Vol. XVIII, Nº 1, Junio (2010)
Matemáticas: 27–44

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria
©Escuela Regional de Matemáticas
Universidad del Valle - Colombia

Levantamiento de Wagner de una métrica de Riemann al haz de marcos ortonormales

José Ricardo Arteaga B.
Universidad de los Andes

Mikhail Malakhaltsev
Kazan State University

Recibido Ene. 28, 2008 Aceptado Feb. 10, 2010

Abstract

In the present paper we construct a lift of a Riemannian metric g on a two-dimensional oriented manifold M to the principal fibre bundle of positively oriented orthonormal frames $SO(M)$ of the Riemannian manifold M. This lift will called the *Wagner lift*. V.V Wagner proposed a method to extend a metric defined on a non-holonomic distribution to the prolongation of this distribution. This prolongation is constructed via the Lie bracket.
In the present paper we use Wagner's method in order to construct a lift $\hat{g}$ of a Riemannian metric g on a two-dimensional manifold M to the orthornormal frame bundle of (M, g). We also prove various results concerning the relationship between the geometry of the base Riemannian manifold (M, g) and the geometry of the total space of the orthonormal frame bundle endowed by $\hat{g}$.

Keywords: Riemannian metric, orthonormal frame bundle, lift, curvature, geodesic, space of constant curvature, two-dimensional Riemannian manifold

MSC(2000): Primary: 53C17, Secondary: 53C05, 53C22

Resumen

En el presente trabajo se muestra una técnica de levantamiento muy particular de una conexión de Levi-Civita de una variedad Riemanniana a un haz fibrado principal. El fibrado principal es el haz de los marcos ortonormales con orientación positiva de una variedad de Riemann M. A este levantamiento le hemos denominado el *levantamiento de Wagner*. V.V Wagner propuso una técnica de extensión de una métrica definida en una distribución no-holonómica a la prolongación de esta distribución. Prolongación bajo el corchete de Lie. Lo nuevo que se encuentra en el presente trabajo es un método que usa las mismas herramientas usadas por Wagner, pero ahora para hacer el levantamiento de una métrica de Riemann hasta el fibrado principal de marcos ortonormales. Además se incluyen algunos resultados que muestran relaciones existentes entre la geometría de la variedad base M y la del fibrado principal P. Dicho levantamiento se hace para métricas definidas sobre variedades de Riemann bidimensionales.

Palabras y frases claves: Métricas Riemannianas, haz de marcos ortonormales, levantamiento, curvatura, geodésica, espacio de curvatura constante, variedad bidimensional Riemanniana

1 Introducción

Una métrica sub-Riemanniana, también conocida como métrica Riemanniana singular o métrica de *Carnot-Carathéodory*, sobre una variedad P es una métrica sobre una distribución suave $\mathcal{H}$ no holonómica.

V.V. Wagner [7] fue uno de los primeros matemáticos quien propuso definir métricas sobre distribuciones no holonómicas. Uno de sus trabajos principales fue dar una metodología y definir unas herramientas para la extensión de métricas en las prolongaciones de las distribuciones. Prolongaciones por el corchete de Lie.

Una prolongación puede entenderse mediante el siguiente ejemplo. En $M = \mathbf{R}^n$ consideremos una 2-distribución $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = span\{E_1, E_2\},$$

donde E_1, E_2 son un par de campos vectoriales suaves definidos en M, tales que el corchete de Lie satisface

$$[E_1, E_2] \notin \mathcal{H}.$$

Si $n \geq 3$, entonces podemos definir,

$$\mathcal{H}^1 = span\{E_1, E_2, E_3\}, \quad \text{donde} \quad E_3 = [E_1, E_2].$$

A la distribución $\mathcal{H}^1$ se le conoce con el nombre de *primera prolongación* de $\mathcal{H}$ por corchetes de Lie. En el caso que,

$$[E_i, E_j] \notin \mathcal{H}^1,\ i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j,$$

se puede definir,

$$\mathcal{H}^2 = span\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\},\ \text{donde}\ E_4 = [E_1, E_3],\ \text{y}\ E_5 = [E_2, E_3].$$

A la distribución $\mathcal{H}^2$ se le conoce como la segunda prolongación de $\mathcal{H}$. Así sucesivamente se construyen las prolongaciones por corchetes de Lie.

Además dada una métrica Riemanniana singular en $\mathcal{H}$, Wagner propone extender esta métrica a las demás prolongaciones de $\mathcal{H}$.

Nuestro trabajo es un poco diferente. Se comienza con una 2-variedad Riemanniana (M, g), la cual llamaremos base y se considera el haz fibrado principal $P \longrightarrow M$ de los marcos ortonormales sobre TM. Luego se levanta horizontalmente la métrica g a una métrica en una distribución $\mathcal{H}$ construida previamente. Por último siguiendo la metodología propuesta por Wagner se define la métrica en todo el haz tangente TP. A este tipo de levantamiento lo hemos llamado *levantamiento de Wagner*.

La organización de las secciones siguientes es como sigue. La sección 2 introduce los temas preliminares necesarios de conexiones en haces principales, lo cual todo se puede encontrar en [1] y [2]. La sección 3 muestra el levantamiento de una distribución no holonómica y del tensor no holonómico, cuando el espacio base es una variedad de Riemann bi-dimensional. La sección 4 describe lo que hemos denominado el lavantamiento de Wagner de una métrica bidimensional al haz principal de marcos ortonormales. La sección 5 muestra las relaciones entre los objetos geométricos de la variedad base y del haz principal. Finalmente en la sección 6 se muestran dos ejemplos en los cuales se muestra las técnicas de levantamiento y además exhibe algunos de los resultados mostrados en este artículo.

2 Preliminares

2.1 Los subespacios vertical y horizontal

Sea $P(M,G)$ un haz principal sobre una variedad orientable M, con grupo estructural G. La *acción* de G sobre P se denota de la siguiente manera:

$$P \times G \longrightarrow P, \qquad (u,a) \mapsto ua = R_a u.$$

Además se exige que la aplicación $\pi : P \longrightarrow M$ sea diferenciable y que $M = P/G$. La trivialización de P la podemos entender mediante el siguiente isomorfismo ψ: Para cada $x \in M$ existe un abierto W que contiene a x tal que,

$$\psi : \pi^{-1}(W) \longrightarrow W \times G, \qquad u \mapsto (\pi(u), \phi(u)),$$

donde, $\phi : \pi^{-1}(W) \longrightarrow G$ satisface que $\phi(ua) = (\phi(u))a$, es decir $\phi(R_a u) = R_a(\phi(u))$.

