelo de”, en tanto los estudiantes dan razón de lo preguntado en la tarea;

De acuerdo con los Estándares (2006, p 53), los alumnos están en un proceso de modelación en tanto logran hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultado y verificar que tan razonables son según las condiciones iniciales; así, la pregunta 3 los estudiantes hacen uso de sus modelos matemáticos asociados a los elementos propios de la tarea dada; es decir, “modelos de”.

Además, los Estándares (2006, p 66) sostienen que la relación del pensamiento variacional con otros pensamientos aparece con mucha frecuencia, porque la variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos. Características presentadas en la interpretación de las estrategias mostradas por los estudiantes, de las que se resaltan: el conteo y el uso de la representación tabular.

4. a. Indique verdadero (V) o falso (F). Justifique sus respuestas.

- a. Todo año bisiesto es par ().
- b. Todo año par es bisiesto ().
- c. Si 1580 es bisiesto, entonces 1600 es bisiesto ().

Tabla 8. Clasificación de respuestas a las preguntas 4 a, b y c

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. V; b. F; c. V	Explicación verbal en términos de multiplicidad por	8
	a. V; b. V; c. V	4.	1

La tabla 8 corresponde a un solo tipo de respuestas para los literales a, b y c de la pregunta 4, donde los 9 estudiantes responden para el literal “a” verdadero; para ello justifican que el número asociado al año bisiesto al ser múltiplo de 4 debe ser par; esta pregunta pretende movilizar en los estudiantes propiedades matemáticas asociadas a lo numérico que hacen parte de sus saberes previos, utilizan como estrategia los múltiplo de cuatro y concluyen que todo múltiplo de cuatro es múltiplo del dos y por ende par.

Para el literal “b” 8 de los 9 alumnos responden falso al argumentar que ser par no es condición suficiente para que el año sea bisiesto, puesto que hay números pares que no son múltiplos del cuatro.

Asimismo es de notar que los estudiantes recurren de nuevo al conteo, el uso de la expresión algebraica presentada anteriormente y contraejemplos que presentan años pares no bisiestos; es decir, que si todo año par fuera bisiesto entonces el 2006 serían bisiestos lo cual no es cierto.

Es de resaltar que uno de los alumnos utiliza como contraejemplo el 1900, año que presenta una particularidad ya que este año según la lectura de la tarea 1 y con la información dada por la misma debería ser bisiesto, aunque para nuestro calendario este año no es bisiesto puesto que es divisible por 100 pero no por 400; al indagar al estudiante acerca de su respuesta, argumenta un error en la división por 4; desde el principio de interacción de la EMR, se privilegian espacios de discusión que ayudan a la reflexión alrededor de las interpretaciones; de allí que el año 1900 sea bisiesto pues 1900 es múltiplo de 4.

Para el literal “c” todos los estudiantes responden verdadero y justifican que al ser divisibles por 4 entonces son años bisiestos; esta división la realizan a los dos años el dado como bisiesto y el año a comprobar si es bisiesto o no.

Hasta el momento, los estudiantes responden la tarea 1 a través de la descripción y análisis de la situación que tiene elementos que hacen parte de su contexto y que han surgido de la interacción con la tarea, lo que promueve un proceso de reformulación y de desarrollo de estrategias de resolución tanto informales como numéricas; es decir, desde el enfoque de la EMR, Bressan (2016, p 7) afirma que al observar las producciones de los alumnos se deja ver por medio de sus conocimientos informales, el sentido común y su experiencia la matematización del contexto, es porque la situación hacen parte de su realidad; desde el principio de realidad, los alumnos están en la capacidad de imaginarla.

Es así como la tarea 1 de la primera situación permite reconocer a los estudiantes el acercamiento a la dependencia entre el movimiento de traslación de la Tierra, el tiempo que tarda en darle la vuelta al Sol y los años bisiestos; esta relación de la física con la matemática que se presenta en diferentes niveles de escolaridad, busca las predicciones, recurrencias y operaciones matemáticas al interpretar este contexto. Además, los Lineamientos (1998, p 25) argumentan que los alumnos a través del contexto, en particular para esta tarea los años bisiestos, identifican la conexión entre diferentes disciplinas, la matemática y la física, lo que les ayuda a emplear el sentido común para buscar la solución a las tareas a través de diversas estrategias.

Así, esta primera tarea deja ver que la física como disciplina brinda contextos realistas para los estudiantes, lo que permite según el enfoque de la EMR (Freudenthal, 1978) el aprendizaje la matemática no como un sistema cerrado, sino como una actividad, para este caso específico la matematización del movimiento de traslación de la Tierra, sus diferentes posiciones y su efecto en el calendario que determina el año bisiesto.

Tarea 2: Estableciendo relación entre los hemisferios y las estaciones.

1. De acuerdo con el texto “**La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones**” y las figuras 1 y 2, determine:
 - a. Qué días se presenta el solsticio de verano y el solsticio de invierno para un país ubicado en el hemisferio sur.
 - b. Explique cómo determino estos días.

Tabla 9. Clasificación de respuestas a las preguntas 1a. y 1b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Solsticio de verano: diciembre 22 Solsticio de invierno: junio 21	Interpretación de la lectura y la figura 1 y 2 de la situación 1.	8
Tipo II	No responde fechas exactas	Explica que según la lectura son las fechas contrarias al hemisferio norte.	1

La tabla 9 se compone por dos tipos de respuestas; en las categorizadas como tipo I se observa que ocho de los nueve estudiantes dan las fechas diciembre 22 y junio 21 para el solsticio de verano y para el solsticio de invierno en el hemisferio sur, respectivamente. Esta elección justificada a través de la comparación entre la lectura propuesta y la figura 1, que exhibe la órbita de la Tierra alrededor del Sol y los días del año donde se presentan las estaciones para el hemisferio norte; de lo que los estudiantes pueden concluir que las estaciones son contrarias entre los hemisferios; por ejemplo, si el hemisferio sur está en solsticio de verano el hemisferio norte está en solsticio de invierno.

La estudiante que responde según el tipo II no hace explícita una fecha exacta y argumenta que la ocurrencia de los solsticios depende del hemisferio; es decir que cuando ocurre solsticio de invierno en el hemisferio norte, en el hemisferio sur están en solsticio de verano.

El análisis de la tabla 9 deja ver que los estudiantes responden adecuadamente al interrogante al reconocer las estaciones del año y los días en que ocurre el cambio de una estación a otra. En plenaria con los estudiantes, en general conocen sobre el fenómeno de las estaciones, sin embargo no reconocían que las estaciones del año se presentan en el planeta por el grado de inclinación de la Tierra y no por la posición en la órbita, lo que, desde el principio de actividad de la EMR, les ayuda a mejorar sus saberes tanto matemáticos como de otras disciplinas.

2. a. Indique para cada una de las fechas dadas, si el país se encuentra en un solsticio de invierno o en un equinoccio de primavera.

Países	21 de septiembre de 2019	15 de abril de 2025	22 de diciembre de 2030	21 de junio de 2031	23 de septiembre de 2028
Canadá					
Chile					
Francia					
España					
Sudáfrica					

Tabla 2

- b. Explique la manera como estableció la relación entre las fechas, los solsticios y los equinoccios para cada país.

Las fechas seleccionadas en la tabla 2 de esta tarea hace referencia únicamente a equinoccio de primavera o solsticio de invierno, por lo que se espera que algunas de los espacios de la representación tabular queden en blanco o sean completados con lo contrario de acuerdo con el hemisferio; en este caso, ambas posibilidades aportan a la interpretación de las respuestas que desarrollan los estudiantes y muestran lo propuesto por la tarea 2 para este numeral.

Para las respuestas a las preguntas 2a se introduce la tabla 10 donde se clasifican los fenómenos según las fechas dadas y los países respectivos. Para el 2b se establece en el análisis posterior a la tabla 10 donde se expresa como se establecen estos fenómenos a partir de las explicaciones dadas por los estudiantes durante la aplicación de la propuesta y en la plenaria realizada al final de la tarea. Lo que, desde el principio de interacción de la EMR, ayuda a la reflexión alrededor del proceso de matematización que realizan los estudiantes como una organización de la realidad.

Para la sistematización de los resultados de las respuestas en la tabla 10 se realiza la siguiente convención: EO: equinoccio de otoño; EP: equinoccio de primavera; SI: solsticio de invierno; SV: solsticio de verano; NIN: ninguno

Tabla 10. Clasificación de las respuestas de la tabla 2 de la tarea 2.

País	convenciones	Fechas dadas y número de estudiantes asociado a la respuesta				
		21-sep-19	15-abr-25	22-dic-30	21-jun-31	23-sep-28
Canadá	NIN	1	5	0	1	1
	EO	5	1	0	0	8
	EP	2	2	0	1	0
	SI	1	1	9	0	0
	SV	0	0	0	7	0
España	NIN	1	5	1	1	1
	EO	3	1	1	1	7
	EP	3	2	0	0	0
	SI	1	1	7	7	0
	SV	1	0	0	0	1
Francia	NIN	1	5	1	1	1
	EO	4	1	1	0	7
	EP	2	1	0	2	0
	SI	2	2	6	0	1
	SV	0	0	1	6	0
Chile	NIN	1	5	1	1	1
	EO	1	3	0	0	1
	EP	5	1	1	0	7
	SI	2	0	1	6	0
	SV	0	0	6	2	0
Sudáfrica	NIN	2	5	2	1	1
	EO	2	2	0	0	1
	EP	3	2	2	1	6
	SI	1	0	0	6	0
	SV	1	0	5	1	1

Cabe resaltar que el diálogo con los estudiantes permite reconocer que las estaciones del año hacen parte de su cotidianidad, aunque Colombia sea un país que carece de estas. Además, la situación en el contexto de la mecánica celeste ayuda a los alumnos a aclarar conceptos de la física relacionados con el movimiento de la traslación y el grado de inclinación de la Tierra;

particularmente, la ocurrencia de las estaciones como un suceso dado por el grado de inclinación de la Tierra y no como un efecto posicional de la tierra respecto al sol. Como lo propone el enfoque de la EMR, facilita el desarrollo de estrategias que los lleven a interpretarlo, explicarlo y por tanto, matematizarlo.

Para Canadá (país del hemisferio norte), en la fecha 21 de septiembre de 2019 se observa que 5 estudiantes responden que está en equinoccio de otoño, 2 alumnos responden que está en equinoccio de primavera, 1 en solsticio de invierno y otro lo deja en blanco. Los 5 estudiantes que responden equinoccio de otoño argumentan que analizar la figura 1 y la lectura realizada en les permite comparar el 21 de septiembre de 2019 con el suceso a ocurrir.

Por otra parte, los 2 estudiantes que responden equinoccio de primavera (fenómeno del hemisferio sur para esta fecha) escriben que Canadá al ser un país del hemisferio norte debe responder a este fenómeno; sin embargo su respuesta no es coherente con los argumentos dados. Además, los estudiantes que no responden al fenómeno de equinoccio presentan incoherencias en sus justificaciones.

Por último, la estudiante que responde solsticio de invierno argumenta: un solsticio ocurre cada nueve meses ya que cada estación dura 3 meses; es decir, su estrategia es de conteo, no obstante el tiempo de duración de la estación lo asocia al suceso equinoccio y no identifica el periodo de un año para los sucesos de la tarea 2. Además, la estudiante durante la aplicación argumenta que la tabla 2 se puede completar con cualquier fenómeno sin realizar la clasificación por hemisferios.

En los espacios de discusión propiciados con todos los estudiantes en torno a las respuestas presentadas para este numeral, se pone en consideración la ocurrencia de los fenómenos tanto equinoccio de otoño como equinoccio de primavera, y los alumnos argumentan que ocurren cada año 1 y que si el hemisferio norte esta en equinoccio de otoño, el hemisferio sur está en equinoccio de primavera de acuerdo con las fechas dadas en la figura 1 (de la situación 1) presentada con la lectura; lo cual es sustentado desde el conteo. Es decir, toman la fecha dada en la figura 1 para el equinoccio de otoño y conjeturan que cada 12 meses ocurre.

Desde el principio de interacción, el docente juega el papel de guía en esta plenaria que busca llevar al estudiante a diversas interpretaciones a través de la reflexión, en otros aspectos,

del trabajo cooperativo. Asimismo, la clasificación de los países presentados en la tabla 2 de la tarea 2 según el hemisferio al que pertenece, sea norte o sur, facilita la interpretación adecuada de la tarea.

Para la fecha 15 de abril de 2025, donde no se presenta ni un equinoccio ni un solsticio, 5 estudiantes la dejan en blanco, 2 responden equinoccio de primavera, 1 equinoccio de otoño y 1 solsticio de invierno.

Los 5 estudiantes que dejan en blanco argumentan que es una fecha donde no ocurre ni equinoccios ni solsticios; a partir de las interacciones con estos estudiantes se puede conjeturar que los estudiantes reconocen la variación periódica de los solsticios y los equinoccios, puesto que describen el periodo como 1 año y que el tiempo transcurrido entre un suceso determinado y el 15 de abril no da el periodo. En cambio para los otros 4 estudiantes se da que: 1 estudiante responde la tabla 2 sin tener en cuenta la fecha ni el hemisferio y no muestra un reconocimiento de la variación o el periodo relativo a cada fenómeno. Por otra parte, los otros 3 alumnos aunque responden sucesos que no ocurren en la fecha, se resalta la clasificación por hemisferios y la conservación del evento en los países del mismo.

En la figura 12 se muestra como uno de estos 3 estudiantes escribe en el 15 de abril de 2025 solsticio de invierno y equinoccio de otoño; lo que deja ver que presenta sucesos que no son simultáneos; en otras palabras, no ocurren en el mismo día para hemisferios diferentes, lo que permite conjeturar que este alumno, al igual que los otros dos, no reconocen la variación periódica del mismo y no resaltan la ocurrencia del fenómeno para cada hemisferio.

Países	21 de septiembre de 2019	15 de abril de 2025	22 de diciembre de 2030	21 de junio de 2031	23 de septiembre de 2028
N Canadá	E. de Primavera	S. invierno	S. invierno	E. Primavera	E. Otoño
S Chile	S. de invierno	E. otoño	E. Primavera	S. invierno	E. Primavera
N Francia	E. de Primavera	S. invierno	S. invierno	E. Primavera	E. Otoño
N España	E. de Primavera	S. invierno	S. invierno	E. Primavera	E. Otoño
S Sudáfrica	S. de invierno	E. otoño	E. Primavera	S. invierno	E. Primavera

Tabla 2

Figura 12. Respuesta solsticio invierno para el 15 de abril de 2025.

Es así que para la fecha 15 de abril de 2025, no solo para Canadá, sino para los demás países se cumple lo analizado anteriormente. Cabe resaltar que el completar la tabla 2 deja ver que los ocho estudiantes que reconocen la conservación de la recurrencia en la fecha 23 de septiembre de 2028 logran responder acertadamente lo ocurrido y justificarlo desde la clasificación por hemisferios y la asignación de sucesos simultáneos y contrarios como lo son los equinoccio de otoño y primavera (al igual que los solsticios de invierno y de verano).

Para la fecha 22 de diciembre de 2030 los nueve alumnos responden solsticio de invierno y sus justificaciones relacionan la estación invierno con sus conocimientos previos e informales; además, justifican que las comparaciones que realizan de los diferentes registros de representación presentes en la situación (lo icónico, lo verbal y lo tabular) les ayuda en el reconocimiento de la variación de las estaciones, los cambios de estaciones y su dependencia con la posición de la Tierra. Como lo proponen los Estándares (2006, p 66) el identificar estas dependencias y variables contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional.

Para la fecha del 21 de junio del 2031 se reconoce que 7 estudiantes dicen que Canadá está en solsticio de verano, 1 equinoccio de primavera y 1 ningún fenómeno. Es de notar que las estaciones del hemisferio norte, respecto a Canadá, hacen parte de sus saberes previos dado que en sus justificaciones dejan ver la ocurrencia de estos fenómenos. Desde el enfoque de la EMR, el manejo por parte de los estudiantes de la lectura propuesta, la tabla 2 que completan y el conteo realizado al comparar las fechas de esta tabla con las dadas en la figura 1 –de la situación 1 les permite desarrollar y reformular sus estrategias, que hasta el momento se materializan en la asignación de hemisferios a países, la ocurrencia de un fenómeno que depende de la ubicación del país y el conteo que les ayuda a reconocer la periodicidad.

De igual forma, para la fecha 23 de septiembre de 2028 8 alumnos responden equinoccio de otoño lo que permite afirmar que los estudiantes reconocen la ocurrencia del equinoccio de otoño en Canadá.

Por tanto, los resultados de las cinco fechas analizadas para Canadá dejan ver que los estudiantes interpretan la situación a través de la organización y argumentación de sus respuestas al vincular la comparación entre la ocurrencia del cambio de estación, el hemisferio del país y la fecha indicada con la variación de la posición de la Tierra respecto al Sol.

En contraste con el análisis realizado a las respuestas asociadas a Canadá, se observa que a España solo 3 estudiantes lo clasifican como un país del hemisferio norte. En la socialización de las respuestas dadas se presentan interrogante acerca de la pertenencia del país a determinado hemisferio y si es un país con estaciones o no. Asimismo, para la primera fecha, 3 alumnos realizan la distinción por hemisferios y responden equinoccio de otoño, otros 3 estudiantes responden el suceso contrario (equinoccio de primavera) y los otros 3 que responden las otras opciones de respuesta generan un debate en torno a la ocurrencia o no del equinoccio de otoño. Este diálogo lleva a los estudiantes a una reinversión de sus interpretaciones y justificaciones basada en la coherencia de sus argumentos con las respuestas dadas y los elementos presentados en la situación; así, el docente motiva a la solución de la columna final asociada a la fecha 23 de septiembre de 2028.

Al contrastar la columna del 21 de septiembre de 2019 con la del 23 de septiembre de 2028 los estudiantes reconocen la incoherencia entre su justificación y la respuesta final, lo que lleva a la mayoría de los alumnos a modificar su elección inicial. Es por ello que para la columna del 23 de septiembre de 2028, 7 responden el suceso que ocurre en la fecha dada.

Por otra parte, uno de los otros dos estudiantes responde equinoccio de primavera puesto que establece la relación entre las fechas y su respectivo equinoccio o solsticio. Cuando se le invita a revisar la lectura y la figura 1 sostiene que debe cambiar su respuesta pues presenta confusión en la lectura de la figura 1. Desde el enfoque de la EMR, es pertinente que el estudiante reconozca que las estrategias que desarrolla en la propuesta lo lleven a solucionar acertadamente los interrogantes de la misma y le aporte diferentes opciones de interpretar el contexto.

La figura 13 muestra la respuesta de uno de los estudiantes que argumenta que España, al igual que Canadá y Francia, se encuentran en equinoccio de otoño y la clasificación que realiza de los países según su hemisferio.

2. a. Indique para cada una de las fechas dadas, si el país se encuentra en un solsticio de invierno o en un equinoccio de primavera.

	Países	21 de septiembre de 2019	15 de abril de 2025	22 de diciembre de 2030	21 de junio de 2031	23 de septiembre de 2028
N	Canadá	E. Otoño		S. Invierno	S. Verano	E. Otoño
S	Chile	E. Primavera		S. Verano	S. Invierno	E. Primavera
N	Francia	E. Otoño		S. Invierno	S. Verano	E. Otoño
N	España	E. Otoño		S. Invierno	S. Verano	E. Otoño
S	Sudáfrica	E. Primavera		S. Verano	S. Invierno	E. Primavera

Figura 13. Respuesta de un estudiante a la tabla 2 de la tarea 2.

Desde los lineamientos (1998, p 50), de la figura 13 se puede afirmar que el estudiante encuentra el significado y sentido acerca de la variación asociada a la situación y puede establecer la relación entre los fenómenos de cambio, su variación e impacto en la vida práctica, como lo son los equinoccio (o solsticios) y su dependencia con la posición de la Tierra, aunque sea en un país diferente a Colombia.

Además, el uso de la representación tabular en la pregunta 2 de la tarea 2 responde a lo propuesto por los Lineamientos (1998, p 50) ya que la organización en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas involucran la dependencia de sucesos a la variación de la posición de la Tierra, la pertenencia a un hemisferio y la periodicidad de su ocurrencia. En otras palabras, los alumnos matematizan la situación desde sus saberes previos y estrategias informales para enfocarse en lo propuesto por la tarea, que es el reconocimiento de patrones y de dependencias entre el fenómeno y el cambio. Es decir, toma sus conceptos físicos del movimiento de los planetas, los fortalecen con lo presentado en la situación, reconocen la variación periódica de los solsticios y equinoccios, que esta tiene como periodo 1 año y que, tanto equinoccio como solsticio, depende de la ubicación del país respecto a los hemisferios del planeta.

De la interpretación para el país Francia, se puede inferir que los estudiantes en su mayoría vinculan elementos de la lectura, de las figuras 1 y 2 con la representación tabular de la pregunta 2; lo que permite que surjan elementos en común en sus argumentos como la variación de los equinoccios, de los solsticios cada año y la dependencia de estos sucesos con la posición de la

Tierra respecto al sol según su eje de rotación (dado que las estaciones dependen de la inclinación de la Tierra y no de la posición de la misma en la órbita de traslación).

Desde el principio de interacción y a partir de las intervenciones del docente, los estudiantes reconocen sus estrategias a partir de los elementos propuestos por la situación realista. Es decir, la ubicación geográfica de los países, la periodicidad de un año de los solsticios y equinoccios, predecir la ocurrencia de los sucesos en determinado país al conocer su ubicación en determinado hemisferio de la Tierra y el conteo por el periodo para predecir futuros sucesos. Es de notar que este proceso se presenta como matematización horizontal, dado que los estudiantes pueden identificar y describir la matemática que yace en el contexto, reconocer regularidades y relaciones, analogías con otros problemas, etcétera.

Por tanto, del análisis de los resultados dados por los alumnos en la tabla 2 para los países del hemisferio norte se resalta que la mayoría de ellos organizan los elementos de la tarea, los clasifican según una propiedad en común, les asignan una relación respecto a la variación dada y predicen la posible ocurrencia para los demás países que tengan la misma propiedad. Desde los Estándares (2006, p 51) esto responde al uso de la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas; tal como lo realizan con los sucesos equinoccio y solsticio en las plenarias realizadas en las que se deja ver la reflexión entre pares, la reformulación de posturas y el reconocimiento de habilidades para desarrollar los interrogantes planteados.

Para Chile, en 1 primera fecha se observa que 5 estudiantes responden que está en equinoccio de primavera; desde el enfoque de la EMR y en contraste con el análisis de los países del hemisferio norte se puede inferir que para estos cinco alumnos la dependencia del equinoccio con el hemisferio en que se encuentra el país es parte de su realidad, puesto que logran matematizar la situación a través de la comparación entre los dos hemisferios, sacan sus conclusiones y llegan a definir qué fenómeno ocurre tanto para Chile como para Sudáfrica.

En cuanto a uno de los dos estudiantes que responden solsticio de invierno, conservar una clasificación por hemisferio, como se presenta en el análisis de los países anteriores; por ello se concluye que asigna a todos los países del hemisferio sur un fenómeno que no corresponde. Sus argumentos verbales no son correspondientes con la respuesta dada.

Se puede apreciar en la tabla 2 presentada en la figura 13 que el estudiante clasifica acertadamente los países según sus hemisferios (N: norte, S: sur); al centrar el análisis en sus respuestas para cada fecha asociadas a Chile se observa que para el 15 de abril y el 22 de diciembre responde equinoccios diferentes, es decir no reconoce que el 22 de diciembre hay un solsticio; no obstante, al analizar el 21 de junio responde que este es el solsticio de invierno; por otra parte, en la fecha 23 de septiembre de 2028 el estudiante afirma que en esta fecha hay un equinoccio de otoño (diferente a lo dicho en la fecha 21 de septiembre de 2019) para Chile el cual es contrario a lo que ocurre en países del norte como Canadá.

Desde el enfoque de la EMR, se afirma que este estudiante interpreta desde sus estrategias la situación y las replantea con los elementos dados por la misma, lo que enriquece el proceso de matematización pues en el desarrollo de las tareas asociadas al contexto realiza la reformulación en las plenarias; así, tanto para este alumno como para los demás, permite que retomen sus respuestas, las expongan en debate ante sus compañeros y el docente con el fin de generar un proceso de matematización que enriquece los saberes de los estudiantes y establezcan aquella que da razón de lo preguntado en la tarea.

En lo referido a Sudáfrica se observa que 3 estudiantes tienen un reconocimiento del suceso y otros 3 el contrario; aunque en sus argumentos (como se ha presentado en los análisis previos) muestran que identifican la relación entre hemisferios, sucesos y país.

Es de resaltar que un estudiante, figura 13, responde los mismos fenómenos que para Chile; así se hace explícita la clasificación por hemisferios que realiza y el uso que le da en la interpretación de la tarea, sin embargo, su respuesta no equivale al fenómeno a ocurrir en esta fecha.

Por lo tanto, el análisis de la tabla 2 de la tarea 2 deja ver que los estudiantes realizan una interpretación de la tarea desde los elementos presentados tanto en la lectura como en las representaciones icónicas, la cual se hace explícito en el reconocimiento del conteo como una de las estrategias utilizadas para el reconocimiento de la periodicidad del suceso de las estaciones y los días de cambio de estas –equinoccios y solsticios- por tanto, los alumnos asocian a los cambios presentados habilidades que les ayudan a argumentar sus respuestas. Lo anterior, deja ver que los estudiantes están en un proceso de matematización horizontal, que es la comprensión matemática del contexto presentado en la situación.

Conviene subrayar que la conexión entre la vida cotidiana, las ciencias naturales y la matemática misma en este trabajo, sustentada desde el principio de interconexión del enfoque de la EMR y elementos curriculares MEN (1998, 2006) permite que la física sea tomada como una disciplina de la que se adaptan diversos contextos que aportan situaciones realistas y potencian en los alumnos habilidades para desarrollar, reconocer o reinventar las estrategias que proponen para interpretar la situación planteada; lo anterior reafirma la propuesta del enfoque de la EMR, de ver la matemática como una actividad y no como algo estático, además que vincule diferentes disciplinas, particularmente la física. Específicamente responde al interés de esta investigación que radica en la presencia de la física como disciplina de la que se adaptan contextos realistas y como a través de estos se llegan a desarrollar el concepto de la función seno en diferentes niveles.

3. a. Complete la tabla 3 e indique la estación en la que se encuentra cada país.

Fechas	24 de marzo	16 de junio	15 de febrero	25 de diciembre	30 de julio	29 de septiembre	10 de octubre
Países	Estaciones del año						
Canadá							
Chile							
Francia							
España							
Sudáfrica							
Madagascar							
Japón							
India							

Tabla 3

b. Explique cómo estableció la estación para cada uno de los países en las fechas indicadas.

Para la interpretación y análisis de los resultados obtenidos en la tabla 3 se realiza la clasificación de los países según la tabla 11 donde se clasifican los países según el hemisferio al que corresponden; a cada fecha se le asigna un número que representa la cantidad de estudiantes que responden la estación a ocurrir en la fecha dada. Vale destacar que 2 estudiantes responden la tabla 3 sin tener en cuenta las clasificación específica por estaciones y utilizan los solsticios,

equinoccios, afelio y perihelio mostradas en la figura 1 de la situación 1; por lo que estas respuestas no se incluyen en la tabla 11.

Es de notar que en la tabla 11 se clasifica la respuesta de la pregunta 3a, por otra parte, la 3b se vincula en el análisis presentado posteriormente.

Tabla 11. Clasificación de las respuestas de los estudiantes para la pregunta 3a y 3b.

Estación para el hemisferio norte		Primavera		Invierno		Verano	Otoño	
		24 Mar.	16 Jun.	15 Feb.	25 Dic.	30 Julio	29 Sep.	10 oct.
hemisferio norte	Canadá	7	6	7	7	6	6	6
	Francia	6	7	6	6	6	5	6
	España	6	6	6	6	7	5	5
	Japón	7	6	6	6	5	6	5
	India	5	6	5	6	6	5	4
hemisferio sur	Chile	7	6	6	5	6	6	5
	Sudáfrica	6	6	6	5	6	5	5
	Madagascar	7	5	6	5	6	6	6

La tabla 11 se compone por cuatro filas que orientan el análisis de la pregunta 3a. La primera fila está asociada al suceso esperado para el hemisferio norte, la segunda fila muestra las fechas dadas por la tabla 3, la tercera fila presenta los países del hemisferio norte con la cantidad de estudiantes que responden la estación que ocurre de acuerdo con el día dado y la última fila los países del hemisferio sur.

En general, al interpretar los resultados de la tabla 11, se obtiene que 5 estudiantes la completan adecuadamente; estos alumnos responden acertadamente la pregunta anterior relacionada con los solsticios y los equinoccios lo que permite concluir que, a través de las comparaciones que realizaron de la pregunta 2 de esta tarea, donde definen cada cuánto ocurre un equinoccio o un solsticio, resaltan que las estaciones que ocurren en los hemisferios son contrarias (si un hemisferio está en verano el otro está en invierno y si un hemisferio dado está en otoño el otro está en primavera). Es así que esta simultaneidad entre la estación y la pertenencia a determinado hemisferio potencia el reconocimiento por parte de los estudiantes de la periodicidad de cada una de las estaciones, de los solsticios y de los equinoccios, a través del conteo por 1 año que realizan para encontrar las variaciones de los solsticios y equinoccios.

El análisis de la tabla 11, en lo relativo al pensamiento variacional, desde los Estándares (2006, p 66), deja identificar la comparación que realizan los estudiantes de las estaciones, solsticios y equinoccios; quienes a su vez, desarrollan la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón; es decir que cada año ocurre ya sea una estación dada, un solsticio o un equinoccio de acuerdo con la fecha establecida inicialmente. A este análisis se le puede asignar un conteo que surge en la tarea desde lo planteado en la lectura y al sumar 1 año se obtiene como resultado el mismo valor.

Desde el principio de niveles del enfoque de la EMR, se sustenta el análisis de las producciones del estudiante en el marco de una matematización horizontal que toma al conteo como la estrategia que surge de la situación y les permite extraer elementos matemáticos del contexto para llegar a matematizar otras situaciones realistas.

Ahora bien, los dos alumnos que presentan respuestas diferentes a los acontecimientos asociados a la tabla 3 de esta tarea, realizan una socialización de sus respuestas en plenaria, en la que buscan argumentar sus elecciones. Este proceso colectivo da como resultado la reinterpretación de lo presentado a partir del debate, la lectura propuesta, las figuras 1 y 2. Por tanto, los estudiantes reconocen hasta el momento, que estos fenómenos dependen de los hemisferios, la fecha dada y el planeta.

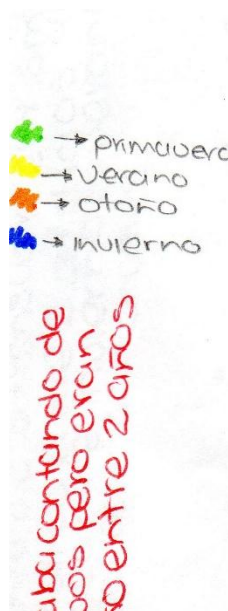
Consecuentemente, desde el enfoque de la EMR, la orientación en el reconocimiento de sus estrategias utilizadas, la validez de estas respecto a la tarea propuesta y la posibilidad de replantear lo presentado como incorrecto es lo que Freudenthal (1991, p 9) define como un inter juego de fuerza que se presenta como un balance sutil entre la libertad de inventar de los alumnos y la fuerza de guiar del docente, vinculado al principio de reinención donde el docente actúa como guía del estudiante.

Aunque lo anterior permite el replanteamiento de las estrategias propuestas por los estudiantes a partir de la interacción entre pares y con el docente, no siempre se logra una re interpretación en la que todos los alumnos muestren coherencia entre sus argumentos verbales y las repuestas dadas para la tarea asociada a la situación. Tal es el caso de las dos respuestas que no fueron incluidas en la tabla 11 dado que no siguen los elementos sugeridos por la pregunta y las interacciones del docente con cada uno de ellos.

Ambos estudiantes conjeturan que la periodicidad de los fenómenos y las estaciones no es un año, además la falta de coherencia entre lo expuesto en los debates y lo presentado físicamente en la tabla 3 de la tarea 2 fue determinante para afirmar que los resultados revelan un poco avance en cuanto al proceso de matematización de las situaciones dadas. Lo anterior lleva a concluir que ambos estudiantes reconocen correctamente la variación de los años bisiestos, pero la asociada a los solsticios, equinoccios y estaciones no.

Por tanto, 7 estudiantes logran identificar la variación periódica y la expresan en el reconocimiento de sucesos ocurridos para determinado hemisferio y países asociados al mismo, sin embargo dos estudiantes presentaron inconsistencias entre lo escrito en la tabla 3 y su interpretación de la situación. El análisis de las preguntas 2 y 3 deja ver que los alumnos reconocen la periodicidad de las estaciones, de los solsticios y los equinoccios desde lo propuesto por la situación; lo que les aporta al análisis del contexto desde sus conceptos matemáticos; este proceso, desde el enfoque de la EMR; se le llama matematización horizontal y está relacionado con el nivel de comprensión situacional dado que los estudiantes utilizan recursos fuera de los tradicionalmente presentados por la escuela como la lectura, las figuras y los conceptos previos adquiridos en su cotidianidad.

Por otra parte, se resalta una de las respuestas dada a la tabla 3 que representa a 7 estudiantes que responden las mismas estaciones bajo los mismos argumentos; en la figura 14 se deja ver la asignación de colores a las estaciones del año para las respuestas dadas por este estudiante.



Fechas	24 de marzo	16 de junio	15 de febrero	25 de diciembre	30 de julio	29 de septiembre	10 de octubre
Países	Estaciones del año						
Canadá	Verano	Verano	Invierno	Invierno	Verano	Otoño	Otoño
Chile	Otoño	Otoño	Verano	Verano	Invierno	Primavera	Primavera
Francia	Primavera	Primavera	Invierno	Invierno	Verano	Otoño	Otoño
España	Primavera	Primavera	Invierno	Invierno	Verano	Otoño	Otoño
Sudáfrica	Otoño	Otoño	Verano	Verano	Invierno	Primavera	Primavera
Madagascar	Otoño	Otoño	Verano	Verano	Invierno	Primavera	Primavera
Japón	Primavera	Primavera	Invierno	Invierno	Verano	Otoño	Otoño
India	Primavera	Primavera	Invierno	Invierno	Verano	Otoño	Otoño

Tabla 3

Figura 14. Solución a la tabla 3 por una estudiante

La figura 14 y lo argumentado por la estudiante deja ver que la asignación de las estaciones en la parte izquierda de la tabla 3 se realiza a partir de la lectura realizada y lo utilizado en la pregunta 2 de esta tarea. Además, asigna colores para resaltar que las estaciones del hemisferio sur son contrarias a las del hemisferio norte. Asimismo, sostiene que por lo anterior en una columna asociada a determinada fecha solo pueden aparecer dos colores, sea el verde o el naranja y el azul y el amarillo grupos de colores que corresponden a la primavera, el otoño, el invierno y el verano respectivamente.

Por tanto, el análisis de las preguntas 2 y 3 lleva a conjeturar que los estudiantes reconocen la regularidad anual de los sucesos estación del año, solsticio y equinoccio. Este conteo por 1 año que realizan para encontrar la siguiente ocurrencia del suceso dado muestra que los estudiantes logran organizar la realidad desde sus saberes matemáticos, lo que se define como matematización horizontal.

4. De acuerdo el texto “**La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones**” y la figura 1, realice un esquema de los solsticios y los equinoccios en la tierra para el hemisferio sur.

Para la clasificación de las respuestas a la pregunta 4 se incluye la tabla 12 con tres tipos de respuestas dadas por los estudiantes. Es de notar que en los tipos I y II los estudiantes realizan un esquema del hemisferio sur con diferentes características, las que se presentan posteriormente; por otro lado, la respuesta tipo III hace referencia a un estudiante que realiza el esquema del hemisferio norte, contrario al que se le pide en la pregunta 4.

Tabla 12. Clasificación de las respuestas de los estudiantes para la pregunta 4.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Esquema elíptico que muestra las fechas, los equinoccios y los solsticios respectivos al hemisferio sur. Además muestran el día en que la tierra pasa por el afelio y el perihelio.	Uso de la figura 1 presentada para identificar y cambiar la figura para un esquema que muestre el otro hemisferio	5
Tipo II	Esquema circular que presenta al sol en el centro, los solsticios y los equinoccios presentes para el hemisferio sur.	Uso de la figura 1 presentada para identificar y cambiar la figura para un esquema que muestre el otro hemisferio	3
Tipo III	El estudiante realiza un esquema del hemisferio norte.	Uso de la figura 1 presentada para identificar la figura para un esquema que muestre el otro hemisferio; no obstante, lo estructura para el mismo hemisferio.	1

Las respuestas tipo I dadas por 5 estudiantes permiten reconocer en los esquemas y justificaciones el cambio que realizan los estudiantes de esta figura para dar lugar a lo

preguntado en el interrogante. Así, se reafirman en el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio, que desde lo propuesto por los Estándares (2006, p 66), les aporta a la descripción, modelación y representación en distintos sistemas de representación –para este caso verbales e icónicos- en tanto los realizan una explicación del esquema realizado y resaltan la anualidad de las variaciones asociadas a los solsticios, los equinoccios y las estaciones. Este estudio de estas regularidades ayuda a movilizar el pensamiento variacional en los estudiantes y hace explícito el manejo de los diferentes cambios de representación propuestos por la tarea y usado por los estudiantes como estrategias que aportan al proceso de matematización, el cual, según Bressan (2006, p 1) es la forma de hacer matemática de los estudiantes, es decir de organizar la realidad.

En la figura 15 se presenta un esquema representativo según la clasificación tipo I realizado por un estudiante.

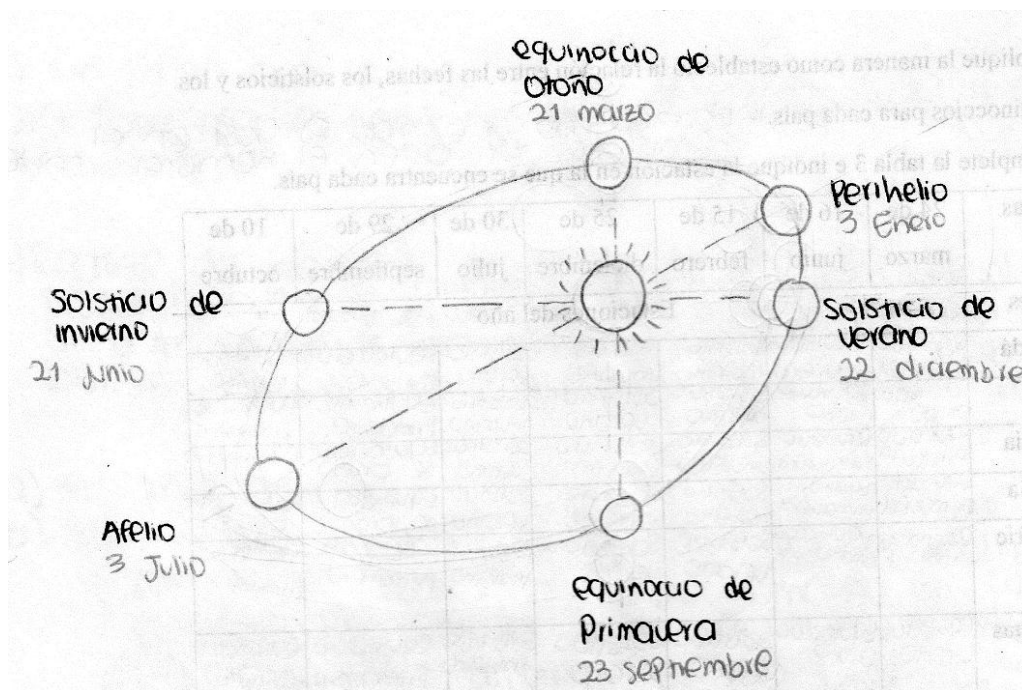


Figura 15. Respuesta tipo I Esquema de los solsticios y equinoccio en el hemisferio sur.

La figura 15 deja ver la conservación de las diferentes posiciones de la tierra presentadas en el esquema inicial de la figura 1 de la situación 1. Cabe resaltar que, el análisis de estos esquemas, especialmente el de la figura 15, las explicaciones verbales dadas por los estudiantes en los debates realizados y las respuestas dadas en las preguntas anteriores permite conjeturar

que los alumnos asocian lo comprendido respecto a los sucesos equinoccio de otoño, equinoccio de primavera, solsticios de verano y solsticios de invierno con lo periódico, la anualidad y la ocurrencia opuesta de los sucesos; por ejemplo el equinoccio de primavera con el equinoccio de otoño.

Se puede concluir para este tipo de respuestas que los estudiantes encuentran la conexión entre lo presentado por la situación y lo que han interpretado en las dos tareas resueltas. De esta manera, se movilizan diferentes representaciones de lo periódico y sus regularidades, lo que, según los Estándares (2006, p 66), ayuda al reconocimiento de las variables que cambian y la dependencia de estas variaciones con diferentes elementos que se vinculan al pensamiento variacional, tales como la dependencia de las variables a los sucesos, la capacidad de asociar determinado evento con una fecha indicada y la posibilidad de comprobar si para la fecha indicada se presenta lo respondido en el interrogante dado.

Por tanto, los cinco estudiantes que realizan sus esquemas según el tipo I reconocen la variación de lo periódico de los solsticios y de los equinoccios presente en ambos hemisferios. Asimismo, en la socialización de sus resultados sostienen que esta periodicidad de un año está asociada a las estaciones, que cada estación dura aproximadamente tres meses y que el cambio de estaciones se hace presente un solo día al año.

Por otra parte, en las respuestas tipo II tres estudiantes representan las variaciones de los solsticios y los equinoccios en un esquema circular, con el sol en el centro. Es de notar que relacionan los fenómenos con el hemisferio dado. Asimismo, es importante resaltar que los alumnos reconocen la variación periódica de los solsticios y los equinoccios.

Como se muestra en la figura 16, este tipo de respuestas deja ver la estación en lugar del equinoccio o el solsticio; la fecha de los equinoccios o solsticios y no el día específico de dicho acontecimiento; el estudiante que responde lo presentado en esta figura explica que por simplificar la escritura no escribe el suceso como equinoccio o solsticio al argumentar que no es necesario puesto que en la pregunta ya está dicho.

