

LA VISUALIZACIÓN EN EL ESTUDIO DE LA FÓRMULA DEL VOLUMEN DEL
PRISMA RECTANGULAR RECTO. UN ESTUDIO DE CASOS

ALEJANDRO GARCÍA RAMÍREZ

COD. 1505285

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
EDUCACIÓN MATEMÁTICA
DIRECCIÓN DE POSGRADOS

2018

LA VISUALIZACIÓN EN EL ESTUDIO DE LA FÓRMULA DEL VOLUMEN DEL
PRISMA RECTANGULAR RECTO. UN ESTUDIO DE CASOS

ALEJANDRO GARCÍA RAMÍREZ

COD. 1505285

Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Educación Énfasis en Educación Matemática

Director de trabajo de grado

Dr. GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO AVENIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRECCIÓN DE POSGRADOS

2018

AGRADECIMIENTOS

Doy infinitas gracias a Dios quien me dio la fortaleza, la sabiduría y la paciencia durante este proceso de formación.

A mi director de tesis el Dr. Gustavo Adolfo Mormolejo Avenia, quien con sus conocimientos, experiencia, exigencia, paciencia y dedicación contribuyó en la culminación de este proceso.

A los docentes de maestría, quienes contribuyeron con sus conocimientos y experiencia en mi aprendizaje y mejoramiento como profesional de la educación.

A las directivas y compañeros de la Institución Educativa Ateneo, quienes en todo momento me apoyaron con su voz de aliento para que culminara mis estudios

A mi familia, quienes me acompañaron siempre en los momentos difíciles y fueron soporte incondicional con su voz de aliento para continuar adelante.

A mis compañeros y colegas de maestría, especialmente a María Santos, Ana María, Husiel, Adriana y Rodolfo, con quienes compartimos vivencias, experiencias, conocimientos, momentos difíciles y también momentos de alegría.

A mi esposa Sara y mi hijo Arley, quienes pacientemente me alentaron en todo momento y me dieron parte de su tiempo para que realizara este proyecto, y mejorara mi vida profesional.

A los estudiantes participantes, quienes aportaron elementos para realizar este trabajo.

Finalmente, al MEN de Colombia por darme la oportunidad de realizar mi estudio de maestría.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	3
1. OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN	10
1.1 Objetivo General	10
1.2 Objetivos Específicos.....	10
1.3 Cuestiones que guían la investigación	11
1.3.1 En cuanto al objetivo general.....	11
1.3.2 En cuanto al primer y segundo objetivo específico.....	11
1.3.3 En cuanto al tercer objetivo específico	11
1.3.4 En cuanto al cuarto objetivo específico	12
2 MARCO TEÓRICO.....	13
2.1 Visualización asociada a las figuras geométricas	13
2.2 Estructuras y funciones de control visual.....	18
2.3 Aspectos históricos y matemáticos del prisma rectangular recto.....	22
3 METODOLOGÍA	26
3.1 Aproximación metodológica.....	26
3.2 Población y criterios de selección	27
3.3 Instrumentos de recolección de datos	28
3.4 Trabajo de Campo	28
3.5 Instrumento metodológico	30

3.5.1 Categoría 1: Dinamismos visuales	31
3.5.2 Categoría 2: Elementos de control visual.....	32
3.5.3 Categoría 3: Procedimientos	35
3.5.4 Categoría 4: Acciones sobre el soporte	37
3.6 Ejemplo de codificación de una tarea	38
3.6.1 Contextualización y descripción de la tarea.....	38
3.6.2 Proceso de codificación de la tarea	39
4 ANÁLISIS DE RESULTADOS	41
4.1 Análisis a priori	43
4.1.1 Propuesta de enseñanza.....	43
4.1.2 Procedimientos esperados y elementos de control incluidos	46
4.2 Análisis a posteriori.....	72
4.2.1 Roles heurísticos y grados de potencia heurísticas identificadas en la investigación	72
4.2.2 Dificultades y posibilidades de las figuras, en cada uno de los Momentos de la propuesta de enseñanza.....	82
4.3 Contraste entre análisis a priori y a posteriori.....	91
4.3.1 Influencia de los elementos de control y las estrategias visuales en el Rol heurístico asignado a las figuras 3D al construirse la FV(PRR).	91
4.3.2 Papel de los elementos de control visual y de las estrategias visuales, en el desarrollo de ideas geométricas asociadas a la construcción de FV(PRR).....	94

4.3.3 Papel de los elementos de control visual y de las estrategias visuales, en el desarrollo de ideas métricas asociadas a la construcción de FV(PRR)	96
5. Conclusiones Generales	98
Referencias Bibliográficas	103
ANEXOS.....	109
ANEXO 1: CATEGORÍA DE ANÁLISIS DINAMISMOS VISUALES	109
ANEXO 2: CATEGORÍA DE ANÁLISIS ELEMENTOS DE CONTROL VISUAL	110
ANEXO 3: CATEGORIA DE ANÁLISIS PROCEDIMIENTOS	113
ANEXO 4 CATEGORIA DE ANÁLISIS ACCIONES SOBRE EL SOPORTE.....	117
ANEXO 5 PROCEDIMIENTOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES	118

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 <i>Dinamismos visuales movilizados en la construcción de la fórmula del VPRRR</i>	32
Tabla 2 <i>Elementos de control visual considerados en los diseños de las tareas que suscitan la construcción de la fórmula de VPRR.....</i>	34
Tabla 3 <i>Procedimientos cualitativos y cuantitativos considerados al construir la fórmula para calcular VPRR y aplicarla en sólidos geométricos de formas irregulares.</i>	36
Tabla 4 <i>Acciones sobre el soporte que promueven la construcción del VPRR</i>	37
Tabla 5 <i>Codificación de la tarea 4.2 del momento 4</i>	40
Tabla 6 <i>Propuesta de enseñanza</i>	44
Tabla 7 <i>Rol de los elementos de control introducidos en la T1.1</i>	50
Tabla 8 <i>Rol de los elementos de control incluidos en la T1.2.....</i>	53
Tabla 9 <i>Rol de los elementos de control incluidos en la T2.1.....</i>	55
Tabla 10 <i>Rol de los elementos de control introducidos en la T2.2</i>	57
Tabla 11 <i>Rol de los elementos de control visual incluidos en la T2.3</i>	61
Tabla 12 <i>Rol de los elementos de control visual introducidos en la T4.1</i>	66
Tabla 13 <i>Rol de los elementos de control introducidos en la T4.2</i>	69
Tabla 14 <i>Rol de los elementos de control introducidos en la T4.3</i>	70
Tabla 15 <i>Rol de los elementos de control visual introducidos en la T4.4</i>	71
Tabla 16 <i>Roles heurísticos de las figuras, asignados por los estudiantes, al resolver las tareas propuestas</i>	82
Tabla 17 <i>Dinamismos visuales, potencias heurísticas y elementos de control en los procedimientos de los estudiantes</i>	90

INDICE DE ILUSTRACIONES

<i>Ilustración 1.</i> Representación del sólido geométrico de la tarea 4.2 del Momento 4	38
<i>Ilustración 2.</i> Desarrollo Visual de la Tarea 1.1 Momento uno.....	50
<i>Ilustración 3.</i> Desarrollo Visual Tarea 1.2 del Momento 1.	51
<i>Ilustración 4.</i> Desarrollo visual segunda parte de la Tarea 1.2 del momento 1	52
<i>Ilustración 5.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.1 del Momento 2 (primera parte).	54
<i>Ilustración 6.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.1 Del Momento 2 (parte 2).....	54
<i>Ilustración 7.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.1 del Momento 2(parte 3).....	54
<i>Ilustración 8.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.2 del Momento 2(parte 1).....	56
<i>Ilustración 9.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.2 del Momento 2(parte 2).....	56
<i>Ilustración 10.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.2 del Momento 2(parte 3).....	56
<i>Ilustración 11.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.3 del Momento 2(parte 1).....	59
<i>Ilustración 12.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.3 del Momento 2(parte 2).....	59
<i>Ilustración 13.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.3 del Momento 2(parte 3).....	59
<i>Ilustración 14.</i> Desarrollo Visual Tarea 2.3 Del Momento 2 (parte 4).....	60
<i>Ilustración 15.</i> Desarrollo Visual Tarea 4.1 del Momento 4(parte 1).....	65
<i>Ilustración 16.</i> Desarrollo Visual Tarea 4.1 del Momento 4(parte 2).....	65
<i>Ilustración 17.</i> Desarrollo Visual Tarea 4.2 del Momento 4 (parte 1).....	67
<i>Ilustración 18.</i> Desarrollo Visual Tarea 4.2 del Momento 4 (parte 2).....	67
<i>Ilustración 19.</i> Desarrollo Visual Tarea 4.2 del Momento 4 (parte 3).....	68
<i>Ilustración 20.</i> Desarrollo Visual Tarea 4.3 del Momento 4.	69
<i>Ilustración 21.</i> Desarrollo Visual Tarea 4.4 del Momento 4.	71

<i>Ilustración 22. Tarea Desarrollada Por E1, Para Rol Heurístico Operatorio.</i>	74
<i>Ilustración 23. Tarea Desarrollada Por E3, Para Rol Heurístico Operatorio-Mixto.</i>	77
<i>Ilustración 24. Tarea Desarrollada Por E2, Para el Rol Heurístico Operatorio Simple.</i>	79
<i>Ilustración 25. Procedimiento Realizado por E6. Rol Heurístico Nulo.</i>	81
<i>Ilustración 26. Ejemplificación de un Dinamismo Visual Parcial Total</i>	109
<i>Ilustración 27. Ejemplificación de un Dinamismo Visual Parcial Mixto</i>	109
<i>Ilustración 28 Ejemplificación de un Dinamismo Visual Parcial Estático</i>	110
<i>Ilustración 29 Elemento de control Proyección.</i>	110
<i>Ilustración 30 Elemento de control Fraccionamiento</i>	111
<i>Ilustración 31. Elemento de Control Visual Número de unidades</i>	111
<i>Ilustración 32. Elemento de control Posición del fraccionamiento</i>	111
<i>Ilustración 33. Elemento de control Índices</i>	112
<i>Ilustración 34 Elemento de control Contraste en tono y grosor</i>	112
<i>Ilustración 35. Elemento de control Contraste Índices</i>	112
<i>Ilustración 36. Tratamiento.</i>	113
<i>Ilustración 37. Transformación.</i>	114
<i>Ilustración 38 Procedimiento Composición.</i>	114
<i>Ilustración 39. Procedimientos Aditivos.</i>	114
<i>Ilustración 40. Procedimientos Multiplicativos</i>	115
<i>Ilustración 41. Procedimiento Conteo Uno a Uno</i>	116
<i>Ilustración 42. Procedimiento Sustitución En la Fórmula</i>	116
<i>Ilustración 43. Acciones sobre el soporte Rayado Sobre La Figura</i>	117
<i>Ilustración 44. Acciones sobre el soporte, Dibujo a Mano Alzada.</i>	117

<i>Ilustración 45.</i> Tarea 1.1 -Estudiante 1	118
<i>Ilustración 46.</i> Tarea 1.1 - Estudiante 4	118
<i>Ilustración 47.</i> Tarea 1.2- Estudiante 8	119
<i>Ilustración 48.</i> Tarea 2.1 - Estudiante 2	119
<i>Ilustración 49.</i> Tarea 2.2 - Estudiante 3	119
<i>Ilustración 50.</i> Tarea 2.3 - Estudiante 5	120
<i>Ilustración 51.</i> Tarea 3.1 - Estudiante 6	120
<i>Ilustración 52.</i> Tarea 4.1- Estudiante 1	121
<i>Ilustración 53.</i> Tarea 4.2 - Estudiante 5	121
<i>Ilustración 54.</i> Tarea 4.3 - Estudiante 2	122
<i>Ilustración 55.</i> Tarea 4.4 - Estudiante 2	122

RESUMEN

La presente investigación aporta elementos de reflexión acerca del rol de la visualización y la introducción de los elementos de control en el diseño de una propuesta de enseñanza, en el estudio de la fórmula para calcular el volumen de un prisma rectangular recto.

El estudio se realizó desde una perspectiva cualitativa, enmarcada en un estudio de casos. La población participante, son estudiantes de noveno grado de educación básica secundaria de una Institución Educativa de carácter oficial. Los datos recolectados para el análisis se obtuvieron a partir de los procedimientos de la población participante, al resolver las tareas planteadas en la propuesta de enseñanza diseñada. El instrumento de análisis está estructurado por cuatro categorías de análisis: Dinamismos visuales, Elementos de control visual, Procedimientos y Acciones sobre el soporte.

Los resultados muestran que, al introducir elementos de control visual en las tareas diseñadas en una propuesta de enseñanza, en algunos casos se promueve la visualización, mientras que, en otros, se obstaculiza (Marmolejo y González, 2013, 2015a, 2015b).

También se reflexiona acerca de la importancia de que los educadores promuevan distintas formas de enseñar el cálculo del volumen de cuerpos sólidos, y no se centre la atención únicamente en procedimientos aritméticos; una de estas posibilidades, es el considerar los procesos cognitivos que promueven la visualización (Duval, 1999, 2003, 2004; Marmolejo y Vega, 2012).

Palabras Claves: Visualización, Volumen, prisma rectangular recto, Elementos de control

ABSTRACT

The present investigation provides elements of reflection about the role of visualization and the introduction of control elements in the design of a teaching proposal, in the study of the formula to calculate the volume of a rectangular right prism.

The study was done from a qualitative perspective, it is framed in a cases study. The participating population are students of ninth grade of secondary school of an Educational Institution of official character. The data collected for the analysis were obtained from the procedures of the participating population, by solving the proposed tasks in the designed teaching sequence. The analysis instrument is structured by four categories of analysis: Visual Dynamism, Visual Control Elements, Procedures and Actions on the Support.

The results show that when, it is introduced elements of visual control, in the proposed tasks in a teaching designed, in some cases visualization is promoted, while in others, it is impeded (Marmolejo and González, 2013, 2015a, 2015b).

Moreover, the research reflects about the importance of educators promoting different ways of teaching the calculation of the volume of solid bodies, and that the attention doesn't focus only on the arithmetic procedures; One of these possibilities is to consider the cognitive processes that promote the visualization (Duval, 1999, 2003, 2004, Marmolejo and Vega, 2012).

Keywords: Volume, Straight rectangular prism, Visualization, Control Elements.