Denotaremos por T_uP al espacio tangente a P en u, por V_u al subespacio de T_uP que consiste en todos los vectores tangentes a la fibra que pasa por u y por $\mathcal{H}_u$ al "complemento ortogonal" de V_u. A V_u le llamaremos el *espacio vertical* en u, y a $\mathcal{H}_u$ el *espacio horizontal* o *distribución horizontal* en u. Los subespacios $\mathcal{H}_u$ y V_u satisfacen:

1. $T_uP = \mathcal{H}_u \oplus V_u$.
2. $\mathcal{H}_u$ es G-invariante.
3. H_u depende diferenciablemente de u.

Los subespacios G_u y $\mathcal{H}_u$ de T_uP se definen como los generados respectivamente por los vectores de los campos vectoriales fundamentales y los campos vectoriales horizontales estándar considerados en u, los cuales definiremos más adelante.

Usaremos la notación siguiente: $\mathcal{H}$ para el subhaz tangente *horizontal* y V para el subhaz tangente *vertical*.

2.2 Campos vectoriales fundamentales

La acción de G sobre P induce un homomorfismo σ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo de Lie G, en el álgebra de Lie de campos vectoriales suaves sobre P, $\mathfrak{X}(P)$.

$$\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P), \quad A \mapsto A^* = \sigma(A).$$

Los campos $\sigma(A)$ se denominan *campos vectoriales fundamentales* y están definidos como

$$\sigma(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} uA_t \tag{1}$$

donde $A_t = \exp(tA)$.

Los generadores de $\mathfrak{g}$ definen a V como una distribución generada por los campos vectoriales fundamentales.

2.3 Campos vectoriales horizontales estándar y la forma canónica θ

Por otro lado si P es el haz principal de marcos ortonormales, y $G = SO(n)$ actuando sobre P, se definen en P otros campos vectoriales llamados *campos vectoriales horizontales* como sigue. *La forma canónica* θ de P es la uno-forma con valores en $\mathbf{R}^n$, $\theta : TP \longrightarrow \mathbf{R}^n$, definida por,

$$\theta(X) = u^{-1}(d\pi(X)) \quad \text{para todo } X \in T_uP,$$

donde u es considerado como un isomomorfismo lineal de $\mathbf{R}^n$ sobre $T_{\pi(u)}M$, $u : \mathbf{R}^n \longrightarrow T_{\pi(u)}M$.

2.4 La forma de la conexión ω y la forma de la curvatura Ω

Sea (M, g) una variedad orientable de Riemann n-dimensional. Sea $\mathbb{SO}(M) \to M$ el haz de marcos ortonormales. Este es un haz principal con el grupo de matrices ortogonales $SO(n)$ como grupo que actúa sobre las fibras $\pi^{-1}(x)$ de manera libre y transitiva. El álgebra de Lie del grupo $SO(n)$ es el álgebra de Lie de matrices antisimétricas, $\mathfrak{so}(n)$.

Sea ∇ la conexión de Levi-Civita para g. Entonces ∇ determina una distribución $\mathcal{H}$ sobre P la cual es conocida como la *conexión infinitesimal*[1].

Esta distribución $\mathcal{H}$ es el kernel de la *forma de la conexión* $\omega : TP \to \mathfrak{so}(n)$, definida así: Si $U \subset M$ es un abierto tal que $P|_U \cong U \times SO(n)$ ($P|_U$ es trivial), entonces respecto a las "coordenadas" (x, μ), $x \in M$, $\mu \in G$, la forma ω se define de la siguiente manera ([2]):

$$\omega_l^k = \widetilde{\mu}_s^k(d\mu_l^s + \Gamma_{ij}^s \mu_l^j \theta^i), \tag{2}$$

donde Γ_{ij}^k son los coeficientes de la conexión de Levi-Civita respecto al campo de marcos $\{e_i(x)\} \leftrightarrow (x, e)$ determinados por la trivialización, $\theta^i = \pi^* e^i$, donde $\{e^i\}$ es el marco dual de $\{e_i\}$, y $\widetilde{\mu}$ es la matriz inversa determinada por μ.

La forma de curvatura $\Omega : \Lambda_2 TP \to \mathfrak{so}(n)$ de la forma de la conexión ω se puede escribir respecto a la trivialización local como sigue:

$$\Omega_k^l(u) = R_{ijk}^l \theta^i \wedge \theta^j,$$

donde R_{ijk}^l son las componentes del tensor de curvatura de Levi-Civita respecto al marco ortonormal u.

3 El levantamiento de una distribución no holonómica

3.1 El haz principal $P = \mathbb{SO}(M_2)$

Consideremos M una variedad orientada 2-dimensional de Riemann con métrica g sobre M. El haz principal de los marcos ortonormales orientados positivamente

[1] Uno de los primeros matemáticos en usar el nombre de conexiones infinitesimales para las distribuciones asociadas a las conexiones de Levi-Civita fue A.P. Shirokov, ver [9]

sobre M, $P = \mathbb{SO}(M)$, es el haz principal $\pi : P \to M$ con grupo de Lie $G = SO(2)$ actuando sobre P. Los abiertos considerados en la trivialización, $W \subset M$, son abiertos que admiten un campo $e = \{e_1, e_2\}$ de marcos ortonormales sobre todo W.