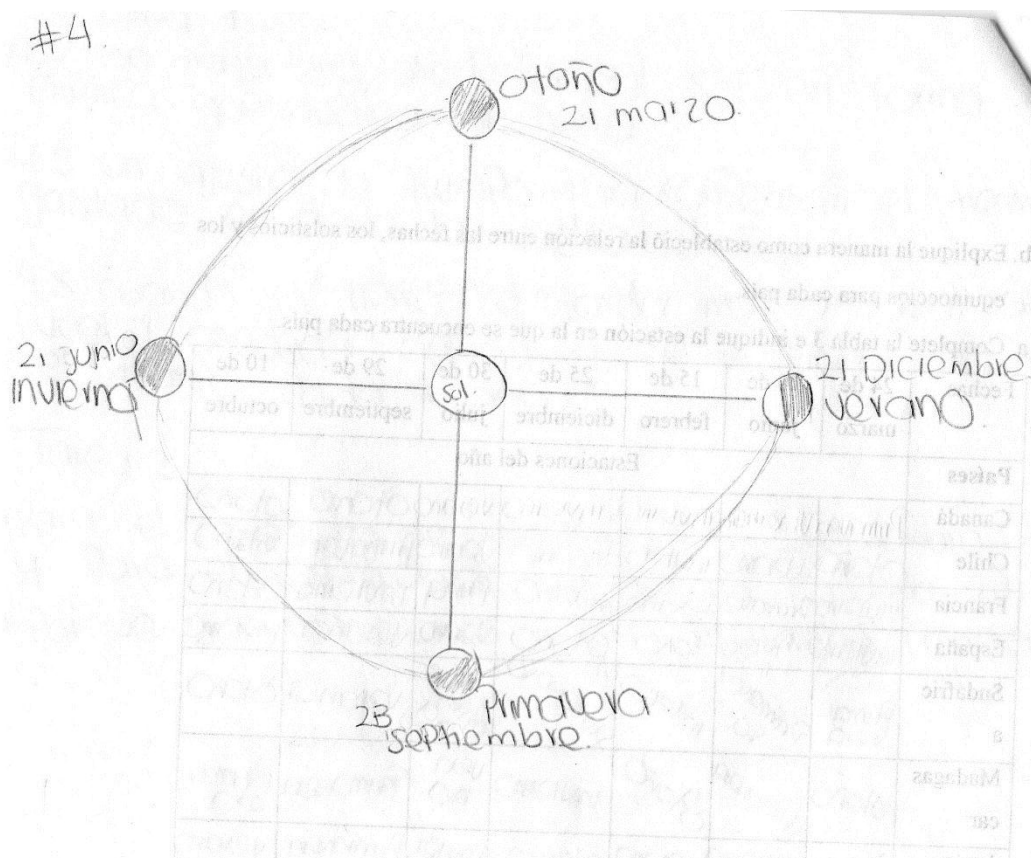


Figura 16. Esquema preguntas tipo II.

Cabe aclarar que la distinción de las respuestas tipo I y las del tipo II pretende resaltar la forma correcta de la órbita de la Tierra; así, la respuesta tipo II es aceptada en tanto muestra la variación de las estaciones y la fecha correspondiente a los equinoccios y solsticios, no obstante, las tipo I corresponden exactamente a la relación del contexto con la variación periódica que se quiere movilizar.

El análisis realizado hasta el momento permite concluir que los estudiantes interpretan la situación a través de sus saberes previos e implementan diferentes estrategias en el desarrollo de las tareas propuestas, tales como el conteo, las comparaciones entre sucesos que ocurren simultáneamente, el planteamiento de expresiones algebraicas que muestran algunas dependencias entre las variables asociadas a los fenómenos y realizar ciertas predicciones bajo el uso de los modelos desarrollados por los estudiantes. Es así como Bressan (2016, p 4) desde la perspectiva de la EMR aclara que el término modelo no se refiere a modelos pre constituidos e

impuestos desde la matemática formal, sino a modelos que emergen desde los interrogantes movilizados en el estudiante a través de las situaciones en este contexto.

Es de notar que, el contexto de la situación es la mecánica celeste que, junto con la propuesta hasta el momento, provee diferentes elementos fenomenológicos que permiten aproximarse a la variación periódica que se pretende movilizar. Es así como se reconocen que estas estrategias son “modelos de” puesto que su construcción como aplicación son relativos a la situación planteada.

Por tanto, el análisis de las primeras dos tareas permite inferir que los estudiantes adoptan las características de los solsticios y equinoccios, toman en consideración algunos saberes previos como estrategias informales para desarrollar formas de interpretar y resolver lo presentado por el contexto para comprender lo sucedido y hablar de su ocurrencia cada año de acuerdo con el hemisferio; esto moviliza lo propuesto por los Estándares (2006, p 51) ya que a través de diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica crean, expresan y representan ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar sus puntos de vista.

Es decir, cuando los estudiantes explican su representación icónica (esquema realizado) a través de sus argumentos verbales en las discusiones promovidas en el aula de clase, las estrategias matemáticas propuestas en las tareas, tales como la adición sucesiva, el uso de conceptos como múltiplos y divisores, el planteamiento una expresión que ayuda a predecir años bisiestos a partir de un año bisiesto conocido y las representación tabular en la que organizan la variación de los años bisiestos.

Tarea 3: Reconociendo regularidades periódicas.

La tarea 3 moviliza aspectos de la situación trabajados en las tareas 1 y 2 con el fin de que los estudiantes comprendan las variaciones periódicas trabajadas a través de las estrategias utilizadas hasta el momento; estas son: el conteo y el uso de la representación tabular. Estas formas usadas por los alumnos para matematizar la realidad están asociada específicamente al contexto; además, surgen de las tareas realizadas en la implementación y son relacionadas con sus saberes previos, métodos informales de interpretación con miras de predecir y conjeturar

acerca de lo que va a ocurrir en determinado tiempo con los años bisiestos, solsticios y equinoccios.

El análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas 1 y 2, muestra el reconocimiento de la regularidad de estos fenómenos; en otras palabras, explican los cambios de los solsticios y los equinoccios presentes cada año, la recurrencia de los mismos, que muestra la interpretación de periodo presente en sus producciones en tanto se repite para determinada fecha, ya sea cada año (caso de los equinoccios y solsticios) o cada cuatro años (año bisiesto).

Desde del enfoque de la EMR, este proceso de Matematización realizado por los alumnos se enmarca en el nivel situacional dado que surgen como estrategias el conteo y el uso de la representación tabular para explicar el contexto; por otra parte, se conjetura que alcanzan el nivel referencial en tanto enfatizan en el uso de elementos matemáticos movilizados para dar razón de las variaciones y regularidades presentes en el contexto.

En este sentido, el proceso de matematización, desde el enfoque de la EMR, da razón de la interpretación y organización de la realidad, se entiende como la forma en que los estudiantes analizan las situaciones propuestas y se define como matematización horizontal.

1. a. Si los años 2000, 2008, 2012 y 2016 fueron años bisiestos, determine 5 años que vayan a ser bisiestos.

b. Explique la manera como predijo estos años.

En la tabla 13 se agrupan las respuestas 1a y 1b dado que se complementan para un análisis de las producciones de los estudiantes. Cabe resaltar que en la pregunta 1 se retoman elementos trabajados en la tarea 1 respecto a los años bisiestos y su regularidad de ocurrencia; es así como se espera que las estrategias presentadas por los estudiantes dejen ver su progreso en la interpretación de la situación presentada; por ejemplo, que logren pasar de explicar el contexto de forma intuitiva para llegar a matematizar y desarrollar diferentes modelos a partir de las habilidades mostradas en la solución de las anteriores situaciones.

Tabla 13. Clasificación de las preguntas 1a y 1b de la tarea 3.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Continuación de secuencia de los años dados en la pregunta: 2020, 2024, 2028, 2032, 2036	Al año 2016 dado por el enunciado de la pregunta 1 se le suma 4 años.	5
Tipo II	$4n + \text{año bisiesto}$ $= \text{año bisiesto}$	La expresión dada ayuda a encontrar cualquier tipo de año bisiesto al conocer un año bisiesto determinado	1
Tipo III	2024, 2028, 2030, 2038, 2042	3 Uso de años múltiplos de 2 o de 4.	3

Los 5 estudiantes que responden según la clasificación tipo I argumentan que los años bisiestos se presentan cada cuatro años, lo que les permite inferir que al sumarle cuatro años al último año dado en el enunciado de la pregunta 1a se pueden predecir otros años bisiestos; los procedimientos utilizados por los alumnos se asocian a estructuras de tipo aditivo y sumas sucesivas, sin embargo no se observa el uso de lo multiplicativo. Además, el tipo de respuestas I deja ver que los estudiantes predicen la operación de sumar 4 para llegar al siguiente número asociado a un año bisiesto. Los 5 alumnos coinciden en el uso de las estrategias presentadas en la tarea 1; asimismo, argumentan que los años bisiestos tienen una regularidad de 4 años.

Por otra parte, para la respuesta tipo II la estudiante utiliza la expresión dada en la figura 3 para predecir cualquier año bisiesto a partir de un año bisiesto dado. En el caso de la expresión dada en la tabla 13, la estudiante argumenta que la n representa cualquier número natural, el “año bisiesto” que se encuentra sumado al $4n$ es un valor constante tomado de los presentados por la pregunta 1a y el año bisiesto después del signo igual hace referencia al año bisiesto a predecir a través de esta ecuación. Desde el enfoque de la EMR, se infiere que esta expresión se generaliza por parte de la estudiante, puesto que en las dos tareas asociadas a la variación del año

bisiesto la estudiante recurre a ella para comprender el cómo varía el incremento de los años bisiestos y la predicción del año requerido.

Finalmente, aunque los 3 estudiantes que responden según la clasificación tipo III utilizan números presentados en las respuestas tipo I, que son años bisiestos, incluyen años que no lo son.

El primer estudiante, utiliza la tabla dada en la pregunta 1 de la tarea 1 para generar otros años bisiestos; es así como logra mostrar diferentes años bisiestos que cumplen con la característica explicada de multiplicidad por 4. Aunque sostiene que el tiempo que pasa entre dos años bisiestos consecutivos es de 12 años lo cual no corresponde a esta regularidad. En las justificaciones verbales del estudiante explica que los años bisiestos escritos llevan una recurrencia de 12 años, lo que no se asocia con esta ocurrencia.

El segundo estudiante, presenta dos años bisiestos consecutivos; sin embargo los otros tres años presentados no corresponden a años bisiestos dado que realiza la suma por 2 -no por 4 para conseguir un año bisiesto-. De esta manera, al debatir con el estudiante sobre su respuesta argumenta que la asignación realizada no es adecuada y propone otros años bisiestos.

Por último, el tercer estudiante presenta 4 años bisiestos y uno no bisiesto. Esto permite que el estudiante estudie la variación periódica de los años bisiestos por medio de una cuenta sucesiva de 4 en 4.

Si bien, de las respuestas tipo III, se concluye que los estudiantes al momento de responder el interrogante no todos los años que escriben son bisiestos; por ellos analizan sus producciones y verificar su validez con sus compañeros (Estándares 2006, p 55); para resaltar el reconocimiento de la predicción de un año bisiesto como un número múltiplo del 4. Es de notar que la escritura de años no bisiestos corresponden a un cambio en el patrón de variación y es justificada por los alumnos como una imprecisión al momento de resolver lo presentado en la tarea.

En general, desde el enfoque de la EMR y el análisis del contexto presentado a través de la situación, se infiere que los estudiantes están en un proceso de matematización horizontal, dado que buscan explicar las tareas planteadas al hacer uso de sus elementos como conjeturan las posibles soluciones a problemas con un mayor grado de complejidad; este proceso de matematización deja ver que los estudiantes comprenden la situación dada; además, que el

fenómeno hace parte de su contexto y que logran conjeturar, explicar y generalizar sus estrategias iniciales a otras tareas o situaciones a presentar .

Desde lo propuesto por Gravemeijer, (1994, p. 104) la generalización se define como la conexión entre varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se clasifique las estrategias dentro de determinado tipo. Al mismo tiempo el proceso de solución puede ser estructurado y por tanto toma forma de una actividad de organización; es decir, la generalización es como una forma de matematización. Desde este punto de vista y lo analizado hasta el momento, esta primera situación lleva al estudiante a reconocer las estrategias informales que desarrolla y, posteriormente, va a permitir identificar aquellas que sean generalizables, es decir que se utilicen en otras situaciones de otros contextos dadas en esta propuesta de aula.

- c. Determine el tiempo que transcurre entre dos años bisiestos consecutivos. Justifique su respuesta.

Tabla 14. Clasificación de las respuestas a la pregunta 1c.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Transcurren 4 años entre dos años bisiestos consecutivos	Es la regularidad que se observa al sumar 4 años a un bisiesto para encontrar otro.	8
Tipo II	12 años entre cada año bisiesto consecutivo.	Es la cantidad de años entre el 2040 y el 2052.	1

La tabla 14 deja ver que para el literal c de la pregunta 1 se analiza que 8 de los 9 estudiantes afirman que entre dos años bisiestos consecutivos hay una diferencia de 4 años. El otro estudiante responde que hay 12 meses entre años bisiestos consecutivos. Cabe notar que al momento de realizar la socialización de las respuestas, este último alumno argumenta que su respuesta (12 años) hace referencia a los años que hay entre el primer y el último año bisiesto encontrado, es decir entre 2040 y 2052.

De esta forma, la pregunta 1 de esta tarea, deja ver que la mayoría de los estudiantes reconocen la periodicidad de los años bisiestos asociada a la suma sucesiva de 4 años a un año bisiesto inicial dado; no obstante, en el proceso de predicción de años bisiestos algunos alumnos presentan dificultades, dado que no relacionan adecuadamente la condición de divisibilidad por 4 que presentan este tipo de años.

Por otra parte, en la producción de uno de los estudiantes se hace explícita la palabra periodo como una interpretación de la variación que se presenta cada cuatro años respecto al año bisiesto inicial. En el debate con el estudiante se identifica que la palabra periodo la utiliza para referirse a un suceso que siempre ocurre; de aquí que se conjeture que este alumno lleve la noción de periodo a otras situaciones problemas diferentes a esta situación en la que surge este concepto.

Por tanto las habilidades mostradas por los estudiantes responden a un proceso de comprensión del contexto desde un nivel situacional y no se generaliza a otros contextos. Lo que se espera es que estas habilidades mostradas adquieran un mayor grado de generalización para usarse en las siguientes situaciones como “modelos de” o “modelos para”.

2. a. Determine el tiempo que transcurrido entre cada solsticio de invierno para una persona que se encuentre en el hemisferio norte.

Explique su respuesta.

b. Compare el tiempo transcurrido entre cada solsticio de invierno y tiempo transcurrido entre cada solsticio de verano. Realice algunas conclusiones al respecto.

c. Transcurre entre cada solsticio de invierno (entre cada solsticio de verano) en el hemisferio sur, el mismo tiempo que en el hemisferio norte. Explique a que se debe esta regularidad de tiempo transcurrido.

Para clasificar las respuestas a la pregunta 2 se introduce la tabla 15 donde se diferencian cada una de las respuestas asociadas a los literales a, b y c.

Tabla 15. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 2a, 2b y 2c.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. El equinoccio y el solsticio ocurren cada año. b. Es el mismo tiempo (1 año) c. Es el mismo tiempo (1 año)	a. Es el mismo tiempo entre cada equinoccio y cada solsticio. b. Para ambos sucesos transcurre el mismo tiempo c. No depende del hemisferio; el tiempo que transcurre es de 1 año.	7
Tipo II	a, b y c. 12 años entre cada año bisiesto consecutivo.	Es la cantidad de años entre el 2040 y el 2052.	2

La tabla 15 muestra que 7 de los 9 estudiantes expresan que los solsticios, al igual que los equinoccios ocurren cada año para cierto hemisferio, reconocen que entre solsticio de verano y solsticio de invierno hay aproximadamente 6 meses, que funciona igual tanto para el hemisferio norte como para el hemisferio sur y concluyen que son situaciones anuales, es decir que se repiten cada año y por ende son periódicas, luego hacen la analogía con los equinoccios para lo que afirman que la periodicidad es de 1 año.

Desde el principio de interacción, se puede concluir que los 7 estudiantes después de socializar la interpretación de sus estrategias reconocen los contrastes entre sus elecciones para analizar y responder las tareas con lo presentado por sus compañeros. Además, relacionan la ocurrencia de los fenómenos físicos presentados en la situación 1 y realizan la correspondencia entre los sucesos, las fechas, las causas que los producen y algunos impactos en la cotidianidad.

Por otra parte, en las respuestas de los dos estudiantes en las que no se presenta la comparación entre la ocurrencia de un año de los sucesos en cuestión, responden que entre cada

solsticio de invierno para el hemisferio norte transcurren 9 meses. Así, el resultado de la interacción con los dos estudiantes deja ver que analizan esta situación desde el inicio del solsticio y no cuentan los tres meses de la estación dada. En otras palabras, el tiempo transcurrido entre dos solsticios de invierno es de un año, ambos estudiantes afirman que cada estación dura 3 meses, de lo que concluyen que la recurrencia es de 9 meses, conclusión en la que no subyace la idea de periodo como el tiempo que transcurre para que el fenómeno se repita desde sus condiciones iniciales.

Los jóvenes logran reconocer las variaciones de los equinoccios como de los solsticios y el periodo de estos fenómenos, lo que desarrolla el pensamiento variacional desde la movilización del concepto de funciones periódicas asociado histórica (Boyer, 1986; Montiel & Buendía 2005) y didácticamente (Camarena 2007, Estándares 2006) a diferentes situaciones realistas tomadas de la física.

De esta forma, la interpretación de estas dos preguntas y las dos tareas iniciales permite reconocer que los estudiantes de décimo desarrollan y modelan situaciones de variación periódica en un nivel básico y se conjetura que puedan realizarlo para otros contextos de la física que se puedan modelar a través de funciones trigonométricas, particularmente la función seno Estándares (2006, p 79).

Por tanto, el análisis hasta el momento permite reconocer que los estudiantes han replanteado y comprendido la situación a través del proceso de matematización progresiva que deja ver sus estrategias para solucionar y dar razón de los interrogantes propuestos; Además, el uso del contexto es un elemento que moviliza en los estudiantes la implementación de las estrategias informales y matemáticas necesarias para la solución de las tareas. Estas habilidades mostradas por los alumnos les permiten movilizarse en el nivel de comprensión situacional dada la dependencia al contexto en el que estas surgen.

La tabla 16 muestra las respuestas dadas por los estudiantes a los literales a, b y c de la pregunta 3.

3.a. Transcurre el mismo tiempo entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos para el hemisferio norte. Justifique su respuesta.

b. Transcurre el mismo tiempo entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos para el hemisferio sur. Justifique su respuesta.

c. Se puede decir que el tiempo que transcurre entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos es el mismo. Explique su respuesta.

Tabla 16. Clasificación de las respuestas a los literales 3a 3b y 3c.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	3a. Transcurre el mismo tiempo y es de 1 año	Los solsticios y los equinoccios se repiten cada año	7
	3b. Transcurre el mismo tiempo, es de 1 año para cada fenómeno.	Los solsticios y los equinoccios se repiten cada año. No dependen del hemisferio.	
	3c. si, pues Transcurre el mismo tiempo y es de 1 año	Los solsticios y los equinoccios se repiten cada año. No dependen del hemisferio.	
Tipo II	3a. Transcurre el mismo tiempo y es de 6 meses	Los solsticios y los equinoccios se repiten cada seis meses.	2
	3b. Transcurre el mismo tiempo, es de 6 meses para cada fenómeno.	Los solsticios y los equinoccios se repiten cada 6 meses. No dependen del hemisferio.	
	3c. si, pues Transcurre el	Los solsticios y los equinoccios	

mismo tiempo y es de un año se repiten cada año. No
dependen del hemisferio.

La tabla 16 deja ver que 7 de los 9 estudiantes responden según el tipo I y sostienen que entre dos solsticios de verano consecutivos transcurre 1 año y que este valor es igual para el tiempo entre dos solsticios de invierno consecutivos. Además, afirman que para los equinoccios, de otoño y de primavera, consecutivos también de 1 año. Lo que dejan ver el acercamiento a la noción de periodo ligada al contexto a través de las variaciones de los solsticios y los equinoccios.

En el debate posterior a la tarea, respecto a los literales a y b los otros 2 estudiantes asociados al tipo II de respuesta, sustentan la periodicidad de los solsticios y los equinoccios cada 6 meses, puesto que, por ejemplo, si en el hemisferio norte se está en equinoccio de otoño, dentro de 6 meses se obtiene equinoccio de otoño para el hemisferio sur. De lo que se puede concluir que los estudiantes reconocen la variación de los sucesos pero no su periodicidad, además, la noción de periodo queda limitada por la interpretación errada del contexto al ignorar el efecto del hemisferio en el que se ubica determinado país. En el literal c, los estudiantes logran una resignificación y reinvención de las causas del fenómeno (estaciones del año) a través de la plenaria realizada en torno a los literales a y b de esta pregunta.

Dado que la evolución de las matemáticas ha dejado ver que estas dos disciplinas, tanto la matemática como la física, tienen una conexión histórico epistemológica que aporta contextos realistas utilizados para que los estudiantes logren matematizarlos, se puede conjeturar que en el análisis de estas 3 preguntas de la tarea 3, la física es una disciplina que potencia el desarrollo de modelos matemáticos de diferentes grados de generalización, para explicar diferentes sucesos de variación periódica.

Por lo anterior, el análisis de las preguntas siguientes busca rastrear como los estudiantes resuelven y como una característica enriquecida por las situaciones realistas del contexto y provee las regularidades de los solsticios, equinoccios, estaciones del año y el movimiento de traslación de la Tierra.

4. Identifique la regularidad (en meses, días transcurridos) que se puede asociar a la variación de:

- a. Los años bisiestos.
- b. Los solsticios de verano
- c. Los solsticios de invierno
- d. Los equinoccios de primavera
- e. Los equinoccios de otoño.

Tabla 17. Clasificación respuestas a preguntas 4 a, b, c, d y e.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a, cada 4 años ocurre	Los años bisiestos tienen una regularidad de 4 años	9/9
	b, c, d y e. tiene una regularidad de 1 año	Los 5 sucesos tienen una recurrencia de 1 año.	7/9
Tipo II	b, c, d y e. tiene una regularidad diferentes a 1 año.	Los 5 sucesos tienen una regularidad 9 meses.	1/9
		Los 5 sucesos tienen una regularidad 6 meses.	1/9

La tabla 17 deja ver que en los resultados dados por los estudiantes; así, para la pregunta 4a se registra que los 9 estudiantes afirman que los años bisiestos tienen una regularidad de 4 años. Lo que permite interpretar que los estudiantes comprenden la situación de los años bisiestos y pueden caracterizar el fenómeno como periódico al indicar la regularidad señalada.

Respecto a los literales b, c, d y e, 7 de los 9 alumnos dicen que los solsticios y los equinoccios ocurren un día cada año –respuestas tipo I-. Por otra parte, las otras dos respuestas hacen referencia a una recurrencia diferente a 1 año -tipo II-; una de estas sostiene que los fenómenos ocurren cada nueve meses y lo sustenta desde el conteo de meses a partir del mes en

el que se termina la estación. Por ejemplo, si es solsticio de verano para el hemisferio sur (23 de diciembre) el fenómeno, la estudiante cuenta los meses desde marzo que termina el verano para este lado de la Tierra, conteo que le deja como resultado 9 meses. Esta justificación deja ver que la estudiante no tiene clara la recurrencia de los solsticios o el equinoccio asociados a la estación particular, es decir confunde equinoccio de otoño con la estación otoño; además, asocia la duración de las estaciones con su equinoccio o solsticio lo que la lleva a una falta de precisión en los tiempos de variación de estos sucesos.

El otro estudiante argumenta que la regularidad de estos sucesos es de 6 meses pues no explicita una distinción entre el equinoccio de otoño del hemisferio sur y el equinoccio de otoño del hemisferio norte; es decir, toma como ciclo completo la ocurrencia del solsticio o del equinoccio como 6 meses. En plenaria se analiza que las estaciones duran 3 meses (aproximadamente) y el solsticio o equinoccio dura solo un día; estas apreciaciones lleva a ambos estudiantes a reinterpretan lo propuesto e identificar su respuesta como no adecuada para el periodo de los solsticios y los equinoccios.

Los estudiantes sostienen que estos fenómenos son periódicos, puesto que son constantes. Al indagar a los estudiantes sobre lo que se entiende por constante, ellos argumentan que es algo que se repite indefinidamente; de allí que, desde el enfoque de la EMR, particularmente el principio de interacción, el docente lleva al análisis de la discusión presentada a través de la comparación de este suceso, con la función constante y con la idea de periodo; esta interacción logra que los estudiantes comprendan que el significado que le otorgan a la palabra constante (para referirse a los sucesos que se repiten bajo las mismas condiciones) responden matemáticamente a la idea de periodicidad o patrón de cambio, el cual es infinito.

5. a. Explique qué entiende por fenómeno periódico.

Tabla 18. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 5a.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Es aquel en el que transcurre el	Un fenómeno periódico siempre va a ocurrir y que tiene un	9/9

mismo tiempo.	tiempo de ocurrencia siempre igual.
---------------	-------------------------------------

La tabla 18 deja ver que los estudiantes enmarcan sus respuestas en lo verbal y sostienen que un fenómeno periódico es aquel que ocurre en el mismo tiempo, se repite a través de los años, algo que pasa regularmente en determinado tiempo, un fenómeno que siempre va a ser, que no cambia y siempre va a estar ahí, por ejemplo los solsticios y los equinoccios. Los estudiantes concuerdan que los fenómenos periódicos son aquellos que tienen un tiempo determinado de ocurrencia y que no se detienen, es decir siempre van a continuar, no tiene fin.

El análisis anterior muestra que los estudiantes realizan un acercamiento informal a la definición de función periódica $f(x) = f(x + p)$, donde x es una variable independiente y p es un número real mayor que cero, dado que señalan la periodicidad de los sucesos es un 1 año (en el caso de los años bisiestos 4 años). Es de notar que las características periódicas de los fenómenos son interpretadas por los estudiantes como la ocurrencia de los sucesos –equinoccios, solsticios, estaciones y años bisiestos- en el mismo tiempo y de forma idéntica.

b. Determine cuáles de fenómenos mencionados en el punto 4, son periódicos. Explique su respuesta.

c. Para aquellos que señaló como periódicos, establezca el periodo.

Para el análisis de los literales b y c de la pregunta 5 se introduce la tabla 19 con los tipos de respuestas dados por los estudiantes.

Tabla 19. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 5b y 5c.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Todos los fenómenos estudiados son periódicos. 4 años año bisiesto, 1 años los demás sucesos.	Dado que todos se repiten infinitamente en determinado tiempo son periódicos.	7

Tipo II	Años bisiestos, con un periodo de 4 años; estaciones con un periodo de 6 meses, solsticios y equinoccios con periodo 6 meses.
---------	---

Para las preguntas 5b y c, 7 de los 9 estudiantes (respuestas tipo I) sostienen que los fenómenos estudiados son periódicos pues responden a las características presentadas en la pregunta 5a; desde el enfoque de la EMR, los estudiantes están en un proceso de matematización vertical ya que a través de sus reflexiones y análisis de las estrategias presentadas desde lo periódico, realizan la asignación de características propias de las variaciones periódica; en otras palabras, estos 7 estudiantes realizan el cambio del nivel de comprensión situacional al referencial, dado que otorgan al conteo la capacidad de predecir el siguiente suceso; esta característica matemática la vinculan con sus estrategias informales intrínsecas en el contexto de la situación. Por otro lado, estos alumnos en el literal c, hacen explícitos los periodos asociados a los sucesos en cuestión.

Por otra parte, los 2 estudiantes con respuestas tipo II (tabla 19) dejan ver que la noción de periodo no la movilizan acertadamente; ya que para ellos el periodo de los sucesos equinoccios y solsticios es de 6 meses, el de las estaciones 3 meses y el de los años bisiestos 4 años. Lo que permite concluir que estos 2 alumnos están en el nivel situacional respecto a la noción de periodo la cual debe ser reformulada. En los debates propiciados con estos estudiantes reconoce que no se tiene en consideración la ubicación del país por hemisferios y esto lleva al error mostrado en el periodo de 6 meses.

d. Cite tres ejemplos de fenómenos periódicos diferentes a los aquí expuestos.

Dado que los jóvenes en este literal citan diferentes ejemplos de la cotidianeidad no se clasifica en la representación tabular las respuestas a este literal. Así pues, para la pregunta 5d, los alumnos citan: el ciclo menstrual de la mujer, el día de cumpleaños, el año nuevo, la rotación de la luna, la rotación de la Tierra, fases de la luna, los eclipses, el péndulo de un reloj, el movimiento de una rueda y la función seno.

Estos fenómenos referenciados por los estudiantes muestran que el reconocimiento de lo periódico lo asocian a diferentes contextos; por una parte, reconocen la periodicidad en

situaciones de la vida cotidiana como los cumpleaños y el ciclo menstrual de la mujer; por otra parte, reconocen algunos fenómenos físicos que muestran periodicidad como el péndulo, movimientos circulares, las fases de la luna y los eclipses. Por último, uno de los estudiantes expresa que la función seno es una función periódica; dado que ya han tenido un acercamiento a las funciones trigonométricas desde un enfoque tradicional donde se trabaja con las razones trigonométricas en diferentes triángulos rectángulos por medio de la definición de seno:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Después se vincula este triángulo al círculo unitario y finalmente se establecen las funciones trigonométricas para los números reales, en este caso la función seno. Lo anterior Montiel (2005, p 125) lo presenta como el tránsito de la trigonometría clásica, que es la relacionada a las razones trigonométricas estáticas en un triángulo rectángulo, a la trigonometría analítica que es el estudio de las funciones trigonométricas

Por tanto, en el análisis de la situación 1 se reconoce como los estudiantes generan diferentes estrategias para abordar las tareas propuestas desde sus conocimientos matemáticos previos e informales. De esta forma, se dejan ver relaciones entre cambios y variables, elementos claves en la introducción al estudio de la variación a través de diferentes representaciones, entre las que se destacan la tabular, la icónica, la verbal y la algebraica; de igual manera los lineamientos (1998, p 50) sostienen que estas ayudan a los estudiantes a potenciar progresivamente su proceso de aprendizaje, vincularlo a su contexto y reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de la matemática.

Además, la noción de periodo y el uso del conteo para la mayoría de los estudiantes se movilizan, desde el enfoque de la EMR, en los niveles de comprensión situacional y referencial ya que se analiza como esta idea intuitiva de periodo muestra algunos elementos de las funciones periódicas como lo son la igualdad entre el suceso y el suceso después del periodo mismo; y el conteo, dado que los alumnos lo usan para predecir tanto los años bisiestos (suma por 4 años) y los demás sucesos (suma por 1 año). Desde los Estándares (2006, p 69) estos elementos analizados muestran la relación entre diferentes sistemas de representación movilizados –tabular, icónico, verbal y algebraico-, planteada como un elemento fundamental para desarrollar elementos del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, puesto que las relaciones

funcionales movilizan la variación que surge desde un contexto que hace parte de la realidad de los estudiantes y les permite una mejor comprensión y predicción de los fenómenos realistas de carácter variacional.

3.2.2. Resultados y análisis de resultados: Situación 2. Un caso de función periódica: La función seno.

La ferris Wheel de Chicago

Chicago tiene un largo historial en cuanto a ruedas de la fortuna se refiere, la primera fue inaugurada en 1893 como parte de la legendaria exhibición universal. Actualmente, en el Navy pier se encuentra la ferris Wheel de Chicago que mide aproximadamente 200 pies de altura (196 pies). Esta rueda hace parte de una serie de atractivos que posee la ciudad de Chicago a orillas del lago Michigan que es uno de los lagos más grandes de Estados Unidos. En la figura 1 se muestra una toma de esta noria²⁶.



Figura 1. Vista de la Ferris Wheel de Chicago²⁷

Este atractivo tiene como fin disfrutar de una vista de 360° del lago Michigan y de la ciudad de Chicago por ello la velocidad de la noria es lo suficientemente baja para que los turistas puedan abordarla sin que esta se detenga. Esta velocidad es tal que en 1 minuto la noria gira 10 grados. Este giro lo realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj.

²⁶ noria es un artilugio de feria consistente en una gran rueda con asientos que gira verticalmente. Tomado de <http://dle.rae.es/?id=QcCVyi3>. Citado el 30 de marzo de 2017

²⁷ Tomado de: Fuente: <https://navypier.com/centennial-wheel/>. Citado el 30 de marzo de 2017.

Tarea 1: Representando la situación

La figura 2 muestra un esquema de la noria y una estructura que se encuentra a la derecha de esta, la cual tomará como plataforma donde los turistas abordan la ferris Wheel para su recorrido por los aires de Chicago.

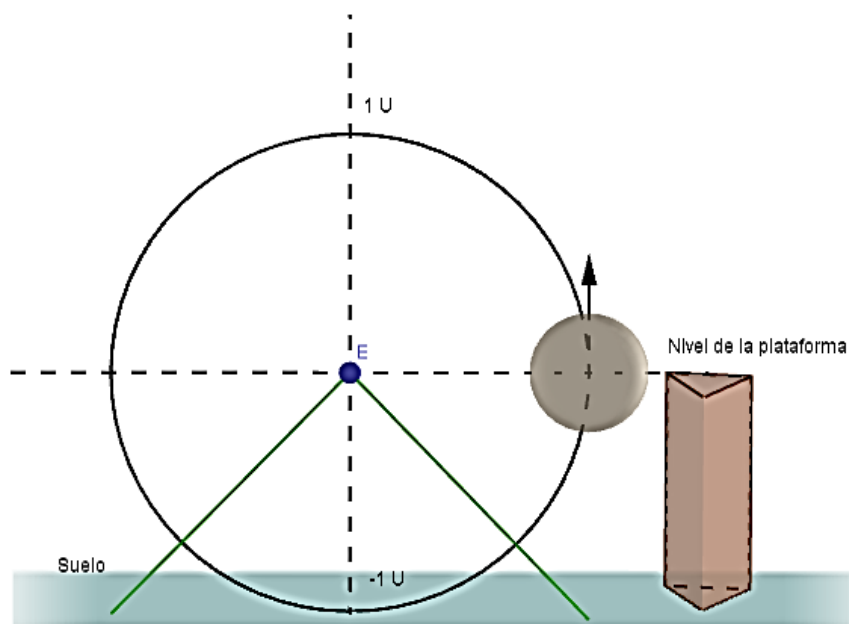


Figura 2. Esquema de abordaje de los pasajeros a la noria.

Teniendo como referencia la figura 2, para una persona que aborda la cápsula de la noria: sea t el tiempo transcurrido (en minutos) desde que inició el recorrido y h la altura (en pies) que alcanza la cápsula sobre el nivel de la plataforma. Tenga en cuenta que la altura de la cápsula está determinada con respecto al nivel de la plataforma.

Por tanto, la posición de la cápsula por debajo del nivel de la plataforma, se tomará como: $-h$. Así, la altura máxima para la cápsula sería de 100 pies y la altura mínima para la cápsula sería de -100 pies. A cada 100 pies se le llamará 1 Unidad de altura y se denotará como U .

1. a. Complete la siguiente tabla realizando la equivalencia entre la altura en pies y la unidad de altura U .

Tabla 1. Conversión de unidades: pies a unidades de altura.

<i>Altura [pies]</i>	100		48,5	-75				65	-65,4
<i>Unidad de altura[U]</i>		0,25			1	0,8	-1		

- b. Explique cómo completó la tabla 1 para los valores de la altura en pies y en unidades de altura U .

La tabla 20 muestra las respuestas de los literales a y b de la pregunta 1, donde los 8 estudiantes completan adecuadamente la tabla 1 que busca la conversión entre los pies y el patrón de medida definido como unidad de altura (1 U).

Tabla 20. Clasificación de las respuestas dada a la pregunta 1a y 1b

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Procedimiento matemático: Regla de tres: $100\text{ p} \rightarrow 1\text{ U}; x \rightarrow 0.25\text{ U}$	Uso del procedimiento matemático asociado a la regla de tres directa.	5
Tipo II	Si se necesita saber el valor en pies se multiplica por 100; si se quiere saber el valor en U se divide entre 100.		4

El análisis de las respuestas tipo I deja ver que 5 de los 9 estudiantes recurren a la regla de tres como elemento matemáticos previo y explican, tanto matemática como discursivamente el uso de estrategias a seguir para solucionarlas. Es de resaltar que esta combinación de las representaciones numéricas y la verbales realizadas por los estudiantes muestra lo propuesto por los Estándares (2006, p 50), puesto que el saber matemático se relaciona con las técnicas y estrategias para lograr que los estudiantes lo utilicen en diferentes contextos. Desde el enfoque de la EMR se considera que estos 5 alumnos se mueven de la informalidad relativa al nivel situacional movilizado en la solución de la primera situación a la implementación de algunos elementos de tipo matemáticos relacionados a la nueva tarea, que son características del nivel referencial. Este último propone que los estudiantes utilizan, entre otras estrategias, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan la respuesta a la pregunta referida a la tarea en particular. Así, la figura 17 muestra una de las respuestas asociada al tipo I donde el estudiante hace explícito el procedimiento regla de tres.

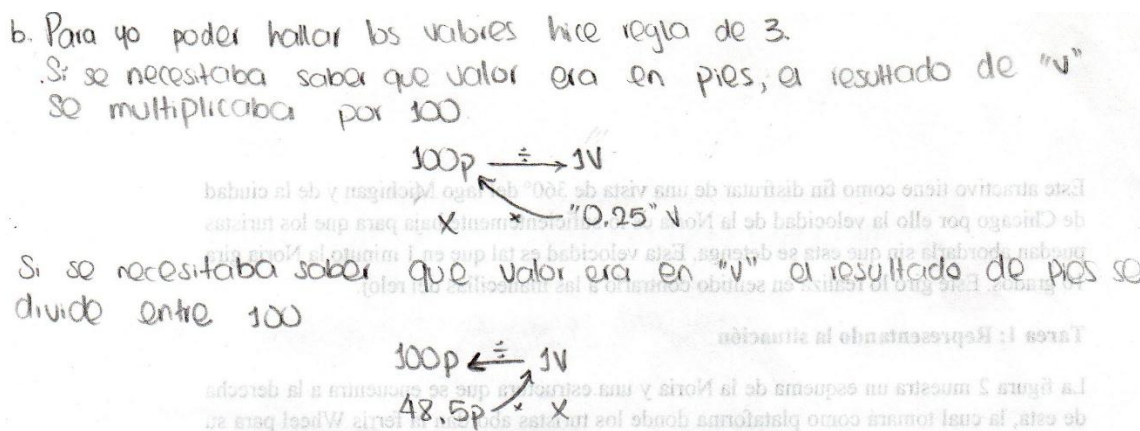


Figura 17. Respuesta tipo I: regla de tres

Por otra parte, los otros 3 estudiantes sostienen que se debe realizar una multiplicación o una división para realizar la conversión de unidades de altura a pies o viceversa. Esta explicación verbal permite reconocer la comprensión que los estudiantes tienen del procedimiento a seguir en las conversiones de unidades. Es decir, encuentran un patrón de relación o equivalencia y lo utilizan como estrategia para explicar lo presentado en la tarea.

Asimismo, al analizar ambos tipos de respuestas se puede conjeturar que los alumnos realizan el cambio de las estrategias de tipo informales a las propias de la matemática acompañadas con argumentos procedimentales y verbales como muestra la figura 19; desde lo propuesto por Bressan (2011, p 8) acerca de la EMR, se interpreta que los estudiantes se mueven en un proceso de matematización tanto horizontal como vertical.

En otras palabras, logran tomar elementos propios del contexto, lo que se traduce en movilizarse del nivel de situacional al referencial. Además, a través de la reflexión realizada en los debates entre pares y el docente, los jóvenes comienzan a mostrar diferentes representaciones –verbal y aritmética– de estrategias que emergen de su interpretación de la situación y enriquecidos por elementos matemáticos conocidos, como lo son la regla de tres y los factores de conversión. Del análisis se puede deducir que los estudiantes superan lo intuitivo del nivel situacional y muestran elementos asociados al nivel referencial.

Cabe resaltar que ambos tipos contribuyen a la comprensión de la situación por parte de los estudiantes en tanto resuelven asertivamente lo preguntado y permite que movilicen elementos propios del pensamiento métrico dado que los alumnos reconocen el cambio de patrón de

medición (de altura de pies a unidades de altura). A través de la plenaria dada en torno al cambio de pies a unidades de altura U , se comparan los elementos propios de la unidad de medida con la variación de la altura de la cápsula de la noria y el ángulo barrido para tal altura. De lo que se sigue que los estudiantes reconocen en el movimiento de la cápsula de la noria una circunferencia unitaria (de radio 1).

Esta asignación de los valores iniciales de ángulo y de altura de la cápsula de la noria permite movilizar el estudio de la función seno, particularmente. Dado que la construcción de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ a través de las variaciones de altura asociadas al ángulo barrido pues relaciona en la circunferencia unitaria la variación del ángulo barrido por la capsula de la noria (punto que pertenece la circunferencia) con su distancia al eje x requiere el control de algunas cantidades: el máximo, mínimo, periodo e intervalos de crecimiento.

- c. Explique cuáles son los valores asociados a la altura máxima y a la altura mínima que alcanza la cápsula de la noria durante el recorrido, en unidades de altura U .

Para el literal “c” los 8 estudiantes responden que la altura máxima es 1 U y la altura mínima es -1 U a partir de la interpretación y análisis de la figura 2 presentada en la tarea 1 En la tabla 21 se clasifica esta respuesta y se presenta la explicación dada a la misma.

Tabla 21. Clasificación de las respuestas dadas al literal 1c.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Máximo: 1; mínimo: -1	Dado que 100 pies es 1 U entonces el máximo es de 1 y el mínimo es de -1.	8

La tabla 21 deja ver, como se menciona con anterioridad en el literal b, que los estudiantes logran asociar el movimiento de la cápsula de la noria con un movimiento circular uniforme de radio 1 en el que pueden reconocer la máxima y la mínima altura a la cual se la puede encontrar la cápsula. Cabe señalar que en este literal los alumnos dejan ver la variación funcional entre el

valor del ángulo de rotación y la altura de la cápsula de la noria; la altura obtiene valores entre $[-1,1]$, lo que se define en matemática como el rango de f .

Hasta el momento los alumnos hablan en términos de altura máxima y altura mínima para referirse a los máximos y mínimos locales que presenta la función seno; por esta razón se interpreta, desde el principio de niveles, que los estudiantes generan reflexiones que les ayudan a comprender la situación y a crecer en nivel de comprensión; esto lo realizan al utilizar diferentes herramientas que se conectan entre sí, tanto de naturaleza informal como matemática.

- d. Determine para qué valores de tiempo (en minutos) y para qué ángulos la cápsula de la noria alcanza la altura máxima y la altura mínima. Explique cómo determinó estos valores.

Tabla 22. Clasificación de las respuestas dadas al literal 1d.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Altura máxima: 90° , 9 minutos	Se plantea una regla de 3 donde los	8
	Altura mínima: 270° , 27 minutos	estudiantes usan el valor de 10° por minuto.	

Por otro lado, para el literal “d” los 8 alumnos recurren a la regla de tres para relacionar la altura máxima y la altura mínima con los ángulos barridos por la cápsula de la noria para llegar a dichos lugares. Es decir, los 8 responden que para la altura máxima se rota un ángulo de 90° y dado que el problema dice que por cada 10° transcurre un minuto entonces concluyen que en 90° han transcurrido 9 minutos y para la altura mínima 27 minutos.

Desde el enfoque de la EMR, se puede afirmar que los estudiantes en esta primera pregunta de la tarea 1 utilizan la regla de tres, al igual que en preguntas anteriores, lo que hace que se consolide como un procedimiento ligado a la tarea en particular en tanto les permite analizarla desde sus estrategias, enmarcada en el nivel de comprensión referencial, que toman elementos matemáticos trabajados en otros grados de escolaridad para dar razón de lo que se requiere y

explicar asertivamente la relación entre ángulo, altura de la cápsula de la noria y tiempo transcurrido.

Es de notar que esta pregunta moviliza en los estudiantes la relación entre el contexto y sus conocimientos informales a través de la comparación entre la variación de diferentes cantidades, tanto dependientes como independientes, lo que contribuye al desarrollo del pensamiento variacional ya que se movilizan diferentes mecanismos que, a través de la reflexión, conducen al reconocimiento de patrones y regularidades que contribuyen a su conceptualización, como lo afirman los Estándares (2006, p 55), entre estas cantidades se reconocen el tiempo, la altura de la cápsula de la noria y el ángulo barrido.