INTRODUCCIÓN

La Geometría promueve la relación con el entorno (Barrantes, Balletbo, & Fernández, 2014) y el desarrollo tanto de la comunicación (García & Guillén, 2010) como de diferentes actividades cognitivas (Duval, 1998). Entre variados aspectos, esta disciplina en la escuela considera, el estudio de los sólidos geométricos y su volumen, desde los primeros años escolares y hasta finales de la educación básica (MEN, 2006), los cuales tiene aspectos que complejizan su comprensión, y en consecuencia obstaculizan su estudio, tanto la medición y la conservación de volúmenes (Fernández & Marmolejo, 2013) como el establecimiento de relaciones (o diferencias) entre el volumen y otras magnitudes de naturaleza distinta (Sainz, 2014; Marmolejo & González, 2015). Lo anterior, se explica por prácticas de enseñanza que privilegian la exposición y aplicación de fórmulas sin mediar la construcción del volumen desde una perspectiva cualitativa (Estrada, 2002), cuestión que permite reconocer el volumen como una cualidad de los objetos y como una magnitud medible (Del Olmo, Moreno, & Gil, 1993).

También es de considerar, que construir el volumen de forma cualitativa alude a la reflexión o explicitación de acciones que establezcan relaciones de orden o equivalencia entre dos o más sólidos que medie la aplicación de unidades de medida, la construcción de fórmulas para calcular la medida del volumen de un sólido, y extender la fórmula de un sólido específico a casos distintos. Las cuestiones anteriores, ponen en acto, necesariamente, la transformación de figuras tridimensionales, que se promueve a partir de acciones, como la comparación de figuras (por ejemplo cuántas veces hay una figura en otra), la transformación de una figura en otra de forma distinta e igual volumen (por ejemplo a partir de un prisma obtener un paralelepípedo), la

comparación de una figura a partir de otra (por ejemplo con una figura como patrón, construir otra para calcular su volumen) o pasar a centrar la atención en las sub-figuras del sólido u otras partes de la figura, siendo en cada caso la misma dimensión.

Se evidencia, que el acercamiento al volumen desde una perspectiva cualitativa exige la inclusión de la visualización: que permite, entre otros aspectos, reconocer distintas organizaciones en una configuración geométrica, discriminar modificaciones de tipo configural, y posibles cambios que se puedan hacer sobre una figura geométrica en estudio (Duval, 2003). Pero, ni los profesores ni los estudiantes recurren a esta actividad cognitiva de forma espontánea e inmediata (Duval, 1998). Puntualmente, “se observa que frecuentemente en las clases de matemáticas el tema de la orientación y visualización de espacios y objetos tridimensionales es poco tratado, o planteado como actividad recreativa” (Sainz, 2014). En cuanto a los estudiantes, estudios como los de Montecino & Andrade (2013) muestran que, los estudiantes no acuden a la visualización espacial (visualización 3D, en adelante V3D) para resolver problemas.

Teniendo en cuenta que la visualización es susceptible de enseñanza (Duval, 1999), todo lo anterior establece un axioma fundamental: la inclusión de tareas que susciten, articuladamente, la reflexión sobre acciones visuales y el estudio de relaciones métricas asociadas al volumen, es esencial para suscitar la comprensión de este objeto matemático, y en consecuencia, favorecer el estudio de la geometría.

Así, pues, se evidencia la importancia de investigaciones que aporten elementos para comprender los fenómenos que subyacen al estudio del volumen desde una perspectiva visual.

No obstante, la mayoría de los estudios identificados en la presente investigación o contemplan el volumen desde un interés distinto a la visualización o consideran la visualización asociada a los sólidos sin involucrar al volumen como objeto de estudio.

En relación con la tendencia investigativa que considera el estudio del volumen desde intereses distintos al rol que desempeña la visualización en su tratamiento, Guerrero & Flores (2015), consideran que para el estudio de la medición del volumen del tetraedro regular desde una perspectiva cualitativa, es necesario usar el método de comparación directa mediante el proceso de composición y descomposición de figuras, sin emplear fórmulas. De esta forma es posible identificar los razonamientos que los estudiantes promueven al incluir fórmulas para calcular el volumen del tetraedro.

Otros estudios, como los de Agudelo & García (2016) analizan la capacidad estimativa de los estudiantes sobre la magnitud volumen, promovido por el proceso de modelación, a partir de una estrategia de enseñanza para estimar volúmenes ocupados; los resultados muestran avances, en la comprensión de la magnitud volumen, el uso de unidades de medida estandarizadas y no estandarizadas, la estimación, el reconocimiento y uso de la cantidad de magnitud.

También hay investigaciones que consideran el estudio del volumen a partir del diseño de actividades, es el caso de Monteagudo & Rivero (2016) quienes plantean actividades que promueven la resolución de problemas sobre el cálculo del volumen de un cuerpo, en un contexto determinado, a estudiantes preuniversitarios. Los resultados muestran que los problemas propuestos propician en los estudiantes la sistematización del conocimiento matemático, el desarrollo de pensamiento lógico y la apropiación de los contenidos teóricos y prácticos en estudio.

En una misma línea de ideas, Fernández & Marmolejo (2013) hicieron un estudio del diseño de tres situaciones didácticas, en las que se abordaron el tratamiento del volumen como magnitud unidimensional (proceso aditivo y medición directa), y como magnitud tridimensional (proceso multiplicativo, y medición indirecta). Los resultados mostraron, que el volumen se debe tratar de manera que permita encontrar relaciones matemáticas entre volumen y capacidad, trabajando la medición directa, la medición indirecta como un elemento arbitrario y usando los sistemas de medidas con sólidos u objetos irregulares.

En cuanto a la tendencia que involucra la visualización asociada a los sólidos geométricos, pero no al volumen como objeto de estudio, se destacan los trabajos que explicitan el rol de los ambientes informáticos en el desarrollo de la V3D, por ejemplo, Alzate (2015) analizó la influencia del programa SIMULADOR 3-D, que propicia el desarrollo de actividades para el reconocimiento visual de patrones gráficos, geométricos y numéricos, de los cuerpos en estudio.

Asimismo, ambientes informáticos que mejoran el interés y la motivación de los estudiantes y facilita el aprendizaje de los temas abordados, (Soto, Herrera, & Nappa, 2013); es el caso de Hoyos & Acosta (2014), que propusieron tareas de interpretación de objetos tridimensionales mediante desarrollos informáticos que, pretenden conceptualizar sobre sistemas de representación y potenciar la V3D.

Otros estudios, como el de Gutiérrez (1998), considera de forma articulada el rol de las representaciones que provienen de programas informáticos específicos, las maquetas de sólidos y las representaciones de sólidos en papel, en el fomento de habilidades de visualización. Puntualmente, los resultados muestran que, los movimientos de sólidos en el ordenador promueven la visualización de manera más eficaz que la que se hace con cuerpos sólidos físicos, los poliedros de caras transparentes (poliedros contruidos en varillas de plástico huecas unidas

por palitos), fomentan un análisis más complejo y dan una mejor posibilidad de visualizar sus elementos constitutivos que los opacos (poliedros con las caras cubiertas por medio de dibujos), la representación de poliedros en papel o en el ordenador obstaculiza la representación de todas sus aristas.

En la misma tendencia, pero desde un punto de vista distinto, también destacan la existencia de investigaciones que consideran el rol de materiales didácticos en el desarrollo de la V3D, es el caso de los libros de texto. En este sentido Barrantes, Balletbo & Fernández (2014), establecen que los libros de texto privilegian tareas con un bajo número de representaciones y escasa variedad (en su mayoría imágenes de sólidos estereotipadas), que poco ayudan a promover la visualización; por tanto, los educadores al considerar estos materiales educativos deben utilizar un mayor número de representaciones que, las ahí expuestas, además deben propiciar actividades manipulativas de sólidos físicos que privilegien movimientos y posiciones diferentes, así mismo deben diseñar actividades en el computador con software de geometría que permitan explorar orientaciones y propiedades de objetos y situaciones geométricas. Todo lo anterior indica que el profesor debe proporcionar a los alumnos las herramientas necesarias para introducir los sistemas de representación de figuras tridimensionales y desarrollar la visión espacial, pues los libros de texto no propician las condiciones adecuadas para tal cuestión.

De la misma manera se reportan estudios sobre el diseño de material didáctico, por ejemplo Gonzato, Fernández & Diaz Godino (2011) discriminan y clasifican distintos tipos de tareas (de orientación estática de sujetos y objetos, interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales, y de orientación del sujeto en espacios reales) que promueven la V3D. Donde el establecimiento de diferencias entre los procedimientos visuales que movilizan favorece la

planificación, por parte de los educadores, de propuestas de enseñanza que promuevan el desarrollo de la V3D.

También se reportan estudios que contemplan qué aspectos alusivos a la V3D son dejados de lado en la enseñanza de la geometría; es el caso de los realizados por Sainz (2014) al evaluar las habilidades de visualización asociadas a la aplicación de rotaciones, desarrollos planos y vistas isométricas de cuerpos tridimensionales. En este sentido se establece que la enseñanza de las matemáticas centra su atención en lo procedimental y numérico, y deja de lado cuestiones como las operaciones o transformaciones de las figuras geométricas y los procesos que requieren ver o imaginar mentalmente los objetos geométricos.

Otro aspecto, objeto de interés en esta tendencia de investigación, alude a las dificultades encontradas por los estudiantes al recurrir a la V3D. Trabajos como el de Montecino y Andrade (2013) afirman que para resolver situaciones problemas que requieren una representación de lo tridimensional, los estudiantes no recurren a la V3D, y lo asociaron con la falta de manipulación de figuras tridimensionales en el plano, reflexionan sobre la necesidad de incluir en la enseñanza de lo tridimensional la representación de figuras geométricas, y hacer de la V3D una herramienta para interpretar y comprender las representaciones icónicas y/o gráficas en un problema geométrico a resolver.

Las investigaciones reseñadas anteriormente muestran, por un lado, estudios realizados sobre V3D que dejan de lado el volumen de los cuerpos sólidos, y en otros casos, los estudios se centran en el volumen de los cuerpos sólidos sin involucrar la V3D. En este mismo sentido, en el presente trabajo de investigación, privilegiamos el estudio del volumen de los sólidos

geométricos, puntualmente, el del prisma rectangular recto, y el rol de la V3D en el estudio de la deducción de la fórmula para calcular su volumen, mediado por el diseño y aplicación de una propuesta de enseñanza.

Para reseñar lo expuesto en el párrafo anterior, el presente informe se desarrolla en cinco apartados, los dos primeros dan cuenta de los objetivos y de las preguntas que orientan la investigación, así como de los referentes teóricos considerados. El tercero corresponde a la metodología implementada, en el cuarto apartado se presentan los resultados y su discusión. Finalmente, en el quinto apartado se exponen las conclusiones generales y se proponen aspectos a considerar en futuras investigaciones.

1. OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Objetivo General

Establecer el rol de la visualización en la construcción de la fórmula para calcular la medida del volumen de un prisma rectangular recto (en adelante FV(PRR)).

1.2 Objetivos Específicos

- Discriminar qué estrategias visuales deben considerarse en tareas que favorezcan la construcción de la FV(PRR).
- Determinar qué elementos y funciones de control visual deben considerarse para favorecer la inclusión de acciones visuales en tareas que susciten la construcción de la FV(PRR).
- Identificar las acciones visuales, elementos de control visual y funciones de control visual que favorecen u obstaculizan el desarrollo de tareas que suscitan la construcción de la FV(PRR).
- Establecer relaciones entre las decisiones visuales adoptadas por los estudiantes, los elementos de control y funciones de control visual incluidos en las tareas desarrolladas y la promoción de ideas matemáticas que suscitan la construcción de la FV(PRR).

1.3 Cuestiones que guían la investigación

1.3.1 En cuanto al objetivo general

¿Cuál es el rol de la visualización y de los elementos de control visual en la construcción de la fórmula para calcular la medida del volumen de un prisma rectangular recto?

1.3.2 En cuanto al primer y segundo objetivo específico

- ¿Cuáles ideas geométricas o métricas promueven la construcción de la FV(PRR)?
¿Cuáles favorecen un acercamiento cualitativo a la construcción de la FV(PRR)?
- ¿Qué elementos de control visual deben contemplarse en tareas para que promuevan la inclusión de flujos visuales asociados a la construcción de la FV(PRR)?

1.3.3 En cuanto al tercer objetivo específico

- ¿Los elementos de control incluidos en las tareas propuestas a los estudiantes influyeron en la consideración de las acciones visuales pretendidas? ¿Cuáles composiciones de elementos de control visual privilegiaron su inclusión? ¿Cuáles la obstaculizaron?
- ¿Las acciones visuales privilegiadas en el desarrollo de las tareas suscitaron u obstaculizaron la construcción de la FV(PRR)? ¿Qué dificultades encontraron? ¿Cómo respondieron a ellas?
- ¿Qué materiales utilizados por los estudiantes influyeron positiva o negativamente en el desarrollo de las tareas propuestas? ¿Qué acciones se aplicaron sobre ellos?

- ¿La organización de los elementos y funciones de control adoptados correspondió a los niveles de complejidad visual esperados?
- ¿Los estudiantes desarrollaron su visualización al pasar de una tarea a otra? ¿Qué aspectos desarrollaron? ¿Cuáles no? ¿En el proceso qué dificultades encontraron? ¿Cómo respondieron a ellas?

1.3.4 En cuanto al cuarto objetivo específico

¿Cómo influye la sinergia de acciones visuales y elementos de control visual privilegiados en las tareas propuestas en la explicitación de ideas geométricas que favorecen la construcción de la FV(PRR)? ¿Cómo la sinergia en cuestión puede influir en la explicitación de ideas métricas que favorecen la construcción de la FV(PRR)? ¿Qué posibilidades (potencialidades y limitantes) brindó el desarrollo de las tareas propuestas para la comprensión de la construcción de la FV(PRR)?