Ahora consideremos una curva $\gamma(t)$ en M. La conexión de Levi-Civita ∇ nos brinda información cómo trasladar paralelamente un campo vectorial X a lo largo de otro Y, por lo tanto también nos brinda la información cómo trasladar paralelamente un campo de marcos ortonormales, en este caso $e = \{e_1, e_2\}$, en dirección del campo de vectores tangentes $\dot{\gamma}(t)$. Supongamos que tenemos dos puntos en un abierto W de M, tales que $x_1 = \gamma(t_1)$, $x_2 = \gamma(t_2)$, y un campo vectorial de marcos ortonormales inicial fijo $e = \{e_1(x), e_2(x)\}$ definido sobre todo W. Llamemos $e' = e(x_1)$, $e'' = e(x_2)$ el marco e considerado en cada uno de los puntos. Sea además e''' el marco obtenido al trasladar paralelamente el marco e' a lo largo de γ desde x_1 hasta x_2. En P obtenemos *una nueva curva* $\widehat{\gamma}(t)$. Cada punto de la curva $\widehat{\gamma}$ es un marco ortonormal. Por ejemplo el punto $\widehat{\gamma}(t_2)$ es un punto en P que se proyecta en $x_2 \in M$ y además tiene la información de qué ángulo hay que *rotar* el marco e'' hasta obtener e'''. Es claro que si la curva γ es una geodésica el ángulo a rotar es nulo. Esta nueva curva, $\widehat{\gamma}(t)$ en P, es el *levantamiento horizontal* de $\gamma(t)$ en M. Recordemos que el isomorfismo inducido por la trivialización,

$$\pi^{-1}(W) \cong W \times SO(2)$$

donde W es un abierto de M. Recordemos que dos marcos e' y e en cada punto de W están relacionados mediante una matriz de rotación $R(\varphi)$,

$$e' = eR(\varphi) \to (\pi(e'), R(\varphi)).$$

Asociaremos a cada punto sobre la curva $\widehat{\gamma}(t)$ en $\mathbb{SO}(M)$ su matriz de rotación $R(\varphi)$ respecto a un marco ortonormal inicial e en W, donde

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

3.2 La forma de la conexión ω

La forma de conexión ω sobre P de la conexión de Levi-Civita ∇ restringida a $\pi^{-1}(W)$, definida en (2), la podemos escribir como,

$$\omega_{(x,\varphi)} = R(\varphi)^{-1} \left(\frac{dR(\varphi)}{d\varphi} d\varphi + \Gamma_a R(\varphi) \theta^a \right). \tag{3}$$

Aquí Γ_a es la 1-forma con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ de matrices antisimétricas cuyas entradas son los coeficientes de la conexión de ∇:

$$\nabla_{e_a} e_b = \Gamma^c_{ab} e_c\,; \quad \Gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^1_{a2} \\ \Gamma^2_{a1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $\Gamma_a = ||\Gamma_a{}^c_b||$ es anti-simétrica, es decir $\Gamma^c_{ab} = -\Gamma^b_{ac}$, porque e es un marco ortonormal y ∇ es la conexión de Levi-Civita.

Dado que $SO(2)$ es un grupo conmutativo tenemos que, $R(\varphi)^{-1}\Gamma_a R(\varphi) = \Gamma_a$. Es claro que $\frac{dR}{d\varphi} = R(\varphi + \pi/2)$, por lo tanto,

$$R^{-1}(\varphi)\frac{dR}{d\varphi} = R(\pi/2) = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Usando lo anterior podemos re-escribir (3) a la forma,

$$\omega = Jd\varphi + \Gamma_a\theta^a,$$

o más exactamente en forma matricial como,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi \\ d\varphi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}^1\theta^1 \\ \Gamma_{11}^2\theta^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{22}^1\theta^2 \\ \Gamma_{21}^2\theta^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la forma de la conexión está dada por,

$$\alpha = d\varphi + \Gamma^2_{11}\theta^1 + \Gamma^2_{21}\theta^2 = d\varphi - \Gamma^1_{12}\theta^1 - \Gamma^1_{22}\theta^2 \tag{5}$$

donde Γ^c_{ab} son los coeficientes de la conexión ∇ definida en M.

3.3 Los sub-haces tangentes: horizontal $\mathcal{H}$ y vertical V

Proposición 1. *El campo vectorial horizontal de marcos $E^h = \{E^h_1, E^h_2\}$, que lo llamaremos el levantamiento horizontal del campo ortonormal $e = \{e_1, e_2\}$ en la base M, se puede expresar como,*

$$E^h_1(x,\varphi) = e_1 - \Gamma_1{}^2_1\partial_\varphi, \quad E^h_2(x,\varphi) = e_2 - \Gamma_2{}^2_1\partial_\varphi. \tag{6}$$

Por lo tanto, la conexión infinitesimal o distribución $\mathcal{H}$ es

$$\mathcal{H} = \ker\omega = span\left\{E^h_1, E^h_2\right\}.$$

Demostración. La demostración es directa usando la fórmula deducida en (5) y teniendo en cuenta que $\omega(E^h_i) = 0$. □

Proposición 2. *Cualquier campo vectorial fundamental se puede expresar como:*

$$\sigma(A) = m\partial_\varphi, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbf{R}\backslash\{0\}.$$

Demostración. La demostración se obtiene por cálculos directos usando la definición de los campos vectoriales fundamentales (1), y teniendo en cuenta que si A es un elemento del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ asociada a grupo de Lie G, es decir A una matriz anti-simétrica 2×2 entonces, $A = mJ$, $\exp(A\cdot t) = R(mt)$, donde J determinado por (4). Por lo tanto,

$$A^* = \sigma(A) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(x,\varphi)\cdot\exp(A\cdot t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(x,\varphi+mt) = m\partial\varphi.$$

□

3.4 Expresiones vía funciones estructurales

Recordemos que los coeficientes de la conexión de Levi-Civita pueden expresarse en términos de las funciones estructurales para un campo de marcos ortonormales $\{e_i\}$.

Las funciones estructurales c_{ij}^k del campo de marcos $\{e_i\}$ están definidas por,

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

Para la conexión de Levi-Civita ∇ tenemos que ([2]) ,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &+ g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)). \end{aligned} \tag{7}$$

En la ecuación (7), tomando $X = e_i$, $Y = e_j$, $Z = e_k$, y usando $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$, obtenemos que las componentes de la conexión, respecto a los marcos ortonormales $\{e_i\}$, se pueden escribir como,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(c_{ij}^k + c_{ki}^j + c_{kj}^i). \tag{8}$$

El tensor de curvatura de Riemann está definido por,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{9}$$

y sus componentes por

$$R_{ijk}^l = \theta^l \left(R(e_j, e_k)e_i\right) = g\left(R(e_j, e_k)e_i, e_l\right). \tag{10}$$

Por lo tanto, tomando de nuevo $X = e_i$, $Y = e_j$, $Z = e_k$, reemplazando en (9), y teniendo en cuenta (10), las componentes del tensor de curvatura en términos de los coeficientes de la conexión y de las funciones estructurales se pueden expresar como:

$$R_{ijk}^l = e_i \Gamma_{jk}^l - e_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{is}^l \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{js}^l \Gamma_{ik}^s - c_{ij}^s \Gamma_{sk}^l. \tag{11}$$

La expresión (11) usando (8), nos muestra que las componentes R_{ijk}^l pueden ser expresadas únicamente en términos de las funciones estructurales c_{ij}^k.