La tabla 2 relaciona las medidas realizadas de diferentes alturas en unidades de altura U con el ángulo que ha recorrido la cápsula de la noria durante una vuelta.

Tabla 2. Relación entre altura y el ángulo recorrido por la cápsula de la noria

<i>Altura (U)</i>	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,50	-0,87	-1,00	0,00
<i>Ángulo (grados)</i>	0	30	45	60	90	135	150	180	210	240	270	360

a. Para 2 vueltas completas de la noria determine los diferentes valores de los ángulos asociados a las alturas h de la cápsula, dadas en la tabla 2.

b. Determine como identificó los valores de estos ángulos.

Para responder a los literales a y b de la tabla 2 se inserta la tabla 23 que muestra las respuestas de los estudiantes.

Tabla 23. Clasificación de las respuestas dadas a la tabla 2

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Representación tabular (ver figura 18) con los ángulos relacionados a la segunda vuelta.	Construcción de una representación tabular con los ángulos asociados a la segunda vuelta.	9/9

La tabla 23 y la figura 18 (una de las representaciones tabulares) dejan ver que los estudiantes, en general, utilizan la representación tabular para las alturas determinadas por la tabla 2 de la tarea y los ángulos encontrados para cada una de ellas. El análisis de las diferentes representaciones tabulares permite deducir que los alumnos suman a cada ángulo dado en la tabla 2 360 grados, acción que predomina en la construcción de los 9 registros tabulares. Además, esta pregunta vuelve a movilizar en los estudiantes la estrategia del conteo usada en la situación 1 para dar razón de los años bisiestos, las estaciones, los solsticios y los equinoccios; así, desde el enfoque de la EMR, el conteo deja de estar ligado al contexto donde surge.

Altura (u)	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	-0.50	-0.87	-1.00
Angulo grados	180°-360° 540° 720°	30°-390° 150° 390°	45°-495° 135° 405°	60°-480° 180° 420°	90°-450° 450°	210°-570° 330°-690°	240°-600° 300°-660°	270°-630° 630°

Figura 18. Representación tabular tipo I tabla 23.

Así mismo, se resalta la comparación entre la tabla dada y los valores que emergen cuando se realiza esta adición para obtener una misma altura para diferentes ángulos; es de notar que al sumar 360 grados los estudiantes se acercan una idea básica de recurrencia ya que conjeturan que esta variación es constante. Esta relación ambigua de una variación constante se discute con todos los estudiantes para interpretar lo que emerge al realizar esta argumentación. De esta manera el debate muestra que los estudiantes asumen la palabra constante: como algo continuo y que nunca se detiene y aunque varía se mantiene su comportamiento inicial; en términos de la situación, afirman que usan la palabra constante puesto que la variación de la altura de la capsula de la noria para la primera vuelta determina las demás vueltas.

De lo anterior se puede inferir que los alumnos hacen referencia a la noción de periodo para el caso de la *ferris Wheel*, dado que a través del estudio de la variación de la altura de la cápsula de la noria respecto al ángulo barrido por la misma (respecto a la horizontal) hacen explícito el ángulo que se le debe sumar a determinado ángulo, dado en la tabla 2, para obtener la misma altura. De aquí que los estudiantes utilizan los argumentos verbales, las representaciones tabulares y elementos de la teoría de números para explicar el por qué se debe sumar 360 grados para obtener la misma altura para la cápsula de la noria.

Es pertinente mencionar que en los argumentos de los estudiantes no aparece de forma explícita la palabra periodo, sin embargo sus respuestas movilizan elementos de la definición de la función seno desde su variación periódica, es decir la expresión $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$ siendo 2π el periodo de la función. A su vez los alumnos utilizar 360 grados en lugar de 2π lo que muestra que la noción de periodo movilizada en esta pregunta está ligada a la tarea propuesta en el contexto de la noria.

Asimismo, los estudiantes para determinada altura (que no sea la máxima o la mínima) identifican la existencia de 2 ángulos para los que se tiene la misma altura en una vuelta y que al sumarlos se obtiene como resultado 180° , es decir son ángulos suplementarios. En la figura 19, se observa que agrupan las alturas tanto negativas como positivas.

Handwritten student response showing the association of heights and angles for a Ferris wheel problem. The response is organized into a table-like structure with five rows, each representing a different height and its corresponding angles.

En la altura de 0,0	se asocian los ángulos de $0^\circ, 180^\circ$ y 360°	
		$360^\circ, 540^\circ$ y 720°
En la altura de 0,50	se asocian los ángulos de $30^\circ, 150^\circ$ y 210°	
-0,50		$330^\circ, 390^\circ$ y 510°
En la altura de 0,71	se asocian los ángulos de $45^\circ, 135^\circ$ y 225°	
-0,71		$405^\circ, 495^\circ$ y 585°
En la altura de 0,87	se asocian los ángulos de $60^\circ, 120^\circ$ y 240°	
-0,87		$420^\circ, 480^\circ$ y 600°
En la altura de 1,00	se asocian los ángulos de $90^\circ, 270^\circ$	
-1,00		$450^\circ, 630^\circ$

Figura 19. Respuesta dada al literal a de la tabla 2.

De los literales a y b propuestos en la pregunta 1, se puede concluir que los 9 estudiantes utilizan los ángulos asociados a las alturas dadas para encontrar los ángulos relaciones con la segunda vuelta; de igual manera, la figura 20 muestra una representación tabular que deja ver las sumas realizadas a cada uno de los ángulos relacionados con cierta altura de la tabla 2.

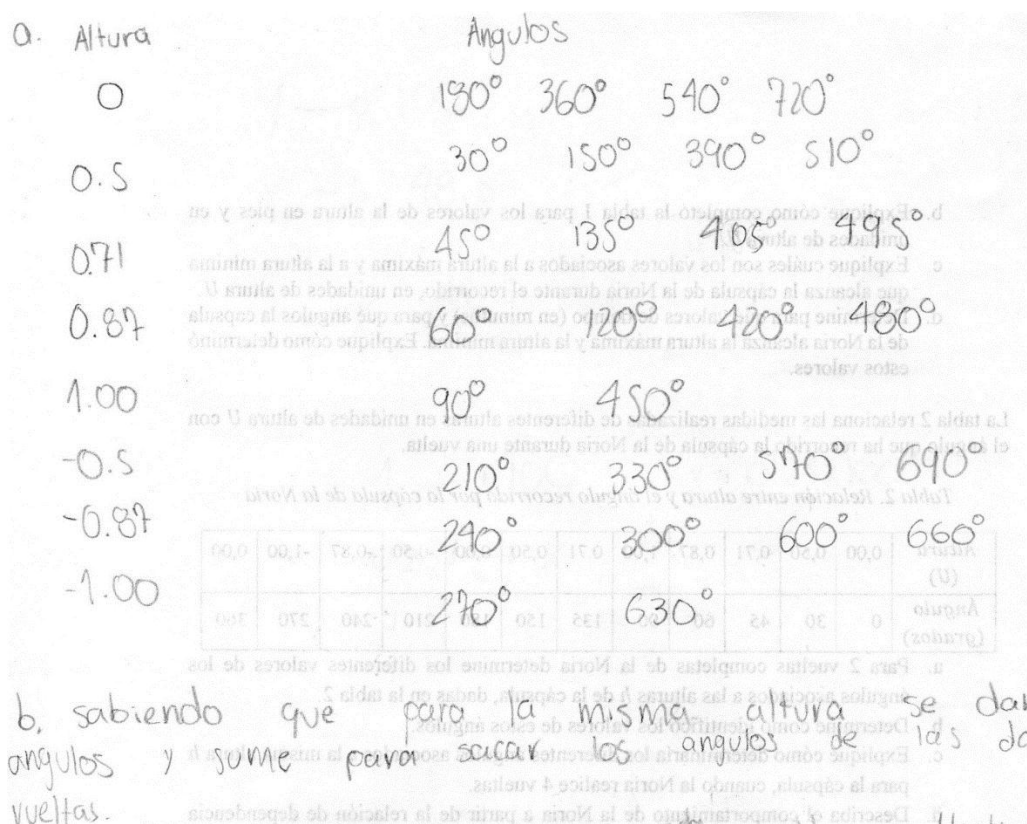


Figura 20. Representación tabular para la suma de 360 grados a los ángulos de la tabla 2.

Desde el enfoque de la EMR, se busca que los estudiantes a través de la reflexión y la reinención guiada logren avanzar a niveles de comprensión que se encuentran cada vez menos ligados a la situación en particular. Es así como la figura 20 permite interpretar que los estudiantes recurren al conteo como se presenta en la situación 1 en la tarea 2 relacionada con los años bisiestos. Es decir, los alumnos le dan al conteo algunas características generalizables dado que puede ser implementado en diferentes contextos que proveen situaciones realistas.

- c. Explique cómo determinaría los diferentes ángulos asociados a la misma altura h para la cápsula, cuando la noria realice 4 vueltas.

La tabla 24 clasifica los diferentes tipos de respuestas dadas por los estudiantes al literal c asociado a la tabla 2.

Tabla 24. Clasificación de las Respuestas dadas al literal c relacionado con la tabla 2.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de las respuestas	Número de estudiantes
Tipo I	Multiplicar 360 grado por el número de vuelta	Los estudiantes menciona que número de vuelta es y luego la multiplican por 360 grados	7
Tipo II	Representación tabular (ver figura 20)	Los alumnos escriben en forma tabular los valores de los ángulos asociados a determinada altura.	2

Del literal c, se obtiene que 6 alumnos responden de forma verbal. Dos de los estudiantes afirman que basta con multiplicar el 360 grados por el número de la vuelta y sumarle el resultado al ángulo inicial para obtener el ángulo asociado a la misma altura; por ejemplo, para la segunda vuelta bastaría multiplicar por 2 los 360 grados y sumarle el resultado al ángulo inicial. Los otros 4 estudiantes afirman que se debe sumar 360 grados sucesivamente para encontrar el ángulo de la vuelta requerida, lo que se clasifica como un conteo en secuencia sin llegar a la agrupación de la multiplicación.

Los estudiantes que responden según el tipo I proponen sumar a cada ángulo sumar 360 grados para obtener otro asociado a la misma altura hasta completar las 4 vueltas ya sea a través de las sumas sucesivas de 360 grados al ángulo dado o por medio de la multiplicación explicada anteriormente.

Por otro lado, los otros 2 alumnos presentan dos representaciones tabulares; el primero sostiene que para obtener los valores de la cuarta vuelta basta con multiplicar por 2 los ángulos dados por el número de la vuelta, es decir, si el ángulo es 30° y se necesita el ángulo de la altura asociada a este, para la segunda vuelta se deben multiplicar los 30° por 2, lo que no corresponde a lo movilizado en las preguntas referenciadas a la tabla 2; además, la estudiante muestra en su registro tabular números diferentes a los que se calculan con la estrategia propuesta verbalmente, de lo que obtiene números decimales; lo que propicia el debate sobre lo presentado y la joven no

reconoce la disparidad entre el argumento verbal y lo escrito matemáticamente; por tanto esta respuesta se toma como incoherente.

El segundo estudiante realiza una representación tabular donde reconoce la suma por 360 grados y realiza una tabla para las 4 vueltas requeridas en la tabla 2. Esta respuesta se enmarca en el uso de la representación tabular a través del conteo por 360° expresado como una suma de los ángulos presentados en la tabla 2.

De ambos tipos de respuestas se tiene que 8 de los 9 estudiantes logran reconocer la regularidad asociada a los ángulos barridos por la cápsula de la noria y las alturas dadas. Desde los Estándares (2006, p 79) en relación con la coherencia horizontal, se infiere que los estudiantes movilizan elementos del pensamiento métrico dado que realizan la conversión de pies a unidades de altura, lo que busca en el estudiante que llegue a comparar esta variación en unidades de altura con el ángulo en el sistema sexagesimal y así interpretar las variaciones del ángulo barrido, la altura de la cápsula de la noria y del tiempo que tarda la noria en barrer determinado ángulo.

Además, los alumnos usan el conteo como una habilidad que adquiere generalidad en cuanto recurren a ella para matematizar diferentes contextos y determinar relaciones; en este caso, las conversiones de una unidad de medida (pies) a un patrón de medida asociado al comportamiento de la función seno.

Describe el comportamiento de la noria a partir de la relación de dependencia entre la altura de la cápsula de la noria y los ángulos asociados a esta. Explique su respuesta.

La relación de dependencia entre la altura y el ángulo barrido comprendida por los estudiantes se clasifica en tres tipos como lo presenta la tabla 25.

Tabla 25. Clasificación de respuestas para la pregunta 1 literal d.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Relación
Tipo I	I-III cuadrante proporcionalidad directa	Análisis por cuadrantes de la variación	3/9

	y II-IV proporcionalidad inversa		
Tipo II	El ángulo siempre aumenta y para cada altura se tiene diferentes ángulos.	Variación de ángulos para una altura fija	4/9
Tipo III	Aumentan los ángulos y las cambian de acuerdo con la posición de la cápsula de la noria.	Respuestas que no relacionan la altura con los ángulos explícitamente	2/9

Es de notar que las respuestas tipo I acuden a explicaciones verbales que resaltan las variaciones de la altura de la cápsula de la noria y del ángulo barrido por la misma en dicha altura. De esta forma, la figura 21 presenta una de las descripciones verbales que realizan los estudiantes cuyas respuestas están categorizadas como tipo I.

d. los ángulos siempre aumentan pero cuando entran en el cuadrante I y IV la altura y los ángulos son directamente proporcional, ya que si uno aumenta el otro también. En el cuadrante II y III son indirectamente proporcional ya que si la altura baja los ángulos siguen aumentando.

Figura 21. Respuesta tipo I relativa al literal d de las preguntas de la tabla 2.

De manera general, la figura 21 muestra que los estudiantes que responden según el tipo I reconocen la dependencia entre el ángulo y la altura de la cápsula de la noria en términos de la proporcionalidad directa e inversa (indirecta), es decir el comportamiento de dependencia en los cuadrantes tanto I y IV, donde la altura aumenta mientras el ángulo aumenta también y en los cuadrantes II y III donde la altura disminuye mientras el ángulo aumenta.

La socialización en el aula de clase se centra en la proporcionalidad directa e inversa a la que se refiere este estudiante; Desde el principio de interacción del enfoque de la EMR, se propone este espacio para debatir acerca del cómo los alumnos interpretan los elementos de la situación y el docente como la persona que guía este proceso de reinención. En este caso, la relación de las variables relacionadas no se da en proporcionalidad directa e inversa, esto permite reconocer que la diferencia entre la proporcionalidad y la correlación no la manejan los estudiantes.

De esta forma, se genera un espacio para movilizar estos saberes y propiciar una reinención de esta relación entre las variables en estudio. Este proceso se lleva a cabo a través de contraejemplos que aportan a la discusión de diferentes variables correlacionadas entre sí directa o inversamente pero que no están en proporcionalidad ni directa ni inversa. Tal es el caso de la función $f(x) = x^2$ de la que se toman las tres representaciones: la algebraica, la tabular y la gráfica con el fin de movilizar otro tipo de variación a través del cual se haga presente una correlación directa sin tener la proporcionalidad directa. De este ejemplo se resalta que la variable “y” ($f(x)$) depende del cuadrado de la “x”, y que ambas variables aumentan se puede hablar de una correlación entre ellas, y aunque se puede hablar de una correlación entre ellas, dado que ambas variables aumentan, no se puede establecer una proporcionalidad como se presenta en las funciones lineales o afines.

Por tanto, se concluye que la variable y ($f(x)$) se correlaciona tanto directa como indirectamente con la x para el caso de la variación de la altura de la cápsula de la noria que depende del ángulo barrido y de cuadrante en el que se encuentre la cápsula de la noria. De lo que se obtiene que 7 de los 8 estudiantes resignifican la dependencia y llegan a que esta altura aumenta a medida que el ángulo aumenta, correlacionados directamente en los cuadrantes IV y I; y correlacionados de forma inversa en los cuadrantes II y III dado que la altura de la capsula de la noria disminuye cuando el ángulo aumenta.

Del análisis anterior se infiere que las preguntas asociadas a la tabla 2 de esta tarea llevan a los estudiantes al estudio de la variación asociada al movimiento de la noria, en tanto reconocen máximos, mínimos, intervalos de crecimientos, rango, dominio y periodicidad de la dependencia funcional que lo modela; a través de expresiones verbales enriquecidas por elementos del conteo y de la covariación. Asimismo los estudiantes usan sus saberes matemáticos trabajados en

diferentes grados de escolaridad como lo son las relaciones, correlaciones, funciones (tipos de funciones), representaciones de funciones, entre otros para presentar un análisis de las variaciones presentes entre ambas variables.

Por otro lado, para las respuestas tipo II, los alumnos resaltan que el ángulo siempre esta aumentado, que no se consideran los ángulos negativos y que para cada altura se asocian diferentes ángulos que resultan de sumar 360 grados al ángulo inicial; este tipo de respuestas al igual que el tipo III son respuestas que no describen explícitamente la relación de dependencia entre el ángulo y la altura de la cápsula de la noria, pues la pregunta permite analizar tanto los intervalos de crecimiento y decrecimiento como sus valores de altura asociados al ángulo determinado. Así, esta respuesta, aunque reconoce la periodicidad cada 360° es estática en tanto prioriza elementos de tipo numérico y limita la interpretación funcional de las variaciones inmersas en la tarea. Por último, en las respuestas tipo III, las variaciones de la altura de la cápsula de la noria y del ángulo dado son relacionadas pero no se hace explícita su relación.

2. Cuanto tiempo tarda la cápsula de la noria en realizar una vuelta completa. Justifique su respuesta.

Para el análisis de las respuestas dadas a la pregunta 2 se realiza una descripción de la estrategia presentada y de sus diferentes resultados. Se toma la organización tabular de los análisis anteriores como un único tipo de respuestas dado que los estudiantes emplean la misma estrategia matemática para dar solución al interrogante.

Tabla 26. Clasificación de las respuestas dadas al numeral 2.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Regla de tres: 1 minuto es a 10° entonces 360° cuántos minutos son.	Emplean la regla de tres para explicitar cuánto tarda la cápsula de la noria en realizar una vuelta.	9

Es así como, los 9 estudiantes responden que la noria tarda en realizar una vuelta completa 36 minutos a través de la regla de tres directa. En la figura 22 se muestra una de las respuestas de los alumnos a esta pregunta.

2. Cuanto tiempo tarda la cápsula de la Noria en realizar una vuelta completa. Justifique su respuesta.

3. Si la Noria funciona de 9:00 AM a 6:00 PM, cuantas vueltas dará la capsula de la Noria. Justifique su respuesta.

1m $\rightarrow$ 10° 10x = 360 x = 36m
 x $\rightarrow$ 360° x = $\frac{360}{10}$ 2// Tarda 36min en dar una vuelta.

Nbre 9h = 540min $\frac{540 \text{ min}}{36} = 15$
 1 vuelta 36min 2// la capsula da 15 vueltas.

Figura 22. Regla de tres: estrategia de resolución de las preguntas 2.

Del análisis de estas respuestas, se reconoce que los estudiantes han implementado la regla de tres en diferentes preguntas propuestas en relación con la variación del tiempo transcurrido para determinado desplazamiento de la noria. De lo anterior, desde el enfoque de la EMR, se argumenta que la regla de tres es una estrategia ligada a la situación dado que los estudiantes recurren a esta estrategia frecuentemente en el contexto de la noria y no se utiliza en la situación 1.

Aunque la regla de tres se ha utilizado en las preguntas 1 de la tarea 1 y 2 de la tarea 1; es decir, surge en la conversión de pies a unidades de altura y no superan el contexto del que surgen, por ende no adquiere características generalizables; esto lleva a concluir que la regla de tres es un procedimiento que los estudiantes realizan en el contexto cuando necesitan realizar un cambio en la unidad de medida, en el caso del tiempo en que se realiza una vuelta, emerge de nuevo.

Por tanto las respuestas dadas a la pregunta 2 permiten concluir que los estudiantes usan sus conocimientos matemáticos y cotidianos para resolver los interrogantes planteados a través

de la matematización del contexto; desde el enfoque de la EMR, se mueven en el nivel referencial, en tanto logran dotar de explicaciones matemáticas la situación presentada.

3. Si la noria funciona de 9:00 AM a 6:00 PM, cuántas vueltas dará la cápsula de la noria. Justifique su respuesta.

Para la pregunta 3 se introduce la tabla 27 en la que se clasifican las respuestas dadas por los estudiantes. En ella se presenta dos tipos de respuestas que orientan el análisis para relacionar la variable tiempo con la variación de los ángulos barridos por la cápsula de la noria. Esta tabla deja ver que el conteo y la regla de tres emergen en el reconocimiento de las recurrencias a través del estudio de la altura de la cápsula de la noria y del ángulo barrido por la misma.

Tabla 27. Clasificación de respuestas para la pregunta 3.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Entre las 9 y las 6 hay 9 horas, se demora 36 minutos en dar una vuelta, $9 \times 60 = 540$ min; entonces: 36 min es 1 vuelta; 540 min cuántas vueltas son: 15 vueltas.	Regla de tres	2
Tipo II	$1V \rightarrow 36\text{min}$; $2V \rightarrow 72$ min hasta llegar a 540 minutos	Conteo cada 36 minutos para encontrar el número de vueltas	7

La tabla 27 permite reconocer que 2 de 9 estudiantes recurren a la regla de tres para encontrar el número de vueltas dadas entre las horas 9 a.m. y 6 p.m. así encuentran que para cada vuelta la cápsula de la noria se demora 36 minutos, además que entre las dos horas dadas hay nueve horas por lo que se debe multiplicar 9 por 36 para obtienen que la capsula recorre un total

de 540 minutos. Estos 540 minutos los relacionan con los 36 minutos por vuelta y de esta forma llegan a que realiza 15 vueltas en este lapso.

La figura 23 deja ver la estrategia usada por una de las estudiantes asociada a las repuestas tipo I clasificadas en la tabla 27.

Figura 23. Respuesta tipo 1 pregunta 2. Regla de tres.

Si la Noria funciona de 9:00 AM a 6:00 PM, cuantas vueltas dará la capsula de la Noria. Justifique su respuesta. $\rightarrow 15 \text{ vueltas}$

$$\begin{array}{lcl} 36 \text{ min} & \rightarrow & 1 \text{ vuelta} \\ 540 \text{ min} & \rightarrow & x \end{array} \quad \cdot \quad \frac{540}{36} = 15$$

Por otra parte, las respuestas asociadas al tipo II muestran que los estudiantes recurren al conteo; es decir, cuentan cada 36 minutos que dura una vuelta y buscan completar los 540 minutos que duran las 9 horas. Los resultados de los cuatro estudiantes son 5, 13, 3240, 15, 16 y 17.

El estudiante que responde 5 vueltas obtiene este valor después de asignar a cada vuelta su duración 36 minutos por cada vuelta como muestra la figura 24; así, sólo asigna a las 5 primeras vueltas el tiempo transcurrido y luego, realiza la suma de los tiempos de cada una de las vueltas a lo que da como resultado aproximado 540 minutos y por tanto asume que esta es la cantidad de vueltas dadas en 9 horas.

2. 36 minutos da dar una vuelta ya que en 10 se realizan en 1m

3. 9am $\rightarrow$ 6pm. hay 9 horas.

$$\begin{array}{rcl} 1V & \rightarrow & 36 \text{ min} \\ 2V & \rightarrow & 72 \text{ min} \\ 3V & \rightarrow & 108 \text{ min} \\ 4V & \rightarrow & 144 \text{ min} \\ 5V & \rightarrow & 180 \text{ min} \\ \hline & & 540 \end{array}$$

En 9 horas (9am $\rightarrow$ 6pm) realiza 5 vueltas.

Figura 24. Conteo de las vueltas una a una con asignación de tiempos.

La inconsistencia de esta respuesta está en la suma de los tiempos asociados a cada vuelta sin tener en cuenta que cada uno de los tiempos mostrados en la figura 24 hace referencia a lo transcurrido desde el inicio del movimiento. Esta respuesta en debate con los estudiantes respecto a su estrategia implementada para obtener poder obtener el número de vueltas a partir de la cantidad de minutos transcurridos para ello que realiza la comprobación de estos argumentos al multiplicar las 5 vueltas por la duración de cada una para encontrar el tiempo transcurrido; esta última orientación hace que el estudiante comprenda como relaciona las vueltas y no toma el 2V, 3V, 4V y 5V como el cardinal sino como el ordinal es decir que el 2V significa dos vueltas no segunda vuelta. Esto le lleva a escribir un valor de 5 vueltas en un tiempo de 540 minutos.

Por otra parte para las respuestas de 13 y 17 vueltas, los estudiantes realizan un conteo del tiempo de duración de cada una de ellas y tienen dificultades en la suma de los minutos y la conversión a horas. Es decir, cuando suman 9:36 más 36 minutos tiene como resultado 10:06 lo cual es incorrecto.

Por otro lado, la respuesta 16 vueltas que se presenta, la estudiante realiza un conteo uno a uno de las horas y les asocia un valor de tiempo que es igual a lo que tarda la noria en realizar una vuelta, es decir 36 minutos.

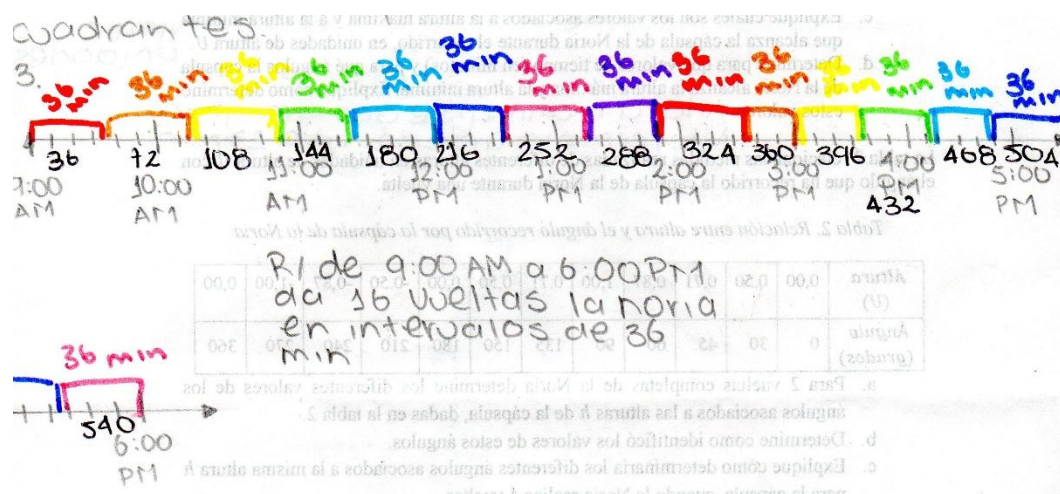


Figura 25. respuesta tipo II tabla 18 a través del uso de representación gráfica.

Es de notar que este estudiante obtiene como resultado 16 vueltas dado que cuenta entre las 9 am y las 10 am dos horas, es decir, no asume la hora 9 como la hora de inicio y en ella cuenta

la primer hora; lo que corresponde a un vuelta más para la noria en este intervalo de tiempo. Asimismo, la estudiante presenta inconveniente en la asignación del tiempo de inicio de la noria como se puede ver en la figura 25, donde la relación uno a uno es correcta y la suma de las veces que escribe 36 minutos para referirse a la vuelta dada es 15. Pero en su respuesta escribe 16 vueltas.

Del análisis de la pregunta 3 se puede concluir: el uso de la regla de tres y el conteo en los demás por parte de los estudiantes no se realiza adecuadamente en todos los casos. De donde se infiere que los estudiantes tienen dificultad al pasar del tiempo transcurrido en el movimiento al número de vueltas asociado al mismo a la cantidad de vueltas dadas por la cápsula de la noria; pues las operaciones realizadas no concuerdan con sus argumentos verbales.

Lo anterior se justifica por la falta de conexión entre los diferentes pensamientos matemáticos; los Estándares (2006, p79-89) proponen organizar a través de dos estrategias de análisis que vinculan diferentes elementos básicos que los estudiantes deben movilizar en su quehacer en el aula y logren conectar los saberes matemáticos a través del desarrollo del pensamiento matemático, como lo son la coherencia vertical y la coherencia horizontal. Cabe resaltar que estos procesos deben ser orientados por el docente quien, desde el enfoque de EMR, guía este saber matemático y la reinención de mismo en los estudiantes para lograr mejorar en la relación de los diferentes tipos de pensamiento matemático.

En cuanto a la coherencia vertical, presentada en la tabla 2, capítulo 2, hace explícitos los elementos que aportan al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes desde los diferentes niveles de escolaridad de Colombia. En relación con el análisis realizado hasta el momento de las producciones de los estudiantes para la tarea 1 de la situación 2, los Estándares referenciados corresponden, entre otros elementos, a la descripción de situaciones de variación a través de diferentes representaciones y modelación de situaciones de variación. Dado que la modelación matemática, entendida desde el enfoque de la EMR, se asume como el acto de generar un modelo matemático ya sea modelo de la situación o modelo para explicar otras situaciones, la conexión de estos Estándares propuestos por el MEN (2006, 79) permiten reconocer que los estudiantes se movilizan en un proceso de matematización horizontal, puesto que reconocen matemáticamente el contexto y, a través de la reflexión realizada en pares y con el docente logran organizar sus estrategias en la matematización vertical, en el nivel referencial.

En segundo lugar, la coherencia horizontal que es la relación entre los diferentes pensamientos matemáticos, permite reconocer en los estudiantes como utilizan los argumentos de la teoría de números para justificar las relaciones de los números trabajados, describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real, identificar rangos de variación, entre otras características propias de los pensamientos matemáticos propuestos por el MEN (1998, 2006). Así, esta tarea 1 permite a los estudiantes movilizar diferentes saberes matemáticos y conectarlos para resolver una situación en particular, tal es el caso del conteo y las variaciones vinculadas a las variables ángulo y altura de la cápsula de la noria. En palabras de Freudenthal (1998, p6) los estudiantes aprenden matemática haciéndolas, además que el vínculo entre los saberes y el contexto logra mejorar el desarrollo del proceso de matematización desde el nivel situacional a los niveles de mayor formalidad.

En conclusión, esta tarea 1 de la situación 2 deja ver que los estudiantes se encuentran en un nivel referencial en cuanto a sus estrategias implementadas para resolver las situaciones propuestas en los interrogantes, tales son el conteo y las explicaciones verbales. El estudio de la variación, las variables y su relación con el conteo permite una comprensión adecuada de contexto, en general, por parte de los estudiantes.

Tarea 2: Reconociendo elementos periódicos de la noria

Para el recorrido de la cápsula de la noria, de 9 am a 6:00 pm, se tiene en cuenta que el valor inicial para el ángulo es cero y se sigue sumando hasta que se detiene a las 6:00pm, así se puede tener ángulos mayores de 360° en el recorrido de la cápsula de la noria, medidos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

1. a. Complete la tabla 3 para 6 vueltas de la cápsula de la noria.

Tabla 3. Relación entre alturas y ángulos barridos por la cápsula de la noria.

Altura cápsula [U]	Ángulo barrido (°)		Altura cápsula [U]	Ángulo barrido (°)		Altura cápsula [U]	Ángulo barrido (°)	
0,5000			0,7071			-1,0000		
1,0000			0,8660			-0,7071		
-0,5000			-0,8660			0,0000		

- b. Explique qué elementos tuvo en cuenta para completar la tabla.
- c. Identifique la regularidad asociada a los ángulos para los cuales la cápsula de la noria se encuentra a la misma altura. Explique su respuesta.

Para la clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes al completar la tabla 3, se presenta la tabla 28 donde se categorizan las respuestas dadas a los literales a, b y c.

Tabla 28. Clasificación de las respuestas dadas a la tabla 3 de la tarea 2.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de las respuestas	Número de estudiantes
Tipo I	0,5 U $\rightarrow$ 30°, 150°, 390°, 510°...	b. Suma 360 al ángulo dado en la tabla 2 para completar las 6 vueltas. c. La regularidad asociada es de 360 grados.	7
Tipo II	No suman 360° al ángulo dado en la tabla 2 para la altura dada.	b. No relacionan todas las alturas con los ángulos adecuados. c. La regularidad asociada es de 360 grados.	2

La tabla 28 muestra que los estudiantes que responden según el tipo I a través del conteo cada 360 grados, la noción de ángulos suplementarios y la relación uno a uno del ángulo con la altura como las estrategias usadas para solucionar estos interrogantes. Asimismo, 7 estudiantes completan toda la tabla para una altura determinada tanto para la misma vuelta como para diferentes vueltas. En otras palabras, los alumnos acuden a la idea de ángulo suplementario cuando van a encontrar dos ángulos asociados a una altura en la misma vuelta y suman 360 grados para los ángulos de la misma altura en diferentes vueltas.

Además, de la tabla 28 se establece que los estudiantes reconocen la noción de periodicidad de la noria, dado que para el literal c establecen que es 360 grados que representa al periodo del movimiento de la noria y logran afirmar que la cápsula de la noria alcanza la misma altura para los múltiplos de 360 al sumar consecutivamente el ángulo por su periodo. Por tanto, los estudiantes logran predecir cualquier ángulo asociado a determinada altura de la noria y a su vez, cualquier altura asociada a determinado ángulo.

Como lo afirma Vasco (2009, p 6), esta capacidad de predecir aporta al desarrollo del pensamiento variacional dado que, es una forma de pensar dinámica, de producir sistemas que relacionen las variables según sus patrones de covariación, correlación y proporcionalidad. Para este caso, emerge el reconocimiento por parte de los estudiantes de la invariancia de algunas de las propiedades que caracterizan un fenómeno periódico, tales como la repetición del movimiento en determinado intervalo, la asignación de una altura a diferentes valores del ángulo barrido, el valor máximo y mínimo para la altura de la cápsula de la noria. De igual manera, en el estudio de la variación el MEN (1998, p 49) reconoce “las nociones matemáticas, entre otras, el continuo numérico, los números reales, los procesos infinitos dado en su interior, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad y la dependencia de variables. Además, la representación tabular se presenta como un elemento fundamental para iniciar el estudio de la función”. En la tarea 1 de esta situación, los estudiantes resuelven los interrogantes planteados en torno a la variación, la noción de función y lo periódico; es decir movilizan características propias del potenciamiento del pensamiento variacional.

La figura 26 presenta el desarrollo de la tabla 3 por una estudiante quien a través de su interpretación muestra el uso de una recurrencia de 360 grados, para tener la misma altura y el ángulo suplementario a este. Igualmente conjetura otra regularidad, que cada 180 grados se obtiene el opuesto aditivo de la altura determinada.

Tabla 3. Relación entre alturas y ángulos barridos por la cápsula de la Noria.

Altura capsula [U]	Ángulo barrido (°)	Altura capsula [U]	Ángulo barrido (°)	Altura capsula [U]	Ángulo barrido (°)
0,5000	30 150 210 270 330	0,7071	45 135 225 315	-1,0000	270 180 90 0
1,0000	90 45 135 180	0,8660	60 120 240 300	-0,7071	225 135 45 0
-0,5000	210 330 270 150	-0,8660	210 300 150 60	0,0000	360 720 1080 1440

Figura 26. Representación tabular de diferentes ángulos asociados a una altura determinada.

Para las alturas dadas en la tabla 3, mostrada en la figura 26, la estudiante asigna el ángulo respectivo a cada una de las vueltas de la noria. En general, el uso de la representación tabular se constituye en un elemento fundamental para el estudio de la variación, MEN (1998, p 49) ya que permite a los estudiantes el reconocimiento de patrones y regularidades, la organización en tablas a través de los procesos aritméticos que dejan ver la comprensión de la variable y la variación.

En este sentido, el enfoque de la EMR, sostiene que los estudiantes al reconocer elementos propios de la situación a través de sus estrategias informales realizan un proceso de matematización horizontal, puesto que genera interpretaciones matemáticas de la misma. Inclusive, si estas superan la informalidad y dejan ver elementos matemáticos, se afirma que los estudiantes están en un proceso de matematización vertical dado por la reflexión del estudiante que le permite compara sus habilidades con los saberes matemáticos en cuestión.

A su vez, estos elementos que movilizan los estudiantes deja ver el proceso de modelación matemática, el cual visto desde el MEN (1998, p 77) surgen de la interacción con situaciones

problemas reales que los llevan a proponer modelos que se pueden utilizar como base para hacer predicciones acerca de la situación problemática real u objeto modelado, para tomar decisiones y para emprender acciones.

Por otra parte, las respuestas asociadas al tipo II hacen referencia a la tabla 3 bajo los mismos parámetros de las respuestas tipo I de la tabla 28; no obstante, estos estudiantes en algunas alturas no reconocen la diferencia entre los ángulos asociados a las alturas positivas y las negativas. Además, uno de ellos completa la tabla 3 con ángulos que no se relacionan con las alturas presentadas en la tarea, pese a que de manera verbal expresa correctamente la dependencia entre la altura de la capsula de la noria y el ángulo barrido por la misma.

Por tanto, la primera pregunta de esta tarea deja ver que los estudiantes, en general, reconocen la noción de periodicidad del movimiento de la noria pues relacionan los ángulos dados en la tabla 2, con las alturas de la tabla 3 y la sumar de 360 grados para obtener la misma altura para diferentes ángulos; no obstante, al momento de escribir en la tabla 3 las recurrencias esperadas, 2 alumnos hacen una asignación errada de valores de los ángulos encontrados dado que presentan dificultades en la ejecución de procedimientos matemáticos tales como el conteo y la multiplicación.

2. En un plano cartesiano realice una gráfica que relacione la altura de la cápsula con el valor del ángulo barrido, para 3 vueltas de la noria.

La tabla 29 clasifica las respuestas obtenidas en 3 tipos a la construcción gráfica de la variación entre el ángulo barrido por la capsula de la noria y la altura alcanzada por la misma.

Tabla 29. Clasificación de las gráficas en el plano cartesiano.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Gráfica de la función seno	Variación y asignación de ejes coordenados adecuada	7

Tipo II	Gráfica que no corresponde a la función seno.	Variación no adecuada y ejes coordinado: x adecuado, y: error en la escala.	1
Tipo III	Circunferencia unitaria estática que no moviliza elementos propios de una función.		1

Es pertinente aclarar que la clasificación de las respuestas en la tabla 29 surge a partir de considerar la representación gráfica cartesiana de la función seno; sin embargo, en las aproximaciones gráficas realizadas por los estudiantes, ninguno de ellos asocia esta representación cartesiana con el nombre dado a esta función. Esta elección se realiza dado que el movimiento de la noria se modela gráficamente a través de la función seno.

En relación con las respuestas asociadas al tipo I se infiere que los estudiantes reconocen la dependencia entre la altura de la cápsula de la noria y el ángulo barrido desde la representación gráfica cartesiana de la función seno que se repite cada 360 grados. De esta forma los estudiantes involucran en sus respuestas aspectos como: el uso comprensivo de la variable, sus diferentes significados a través de la interpretación de la tarea, la relación de la representación tabular realizada en la pregunta 1 con el plano cartesiano y la asignación de los ejes realizada. De ahí que, desde el enfoque de la EMR, lo anterior potencialice en los alumnos el proceso de matematización progresiva, dado que se fomenta el desarrollo, uso y reformulación de las estrategias que emergen de la situación y cuáles de ellas se reconocen como “modelos de” usados por los estudiantes tanto de características informales como matemáticas en diferentes niveles de generalización.

En particular, el enfoque de la EMR propone que los conocimientos deben estar integrados tanto al quehacer de los estudiantes como a sus contextos realistas, para ser empleado en diferentes situaciones tanto académicas como cotidianas y aportar al desarrollo de estrategias para comprender mejor la tarea propuesta. De tal forma y a través de una enseñanza centrada en

la actividad del estudiante se amplían las posibilidades de fomentar el desarrollo de los diversos modelos matemáticos, es decir, el desarrollo de la modelación matemática (Camarena, 2009).

Así pues, la figura 27 deja ver la representación gráfica cartesiana clasificada como tipo I, de la que se puede inferir, en general, que se reconoce la variación tanto de la altura de la capsula de la noria como del ángulo barrido por la misma, la relación entre estas variables y la predicción de esta variación para diferentes vueltas.

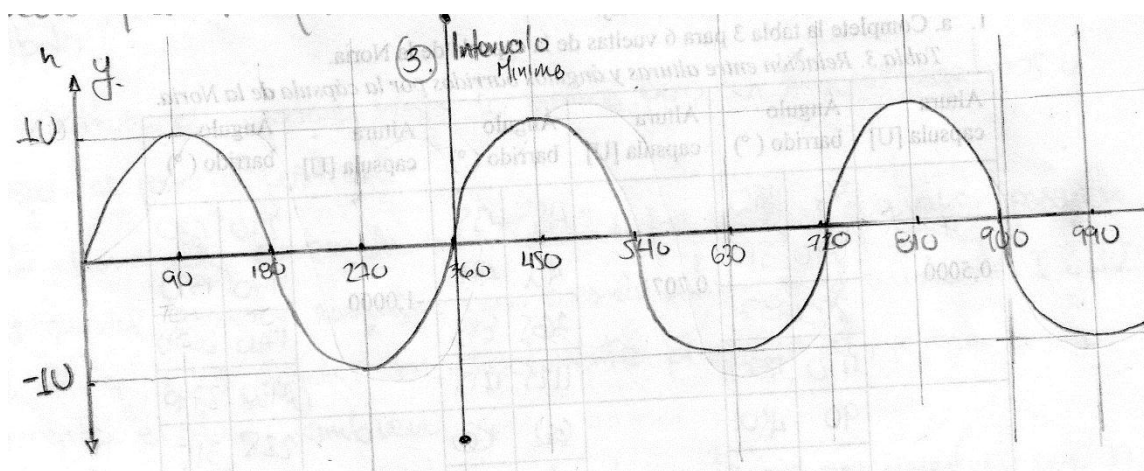


Figura 27. Representación gráfica tipo I, pregunta 2.

Cabe resaltar que las respuestas asociadas al tipo I dejan ver que los alumnos realizan una clasificación por cuadrantes (cada 90 grados), reconocen la recurrencia de la función seno, el intervalo mínimo en el que se repite la gráfica, por tanto, su periodo expresado en el eje de las abscisas, comparan el contexto con las covariaciones de la función seno y reconoce la relación entre la representación gráfica y la tabular que modela el fenómeno. Este estudio del cambio y la variación, el reconocimiento de las variables, así como las correlaciones entre las mismas son algunos elementos que el MEN (2006, p 66) propone como actividades que contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional a través del estudio del cambio.

Así el análisis de las respuestas tipo I no solo hacen referencia a una representación cartesiana correspondiente a la gráfica de la función seno, sino que además reconoce la periodicidad de la misma y la noción de función. Desde el enfoque de la EMR, el avance en los niveles de comprensión desde el nivel situacional, donde predominan estrategias informales para interpretar

el contexto y les permite movilizarse a un nivel referencial, en el cual dotan de características matemáticas los análisis presentados en las tareas anteriores. De esta manera se analiza el proceso de matematización vertical, desde un nivel referencial, donde los alumnos utilizan diferentes representaciones –como la tabular, la verbal y la gráfica- que dan lugar a una mejor comprensión del saber matemático a través de la reflexión realizada por parte de los estudiantes, con la guía del docente al interpretar la situación. Por tanto, que la gráfica de la función seno para este tipo de respuestas se categoriza como una estrategia del nivel referencial.