2 MARCO TEÓRICO

A continuación, se puntualizan los referentes conceptuales que suscitaron la formulación del problema en estudio y el diseño del instrumento metodológico. En primera instancia, consideramos el análisis funcional del rol de la visualización vinculado a las figuras geométricas (Duval, 1999; 2003, 2004). Posteriormente, se establecen las nociones de estructura y función de control visual (Marmolejo & González, 2015, 2017). Finalmente, se reseña aspectos históricos y matemáticos relacionados con el volumen del prisma rectangular recto (Guillen, 1997; Del Olmo et al, 1993)

2.1 Visualización asociada a las figuras geométricas

El estudio de la geometría exige la sinergia entre tres actividades cognitivas: la construcción, el razonamiento y la visualización. Pero, para la mayoría de los estudiantes, tal articulación es una cuestión compleja, en ocasiones imposible de sobrepasar (Duval, 1998). Para lograr articular las tres actividades mencionadas anteriormente, es necesario discriminar las diferentes formas de ver que intervienen en la geometría, diferenciar el razonamiento argumentativo del deductivo y realizar actividades de construcción, cada una de forma independiente (Duval, 1998). La atención de la presente investigación recae en el primero de los aspectos reseñados.

Se asume una perspectiva teórica que considera que la visualización permite “la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas” (Marmolejo & Vega, 2012, p. 11); así mismo, la resolución, a veces

de forma sencilla, de problemas complicados (Estrada, 2002). No obstante, para la mayoría de los estudiantes, la inclusión de la visualización en el estudio de la geometría no es obvia ni es espontánea (Duval, 1998). Por tanto, reflexionar acerca de la visualización, es una cuestión que considerar en los currículos escolares (Marmolejo & Vega, 2012).

La visualización adquiere características diferentes según el tipo de registro semiótico utilizado (Duval, 1998, 2003). En esta investigación, se estudian las figuras geométricas, en particular, las de naturaleza tridimensional, las cuales son “soportes intuitivos fundamentales para dar sentido y significado a los conceptos matemáticos, y facilitar así el aprendizaje” (Marmolejo & Vega, 2012 p.10), y permiten la conducta de abducción es decir “delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración” (Duval, 1999). De acuerdo con lo anterior, el papel heurístico de las figuras es permitir que la abducción guíe la deducción (Marmolejo & Vega 2012).

En este sentido, en la geometría del espacio las figuras geométricas tridimensionales son representaciones planas en perspectiva de un cuerpo sólido:

Pero no deja de ser una representación plana, en la que la tercera dimensión no está presente sino sugerida por algunos índices, que se reconocen como variables visuales suplementarias, por ejemplo, el color, que aumenta el número de índices de unidades figurales 0,1 y 2. (Duval, 2004, p. 172).

Lo anterior causa dos limitaciones, una alude a la exclusión de toda variación en el punto de vista y la otra es que la lectura es ambigua por la ausencia de tercera dimensión (Duval, 2004).

Para caracterizar el rol de la visualización vinculada a las figuras geométricas, es necesario distinguir el tipo de aprehensión (forma de discriminar información en una configuración

geométrica) susceptible de sugerir la solución al problema planteado (Duval, 1995). Así son cuatro los tipos de aprehensión posibles: *perceptual*, *operatoria*, *discursiva* y *secuencial*, estas aprehensiones en algunos casos se subordinan unas a otras, en otros se relacionan o se oponen entre sí (Duval, 2003), pero, son las aprehensiones *operatoria*, *discursiva* y *secuencial*, las cuales determinan el estudio de la geometría, las dos primeras aprehensiones, son objeto de análisis en la presente investigación. La *aprehensión operatoria*, “se centra sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y, por consiguiente, sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen” (Duval, 1998, p.62). Las modificaciones pueden ser de tres tipos; las *mereológicas*, que ponen en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo, *las ópticas* cuando se agranda, se disminuyen o se deforma la figura inicial, y *la posicional*, corresponde a desplazar o rotar tanto la figura de partida como las sub-figuras que la componen, en relación con la orientación del campo en el que se destaca (Duval, 1998).

En cuanto a *la aprehensión discursiva*, hace referencia a la “acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas)” (Torregosa & Quesada, 2007, p. 281), y contempla el reconocimiento de unidades figural y variabilidad dimensional intra-figural (Duval, 1995). La aprehensión discursiva juega un rol importante en el estudio de las matemáticas puesto que “las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo, es decir, no basta con un simple reconocimiento perceptivo para asignar a una figura o a sus unidades constituyentes propiedades geométricas particulares” (Marmolejo, 2014, p. 38). De acuerdo con lo anterior, la aprehensión discursiva da sentido matemático a unidades figural específicas, o establece relaciones matemáticas entre ellas. Para el desarrollo de la visualización, y siguiendo los presupuestos de

Duval (1995, 1999, 2004), se deben considerar estas dos formas de discriminar información en las figuras geométricas.

Investigaciones como las de Marmolejo y González (2013, 2015) diseñaron un marco interpretativo que permite caracterizar cómo las aprehensiones operatoria y discursiva, se incluyen en tareas que suscitan el estudio de algunas magnitudes. Si bien, en dicho caso, la atención recayó en figuras geométricas bidimensionales, su adaptación al caso de la visualización 3D es posible. En este sentido, el diseño propuesto determinó diferentes tipos de operaciones visuales (reconfiguración, configuración, anamorfosis, superposición directa, fraccionamiento parcial, y fraccionamiento disjunto), cambios figurales (real e intermitente), y cambios de focalización (configural e intrafigural).

Así mismo, las operaciones visuales se entienden como “acciones que se aplican sobre la figura en estudio y que producen sobre ella transformaciones figurales” (Marmolejo & Vega, 2012, p. 17); los cambios figurales aluden “al efecto que produce en una configuración geométrica la aplicación de acciones que transforman su organización perceptual y determinan la naturaleza de la aprehensión operatoria” (Duval, 1998, p.45).

Por otro lado, los cambios de focalización corresponden a dejar de ver una figura en su totalidad y centrar la atención en las unidades (caras o 2D, segmentos o 1D, vértices o 0D) que la constituyen (Marmolejo & González, 2013).

En los procesos de visualización se suscitan tres tipos de cambios de acuerdo con la aprehensión presente: el cambio dimensional, el cambio de anclaje y el cambio configural. El cambio dimensional corresponde “al proceso de identificación de configuraciones de dimensión diferente a la inicial” (Torregosa & Quesada 2007, p.285), está presente en cualquiera de las aprehensiones, su naturaleza puede ser fija si se deja de centrar la atención en la figura tridimensional para enfocarse en las unidades constituyentes 2D, 1D, y 0D (Marmolejo & González, 2013),” por desdoblamiento, si al menos una de las unidades dimensión 0,1 o 2 que constituyen la figura de partida es discriminada de manera independiente de la figura de la cual forma parte, a la vez que se asume como un elemento constitutivo en dos o más sub-figuras o sub-configuraciones distintas presentes en la figura de inicio y sobre las cuales se reflexiona” (Marmolejo & González, 2013, pág. 86)

Por su parte, el cambio de anclaje está asociado a la aprehensión discursiva, permite cambiar de representación en una situación propuesta (discursivo a visual, y de visual a discursivo). Finalmente el cambio configural, asociado a la aprehensión operatoria, “consiste en modificar la configuración inicial de una figura” (Torregosa & Quesada, 2007,p. 286).

Tanto la aprehensión operatoria como la discursiva son susceptibles de enseñanza, en relación con el desarrollo de la aprehensión operatoria, es necesario que la tarea propuesta cumpla con las condiciones:

Su resolución no debe implicar ninguna actividad de razonamiento que exija la utilización de definiciones o de teoremas. No exige la aplicación de cambios dimensionales en la manera de ver la secuencia de sub-figuras explicitadas. El ejercicio debe tener lugar en

una serie organizada en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad que facilite o retarde la aprehensión operatoria. (Duval, 1999 p.167)

Por otro lado, para el desarrollo de la aprehensión discursiva, es necesaria la articulación entre discurso y figuras, que depende de “una deconstrucción dimensional de la manera normal de ver en las figuras” (Duval, 2004, p. 19)

2.2 Estructuras y funciones de control visual

La meta-cognición se considera como el conocimiento sobre los propios procesos y productos cognitivos, las propiedades de la información, los datos relevantes para el aprendizaje (Flavell, 1976). Entre variados aspectos, según Flavell (1993) citado por Ortiz & Valencia(2017), alude al conocimiento de sí mismo, y se refiere a lo que un individuo debe saber sobre sí, en cuanto a cómo aprende, sus habilidades y debilidades; el conocimiento de la tarea propuesta, que apuntan a las acciones cognitivas que se deben emplear para resolver una tarea; y el conocimiento de las estrategias, que corresponde al conocimiento que tiene un individuo de las maniobras alternativas para resolver una tarea.

Por otro lado, siguiendo a Balachef & Gaudin (2010) citado por Marmolejo & González (2015), aluden a estructuras de control, para referirse a todo conjunto de elementos y estrategias, que en el desarrollo y comprensión de una actividad matemática, permiten expresar los medios necesarios para realizar selecciones, tomar decisiones y promover juicios acerca de la relevancia de una acción, o si un problema está resuelto. En torno a la visualización, las estructuras de control visual contemplan uno o varios elementos y/o estrategias que direccionan o enfatizan el

control ejercido, siendo elementos generadores de control visual, “aquellos elementos y estrategias que caracterizan una estructura de control visual” (Marmolejo y González, 2015, p.310)

Estudio como el de Marmolejo & González (2015) evidencian cuatro estructuras de control asociadas a la visualización de figuras geométricas: el procedimiento, iconismo, contenido y visibilidad. Por su parte el *Procedimiento* “alude al tipo de visualización mostrado en una tarea donde el control puede ser ejercido de forma directa, por replica o por referencia” (Marmolejo & González, 2015, p.313). *El Iconismo*, es la representación por medio de una figura de un objeto o acción física (Marmolejo & González, 2015).

La estructura de control *Contenido*, por su parte, se refiere a la visualización que de manera explícita o implícita se encuentra en el contenido en estudio, y se evidencia de dos maneras: al mencionar definiciones de objetos matemáticos, fórmulas o propiedades que el desarrollo de la tarea exige aplicar, o si en la consigna de la tarea propuesta o en el proceso de desarrollo se muestran definiciones, propiedades o relaciones de objetos distintos a los métricos en estudio que se introducen de manera previa (Marmolejo & González, 2015). Finalmente, la estructura *Visibilidad*, está presente “si en una figura se introducen elementos, o si algunas de sus características privilegian u obstaculizan formas de ver en detrimento de otras” (Marmolejo, 2014 pág. 137); estos elementos pueden ser factores de visibilidad y elementos de contraste e índices. Los primeros son elementos que destacan la forma de una configuración y promueven la aplicación de una operación, y los segundos son elementos introducidos en las figuras que determinan aspectos visuales (Duval, 1995; Padilla, 1992).

Según la naturaleza de la estructura de control incluida en las tareas de una propuesta de enseñanza, la visualización puede ser promovida u obstaculizada; por ejemplo, en el desarrollo de la aprehensión operatoria las tareas propuestas están en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad que facilite o retarde su discriminación (Padilla, 1992; Duval, 1999).

Es importante mencionar que los elementos de control contraste de la estructura visibilidad (color, intensidad y grosor) y los índices (notaciones suplementarias) no se consideran variables visuales semióticamente pertinentes, pero son utilizados para mejorar basados en la discriminación de: unidades constituyentes de una configuración, del tipo de aprehensión operatoria a considerar, guiar o reforzar la aplicación de cambios dimensionales, determinar el tipo de aprehensión discursiva a aplicar, influenciar positivamente los flujos visuales y el cambio de focalización (Marmolejo, 2014).

Por su parte, la estructura iconismo promueve una falsa reflexión sobre la visualización asociada al registro semiótico de las figuras, y como elemento de control “no solo genera ambivalencias de naturaleza semiótica y cognitiva, sino que introduce ambivalencias contextuales y serias dificultades para el desarrollo no solo de la visualización sino de los contenidos matemáticos tratados en la escuela” (Marmolejo, 2014, p.157).

Así mismo, si la visibilidad o el iconismo no están presentes, entonces es la lengua natural la que determina los tipos de visualización, siendo el contenido y/o el procedimiento los elementos de control incluidos (Duval, 1999).

Dentro de este contexto del desarrollo de la visualización, además de las estructuras de control, también se consideran las funciones de control visual, que se caracterizan de acuerdo con la cantidad de elementos generadores de control y al número de elementos de visualización considerados en las tareas propuestas. De acuerdo con Marmolejo & González(2015), son tres las funciones de control visual a contemplar: *simple* o *disjunta*, *por refuerzo* y *ambigua*.

La Función simple o disjunta, “si el elemento o los elementos generadores de control producen, parcial o totalmente, un tipo de visualización específico y pertinente a la resolución de la tarea planteada” (Marmolejo & González, 2015, pág. 320). Es simple si solo un elemento de control está presente, y disjunta si son varios los elementos de control considerados, y cada uno de ellos genera control en distintas partes de la secuencia visual (Marmolejo & González, 2015).

El desarrollo de la visualización exige el diseño y aplicación de tareas que vayan de una menor a una mayor complejidad (Duval, 1999), Lo anterior implica que en las tareas de menor complejidad, los elementos de control están bien definidos y la visualización queda determinada, mientras en las tareas en donde el control está parcialmente enfatizado, la visualización no queda totalmente definida. (Marmolejo & González, 2017)

La Función por refuerzo, “cuando son varios los elementos generadores de control introducidos en la actividad o tarea, que en conjunto imponen una única manera de ver pertinente a su desarrollo o comprensión” (Marmolejo & González, 2015, pág. 321). En este tipo de función los elementos de control considerados hacen que se centre la atención en un mismo aspecto de la secuencia visual (Marmolejo & González , 2017).

La Función ambigua, se produce cuando varios elementos ejercen control sobre el tipo de visualización, unos promueven visualizaciones pertinentes, para la solución de la tarea; mientras

que otros, generan visualizaciones distintas a las tratadas en los tópicos en estudio y no son pertinentes en solución de la tarea. También puede introducirse por la presencia parcial de elementos de control (Marmolejo & González, 2015). Esta función puede ser un obstáculo para el desarrollo de la visualización, cuando en una tarea la figura no es un soporte a la intuición (Marmolejo & González, 2017 siguiendo a Mesquita, 1989); pero también la promueve, “si la tarea es diseñada para evaluar la capacidad visual de un sujeto, por lo que deben considerarse las que brinden un mayor grado de autonomía a quien intenta resolverlas para que seleccione el tipo de visualización apropiado” (Marmolejo & González, 2017, p.8).

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, es importante tener en cuenta en el diseño de una tarea, la introducción de elementos de control visual, en algunos casos permiten a quien la realiza generar ideas y estrategias para resolverla en otras obstaculiza la manera de ver en una figura.