Por otro lado podemos re-escribir las ecuaciones (6) como,

$$E_1^h(x,\varphi) = e_1 + c_{12}^1(x)\partial_\varphi, \quad E_2^h(x,\varphi) = e_2 + c_{12}^2(x)\partial_\varphi. \tag{12}$$

3.5 El tensor no-holonómico

Ahora consideremos el tensor no-holonómico $N : \Lambda^2(\mathcal{H}) \to V$, donde $\Lambda^2(\mathcal{H})$ es el espacio de los bi-vectores definidos en la distribución. Por definición,

$$N(X,Y) = proj_V([X,Y]). \tag{13}$$

Notemos que,

$$[E_1^h, E_2^h] = [e_1 + c_{12}^1(x)\partial_\varphi, e_2 + c_{12}^2(x)\partial_\varphi] = [e_1, e_2] + (e_2 c_{12}^1(x) - e_1 c_{12}^2(x))\partial_\varphi \\ = c_{12}^1(x)e_1 + c_{12}^2(x)e_2 + (e_1 c_{12}^2(x) - e_2 c_{12}^1(x))\partial_\varphi. \tag{14}$$

Despejando las expresiones dadas en (12) para e_1 y e_2 y sustituyéndolas en (14) obtenemos la siguiente expresión para el corchete de Lie $[E_1^h, E_2^h]$,

$$[E_1^h, E_2^h] = c_{12}^1 E_1^h + c_{12}^2 E_2^h + (e_1 c_{12}^2(x) - e_2 c_{12}^1(x) - (c_{12}^1(x))^2 - (c_{12}^2(x))^2)\partial_\varphi. \tag{15}$$

Entonces, podemos afirmar lo siguiente.

Proposición 3. *Sea $e = \{e_1, e_2\}$ un marco ortonormal en la base M, y $E^h = \{E_1^h, E_2^h\}$ su levantamiento a P definido en (12). El tensor no-holonómico N, satisface,*

$$N(E_1^h(x,\varphi), E_2^h(x,\varphi)) = K(x)\partial_\varphi \tag{16}$$

donde $K(x)$ es la curvatura seccional determinada por el marco $e = \{e_1, e_2\}$ de (M, g) en $x \in M$.

Demostración. Usando la definición de la curvatura seccional determinada por el marco $e = \{e_1, e_2\}$ de (M, g) en un punto $x \in M$

$$K(x) = \frac{K(e_1, e_2)}{|e_1 \wedge e_2|^2} = g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = R_{122}^1,$$

y usando las expresiones dadas en (8) y (11), tenemos que

$$K(x) = R_{122}^1 = e_1 c_{12}^2(x) - e_2 c_{12}^1(x) - (c_{12}^1(x))^2 - (c_{12}^2(x))^2. \tag{17}$$

Después, usando la definición (13) y la expresión obtenida en (15) se deduce nuestra afirmación. □

Observación 1. *La curvatura escalar S, la cual es la traza del tensor de Ricci R_{ij}, es decir,*

$$S = tr_g R_{ij} = R_{sij}^s, \quad S(X, Y) = g(R(X, Y)Y, X)$$

está relacionada en este caso con la curvatura seccional determinada por el marco $e = \{e_1, e_2\}$ de la siguiente manera,

$$K(x) = \frac{S(x)}{2} \tag{18}$$

4 Levantamiento de Wagner de la métrica g en M a $\hat{g}$ en P

Debemos definir una expresión $\hat{g}(X,Y)$, para cualquier par de campos vectoriales suaves en P. Dado que $TP = \mathcal{H} \oplus V$, cualquier campo se puede expresar en términos de los campos vectoriales horizontales base y el campo vectorial fundamental. Por esto, es suficiente obtener expresiones para los elementos en la base que generan a $\mathcal{H}$ y a V. A este tipo de levantamiento lo hemos llamado el levantamiento de Wagner.

Definición 1. *El levantamiento de Wagner de la métrica g de una variedad orientable Riemanniana bi-dimensional (M,g) a la métrica $\hat{g}$ del haz de marcos ortonormales orientados positivamente $P = \mathbb{SO}(M)$, con grupo estructural $SO(2)$ se define de la siguiente manera:*

1. *Si los dos campos son horizontales, definimos*

$$\hat{g}(E_a^h, E_b^h) = g(d\pi(E_a^h), d\pi(E_b^h)) = g(e_a, e_b) = \delta_{ab}$$

   lo cual muestra que el marco $E^h = \left\{E_1^h, E_2^h\right\}$ es un marco ortonormal respecto a $\hat{g}$.

2. *Si uno de los campos es horizontal y el otro vertical, definimos*

$$\hat{g}(E_a^h, \partial_\varphi) = 0.$$

3. *Por otro lado $g^\Lambda(E_1^h \wedge E_2^h, E_1^h \wedge E_2^h) = 1$ respecto a la métrica g^Λ inducida sobre el espacio de los bi-vectores en $\mathcal{H}$, $\Lambda^2(\mathcal{H})$. Por lo tanto, si los dos campos son el mismo campo y éste es vertical, definimos*

$$\hat{g}(K(x)\partial_\varphi, K(x)\partial_\varphi) = 1.$$

La última expresión en la anterior definición sólo es válida para todo $x \in M$ donde $K(x) \neq 0$. En el caso que existan puntos $x \in M$, tal que $K(x) = 0$ diremos que la métrica $\hat{g}$ tiene singularidades en dichos puntos. En adelante en este artículo consideraremos solo variedades bidimensionales M tales que $K(x) \neq 0$ para todo $x \in M$.

Definición 2. *Sea $e = \{e_1(x), e_2(x)\}$ un marco ortonormal definido sobre un abierto $U \subset M$. Sobre $P = \mathbb{SO}(M)$ definimos el campo de marcos ortonormales $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$, respecto a la métrica $\hat{g}$, así:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x,\varphi) &= E_1^h(x,\varphi) = e_1 + c_{12}^1(x)\partial_\varphi, \\ \mathcal{E}_2(x,\varphi) &= E_2^h(x,\varphi) = e_2 + c_{12}^2(x)\partial_\varphi, \\ \mathcal{E}_3(x,\varphi) &= K(x)\partial_\varphi, \end{aligned} \tag{19}$$

donde c_{ab}^c son las funciones estructurales de los campos vectoriales en M, y $K(x)$ es la curvatura seccional en el punto $x \in M$ respecto de la métrica g en M.