Por otra parte, para las respuestas tipo II se presenta la figura 28 donde el estudiante reconoce la variación periódica en la noria, ubica adecuadamente las parejas ordenadas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la altura de la cápsula de la noria respecto a la variación del ángulo, pero asocia estos elementos a una representación gráfica en forma diferente a la función seno y muestra una dependencia lineal entre las dos variables, la altura de la cápsula de la noria y el ángulo barrido. Esta grafica presenta una asignación de la escala para los ejes sin una secuencia determinada. Cabe resaltar que esta representación gráfica responde a la discusión realizada en el literal d de las preguntas asociadas a la tabla 2 de la tarea 2 (situación 2) donde la confusión entre correlación y proporcionalidad se identifica como un elemento a reformular en los saberes previos de los estudiantes.

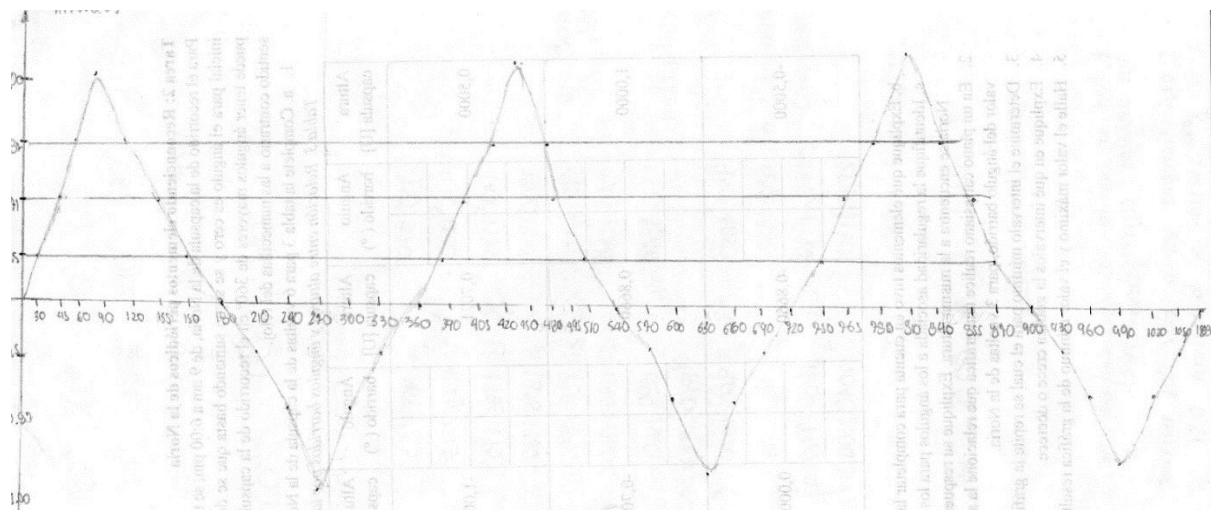


Figura 28. Respuesta tipo II, pregunta 2.

Esta tendencia lineal deja ver la interpretación de intervalos de crecimiento y decrecimiento en proporcionalidad directa, ya sea en correlación directa o inversa. Así la figura

28 muestra que el estudiante toma una escala no adecuada en la representación gráfica cartesiana dado que el estudiante compara los valores de altura de la noria con los ángulos barridos por la misma. Cabe resaltar que es necesario plantear a los estudiantes diferentes tipos de representaciones de la función seno para movilizar la noción de la misma y elementos de mayor grado de formalización como lo son los límites, la continuidad, la derivada y la integral, como lo argumentan los Estándares (2006, p 69).

Finalmente, en la respuesta tipo III la estudiante hace uso de una circunferencia (no hace explícito si es unitaria o no) para representar algunos ángulos a los que no les asigna valor alguno de la altura. Cuando se debate acerca de sus procedimientos matemáticos para abordar la pregunta, la alumna argumenta que no encuentra una continuidad en el cambio de las alturas y los ángulos para escribirlos cada uno en un eje coordenado. Es decir, estos elementos no le permiten desligarse de la representación de la circunferencia y no logra hacer explícitos los valores de diferentes ángulos a una altura determinada en una representación funcional cartesiana.

Lo que significa que el reconocimiento del fenómeno periódico y la variación periódica del movimiento de la noria, no le garantiza al estudiante la matematización del suceso a través de una representación gráfica que deje ver las propiedades del mismo. Desde la postura de los Estándares (2006, p 68) esta dificultad deja ver la complejidad inmersa en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes y el proceso de generalización del mismo, no obstante se reconocen elementos como el cambio de interpretación de lo intuitivo a lo matemático, mostrar y probar regularidades, entre otros elementos de la variación que se pueden manejar en diferentes grados de complejidad.

De forma concreta, Montiel (2005) afirma que el paso de la circunferencia unitaria a la representación gráfica de la función seno no es inmediato y requiere elementos matemáticos más allá de los informales. Es así como la producción de la estudiante muestra un reconocimiento de lo periódico, de la variación de la altura respecto al ángulo barrido por la cápsula de la noria y su intervalo de periodicidad, 360 grados; no obstante, el movimiento de la capsula de la noria, sus diferentes alturas no le permite realizar una representación gráfica cartesiana de la función seno y no logra desligarse del contexto de la noria.

Además, la estudiante realiza el símil entre la noria y la circunferencia trigonométrica donde varía la altura respecto al ángulo barrido, pero no logra el paso de esta interpretación al dinamismo analítico de la función seno a través de la representación gráfica en un plano cartesiano. Por su parte, Montiel (2005, p 117) expone que el uso del círculo trigonométrico como estrategia de enseñanza obstruye la construcción de la función seno en un contexto analítico. Desde el enfoque de la EMR, la estudiante que responde según el tipo III, logra un nivel de comprensión situacional; en otras palabras, sus reflexiones la llevan a explicar la situación, entenderla bajo estrategias informales, pero al momento de introducir elementos matemáticos de un mayor grado de complejidad; es decir, la matematización vertical de la situación, se limita a una interpretación discreta del contexto; por ende no se movilizan en el nivel referencial.

3. Determine el intervalo mínimo para el cual se repite la gráfica.

Para las respuestas dadas a la pregunta 3 se introduce la tabla 30 que clasifica las representaciones usadas para el intervalo mínimo para el cual se repite la gráfica.

Tabla 30. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 3.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Intervalo $(0, 360)$	De 0 a 360 grados es el intervalo mínimo para el cual se repite la gráfica.	7
Tipo II	El intervalo mínimo es 2π (o 360 grados)	Escribe el valor de la distancia de 0 a 2π o de 0 a 360 grados.	2

Para la pregunta 3, 7 los 9 estudiantes responden según el tipo I de la tabla 30 y concluyen que el intervalo mínimo para el cual se repite la gráfica es de 0 a 360 grados. Esta respuesta la presentan bajo descripciones verbales (4 estudiantes) y en notación de intervalo abierto $(0, 360)$; se ratifica así, el uso de la noción de periodo en las interpretaciones de los estudiantes quienes

reconoce esta recurrencia a través de procedimientos matemáticos, tales como el conteo, el reconocimiento de la variación a través de la dependencia de la altura de la cápsula de la noria y el ángulo barrido, el uso de la representación tabular y en la representaciones gráficas cartesianas que elaboran en interrogantes anteriores; se hace explícito el uso de la noción de función periódica en tanto conjugan diferentes sistemas de representación, como lo son el tabular, el verbal y el gráfico en torno al intervalo mínimo en el que se repite la función periódica definido como periodo.

Por su parte, las respuestas dadas según el tipo II también reconocen la periodicidad de la gráfica trazada y la relacionan específicamente a un valor numérico. Estos dos estudiantes no utilizan la notación de intervalo y escriben el número tanto en radianes como en sistema sexagesimal para resaltar su conocimiento acerca del periodo de esta función.

Por el análisis anterior, se conjetura que los estudiantes se movilizan, a través de la reflexión empleada en sus interpretaciones, en el nivel referencial; dado que la gráfica de la función seno establece como estrategia para modelar el movimiento de la cápsula de la noria

4. Explique en qué intervalos la gráfica crece o decrece.

En la tabla

Tabla 31. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 4.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	0-90 crece 90-270 decrece 270-360 crece	Los intervalos de variaciones se toman de la representación gráfica de la función dada en la pregunta 2. .	8
Tipo II	No establece los intervalos de crecimiento y decrecimiento	No logra interpretar su gráfica.	1

La tabla 31 muestra que 8 de los 9 estudiantes usan los intervalos de crecimiento y decrecimiento, hacen un análisis en el que priorizan la interpretación de sus representaciones gráficas, como lo muestra la figura 29.

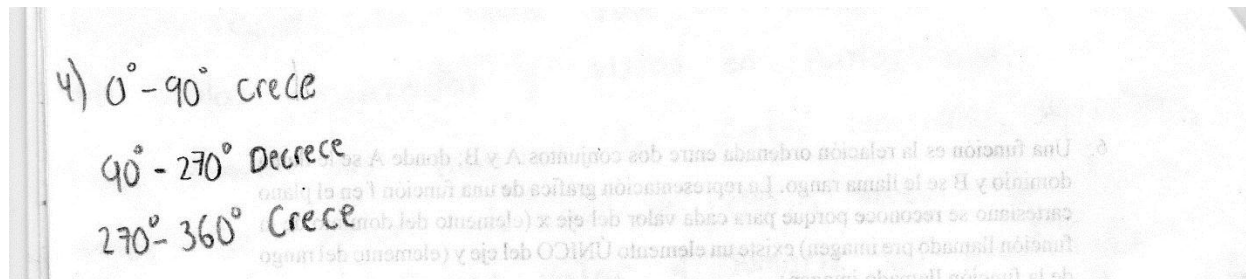


Figura 29. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Respuesta a pregunta 4.

Estas repuestas complementan los elementos propios de la noción de función seno que se quiere movilizar en los estudiantes con el fin propiciar en ellos el desarrollo de modelos de la situación en particular hasta el modelo matemático en cuestión, la función seno; en otras palabras, como lo expresa Gravemeijer (1994a, 1994b, 1997, 1999) citado por Heuvel-Panhuizen (2018) el cambio de los modelos que también puede relacionarse con el proceso de crecimiento matemático de un modo más general.

Por otro lado, es posible afirmar que, en cuanto a la estudiante que responde en términos de la capsula de la noria reconoce las variaciones ligadas a la situación (el crecimiento y decrecimiento de la cápsula), pero al no realizar una representación gráfica cartesiana adecuada, en el numeral 3, no logra establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica cartesiana.

Así pues, se puede afirmar que los estudiantes no solo reconocer la variación periódica de la función, también sus características de variación, dependencia y algunas características propias de lo matemático; desde el enfoque de la EMR, se deduce que los 8 estudiantes se movilizan en el nivel referencial en cuanto a la gráfica del seno, dado que han relacionado este cambio con las variables en juego y la dependencia.

5. Halle el valor máximo y el valor mínimo de la gráfica resultante.

Para la pregunta 5, los 9 estudiantes presentan que los valores máximos y mínimos de la gráfica son: 1 para el valor máximo y -1 para el valor mínimo. Cabe resaltar que 8 de los 9 estudiantes, en sus justificaciones recurren a la representación gráfica realizada en el numeral 2 y la otra estudiante recurre al movimiento de la cápsula de la noria.

Hasta el momento, los estudiantes en los numerales anteriores han movilizado diversas representaciones de las funciones en las que se presentan elementos que aportan al desarrollo de la noción de función. Desde el enfoque de la EMR, los estudiantes se han acercado a un contexto susceptible a ser matematizado por sus herramientas, desarrollado las mismas dotándolas de elementos generalizable que ayuden al alumno a usarlas en diferentes contextos.

Cabe notar que los estudiantes resaltan la noción de periodo a través de lo gráfico y se quedan ligados a la representación gráfica cartesiana; lo que permite concluir que los estudiantes realizan un matematización vertical dado que muestran aspectos de la situación y no se limitan a explicar en términos de la noria, antes bien, llegan a una generalización de la estrategia en términos variacionales a través de los elementos funcionales presentados en las preguntas anteriores.

Es así como en este análisis se ha privilegiado el vínculo entre los elementos del enfoque de la EMR, desde el principio de niveles, con las propuestas curriculares de los Estándares (2006) y Lineamientos (1998) –principio de interconexión- para reconocer que el aprendizaje de la función seno se realiza a través del desarrollo del pensamiento variacional, al iniciar el estudio de las variaciones y dependencias de las diferentes variables desde el contexto mismo; como se relacionan en una situación planteada y los aportes para las diferentes estrategias que los estudiantes utilizan ocasionalmente o que se puedan establecen como modelos. En este sentido, se ha privilegiado la física como disciplina que aporta diversos contextos no solo por su relación histórica con las matemáticas (Israelí 1996), también por la relación entre determinados movimientos con el modelo matemático de la función seno; uno de los intereses particulares de la investigación y la pertinencia de la misma en el proceso de modelación matemática (Camarena 2009).

En las preguntas que se analizan a continuación se observa como los estudiantes llevan estos elementos del nivel referencial a un nivel más general, centrado en las producciones de los

alumnos y el análisis que ellos mismos realizan de sus interpretaciones con elementos formales que categorizan matemáticamente, lo presentado hasta el momento, como la función seno.

6. Una función es la relación ordenada entre dos conjuntos A y B; donde A se le llama dominio y B se le llama rango. La representación gráfica de una función f en el plano cartesiano se reconoce porque para cada valor del eje x (elemento del dominio de la función llamado pre imagen) existe un elemento ÚNICO del eje y (elemento del rango de la función llamado imagen).
- a. De acuerdo con la representación gráfica del punto 2 y la tabla 3, muestre si a un valor fijo de ángulo barrido por la cápsula de la noria se le puede asociar más de un valor de su altura.

Para el numeral 6, literal “a”, se inserta la tabla 32 con el fin de clasificar las respuestas dadas al numeral 6, literal a.

Tabla 32. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 6a.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	No es posible asignar a un valor de ángulo diferentes alturas	La gráfica es una función y al trazar una línea vertical en esta, sólo la corta en un punto.	8
Tipo II	Es posible asignar a un valor de ángulo diferentes alturas	Error en la lectura y lo propuesto por la pregunta.	1

Las respuestas tipo I, dadas en la tabla 32, presentan que 8 de los 9 estudiantes responden que no es posible asignar más de un valor de altura a un ángulo determinado; dado que la pregunta moviliza la unicidad de la imagen para una preimagen (elemento del dominio) de la relación, se orienta a los estudiantes frente a la pregunta: ¿Cuándo una representación gráfica es función o no? A lo que 8 estudiantes afirman que basta con trazar una línea vertical en la

representación gráfica y si esta corta a la gráfica en un solo punto, se puede asegurar que es una función. Esto aporta al desarrollo del concepto de función desde su definición presentada en el enunciado de la pregunta y ajustan sus respuestas a la definición de función en términos de parejas ordenadas. Es decir:

“DEFINICIÓN DE FUNCIÓN: una función f es el conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento. Es decir, si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y=z$

Es de notar que $(x, y) \in f$ corresponde a la definición de pareja ordenada presentada en el capítulo 2, la cual garantiza que: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si, $a = c$ y $b = d$

De esta forma, los Estándares (2006, p 67) proponen que el estudio de las dependencias funcionales pueden detectarse en la vida cotidiana, lo que permite coordinar cambios de una magnitud Y con cambios de una magnitud X . Es importante tener en cuenta que las funciones permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no sólo en problemas y situaciones de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales y de las matemáticas mismas.

La figura 30 presenta la respuesta de una estudiante que relaciona lo verbal con la representación gráfica al expresar que no se puede asociar un valor de ángulo a una misma altura; por el contrario, muestra una misma altura y dos ángulos asociados a la misma.

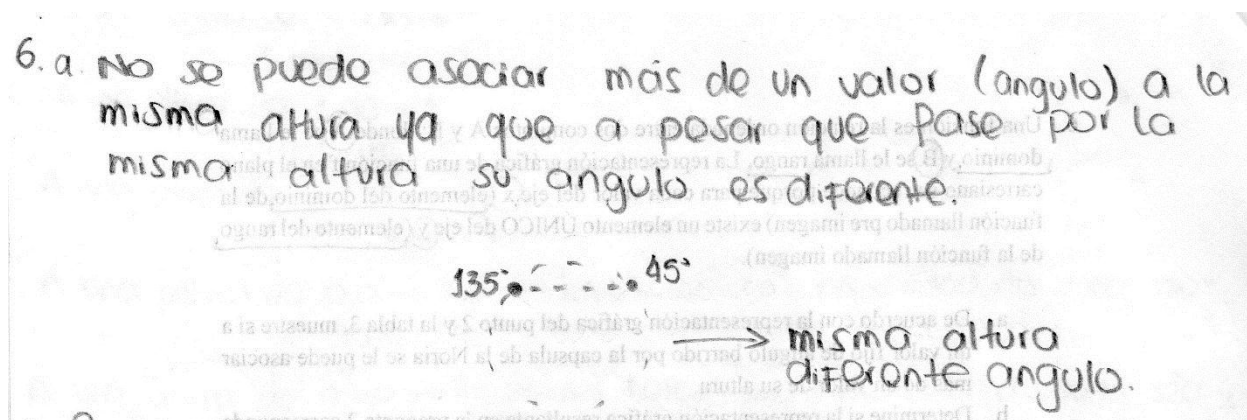


Figura 30. Respuesta a la pregunta 6, literal a. Comparación entre lo verbal y lo gráfico.

Con base en el análisis de la respuesta de la pregunta 6a, la figura 30 deja ver, en general, que los estudiantes corresponden a lo presentado en la figura 30 con los elementos que emergen

de la misma, tales como, la periodicidad, la dependencia entre la altura de la cápsula de la noria y el ángulo barrido por la misma, ya que logran comparar elementos matemáticos del dominio, rango y relación entre variables en los argumentos presentados en este numeral. Además, en plenaria con los estudiantes, uno de ellos argumenta que los ángulos para los que se obtiene la misma altura son infinitos, pues el movimiento de la noria periódico.

En términos del enfoque de la EMR, se reconoce que los alumnos utilizan el gráfico de la función seno realizado como un modelo de la situación a través del cual explican lo que propone la tarea y concluyen que esta gráfica tiene la característica de tener única relación entre un valor de ángulo barrido con el de la altura de la cápsula de la noria alcanzada en tal. Dicho en otras palabras, los estudiantes realizan una matematización vertical que deja ver la comprensión del contexto realista, el vínculo de la gráfica cartesiana de la función seno, la definición de función, función periódica y la estrategia algorítmica de la línea vertical, paralela al eje y , que corta la curva únicamente en un solo punto.

No obstante, 1 de los 9 estudiantes, cuya respuesta se clasifica en al tipo II responde que a una altura se le puede asociar diferentes valores de ángulo barrido, lo que no corresponde a una función. Luego, el alumno realiza la correspondencia entre el valor del ángulo barrido por la noria y su altura, procedimiento en el que reconoce, a través del algoritmo de la línea paralela al eje y , que efectivamente la gráfica es una función. Esto muestra que la estudiante no alcanza la claridad necesaria al momento de comprender de la pregunta. Es de notar que esta estudiante no hace referencia específica a la periodicidad de la función, es decir no muestra que para una misma altura hay infinitos ángulos, dado que su estrategia que vinculada a la situación y se analiza como un modelo de la situación y no se desliga de la misma.

- b. Determine si la representación gráfica resultante en la pregunta 2 corresponde a una función. Justifique su respuesta.

Para el literal b, dado que los 8 estudiantes responden que la gráfica presentada en la pregunta 2 corresponde a una función. Para el análisis de las respuestas al literal b, la tabla 21 clasifica en tres tipos de respuesta de acuerdo con la estrategia que muestran en la interpretación.

Tabla 33. Clasificación de respuestas dada al literal b de la pregunta 6.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Unicidad de la imagen para una pre imagen	Cuando una gráfica es función no puede tener dos pre imágenes una imagen.	3
Tipo II	Estrategia gráfica: línea vertical que corta la función en un único punto.	Una línea vertical solo la corta en un punto.	4
Tipo III	Relación de la gráfica con la función seno	Si es una función, es la función seno.	2

Para las respuestas asociadas al tipo I, los estudiantes afirman que a cada preimagen (ángulo) se le asigna un único valor de imagen (altura) y es por ello que la gráfica realizada representa una función. Desde los Estándares (2006, 67) el reconocimiento de las variables, su dependencia y reconocimiento de elementos propios de lo funcional aportan significativamente al desarrollo del pensamiento matemático y el inicio del estudio del cambio y la variación en niveles más generales. Al indagar con los estudiantes acerca de sus respuestas (tipo I), en la plenaria se argumenta que es función porque responde a la definición presentada en el enunciado de la pregunta 6. En la figura 31 se muestra la explicación verbal de una de las respuestas tipo I.

6) a. No se puede, un ángulo solo tiene una altura.
 b. Si, porque para cada ángulo que se encuentre en el eje X solo existe un elemento en el eje Y que lo acompaña.

Figura 31. Respuesta tipo I al literal b de la pregunta 6.

La figura 31 deja ver como este estudiante, generalmente los que respondieron según el tipo I, hace énfasis en la necesidad de que cada ángulo sea “acompañado” (relacionado)

solamente con un elemento del eje y . Además, el estudiante no justifica en términos de la altura de la cápsula de la noria, sino en términos del eje de las ordenadas, y del ángulo asociado al eje de las abscisas. Lo que muestra el uso de la definición de función más allá de la dependencia y del contexto al citar la definición formal.

Desde el principio de niveles del enfoque de la EMR, se reconoce como el estudiante pasa de elementos propios del contexto y llega a aspectos de la matemática misma como lo es la relación funcional de dependencia; de manera general, se conjetura que las respuestas tipo I se encuentran en el nivel general o referencial, pues llegan con sus reflexiones a elementos propios dado la necesidad de unicidad de la imagen respecto a la preimagen es un elemento propio de la definición de función presentada en el capítulo 2.

Por otra parte, el tipo II hace referencia a estrategias asociadas a la representación gráfica. Es decir, los tres estudiantes afirman que basta con trazar una línea vertical y comprobar que corta la gráfica en un sólo punto para afirmar que esta corresponde a una función. Esta estrategia hace parte de sus saberes previos y aporta al desarrollo de la definición de función. Aunque es una estrategia vinculada a la representación gráfica, corresponde a un elemento matemático que supera el contexto de la rotación de la cápsula de la noria, pues los estudiantes lo exponen como condición necesaria y suficiente para ser función. En la figura 32 se presenta una respuesta asociada al tipo II presentado en la tabla 21.

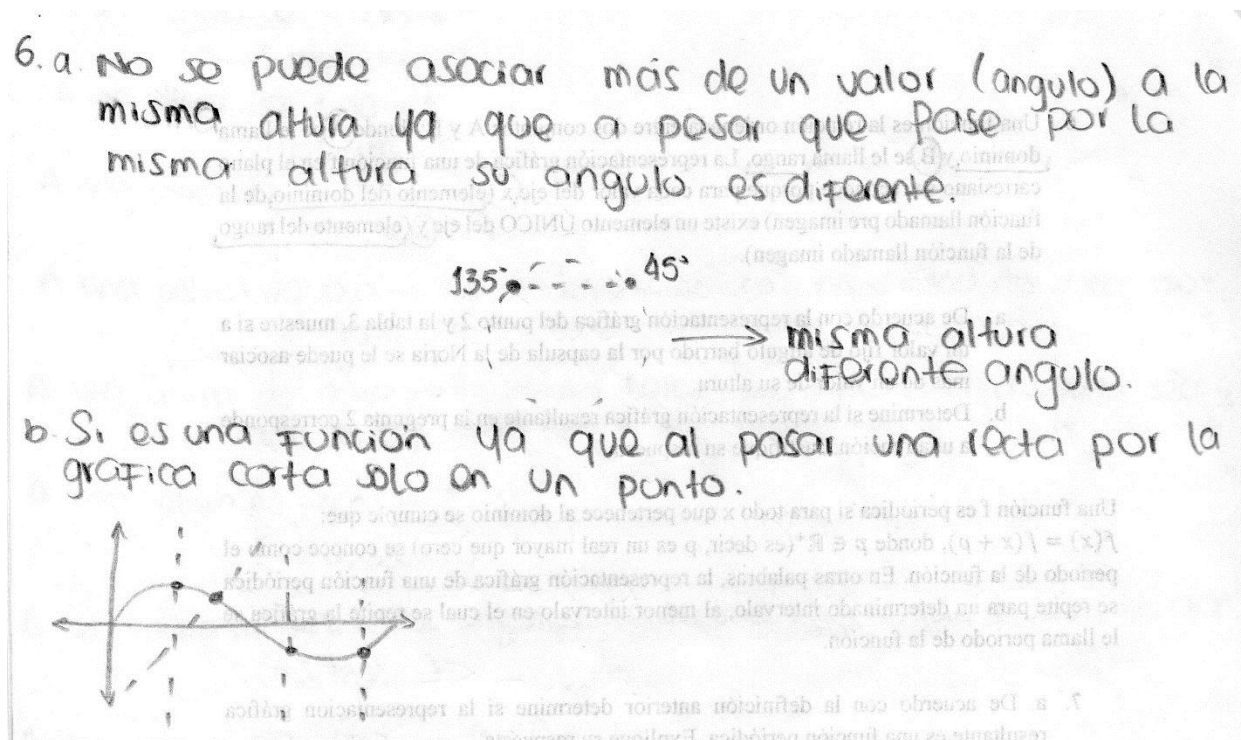


Figura 32. Respuesta tipo II, pregunta 6, literal b.

Como se muestra en la figura 32, esta estudiante logra relacionar la representación gráfica realizada con la definición de función, lo que garantiza la unicidad de la imagen para determinada preimagen. Esta estrategia se clasifica como un algoritmo adquirido en el contexto escolar y explica las variaciones presentadas en la misma; además, la estudiante le otorga características que superan la situación, como lo son las líneas verticales y su condición de cortar la gráfica en un punto único. Aunque la gráfica presentada en la figura 32 deja ver una línea no vertical, la estudiante hace referencia exclusivamente a la noción gráfica de línea vertical para identificar la funcionalidad de una relación.

Por lo anterior, desde el enfoque de la EMR, el proceso de matematización progresiva en esta estudiante muestra que se ha superado la situación y la estrategia utilizada en este literal asociado a la pregunta 6 se clasifica como un modelo para explicar cualquier gráfica que cumpla con las condiciones presentadas en el discurso de la estudiante. De igual manera, desde el principio de niveles, se dice que la estudiante se mueve en el nivel general respecto a la clasificación de una gráfica cartesiana como una función.

Por último, las respuestas tipo III muestran una relación de la función presentada gráficamente en el literal b de la pregunta 6 con la función seno. En la figura 33 se presenta una de las respuestas clasificadas en el tipo III.

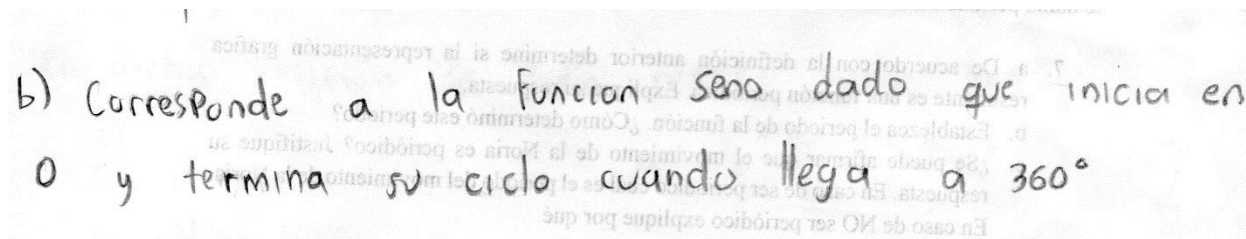


Figura 33. Respuesta tipo III. Pregunta 6 literal b.

La figura 33 deja ver que las respuestas tipo III no caracterizan la gráfica específicamente; por el contrario, en general hace una comparación inmediata de la gráfica obtenida con la función seno, trabajada en clase de matemáticas de forma tradicional. Ambos estudiantes hacen explícita la comparación y toman la función seno como modelo para explicar la situación. Esto permite clasificar las respuestas de los estudiantes en el nivel general dado que los argumentos que llevan al uso de la función seno muestran como el periodo de la función y su corte con el eje de las ordenadas son determinantes para esta elección.

Cabe destacar que existen infinitas funciones que cortan en cero y que su periodo es 360 grados; no obstante este estudiante categoriza su respuesta como estrategia de la situación pero adquiere características matemáticas que superan el contexto. Sin embargo, resalta elementos de la función como punto de corte con el eje de las ordenadas y el periodo de la misma asociados únicamente a la representación gráfica de la función seno.

Una función f es periódica si para todo x que pertenece al dominio se cumple que:

$f(x) = f(x + p)$, donde $p \in \mathbb{R}^+$ (es decir, p es un real mayor que cero) se conoce como el periodo de la función. En otras palabras, la representación gráfica de una función periódica se repite para un determinado intervalo, al menor intervalo en el cual se repite la gráfica se le llama periodo de la función.

7. a. De acuerdo con la definición anterior determine si la representación gráfica resultante es una función periódica. Explique su respuesta.
- b. Establezca el periodo de la función. ¿Cómo determinó este periodo?

- c. ¿Se puede afirmar que el movimiento de la noria es periódico? Justifique su respuesta. En caso de ser periódico cual es el periodo del movimiento de la noria. En caso de NO ser periódico explique por qué.

Para el análisis de los literales a, b y c asociados a la pregunta 7, se agrupan las respuestas en la tabla 34 que aportan al desarrollo de la noción de función periódica.

Tabla 34. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 7, literales a, b y c.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. La gráfica obtenida es una función periódica. b. El periodo es 2π o 360° c. Si, el mismo periodo de la función	Se repite igual en cada intervalo Intervalo en que se repite Como su función es periódica entonces el movimiento también lo es.	9

El tipo I explicado en la tabla 34 deja ver que los estudiantes movilizan la noción de periodo y logran reconocer que la función seno es un modelo para explicar el movimiento de la noria. De aquí que se realice un análisis de cada uno de los literales.

Para el caso del literal a, los 9 estudiantes responden que es una función periódica dado que se repite en un intervalo de 360 grados. En las respuestas de los estudiantes emerge la palabra constante, con el fin de explicar que este movimiento debe ser perpetuo, es decir que no se detiene. Al comparar las respuestas con la definición de función periódica es de notar que los estudiantes reconocen el periodo en tanto es un intervalo en el que se repite la función de la misma forma, es decir, las variables en estudio (altura de la capsula de la noria, tiempo y ángulo barrido) conservan las mismas variaciones y dependencias.

Por otra parte, para el literal b, los 9 estudiantes responden que el periodo es 360 grados dado que es el intervalo en el que se repite el movimiento o se completa un ciclo. Además, argumentan que esta elección es producto del trabajo realizado en la tabla 3 donde se realiza un reconocimiento de parejas ordenadas que corresponden a la regularidad de 360. Algunos estudiantes escriben 2π para hacer referencia a la conversión del ángulo al número real.

De esta manera, la tarea moviliza elementos curriculares propios del pensamiento variacional, propuesto por los Estándares (2006, p 88) y presentado en coherencia con otros pensamientos; tales como la descripción y modelación de fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas, la Justificación de resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Además, desde el enfoque de la EMR, el mundo real se refiere a todo lo que el estudiante puede imaginar y es susceptible de ser matematizado por el mismo. En el mismo sentido, Panhuizen (2003, p 4) resalta que a los modelos se les atribuye la función de salvar la brecha entre la comprensión informal conectada con la realidad ‘real’ e imaginada, por una parte, y la comprensión de los sistemas formales por otra. Por ello este reconocimiento explícito de lo periódico hace que los estudiantes desarrollen el pensamiento variacional a través de modelos generados, adaptados y generalizados por ellos mismos. Tales modelos generalizables, hasta el momento, son el conteo y la representación gráfica de la función seno.

Por tanto, los estudiantes toman la función seno como un modelo para explicar el movimiento de la cápsula de la noria. Desde el enfoque de la EMR, este modelo para se puede extrapolar a otras situaciones donde se supere el contexto del que surgió la misma.

Sea un punto P en el plano cartesiano de coordenadas (x, y), tal que la distancia de P al punto O de coordenadas (0,0) sea constante e igual a 1. La función seno se define como el conjunto de las parejas ordenadas (a, b) tales que la coordenada “a” hace referencia al ángulo medido en sentido anti horario y la coordenada b corresponde al cada uno de los valores asociados a la coordenada y del punto P. La coordenada inicial del punto P es la coordenada (1, 0)²⁸. De esta forma, la representación gráfica de la función seno sería:

²⁸ Adaptada de la definición de la función seno dada por Takeuchi (1985, p 17)

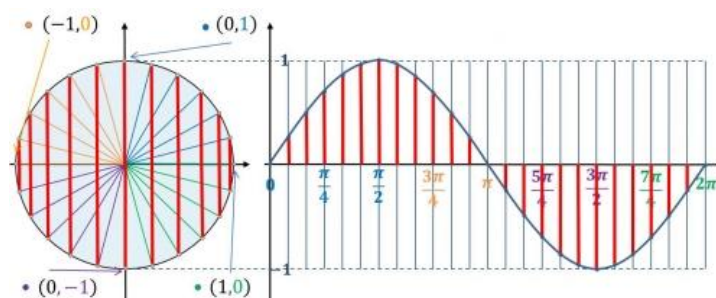


Figura 3. Representación gráfica de la función seno²⁹

8. Compare la representación gráfica obtenida en la pregunta 2 (tarea 2), con la representación gráfica dada de la función seno.
- Corresponde la representación gráfica que realizó con la representación gráfica dada de la función seno en la figura 3.
 - Si corresponde, se puede afirmar que el movimiento de la cápsula de la noria es modelado por medio de la función seno. Si no corresponde, describa los elementos que diferencian estas representaciones gráficas.
 - Realice una explicación de la representación gráfica de la función seno, en términos de la posición de la cápsula o movimiento de la noria.

La tabla 35 clasifica las respuestas dadas por los estudiantes para los literales a, b y c relacionados con el numeral 8.

Tabla 35. Clasificación de las respuestas dadas a la pregunta 8, literales a, b y c.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. Si corresponde.	Si es la función seno	9
	b. Si se puede afirmar que es modelado por la función seno	Si se modela por la función seno	
	c. Uso de los intervalos de crecimiento y decrecimiento	Respuesta a través de los intervalos de variación	

²⁹ Tomado de <https://matematicaspr.com/image/12dj/blog/graficas-funciones-trigonometricas/grafica-funcion-seno.jpg> . referenciado el día 17 de mayo de 2017.

La tabla 35 deja ver que los 9 estudiantes presentan elementos como el punto de inicio, el periodo de la función y la dependencia de las variables x e y . Es de notar que, los estudiantes realizan la comparación entre las parejas ordenadas presentadas en la tabla 3, con la representación gráfica cartesiana presentada en la pregunta 8; esta estrategia de comparación uno a uno responde a la definición matemática de igualdad de funciones presentada en el capítulo 2. Es decir que sean dos funciones f y g que dependen de x , son iguales si y solo si:

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$$

$$f(x) = g(x) \text{ para todo elemento } x \text{ del } \mathcal{D}_f$$

En el caso de estos elementos presentados por los estudiantes, corresponden a la definición de igualdad de funciones antes presentada. Desde el enfoque de EMR se categorizan como estrategias de nivel general, dado que los estudiantes realizan la comparación de las representaciones gráficas tanto de la pregunta 2 como de la presentada en este numeral 8, sus parejas ordenadas y sus variaciones sin tener en cuenta elementos informales de la situación de la cápsula de la noria.

Para el literal c, los 9 estudiantes recurren al análisis por intervalos de crecimiento y decrecimiento, donde muestran que los primeros 180 grados la función es positiva y que para los otros 180 grados la función es negativa. Además, la figura 34 deja ver cómo, en general, los alumnos utilizan diferentes sistemas de representación, como lo son el verbal y el icónico.

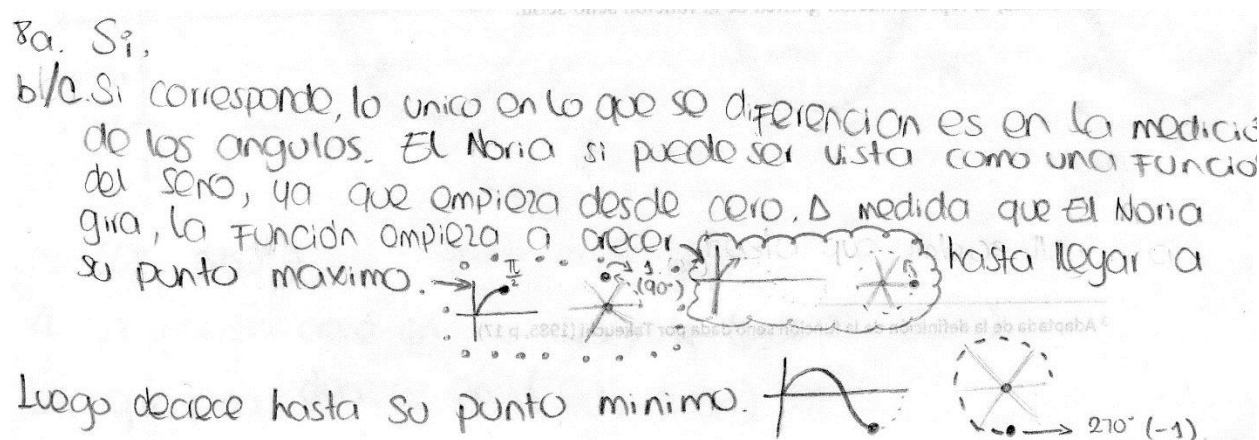


Figura 34. Respuesta para literal c de la pregunta 8.

Desde la propuesta del MEN (1998, p 50) que afirma que el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas. En términos del enfoque, que los estudiantes a través de la matematización progresiva logren, interpretar, generar “modelos de” y “modelos para” otras situaciones en diferentes contextos.

En definitiva, la comparación entre el movimiento de la noria, las representaciones gráficas construida por los estudiantes y la dada en la pregunta 8 se puede comparar con la propuesta de Montiel (2005) citada por Santacruz (2016, p 6) quien plantea la educación tradicional de las funciones trigonométricas desde una ausencia de contextos y situaciones que aporten al desarrollo de estrategias por parte de los estudiantes. Así, los alumnos logran generalizar la representación gráfica al realizan el paso del círculo trigonométrico a la gráfica cartesiana de la función seno, así:

movimiento de la noria $\rightarrow$ *representación gráfica construida*
 $\rightarrow$ *representación gráfica con valores*

9. ¿A partir de la relación entre las dos representaciones gráficas se puede concluir que la función seno es una función periódica? Justifique su respuesta.
 - a. Determine el periodo de la función seno.
 - b. Compruebe para diferentes valores de la variable x que se cumple la igualdad $f(x) = \text{sen}(x) = \text{sen}(x + p)$ donde x pertenece a los números reales y p es el periodo de la función seno.

Para las preguntas 9a y 9b se presenta la tabla 36 donde se clasifican las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 36. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 9a y 9b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. Si es una función periódica b. 2π o 360° c. $\text{sen}(3 + 2\pi) = \text{sen}(3)$	Si es la función seno La función seno se repite en 2π Uso de la calculadora para encontrar los valores.	9

La figura 35 y la tabla 36 dejan ver la propiedad de periodicidad de la función seno y su periodo que es igual a 2π , además utiliza diferentes valores para comprobar si la definición de periodo, es decir, si $f(x) = \text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$.

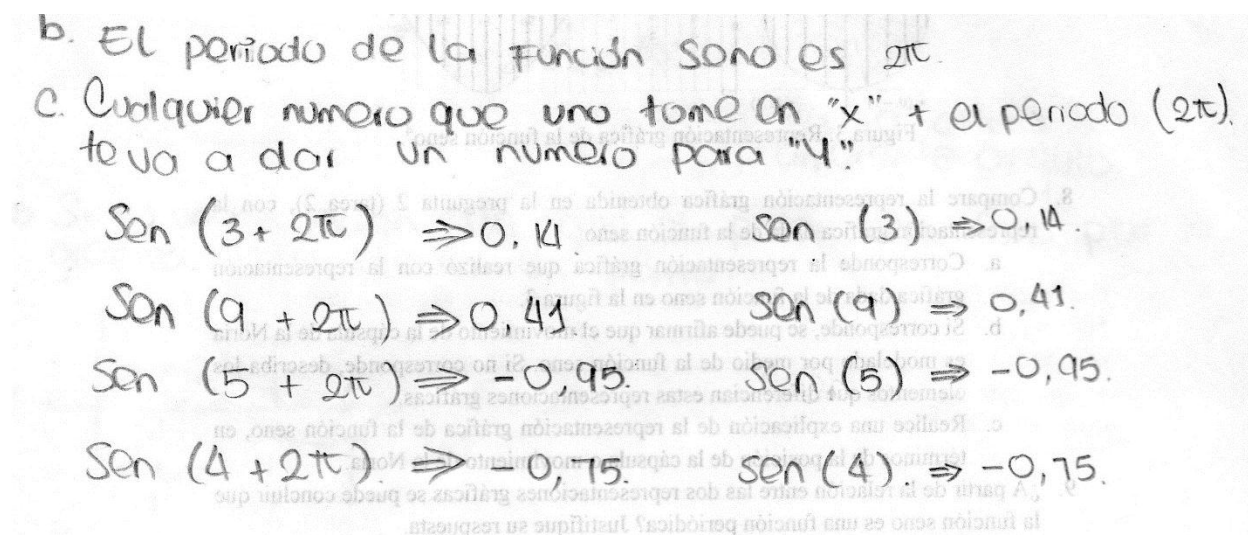


Figura 35. Respuesta al numeral 9, literales a y b.

Es de aclarar que, en plenaria se generan dos elementos de discusión. El primero relacionado con la identificación de imágenes de la función seno diferentes a las trabajadas en la

situación 2, para ello se recurre al uso de la calculadora para encontrar dichas imágenes. El segundo, con la importancia de escribir el valor a calcular en grados o en radianes. Así, a través de una explicación y selección se aclara el modo adecuado de la calculadora para cada uno de los estudiantes -tanto para el que utiliza radianes como para el que utiliza grados- aspecto relevante al momento de comprobar la periodicidad de la función seno a través de diferentes parejas ordenadas. Es decir, anteriormente en el análisis no se evidencia dificultad con el uso de radianes o grados; no obstante, en este numeral se movilizan elementos algebraicos que requiere un uso adecuado de la unidad de medida y su equivalencia entre ellos.