2.3 Aspectos históricos y matemáticos del prisma rectangular recto

El tratamiento del volumen de los sólidos geométricos ha sido abordado de distintas maneras a través del tiempo, en la edad antigua, según Baquero (2014) siguiendo a (Del olmo et al, (1993) y a Kline (1992)), para los Babilonios la noción de volumen está relacionada con la cantidad de ladrillos necesarias para la construcción de una edificación, para lograrlo, calculaban el volumen del prisma rectangular recto, cilindros y troncos de cono a partir de la altura h y los perímetros de las bases. Por su parte en Egipto, el volumen fue utilizado para el almacenamiento de grano, tenían fórmulas para el cálculo del volumen de cubos, pirámides y cilindros. Lo anterior les permitió usar el volumen, para establecer medidas de capacidad. De la misma manera la civilización China, usaron fórmulas correctas para calcular el volumen de los prismas triangulares, cuadrangulares, pirámides de base cuadrada y troncos de pirámide, a partir la medida de un lado y de la altura. Finalmente, los griegos hicieron grandes aportes a la geometría y de manera significativa al estudio de la medida del

volumen, en este sentido, Euclides quien describió en el libro doce el desarrollo de fórmulas para el cálculo del volumen de esferas, conos y pirámides por medio de la comparación y el método de exhaustión. Otro estudio sobre el volumen es el propuesto por Demócrito quien estableció una fórmula correcta para medir el volumen de la pirámide y del cono. Imaginó que los sólidos estaban formados por capas, idea que posteriormente desarrollo Cavalieri.

Así mismo, a Eudoxo de Cnido se le atribuye el método exhaustivo (dividir un sólido en otros de menor tamaño) para el cálculo del volumen de sólidos geométricos. Transcurrieron 1800 años para generar cambios en las concepciones en geometría, especialmente en el volumen de los sólidos geométricos. Es Bonaventura Cavalieri, quien propone la idea de calcular el volumen de un sólido, a partir de otro de menor tamaño, y se hace al establecer una razón entre sus áreas a una misma altura. Por su parte Kepler desarrollo un método para el cálculo del volumen de toneles de vino, a partir de seccionarlos en pequeños cilindros, a los que luego les calculaba el volumen, que al sumarlos le proporcionaba el volumen del tonel de vino. Finalmente, en la época moderna, se destacan los estudios de Newton propuso la derivada que permite el cálculo del volumen representados por funciones. Así mismo Leibniz, haciendo uso del cálculo infinitesimal, y específicamente de las técnicas de integración, simplifica el método de hallar el volumen de un sólido al relacionarlo con una función que limita una porción del plano cartesiano.

Por otro lado, uno de los objetivos en la enseñanza de la Geometría en el nivel secundario “es el estudio de las propiedades de las figuras de los cuerpos geométricos” (Maris et al, 2013, pág. 60).

El estudio de la medida del volumen de los sólidos geométricos, se puede hacer desde dos perspectivas: como magnitud unidimensional o como una magnitud tridimensional (Del Olmo et al, 1993, citando a Vergneaud), tratar el volumen como magnitud unidimensional, exige que se aborde como una medición directa y procesos aditivos; mientras que, si se trata como una

magnitud tridimensional, implica una medición indirecta y procesos multiplicativos (Fernández & Marmolejo, 2013)

Según Fernández & Marmolejo (2013) siguiendo a Chamorro, 2003), estudiar el volumen como magnitud unidimensional, proceso aditivo y medida directa, implica la asignación de un número, a la cantidad de veces que se repite una unidad patrón de medida mediante un proceso de medición directa. Así mismo, tratar el volumen como magnitud tridimensional, medida indirecta y proceso multiplicativo, implica que al calcular el volumen de un sólido geométrico (por ejemplo, el de un paralelepípedo) se realice un proceso multiplicativo de la altura por el ancho y por el largo, este procedimiento permite el reconocimiento de la tridimensionalidad, así como la medición indirecta del sólido, debido a que no hay comparación con una unidad patrón de medida.

En la presente investigación, el objeto matemático de estudio es el prisma rectangular recto. Se llaman prismas rectos a “los poliedros que se forman cuando se juntan con rectángulos los lados correspondientes de dos polígonos iguales. Las dos caras que son polígonos iguales y que están unidas por rectángulos son las bases del prisma y las caras que juntan estas bases son las caras laterales del prisma” (Guillen, 1997, pág. 17)

Una forma de obtener la fórmula para calcular la medida del volumen de un prisma es a partir del postulado de la unidad y del principio de Cavalieri. Por su parte el postulado de la unidad indica que dado un paralelepípedo recto, su volumen es el producto del área de la base por su altura. Teniendo en cuenta este postulado, Cavalieri desarrolló el volumen de un sólido como la comparación entre las áreas de todas las secciones transversales de otro sólido con igual altura. Estas secciones fueron llamadas como indivisibles. A partir de este análisis se desarrolla su principio: “Dados dos sólidos de igual altura y con sus bases pertenecientes al mismo plano M , se tiene que para todo plano paralelo a

M que genere con cada sólido una sección transversal de igual área, entonces, los cuerpos tienen igual volumen”.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, para el calcular del volumen de un prisma se construye un paralelepípedo rectangular de igual área de su base e igual altura. Haciendo uso del principio de Cavalieri y del principio de la unidad, es posible establecer que el volumen del prisma es igual al volumen del paralelepípedo, por lo tanto, el volumen del prisma es producto del área de su base por su altura (Del Olmo, et al, 1993)

Otra manera de deducir la fórmula para el cálculo del volumen de un prisma según Pogorélov (1974) es

Consideremos ahora un prisma cualquiera. Dividamos su base en triángulos. Sea Δ uno de ellos. Tracemos la recta que pasa por un punto cualquiera X del triángulo Δ y que es paralela a las aristas laterales. Sea ax el segmento de esta recta perteneciente al prisma. Si el punto X describe el triángulo Δ , los segmentos ax forman un prisma triangular.

Construyendo tal prisma para todo triángulo Δ , lograremos dividir el prisma inicial en triangulares. Todos estos prismas tienen una misma altura igual a la altura del prisma inicial.

El volumen del prisma inicial es igual a la suma de los volúmenes de los prismas triangulares que lo componen. Según lo demostrado, el volumen del prisma triangular es igual al producto del área de su base por la altura. De aquí se deduce que el volumen del prisma inicial es

$$V = S_1H + S_2H + \dots + S_nH = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) H$$
 Donde $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ son las áreas de los triángulos Δ en que ha sido dividida la base del prisma. Pero la suma de las áreas de los triángulos Δ es igual al área S de la base del prisma inicial. Por eso, $V = SH$. Por consiguiente, el volumen de todo prisma es igual al producto del área de su base por la altura.

3 METODOLOGÍA

En este apartado se describe la metodología utilizada en la presente investigación.

Inicialmente, se establece la naturaleza del estudio realizado, luego se presenta la población considerada y los criterios de selección; asimismo, se describen los instrumentos utilizados para la recolección de datos. A continuación, se define, tipifica y ejemplifica el instrumento metodológico diseñado, también se muestra un ejemplo de codificación de un fragmento de la intervención de uno de los casos analizados. Finalmente, se exponen los criterios considerados para el análisis de datos.

3.1 Aproximación metodológica

El presente trabajo se realizó en el marco de la investigación cualitativa, pues, pretende comprender y explorar los fenómenos en un contexto desde una perspectiva de los participantes en un ambiente natural (Hernández Sampieri, Fernández, & Baptista, 2010). Se consideró, el método estudio de caso (tipo intrínseco), puesto que, se quiere aprender de él sin generar una teoría ni generalizar los datos.

Así mismo, con el propósito de describir y explicar los procesos cognitivos adoptados por los estudiantes que participaron en la investigación, en la recolección, selección y análisis de los datos se utilizó un método inductivo particular, se implementaron categorías que fueron extraídas de las producciones realizada por los estudiantes, de los que se extraen conclusiones generales (Bisquerra, 1989).

3.2 Población y criterios de selección

En la investigación participaron un grupo de estudiantes (niños y niñas), cuyas edades oscilan entre los 15 y 16 años que cursan el grado noveno de la educación básica secundaria en la Institución Educativa Ateneo, de carácter oficial y orientación empresarial ubicada en el municipio de Pradera Valle del Cauca. Los estudiantes asisten regularmente a clase, en la jornada de la tarde, en su mayoría pertenecen al estrato socioeconómico 1 y 2.

La aplicación de la propuesta de enseñanza, inicialmente se realizó con la totalidad de los 32 estudiantes que componían el curso en donde el docente investigador, regularmente orienta una hora de geometría a la semana, teniendo en cuenta la organización del currículo de matemáticas en la Institución Educativa.

El trabajo en el aula se inició orientando a todos los estudiantes sobre las posibles acciones a aplicar en las figuras en la realización de las tareas diseñadas. Posteriormente para sistematizar la información recolectada y analizarla, a partir del método de estudio de casos, se eligieron 10 estudiantes que fueron los casos a sistematizar y analizar. La elección de los estudiantes se hizo de acuerdo con sus niveles de desempeño en geometría, y atendiendo lo estipulado en la escala nacional (MEN, 2009), 3 estudiantes con desempeño alto (en adelante E1, E2, E3), 4 estudiantes con desempeño básico (en adelante E4,E5,E6 y E7), finalmente 3 estudiantes con desempeño bajo(en adelante E8,E9 y E10).

3.3 Instrumentos de recolección de datos

La recolección de los datos se hizo mediante una observación participante (Taylor & Bogdan, 1986): una estrategia de indagación en la que el investigador se involucra en el ambiente cotidiano de los sujetos e informantes, recogiendo datos de un modo sistemático y no intrusivo. Para tal fin, se consideraron los audios y vídeos grabados durante el desarrollo de las sesiones, las producciones escritas de los estudiantes, la elicitación de los procedimientos de resolución de los estudiantes al resolver las tareas utilizadas en la investigación, las explicaciones narradas y los cuestionamientos que responden los estudiantes durante el transcurso de cada una de las sesiones. en el Anexo 5 se presentan procedimientos de algunos de los estudiantes al realizar tareas puntuales en el presente estudio.

3.4 Trabajo de Campo

La propuesta de enseñanza diseñada que se aplicó a los estudiantes se estructuró, en 4 momentos, compuestos por 7 tareas y 2 definiciones. Los momentos corresponden, a la forma secuencial en la que se organizó las actividades que realizaron los estudiantes. Por su parte las tareas son las actividades que se propusieron mediante enunciados y figuras para ser realizadas por los estudiantes, estas se establecieron de manera creciente en su complejidad, pues el desarrollo de la visualización así lo contempla (Duval, 1999). Finalmente, las definiciones, que aludieron al concepto de volumen y al de centímetro cúbico.

El trabajo con los estudiantes se desarrolló durante 6 sesiones de 2 horas cada una, en jornada contraria a la que asisten normalmente los estudiantes a clase, debido a que en la jornada regular solo se cuenta con un periodo académico de 55 minutos, cuestión que no favorecía el desarrollo de las tareas dada su complejidad establecida en el momento de su diseño, de acuerdo con los elementos de control introducidos. Para la puesta en marcha del trabajo con los estudiantes, el docente investigador organizó un cronograma con las fechas y horarios de cada sesión y las socializó con las directivas de la institución, los acudientes y los estudiantes.

En cada sesión, los estudiantes trabajaron de manera individual en la realización de las tareas diseñadas, para el trabajo en clase se suministró a los estudiantes fotocopias de cada uno de los momentos de la propuesta de enseñanza, instrumentos de trazo para el trabajo geométrico, básicamente regla y escuadra.

Los estudiantes en el aula de clase se ubicaron libremente. Al inicio de cada momento el docente investigador, hizo lectura de las consignas de cada tarea y de manera explicativa, orientó a los estudiantes, dando las respectivas indicaciones con relación a las tareas a desarrollar. En este sentido se hizo énfasis en realizar una lectura minuciosa de las consignas, también que se observara de manera detallada cada una de las figuras, en las respectivas tareas, también se orientó sobre las distintas acciones que se podían hacer en ellas, entre otras: trazos sobre las figuras, descomponerlas, reacomodarlas con configuraciones distintas, mover partes constitutivas, rotarlas, trasladarlas. Con relación al material de trabajo, se indicó a los estudiantes que lo podían rayar, doblar o cortar.

Durante las sesiones, los estudiantes interactuaron entre ellos y con el docente, quien hizo aclaraciones y orientaciones con relación al desarrollo de las tareas. Luego de realizadas las tareas, cada estudiante hizo registro por escrito en las hojas de trabajo o en hojas adicionales de

los procedimientos que realizaron; una vez terminada esta parte del trabajo, cada uno, de forma expositiva describió oralmente los procedimientos que desarrolló en la elaboración de cada una de las tareas, justificaron sus procedimientos y los resultados obtenidos. Todas las acciones de los estudiantes y el docente investigador quedaron registradas en vídeos tomados por dos cámaras: una estática, que se ubicó en el aula de clase, con la que se grabó constantemente a todo el grupo de estudiantes; y otra móvil (manipulada por una persona externa a la investigación), con la que se grabó las diferentes intervenciones del docente y de los estudiantes, cuando se realizaron exposiciones o consultas explicativas. También se hizo un registro mediante grabaciones de audio de las intervenciones de los estudiantes.

Después de cada sesión, teniendo como insumo las grabaciones, los audios y los escritos de los estudiantes, el docente investigador hizo la transcripción de la información. Los datos suministrados por la información recolectada en las transcripciones, se utilizó para establecer las categorías análisis, hacer una sistematización de los datos mediante un análisis *a posteriori* y contrastarlos con los datos suministrados en el análisis *a priori*.

3.5 Instrumento metodológico

El instrumento metodológico considerado en la investigación contempló cuatro categorías de análisis: dinamismos visuales (Marmolejo y González, 2017), elementos de control visual (Marmolejo & González, 2013; Marmolejo, 2014), procedimientos (Estrada, 2002; Guerreiro & Flores, 2015; Guerrero, 2014; Del Olmo, Moreno & Gil, 1993; Agudelo & García, 2016); y acciones sobre el soporte (Moreno, 2004). Mientras que las dos primeras categorías de análisis fueron consideradas previo a la aplicación de las tareas y las que determinaron los diseños

realizados; la restantes se extrajeron directamente de las formas como los estudiantes reaccionaron ante la resolución de las tareas propuestas.