5 Relaciones geométricas entre M y P

5.1 Las funciones estructurales de $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$

Proposición 4. *Las funciones estructurales $\hat{c}^k_{ij}$ de $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ y las funciones estructurales c^c_{ab} de $\{e_1, e_2\}$ satisfacen:*

$$\begin{array}{lll} \hat{c}^1_{12} = c^1_{12} & \hat{c}^1_{13} = 0 & \hat{c}^1_{23} = 0 \\ \hat{c}^2_{12} = c^2_{12} & \hat{c}^2_{13} = 0 & \hat{c}^2_{23} = 0 \\ \hat{c}^3_{12} = 1 & \hat{c}^3_{13} = \frac{e_1 K}{K} & \hat{c}^3_{23} = \frac{e_2 K}{K} \end{array} \tag{20}$$

Demostración. Por definición:

$$[\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j] = \hat{c}^k_{ij}\mathcal{E}_k \quad [e_a, e_b] = c^c_{ab} e_c, \quad i,j,k = 1,2,3; a,b,c = 1,2.$$

De las ecuaciones (15) y (17) y además usando (19) de la definición (2) obtenemos

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] = [E^h_1, E^h_2] = c^1_{12}E^h_1 + c^2_{12}E^h_2 + K\partial\varphi = c^1_{12}\mathcal{E}_1 + c^2_{12}\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \tag{21}$$

Por cálculos directos tenemos que,

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3] = [e_1 + c^1_{12}(x)\partial_\varphi, K(x)\partial_\varphi] = e_1 K\partial_\varphi = \frac{e_1 K}{K}\mathcal{E}_3, \tag{22}$$

$$[\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3] = [e_2 + c^2_{12}(x)\partial_\varphi, K(x)\partial_\varphi] = e_2 K\partial_\varphi = \frac{e_2 K}{K}\mathcal{E}_3, \tag{23}$$

y de esta manera obtenemos nuestra afirmación. □

5.2 Los coeficientes de la conexión

Análogo como se obtuvo la expresión (8), podemos obtener una expresión similar, reemplazando $X = \mathcal{E}_1$, $Y = \mathcal{E}_2$, y $Z = \mathcal{E}_3$ en (7), para los coeficientes de la conexión $\hat{\nabla}$ en P.

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{c}^k_{ij} + \hat{c}^j_{ki} + \hat{c}^i_{kj}). \tag{24}$$

Proposición 5. *Los coeficientes de la conexión $\hat{\nabla}$ en P satisfacen,*

$$\begin{array}{lll} \hat{\Gamma}^1_{12} = c^1_{12} & \hat{\Gamma}^1_{13} = 0 & \hat{\Gamma}^2_{13} = -\frac{1}{2} \\ \hat{\Gamma}^1_{22} = c^2_{12} & \hat{\Gamma}^1_{23} = \frac{1}{2} & \hat{\Gamma}^2_{23} = 0 \\ \hat{\Gamma}^1_{32} = \frac{1}{2} & \hat{\Gamma}^1_{33} = \frac{e_1 K}{K} & \hat{\Gamma}^2_{33} = \frac{e_2 K}{K} \end{array} \tag{25}$$

Aquí $K = K(x)$ denota la curvatura seccional de (M, g), y $e_i K$ significa el campo vectorial e_i aplicado al campo escalar $K(x)$.

Demostración. Su demostración es directa reemplazando (20) en (24). □

5.3 Coordenadas del tensor de curvatura

De manera análoga como se obtuvo las expresiones (11) para las componentes del tensor de curvatura de Riemann en términos de los coeficientes de la conexión y de las funciones estructurales, se obtiene la siguiente expresión para los coeficientes del tensor de curvatura en P:

$$\hat{R}^l_{ijk} = \mathcal{E}_i\hat{\Gamma}^l_{jk} - \mathcal{E}_j\hat{\Gamma}^l_{ik} + \hat{\Gamma}^l_{is}\hat{\Gamma}^s_{jk} - \hat{\Gamma}^l_{js}\hat{\Gamma}^s_{ik} - \hat{c}^s_{ij}\hat{\Gamma}^l_{sk}. \tag{26}$$

Proposición 6. *Los coeficientes del tensor de curvatura $\hat{R}^l_{ijk}$ satisfacen:*

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{1212} &= \tfrac{3}{4} - K,\\
\hat{R}_{1213} &= \tfrac{e_1K}{K},\\
\hat{R}_{1232} &= \tfrac{e_2K}{K},\\
\hat{R}_{1313} &= -\tfrac{1}{4} - e_1(\tfrac{e_1K}{K}) - c^1_{12}\tfrac{e_2K}{K} + \left(\tfrac{e_1K}{K}\right)^2,\\
\hat{R}_{1323} &= -e_1(\tfrac{e_2K}{K}) + c^1_{12}\tfrac{e_1K}{K} + \tfrac{e_1K}{K}\tfrac{e_2K}{K},\\
\hat{R}_{2323} &= -\tfrac{1}{4} - e_2(\tfrac{e_2K}{K}) + c^2_{12}\tfrac{e_1K}{K} + \left(\tfrac{e_2K}{K}\right)^2
\end{aligned} \tag{27}$$

Demostración. Se obtiene de la manera directa reemplazando (19), (23) y (25) en (26). □

Observación 2. *Igualmente la curvatura escalar $\hat{S}$ de $(\mathbb{SO}(M), \hat{g})$ en términos de la curvatura escalar $S = 2K$ de M, donde K es la curvatura seccional determinada por le marco ortonormal $e = \{e_1, e_2\}$, $K = K(x) = R^1_{122}$, y de las funciones estructurales c^a_{bc}, $\nabla_{e_b}e_c = c^a_{bc}e_a$, se expresa mediante la ecuación:*

$$\begin{aligned}
\hat{S} \;=\; & 2\left(\frac{1}{4} - K - c^1_{12}\frac{e_2K}{K} + c^2_{12}\frac{e_1K}{K} - e_1\left(\frac{e_1K}{K}\right)\right.\\
& \left. -e_2\left(\frac{e_2K}{K}\right) + \left(\frac{e_1K}{K}\right)^2 + \left(\frac{e_2K}{K}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

5.4 Geodésicas

Además de las relaciones geométricas entre el haz principal de los marcos ortonormales $(\mathbb{SO}(M), \hat{g})$ y la variedad bi-dimensional base M obtenidas anteriormente, deduciremos ahora algunas relaciones entre las geodésicas de $(\mathbb{SO}(M), \hat{g})$ y de M, las cuales nos ayudarán a entender aún más la relación entre estas dos geometrías.