Sin embargo uno de los estudiantes presenta dificultad al momento de resolver esta pregunta y reemplaza el valor del ángulo en la calculadora para así obtener valores diferentes y concluir que no se cumple la periodicidad de la función seno. Como se muestra en la parte superior de la figura 36.

b. $f(x) = \text{sen}(x) = \text{sen}(x+p)$

$\text{Sen } 40 = \text{Sen}(40 + 2\pi)$ $\text{Sen } 180 = \text{Sen}(180 + 2\pi)$

$0,64 = 0,72$ $0 = -0,11$

$\text{Sen } 40 = \text{Sen}(40 + 2\pi)$ $2\pi = 360^\circ$

$\text{Sen } 40 = \text{Sen}(400)$ $\text{Sen } 180 = \text{Sen}(180 + 2\pi)$

$0,64 = 0,64$ $\text{Sen } 180 = \text{Sen } 800$

$0 = 0$

Figura 36. Corrección valores de la pregunta 9. $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$

Además, en la parte inferior de la figura 36, se presenta la respuesta del estudiante después del dialogo orientado a aclarar la importancia de diferenciar las unidades de radianes y grados en la calculadora; además, se debate sobre la periodicidad de la función en términos de periodo, para lo que el estudiante afirma que el periodo es 2π o 360 grados. Es por ello que la figura 36 deja ver en principio valores que el alumno inserta en la calculadora para calcular el seno del

ángulo dado del reemplazo y después de trazar una línea divisora para replantear lo preguntado se encuentra la equivalencia a través de los grados y los radianes.

Como se ha dicho, la situación 2 retoma elementos de la situación 1 en tanto reúne la idea intuitiva de periodo y deja ver como los estudiantes heredan estrategias utilizadas tales como el conteo y la secuencia numérica a partir de un patrón. En este caso, el periodo del fenómeno en cuestión, sea año bisiesto, estaciones del año, equinoccio o solsticio y movimiento de la capsula de la noria. Es decir, la noción de periodo supera el contexto y es enriquecido por elementos generalizables que permite ubicar a los estudiantes en el nivel general respecto a la noción de periodo; Por otro lado, la tarea 1, de la situación 2, genera discusiones acerca de diferentes elementos del pensamiento métrico, en tanto se discute acerca del uso o no de determinado sistema de medición y cómo la inclusión de un patrón de medida nuevo aporta al desarrollo de este pensamiento unido con elementos de la variación de la altura de la cápsula de la noria y el ángulo barrido por la misma. (MEN 2006, p 63)

Asimismo, la tarea 2 centra su atención en el estudio del pensamiento variacional dado que se analizan recurrencias, dependencias y variaciones que llevan al reconocimiento de la variación por parte del estudiante a través de la interpretación informal de la situación realista –la ferris Wheel de Chicago- para después introducir elementos matemáticos propios de la función seno. De aquí que se presenten diferentes representaciones de la función seno a través de las cuales los estudiantes no sólo logran dar respuesta a interrogantes enmarcados en la comprensión del fenómeno, sino que desarrollan sus propios modelos de variación como el uso de la representación gráfica cartesiana para explicar el comportamiento de la cápsula de la noria.

A través de la comparación del movimiento de la cápsula de la noria con los diferentes modelos que emergen al trabajar con esta, se observa que los estudiantes comprenden la noción de función a través de diferentes representaciones; lo anterior, según los MEN (2006, p 50) lleva al acto de matematizar, que no es más que utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; a utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.

Dicho en términos del enfoque de la EMR, los estudiantes a través de un proceso de matematización progresiva desarrollan tanto estrategias informales para comprender la situación –matematización horizontal- como estrategias matemáticas que adquieren un grado de

formalización mayor y buscan ser cada vez más generales e independientes del contexto – matematización vertical-.

Por tanto los estudiantes en la situación 2 muestran estrategias ligadas a la situación tales como la regla de tres y el conteo a través de la suma sucesiva de 360 grados; es decir realiza una asociación entre los números naturales –indicando el número de la vuelta- y la suma por 360 grados para cada una de las vueltas. Además presentan una estrategia que le permite hacer explícitos elementos matemáticos propios de la función seno y su definición; esta es la representación gráfica de la función seno presentada en el numeral 2 de la tarea 2.

Es así que la situación 2 permite reconocer, desde el enfoque de la EMR, como los alumnos avanzan en el proceso de matematización a través sus diferentes estrategias producto de la reflexión entre pares, la interpretación del contexto y la inclusión de elementos matemáticos que dejan. Este análisis permite afirmar que la inclusión de la noria como contexto realista moviliza el reconocimiento de la variación, las variables en juego, el tipo de dependencia asociada a la misma y la importancia de la periodicidad del movimiento para ser modelado por la función seno.

En conclusión, la situación 1 propone a los estudiantes diferentes contextos que presentan fenómenos de variación periódica (o que se pueden aproximar a ello); de allí surge el conteo como una estrategia en el nivel situacional (para algunos estudiantes en el nivel referencial); por otra parte, la situación 2 centra la atención en la comparación entre el movimiento circular uniforme de la capsula de una noria, el gráfico de la función seno y la definición de función seno como función periódica y trigonométrica relacionada con la circunferencia unitaria. Desde el enfoque de la EMR, ambas situaciones no solo aportan contextos realistas que potencian el proceso de matematización progresiva, sino que llevan a los alumnos a acercarse al saber a través de diferentes representaciones que, a su vez, les permite desarrollar diferentes habilidades para resolver las preguntas dadas y se pueden dotar de características generalizables para constituir las en “modelos de” o “modelos para”

3.2.3. Resultados y análisis de resultados: Situación 3. Aproximándonos a fenómenos físicos: la variación de la función seno. Los movimientos oscilatorios en la Física

La traslación y la rotación de la Tierra, el movimiento de un electrón orbitando el núcleo de un Átomo, el movimiento de un péndulo, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, las ondas electromagnéticas tales como la luz y las ondas de radio, la corriente eléctrica en los circuitos de corriente alterna y otros más, son algunos ejemplos de movimientos oscilatorios que están asociados al desplazamiento alternante que caracteriza el objeto en acción.

Un caso particular de los movimientos oscilatorios son los Movimientos Armónicos Simples (MAS) los cuales presentan una periodicidad, es decir, que el movimiento se repite en un intervalo mínimo llamado periodo. El péndulo simple y el sistema masa resorte son los casos más conocidos de MAS en la Física.

La figura 1 muestra un esquema de un sistema masa resorte y un péndulo simple.

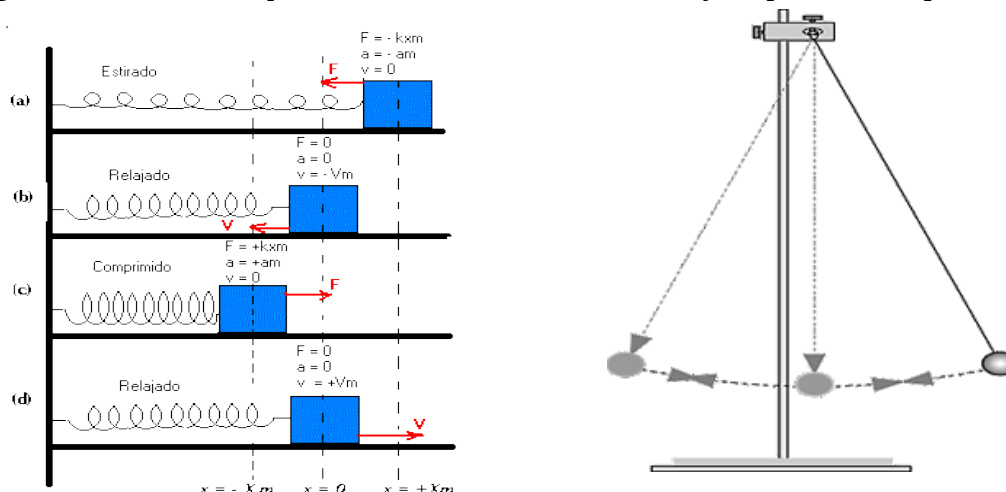


Figura 1. Masa resorte y péndulo simple.

Tarea 1: El sistema masa resorte

Un sistema masa resorte consta de un resorte que se encuentra fijo en uno de sus extremos y una masa m unida al otro extremo del resorte. Un resorte se caracteriza por una constante de elongación K dada en $[N/m]$. Cuando es deformado una distancia x de su posición de equilibrio responde a una fuerza de restauración igual a: $F = -Kx$.

Una de las características de los MAS es que sus oscilaciones generan un movimiento periódico, es decir, que se repite en un intervalo de tiempo llamado periodo. Así, la ley de la conservación de la energía permite idealizar un sistema masa resorte cuando se desprecia la acción de la Fuerza de Fricción o Fuerza de Rozamiento. La Frecuencia Angular ω de este movimiento se relaciona con las cantidades físicas k y m , por medio de la siguiente expresión algebraica:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

La figura 2 muestra un sistema masa resorte horizontal en una superficie ideal (sin fricción).

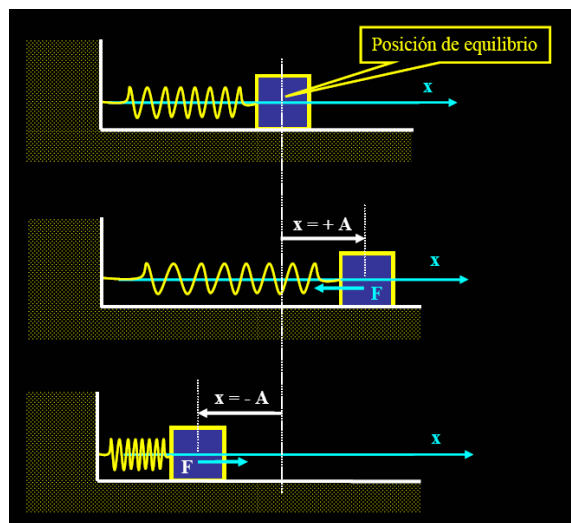


Figura 2. Sistema masa resorte ideal³⁰

El sistema masa resorte de esta situación consta de una masa de 1 Kg que está unida a un resorte de constante 1 N/m. La deformación máxima – A en la figura 2 – que sufre el resorte es de 1 m (la deformación se mide horizontalmente desde el punto de equilibrio). Después que la masa está oscilando, se toma la posición de equilibrio del resorte como punto inicial, teniendo en cuenta que la masa sigue su recorrido hacia la derecha.

1. a. Realice una representación gráfica del movimiento de la masa mostrando algunas características dadas para el sistema masa resorte.
- b. Explique qué elementos consideró en la elaboración de la representación gráfica anterior.

Para la pregunta 1a se presenta en la tabla 37 la clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes. Cabe aclarar que para la situación 3 se analizan los resultados de 8 estudiantes. El noveno estudiante no continúa en la aplicación por compromisos académicos con el colegio.

³⁰ Imagen tomada de http://www.fatela.com.ar/trabajo_final_svg/5pag3.htm referenciada el 21 de mayo de 2017.

Tabla 37. Clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes para la pregunta 1a.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. Representación icónica del sistema masa resorte (similar a la figura 2)	Explican en términos de puntos de equilibrio, elongación deformación, energía, amplitud y fuerza.	8

Del análisis de la tabla 37 se obtiene que los 8 estudiantes realizan una representación icónica similar a la figura 2 presentada en esta tarea que tiene como contexto el movimiento del sistema masa resorte y los alumnos usan las condiciones iniciales dadas por la situación para construir tal representación y privilegian elementos de la física, tales como: amplitud, fuerza, velocidad energías (cinética y potencial elástica), elongación y deformación, entre otros.

El literal b asociado a las justificaciones realizadas por los estudiantes a la pregunta 1 se clasifica en la tabla 38.

Tabla 38. Clasificación de las respuestas dadas al literal 1b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Uso de elementos de la física para explicar la gráfica.	Explica en términos de puntos de equilibrio, elongación deformación, energía, amplitud y fuerza.	1

Tipo II	Uso de las condiciones iniciales dadas.	Explican en términos de puntos de equilibrio, elongación deformación	7
---------	---	--	---

Para la respuesta tipo I asociada a la tabla 38, se resalta que la estudiante realiza un análisis físico de la tarea propuesta a través de los conceptos de energía cinética y potencia, además de los cambios de velocidad de la masa atada al resorte; la figura 37 deja ver la respuesta presentada.

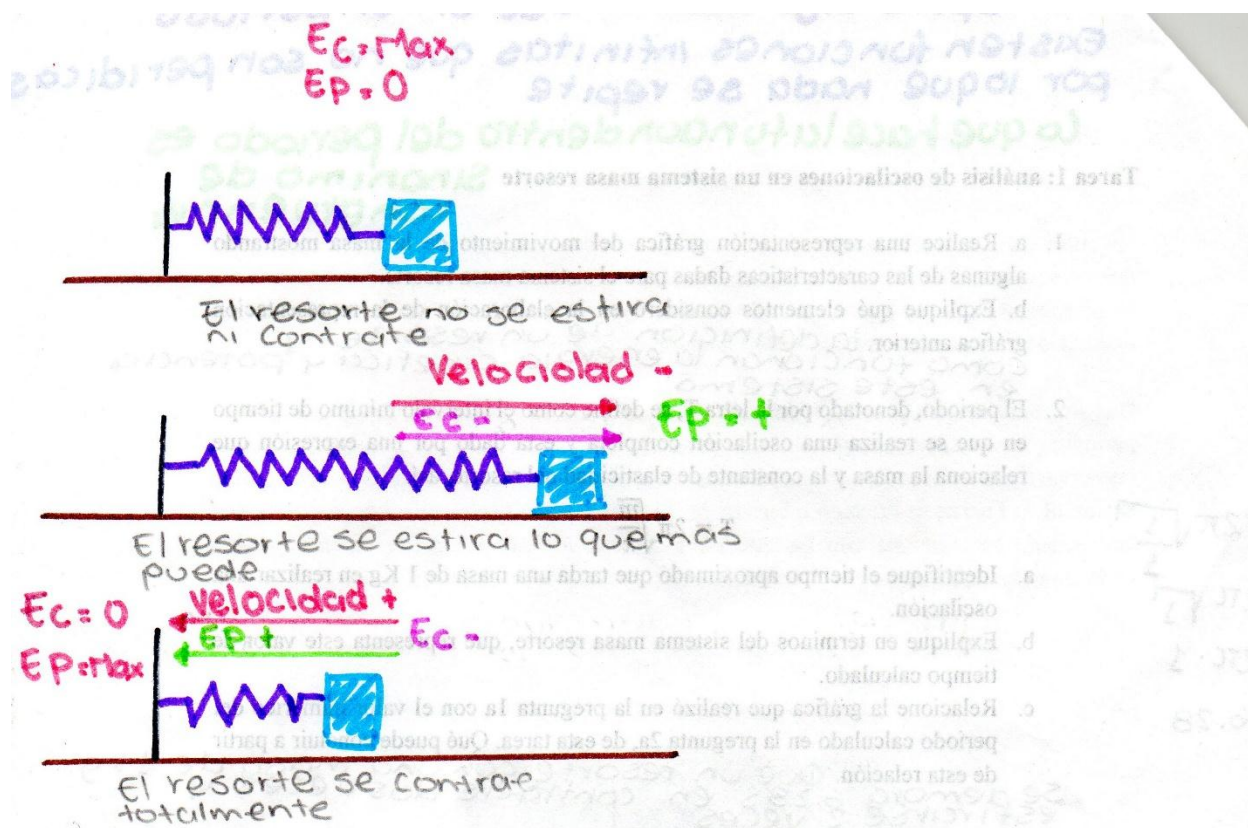


Figura 37. Representación gráfica pregunta 1 tarea 1.

La figura 37 deja ver que la estudiante comprende la situación propuesta tanto en términos matemáticos como en términos de la física. En cuanto a las demás respuestas se observa que los estudiantes En general, se analiza que la mayoría de los alumnos lleva elementos de la física a la explicación en términos matemático; según el MEN (2006, p 66) lo anterior aporta al

reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos. En particular el cambio en el contexto del sistema masa resorte. Desde el enfoque de la EMR, el principio de interconexión sostiene que la interpretación de situaciones problemáticas realista a menudo exige establecer conexión y aplicación de un amplio rango de comprensiones y manejo en algunas herramientas tanto matemáticas como de otras disciplinas.

Igualmente, para Camarena (2009, p 16) es preponderante identificar los conocimientos previos en diferentes disciplinas y al conocer estas nociones con que cuenta el estudiante. Así, el enfoque de EMR desde el principio de actividad sostiene que hacer matemática es matematizar la realidad a través de actividades que aportan a la construcción del pensamiento matemático en los estudiantes.

2. El periodo, denotado por la letra T, se define como el intervalo mínimo de tiempo en que se realiza una oscilación completa y está dado por una expresión que relaciona la masa y la constante de elasticidad del resorte, así:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- a. Identifique el tiempo aproximado que tarda una masa de 1 Kg en realizar una oscilación.
- b. Explique en términos del sistema masa resorte, qué representa este valor de tiempo calculado.
- c. Relacione la gráfica que realizó en la pregunta 1a con el valor numérico del periodo calculado en la pregunta 2a, de esta tarea. Qué puede concluir a partir de esta relación.

Para los literales a y b de la pregunta 2 se introduce la tabla 39 donde se clasifican los tipos de respuestas, la explicación de los estudiantes y los elementos a que se tuvieron en cuenta. Por otra parte, para el literal c se describen las respuestas dadas por los estudiantes en el análisis de la tabla 39.

Tabla 39. Clasificación de las respuestas dadas a los literales a, b y c de la pregunta 2

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. $2\pi s$ b. Tiempo de una oscilación	Reemplazo en la ecuación. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	6
Tipo II	a. 6,28 s b. Tiempo de una oscilación	Reemplazo en la ecuación. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	2

Para el literal a de esta pregunta, los 8 estudiantes responden que el periodo del sistema masa resorte es de $2\pi s$. O su aproximación en números decimales 6,28 s. Ambos resultados surgen del uso que hacen los estudiantes de la ecuación: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, después de reemplazar los valores iniciales de masa m y de la constante del resorte k. desde los Estándares (2006, p 67) se toman estos algoritmos como una relación entre el pensamiento numérico, dado que realizan un reemplazo y operaciones aritméticas simples (otros realizan una aproximación de números decimales), con el pensamiento variacional en tanto calculan el valor del periodo y lo asocian a una variación periódica presentada en la situación.

En el literal b los estudiantes expresan que este tiempo calculado representa lo que tarda una oscilación; es decir el tiempo que tarda la masa en ir y volver al punto de equilibrio dos veces. Es de notar que los estudiante que hacen referencia al ir y volver reconocen que no basta con estirarse al máximo y regresar, es necesario que el sistema cumpla con una oscilación completa. También en sus argumentos se analiza que los estudiantes citan este valor como el periodo del movimiento de la masa atada al resorte; así pues, se conjetura que los alumnos movilizan la noción de periodo y la generalizan a otros contextos; por tanto, este literal deja ver el acercamiento que tienen los jóvenes a la expresión algebraica $f(x) = f(x + p)$, donde p es el periodo y que a su vez se define en la física como el intervalo de tiempo en el que un MAS realiza una oscilación.

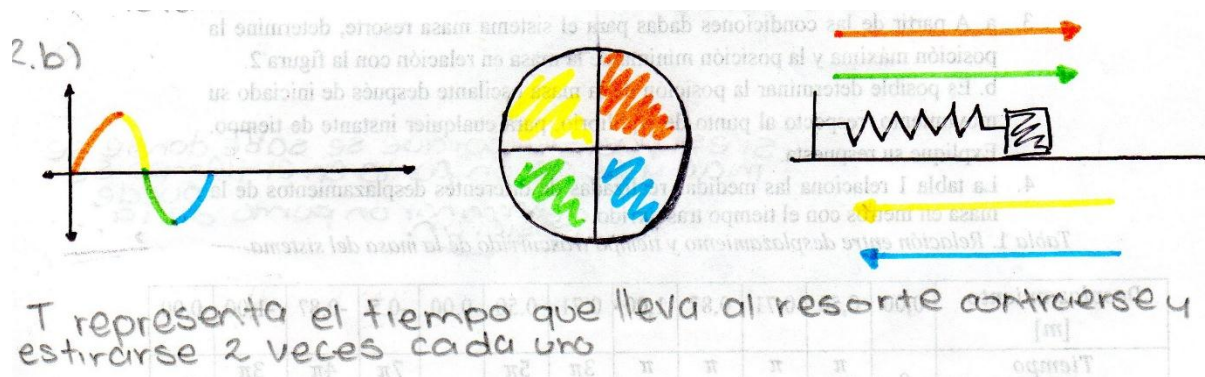


Figura 38. Relación de comportamiento del sistema masa resorte. Representación gráfica.

La figura 38 deja ver una interpretación de la variación del sistema masa resorte en términos de la variación de la función seno. Para esta respuesta la estudiante la clasifica como la función seno y realiza la comparación entre la gráfica que aporta la situación, la circunferencia dividida en 4 sectores y la representación cartesiana. Esta comparación la lleva a comprender que el suceso del sistema masa resorte es modelado por la función seno. La correspondencia de colores muestra la comprensión de los intervalos de crecimiento, decrecimiento, el significado de una oscilación y del periodo de la función representada en el plano cartesiano.

Por otra parte, para el literal c los estudiantes expresan en términos de su representación icónica que el valor encontrado para esta pregunta corresponde al tiempo que tarda la masa en realizar una oscilación, es decir que es el periodo del sistema masa resorte. Lo que significa una oscilación se presenta en la figura 39, donde se sintetizan los resultados de los estudiantes quienes comparan su representación icónica con la explicación verbal.

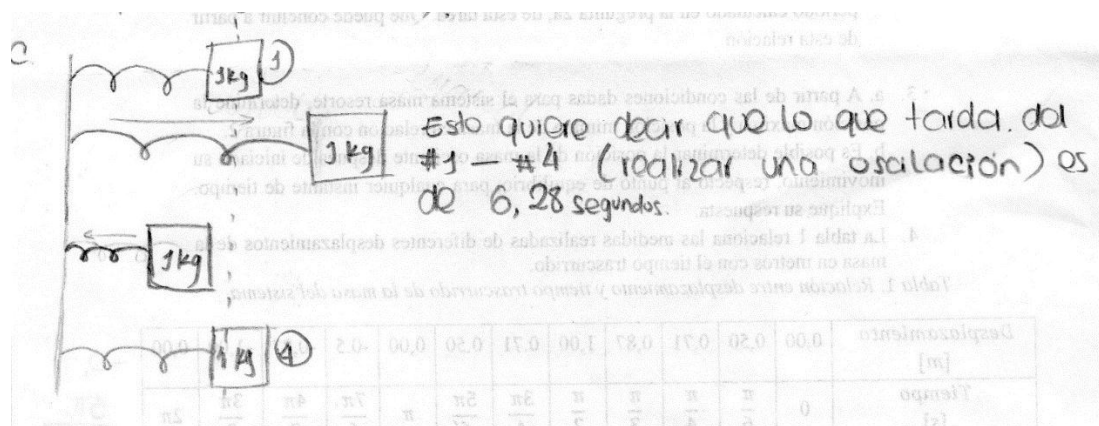


Figura 39. Comparación entre la representación icónica y lo verbal. Pregunta 2 c.

En general, esta variación que emerge de la situación relaciona diferentes representaciones, elementos de la física y del concepto matemático de periodo; por tanto, los estudiantes han llevado su noción de periodo a un nivel de comprensión general al utilizar la secuencia, periodo por periodo, para caracterizar la recurrencia de determinado fenómeno; en otras palabras, su proceso de matematización vertical, a través de la reflexión entre pares y docente propicia la interpretación de la situación en términos matemáticos que muestra poca dependencia al contexto.

3. a. A partir de las condiciones dadas para el sistema masa resorte, determine la posición máxima y la posición mínima de la masa en relación con la figura 2.
- b. Explique si es posible determinar la posición de la masa oscilante después de iniciado su movimiento, respecto al punto de equilibrio, para cualquier instante de tiempo.

Tabla 40. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 3a y 3b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. 1: máximo; -1: mínimo.	Es el máximo y el mínimo desplazamiento que puede realizar la masa atada al resorte	8
	b. Si es posible.	Al conocer el tiempo transcurrido se sabe en qué posición está la masa.	7
Tipo II	b. Si es posible.	Al reemplazar en la ecuación: $x = A \cos \omega t$	1

De la tabla 40 se analiza que los estudiantes responden que el máximo y el mínimo, corresponden tanto a la elongación como contracción máximas y mínimas del resorte; es decir

que su máximo es 1 m y su mínimo es -1 m. En este literal, los estudiantes utilizan la representación icónica al momento de explicar el máximo y mínimo de la situación pues los 8 estudiantes acuden a la figura 1 y la representación realizada en la pregunta 1 para mostrar tales valores.

Dado que los 8 estudiantes coinciden en las respuestas relativas al máximo y mínimo del movimiento y en las plenarias se sostienen afirmaciones que dan razón de elementos asociados al desplazamiento de la masa en el tiempo, se afirma que los estudiantes movilizan las nociones tanto de dominio como de rango de la función, elementos que permiten el estudio de estas características variacionales.

En cuanto al literal b, 7 de los 8 estudiantes responden que sí es posible determinar la posición de la masa oscilante después de iniciado su movimiento. En plenaria explican que esta posición depende del tiempo transcurrido para ubicarse en la trayectoria mostrada en las representaciones icónicas de la tarea y la pregunta 1. Es de notar que los estudiantes movilizan la noción de relación matemática en tanto subordinan una variable a la otra; no obstante no realizan un reconocimiento explícito de una expresión algebraica o de un valor determinado para algún reemplazo u operación matemática. Aunque, resaltan la importancia de tener el valor inicial de tiempo para saber predecir la posición de la masa en este instante. lo anterior permite argumentar que los alumnos hacen explícita la dependencia al tiempo de la posición de la masa pero no reconocen el carácter funcional de esta relación.

Por tanto, desde el enfoque de la EMR en su proceso de matematización progresiva se afirma que los 7 estudiantes utilizan la reflexión y la interacción entre pares para interpretar las dependencias funcionales del sistema masa resorte asociadas al dominio, rango y la correlación del tiempo con el desplazamiento desde sus saberes pero no llegan a grados de generalización que les permita identificar que esta dependencia funcional está asociada a la función seno.

La otra estudiante, por su parte hace explícita la relación funcional asociada a las ondas: $x = A \cos \omega t$ y afirma que al reemplazar en esta ecuación se puede encontrar el valor de la posición dado que se conoce la amplitud y se puede calcular la velocidad angular. Cabe resaltar que esta estudiante acude a elementos propios de la física para comprender el contexto y moverse en un nivel de comprensión referencia dado que logra superar el contexto y mostrar que se puede explicitar una expresión. Es de notar que la expresión no modela la tarea presentada

dadas las condiciones iniciales. No obstante, en los debates con la estudiante ella argumenta que de acuerdo con las condiciones iniciales puede ser seno o coseno. Es de notar que la estudiante muestra saberes trabajados en clase de física, sin embargo no relaciona estos saberes con las condiciones iniciales de la tarea.

4. La tabla 1 relaciona las medidas realizadas de diferentes desplazamientos de la masa en metros con el tiempo transcurrido.

Tabla 1. Relación entre desplazamiento y tiempo transcurrido de la masa del sistema.

<i>Desplazamiento</i> [m]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87	-1,00	0,00
<i>Tiempo</i> [s]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- a. Para una segunda oscilación completa de la masa determine los valores de tiempo asociados a cada desplazamiento dado en la tabla 1.
- b. Explique cómo identificó estos valores.

Para los literales 4a y 4b relacionados con la tabla 1 se muestra la clasificación de las respuestas dadas en la tabla 41.

Tabla 41. Clasificación de las respuestas dadas a las preguntas 4a y 4b.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Representación tabular	Se toman los mismos valores de desplazamiento y se completa con la suma del tiempo dado en la tabla 1 más el periodo 2π s.	8

El análisis de la tabla 41 deja ver que los estudiantes reconocen que el tiempo 2π s representa al periodo, es decir el tiempo en que tarda la masa en realizar una oscilación. Por ende, realizan sumas sucesivas a los valores de la tabla 1 para completar los desplazamientos de la segunda oscilación. En la figura 40 se muestra una de las respuestas dadas por los estudiantes.

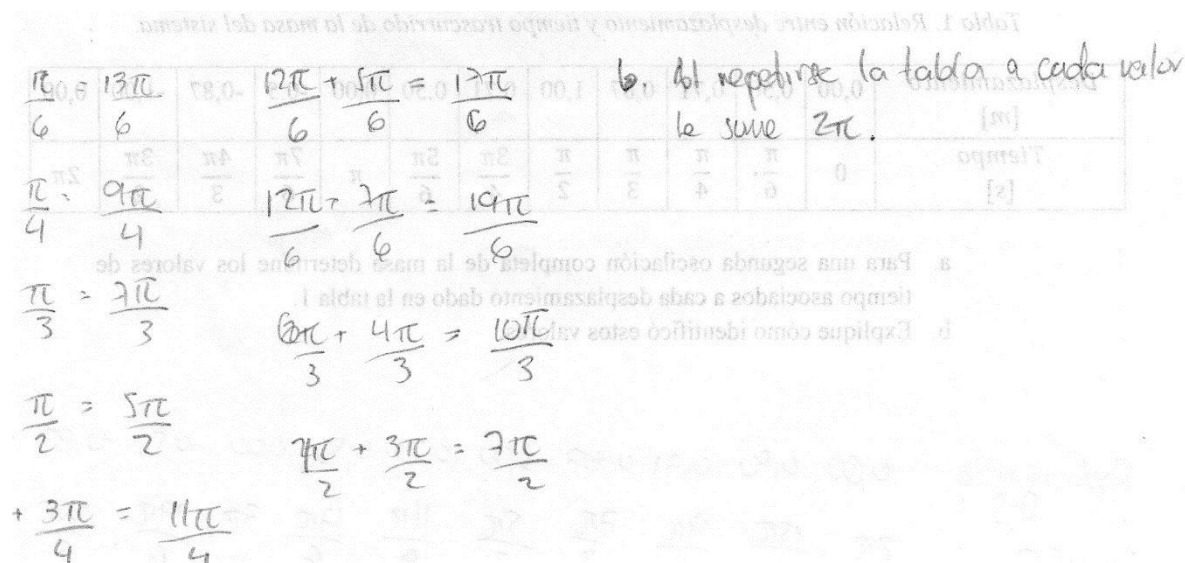


Figura 40. Suma de reales usando la amplificación.

De la figura 40 se observa que este estudiante (también ocurre para los demás) usa el conteo a través de una suma sucesiva. Es de notar que la estrategia usada por los estudiantes muestra el proceso de amplificación de fracciones, la predicción de estos tiempos como tiempo de la siguiente oscilación asociados a un mismo desplazamiento. Desde el enfoque de la EMR, se infiere que el conteo se establece como una estrategia generalizable, dado que se realiza en la primera situación (años bisiestos, estaciones, solsticios y equinoccios), en la segunda situación (conteo por el periodo 2π para la noria) y en esta tarea, donde el estudiante cuenta cada periodo. Dado que el conteo supera el contexto del que surge se categoriza como modelo para explicar diferentes situaciones de variación periódica.

Además, desde el principio de niveles, se afirma que los estudiantes alcanzan el nivel de general, en lo referente al conteo, en tanto logran utilizarlo en diferentes contextos sin heredar propiedades de cada uno de ellos.

5. a. Complete la tabla 2 usando diferentes tiempos asociados a cada desplazamiento dado de la masa del sistema masa resorte.

Tabla 2. Relación entre desplazamiento y tiempo transcurrido de la masa oscilante.

Desplazamiento $X[m]$	Tiempo transcurrido $t [s]$		Desplazamiento $X[m]$	Tiempo transcurrido $t [s]$		Desplazamiento $X[m]$	Tiempo transcurrido $t [s]$	
0,5000			0,7071			-1,0000		
1,0000			0,8660			-0,7071		
-0,5000			-0,8660			0,0000		

- b. Justifique como completó la tabla.
- c. ¿Cuántas oscilaciones tuvo en cuenta para completar la casilla de tiempo transcurrido asociada a cada desplazamiento dado?

La pregunta 5 moviliza la predicción del tiempo para diferentes valores de desplazamiento de la masa en términos del contexto del sistema masa resorte. La tabla 42 clasifica las respuestas obtenidas para estos literales; además, para un tipo de respuesta dadas a los literales asociados a esta pregunta y que elementos matemáticos utilizan para completar la tabla 2.

Tabla 42. Clasificación de las respuestas a la pregunta 5, literales a, b y c.

Tipo de respues ta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiant es
Tipo I	a. Completan la tabla con los valores obtenidos después de sumar $2\pi s$ a los valores de la tabla 1. b. Sumando $2\pi s$ c. 2 o 4 oscilaciones	Sumándole $2\pi s$ a los valores de tiempo dados en la tabla 1 de la tarea 1.	6
Tipo II	a. Completan la tabla con los valores usados en la tabla 1 b. 12 oscilaciones	Sumándole $2\pi s$ a los valores de tiempo dados en la tabla 1 de la tarea 1.	1
Tipo III	a. Completa la tabla con los valores usados en la tabla 1. b. 4 oscilaciones	Sumándole 360 grados a los valores de tiempos que se muestran en la tabla	1

La tabla 42 muestra tres tipos de respuestas asociadas a la tabla 2 y los diferentes valores de desplazamiento de la masa respecto al punto de equilibrio encontrados por los estudiantes, las estrategias utilizadas para ello y sus justificaciones.

Así, para las clasificaciones tipo I y tipo II los estudiantes recurren a la suma de $2\pi s$ para encontrar diferentes valores de tiempo; uno de ellos realiza una predicción más general al argumentar que basta con sumar el periodo a determinada vuelta para obtener la siguiente. Por otro lado, los de tipo I buscan la respuesta a través del conteo y no utilizan esta estrategia de multiplicación. Desde el enfoque de la EMR, los estudiantes se mueven en un nivel general dado que ambos tipos de respuestas dejan ver que los alumnos usan lo trabajado en tareas anteriores, en lo referente a la noción de periodo (situación 1) y a la variación periódica de periodo $2\pi rad$ (situación 2, tarea 2) y dotan sus estrategias de características generalizables a otros contextos (en este caso, el masa resorte).

Por otra parte, la respuesta tipo III está ligada al contexto de los grados pues la estudiante utiliza la suma de 360 grados para completar la tabla sugerida, decisión heredada de la tarea 2 de la situación 2, relacionada con la noria. Lo que argumenta la alumna es que al sumar por 360 grados los valores de desplazamiento dados en la tabla 1 se pueden obtener los valores de las siguientes oscilaciones. Es de notar que la estudiante numéricamente utiliza el conteo para responder los interrogantes planteados; no obstante, presentar la variable tiempo y el periodo de la variación en términos de 360 *grados* hace explícita la limitación heredada de la tarea de la noria y la joven no desliga su estrategia del contexto del que adquiere características matemáticas del nivel referencial y no reconoce la naturaleza de la variable en juego, en este caso el tiempo y su unidad de medida, segundos.

Por tanto, el análisis de la tabla 42 en términos del enfoque de la EMR, muestra que los estudiantes, en general superan los contextos que enriquecen sus estrategias respecto a la noción de periodo, es decir alcanza un nivel general; no obstante, el reconocimiento del periodo para la mayoría se movilizan en el nivel general; para una estudiante en el nivel referencial.

6. Explique la relación entre el desplazamiento de la masa desde el punto de equilibrio y el tiempo transcurrido.

Para la pregunta 6, las respuestas de los estudiantes se clasifican en un solo tipo presentado en la tabla 43; sus argumentos verbales explican la relación del desplazamiento de la masa respecto al punto de equilibrio.

Tabla 43. Clasificación de las respuestas dadas para la pregunta 6.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	A medida que pasa el tiempo, el desplazamiento varía desde el punto de equilibrio al punto máximo, y así completa una oscilación.	Argumentan la variación en intervalos de crecimiento y decrecimiento sin hacer explícito un valor numérico	8

De esta forma, las explicaciones de los estudiantes dejan ver elemento matemáticos expresados verbalmente, entre ellos el concepto de función y los intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento asociados a la variación del desplazamiento y al tiempo transcurrido. Según los Estándares (2006, p 66), identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula aporta al desarrollo de estrategias que le permite a los alumnos avanzar en el procesos de matematización progresiva. Además, el estudio del cambio aporta al reconocimiento de las funciones no lineales pues se logra analizar y modelar distintos fenómenos, en este caso de naturaleza periódica adaptado del contexto de un sistema masa resorte modelado por la función seno.

En la figura 41 se muestra una de las expresiones verbales usadas por los estudiantes para expresar la variación del desplazamiento de la masa en términos del tiempo transcurrido donde los alumnos reconoce que el tiempo aumenta tanto para los desplazamientos sea positivos como los negativos. Desde el enfoque de la EMR, se analiza la dependencia funcional entre el desplazamiento de la masa respecto al punto de origen y el tiempo transcurrido, expresan los intervalos de crecimiento y decrecimiento en sus argumentos verbales. De donde se resalta que los alumnos logran relacionar la variación del movimiento con los intervalos de variación de la función que lo modela.

6. a medida de que transcurre el tiempo también va aumentando y cuando llega al punto máximo y se devuelve el desplazamiento es negativo pero el tiempo transcurre comúnmente.

Figura 41. Respuesta tipo I, pregunta 6.

De la figura 41 y en general para las demás respuestas, se concluye que los estudiantes logran un reconocimiento de lo funcional, la noción de intervalos de crecimiento y decrecimiento, desde sus argumentos verbales. Desde el enfoque de la EMR, se afirma que los estudiantes comprenden el contexto, matematizan esta realidad y la dotan de elementos matemáticos para su interpretación.

7. En un plano cartesiano realice la representación gráfica de la tabla 2.

- a. Explique por qué esta representación gráfica corresponde a una función.
- b. Caracterice algunos elementos de la función mostrada en la representación gráfica de la pregunta 7a.

La tabla 44 clasifica en 3 tipos de respuestas lo presentado por los estudiantes para la pregunta 7 respecto a la representación gráfica cartesiana. Más adelante, en la tabla 45 se realiza el análisis de los literales a y b de la pregunta 7.

Tabla 44. Clasificación de respuestas dadas al numeral 7

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Representación gráfica cartesiana de la función seno.	Recurren a la representación gráfica cartesiana de la función seno	5
Tipo II	La gráfica que realizan no corresponde a la representación cartesiana de la función seno.	Recurren a la representación gráfica cartesiana de una función sinusoidal	1
Tipo III	No realizan la representación gráfica	No realiza una representación gráfica cartesiana.	2

De la tabla 44, el tipo I hace referencia a 4 estudiantes que utilizan la representación gráfica de la función seno, en la figura se muestra una de las 4 respuestas.

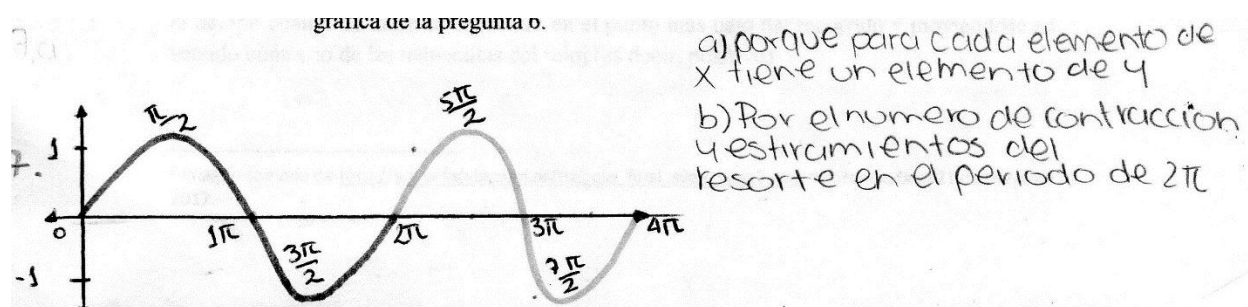


Figura 42. Respuesta tipo I relacionada con la pregunta 7.

De la figura 42 se afirma que las respuestas tipo I muestran la variación del desplazamiento de la masa respecto al tiempo transcurrido, el máximo y el mínimo de la representación gráfica de la función y el intervalo mínimo en el que se repite la función 2π . Así, los alumnos prueban y muestran regularidades asociadas a las variables, refinan y ajustan sus modelos, tales como el conteo y la representación tabular y logran combinar e integrar los en la representación gráfica de la función seno. (MEN 2006, p 77).

Asimismo, en la figura 43 se muestra una de las representaciones gráficas clasificada en el tipo I, no obstante se puede observar una incongruencia en el máximo de gráfica. En debate con este alumno se identifica que esta se debe a un error en la asignación de los valores en la escala del eje de las ordenadas. Por ello, esta respuesta es incluida en las de tipo I dado que, aunque el estudiante argumenta una imprecisión en la escala del eje y , reconoce la variación del desplazamiento de la masa respecto al tiempo transcurrido y la covariación ambas variables.

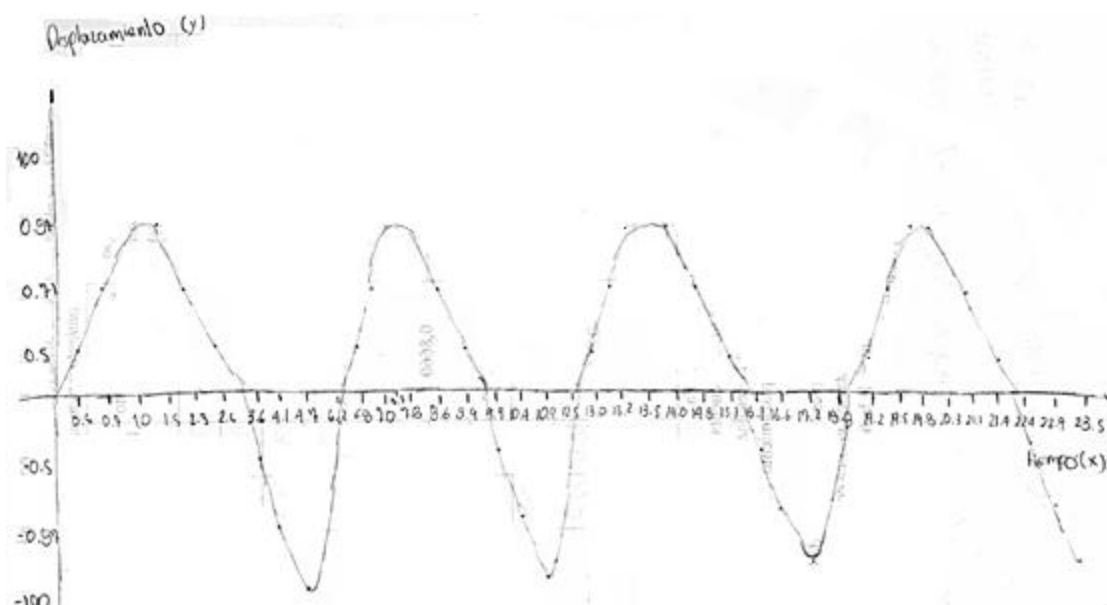


Figura 43. Respuesta tipo I, pregunta 7.

Por otra parte, de la figura 43 deja ver que el estudiante hace una aproximación decimal al valor de la abscisas y muestra que cada 6,28 s se repite la gráfica, además realiza la asignación de variables a los ejes y reconoce que esta representación gráfica corresponde a la función seno.

Desde el enfoque de la EMR, se concluye que los estudiantes cuyas respuestas se clasifican como tipo I se mueven en un nivel general dado que dotan su contexto de elementos matemáticos que se puede utilizar en diferentes situaciones realistas y logran diferentes procesos asociados a la matematización vertical, tales como la generalización y el uso de diversos modelos: la representación tabular, el conteo y la representación gráfica de la función seno.

Por otra parte, para la respuesta tipo II mostrada en la tabla 44 se tiene en consideración la representación gráfica de la figura 44, de la que se puede inferir que la estudiante reconoce la variación sinusoidal de la tarea; sin embargo presenta dificultades al momento de asignar los valores a la escala de las abscisas.