En lo que sigue se definen las categorías de análisis reseñadas y se tipifica cómo aparecen en la investigación (descriptores); en los Anexos 1, 2,3 y 4 se consideran algunas producciones de los estudiantes para ejemplificar, respectivamente, cada uno de los descriptores de las categorías en cuestión.

3.5.1 Categoría 1: Dinamismos visuales

Corresponde al carácter dinámico o estático que la visualización promueve en la(s) figura(s) en estudio en una tarea propuesta, promueve las acciones de tipo cognitivo a realizar sobre las figuras y permitirá establecer la complejidad visual (Marmolejo 2014), en este caso en el tratamiento del volumen en las tareas propuestas. Son cinco los elementos que determinan un dinamismo visual, a saber: operaciones aplicadas sobre la figura en estudio (reconfiguración simple, configuración por reiteración, fraccionamiento), los cambios figurales producidos por efecto de la operación aplicada, los cambios dimensionales (fijo y desdoblamiento) y de focalización promovidos (configural e intra-figural), y el flujo visual instaurado (Marmolejo, 2014).

Los dinamismos visuales considerados, promueven diferentes tipos de visualización en las figuras propuestas, que ayudan en la deducción de procedimientos para el cálculo del VPRR a partir de acciones cualitativas; por otro lado, los niveles de complejidad en la visualización

introducidos, proporciona elementos que llevan a considerar procedimientos visuales distintos en la solución de las tareas.

Fueron tres los dinamismos visuales identificados en el estudio: parcial total, parcial mixto y estático, todos coincidieron con los expuestos en Marmolejo y González (2013) al estudiar la visualización en las figuras bidimensionales y enmarcada en el estudio del área de superficies planas.

En la Tabla 1 se definen los dinamismos visuales reseñados anteriormente.

Tabla 1

Dinamismos visuales movilizados en la construcción de la fórmula del VPRRR

Parcial total	Se presenta si se aplican operaciones (reconfiguración simple, configuración por reiteración, fraccionamiento) sobre la figura, hay cambio figural (mereológico), hay cambios dimensionales operatorios, existen cambios de focalización (Marmolejo, 2014).
Parcial mixto	Contribuye en la discriminación de unidades figurales de dimensión uno y dos, permite que en un sólido geométrico se identifiquen sub-figuras que lo conforman, contribuye en el cálculo de la medida volumen de un sólido geométrico de manera cualitativa. En este dinamismo, se consideran operaciones (refraccionamiento, configuración) cambio dimensional operatorio y cambio de focalización intrafigural (Marmolejo, 2014)
Estático	Si se incluye de forma exclusiva cambios dimensionales de naturaleza fija, no se consideran las operaciones, ni cambios en la figura (Marmolejo, 2014). Este tipo de dinamismo obstaculiza la visualización en las figuras, puesto que no considera operaciones visuales y el cambio dimensional presente es fijo, solo permite reconocer el sólido geométrico de manera total. Este dinamismo está presente en situaciones en que el cálculo del VPRR se hace con la aplicación de la fórmula obtenida

Fuente: Este estudio. Elaboración Propia

3.5.2 Categoría 2: Elementos de control visual

Cuestión metacognitiva, permite que en una tarea sea mayor o menor el grado de visualización (Padilla, 1992; Duval. 1999). Son atributos introducidos, que contribuyen u obstaculizan las maneras de ver y proceder en las figuras al realizar una tarea (Marmolejo & González, 2013).

En cuanto a los elementos de control introducidos en las tareas propuestas que suscitaron los dinamismos visuales reseñados en la primera de las categorías, por un lado, promueven la visualización en los sólidos geométricos si ayudan en el reconocimiento de procedimientos visuales para calcular el VPRR, y la obstaculizan, cuando dificultan las maneras de ver en la figura constituyéndola en un elemento estático en la solución de la tarea.

Si bien fueron varios los elementos de control visual que intervinieron en el estudio de las figuras, en la investigación la atención recayó en los elementos de control visibilidad, entendidos estos como “elementos que destacan el atributo de forma en una configuración y suscitan la aplicación de operaciones particulares” (Marmolejo & Gonzalez, 2015, pág. 316).

Investigaciones como las de (Duval 1999, 2003; Padilla, 1992) han identificado que los factores de visibilidad son importantes porque ayudan o dificultan las maneras de ver en una actividad matemática.

En esta investigación los factores de visibilidad (perspectiva, fraccionamiento, número de unidades, posición del fraccionamiento, índices, y el contraste en tono y grosor) que fueron incluidos en el diseño de las tareas, en algunos casos contribuyeron a la visualización en las figuras, convirtiéndolas en verdaderos soportes heurísticos, y en otros ayudaron en el grado de dificultad de la tarea propuesta.

En la Tabla 2 se definen los elementos de control visual introducido en la investigación y en el Anexo 2 se exponen ejemplos para cada uno de ellos.

Tabla 2

Elementos de control visual considerados en los diseños de las tareas que suscitan la construcción de la fórmula de VPRR

Factores de visibilidad	
Perspectiva	<i>Caballera</i>: “representa nuestra visión real de los cubos, en la que las aristas más distantes se ven más pequeñas y las líneas paralelas que se alejan se ven convergentes” (Gutiérrez, 1998, p. 196). Obstaculiza la manera de ver en un sólido geométrico debido a que no permite ver totalmente las unidades que lo constituyen <i>Paralela o dimétrica</i>: “análoga a la perspectiva caballera excepto en que las líneas paralelas se representan siempre como paralelas, independientemente de su dirección. Este tipo de proyección distorsiona la visión real de los sólidos” (p. 196). <i>Isométrica</i>: “caso particular de la Proyección paralela, donde los cubos se sitúan de forma que las tres aristas que salen de determinado vértice se dibujan con la misma longitud y forman ángulos de 120°” (p. 196).
Fraccionamiento	<i>Lineal</i>: es cuando en una figura se presenta unidades figurales 1D con líneas punteadas que conforman un patrón de medida 3D. <i>Número</i>: se presenta en una figura, cuando se muestran las medidas de las longitudes de las unidades figurales 1D, que conforman el cuerpo sólido. <i>Parcial</i>: se presenta en la figura cuando se muestra la medida de solo una parte de las unidades figurales 1D que compone una unidad de medida 3D. El fraccionamiento permite discriminar las unidades que constituyen un sólido, obstaculiza la visualización en las figuras y dificulta hacer operaciones sobre ellas
Número de unidades	Cantidad de unidades de medida que deben considerarse al calcular la medida del volumen de un sólido geométrico.
Posición del fraccionamiento	Posición en que se encuentra un fraccionamiento de unidades figurales 3D que componen un cuerpo sólido geométrico. Dificulta la manera de ver en la figura, obstaculiza la identificación de las unidades patrón que constituyen un sólido geométrico
Índices	“Alude a la introducción de elementos suplementarios que resaltan unidades a considerar o que guían la manera de ver” (Marmolejo y González, 2015A, p. 318). Ayuda a una buena visibilidad en las figuras y contribuye en la identificación de las medidas en las figuras
Contraste en tono y grosor	Diferencia entre las unidades de dimensión 1 que conforman el contorno de la figura en estudio y las que conforman las unidades 3D (Marmolejo & González, 2015). Permite identificar las unidades de dimensión uno en las figuras y diferenciarlas de elementos que se han introducido en las figuras (medidas de los contornos)

Fuente: este estudio. Elaboración propia

3.5.3 Categoría 3: Procedimientos

Asunto que trata los procesos de naturaleza cualitativa y cuantitativa que los estudiantes contemplaron al construir la fórmula del VPRR y aplicarla para calcular la medida del volumen de sólidos geométricos irregulares. Las acciones cualitativas consideran la identificación del volumen como un atributo medible en un sólido geométrico (Agudelo & García, 2016), la comparación de sólidos según sus cantidades de magnitudes (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993), establecimiento de relaciones de orden o equivalencia entre sólidos geométricos a partir del espacio que ocupan, es el caso de la congruencia, equivalencia (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993) y la conservación del volumen, es decir, la construcción de sólidos geométricos de contorno global distinto pero de igual volumen de otra previamente dada (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993). En cuanto a las acciones cuantitativas, incluyen la aplicación de operaciones aritméticas: suma, resta multiplicación y división (Agudelo & García, 2016, citando a Chamorro, 1995), el conteo de unidades de medida, sumas reiterativas y la sustitución de valores numéricos en fórmulas.

Los procesos cualitativos en el cálculo del volumen de los sólidos geométricos contribuyen al reconocimiento del volumen como una magnitud susceptible de ser medida, “que permitan aislarla, comparar objetos respecto de ella, plantear la necesidad de una unidad de medida, conocer y usar las diferentes unidades, estimar la medida del volumen de un objeto” (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993). Los procesos cualitativos también aportan elementos para la deducción de la fórmula matemática del cálculo de volumen de sólidos geométricos, es el caso de la manipulación de material concreto (Guerrero & Flores, 2015); el uso de iteraciones y comparaciones a partir de un referente con volúmenes ocupados (Agudelo & García 2016).

Los procedimientos cuantitativos, por su parte, suelen ser los más desarrollados en el estudio de los volúmenes (Agudelo & García, 2016; citando a Chamorro, 1995), pero, se debe considerar acompañarlos con procedimientos cualitativos como la descomposición y recomposición (Fernández & Marmolejo, 2013), para que no se conviertan en procedimientos carentes de sentido y significado para los estudiantes (Estrada, 2002).

Un total de siete procesos se identificaron en la investigación, tres de naturaleza cualitativa (tratamiento, transformación y composición), y cuatro de naturaleza cuantitativa (conteo uno a uno, aditivos, multiplicativos y sustitución).

En la Tabla 3 se definen cada uno de los procesos anteriormente descritos, en el Anexo 3, por su parte, se exponen ejemplos para cada una de estas formas de proceder.

Tabla 3

Procedimientos cualitativos y cuantitativos considerados al construir la fórmula para calcular VPRR y aplicarla en sólidos geométricos de formas irregulares.

Tratamiento	Corresponde a las acciones de trasladar, descomponer, recomponer, comparar, unir figuras, que promueven la construcción de un procedimiento para calcular el VPRR.
Transformación	Utilización de los procesos de reorganización, recomposición, que permiten identificar las unidades de medida que constituyen un sólido geométrico para calcular la medida de su volumen, sin recurrir a una expresión matemática. El procedimiento transformación promueve el uso de acciones como la reconfiguración, para el cálculo del VPRR
Composición	Corresponde al uso de un sólido geométrico de manera reiterativa como unidad patrón, para conformar el sólido al que se le calcula el volumen. El procedimiento contribuye a medir el volumen de un sólido geométrico a partir de otro establecido como unidad patrón
Aditivos	Es el proceso para cálculo del VPRR utilizando sumas reiteradas, de la cantidad de unidades patrón de medida que se identifican en una de las caras que conforman un sólido geométrico. Este procedimiento, induce a procesos de generalización del procedimiento para calcular el volumen de un sólido geométrico
Multiplicativos	Proceso en el que se identifica la cantidad de unidades patrón de medida que contienen la altura, el largo y el ancho de un sólido geométrico y utilizando la multiplicación se calcula el volumen. El procedimiento multiplicativo, induce al cálculo del volumen de un prisma, como una magnitud tridimensional
Conteo uno a uno	Procedimiento del cálculo del VPRR, a partir de una relación biyectiva entre el número y la cantidad de unidades patrón que constituyen un sólido geométrico. El conteo uno a uno, permite calcular la cantidad de unidades patrón en una figura,

	obstaculiza procesos de generalización en el cálculo del volumen de un sólido geométrico, no promueve acciones operatorias sobre las figuras
Sustitución	Proceso para el cálculo del VRRR, realizando sustitución de las variables desconocidas en una fórmula matemática, por valores numéricos conocidos. La sustitución promueve una medición indirecta de la magnitud volumen, calcular el volumen de sólidos geométricos de gran tamaño, pero obstaculiza la reflexión sobre el significado del volumen como una magnitud

Fuente: este estudio. Elaboración propia

3.5.4 Categoría 4: Acciones sobre el soporte

Cuestión didáctica, son las manipulaciones que se realizan sobre el papel donde se presentan las figuras y el papel utilizado adicionalmente en la solución de las tareas (Moreno, 2004). Las hojas de papel se utilizan como recurso para la expresión y la comunicación de las acciones movilizadas en una tarea (Moreno, 2004). En este sentido, las acciones sobre el soporte identificadas en los procedimientos de los estudiantes permiten mirar en los registros los procedimientos de deducción de la fórmula del VPRR, así como la representación simbólica y la utilización de otros códigos en la solución de las tareas propuestas.

En la investigación fueron dos las acciones sobre el papel que privilegiaron los estudiantes al realizar las tareas: los dibujos a mano alzada y el rayado sobre las figuras. En la Tabla 4, se definen las acciones sobre el soporte identificadas en los procedimientos de los estudiantes y en el Anexo 4, se ejemplifican cada uno de ellos.

Tabla 4

Acciones sobre el soporte que promueven la construcción del VPRR

Rayado sobre las figuras	Son los trazos introducidos por quien resuelve una tarea, sobre una figura establecida, que ayudan a identificar subfiguras, o a realizar reorganizaciones de tipo figural. Por su parte, los dibujos a mano alzada brindan la posibilidad de hacer representaciones de sólidos geométricos que se piden en las tareas propuestas, o también otros tipos de configuraciones que muestran procesos desarrollados
Dibujos a mano alzada	Son las representaciones de figuras realizadas en el papel por quien realiza la tarea propuesta, sin el uso de instrumentos para trazar. Por otro lado, el rayado sobre las figuras permite introducir elementos que ayudan a mejorar en la manera de ver en ella

Fuente: este estudio. Elaboración propia

3.6 Ejemplo de codificación de una tarea

En este apartado ejemplificamos la aplicación del instrumento de análisis anteriormente expuesto, para ello contextualizamos y codificamos una tarea presente en la propuesta de enseñanza diseñada en la investigación.

3.6.1 Contextualización y descripción de la tarea

La Tarea 4.2 solicita “Calcula el volumen de las Figuras 17, 18 y 19, escribe la respuesta en cm^3 . Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.”