Teorema 3. *Sea $\hat{\gamma}$ una geodésica de la conexión $\hat{\nabla}$ sobre $(\mathbb{SO}(M), \hat{g})$, con componentes $x^i = \hat{\gamma}^i(t)$. Si denotamos por $Q^i(t)$ las componentes del campo vectorial tangente a lo largo de la geodésica $\hat{\gamma}$, es decir,*

$$\frac{d}{dt}\hat{\gamma}(t) = Q^i(t)\mathcal{E}_i|_{\gamma(t)}$$

entonces las funciones, $Q^i(t)$ satisfacen las ecuaciones

$$\frac{dQ^k}{dt} + \hat{\Gamma}^k_{ij}(\gamma(t))Q^i(t)Q^j(t) = 0. \tag{28}$$

Escribiendo término a término y usando (25), la anterior ecuación es equivalente a las ecuaciones,

$$\frac{dQ^1}{dt} + c^1_{12}Q^1Q^2 + c^2_{12}(Q^2)^2 + Q^2Q^3 + \frac{e_1K}{K}(Q^3)^2 = 0 \tag{29}$$

$$\frac{dQ^2}{dt} - c^1_{12}(Q^1)^2 - c^2_{12}Q^1Q^2 - Q^1Q^3 + \frac{e_2K}{K}(Q^3)^2 = 0 \tag{30}$$

$$\frac{dQ^3}{dt} - \frac{e_1K}{K}Q^1Q^3 - \frac{e_2K}{K}Q^2Q^3 = 0 \tag{31}$$

Demostración. Como $\hat{\gamma}$ es geodésica, esto significa que el campo vectorial tangente a $\hat{\gamma}$ se transporta paralelamente a lo largo de $\hat{\gamma}$, es decir,

$$\nabla_{\frac{\hat{\gamma}}{dt}}\frac{\hat{\gamma}}{dt} = \nabla_{\dot{\hat{\gamma}}}\dot{\hat{\gamma}} = 0.$$

Usando los marcos ortonormales $\mathcal{E}_k$ en P, tenemos $\dot{\hat{\gamma}} = \dot{\hat{\gamma}}^k\mathcal{E}_k$, y la expresión (28) se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\dot{\hat{\gamma}}^k\mathcal{E}_k}\dot{\hat{\gamma}}^s\mathcal{E}_s = 0,\\
&\dot{\hat{\gamma}}\nabla_{\mathcal{E}_k}\dot{\hat{\gamma}}^s\mathcal{E}_s = 0,\\
&\left(\ddot{\hat{\gamma}}^s + \hat{\Gamma}^s_{ij}\dot{\hat{\gamma}}^i\dot{\hat{\gamma}}^j\right)\mathcal{E}_s = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

De lo cual se deduce nuestra afirmación (28). □

Teorema 4. *Sean $\hat{\gamma}(t)$ una geodésica de la métrica $\hat{g}$ sobre P, $\gamma(t)$ la proyección sobre M de $\hat{\gamma}(t)$, para $t \in [0, a]$. Entonces:*

1. *Se satisface que*

$$\hat{g}\left(\mathcal{E}_3, \frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t)\right) = CK(\gamma(t))$$

donde C es una constante.

2. *La curva γ satisface la ecuación diferencial*

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = CKJ(\dot{\gamma}) - C^2 K\, grad\, K,$$

donde J es el operador de estructura compleja sobre M asociada a la métrica g.

3. *Si $\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t)$ es horizontal en t_0, $\hat{\gamma}$ es una curva horizontal, es decir $\hat{\gamma}$ es tangente a $\mathcal{H}$ para todo t, y γ es una geodésica de la métrica g.*

Demostración. Sea $\hat{\gamma}(t)$, $t \in [0, a]$, para algún $a \in \mathbf{R}$ una curva geodésica en la métrica $\hat{g}$ de P.

1. La expresión (31) es una ecuación diferencial sobre Q^3, y

$$\frac{e_1 K}{K} Q^1 + \frac{e_2 K}{K} Q^2 = \frac{d}{dt} \left(\log(K(\gamma(t))) \right),$$

donde la igualdad se obtiene usando la regla de la cadena. Lo cual por integración obtenemos que

$$Q^3(t)) = CK(\gamma(t))).$$

Pero $Q^3(t) = \hat{g}(\mathcal{E}_3, \dot{\hat{\gamma}}(t))$, con lo cual obtenemos lo afirmado.

2. Si en las dos ecuaciones (29) y (30) sustituimos $Q^3 = CK$, y de nuevo las re-escribimos en términos de los coeficientes de la conexión, tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales,

$$\frac{dQ^1}{dt} + \Gamma^1_{12} Q^1 Q^2 + \Gamma^1_{22} Q^2 Q^2 = -Q^2 CK - \frac{e_1 K}{K} (CK)^2, \qquad (33)$$

$$\frac{dQ^2}{dt} + \Gamma^2_{11} Q^1 Q^1 + \Gamma^2_{21} Q^2 Q^1 = Q^1 CK - \frac{e_2 K}{K} (CK)^2. \qquad (34)$$

La parte derecha de este par de ecuaciones (33) y (34) la podemos escribir en forma matricial de la siguiente manera,

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{pmatrix} CK - C^2 K\, grad(K).$$

El lado izquierdo de las ecuaciones (33) y (34), es simplemente la derivada covariante, por lo tanto estas dos ecuaciones las podemos escribir en una sola como,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = C \cdot KJ(\dot{\gamma}) - C^2 \cdot K\, grad(K) \qquad (35)$$

donde J se puede interpretar como el operador de la estructura compleja sobre M asociada a la métrica g.

3. Este resultado es consecuencia del ítem 1, pues si para un t_0, el vector tangente a la curva es horizontal, esto implica que $C = 0$, la cual es una constante y por lo tanto $Q^3(t) = 0$ lo que significa que la curva siempre será horizontal. Además obtenemos según (35) que $\gamma(t)$ también es una geodésica en M.