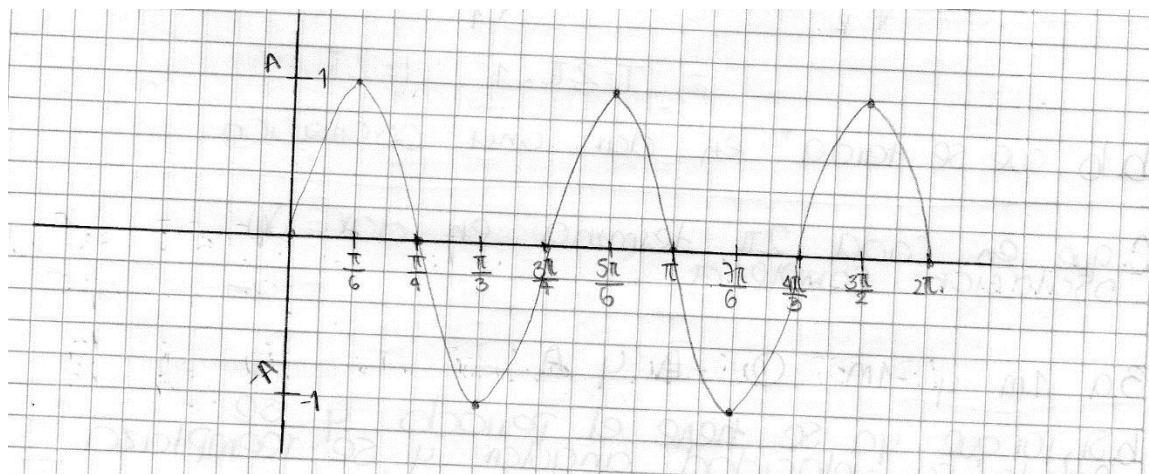


Figura 44. Respuesta tipo II, pregunta 7.

Desde el enfoque de la EMR, esta estudiante al realizar la representación gráfica que no corresponde a la situación del movimiento del sistema masas resorte y no explica la dependencia entre ambas variables. Es de notar que esta representación gráfica corresponde a la función sinusoidal. Es de notar que la estudiante cambia las condiciones iniciales del problema. Así su interpretación no se desliga de la representación icónica y logra movilizarse en un nivel referencia.

Cabe resalta, desde los Estándares (2006, p 68), que el trabajo aritmético realizado a través del conteo: cada cuatro años para los años bisiestos, cada año para las estaciones, los solsticios o los equinoccios y cada 360° , $2\pi\text{rad}$ o $2\pi\text{ s}$ para los ángulos barridos por la cápsula de la noria y los tiempos del sistema masa resorte; las representaciones tabulares y la gráfica de la función seno para los 7 estudiantes tanto del tipo I como del II, caracterizan aspectos de la variación tales como lo que cambia, lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación y las relaciones entre las variables. Desde el enfoque de la EMR, el conteo es una estrategia generalizable a las situaciones periódicas trabajadas en la propuesta.

Las respuesta tipo III muestra dos representaciones dadas que comparan una oscilación con un trazo en el plano cartesiano. Es de notar que no realiza una comparación entre lo que plantea la situación y lo que indaga la pregunta, por el contrario, define una oscilación como el desplazamiento de la masa desde el punto de equilibrio, llegar al punto máximo y su regreso –lo que corresponde a media oscilación–

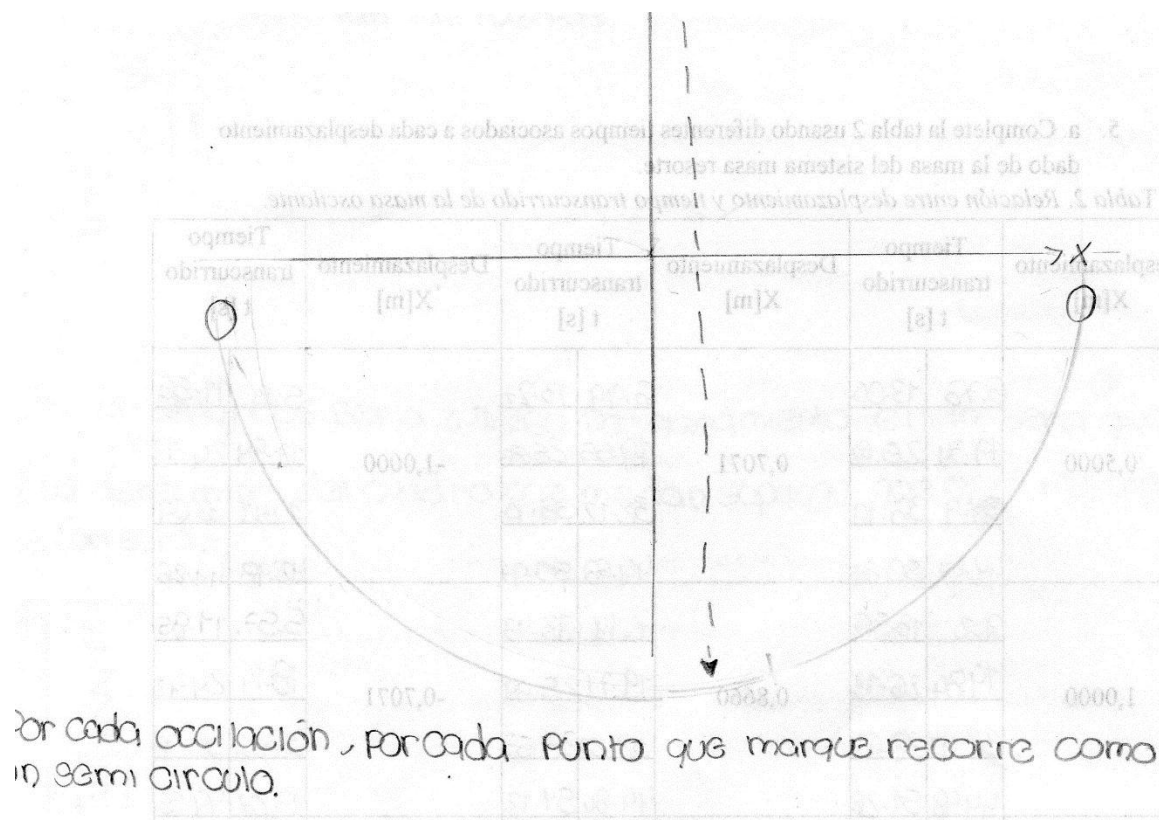


Figura 45. Representación gráfica de respuesta tipo II

Por tanto, para la respuesta referenciada en la figura 45 se afirma que la estudiante no responde al interrogante dado en la pregunta 7; en cambio, realiza una relación entre el masa resorte y un semicírculo que no da razón de la variación de la masa ni de la dependencia funcional de las variables. Desde el enfoque de la EMR, se concluye que la respuesta está limitada por una interpretación literal del contexto del que surge (el movimiento de la noria) las representación gráficas cartesianas para esta propuesta y no se realiza el cambio de lo circular a lo funcional. En otras palabras, esta respuesta deja ver que el movimiento de la noria a través del cual se introduce la dependencia funcional de las variables en juego, la circunferencia limita a la estudiante en su proceso de desligarse del contexto y hereda las características del mismo para explicar la interpretación funcional de la función seno.

La otra respuesta del tipo III asociadas a la pregunta 7, mostrada en la figura 47 deja ver que la estudiante presenta una curva que relaciona algunos tiempos presentados en la tabla 2, de esta tarea, asociada a cada uno de los desplazamientos x –en metros- de la masa atada al resorte propuestos en la misma.

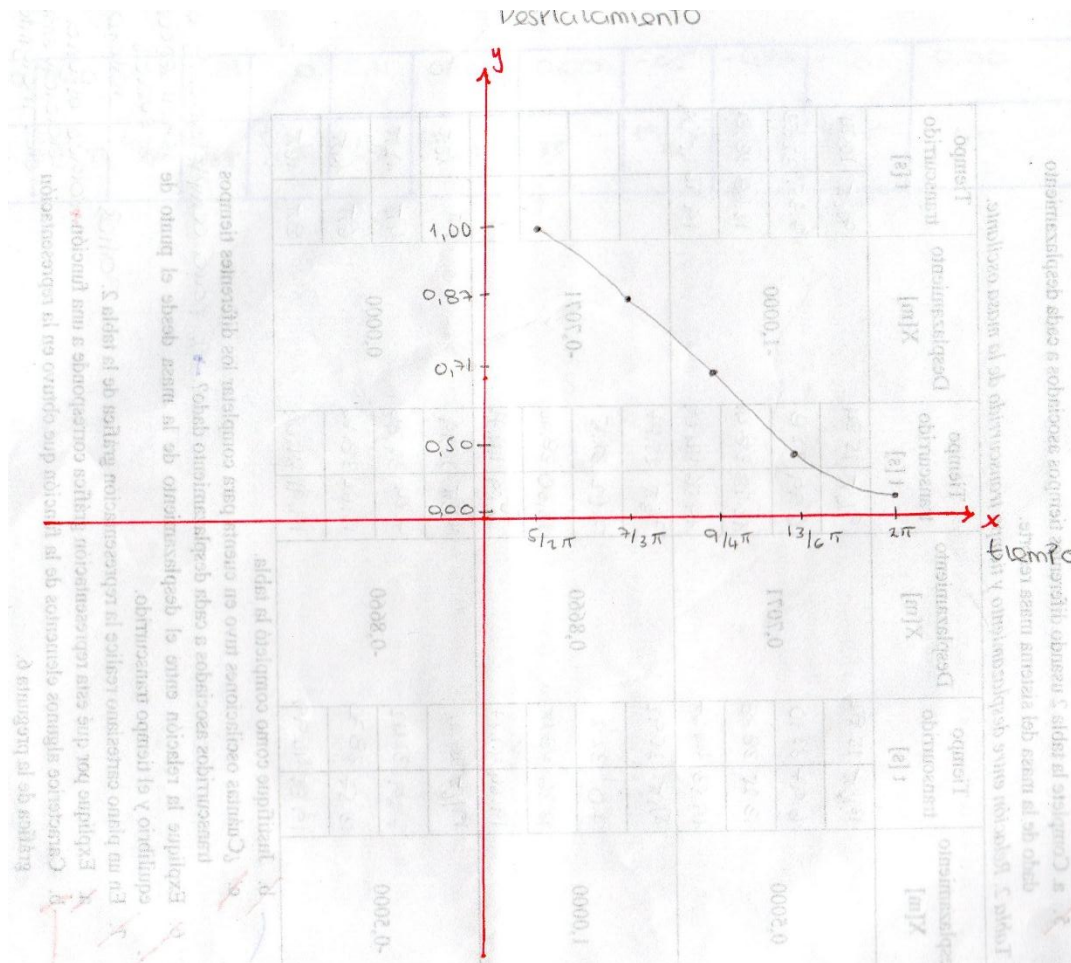


Figura 46. Representación gráfica respuesta tipo II

Además, deja ver que no hay un reconocimiento de la periodicidad en la gráfica, además de la asignación del eje de las abscisas donde se muestra la falta de una escala adecuada para poder observar esta propiedad.

El análisis realizado para la pregunta 7, en relación con la representación cartesiana, muestra que para las respuestas asociadas al tipo I, esta estrategia permite que los 5 estudiantes se movilicen en un nivel general, dado que han superado el contexto del que surge la variación sinusoidal del sistema masa resorte. Por otra parte, la tipo II no responde acertadamente a los interrogantes y representan gráficamente un cambio que no se interpreta como la variación de la función y no hacen explícitos elementos de la función seno como el periodo de la función a través de la representación cartesiana. Para el caso de las respuestas tipo III, ambas estudiantes no llegan a la representación gráfica cartesiana de una función que modele al movimiento del

sistema masa resorte ni lo explican en términos de las variables: desplazamiento y tiempo transcurrido.

Tabla 45. Clasificación de los literales a y b asociados a la pregunta 7.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. Porque cada elemento de x tiene un elemento de y	a. Si se traza una línea vertical, solo corta a la curva en un punto	7
	b. El tiempo siempre aumenta y el desplazamiento depende del tiempo transcurrido	b. El desplazamiento de la masa depende del tiempo transcurrido.	
Tipo II	No se realiza una respuesta coherente	No se toma en cuenta en el análisis esta respuesta.	1

La tabla 45 deja ver que en las respuestas tipo I los estudiantes resaltan la relación funcional entre las dos variables en juego, la unicidad de la preimagen necesaria para ser función, la estrategia de la línea vertical para comprobar gráficamente si determinada curva es función o no y características de la gráfica: máximos, mínimos y periodo. Es de notar que solo 1 estudiante de los 7 hizo explícito el nombre de la función seno en sus argumentos.

Por tanto, se concluye que los estudiantes en la tarea 1 de la situación 3, logran movilizar características matemáticas propias de las funciones periódicas, particularmente de la función seno, tales son: su periodo, el máximo, mínimo, punto de corte con el eje de las ordenadas y la relación entre ambas variables. También que la interpretación del contexto presentado -sistema masa resorte- por parte de los estudiantes les aporta elementos que son susceptibles a ser modeladas por la función seno y generalizables a diversas situaciones de variación periódica que se puedan relacionar con la función seno, tal como otros movimientos armónicos simples. Desde el enfoque de la EMR, se hace explícito como la mayoría de los estudiantes logran desarrollar estrategias generalizables y moverse en el nivel general ya que manipulan los saberes matemáticos, este es el nivel general, según el principio de niveles del enfoque de la EMR.

Así pues, aunque no todos llegan a la representación gráfica cartesiana de la función seno, es de notar que hace parte de sus argumentos algunas características de la función seno, en tanto emplean: sus máximos, mínimos y periodo; esta destreza de los alumnos para matematizar el contexto deja ver la matematización progresiva, según la EMR, puesto en sus justificaciones se identifican modelos probados, refutados y dotados de generalización a través de la interacción con la realidad, con los pares y con la guía del docente.

Tarea 2: El péndulo simple

El péndulo simple consta de una masa, medida en kilogramos, atada al extremo libre de una cuerda que está sujeta en un soporte, como muestra la figura 3. Esta cuerda (de masa despreciable) de longitud l está medida en metros. Las oscilaciones de la masa muestran un movimiento periódico (cuando se desprecia el aire y se realizan las oscilaciones con un ángulo menor de 30°) gracias al efecto de la fuerza de gravedad de la tierra, o el planeta donde se quiera imaginar la situación ideal del péndulo simple. La gravedad se toma como $9,8 \text{ m/s}^2$. La frecuencia angular de este movimiento está dada por la relación:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La figura 3 muestra un péndulo simple (sin tener en cuenta la fricción).

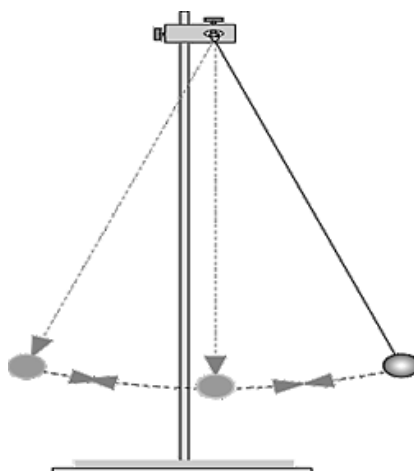


Figura 3. Péndulo simple ideal³¹

Condiciones iniciales del péndulo simple: Para esta situación se va a imaginar un péndulo simple compuesto por una cuerda de $9,8 \text{ m}$ de longitud atada de uno de sus extremos a un soporte (como muestra la figura 3) y con una masa de 3 Kg atada en su extremo libre. Se pone a oscilar el péndulo simple idealizado, buscando no sobrepasar los 30° sugeridos para este tipo de movimiento.

De esta manera, el máximo ángulo desplazado hace referencia a los extremos del péndulo simple (puntos de la trayectoria más alejados del punto de equilibrio). Cuando la variación del ángulo se realiza en sentido de las manecillas del reloj (es decir, la masa oscila hacia la izquierda) se dice que la variación es negativa y viceversa. Después de tener el péndulo simple oscilando se mide el tiempo en que realiza una oscilación. Para ello, se inicia a medir el tiempo cuando la masa se

³¹ Imagen tomada de http://www.fatela.com.ar/trabajo_final_svg/5pag3.htm referenciada el 21 de mayo de 2017.

encuentra en el punto más bajo del recorrido y moviéndose en sentido contrario de las manecillas del reloj (es decir, positivo).

El periodo del péndulo simple se define como el tiempo que tarda la masa en realizar una oscilación completa y depende exclusivamente de la longitud de la cuerda y de la gravedad. Este periodo se representa por medio de la siguiente expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

1. a. Realice una representación gráfica del movimiento de la masa del péndulo simple relacionando los elementos dados en las condiciones iniciales de la situación.
- b. compare esta representación gráfica del péndulo simple con la representación gráfica realizada para el sistema masa resorte en la pregunta 1a.

Para el análisis de la pregunta 1a se presenta la tabla 24 con dos tipos de respuestas dadas por los estudiantes a los interrogantes planteados. De esta forma se recopilan y clasifican los argumentos presentados interpretar el contexto del péndulo simple.

Tabla 46. Clasificación de respuestas dadas a la pregunta 1a de la tarea 2.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Representación icónica del péndulo simple como se presenta en la figura 3.	Usan la figura 3 para dar respuesta al literal a.	6
Tipo II	Representación cartesiana.	Además de usar la figura 3, muestran la representación gráfica usada en la pregunta 7 de la tarea 2, situación 2.	2

El análisis realizado a las respuestas tipo I dadas por 6 estudiantes muestra que para explicar las oscilaciones de la masa atada a la cuerda de longitud 9,8 m, recurren a elementos propios de los MAS (movimientos armónicos simples) como lo son amplitud, punto máximo o

minimo de desplazamiento y punto de equilibrio. En la figura 47 se muestra algunos elementos tenidos en cuenta, en general, por los estudiantes cuyas respuestas se vinculan al tipo I.

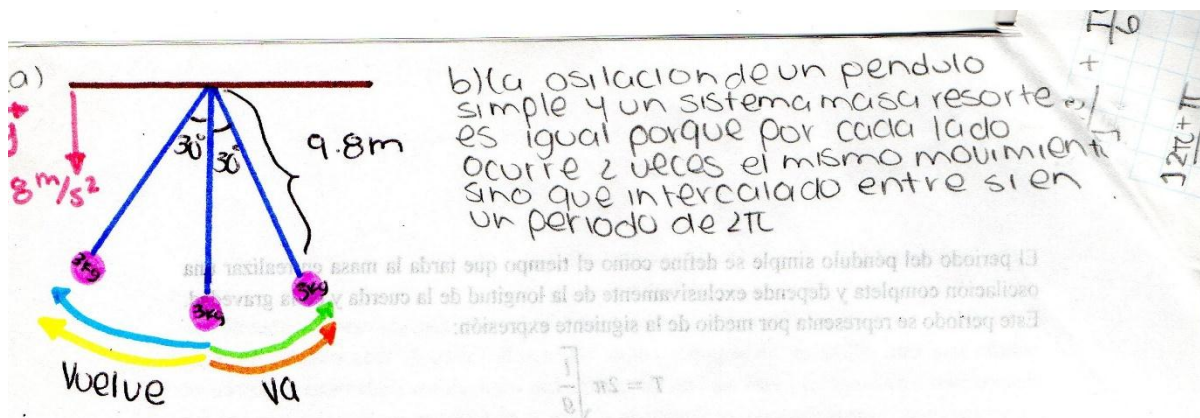


Figura 47. Respuesta tipo I, pregunta 1a.

La figura 47 muestra una respuesta tipo I donde la estudiante analiza el movimiento de oscilación del péndulo simple en términos de la posición de la masa respecto al punto de equilibrio. Desde el enfoque de la EMR, se analiza la comprensión de la realidad ya que en las respuestas los alumnos, particularmente la mostrada en la figura 47, retoman elementos disciplinares tanto de la matemática como de la física: el periodo 2π , máximos, mínimos, la gravedad, una oscilación, masa y longitud de la cuerda.

En relación con las respuestas tipo II, la figura 48 compara una función sinusoidal con la representación icónica del péndulo simple; no obstante, la asignación de la escala del eje de las abscisas no es adecuada. Por ello, se propicia una plenaria, en torno a las respuestas tipo I y II, donde los alumnos asocian este movimiento oscilatorio con la función seno y sus características matemáticas: máximos, mínimos, intervalos de crecimiento, de decrecimiento, periodo y covariaciones.

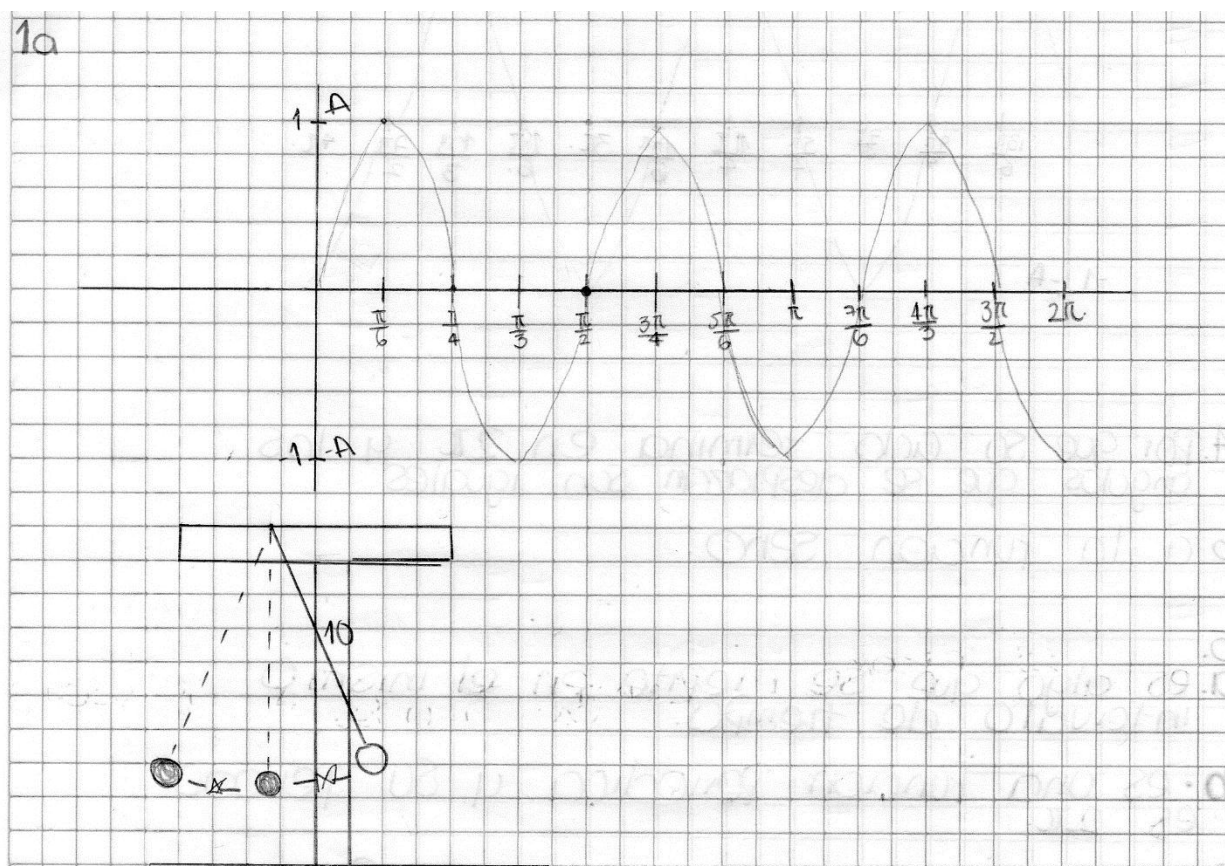


Figura 48. Respuesta tipo II, pregunta 1a.

Además, la figura 48 muestra la relación entre ambas representaciones dado que la estudiante asocia el máximo desplazamiento de la masa del péndulo simple respecto al punto de equilibrio, con el máximo de la representación gráfica cartesiana. Desde el enfoque de la EMR, las respuestas tipo II comparan diversas representaciones para comprender la realidad y buscar modelos que den razón tanto de esta tarea como de otras tareas similares.

La otra respuesta que se vincula al tipo II muestra la representación cartesiana de la figura 49, que deja ver que la estudiante no reconoce gráficamente la periodicidad del movimiento. Aquí vale la pena hacer una digresión, dado que la estudiante logra el reconocimiento de lo periódico en términos verbales; sin embargo, no lo hace explícito en la representación gráfica cartesiana mencionada.

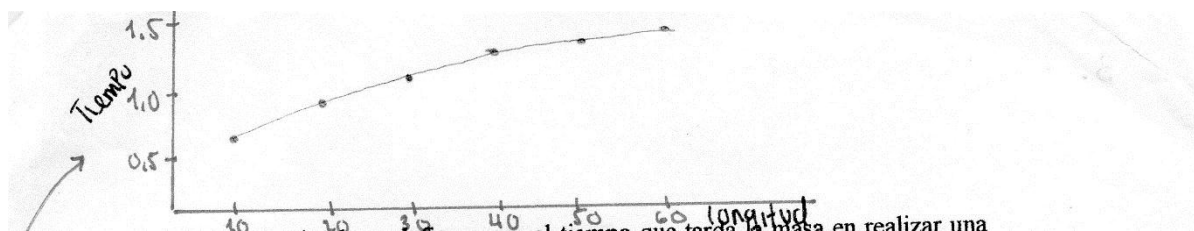


Figura 49. Respuesta tipo II: representación cartesiana

Se observa de la figura 49 que la estudiante asigna al eje de las ordenadas el tiempo y lo toma como la variable dependiente, la longitud (el desplazamiento de la masa respecto al punto de equilibrio del péndulo simple) la vincula al eje de las abscisas y no se hace explícita la variación periódica del movimiento del péndulo simple.

Del análisis realizado a la pregunta 1a se concluye que los 8 estudiantes comprenden el contexto del péndulo simple, lo identifican como un movimiento oscilatorio y muestran elementos tanto de la matemática como de la física. Desde el enfoque de la EMR, se puede afirmar que la mayoría de los alumnos se mueven en un nivel general respecto a la noción de periodo, ya que reconocen el periodo de las estaciones, años bisiestos, solsticios, equinoccios, movimiento de la capsula de la noria, sistema masa resorte y péndulo simple; pero, respecto a la representación cartesiana de la función seno en un nivel referencial dado que no logran el paso de lo tabular, algebraico y situacional a los gráfico cartesiano.

Para el literal b se tiene que los 8 estudiantes comparan el péndulo simple con el sistema masa resorte a través de las características de la función seno y lo generalizan a otros movimientos armónicos simples que cumplan con las condiciones iniciales. En decir, sostienen que el periodo del péndulo simple es igual a 2π , el máximo y el mínimo es 1 y -1 respectivamente; que ambos son sucesos periódicos, el tiempo en que realizan una oscilación. Como se dijo en la pregunta 1a, no se asocia directamente la gráfica de la función seno al contexto del péndulo simple aunque ya se reconoce que este fenómeno es modelado por tal función.

Es así como, a partir del enfoque de la EMR, los estudiantes se encuentran en un proceso de matematización progresiva, dado que logran relacionar los elementos dados en cada una de las situaciones propuestas, entre ellos prevalece el conteo por 2π en sus diferentes unidades de medida de acuerdo con el contexto, el uso de la representación icónica que se usa en la tarea para hacer explícitos elementos propios del contexto, lo tabular generado por el conteo y los argumentos verbales en los que predominan características variacionales de la función seno movilizadas y analizadas a lo largo del capítulo 3.

2. En la tabla 3 se presenta la relación entre el ángulo desplazado y el tiempo transcurrido en una oscilación del péndulo simple.

Tabla 3. Relación entre ángulo desplazado y tiempo transcurrido para el péndulo simple.

Ángulo desplazado [A]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87	-1,00	0,00
tiempo [s]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- a. Para una segunda oscilación, encuentre los valores de tiempo transcurrido para los ángulos propuestos es la tabla 3.
- b. Se puede afirmar que el movimiento del péndulo simple corresponde a la misma relación matemática que modela el sistema masa resorte. Justifique su respuesta.

Para el análisis de los interrogantes, asociados a la tabla 3, se introduce la tabla que categoriza las respuestas dadas por los estudiantes, quienes referencian lo trabajado en el sistema masa resorte y comparan lo realizado en la tabla 1 pregunta 4 con estos literales para identificar desde lo tabular que ambos MAS (movimientos armónicos simples) son modelados por la función seno a través de estas representaciones tabulares.

Tabla 47. Clasificación de las respuestas relacionadas con la tabla 3.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. Representación tabular.	a. Se realiza una representación tabular con los valores de tiempo después de sumarle $2\pi s$ a los valores de la tabla 3	8
	b. Si.	b. Si, ambas situaciones se pueden modelar por medio de la función seno	

Desde la EMR, el uso de diferentes estrategias que los estudiantes logran generalizar a diferentes contextos permite el estudio de la matematización progresiva desde el principio de niveles; así, la tabla 47 deja ver que los alumnos asocian los contextos: masa resorte y péndulo simple con la función seno en su representación tabular. Es decir, matematizan el contexto, lo organizan desde los saberes matemáticos trabajados en las situaciones 1 y 2; también, generalizan la representación tabular de la función seno y la relacionan con el conteo por 2π . Cabe resaltar que una de los estudiantes afirma que no importa que variable sea, siempre que se cumpla la misma dependencia, mismas características matemáticas tales como periodo, máximos, mínimos, puntos de corte, intervalos de crecimiento y dependencia; lo que disciplinalmente muestra una noción de igualdad matemática entre funciones. Es decir, si f y g son funciones reales, se dice que:

$$f = g \text{ si y solo si}$$

para todo x que pertenece al dominio de f ;

$$f(x) = g(x)$$

De esta manera, la propuesta se inicia en la situación 1, donde se analiza la periodicidad de sucesos como los años bisiestos, las estaciones del año, los equinoccios y los solsticios; luego en la situación 2, con la periodicidad del movimiento de la cápsula de la noria, para llevarlos a matematizar el contexto (Freudenthal, 1991, citado pro Bressan et. al. 2016) desde sus diversas estrategias. Además, desde el principio de niveles, los alumnos superan los elementos del contexto y se generaliza a otras situaciones, tareas y realidades a través de la representación tabular y al conteo. Es decir ambas estrategias se categorizan como “modelos para”.

3. En un plano cartesiano realice una representación gráfica del ángulo desplazado respecto al tiempo transcurrido para 2 oscilaciones del péndulo simple. Explique qué elementos tuvo en cuenta para elaborar esta representación gráfica.

El análisis de este numeral se realiza a partir de la tabla 48 en la que se clasifican las respuestas en 3 tipos respecto a la representación gráfica mostrada por los estudiantes.

Tabla 48. Clasificación de respuestas para el numeral 3.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Representación cartesiana de la función seno	Dado que la función seno explica el movimiento del péndulo simple.	5
Tipo II	Argumentos verbales que referencian a la función seno	No se realiza la gráfica dado que es la misma que se realiza en la tarea 1 para el sistema masa resorte.	2
Tipo III	Representación cartesiana de una semicircunferencia	La gráfica se repite cada 2π y es circular.	1

A partir de las respuestas de la tabla 48 se infiere que 5 estudiantes establecen una relación entre la representación icónica de la pregunta 1, la representación tabular dada en el interrogante 2 y la representación gráfica cartesiana que se busca en esta pregunta con los elementos propios

del sistema masa resorte (tarea 1), en tanto en sus argumentos referencian características propias de la función seno como lo son su periodo, máximos, mínimos, periodo y frecuencia.

La figura 50 muestra una de las respuestas asociadas al tipo I, en la que el estudiante usa el mínimo, máximo, la gráfica de la función seno y su intervalo de tiempo en el que se repite; cabe resaltar que en lugar de hacer explícito el periodo 2π en la escala del eje de las abscisas escribe la letra T asociada desde la física al periodo del movimiento. Además en sus argumentos verbales muestra que tanto para el sistema masa resorte como para el péndulo simple se utiliza la función seno.

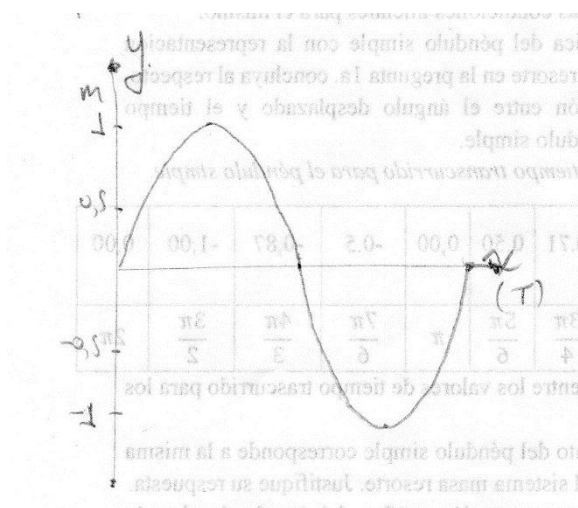


Figura 50. Respuesta tipo I, pregunta 3.

La figura 50, al igual que las demás respuestas tipo I, deja ver que los 5 alumnos toman la gráfica de la función seno como una estrategia que se desliga del contexto y se utiliza para dar razón de otras tareas; por ello esta estrategia adquiere elementos generalizables y la utilizan como modelo para explicar diferentes sucesos de naturaleza periódica modelados por esta función.

Asimismo, el enfoque de la EMR permite afirmar que estas estrategias de representación y solución incorporan aspectos importantes de la variación reconocidos los Lineamientos (1998, p 49), estos son las tablas (Babilónicas), las gráficas de variación (Oresme en la Edad Media) y las fórmulas algebraicas (de origen renacentista) donde se hace necesario explicar detalladamente los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto las

interpelaciones entre ellos; además, en los conceptos variacionales de la función seno relacionados con la periodicidad, covariación y dependencia.

Las respuestas de los alumnos asociadas al tipo II no presentan las representaciones gráficas cartesianas; según sus argumentos, porque es la misma que se realiza en tareas anteriores (en la situación 2 –movimiento de la cápsula de la noria-, en la pregunta 2 de la tarea 2 y en la situación 3 –sistema masa resorte- tarea 1, pregunta 7) y responde explícitamente a la función seno. Por ende, ambos tipos de respuestas corresponden a la representación gráfica de la función seno y deja ver que los estudiantes asocian el fenómeno del péndulo simple, con el sistema masa resorte y la noria a través de esta representación.

Desde el principio de niveles, las respuestas asociadas a los tipos I y II presentados en la tabla 48 se vinculan a las representaciones tabular y gráfica cartesiana de la función seno como modelos para explicar diferentes contextos que presentan una periodicidad de 2π , cuyas variables tengan una covariación sinusoidal con máximos en 1 y mínimos en -1; en efecto, los estudiantes alcanzan el nivel general en las representaciones tanto gráfica como tabular de la función seno puesto que las utilizan para explicar diferentes tareas en diferentes contextos que llevan al estudio de propiedades variacionales como el periodo, dominio, rango y superan el contexto presentado al afirmar que todo fenómeno que responda a estas mismas características matemáticas es modelado por la tal función.

La figura 51 deja ver la respuesta tipo III y una representación cartesiana dada por la estudiante.

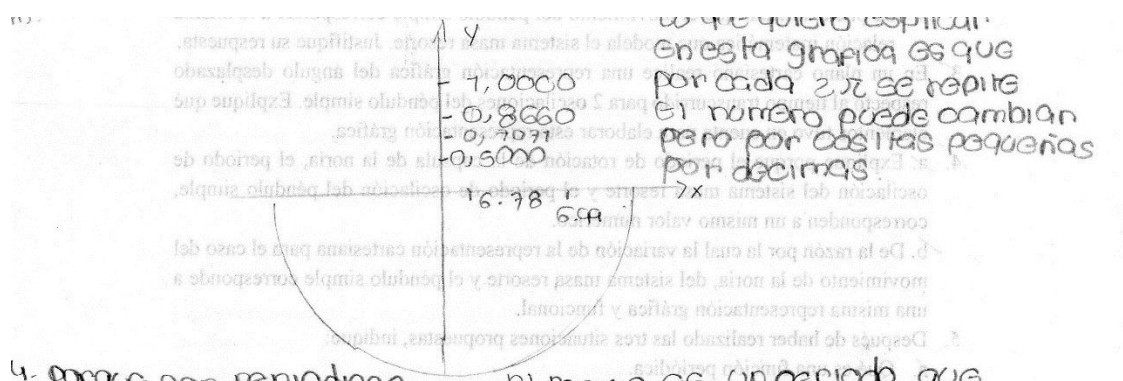


Figura 51. Respuesta tipo III, pregunta 3.

La figura 51 deja ver que la alumna reconoce la periodicidad del movimiento a través de sus argumentos verbales; sin embargo no lo hace en la representación gráfica cartesiana; desde el principio de niveles del enfoque de la EMR, se puede conjeturar la noción de periodo alcanza características generalizables y la utiliza como “modelo para” explicar diferentes situaciones de variación periódica; no obstante la representación gráfica cartesiana queda limitada al contexto de la noria, por ende en un nivel referencial.

4. a. Explique porque el periodo de rotación de la capsula de la noria, el periodo de oscilación del sistema masa resorte y el periodo de oscilación del péndulo simple, corresponden a un mismo valor numérico.
- b. De la razón por la cual la variación de la representación cartesiana para el caso del movimiento de la noria, del sistema masa resorte y del péndulo simple corresponde a una misma representación gráfica funcional.

Para la clasificación de las respuestas que los alumnos dan a la pregunta 4 se introduce la tabla 49 que las agrupa en un solo tipo.

Tabla 49. Clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 4a y 4b

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Porque su periodo es 2π y corresponde a la función seno.	Dado que estos fenómenos tienen el mismo periodo y son los mismos resultados para diferentes variables.	8

La tabla 49 deja ver que los estudiantes afirman que el periodo en cada una de las situaciones, independientemente del contexto, es el mismo, es decir 2π y se repite dado que los fenómenos presentados por las situaciones responden a movimientos periódicos que son modelados por la función seno.

Desde el principio de interconexión, se afirma que la relación entre los contextos seleccionados desde la Física y la matematización ayuda a los estudiantes a desarrollar

estrategias para resolver las tareas propias de cada situación, al desarrollo de elementos matemáticos, desde los más informales hasta los representados en tablas o gráficos cartesianos y permite a los estudiantes generar sus propias conjeturas en cuanto al trabajo matemático en la escuela, reformular, si es necesario, lo que se tiene establecido en sus saberes previos y comprender aquellos que se dificultan por la enseñanza de la función seno desde una postura clásica, es decir estática.

Para el análisis de las respuestas vinculadas a la pregunta 5, se realiza una tabla para cada uno de los literales presentados a los estudiantes.

5. Después de haber realizado las situaciones propuestas, describa:

a. Qué es una función periódica.

Tabla 50. Clasificación de las respuestas dadas al literal a de la pregunta 5.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Es una función que se repite cada periodo.	Es la misma cada periodo.	6
Tipo II	Algo que se repite en un intervalo de tiempo	Es la misma en este intervalo de tiempo	2

Para los 6 estudiantes que responden según el tipo I, una función periódica es aquella que se repite para un valor determinado, este valor se le conoce como periodo. Desde el principio de niveles, en relación con las 3 situaciones, desde diferentes fenómenos de variación periódica, se afirma que los estudiantes dotan de características generalizables la noción de periodo y la toman como un modelo para explicar diversos contextos.

Para el tipo I, 2 estudiantes asocian la variable tiempo al periodo de la función; lo que muestra que los estudiantes asocian la periodicidad con la variable tiempo incluida en el contexto de los años bisiestos, los equinoccios, solsticios, estaciones, sistema masa resorte y péndulo simple. En otras palabras, los estudiantes no desligan la definición de periodo de la variable del contexto; desde el enfoque, hacen de la noción de periodo un modelo de la situación desde un

nivel referencial, en cuanto es dotada de elementos matemáticos, sin embargo está vinculada al contexto del que surge.

Desde el enfoque de la EMR, esto ocurre porque estos estudiantes heredan en la definición elementos propios del contexto realista y no llegan a elementos generalizables, por ende al nivel general. Además, el principio de interconexión de la EMR, que relación diferentes disciplinas orientadas por los Estándares (2006, p 66) desde la inclusión del contexto realista dado que el reconocimiento, la percepción, la identificación, la caracterización de la variación y el cambio aportan al desarrollo del pensamiento variacional cuando se realiza con el vínculo de diversas disciplinas en formación, particularmente la física que provee esta propuesta de contextos realistas modelados por la función seno.

b. Qué es la función seno.

Tabla 51. Clasificación de las respuestas dadas al literal b de la pregunta 5

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Es una función que se repite cada 2π , continua, infinita y periódica	Se toman los elementos trabajados en las 3 situaciones para definir la función seno.	8

La tabla 51 deja ver que los estudiantes retoman lo trabajado en las tres situaciones al exponer que la función seno es aquella que tiene como periodo 2π , es infinita, continua y periódica. En plenaria con los alumnos alrededor de estos saberes matemáticos, se hacen explícitas nociones variacionales asociadas a lo funcional como lo es las funciones infinitas y continuas; así, se argumenta que la función seno modela diferentes situaciones realistas asociadas a contextos de la física, como lo son el sistema masa resorte, el movimiento circular y el péndulo simple. Además, muestran otras características funcionales: los máximos, mínimos, el periodo y corte con el eje de las ordenadas. Esto permite modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las representaciones gráficas y tabulares de la función seno.

Es de notar que, desde el enfoque de la EMR, se busca que los estudiantes autónomamente, con el docente como un guía (Bressan 2011, p 9), logren identificar las variaciones asociadas a lo funcional, particularmente la función seno. Para Santacruz (2016, p 187) esto se logra a través de diferentes sistemas de representación –el tabular, el icónico, el gráfico cartesiano y el verbal- que aportan al reconocimiento del comportamiento repetitivo de la gráfica, la definición de un intervalo mínimo para que se repita la gráfica y el conteo; son aspectos generalizables que se pueden aplicar en otro tipo de situaciones.

c. ¿Por qué la función seno es una función periódica?

Tabla 52. Clasificación de las respuestas dadas al literal c de la pregunta 5.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Es una función que se repite cada 2π .	Porque se puede ver que se repite cada periodo, 2π en las tareas resueltas.	8

La tabla 52 muestra que los 8 estudiantes pueden concluir que a través del estudio de la variación de diferentes sucesos que se pueden modelar con la función seno y sus diferentes representaciones que es periódica dado que se repite en un intervalo determinado, llamado periodo.

Asimismo, afirman que el periodo de esta función es 2π ; es de notar que no hacen referencia a características del contexto como la naturaleza de las variables del periodo, es decir al tiempo y ángulo barrido, por el contrario asumen el periodo como una característica propia de la función; esta capacidad de mostrar lo matemático sin elementos propios del contexto, desde el enfoque de la EMR, se categoriza como una estrategia generalizada del nivel general, ya que los estudiantes a través de un proceso de matematización vertical adaptan la noción de periodo como un modelo para interpretar diferentes contextos.

Por tanto, la inclusión de diferentes situaciones contextos de la física aporta al proceso de matematización vertical dado que los estudiantes logran la reinención de las estrategias

mostradas en las primeras tareas y las dotan de elementos matemáticos de mayor grado de complejidad. De las que se destacan: el conteo, las representaciones tabular y algebraica de la función seno que llevan, no solo al reconocimiento de lo periódico sino a utilizarlas en diversas situaciones de naturaleza periódica modeladas por tal función.

d. ¿Qué tipo de fenómenos físicos pueden ser modelados a través de la función seno?