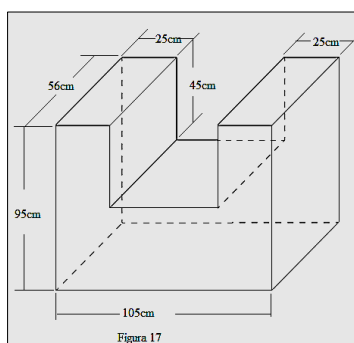


Ilustración 1. Representación del sólido geométrico de la tarea 4.2 del Momento 4

La tarea hace parte de la propuesta de enseñanza, presente en el momento cuatro que se propuso en la investigación, en esta parte se solicita calcular el volumen de la figura 17 a partir de la fórmula que han deducido los estudiantes. Es evidente que el cálculo del volumen no se puede hacer directamente sobre la figura de partida, por lo tanto, se hace necesario introducir trazos auxiliares y aplicar un fraccionamiento en ella que permitan discriminar sub-figuras.

En la figura inicial se muestra un sólido geométrico de forma prismática irregular, y se indican sus medidas totales de 95cm de altura, 105cm de ancho y 56cm de largo, el fraccionamiento se logra dividiendo la figura en tres partes, a partir de la introducción de trazos auxiliares: dos prismas congruentes que tienen las mismas medidas (45cm de altura, 25cm de ancho y 56 cm de largo); la otra parte, por un prisma de mayor tamaño (50cm de altura, 105cm de ancho y 56cm de largo).

En la figura también se puede hacer otro tipo de fraccionamiento, dos sub-figuras que son prismas rectos de 95cm de altura, 25cm de ancho, y 56cm de largo y la otra sub-figura de 50cm de altura 55cm de ancho y 56cm de largo.

Al realizar uno de los procedimientos anteriores, quien va a resolver la tarea debe centrar la atención en las sub-figuras que se obtuvieron, para aplicar sobre cada una la fórmula que encontraron los estudiantes para calcular el VPRR. Las medidas necesarias para sustituir en la fórmula no están indicadas en la figura totalmente, por ejemplo en el primer fraccionamiento mencionado en una de las sub-figuras (prisma de mayor tamaño), la medida de la altura se obtiene centrando la atención en la unidad 1D que representa la altura de la figura de inicio (representada por líneas de medida y un dato numérico: 95cm) lo que lleva a realizar una operación aritmética en las medidas 1D de la figura inicial y la sub-figura.

3.6.2 Proceso de codificación de la tarea

A continuación, en la Tabla 5, se muestran la codificación de los procesos que se pueden realizar sobre las figuras en la tarea 4.2 del momento 4

Tabla 5
Codificación de la tarea 4.2 del momento 4

Inicialmente se deja de centrar la atención en la totalidad de la figura, para hacerlo en las unidades 2D y 1D que constituyen la figura, suscitando un cambio dimensional por desdoblamiento. Seguidamente, se aplican acciones sobre el soporte al introducir trazos auxiliares sobre la figura, lo que suscita una operación de fraccionamiento.

La operación de fraccionamiento en este caso permite discriminar los segmentos que hacen parte de dos sub-figuras distintas al mismo tiempo. En este proceso se presenta un cambio de focalización intrafigural, al dejar de centrar la atención en la totalidad de la figura, para reconocer tres sub-figuras con forma de prisma rectangular recto, a los que se les puede calcular el volumen utilizando la fórmula deducida en tareas anteriores. Finalmente, se sustituyen los datos numéricos en la fórmula y se suma el volumen de cada prisma, para obtener el volumen total de la figura.

Fuente: este estudio. Elaboración propia

Este tipo de tarea es de mayor complejidad, puesto que pide calcular el volumen de un sólido geométrico de naturaleza irregular, para el que no hay una fórmula o expresión matemática en la que solamente se sustituyan valores numéricos dados en la figura. Por lo tanto, la solución de la tarea no se basa exclusivamente en procedimientos aritméticos, sino que exige a quien la resuelve, establecer procesos que implican recurrir a operaciones visuales, cambios dimensionales, y cambios intrafigurales. En este sentido la visualización juega un papel preponderante, pues permite reconocer sub-figuras tipo prisma rectangular, a las que posteriormente, se les aplica la fórmula establecida para el cálculo de su volumen, es decir se recurre inicialmente a acciones de tipo cualitativo (cortes, movimientos de subfiguras) y posteriormente a procedimientos cuantitativos (sustitución en la fórmula)

4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de los datos recolectados, para lo que se consideró el análisis de control: “comprende una parte descriptiva y una predictiva, centradas en las características de la situación diseñada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes” (Calderón & Cerón, 2012, citando a Artigue, 1995).

La presentación de los resultados de la investigación considera dos momentos: análisis a priori y análisis a posteriori. Mientras que en el primero de los análisis se exponen las tareas propuestas, se predice las formas de resolverlas (De Faria, 2006) y se establecen los elementos o estrategias incluidos para suscitar comportamientos específicos; en el segundo análisis, se considera cómo proceden los estudiantes al resolver las tareas propuestas (Calderón & León, 2012).

En cuanto a la discusión de los resultados, se expone a través del contraste entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, puntualmente, se reseña cuál fue el efecto, en los comportamientos de los estudiantes, de las decisiones adoptadas en el diseño de las tareas; también se establecen pautas para comprender el porqué de tales efectos y se describe su relevancia en cuanto a la consecución del objetivo propuesto al aplicar las tareas en cuestión.

De esta manera, en el análisis a priori se da respuesta al primero y segundo de los objetivos específicos, en consecuencia, aporta elementos para responder cuestiones como ¿Cuáles ideas geométricas o métricas promueven la construcción de la FV (PRR)? ¿Cuáles favorecen un acercamiento cualitativo a la construcción de la FV (PRR)? ¿Qué flujos visuales deben considerarse en el diseño de tareas que susciten la construcción de la FV (PRR)? ¿Qué elementos de control visual deben contemplarse en tareas para que promuevan la inclusión de flujos

visuales asociados a la construcción de la FV (PRR)? ¿Qué funciones de control visual deben contemplarse en tareas para promuevan la inclusión de flujos visuales asociados a la construcción de la FV (PRR)?

Por su parte el análisis a posteriori responde al tercero de los objetivos específicos, y aporta elementos para dar respuesta a cuestiones como ¿Los elementos y funciones de control incluidos en las tareas propuestas a los estudiantes influyeron en la consideración de las acciones visuales pretendidas? ¿Cuáles composiciones de elementos y funciones de control visual privilegiaron su inclusión? ¿Cuáles la obstaculizaron? ¿Las acciones visuales privilegiadas en el desarrollo de las tareas suscitaron u obstaculizaron la construcción de la FV (PRR)? ¿Qué dificultades encontraron? ¿Cómo respondieron a ellas? ¿Qué materiales utilizados por los estudiantes influyeron positiva o negativamente en el desarrollo de las tareas propuestas? ¿Qué acciones se aplicaron sobre ellos? ¿La organización de los elementos y funciones de control adoptados correspondió a los niveles de complejidad visual esperados? ¿Los estudiantes desarrollaron su visualización al pasar de una tarea a otra? ¿Qué aspectos desarrollaron? ¿Cuáles no? ¿En el proceso qué dificultades encontraron? ¿Cómo respondieron a ellas?

Finalmente, en el contraste entre el análisis a priori y a posteriori se da respuesta al cuarto objetivo específico, y proporciona elementos para responder a las cuestiones ¿Cómo influye la sinergia entre acciones visuales, elementos de control visual y funciones de control visual privilegiados en las tareas propuestas en la explicitación de ideas geométricas que favorecen la construcción de la FV (PRR)? ¿Cómo la sinergia en cuestión puede influir en la explicitación de ideas métricas que favorecen la construcción de la FV (PRR)? ¿Qué posibilidades (potencialidades y limitantes) brindó el desarrollo de las tareas propuestas para la comprensión de la construcción de la FV (PRR)?

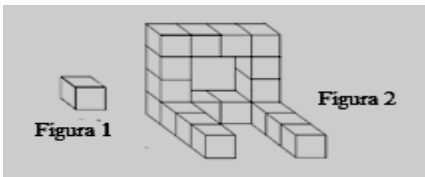
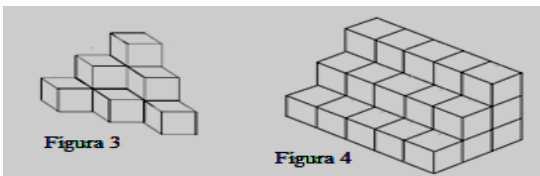
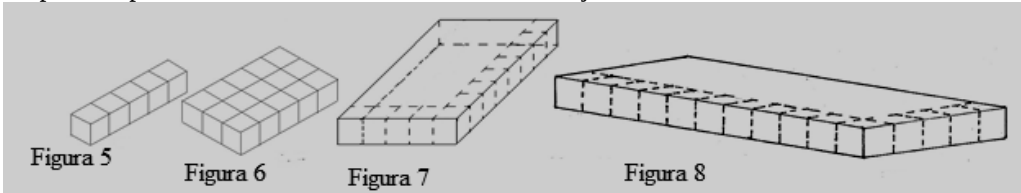
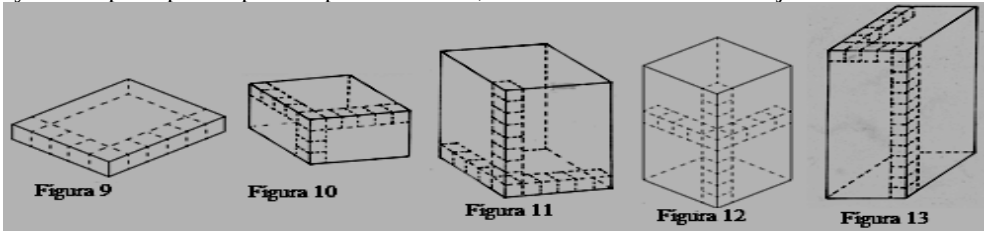
4.1 Análisis a priori

Se divide en dos partes: a) Las tareas diseñadas y procedimientos esperados y b) elementos de control incluidos. En la primera de las partes, se exponen los distintos momentos en que se divide la propuesta de enseñanza aplicada en la investigación; asimismo, se describen las tareas contempladas en cada uno de los momentos de la propuesta y se reseñan los propósitos a considerar en la aplicación de esta. En la segunda parte, se explicitan los dinamismos visuales que se esperan incluyan los estudiantes al resolver las tareas propuestas; asimismo, se discrimina qué elementos de control fueron considerados para promover su consideración, se establece el lugar de las tareas donde están ubicados y se describe cuál es el efecto que se pretende alcanzar con su inclusión.

4.1.1 Propuesta de enseñanza

El objetivo de la propuesta de enseñanza (Tabla 5) utilizada en la investigación es promover la construcción de la fórmula para calcular el volumen del prisma rectangular recto desde una perspectiva visual; es decir, a partir de la explicitación de acciones y estrategias visuales (flujos visuales y elementos de control), enfatizar en procesos cualitativos que enfoquen el estudio del volumen como una magnitud, entre otros, la composición de figuras tridimensionales considerando otra como unidad patrón, la transformación de una figura tridimensional en otra del mismo volumen, la unión dos figuras para formar una nueva y quitar una parte a una figura para obtener una de menor volumen (Del Olmo, Moreno, & Gil, 1993)

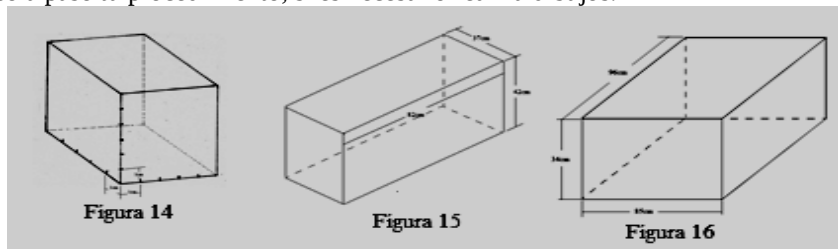
Tabla 6
Propuesta de enseñanza

Medición directa VPRR	
T1.1	¿En la Figura 1 se representa un cubo, cuántos cubos se necesitaron para construir la figura 2?  Describe, paso a paso, el proceso utilizado para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.
T1.2	Definición 1: El volumen de un sólido geométrico es la cantidad de espacio que ocupa. Para calcular su medida se utilizan unidades cúbicas de medida. En la tarea 1.1, se utilizó como unidad de medida el cubo de la Figura 1. Si consideras la Figura 1 como unidad de medida, ¿cuál es la medida del volumen de las figuras 3 y 4?  Describe, paso a paso, los procesos utilizados para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.
Paso de la medida directa a la indirecta del VPRR	
T2.1	La Figura 5 representa un prisma, cuántos necesitas para construir las Figuras 6, 7 y 8 explica, paso a paso, tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos. 
T2.2	Si tomamos como unidad de medida uno de los cubos que conforman la Figura 5, ¿cuál es el volumen de las figuras 6, 7 y 8? Utiliza dos procedimientos diferentes para resolver esta tarea, explica, paso a paso, cada uno, si es necesario, utiliza dibujos
T2.3	Tarea 2.3 La figura 9 representa un prisma, ¿cuántos necesitas para construir las figuras 10, 11, 12 y 13? Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos. 
Procedimientos para el cálculo del VPRR	
T3.1	Considerando todo lo anterior, describe tres procedimientos distintos, que te permitan calcular el volumen de cualquier ortoedro. ¿Cuál te permite calcular el volumen de la manera mas rápida?. Explica tu respuesta.

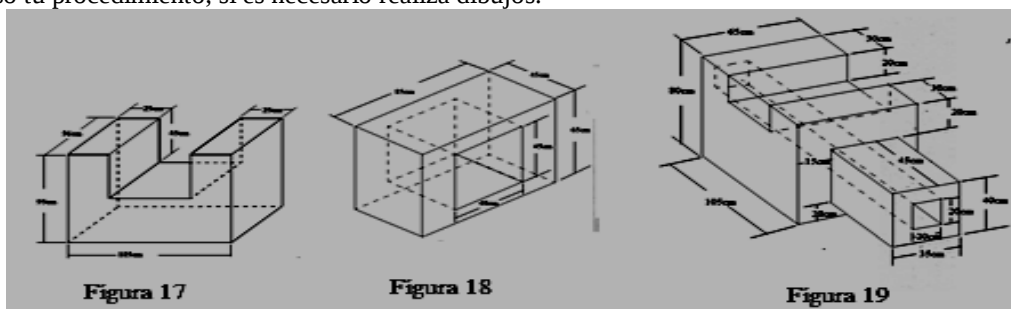
Aplicación de la fórmula para calcular la medida del VPRR

T4.1 Definición 2: Centímetro cúbico, es una unidad para medir volumen y corresponde a un patrón representado por un cuerpo que ocupa un espacio euivalente a un cubo de 1cm de arista, y se escribe de esta manera cm^3 .