□

Observación 5. *El hecho que las geodésicas horizontales son proyectadas a geodésicas sobre la base es cierto en general cuando uno tiene un G-haz $\pi : P \to M$ y una métrica $\hat{g}$ G-invariante sobre P. Entonces la métrica $\hat{g}$ induce un métrica g sobre M tal que para todo $X, Y \in T_pP$ ortogonal a la fibra que pasa por $u \in P$ tenemos $\hat{g}(X, Y) = g(d\pi X, d\pi Y)$. En este caso si una geodésica $\hat{\gamma}$ de la métrica $\hat{g}$ es ortogonal a la fibra que pasa por $\hat{\gamma}(t_0)$ para un t_0, entonces para cada t la geodésica $\hat{\gamma}$ es ortogonal a la métrica de M [8].*

6 Ejemplos

Si la curvatura de la métrica g es constante diferente de cero, las fórmulas para todos los objetos geométricos sobre P se simplifican. Consideremos los casos de variedades bidimensionales de curvatura constante positiva y negativa.

6.1 Ejemplo 1: Curvatura constante positiva

Consideremos la 2-esfera $\mathbf{S}^2$ con la métrica estándar y curvatura 1. Para entender el haz principal P de marcos ortonormales orientados positivamente sobre $M = \mathbf{S}^2$, sigamos paso a paso las siguientes observaciones:

1. Un punto u en $\mathbb{SO}(M)$ es un punto x en $M = \mathbf{S}^2$ y además todos los posibles marcos ortonormales obtenidos mediante rotación a partir de algún marco $\{e_1, e_2\}$ fijado anteriormente. Este marco en x hace parte de un par de campos vectoriales fijados inicialmente sobre alguna vecindad $U \subset \mathbf{S}^2$. A un punto $u \in \mathbb{SO}(M)$ lo denotamos por $u = (x, \varphi)$, donde $x \in \mathbf{S}^2$ y φ significa la rotación del marco $\{e_1, e_2\}$ en x. Es decir φ lo podemos ver como una matriz de $SO(2)$

$$u = (x, \varphi) \in \mathbb{SO}(M), \quad x \in \mathbf{S}^2, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

2. Un punto en $\mathbb{SO}(M)$ lo podemos ver como la terna $e' = \{e'_1, e'_2, x\}$, donde $\{e'_1, e'_2\}$ es un marco ortonormal obtenido mediante rotación a partir del marco $\{e_1, e_2\}$, fijado inicialmente. Es decir, $e' = Be$, donde $B \in SO(2)$.

3. A una terna del tipo $e' = \{e'_1, e'_2, x\}$, le podemos asociar de manera biunívoca una matriz $A \in SO(3)$, colocando los vectores en su orden como columnas

de la matriz A. Por lo tanto $\mathbb{SO}(MP$ y $SO(3)$ son isomorfos, $\mathbb{SO}(M) \cong SO(3)$. El isomorfismo está definido como sigue: Un marco ortonormal con orientación positiva $\{e_1, e_2\}$ en un punto x de $\mathbf{S}^2$ está dado por un radio vector x el cual es enviado a otro marco con orientación positiva $\{e_1, e_2, x\}$ de $\mathbf{R}^3$ el cual determina una matriz en $SO(3)$.

4. Para ver la acción de $G = SO(2)$ sobre $\mathbb{SO}(M) \cong SO(3)$ debemos considerar a $SO(2)$ como un subgrupo de $SO(3)$ mediante la siguiente inclusión.

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R_B A = AB.$$

Es decir la acción es una rotación alrededor del tercer eje, que es el eje generado por x.

5. Dada una matriz $A \in SO(3)$ la tercera columna nos indica el punto $x \in \mathbf{S}^2$, la cual la podemos obtener multiplicando la matriz A por $\mathbf{k}$, donde $\mathbf{k}$ es el tercer vector coordenado de $\mathbf{R}^3$, $x = A\mathbf{k}$

$$\mathbb{SO}(M) \cong SO(3), \quad \pi : SO(3) \longrightarrow \mathbf{S}^2, \quad A \mapsto A\mathbf{k}.$$

En otras palabras el haz $\pi : \mathbb{SO}(M) \to \mathbf{S}^2$ es isomorfo al $SO(2)$-haz principal $q : SO(3) \to \mathbf{S}^2$, donde $q : A \to A\mathbf{k}$. y $SO(2)$ actúa sobre $SO(3)$ por rotaciones a derecha, $(B, A) \in SO(2) \times SO(3) \to AB$.

6. Los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, álgebra asociada al grupo de Lie $SO(3)$ e isomorfa a su haz tangente, tiene como generadores:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A estos campos vectoriales $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ les corresponden respectivamente los siguientes subgrupos uniparamétricos,

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \\ \phi_3(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y los cuales tienen ecuaciones estructurales:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1. \tag{36}$$

Es claro que el espacio de campos vectoriales fundamentes, el espacio V, está generado por el campo vectorial $\sigma(A) = A\xi_3$, $A \in SO(3)$.

Observación 6. *El haz de los marcos ortonormales es isomorfo al haz* $\mathbf{R}P^3 \to \mathbf{S}^2$*, que se puede obtener del haz de Hopf haciendo el cociente respecto a la acción estándar de* $\mathbb{Z}_2$ *sobre* $\mathbf{S}^2$*. En este caso, la métrica* $\hat{g}$ *es la métrica elíptica estándar sobre* $\mathbf{R}P^3$ *la cual a su vez se obtiene de la métrica estándar sobre* $\mathbf{S}^3$*.*

Ahora encontraremos la distribución horizontal sobre $SO(3)$ determinada por la conexión de Levi-Civita ∇ de la métrica estándar sobre M.

Tomemos el marco ortonormal $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ en el punto $\mathbf{k} \in \mathbf{S}^2$. Veamos cuales son los levantamientos horizontales de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ al correspondiente punto $I \in SO(3)$. Considere la curva $\gamma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ sobre la esfera tal que $\gamma(0) = \mathbf{k}$ y $\frac{d}{dt}\gamma(0) = \mathbf{i}$. Entonces, por propiedades del transporte paralelo respecto a ∇, obtenemos que el levantamiento horizontal γ^h de γ, tal que $\gamma^h(0) = I \in SO(3)$ es $\widetilde{\gamma}(t) = \phi_1(-t)$. Entonces, el levantamiento horizontal $\mathbf{i}^h$ del vector $\mathbf{i}$ al punto I es $\frac{d}{dt}\gamma^h(0) = -\xi_1$. Del mismo modo uno puede mostrar que el levantamiento horizontal $\mathbf{j}^h$ del vector $\mathbf{j}$ es $-\xi_2$. Además que el plano horizontal $\mathcal{H}(I)$ en $I \in SO(3)$ es generado por los vectores ξ_1, $-\xi_2$.