Tabla 53. Clasificación de las respuestas dadas al literal d de la pregunta 5.

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	Sonido, vibraciones, movimientos oscilatorios (columpio, ventilador, etc) movimientos armónicos simples, péndulo simple, la noria y el sistema masa resorte	Diferentes fenómenos físicos	8

La tabla 53 muestra que los estudiantes afirman que entre los diferentes sucesos modelados por la función seno se destacan los movimientos armónicos simples y los movimientos circulares que responden a las mismas cantidades matemáticas de la función, tales como, periodo, máximo, mínimo, corte con el eje y, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Además asocian los elementos de la función seno a los contextos realistas presentados.

La figura 52 muestra una respuesta en la que la estudiante interpreta que la función seno puede modelar el movimiento del viento en una flauta, los rayos del sol reflejados y refractados por la capa de ozono como cualquier situación que tenga el mismo periodo y que responda a la representación gráfica del seno.

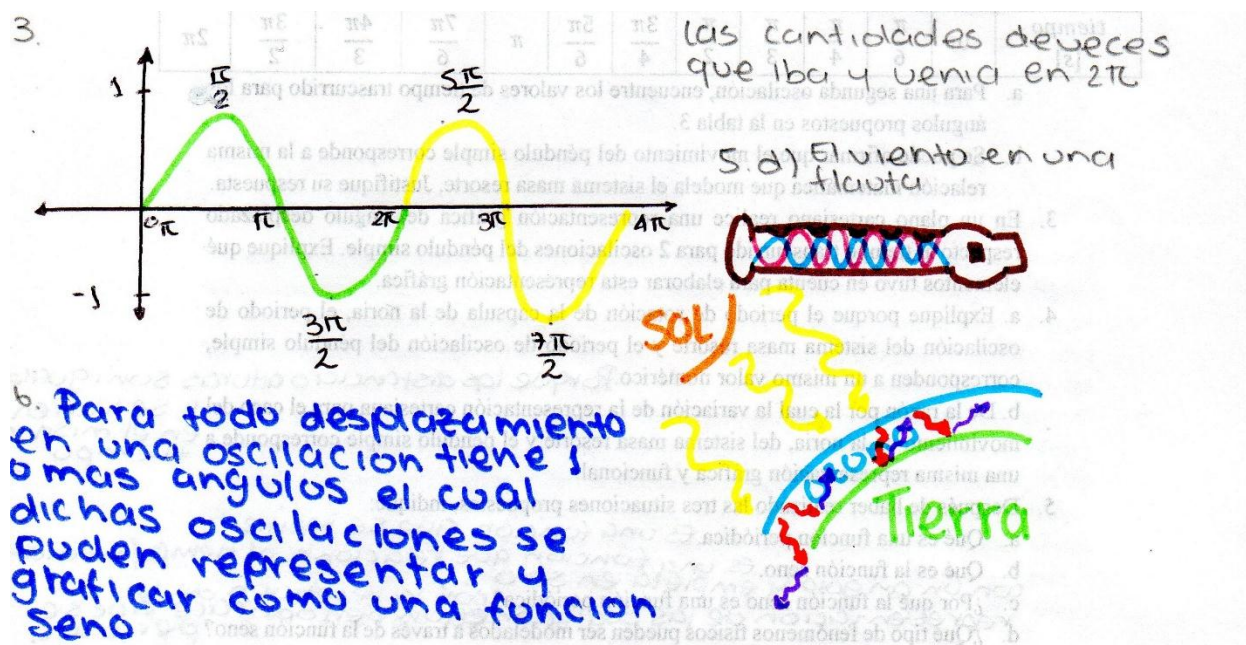


Figura 52. Respuesta a la pregunta 5d asociada a situaciones de la Física.

La figura 52 deja ver que se relacionan diferentes sucesos de la realidad con lo trabajado en las situaciones acerca de la función seno; desde el enfoque de la EMR, Bressan (2006, p 12) sostiene que la interpretación de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y manejo de algunas herramientas matemáticas en diferentes disciplinas. Para el caso de esta propuesta, la física como disciplina de la que se adaptan situaciones para ser modeladas por la función seno.

Además, los otros estudiantes hacen referencia otros elementos propios de su realidad como lo son el movimiento de precesión de la Tierra, el movimiento de un columpio, el movimiento de un ventilador, el torque, interferencia de ondas, movimientos armónicos simples y la onda de sonido.

De esta forma, desde el enfoque de la EMR, en particular el principio de niveles se identifica el proceso de matematización de los estudiantes a partir de sus producciones que dejan ver las estrategias que se han dotado, a través de los procesos de reinención guiada, de elementos generalizables que las llevan a adaptarse de estrategias informales a modelos de, y a su vez, a modelos para, tal es el caso del conteo, la representación tabular y algebraica de la función seno.

Es de notar que el docente es fundamentalmente un guía para el estudiante y su proceso, le aporta los elementos para la reconstrucción o resignificación de conceptos propios de la matemática que se han aprendido, tales como el diseño de situaciones, espacios de discusión tipo plenaria, indagaciones matemáticas en diferentes contextos y la posibilidad de presentar sus reflexiones acerca de las tareas en particular y de sus estrategias para abordar, comprender y resolver lo propuesto.

Además, el principio de niveles de la EMR muestra como los estudiantes utilizan diferentes estrategias a través de las cuales realizan la matematización progresiva. En la primera situación se puede identificar estrategias informales de nivel situacional pues dan respuesta a lo que presenta el contexto y están siempre ligadas a los elementos de la misma. Emerge el conteo, con variaciones en los algoritmos aritméticos, multiplicaciones, sumas sucesivas, asignación uno a uno de valores, y las representaciones icónicas.

Con respecto a los Estándares (2006), el vínculo de otras disciplinas en la enseñanza de la matemática tiene un papel muy importante en el desarrollo del pensamiento matemático, particularmente, el pensamiento variacional. Históricamente, se puede reconocer el cómo desde el estudio de elementos dinámicos – movimientos celestes y periódicos – en la antigüedad permitieron acercamiento al estudio del cambio y la periodicidad de algunos sucesos; luego el trabajo con las gráficas que muestran variaciones –propuestas por Oresme- hasta la actualidad con el desarrollo del cálculo diferencial e integral en las variaciones y el cambio.

6. Puesto que la función seno, $f(x) = \text{sen } x$, es periódica y modela el movimiento de la capsula de la noria, el sistema masa resorte y el péndulo simple, halle:
 - a. Para qué valor de p se cumple que: $\text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + p \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donde $p \in \mathbb{R}^+$, si se conoce que $\text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - b. Otros valores de x que verifiquen la expresión: $\text{sen} (x + p) = \text{sen } x$. Donde p es el periodo de la función.

Las respuestas asociadas a los literales a y b de la pregunta 6 se clasifican en la tabla 54.

Tabla 54. clasificación de las respuestas dadas a los literales a y b de la pregunta 6

Tipo de respuesta	Respuesta dada	Explicación de la respuesta	Número de estudiantes
Tipo I	a. $\text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
	$\text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Porque cada 2π se vuelve a repetir el valor.	8
	b. $\text{sen} (3 + 2\pi) = \text{sen} (3)$		

La tabla 54 deja ver que los 8 estudiantes reconocen la variación periódica de la función seno a través de su expresión algebraica dado que conocen que su periodo es 2π y que el valor de la función se repite. Así, en el literal a, los alumnos dejan ver que la noción de periodo adquiere elementos generalizables que la ubican en un nivel de comprensión general en tanto, se desvincula del contexto y de la variable que le da origen (el tiempo).

Así, los estudiantes para el literal a utilizan tanto el 2π como el 360 grados para referirse a la igualdad: $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + p)$, argumenta que la función se repite según su periodo y que se puede usar tanto el 2π como un múltiplo entero del 2π para encontrar un mismo valor. Es decir los alumnos reconocer que la función seno tiene infinitos valores para los cuales se cumple la expresión dada.

En la figura 53 se muestra una de las respuestas dadas por los estudiantes donde realizan diferentes reemplazos en las expresiones algebraicas propuestas en la pregunta. También, muestra otras características de la función seno: dominio, rango y periodicidad.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3} + 8\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

• para cada 2π se cumple $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ intercambiando el signo en $\frac{\pi}{3}$ para que sea continua.

$\text{sen } x = \text{sen}(x + 2\pi)$
 $\text{sen } 3 = \text{sen}(3 + 2\pi) = 0,14$

• x puede tomar cualquier valor al período ser 2π y estar fijo en la función del $\text{sen } x$. (el período no varía se repite cada 2π , lo máximo y mínimo en y en $[1, -1]$ mientras que en x le damos cualquier valor agregándole el período cada 2π y se repetirá en la misma cada 2π ejemplo.)

Figura 53. Respuesta tipo I asociada a la pregunta 6.

Desde el principio de niveles, los estudiantes llevan la representación algebraica al nivel general dado que supera los contextos en los cuales se moviliza a través de las 3 situaciones. Por ende, la expresión algebraica $f(x) = \text{sen } x$ es un modelo para explicar diferentes situaciones de variación periódica modeladas por tal función.

Para el cálculo de estos valores numéricos y su aproximación decimal, los estudiantes recurren al uso de la calculadora. Es de notar que en la situación 2 (tarea 2 pregunta 9) los estudiantes realizan este mismo procedimiento con dificultades en la interpretación de los grados y los radianes. En este caso, superan este problema y realizan un uso adecuado tanto de las unidades como de la calculadora.

7. Realice algunas conclusiones matemáticas que vinculen el trabajo realizado en las tres situaciones (años bisiestos, estaciones del año, movimiento de la capsula de la noria, sistema masa resorte y péndulo simple).

Los estudiantes concluyen de acuerdo con lo trabajado en las tres situaciones y relacionan los sucesos del contexto con la periodicidad en general; de lo que se puede inferir que logran reconocer una definición de periodicidad desde el contexto y la aplican a otras situaciones realistas de variación periódica como se presenta en la pregunta 5 de esta tarea. Es decir, los estudiantes reconocen el periodo, en primer lugar, como un elemento propio del contexto y lo utilizan para solucionar interrogantes relacionados con el mismo; lo que corresponde, desde la mirada del enfoque de la EMR, a una estrategia propia del nivel de comprensión situacional dado que a través del conteo se matematiza el contexto –matematización horizontal- para la situación 1. Luego la situación 2, deja ver como los estudiantes toman esta noción de periodo en un nivel referencial, con elementos matemáticos ligados a las representaciones tabulares y algebraicas de la función seno

Desde el enfoque de la EMR, se analiza que todos los estudiantes logran la matematización del contexto a través de diversas estrategias y las adaptan a través de elementos matemáticos para reformularlas y reinventarlas para dar razón de diferentes situaciones. Además, los contextos tomados de la física facilitan el manejo de elementos matemáticos como el periodo, continuidad y rango, dado que se hace explícito en las condiciones iniciales del contexto y se logra movilizar estrategias que adquieren características generalizables a otras tareas en otras situaciones problemas.

Por tanto, el análisis realizado a partir del enfoque de la EMR, las políticas educativas (Lineamientos (1998) y Estándares (2006)) permitió estudiar el proceso de matematización progresiva, en tanto los estudiantes desarrollaron diversas habilidades para dar respuesta a los interrogantes de cada una de las tareas, diferentes niveles de comprensión que dejan ver que los alumnos reinventan la matemática desde su contexto y adaptan las estrategias informales que surgen en las primeras tareas a otras de mayor grado de complejidad como los modelos para.

Capítulo 4.

Conclusiones y reflexiones finales

En este capítulo se presentan las conclusiones, a partir de los objetivos, tanto general como específicos, el marco teórico referenciado en el capítulo 2 y el análisis de los resultados de la implementación de la propuesta de aula en el colegio Anglo Americano. Posteriormente, se realizan algunas reflexiones didácticas relacionadas con los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones periódicas, particularmente la función Seno, su vínculo con situaciones en contextos propios de la física y modeladas por tal función. Al finalizar el capítulo se presentan las referencias bibliográficas.

4.1. Conclusiones generales.

En relación con el primer objetivo específico, que orientó el diseño de una propuesta de aula que contextualice a los estudiantes de grado décimo del Colegio Anglo Americano en diferentes situaciones de variación periódica desde el enfoque de la EMR y las propuestas curriculares se concluye:

- Las tres situaciones que componen la propuesta de aula alrededor de fenómenos de naturaleza periódica de diferentes contextos de la física (mecánica celeste, movimiento circular, movimientos armónicos simples –masa resorte y péndulo simple) lograron articular los referentes curriculares, el enfoque de la EMR y el marco teórico de referencia principal de esta investigación.
- Desde el principio de actividad y el principio de realidad del enfoque de la EMR, se adaptaron las tres situaciones de diferentes contextos de la física que llevaron a los estudiantes al uso de herramientas matemáticas vistas como una forma de organizar la realidad a través de su participación activa y la comprensión de la realidad.
- El principio de interacción de la EMR, durante los espacios de implementación propició plenarias que llevaron a los estudiantes a reflexionar y socializar sobre las respuestas dadas. En estas plenarias se reconoce la heterogeneidad de las producciones de los estudiantes, el trabajo en equipo y la adquisición del papel principal en su proceso de aprendizaje; además el investigador como docente orientador de los debates y la socialización de las experiencias durante la aplicación de la propuesta de aula.

- El principio de interconexión al vincular algunos saberes de la física y de la matemática, brindó diferentes contextos de la física que posibilitaron el diseño de situaciones problema de regularidad y variación periódica, susceptibles de ser modeladas por la función seno.
- Los referentes matemáticos dieron coherencia a la propuesta de aula a través del vínculo del lenguaje simbólico y formal de las matemáticas que proveen elementos teóricos para el análisis de las producciones de los estudiantes desde lo disciplinar. El diseño tuvo en cuenta definiciones y conceptos como: relación, función, pareja ordenada, rango y dominio de funciones, intervalos de crecimiento y decrecimiento, función periódica, función seno, periodo de una función, etc. Asimismo, el uso de las diferentes representaciones: tabular, verbal, algebraica, gráfica cartesiana e icónica.
- Los estudiantes desarrollan algunos aspectos asociados al pensamiento variacional tales como el reconocimiento de fenómenos de variación periódica propios de su cotidianidad, identificación de patrones y regularidades que caracterizan a un fenómeno determinado y la variación del mismo, sea funcional o funcional periódica que modela el contexto tomado de situaciones realistas de la física. Esto les permite la interpretación de la relación entre las variables, sus correlaciones, covariaciones y el uso de diferentes representaciones, tales como: la tabular, lo gráfico, lo icónico, lo verbal y lo algebraico.

Respecto al segundo objetivo específico que centra el estudio en el análisis de los diferentes niveles de comprensión desde el enfoque de la Educación Matemática Realista y las políticas curriculares colombianas (MEN. 1998, 2006), de las producciones de los estudiantes del grado decimo del colegio Anglo Americano, se tiene que:

- Con respecto a la fase de implementación, en la que se privilegiaron contextos de la mecánica celeste, movimiento circular y movimientos armónicos simples a través de los cuales los estudiantes reconocieron la noción de periodo tanto para la

relación entre la variación temporal (1 año, para las estaciones, solsticios y equinoccios y 4 años para los años bisiestos) y la ocurrencia del fenómeno, como para la periodicidad del movimiento de la cápsula de la Noria, la masa atada al resorte y el péndulo simple. Esta dependencia funcional constituye el eje fundamental del estudio del cambio, lo que les permite a los estudiantes modelar situaciones de naturaleza periódica. Así pues, los alumnos llevan la noción de periodo más allá del contexto y la generalizan para diferentes tipos de variables que representan diversos cambios en fenómenos de naturaleza periódica.

- Respecto al principio de niveles de la EMR, se analizó el proceso de matematización progresiva, por un lado, como la forma de organizar la realidad a través de la matemática, que da lugar al surgimiento de herramientas matemáticas para interpretar, estructurar las diferentes situaciones en niveles de complejidad y por otro, como el estudio de las herramientas informales a los modelos y las estrategias formales para resolver las situaciones planteadas.
- La situación 1: permitió la matematización horizontal en tanto los estudiantes se ubican en el nivel situacional, puesto que reconocen e interpretan el contexto de la situación problema a través de la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva (Bressan 2016, p 82).
- La situación 2: centrada en el proceso de matematización vertical, propició en los estudiantes el tránsito entre los niveles referencial y general puesto que los alumnos utilizan diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico, icónico verbal y algebraico. Donde el conteo en las diferentes tareas (años bisiestos, estaciones, solsticios, capsula de la noria y MAS) y la representación tabular de la función seno se establecen como estrategias para dar razón de la periodicidad de esta función; es decir, se supera el contexto del que surge (la variable tiempo en la situación 1) y se generaliza como un modelo de la situación.
- La situación 3: ubica a los estudiantes en un nivel general respecto al conteo, la representación tabular y algebraica de la función seno, $\text{sen}(x + p) = \text{sen } x$ y la

noción de periodo. En otras palabras, estas estrategias fueron generalizadas por los estudiantes como modelo para explicar diferentes situaciones de naturaleza periódica modeladas por la función seno. por otro lado, la gráfica de la función seno se limita al nivel referencial dado que surge en la situación 2 con el movimiento de la capsula de la noria pero queda ligada a este contexto. Así, la representación gráfica de la función seno se toma como modelo de.

- En cuanto a lo curricular, la propuesta de aula permitió el desarrollo de algunos aspectos asociados al pensamiento variacional y su relación con diferentes tipos de pensamientos que constituyen el trabajo matemático en el aula: numérico y métrico.

De esta forma:

- Para el pensamiento numérico, se evidenció el uso de diversos sistemas numéricos, el conteo asociado a números naturales (situación 1, tarea 1 y 2) y definición de números pares (situación 1, tarea 1, pregunta 4); la relación entre la cantidad y la unidad de medida (situación 2, tarea 1), el conteo a través de múltiplos enteros de $2\pi rad$, la relación de equivalencia: $2\pi rad = 360 grados$ (situación 2, tarea 2 y situación 3, tareas 1 y 2).
- El pensamiento métrico fue enriquecido con cambios de unidades de medida (situación 2, tarea 1), también con conversiones entre radianes y grados (situación 2, tarea 2); además la asignación de una cantidad numérica a una medida (situación 2, tarea 2).
- Los elementos del pensamiento variacional que se movilizaron fueron el manejo de las representaciones tabular, gráfica (asociada a la función seno), covariaciones y proporcionalidades. Además los estudiantes logran un proceso de modelación de situaciones de diversos contextos de la física puesto que reconocen la misma regularidad, calculan los siguientes términos (uso del conteo), confirman o refutan conjeturas iniciales y las generalizarlas. (MEN 2006, p 67).

- Con respecto al concepto de función, función periódica y función seno movilizados por los estudiantes se analizaron en sus producciones: el uso de la estrategia de la

línea recta paralela al eje de las ordenadas para mostrar gráficamente si es función o no, el uso de la noción de periodo cuando se comprobó que una función periódica es aquella que se repite en un intervalo determinado de longitud mínima p , es decir: $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2\pi)$; además se hicieron explícitos intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimo, dominio, rango y periodo.

Del análisis realizado a las producciones de los estudiantes en el capítulo 3, se reconocen algunas dificultades asociadas a la implementación y desarrollo de las tareas que componen cada una de las situaciones:

- Se realizó en el tiempo de las clases de matemática de los estudiantes del grado décimo del Colegio Anglo Americano quienes en su momento se encontraba en ensayos de una actividad cultural institucional, lo cual hizo necesario el uso de diferentes sesiones para la implementación de cada una de las situaciones. La situación 3 fue desarrollada por 8 estudiantes dado que uno de ellos por motivos académicos no pudo finalizar la propuesta.
- En la situación 1, la ubicación de los países respecto a su hemisferio (sea norte o sur) y si presentan estaciones o no. Además, algunos estudiantes afirman que el periodo para los fenómenos analizados en la segunda tarea (solsticios, equinoccios y estaciones del año) es de 6 meses y no la regularidad de 1 año; esta dificultad se presenta dado que la noción que surge de periodo está ligada al contexto de la situación –el tiempo-. Así, la duración de un ciclo es de 1 año puesto que es el tiempo que tarda en repetirse el suceso; no obstante el fenómeno contrario se presenta cada 6 meses, por ejemplo entre solsticio de verano y solsticio de invierno hay 6 meses, particularidad que lleva a algunos estudiantes a afirmar que el periodo es este intervalo de tiempo. Este lapso corresponde a la mitad del recorrido de la Tierra en su movimiento de traslación y es asumido por algunos alumnos como el periodo de todo el movimiento.

- En la situación 2, se observa la dificultad de asociar las representaciones tabular, gráfica y algebraica relacionadas con la función seno; además, el cambio de grados a radianes genera respuestas no válidas cuando los estudiantes comprueban algebraicamente la propiedad de periodicidad al momento de usar la calculadora.
- Aunque lo periódico se desliga de la dependencia temporal, los estudiantes no logran relacionar la periodicidad de la noria, del sistema masa resorte y del péndulo simple con la representación gráfica cartesiana de la función seno; lo que ubica a los alumnos con respecto a la representación gráfica del seno en un nivel referencial, dentro del enfoque de la EMR.
- Para la situación 3, aunque la representación tabular es una estrategia generalizable, modelo para explicitar el cambio de las variables y las variables dependientes e independientes, la gráfica de la función seno no se generaliza para los movimientos armónicos simples: sistema masa resorte y péndulo simple.
- Con respecto al proceso de modelación: la primera situación permite que los estudiantes desarrollen estrategias informales a través de sus conceptos previos; la segunda situación moviliza, a partir de la reflexión, elementos generalizables que llevan a estrategias como el conteo a desligarse del contexto del que surge; por último, la situación 3 muestra que el conteo, las representaciones tabulares y la expresión algebraica de la función seno se ubican en un nivel general; mientras que la representación gráfica de la función seno en un nivel referencial.

4.2. Reflexiones finales.

Respecto al tercer objetivo específico se determinan algunas reflexiones didácticas acerca de la pertinencia de incluir la física como disciplina que aporta diferentes contextos realistas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las funciones periódicas, en particular de la función Seno. Así, se puede afirmar que:

- Las situaciones realistas tomadas de diferentes contextos de la física, la mecánica celeste, el movimiento circular uniforme y los movimientos armónicos simples (sistema masa resorte y péndulo simple) propician un espacio de discusión que

potencia el proceso de modelación matemática dado que, en primer lugar, los alumnos logran comprender lo presentado en cada situación a través del proceso de matematización horizontal, lo que da lugar al uso de saberes previos en respuestas de tipo informal; luego, la reflexión y la interacción entre los estudiantes dan lugar a un proceso de matematización vertical que deja ver estrategias con elementos generalizables a través de las cuales llegan a responder las tareas propuestas más allá del contexto. Por tanto, el uso de la física como una de las disciplinas de las cuales se pueden adaptar situaciones que aportan al desarrollo del pensamiento variacional, deja ver la matemática como una actividad que permite el análisis en el aula de diferentes niveles de comprensión y adquiere diferentes grados de generalización.

- En el colegio Anglo Americano los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las funciones, particularmente las funciones periódicas, han desligado el vínculo de otras disciplinas que aportan fenómenos de cambio, dependencia y variación periódica a través de diferentes representaciones que ayudan al estudio de los patrones y regularidades periódicas desde los primeros grados de escolaridad. Así, el conocimiento y adopción de la planeación institucional del área de matemática no trascienden la práctica docente en cuanto al estudio de la variación desde los primeros grados de escolaridad.

- Las prácticas docentes en el Colegio Anglo Americano con respecto al concepto de función, particularmente la función seno, son de carácter tradicional, dado que se presenta la representación algebraica como un producto terminado del cual se debe llegar a las demás representaciones (tabular y gráfica). Lo que permite concluir que estas prácticas no movilizan el proceso de modelación matemática dado que no se privilegian situaciones problemas en el contexto realista de los alumnos.

- Se puede afirmar que la modelación no es un proceso inmediato ni evidente, así como el diseño de tareas que la propicien; antes bien, se deben parametrizar los diferentes contextos realistas a ser modelados por los estudiantes para llevarlos a potenciar este proceso general; lo anterior requiere un tiempo para analizar el contexto y las situaciones, así como para delimitar el problema a ser

modelado por un determinado saber disciplinar; esta falta de tiempo se constituye en una limitante al momento de organizar la planeación institucional.

- Es necesario replantear el plan de área de matemáticas del Colegio Anglo Americano en cuanto al desarrollo de algunos elementos del pensamiento variacional desde la educación básica relacionados con el reconocimiento de patrones de cambio, variación, invariancia, asociación uno a uno, entre otros elementos propuestos por los Estándares (2006). Particularmente, para el conjunto de grados octavo y noveno, llevar a los estudiantes al reconocimiento de las expresiones algebraicas desde diferentes contextos que logren movilizar elementos de la variación y el cambio a partir del estudio de las proporcionalidades, correlaciones y el uso de diferentes sistemas de representación. Asimismo, el docente debe asumir el papel de guía, que mediará entre el saber matemático y los estudiantes, en tanto la matemática es una actividad social que permite organizar y comprender la realidad de los alumnos.

- Las políticas curriculares, Lineamientos (1998) y Estándares (2006) promueven el estudio del saber matemático a través de procesos generales y contextos, tanto de la matemática misma, como de otras ciencias y de la vida cotidiana. Esta relación no es evidente ni inmediata, dado que el diseño de las situaciones modeladas por la función seno exigió una serie de adaptaciones para lograr movilizar este modelo funcional: la noria, el sistema masa resorte y el péndulo simple. Así, estos documentos limitan el estudio de la función periódica a la caracterización de las funciones trigonométricas (Santacruz 2005, p 189); quienes a su vez, están sesgadas a un trabajo estático en triángulos rectángulos donde no se hace evidente el cambio de la función y se reduce este estudio a las razones trigonométricas.

- Desde la postura de Camarena (2009, p 2), la modelación matemática es uno de los temas que aparecen ocultos en el trabajo con los estudiantes pues siempre se espera que logren modelar las situaciones que se les propone. Es por ello que se hace pertinente usar situaciones en contexto que ayuden a los alumnos a privilegiar estrategias que se puedan generalizar a modelos.

- La revisión, aplicación e innovación de los procesos de enseñanza de la matemática en los grados escolares desde básica a la media del colegio Anglo Americano debe conllevar un estudio de la variación y el cambio donde se supere la presentación tradicional de las funciones periódicas y se enfatice en elementos como máximos y mínimos, intervalos de crecimiento (o decrecimiento), dominio, rango, características funcionales, tales como la periodicidad, en situaciones contextualizadas que le permitan al estudiante realizar un proceso de matematización progresiva.

- Si, tanto en el colegio Anglo Americano como en otras instituciones, se propician estos elementos del cálculo desde la educación básica se conjetura que los estudiantes llegarían a mayores niveles de generalización, al reconocimiento de diferentes contextos susceptibles a ser modelados por determinado saber matemático y lograr un estudio de las familias de funciones trigonométricas; por ejemplo:

$$f(x) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Referentes bibliográficos.

- Apostol, T. (1988). Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Vol. 1. Barcelona: Reverté.
- Bressan, A. Gallego, M, Perez, Silvia & Zolkower, B. (2016). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. Buenos Aires, Argentina. http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoría_EMER-Final.pdf
- Bressan, A. & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina.
- Bressan, A., Zolkower, B., Gallego, M. (2004). La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.
- Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (un estudio socioepistemológico). Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.
- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9 (2), 227 – 251.
- Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de la ciencia. Innovación educativa. Volumen 9, número 46. Marzo 2009. Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.
- Camarena, P (2012). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2012. Año 7. Número 10. pp 183-193. Costa Rica
- Cordero, Francisco; Martínez, Enrique (2002). El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante. En Crespo, Cecilia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 55-60). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la función trigonométrica. Tesis de maestría en ciencias en la especialidad de matemática educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: Departamento de matemática educativa, México D.F.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos: Matemáticas. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.
- Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de doctorado en ciencias en matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional: Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México D.F.
- Panhuizen, M. (2003). El uso didáctico de modelos en la educación matemática realista: Un ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9 – 35.
- Panhuizen, Marja. (2018). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje (Segunda parte).
- Pérez, I. (2012). Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica. Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá.
- Puig, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal. México: CINVESTAV.
- Sánchez, H. (2014). Las funciones trigonométricas seno y Coseno a partir de sus aplicaciones. Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá.
- Santacruz, O. (2005). Las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional. El caso de los textos escolares y las concepciones de los maestros. Tesis de licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

- Santacruz, O. (2016). Una propuesta de aula para la enseñanza de las funciones periódicas seno y coseno desde un enfoque variacional. Tesis de Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática. Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Tigreros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de la matemática. *Innovación Educativa*, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, 2009, pp. 75-87. Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.
- Vasco (2009). Pensamiento variacional y modelación matemática. Universidad del Valle, Universidad de Manizales. Cali, Manizales, Colombia.
- Wills, D., Guarín, H., Takeuchi, Y. (1985). *Hacia la Matemática Un enfoque Estructurado 5: Segunda edición*. Santafé de Bogotá: Temis.

Anexos



UNA PROPUESTA DE AULA QUE VINCULA EL CONTEXTO
DE LA FÍSICA EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO
DESDE EL ENFOQUE DE LA EMR
COLEGIO ANGLO AMERICANO

Nombre del estudiante:

Fecha: 05-11-17

Grado: décimo (10°)

Desarrolle de forma individual las siguientes actividades.

SITUACIÓN 1: Reconozcamos fenómenos periódicos en nuestro sistema solar

La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones

La Tierra que está en continuo movimiento, presenta 4 tipos de movimientos: la traslación, la rotación, la precesión y la nutación. La traslación es el movimiento orbital que describe una trayectoria elíptica debido a la gravitación, alrededor del sol (ver figura 1) que realizan los planetas. Por su parte, la Tierra tarda 365 días, 5 horas y 57 minutos, equivalente a 365,2422 días en darle la vuelta al sol. Este tiempo que tarda el planeta Tierra en completar una vuelta alrededor del sol se conoce como un año. Así, el año del calendario usado hoy tiene 365 días y se realiza un ajuste cada cuatro años para compensar el tiempo que tarda en darle la vuelta al sol. En la figura 1 se muestra la traslación de la tierra alrededor del sol, así como los solsticios y equinoccios generados por este movimiento.

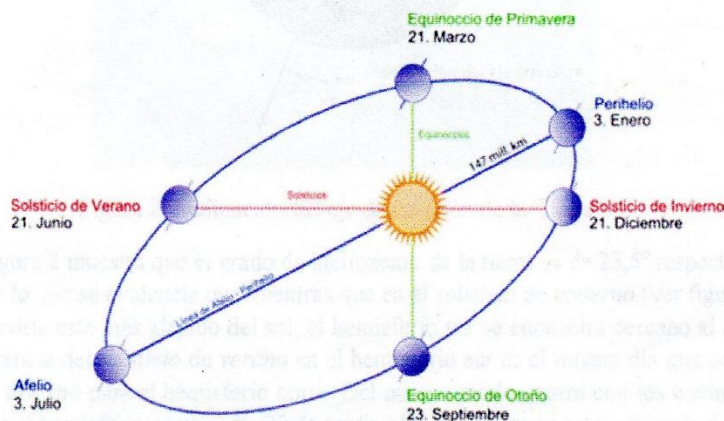


Figura 1. Solsticios y equinoccios en el hemisferio norte de la tierra, según su ubicación en la órbita alrededor del sol¹.

¹ Tomada de <http://www.microsiervos.com/archivo/ciencia/por-que-ano-empieza-1-enero.html>. Referenciada el día 14 de marzo de 2017.

De acuerdo con la figura 1, al lugar de la órbita donde la Tierra se encuentra más alejada del sol se le conoce como afelio y ocurre el día 3 de Julio; y al lugar de la órbita donde la Tierra se encuentra más cerca al sol se le conoce como Perihelio y ocurre el día 3 de Enero.

Así, este movimiento y el grado de inclinación del eje de rotación de la Tierra (ver figura 2), generan los fenómenos naturales y climáticos que dan lugar a las cuatro estaciones del año; así, a los días cuando se evidencian los cambios de estaciones se les llama *solsticios* o *equinoccios*, es decir, son dos *solsticios* y dos *equinoccios*. De esta forma, para el hemisferio norte el *solsticio de invierno* se presenta el día 22 de diciembre con el cambio de otoño a invierno y el *solsticio de verano* se presenta el día 21 de junio; además, el *equinoccio de otoño* se presenta el día 23 de septiembre y el *equinoccio de primavera* se presenta el día 21 de marzo (ver figura 1).

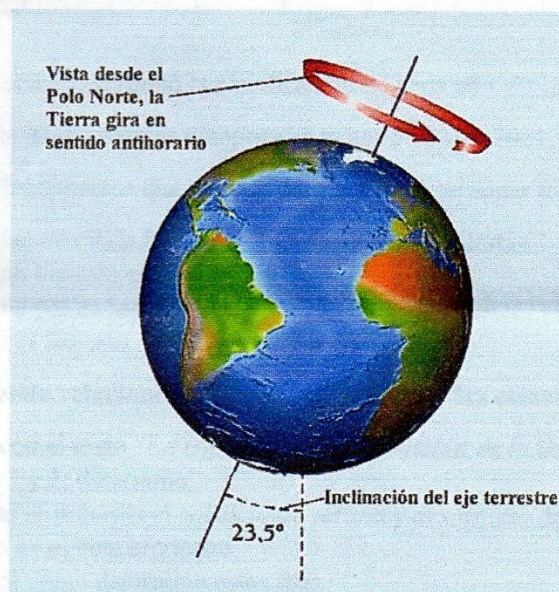


Figura 2. Inclinación del eje de rotación de la Tierra²

La figura 2 muestra que el grado de inclinación de la tierra es de 23,5° respecto al eje vertical, por lo que se evidencia que mientras que en el *solsticio de invierno* (ver figura 1) el hemisferio norte está más alejado del sol, el hemisferio sur se encuentra cercano al mismo; así, la ocurrencia del *solsticio de verano* en el hemisferio sur es el mismo día que ocurre el *solsticio de invierno* para el hemisferio norte. Del mismo modo ocurre con los equinoccios, mientras que el hemisferio norte el día 23 de septiembre se encuentra en equinoccio de otoño, el hemisferio sur se encuentra en equinoccio de primavera.

² Tomada de <http://juanbascon.blogspot.com.co/2010/09/blog-de-recursos-y-material-de-estudios.html>. Referenciada el 13 de marzo de 2017.

S. invierno 21 de junio
 E. Primavera 23 sept
 E. otoño 21 marzo
 S. verano 22 dic

Tarea 1: Interpretando la traslación de la tierra

Teniendo en cuenta la información dada en el texto: **La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones** y las figuras 1 y 2, responda las siguientes preguntas:

- ✓1. a. En qué consiste el movimiento de traslación de la tierra.
- b. Explique qué es un año bisiesto.
- ✓2. a. Complete la siguiente tabla, tomando como referencia que el año 1600 fue bisiesto.

Año	1789	1880	1900	1980	1990	2010	2016	2022	2030
Bisiesto		X	X	X			X		
No bisiesto	X		X		X	X		X	X

Tabla 1

- b. Explique cómo determinó la clasificación de cada año.
- ✓3. a. Indique los años bisiestos comprendidos entre 1579 y 2021.
- b. Explique los aspectos que tuvo en cuenta para determinar los años bisiestos.
- ✓4. Indique verdadero (V) o falso (F). Justifique sus respuestas.
 - a. Todo año bisiesto es par (✓).
 - b. Todo año par es bisiesto (F). ▶ Justificación → años.
 - c. Si 1580 es bisiesto, entonces 1600 es bisiesto (✓).

Tarea 2. Estableciendo relaciones entre los hemisferios y las estaciones.

- ✓1. De acuerdo con el texto "**La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones**" y las figuras 1 y 2, determine:
 - a. Qué días se presenta el *solsticio de verano* y el *solsticio de invierno* para un país ubicado en el hemisferio sur.
 - b. Explique cómo determino estos días.
2. a. Indique para cada una de las fechas dadas, si el país se encuentra en un solsticio de invierno o en un equinoccio de primavera.

Países	21 de septiembre de 2019	15 de abril de 2025	22 de diciembre de 2030	21 de junio de 2031	23 de septiembre de 2028
N Canadá	E. de Primavera	S. Invierno	S. invierno	E. Primavera	E. Otoño
S Chile	S. de invierno	E. otoño	E. Primavera	S. invierno	E. Primavera
N Francia	E. de Primavera	S. Invierno	S. invierno	E. Primavera	E. Otoño
N España	E. de Primavera	S. Invierno	S. Invierno	E. Primavera	E. Otoño
S Sudáfrica	S. de invierno	E. otoño	E. Primavera	S. invierno	E. Primavera

Tabla 2

b. Explique la manera como estableció la relación entre las fechas, los solsticios y los

equinoccios para cada país. R1: Identificando si el país estaba en el hemisferio sur o en el hemisferio norte.

3. a. Complete la tabla 3 e indique la estación en la que se encuentra cada país.

Fechas	24 de marzo	16 de junio	15 de febrero	25 de diciembre	30 de julio	29 de septiembre	10 de octubre
Países	Estaciones del año						
N S Canadá	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera	Solsticio Invierno	Solsticio Invierno	Solsticio Verano	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño
Chile	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño	Solsticio Verano	Solsticio Verano	Solsticio Invierno	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera
N N Francia	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera	Solsticio Invierno	Solsticio Invierno	Solsticio Verano	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño
N España	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera	Solsticio Invierno	Solsticio Invierno	Solsticio Verano	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño
S Sudáfrica	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño	Solsticio Verano	Solsticio Verano	Solsticio Invierno	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera
S Madagascar	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño	Solsticio Verano	Solsticio Verano	Solsticio Invierno	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera
N Japón	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera	Solsticio Invierno	Solsticio Invierno	Solsticio Verano	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño
N India	Equinoccio Primavera	Equinoccio Primavera	Solsticio Invierno	Solsticio Invierno	Solsticio Verano	Equinoccio Otoño	Equinoccio Otoño

Tabla 3

b. Explique cómo estableció la estación para cada uno de los países en las fechas

indicadas. R1: Identificando en qué hemisferio estaba y en qué fecha del año.

4. De acuerdo el texto "La traslación, la inclinación de la tierra y sus estaciones" y la

figura 1, realice un esquema de los solsticios y los equinoccios en la tierra para el

hemisferio sur. Dibujo atrás.

Tarea 3. Reconociendo regularidades periódicas

1. a. Si los años 2000, 2008, 2012 y 2016 fueron años bisiestos, determine 5 años que

vayan a ser bisiestos. R1: 2020-2024-2040-2048-2078

b. Explique la manera como predijo estos años. R1: Comiendo de 4 en 4 sucesi

c. Determine el tiempo que transcurre entre dos años bisiestos consecutivos.

Justifique su respuesta. R1: Transcurre 4 años, ya que son bisiestos consecutivamente.

2. a. Determine el tiempo que transcurrido entre cada solsticio de invierno para una

persona que se encuentre en el hemisferio norte.

R1: Transcurre 1 año entre cada solsticio de invierno para una persona en el hemisferio norte, ya solamente ocurre 1 vez al año.

Explique su respuesta.

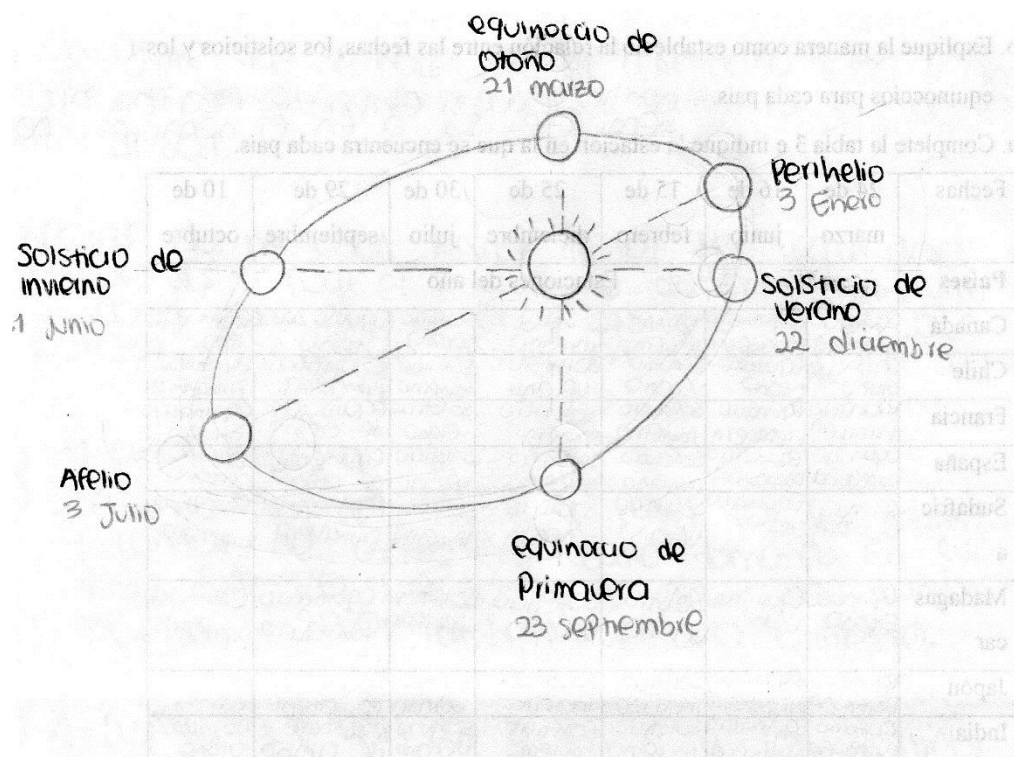
- b. Compare el tiempo transcurrido entre cada solsticio de invierno y tiempo transcurrido entre cada solsticio de verano. Realice algunas conclusiones al respecto.
 - c. Transcurre entre cada solsticio de invierno (entre cada solsticio de verano) en el hemisferio sur, el mismo tiempo que en el hemisferio norte. Explique a que se debe esta regularidad de tiempo transcurrido.
- 3.
- a. Transcurre el mismo tiempo entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos para el hemisferio norte. Justifique su respuesta.
 - b. Transcurre el mismo tiempo entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos para el hemisferio sur. Justifique su respuesta.
 - c. Se puede decir que el tiempo que transcurre entre dos solsticios de invierno y dos solsticios de verano consecutivos es el mismo. Explique su respuesta.
4. Identifique la regularidad (en meses, días transcurridos) que se puede asociar a la variación de:
- a. Los años bisiestos.
 - b. Los solsticios de verano
 - c. Los solsticios de invierno
 - d. Los equinoccios de primavera
 - e. Los equinoccios de otoño.
- 5.
- a. Explique qué entiende por fenómeno periódico.
 - b. Determine cuáles de fenómenos mencionados en el punto 4, son periódicos. Explique su respuesta.
 - c. Para aquellos que señalo como periódicos, establezca el periodo.
 - d. Cite tres ejemplos de fenómenos periódicos diferentes a los aquí expuestos.
-

Tarea 1:

- a)
- 1) Es el movimiento orbital que realiza el planeta en una trayectoria elíptica debido a la gravitación.
 - 2) Es un ajuste que se hace en el calendario cada 4 años para compensar el tiempo que tarda la tierra en dar la vuelta al sol.
 - 3) b) Realice dos métodos para tener la seguridad de la respuesta: 1^a Coja el # que me daban y lo divida por 4, y si daba decimal, no era bisiesto y si daba entero, era bisiesto. 2^a Sume de cuatro en cuatro para confirmarlo.
 - 3) a) 11 años bisiestos.
 - b) Son múltiplos del cuatro y pares por ser múltiplos del cuatro y contar de cuatro en cuatro tomando en cuenta que 1980 fue año bisiesto y el año 2000 también fue año bisiesto, y 2020 también fue año bisiesto.
 - 4) A=(v) ya que van de 4 en 4 y los múltiplos del 4 son números pares.
 B=(#) ya que si fuera par, iría de dos en dos, y es de 4 en 4. Son múltiplos del 4.
 C=(v) Son múltiplos del 4 y realice las cuentas para confirmar.