Tomando como unidad de medida un cm^3 , calcula el volumen de los siguientes prismas. Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.



T4.2 Calcula el volumen de las Figuras 17, 18 y 19, escribe la respuesta en cm^3 . Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.



T4.3 Tomando como unidad de medida un cubo con arista de 1cm de arista (1cm^3), representa 3 prismas distintos, cada uno con un volumen de 300. Explica el proceso, paso a paso, que realizaste en cada caso, si es necesario realiza dibujos

T4.4 Representa un prisma recto y transformalo en un paralelepipedo con igual volumen. Teniendo en cuenta el proceso anterior, escribe de forma detallada un método que te permita calcular el volumen de cualquier paralelepipedo.

Fuente: este estudio. Elaboración propia

Como se observa en la Tabla 6, la propuesta de enseñanza consideró cuatro momentos. En todos los casos, el proceso a seguir es el cálculo de la medida del volumen de un sólido. Los dos primeros momentos de la propuesta aportan elementos a considerar en la construcción de la fórmula en cuestión, centran su atención en el cálculo de la medida de un volumen a partir de la explicitación del número de unidades que lo ocupan; el tercer momento, por su parte, suscita la construcción del procedimiento que permite el cálculo del volumen de un prisma rectangular; finalmente, el cuarto momento, exige la aplicación de la fórmula para calcular la medida del volumen de prismas rectangulares rectos compuestos.

De acuerdo con lo anterior, en el primer momento de la propuesta (Tareas T1.1 y T1.2) el sólido a medir es de tamaño arbitrario y la unidad de medida es un cubo isométrico a los cubos en que el sólido está fraccionado; en el segundo momento (Tareas T2.1; T2.2 y T2.3), el sólido y las unidades de medida son de forma prismática. En cuanto al tercer momento (Tarea T3.1), el sólido es un ortoedro de cualquier tamaño y la unidad de medida no está definida, es el estudiante quien debe explicitarla. Finalmente, en el momento cuatro, se calcula el volumen de sólidos de diferentes tamaños, la unidad de medida está definida en centímetros cúbicos, mediante la aplicación de la fórmula construida en el momento anterior (Tareas T4.1, T4.2, T4.3, T4.4).

4.1.2 Procedimientos esperados y elementos de control incluidos

A continuación, se reseña, según cada momento y tarea, el procedimiento de resolución que se desea suscitar. Posteriormente, se establece el lugar de inclusión de cada uno de los elementos de control considerados y se establece su función, es decir, qué acción visual buscan promover, especificándose su rol en la resolución de la problemática planteada.

4.1.2.1 Medición directa VPRR

Considera cuatro tareas (Tareas T1.1, T1.2, T2.1 y T2.2). En cuanto a las T1.1 y T1.2 solicitan calcular la medida del volumen de sólidos geométricos con formas y características perceptivas de naturaleza distinta (Figura 2, Figura 3 y Figura 4). En uno y otro caso la unidad de medida considerada es la Figura 1.

De manera distinta, en las T2.1 y T2.2 los sólidos geométricos a medir son de formas y características perceptivas de igual naturaleza (Figura 6, Figura 7 y Figura 8). En estos casos, las

unidades de medida consideradas son la Figura 5 en la T2.1, y los cubos que conforman la Figura 5 en la T2.2.

Es de mencionar, que, en la primera de las tareas, la atención recae en un sólido (Figura 2), en la segunda tarea son dos los sólidos a medir (Figuras 3 y 4), y en la tercera y cuarta tarea, son tres los sólidos a medir (Figuras 6, 7 y 8)

Se pretende, que quien resuelve las tareas propuestas considere las unidades de medida asignadas (Figura 1 en T1.1y T1.2; Figura 5 en T2.1, y los cubos que conforman la Figura 5 en la T2.2) para configurar nuevos sólidos isométricos a los sólidos que ha de medir, y así dar cuenta del número de unidades necesarios. En consecuencia, calcular las medidas solicitadas: 18 unidades en la Figura 2; 10 unidades para la Figura 3; 30 unidades para la Figura 4. Así mismo, 3 unidades en la Figura 6, 8 unidades para la Figura 7, y 11 unidades para la Figura 8, en la T2.1. Finalmente, en la T2.2, 15 cubos en la Figura 6, 40 cubos para la Figura 7, 55 cubos para la Figura 8.

Para resolver las problemáticas planteadas en las tareas que conforman este primer momento de la propuesta de enseñanza (en T1.1 y T1.2 calcular la medida del volumen de tres sólidos de formas distintas y características perceptuales diferentes, y en T2.1 y T2.2 calcular la medida del volumen de tres sólidos formas iguales y características perceptuales diferentes), es necesario considerar dinamismos visuales de naturaleza parcial-total.

Para propiciar o inducir la consideración del dinamismo reseñado se incluyeron, como elementos de control: la perspectiva dimétrica (Figuras 3 y 8), la perspectiva isométrica (Figuras 4 y 6) y la perspectiva caballera (Figuras 2 y 7). Así mismo, se resaltó en todas las figuras un

contraste en tono-grosor y el número de unidades cubicas, un fraccionamiento parcial simple (Figuras 3, 4, 5 y 6) y un fraccionamiento lineal (Figuras 7 y 8).

La diferencia entre las T1.1, T1.2, T2.1 y T2.2 radica en que para su resolución, se consideran tipos de visualizaciones distintas y los elementos de control tienen efectos visuales diferentes. En la solución de la T1.1 se calcula el volumen de la figura 2, para ello, se debe considerar una configuración por reiteración, por tal motivo centrar la atención en uno de los cubos que conforman la Figura 2, y asumirlo como unidad de medida. En este caso, el fraccionamiento con que se presenta la Figura 2, actúa como un elemento de control que suscita o induce la discriminación de la totalidad de los cubos que constituyen la Figura 2, de esta forma se posibilita el conteo uno a uno de los cubos y el cálculo del número total de ellos.

Por otro lado, en la solución de la T1.2, se aplica una configuración simple a partir de un cubo como unidad de medida en las Figuras 3 y 4, la introducción del elemento de control perspectiva obstaculiza el conteo de algunos de los cubos.

En cuanto a la solución de la Tarea 2.1, se calcula el volumen de las Figuras 6, 7 y 8, para ello se debe considerar una configuración por reiteración en la Figura 6 y un refraccionamiento en las figuras 7 y 8, por tal razón se debe centrar la atención en uno de los prismas que conforman las Figuras 6,7 y 8, y asumirlo como unidad de medida. En este caso, el fraccionamiento con que se presenta la Figura 6, actúa como un elemento de control que suscita o induce la discriminación de la totalidad de los prismas que constituyen la Figura 6, posibilitando el conteo uno a uno de los prismas y así el cálculo del número total de ellos. De manera distinta, el fraccionamiento lineal con que se presentan las Figuras 7 y 8, actúa como elemento de control que obstaculiza la discriminación y conteo de la totalidad de los prismas que componen las Figuras 7 y 8, dificultando el cálculo del volumen de las Figuras 7 y 8.

Finalmente, en la solución de la Tarea 2.2, se calcula el volumen de las Figuras 6, 7 y 8, para ello, se debe considerar una configuración por reiteración, razón por la cual se debe centrar la atención en uno de los cubos que componen la Figura 5 y asumirlos como unidad de medida en las Figuras 6, 7 y 8. Es de mencionar, que en este caso, la introducción del elemento de control perspectiva ayuda en el conteo de los cubos, facilitando el cálculo del volumen de las Figuras 6, 7 y 8.

Otro aspecto importante que tratar es que en las Figuras 2, 3 y 4, no todos los elementos de control privilegiados favorecen la inclusión de la configuración simple. Así mismo en la Figura 6, algunos elementos de control favorecen la inclusión de la configuración por reiteración, mientras que en las Figuras 7 y 8, la obstaculizan.

De acuerdo con lo anterior algunos elementos de control considerados en las tareas, no promueven la visualización, cuestión que induce a una mayor dificultad en la solución de la tarea propuesta.

Elementos de control incluidos en T1.1 y procesos de resolución promovidos: quien soluciona la T1.1 (Ver Ilustración 2), inicialmente centra su atención en el cubo representado en la Figura 1, para luego hacerlo sobre la Figura 2, promoviendo un cambio de focalización configural que induce a identificar tres sub-figuras: dos de ellas que son isométricas y se construyen con tres cubos cada una, es decir se utilizan 6 cubos, la otra sub-figura se conforma con 8 cubos. Finalmente se unen las tres sub-figuras, para configurar la Figura 2 y reconocer que ésta está conformada por 18 cubos como los de la Figura 1

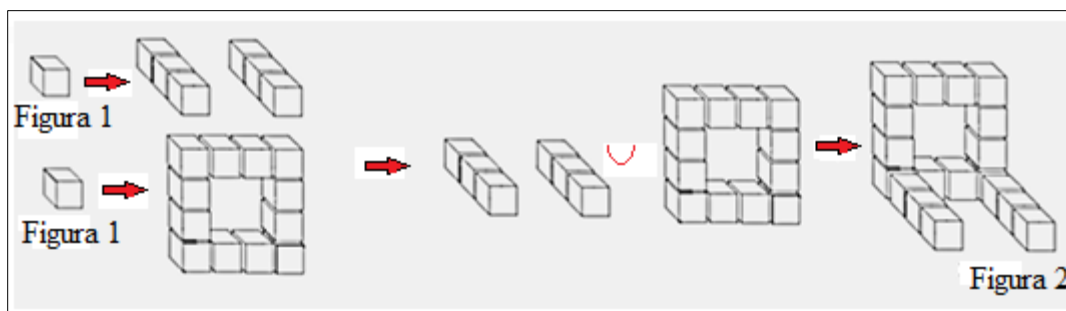


Ilustración 2. Desarrollo Visual de la Tarea 1.1 Momento uno.

Son tres los elementos de control considerados en la T1.1: fraccionamiento, contraste en tono y grosor y la perspectiva dimétrica, todos en la Figura 2; el primero, se identifica en la manera en cómo se muestran cada uno de los cubos que la conforman, el segundo, en las líneas de contorno de la figura, y el tercero, en la inclinación con que está representada la figura.

El fraccionamiento, suscita la operación de configuración simple y permite reconocer las tres sub-figuras en que se puede dividir la figura, mientras el contraste en tono y grosor induce a delimitar cada cubo que compone la figura, y a discriminar su contorno; por su parte, la perspectiva dimétrica, permite reconocer la mayoría de los cubos que componen la figura y a realizar su conteo.

Tabla 7
Rol de los elementos de control introducidos en la T1.1

Elementos de control incluidos	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Fraccionamiento	Configuración	Promueve la configuración simple, y la reconfiguración
Contraste en tono y grosor	Reconocimiento de unidades de medida	Delimita unidades de medida
Perspectiva	Cambios de focalización y cambios dimensionales	Promueve el reconocimiento de unidades de medida

Fuente: este estudio. Elaboración propia

Elementos de control incluidos en T1.2 y procesos de resolución promovidos: solucionar la T1.2 (Ver ilustración 3), que solicita calcular la cantidad de cubos que conforman las Figuras 3 y 4, inicialmente se puede centrar la atención en el cubo (Figura 1) que representa la unidad patrón, para luego hacerlo en la Figura 3, suscitando un cambio de focalización configural, y que permite reconocer 3 sub-figuras a conformar: la primera compuesta por un cubo, la segunda por tres cubos y la tercera constituida por seis cubos. Posteriormente se hace una configuración de la figura 3 uniendo las tres sub-figuras, obteniendo un total de 10 cubos.

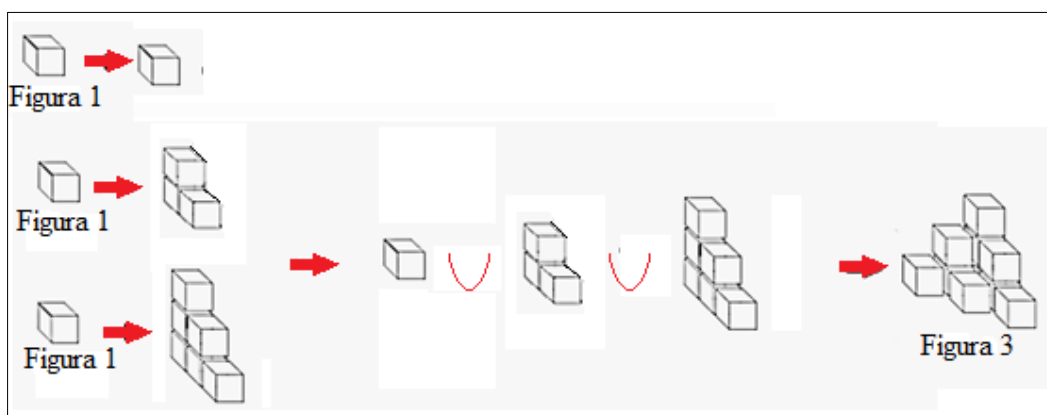


Ilustración 3. Desarrollo Visual Tarea 1.2 del Momento 1.

Para el cálculo del volumen en la Figura 4 (Ver Ilustración 4), se pueden identificar tres sub-figuras, la primera de 5 cubos la segunda de 10 cubos y la tercera de 15 cubos, luego se procede a armar la Figura 4, uniendo las sub-figuras discriminadas, obteniendo un total de 30 cubos.