Ahora el grupo $SO(3)$ actúa transitivamente sobre $\mathbf{S}^2$ por isometrías. Podemos ver que la acción inducida de $SO(3)$ sobre el espacio total P del haz de marcos ortonormales de $\mathbf{S}^2$ es isomorfo a la acción izquierda de $SO(3)$ sobre sí mismo. También, porque $SO(3)$ actúa sobre $\mathbf{S}^2$ por isometrías, y así por automorfismos de la conexión de Levi-Civita, el grupo $SO(3)$ actúa sobre P por automorfismos de la distribución horizontal $\mathcal{H}$. Además, $\mathcal{H}$ es una distribución izquierdo-invariante sobre $SO(3)$, y por lo tanto $\mathcal{H}(A) = span(A\xi_1, A\xi_2)$ para cualquier $A \in SO(3)$.

Así podemos fijar $\mathcal{E}_k(A) = A\xi_k$, $k = 1, 2, 3$, y, para el campo de marcos $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$, de (36) obtenemos que

$$c_{23}^1 = c_{31}^2 = c_{12}^3 = 1,$$

y todas las otras funciones estructurales son cero.

De (16) se sigue que para el tensor no-holonómico N tenemos $N(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = -\mathcal{E}_3$. Por lo tanto, $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ es un campo de marcos ortonormales respecto a la métrica del levantamiento de Wagner $\hat{g}$ sobre $\mathbf{R}P^3$. Entonces, usando las fórmulas (27) podemos probar que $\hat{g}$ es la métrica de curvatura constante igual a 1. Esto es $(\mathbf{R}P^3, \hat{g})$ es el espacio elíptico clásico.

Observación 7. *Es bien conocido que* $q : \mathbf{R}P^3 \to \mathbf{S}^2$ *está cubierta doblemente, con dos hojas, por el haz de Hopf* $\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$*, y se puede demostrar que la métrica* $\hat{g}$ *es levantada a la métrica estándar sobre* $\mathbf{S}^3$*.*

6.2 Ejemplo 2: Curvatura constante negativa

Sea (M, g) el modelo de Poincaré del plano de Lobachevskii, esto es

$$M = \{(x^1, x^2) \mid x^2 > 0\} \quad ; \quad g = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{(x^2)^2}.$$

Consideremos el marco ortonormal global,

$$e_1 = x^2\partial_1\,; \quad e_2 = x^2\partial_2\,,$$

donde ∂_a, para $a = 1, 2$, es el marco natural del sistema de coordenadas globales (x^1, x^2) sobre M. El corchete de Lie de estos campos vectoriales es $[e_1, e_2] = -e_1$, por lo tanto las funciones estructurales en la base son: $c^1_{12} = -1$, $c^2_{12} = 0$.

Como tenemos un sistema de coordenadas globales sobre M, el haz principal P de marcos ortonormales orientados positivamente es isomorfo al haz trivial $M \times \mathbf{S}^1 \to M$, y tenemos coordenadas (x^1, x^2, φ) sobre P. Ahora podemos directamente aplicar las fórmulas (19), para encontrar el marco ortonormal sobre $M \times \mathbf{S}^1$ con respecto a la métrica $\hat{g}$ y el marco ortonormal base $\{e_1, e_2\}$. Este marco está dado por:

$$\mathcal{E}_1 = e_1 + \partial_\varphi\,, \quad \mathcal{E}_2 = e_2\,, \quad \mathcal{E}_3 = \partial_\varphi.$$

Las ecuaciones estructurales en P se pueden calcular mediante los corchetes de Lie de los campos del marco ortonormal en P, obtenidos en (21), (22) y (23). Esta son:

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] = -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3, \quad [\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3] = 0, \quad [\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1] = 0.$$

Usando las fórmulas de (27), para $K = -1$ encontramos que la métrica $\hat{g}$ sobre $P = M \times \mathbf{S}^1$ es una métrica con curvatura seccional no constante. Por ejemplo, la curvatura seccional $\hat{K}(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2)$ es $-7/4$, y $\hat{K}(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_3)$ es $1/4$. Nótese que en el caso que sea $M = \mathbf{S}^2$ la métrica $\hat{g}$ tiene curvatura seccional constante $1/4$, lo cual se obtiene de las mismas fórmulas (27) para $K = 1$.

Referencias

[1] Montgomery R., *A tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, Mathematical Surveys and Monographs, V. 91, AMS, Providence, 2002.

[2] Kobayashi S., Nomizu K.: *Foundations of Differential Geometry*, Vol I, John Wiley & Sons, N.Y., 1963.

[3] Dragovic V., Gajic B.: "The Wagner curvature tensor in nonholonomic mechanics", Regul Chotic Dyn, 2003, 8 (1), pp.105-123.

[4] Jurdjevic V.: *Geometric control theory.* Cambridge University Press, 1997.

[5] Agrachev A.A., Sachkov Yu. L.: *Lectures on geometric control theory.* Trieste, SISSA preprint, 2001.

[6] Aminov Yu.: *The geometry of vector fields*, Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 2000.

[7] Wagner V.V.: *Differencialnaja geometrija negolonomnyh mnogoobrazij* VIII mezhd. konkurs na soiskanie premii im. N. I. Lobachevskogo, 1937. [in Russian]

[8] O'Neill B.: "Submersions and geodesics". Duke Math. J. 34, 1967, pp.363-373.

[9] Shirokov A.P.: "Structures on Differentiables Manifolds", in: Algebra, Topology, Geometry, 1967, Itogui Nauka VINITI AN SSSR, Moscow, 1969, 27-188. [in Russian]

[10] Shirokov A.P.: "Structures on Differentiables Manifolds II", in: Algebra, Topology, Geometry, 1972, Itogui Nauka VINITI AN SSSR, Moscow, 1974, pp.153-207. [in Russian]

Dirección de los autores
José Ricardo Arteaga B. — Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá–Colombia
e-mail: jarteaga@uniandes.edu.co
Mikhail Malakhaltsev — Department of Mathematics, Kazan State University, Kazan–Russia
e-mail: mikhail.malakhaltsev@ksu.ru