Tarea 2:

- 1) a) Solsticio de verano: 22 de diciembre } Hemisferio Sur.
 Solsticio de invierno: 21 de Junio
- b) Teniendo en cuenta la inclinación del eje de rotación de la Tierra y la posición. También teniendo en cuenta que en el hemisferio Norte el S. de invierno es el 22 de junio y el S. Verano es el 21 de junio. Y el eje es diferente por lo cual varía la fecha del Hemisferio Sur siendo lo contrario.



2)

b. R11: Entre cada solsticio de invierno transcurre 1 año, y entre cada solsticio de verano transcurre 1 año. Conclusiones que podemos sacar: Solo ocurre una vez al año el solsticio de invierno y de verano, sea hemisferio norte o hemisferio sur, es igual.

c. R11: Ya que dependiendo del hemisferio sur o norte, en lo que nos enfocamos, es el tiempo que se tarda la tierra en darle la vuelta al sol y la rotación de la tierra que va a ser el mismo, por eso la regularidad del tiempo transcurrido.

a)
3) ya que cada solsticio consecutivo es de un año y así sucesivamente por la traslación y rotación de la tierra.

b) ocurre cada 2 años, ya que cada solsticio ocurre cada año.

c) Si, ya que es cada año

4) a) cada 4 años.

b) cada año con menos un día.

c) cada año más 1 día.

d) cada año

e) cada año

5) a) algo que pasa no tan regularmente en un determinado tiempo.

b) el año bisiesto ya que ocurre en determinado tiempo y por una razón.

c) 4 años

d) Luna llena

Luna creciente

Luna cuarto menguante



**UNA PROPUESTA DE AULA QUE VINCULA EL CONTEXTO
DE LA FÍSICA EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO
DESDE EL ENFOQUE DE LA EMR
COLEGIO ANGLO AMERICANO**

Nombre del estudiante: _____

Fecha: 24/06/17

Grado: décimo (10°)

Desarrolle de forma individual las siguientes actividades.

SITUACIÓN 2: Un caso de función periódica: La función seno.

La ferris Wheel de Chicago

Chicago tiene un largo historial en cuanto a ruedas de la fortuna se refiere, la primera fue inaugurada en 1893 como parte de la legendaria exhibición universal. Actualmente, en el Navy pier se encuentra la ferris Wheel de Chicago que mide aproximadamente 200 pies de altura (196 pies). Esta rueda hace parte de una serie de atractivos que posee la ciudad de Chicago a orillas del lago Michigan que es uno de los lagos más grandes de Estados Unidos. En la figura 1 se muestra una toma de esta Noria¹.



Figura 1. Vista de la Ferris Wheel de Chicago²

¹ Noria es un artilugio de feria consistente en una gran rueda con asientos que gira verticalmente. Tomado de <http://dle.rae.es/?id=QcCVyi3>. Citado el 30 de marzo de 2017

² Tomado de: Fuente: <https://navypier.com/centennial-wheel/>. Citado el 30 de marzo de 2017.

Este atractivo tiene como fin disfrutar de una vista de 360° del lago Michigan y de la ciudad de Chicago por ello la velocidad de la Noria es lo suficientemente baja para que los turistas puedan abordarla sin que esta se detenga. Esta velocidad es tal que en 1 minuto la Noria gira 10 grados. Este giro lo realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Tarea 1: Representando la situación

La figura 2 muestra un esquema de la Noria y una estructura que se encuentra a la derecha de esta, la cual tomará como plataforma donde los turistas abordan la ferris Wheel para su recorrido por los aires de Chicago.

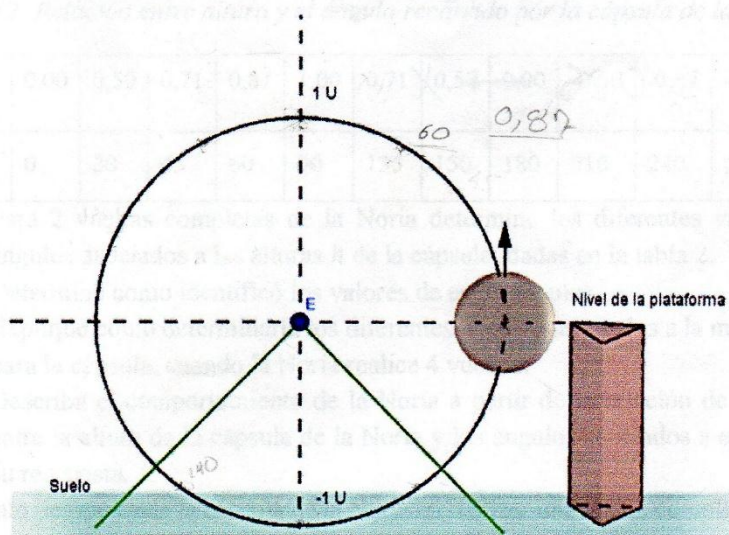


Figura 2. Esquema de abordaje de los pasajeros a la Noria.

Teniendo como referencia la figura 2, para una persona que aborda la capsula de la Noria: sea t el tiempo transcurrido (en minutos) desde que inició el recorrido y h la altura (en pies) que alcanza la cápsula sobre el nivel de la plataforma. Tenga en cuenta que la altura de la capsula está determinada con respecto al nivel de la plataforma.

Por tanto, la posición de la cápsula por debajo del nivel de la plataforma, se tomará como: $-h$. Así, la altura máxima para la cápsula sería de 100 pies y la altura mínima para la cápsula sería de -100 pies. A cada 100 pies se le llamará 1 Unidad de altura y se denotará como U .

1. a. Complete la siguiente tabla realizando la equivalencia entre la altura en pies y la unidad de altura U .

Tabla 1. Conversión de unidades: pies a unidades de altura.

Altura [pies]	100	25	48,5	-75	100	80	-100	65	-65,4
Unidad de altura [U]	1	0,25	0,48	-0,75	1	0,8	-1	0,65	-0,64

$$1 \rightarrow 100$$

$$X \rightarrow 48.5$$

se tiene como fin determinar de una vista de 360° del lago Michigan y de
por ello la velocidad de la Noria es lo suficientemente baja para que to-
quiera sin que esta se detenga. Esta velocidad es tal que en 1 minuto la N-
Este giro lo realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$X = \frac{48.5}{100}$$

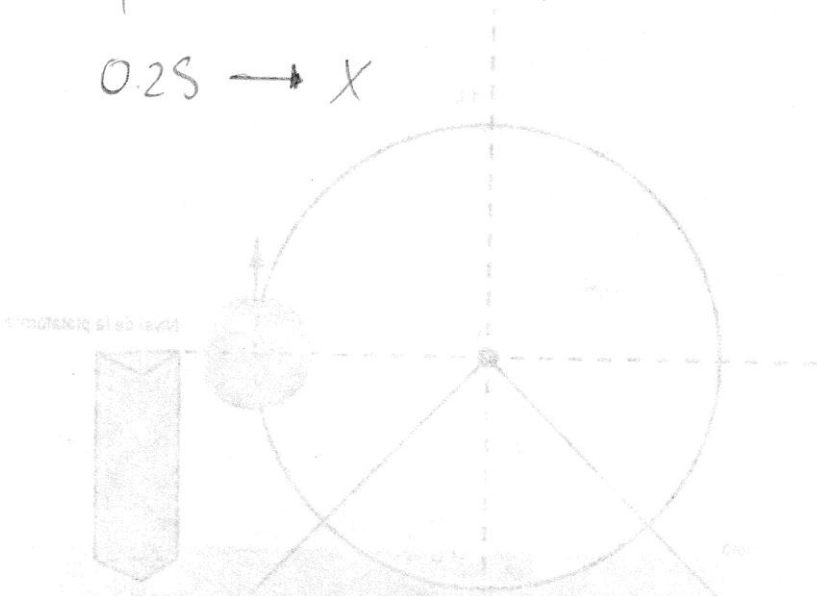
representando la situación

se muestra un esquema de la Noria y una estructura que se encuentra a la
realizarse como plataforma donde las nubes abordan la letra W nos

$$1 \rightarrow 100$$

$$X = 0.28 \times 100$$

$$0.28 \rightarrow X$$



- Explique cómo completó la tabla 1 para los valores de la altura en pies y en unidades de altura U .
- Explique cuáles son los valores asociados a la altura máxima y a la altura mínima que alcanza la cápsula de la Noria durante el recorrido, en unidades de altura U .
- Determine para qué valores de tiempo (en minutos) y para qué ángulos la cápsula de la Noria alcanza la altura máxima y la altura mínima. Explique cómo determinó estos valores.

La tabla 2 relaciona las medidas realizadas de diferentes alturas en unidades de altura U con el ángulo que ha recorrido la cápsula de la Noria durante una vuelta.

Tabla 2. Relación entre altura y el ángulo recorrido por la cápsula de la Noria

Altura (U)	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,50	-0,87	-1,00	0,00
Ángulo (grados)	0	30	45	60	90	135	150	180	210	240	270	360

- Para 2 vueltas completas de la Noria determine los diferentes valores de los ángulos asociados a las alturas h de la cápsula, dadas en la tabla 2.
 - Determine como identificó los valores de estos ángulos.
 - Explique cómo determinaría los diferentes ángulos asociados a la misma altura h para la cápsula, cuando la Noria realice 4 vueltas.
 - Describa el comportamiento de la Noria a partir de la relación de dependencia entre la altura de la cápsula de la Noria y los ángulos asociados a esta. Explique su respuesta.
- Cuanto tiempo tarda la cápsula de la Noria en realizar una vuelta completa. Justifique su respuesta.
 - Si la Noria funciona de 9:00 AM a 6:00 PM, cuántas vueltas dará la cápsula de la Noria. Justifique su respuesta.

b con regla de tres me di cuenta que uno multiplica y el otro divide.

c. los valores asociados a la altura máxima en unidades de altura son 1 y 1 y en la mínima es -1.

d. Para la altura máxima transcurren 9 minutos en 90° y la altura mínima transcurren 27 minutos cada 270°

Saque estos valores sabiendo que en 1 minuto transcurren 10°

0.5	30°	150°	390°	510°
0.71	45°	135°	405°	495°
0.87	60°	120°	420°	480°
1.00	90°	450°		
-0.5	210°	330°	570°	690°
-0.87	240°	300°	600°	660°
-1.00	270°	630°		

Altura (U)	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	0.00
Ángulo (grados)	0	30	45	60	90	360

b. sabiendo que para la misma altura se dan dos ángulos y sume para sacar los ángulos de las dos vueltas.

c. teniendo ya los valores de la 2^{da} vuelta multiplicaría estos por dos para sacar los de la 4^{ta} vuelta.

d. Dependiendo del ángulo se da una altura diferente pero los ángulos no paran de sumar en cambio la altura es una constante.

2. dura 36 minutos porque 10° duran 1 minuto.

3. dura 540 minutos de 9:00 AM a 6:00 PM

$$\begin{array}{lcl} 36 \text{ min} & \longrightarrow & 1 \text{ vuelta} \\ 540 & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{540}{36} = 15 \text{ vueltas.}$$

Tarea 2: Reconociendo elementos periódicos de la Noria

Para el recorrido de la capsula de la Noria, de 9 am a 6:00 pm, se tiene en cuenta que el valor inicial para el ángulo es cero y se sigue sumando hasta que se detiene a las 6:00pm, así se puede tener ángulos mayores de 360° en el recorrido de la capsula de la Noria, medidos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

1. a. Complete la tabla 3 para 6 vueltas de la capsula de la Noria.

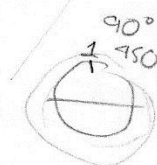
Tabla 3. Relación entre alturas y ángulos barridos por la cápsula de la Noria.

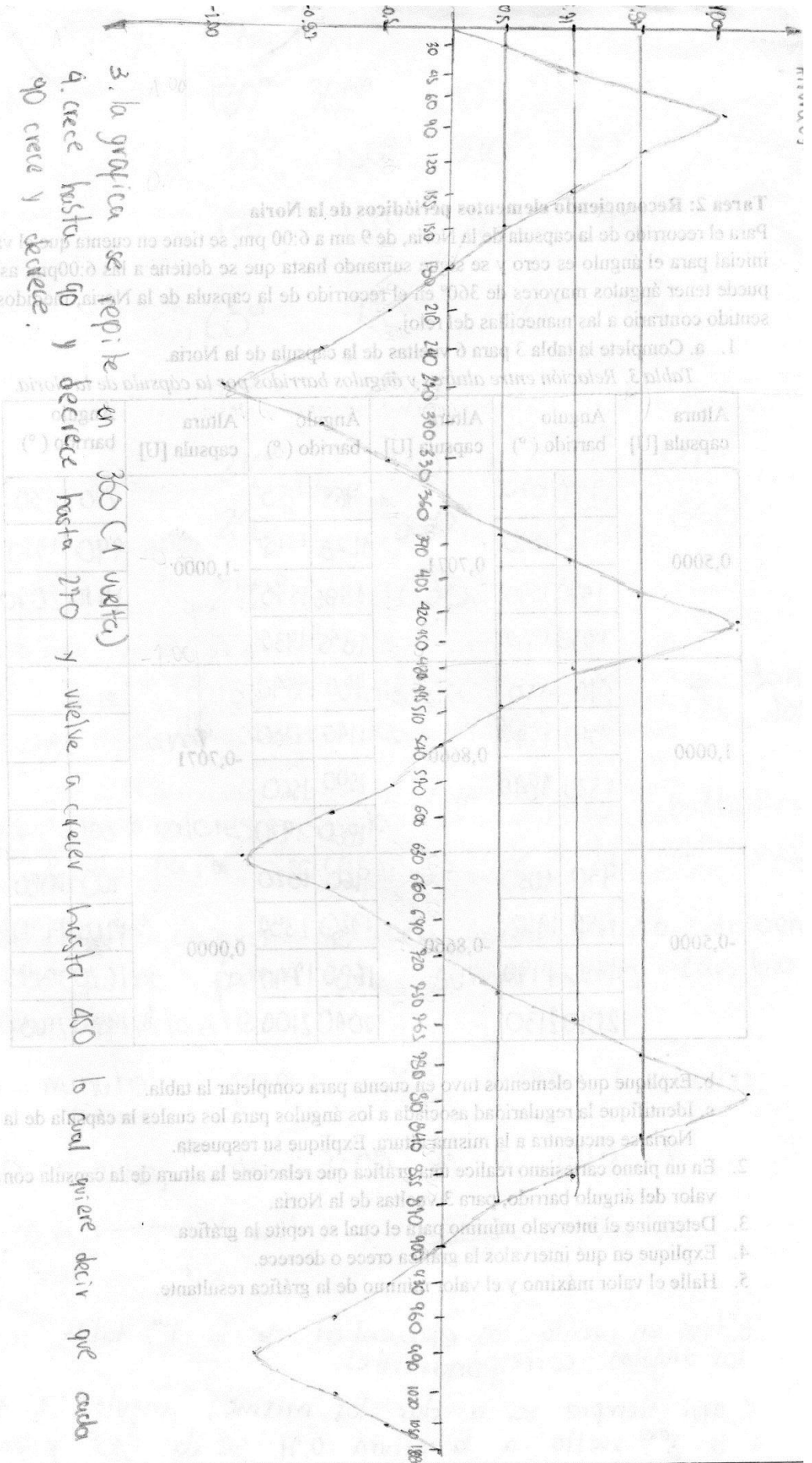
Altura capsula [U]	Ángulo barrido ($^\circ$)		Altura capsula [U]	Ángulo barrido ($^\circ$)		Altura capsula [U]	Ángulo barrido ($^\circ$)	
0,5000	3	750°	0,7071	3	765°	-1,0000	270	630
	4	1110°		4	1125°		990	1350
	5	1470°		5	1485°		1710	2070
	6	1830°		6	1845°			
1,0000		40	0,8660		780	-0,7071		
		810			1140			
		1530			1500			
		1890			1860			
-0,5000		930	-0,8660		960	0,0000	3	900
		1290			1320		4	1260
		1650			1680		5	1620
		2010			2040		6	1980

- b. Explique qué elementos tuvo en cuenta para completar la tabla.
 c. Identifique la regularidad asociada a los ángulos para los cuales la cápsula de la Noria se encuentra a la misma altura. Explique su respuesta.
2. En un plano cartesiano realice una gráfica que relacione la altura de la capsula con el valor del ángulo barrido, para 3 vueltas de la Noria.
 3. Determine el intervalo mínimo para el cual se repite la gráfica.
 4. Explique en qué intervalos la gráfica crece o decrece.
 5. Halle el valor máximo y el valor mínimo de la gráfica resultante.

b. tuve en cuenta los elementos de la 1^{ra} tabla para sacar los ángulos correspondientes.

c. aquí siempre va a dar los mismos ángulos + 360, por ejer a la 3^{era} vuelta a la altura 0,41 se da 810° y en la 4^{ta} 1170°





3. la grafica se repite en 360 (1 vuelta)
4. crece hasta 90 y decrece hasta 270 y vuelve a crecer hasta 450 lo cual quiere decir que cada 90 crece y decrece.
5. el valor maximo en Angulo es 1080° y minimo es 30° y en altura es el maximo 1.00 y el minimo -1.00

6. Una función es la relación ordenada entre dos conjuntos A y B; donde A se le llama dominio y B se le llama rango. La representación gráfica de una función f en el plano cartesiano se reconoce porque para cada valor del eje x (elemento del dominio de la función llamado pre imagen) existe un elemento ÚNICO del eje y (elemento del rango de la función llamado imagen).
- De acuerdo con la representación gráfica del punto 2 y la tabla 3, muestre si a un valor fijo de ángulo barrido por la capsula de la Noria se le puede asociar más de un valor de su altura.
 - Determine si la representación gráfica resultante en la pregunta 2 corresponde a una función. Justifique su respuesta.

Una función f es periódica si para todo x que pertenece al dominio se cumple que:

$f(x) = f(x + p)$, donde $p \in \mathbb{R}^+$ (es decir, p es un real mayor que cero) se conoce como el periodo de la función. En otras palabras, la representación gráfica de una función periódica se repite para un determinado intervalo, al menor intervalo en el cual se repite la gráfica se le llama periodo de la función.

- De acuerdo con la definición anterior determine si la representación gráfica resultante es una función periódica. Explique su respuesta.
 - Establezca el periodo de la función. ¿Cómo determinó este periodo?
 - ¿Se puede afirmar que el movimiento de la Noria es periódico? Justifique su respuesta. En caso de ser periódico cual es el periodo del movimiento de la Noria. En caso de NO ser periódico explique por qué.

Sea un punto P en el plano cartesiano de coordenadas (x, y) , tal que la distancia de P al punto O de coordenadas $(0,0)$ sea constante e igual a 1. La función seno se define como el conjunto de las parejas ordenadas (a, b) tales que la coordenada "a" hace referencia al ángulo medido en sentido anti horario y la coordenada b corresponde al cada uno de los valores asociados a la coordenada y del punto P . La coordenada inicial del punto P es la coordenada $(1, 0)$ ³. De esta forma, la representación gráfica de la función seno sería:

a. No un angulo tiene solo 1 altura.

b. si es la funcion del seno porque comienza desde 0

c. si porque se repite igual en cada intervalo

b. es $360(2\pi)$ porque se repite solo en este

c. si, porque su funcion es periodica entonces por lo tanto movimiento tambien es periodico.

³ Adaptada de la definición de la función seno dada por Takeuchi (1985, p 17)

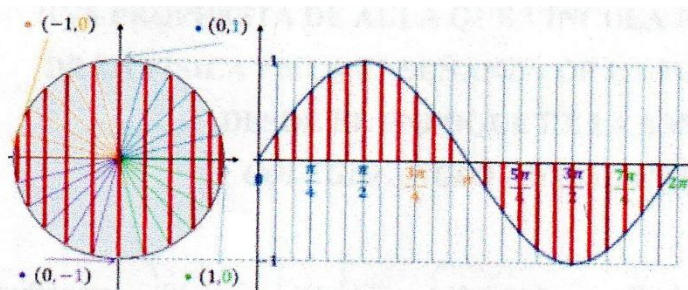


Figura 3. Representación gráfica de la función seno⁴

8. Compare la representación gráfica obtenida en la pregunta 2 (tarea 2), con la representación gráfica dada de la función seno.
 - a. Corresponde la representación gráfica que realizó con la representación gráfica dada de la función seno en la figura 3.
 - b. Si corresponde, se puede afirmar que el movimiento de la cápsula de la Noria es modelado por medio de la función seno. Si no corresponde, describa los elementos que diferencian estas representaciones gráficas.
 - c. Realice una explicación de la representación gráfica de la función seno, en términos de la posición de la cápsula o movimiento de la Noria.
9. ¿A partir de la relación entre las dos representaciones gráficas se puede concluir que la función seno es una función periódica? Justifique su respuesta.
 - a. Determine el periodo de la función seno.
 - b. Compruebe para diferentes valores de la variable x que se cumple la igualdad $f(x) = \text{sen}(x) = \text{sen}(x + p)$ donde x pertenece a los números reales y p es el periodo de la función seno.

corresponde

modelado por la función seno.

Estáticamente igual porque para el ángulo de 90° es la
para 270° es -1.00 .

porque tiene un intervalo igual siempre a no ser de q
función. el periodo es 2π

$$= \text{sen}(0) = \text{sen}(0 + 2\pi) = 0$$

$$= \text{sen}(1) = \text{sen}(1 + 2\pi) = 0.84$$

$$= \text{sen}(7) = \text{sen}(7 + 2\pi) = 0.65$$

⁴ Tomado de <https://matematicaspr.com/image/l2dj/blog/graficas-funciones-trigonometricas/grafica-funcion-seno.jpg> . referenciado el día 17 de mayo de 2017.

Martes 7 noviembre

Matemáticas.



**UNA PROPUESTA DE AULA QUE VINCULA EL CONTEXTO
DE LA FÍSICA EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN SENO
DESDE EL ENFOQUE DE LA EMR
COLEGIO ANGLO AMERICANO**

Nombre del estudiante:

Fecha: 11.10.17.

Grado: décimo (10°)

Desarrolle de forma individual las siguientes actividades.

SITUACIÓN 3: Aproximándonos a fenómenos físicos: la variación de la función seno

Los movimientos oscilatorios en la Física

La traslación y la rotación de la Tierra, el movimiento de un electrón orbitando el núcleo de un Átomo, el movimiento de un péndulo, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, las ondas electromagnéticas tales como la luz y las ondas de radio, la corriente eléctrica en los circuitos de corriente alterna y otros más, son algunos ejemplo de movimientos oscilatorios que están asociados al desplazamiento alternante que caracteriza el objeto en acción.

Un caso particular de los movimientos oscilatorios son los Movimientos Armónicos Simples (MAS) los cuales presentan una periodicidad, es decir, que el movimiento se repite en un intervalo mínimo llamado periodo. El péndulo simple y el sistema masa resorte son los casos más conocidos de MAS en la física.

La figura 1 muestra un esquema de un sistema masa resorte y un péndulo simple.

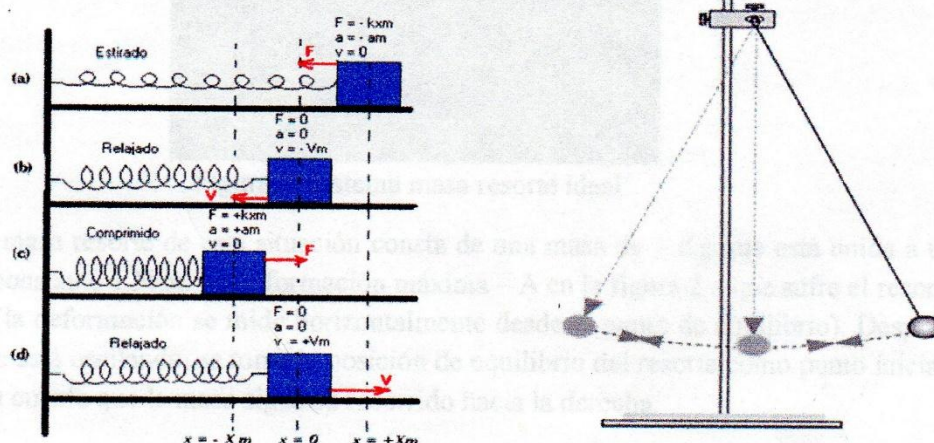


Figura 1. Masa resorte y péndulo simple.

El sistema masa resorte

Un sistema masa resorte consta de un resorte que se encuentra fijo en uno de sus extremos y una masa m unida al otro extremo del resorte. Un resorte se caracteriza por una constante de elongación K dada en $[N/m]$. Cuando es deformado una distancia x de su posición de equilibrio responde a una fuerza de restauración igual a: $F = -Kx$.

Una de las características de los MAS es que sus oscilaciones generan un movimiento periódico, es decir, que se repite en un intervalo de tiempo llamado periodo. Así, la ley de la conservación de la energía permite idealizar un sistema masa resorte cuando se desprecia la acción de la Fuerza de Fricción o Fuerza de Rozamiento. La Frecuencia Angular ω de este movimiento se relaciona con las cantidades físicas K y m , por medio de la siguiente expresión algebraica:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

La figura 2 muestra un sistema masa resorte horizontal en una superficie ideal (sin fricción).

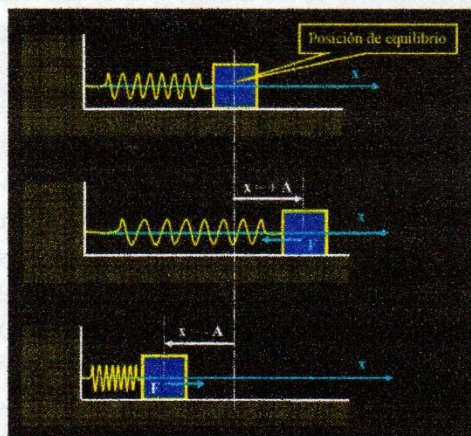


Figura 2. Sistema masa resorte ideal¹

El sistema masa resorte de esta situación consta de una masa de 1 Kg que está unida a un resorte de constante 1 N/m. La deformación máxima – A en la figura 2 – que sufre el resorte es de 1 m (la deformación se mide horizontalmente desde el punto de equilibrio). Después que la masa está oscilando, se toma la posición de equilibrio del resorte como punto inicial, teniendo en cuenta que la masa sigue su recorrido hacia la derecha.

¹ Imagen tomada de http://www.fatela.com.ar/trabajo_final_svg/5pag3.htm referenciada el 21 de mayo de 2017.

Tarea 1: análisis de oscilaciones en un sistema masa resorte

1. a. Realice una representación gráfica del movimiento de la masa mostrando algunas de las características dadas para el sistema masa resorte.
b. Explique qué elementos consideró en la elaboración de la representación gráfica anterior.
2. El periodo, denotado por la letra T , ^{periodo} se define como el intervalo mínimo de tiempo en que se realiza una oscilación completa y está dado por una expresión que relaciona la masa y la constante de elasticidad del resorte, así:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$m = \text{masa (kg)}$
 $k = \text{elastidad (N/m)}$

- a. Identifique el tiempo aproximado que tarda una masa de 1 Kg en realizar una oscilación.
- b. Explique en términos del sistema masa resorte, qué representa este valor de tiempo calculado. *lo que se demora en dar una oscilación.*
- c. Relacione la gráfica que realizó en la pregunta 1a con el valor numérico del periodo calculado en la pregunta 2a, de esta tarea. Qué puede concluir a partir de esta relación.

3. a. A partir de las condiciones dadas para el sistema masa resorte, determine la posición máxima y la posición mínima de la masa en relación con la figura 2.
b. Es posible determinar la posición de la masa oscilante después de iniciado su movimiento, respecto al punto de equilibrio, para cualquier instante de tiempo. Explique su respuesta.
4. La tabla 1 relaciona las medidas realizadas de diferentes desplazamientos de la masa en metros con el tiempo transcurrido.

Tabla 1. Relación entre desplazamiento y tiempo transcurrido de la masa del sistema.

Desplazamiento [m]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87	-1,00	0,00
	0	45°	45°	60°	90°	135°	150°	180°	225°	270°	315°	360°
Tiempo [s]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- a. Para una segunda oscilación completa de la masa determine los valores de tiempo asociados a cada desplazamiento dado en la tabla 1.
- b. Explique cómo identificó estos valores.

elongacion = Amplitud $\times \cos \times \omega \times t$
 $x = A \times \cos \times$

el periodo y la frecuencia son inversamente propo

Periodo

$$T = \frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{numero de vibraciones}}$$

$$f = \frac{\text{numero de vibraciones}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

5. a. Complete la tabla 2 usando diferentes tiempos asociados a cada desplazamiento dado de la masa del sistema masa resorte.

Tabla 2. Relación entre desplazamiento y tiempo transcurrido de la masa oscilante.

Desplazamiento X[m]	Tiempo transcurrido t [s]		Desplazamiento X[m]	Tiempo transcurrido t [s]		Desplazamiento X[m]	Tiempo transcurrido t [s]	
0,5000	30	390	0,7071	45	405	-1,0000	270	630
	750	1110		765	1125		490	1350
	1470	1830		1485	1645		1710	2070
	2190	2550		2205	2665		2430	2790
1,0000	90	450	0,8660	60	420	-0,7071	225	585
	810	1170		780	1140		945	1305
	1530	1890		1500	1860		1665	2025
	2250	2610		2220	2580		2385	2745
-0,5000	-210	-570	-0,8660	-240	-600	0,0000	360	720
	-930	-1290		-960	-1320		1080	1140
	-1650	-2010		-1680	-2040		1800	2160
	-2370	-2730		-2400	-2760		2520	2880

- b. Justifique como completó la tabla.
- c. ¿Cuántas oscilaciones tuvo en cuenta para completar los diferentes tiempos transcurridos asociados a cada desplazamiento dado?
6. Explique la relación entre el desplazamiento de la masa desde el punto de equilibrio y el tiempo transcurrido.
7. En un plano cartesiano realice la representación gráfica de la tabla 2.
- a. Explique por qué esta representación gráfica corresponde a una función.
- b. Caracterice algunos elementos de la función que obtuvo en la representación gráfica de la pregunta 6.

El péndulo simple

El péndulo simple consta de una masa, medida en kilogramos, atada al extremo libre de una cuerda que está sujeta en un soporte, como muestra la figura 3. Esta cuerda (de masa despreciable) de longitud l está medida en metros. Las oscilaciones de la masa muestran un movimiento periódico (cuando se desprecia el aire y se realizan las oscilaciones con un ángulo menor de 30°) gracias al efecto de la fuerza de gravedad de la tierra, o el planeta donde se quiera imaginar la situación ideal del péndulo simple. La gravedad se toma como $9,8 \text{ m/s}^2$. La frecuencia angular de este movimiento está dada por la relación:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La figura 3 muestra un péndulo simple (sin tener en cuenta la fricción).

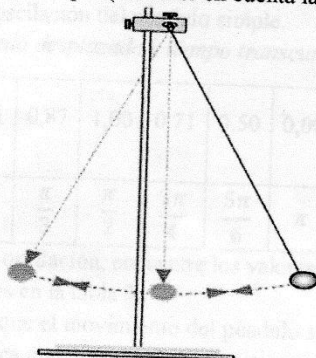


Figura 3. Sistema masa resorte ideal²

Condiciones iniciales del péndulo simple: Para esta situación se va a imaginar un péndulo simple compuesto por una cuerda de $9,8 \text{ m}$ de longitud atada de uno de sus extremos a un soporte (como muestra la figura 3) y con una masa de 3 Kg atada en su extremo libre. Se pone a oscilar el péndulo simple idealizado, buscando no sobrepasar los 30° sugeridos para este tipo de movimiento.

De esta manera, el máximo ángulo desplazado hace referencia a los extremos del péndulo simple (puntos de la trayectoria más alejados del punto de equilibrio). Cuando la variación del ángulo se realiza en sentido de las manecillas del reloj (es decir, la masa oscila hacia la izquierda) se dice que la variación es negativa y viceversa. Después de tener el péndulo simple oscilando se mide el tiempo en que realiza una oscilación. Para ello, se inicia a medir el tiempo cuando la masa se encuentra en el punto más bajo del recorrido y moviéndose en sentido contrario de las manecillas del reloj (es decir, positivo).

² Imagen tomada de http://www.fatela.com.ar/trabajo_final_svg/5pag3.htm referenciada el 21 de mayo de 2017.

El periodo del péndulo simple se define como el tiempo que tarda la masa en realizar una oscilación completa y depende exclusivamente de la longitud de la cuerda y de la gravedad. Este periodo se representa por medio de la siguiente expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Tarea 2: La función seno, el caso del péndulo simple.

1. a. Realice una representación gráfica del movimiento de la masa del péndulo simple relacionando los elementos dados en las condiciones iniciales para el mismo.
b. Compare esta representación gráfica del péndulo simple con la representación gráfica realizada para el sistema masa resorte en la pregunta 1a. concluya al respecto.
2. En la tabla 3 se presenta la relación entre el ángulo desplazado y el tiempo transcurrido en una oscilación del péndulo simple.

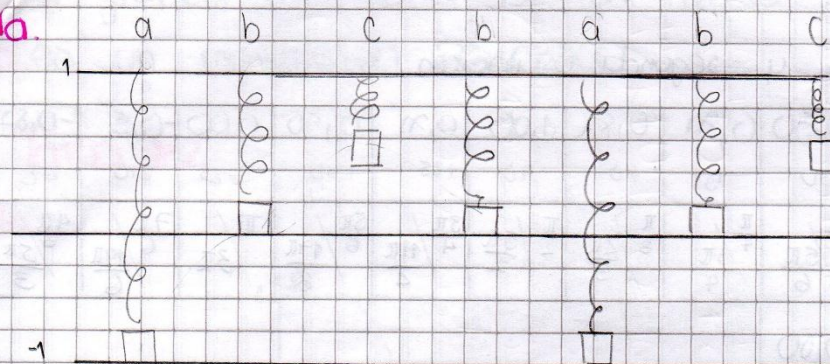
Tabla 3. Relación entre ángulo desplazado y tiempo transcurrido para el péndulo simple.

Ángulo desplazado [A]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87	-1,00	0,00
tiempo [s]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

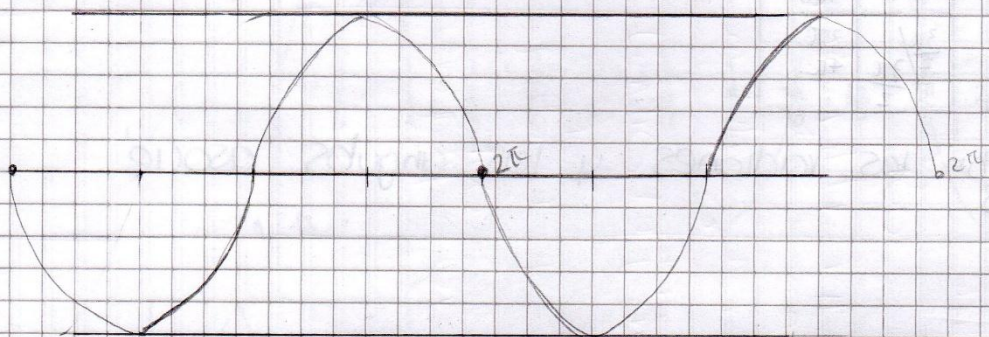
- a. Para una segunda oscilación, encuentre los valores de tiempo transcurrido para los ángulos propuestos en la tabla 3.
- b. Se puede afirmar que el movimiento del péndulo simple corresponde a la misma relación matemática que modela el sistema masa resorte. Justifique su respuesta.
3. En un plano cartesiano realice una representación gráfica del ángulo desplazado respecto al tiempo transcurrido para 2 oscilaciones del péndulo simple. Explique qué elementos tuvo en cuenta para elaborar esta representación gráfica.
4. a. Explique porque el periodo de rotación de la capsula de la noria, el periodo de oscilación del sistema masa resorte y el periodo de oscilación del péndulo simple, corresponden a un mismo valor numérico.
b. De la razón por la cual la variación de la representación cartesiana para el caso del movimiento de la noria, del sistema masa resorte y el péndulo simple corresponde a una misma representación gráfica y funcional.
5. Después de haber realizado las tres situaciones propuestas, indique:
 - a. Qué es una función periódica.
 - b. Qué es la función seno.
 - c. ¿Por qué la función seno es una función periódica?
 - d. ¿Qué tipo de fenómenos físicos pueden ser modelados a través de la función seno?
6. Realice algunas conclusiones matemáticas que vinculen el trabajo realizado en las tres situaciones (años bisiestos, estaciones del año, movimiento de la capsula de la noria, sistema masa resorte y péndulo simple).

area #1

1a.



a = estirado
b = normal
c = comprimido



b. pues que es como la función seno y cuando estaba comprimado era su altura mayor y cuando estaba estirado era su menor altura es el dominio o amplitud

2a.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{1}}$$

$$T = 2\pi \times 1 \quad T = 2\pi$$

b. lo que se tarda en dar una oscilación

c. que en cada 2π termina en dar su oscilación completa

3a. $1m$ y $-1m$ o $-A$ y A .

b. Si, por que ya se tiene el periodo y se calcula su velocidad angular y se reemplaza

En $x = A \cos \omega t$

4.a.

a. Tabla 1. primera y segunda oscilacion

Desplazamiento [m]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87
	0	30	45	60	90	135	150	180	210	225
Tiempo [s]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
	2π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
	-1,00	0,00								
	270	360								
	$\frac{3\pi}{2}$	2π								
	$\frac{7\pi}{2}$	4π								

b. pues con los radianes y los angulos. asoue' ambas

5a.

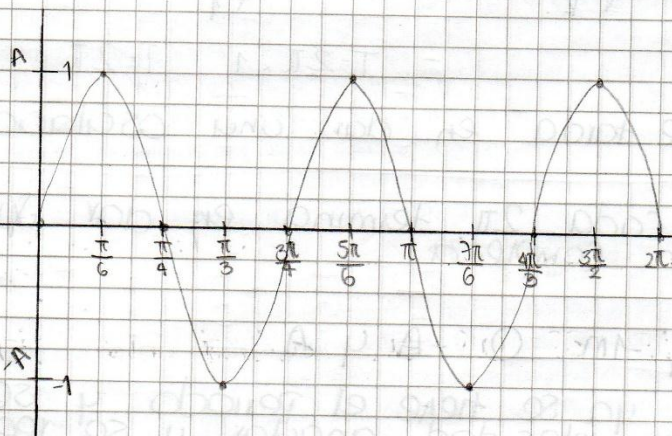
Tabla 2.

b. le fue sumando 360 a cada angulo que seria cada 2π .

c. desde la 4 vuelta o oscilacion hasta la 8.

6. pues que es el periodo y

7.

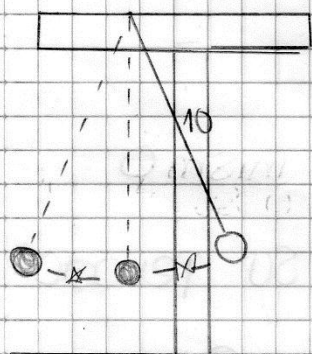
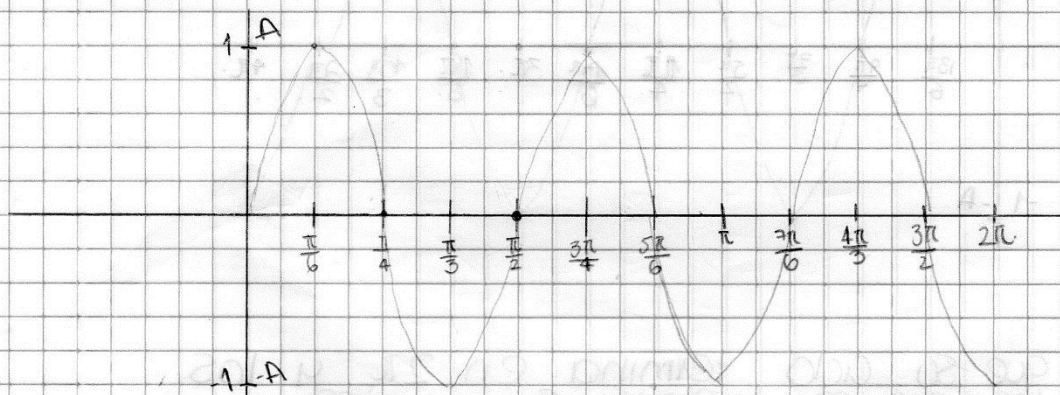


a. Por que cuando se le traza una linea recta a la grafica solo corta en un punto.

b. es un movimiento periodico.

Tarea #2.

1a



b. Se toma la gravedad y la longitud de la cuerda

2.

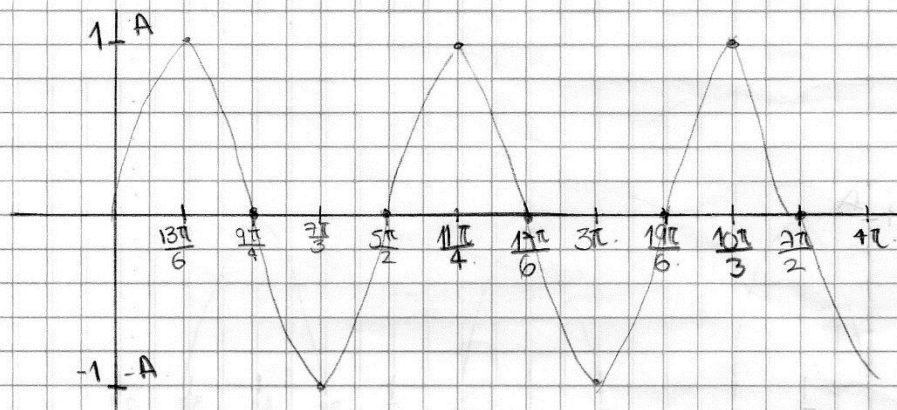
Tabla 3.

a

Angulo desplazado [A]	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00	0,71	0,50	0,00	-0,5	-0,87	-1,00
tiempo [s]	$0/2\pi$	$\pi/6/5\pi/6$	$\pi/4/3\pi/4$	$\pi/3/2\pi/3$	$\pi/2/5\pi/2$	$3\pi/4/11\pi/4$	$5\pi/6/11\pi/6$	$\pi/3\pi$	$7\pi/6/11\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2/5\pi/2$

b. Si, por que sus angulos que se desplazan son iguales.

3.



4. Por que su ciclo termina en 2π y los angulos que se desplazan son iguales

b a la funcion seno.

5.

a. es algo que se repite en el mismo intervalo de tiempo.

b. es una funcion periodica y su periodo es 2π .

c. por que su ciclo siempre se repite en 2π .

d. Movimientos Armonicos Simples.

6. que siempre se repeta en el mismo intervalo de tiempo

el Periodo en todos siempre es el mismo