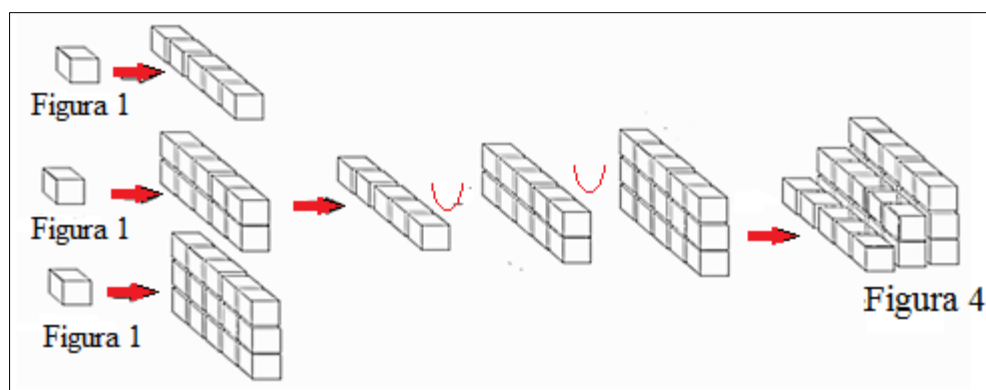


Ilustración 4. Desarrollo visual segunda parte de la Tarea 1.2 del momento 1

Los elementos de control considerados en la T1.2 fueron: el fraccionamiento y el contraste en tono y grosor, presentes en las Figuras 3 y 4, la perspectiva dimétrica presente en la Figura 3 y la perspectiva isométrica en la Figura 4. el primero de los elementos se referencia en los cubos que constituyen las figuras, el segundo delimita el contorno de las Figuras 3 y 4, así como los contornos de los cubos, y el tercer elemento, se identifica en la inclinación en que se han construido las figuras.

El elemento de control fraccionamiento, permite discriminar cada uno de los cubos que constituyen las figuras y suscita la configuración de las tres sub-figuras en que se puede dividir la Figura 3; el tono y grosor ayuda en la delimitación de las sub-figuras que se identificaron y delimita cada cubo que compone la figura, así como su contorno. En cuanto a la perspectiva dimétrica presente en la figura 3 permite ver algunos de los cubos que conforman la figura, así como su conteo; mientras que la perspectiva isométrica en la Figura 4 obstaculiza la discriminación de los cubos que la conforman.

Tabla 8
Rol de los elementos de control incluidos en la T1.2

Elementos de control incluidos	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Fraccionamiento	Operaciones visuales	Promueve la reconfiguración
Tono y grosor	Visibilidad	Permite reconocer unidades de medida
Proyección	Cambio de focalización	Obstaculiza ver la totalidad de los cubos

Fuente: este estudio. Elaboración propia

En la solución de la T2.1, se calcula el volumen de las Figuras 6,7 y 8, para lo cual se debe considerar la configuración por reiteración y el refraccionamiento, por lo tanto, la atención se debe centrar en uno de los prismas que conforman las Figura 6, 7 y 8, y reconocerlo como unidad de medida. Los elementos fraccionamiento y el tono y grosor, con que se presenta la Figura 6, suscitan la discriminación de todos los prismas que constituyen la Figura 6, de esta manera se posibilita el conteo uno a uno de todos los prismas y así el cálculo del número total de ellos. No sucede lo mismo en las Figuras 7 y 8, en donde el fraccionamiento lineal, con que se presentan las figuras, reduce la posibilidad de reconocer la totalidad de prismas que las conforman. Por lo tanto, para solucionar la tarea se debe recurrir a la introducción de trazos auxiliares, para discriminar las unidades patrón que constituyen las Figuras 7 y 8, posibilitando de esta manera el cálculo del número total de ellos.

Elementos de control incluidos en T2.1 y procesos de resolución promovidos: quien soluciona la T2.1 (Ver Ilustraciones 5, 6 y 7), inicialmente centra la atención en el prisma representado en la Figura 5, para luego hacerlo en las Figura 6 promoviendo un cambio de focalización configural que induce a identificar tres sub-figuras, todas de igual naturaleza a la representada en la Figura 5, por tanto, es posible configurar la Figura 6 con 3 prismas como los de la unidad de medida.

En cuanto al cálculo del volumen de las Figuras 7 y 8, inicialmente se centra la atención en la unidad de medida (Figura 5), para luego hacerlo en las Figuras 7 y 8, promoviendo un cambio de focalización configural, que induce en este caso, a la introducción de trazos auxiliares que permitan identificar sub-figuras todas de igual naturaleza como los de la unidad de medida, por tanto, las Figuras 7 y 8 se configuran con 7 prismas y 11 prismas respectivamente.

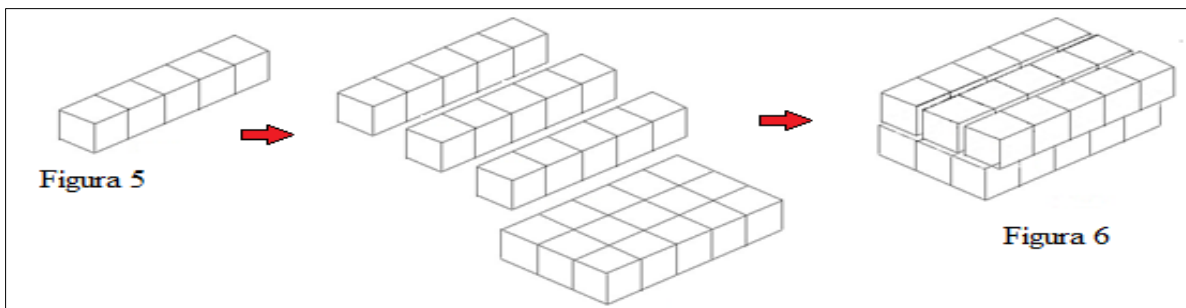


Ilustración 5. Desarrollo Visual Tarea 2.1 del Momento 2 (primera parte).

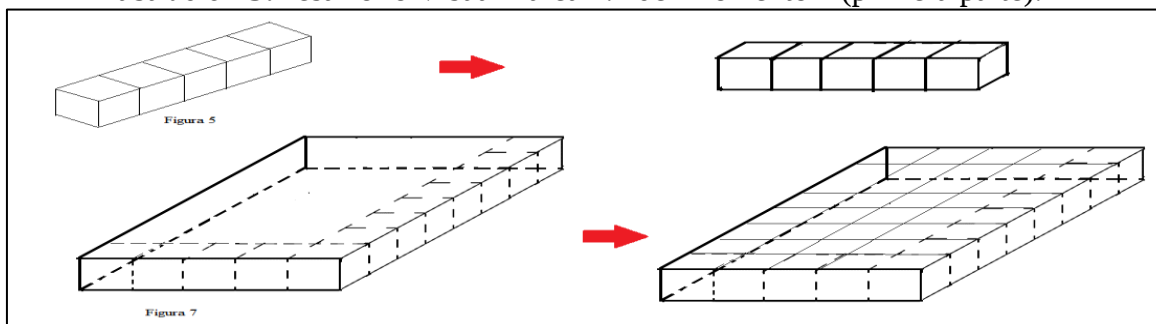


Ilustración 6. Desarrollo Visual Tarea 2.1 Del Momento 2 (parte 2)

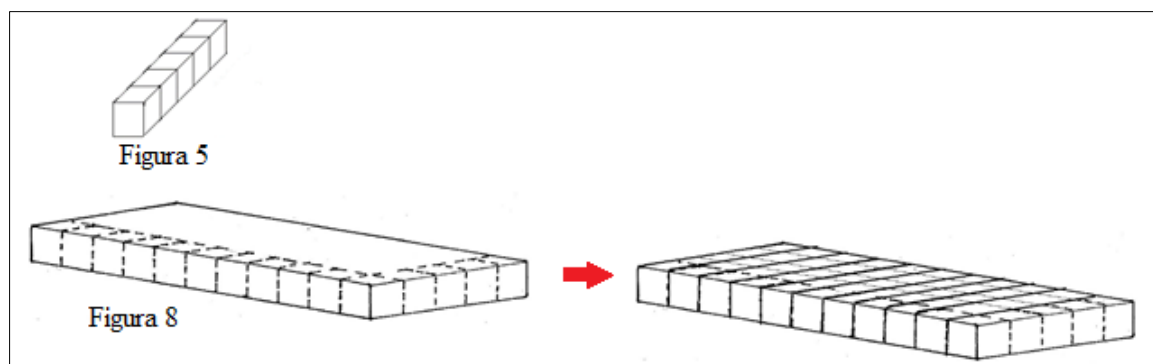


Ilustración 7. Desarrollo Visual Tarea 2.1 del Momento 2 (parte 3)

Los elementos de control que se consideran en las tareas son la perspectiva isométrica, y el contraste en tono y grosor en la Figura 6, el fraccionamiento lineal y la perspectiva caballera en la Figura 7, mientras en la Figura 8 se contempla el fraccionamiento lineal y la perspectiva dimétrica. Es de considerar, que la perspectiva (isométrica, caballera y dimétrica) ayuda a la operación de refraccionamiento, el tono y grosor, permite hacer un cambio dimensional operatorio, el fraccionamiento lineal induce a un cambio de focalización figural. Así mismo el fraccionamiento lineal introducido permite discriminar la cantidad de unidades patrón que conforman la figura, mientras que el contraste en tono y grosor delimita las unidades prismáticas que la componen; por su parte la perspectiva ayuda en el conteo de las unidades prismáticas reconocidas.

Tabla 9

Rol de los elementos de control incluidos en la T2.1

Elementos de control incluidos en la tarea	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Fraccionamiento	Operación visual	Promueve configuración y refraccionamiento
Fraccionamiento lineal	Operación visual	Promueve el refraccionamiento
Tono y grosor	Cambio dimensional	Permite discriminar sub-figuras
Proyección	Cambio focalización	Permite el conteo de unidades de medida

Fuente: este estudio. Elaboración propia

Elementos de control incluidos en T2.2 y procesos de resolución promovidos: quien soluciona la T2.2 (Ver Ilustraciones 8, 9 y 10), inicialmente centra la atención en los cubos que conforman la Figura 5 que corresponden a la unidad de medida, para luego hacerlo en las Figuras 6, 7 y 8, sobre las que se ha introducido trazos auxiliares para identificar los cubos que conforman las Figuras 6,7 y 8. Finalmente, se aplican procesos multiplicativos, que ayudan en el cálculo del volumen: en la Figura 6 ($3 \times 5 = 15$) tenemos 15 cubos; en la Figura 7 ($8 \times 5 = 40$) 40 cubos, y en la Figura 8 ($11 \times 5 = 55$) 55 cubos.

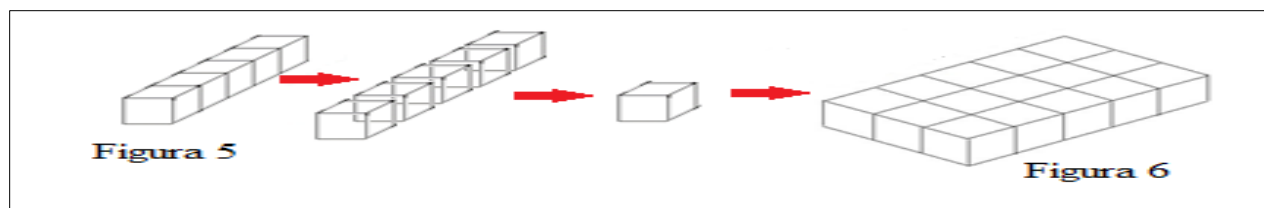


Ilustración 8. Desarrollo Visual Tarea 2.2 del Momento 2(parte 1)

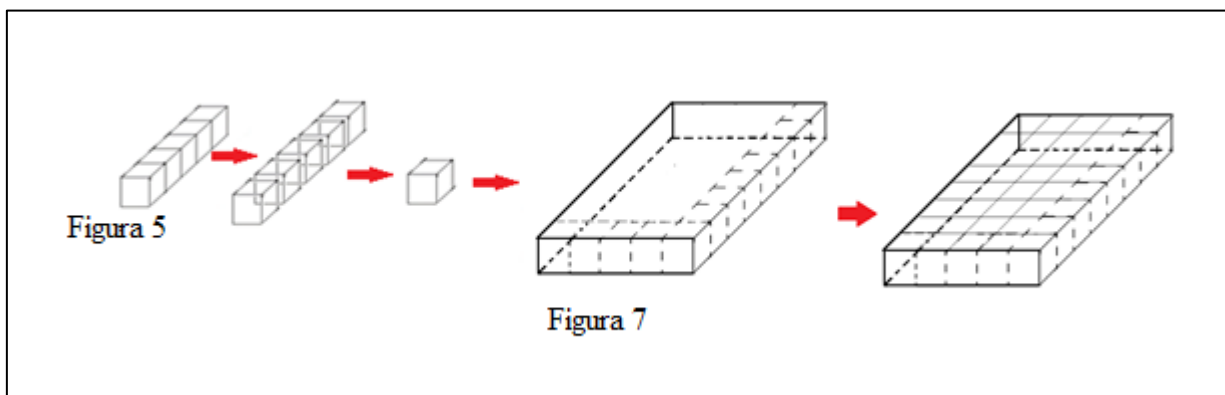


Ilustración 9. Desarrollo Visual Tarea 2.2 del Momento 2(parte 2)

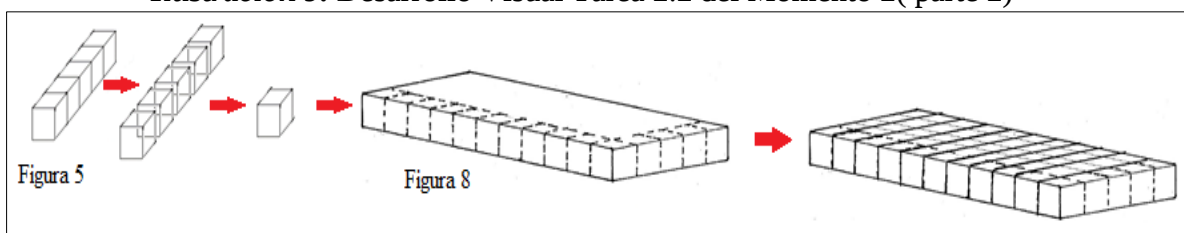


Ilustración 10. Desarrollo Visual Tarea 2.2 del Momento 2(parte 3).

Los elementos de control introducidos en la tarea son la perspectiva isométrica, y el contraste en tono y grosor en la Figura 6, el fraccionamiento lineal y la perspectiva caballera en la Figura 7, mientras en la Figura 8 se contempla el fraccionamiento lineal y la perspectiva dimétrica. Mientras la perspectiva (isométrica, caballera y dimétrica) ayuda a la operación de refraccionamiento, el tono y grosor, permite hacer un cambio dimensional operatorio, el fraccionamiento lineal induce a un cambio de focalización. Por su parte el fraccionamiento lineal introducido permite discriminar la cantidad de unidades patrón que conforman la Figura 5,

mientras que el contraste en tono y grosor delimita los cubos que la componen; así mismo la perspectiva ayuda en el conteo de los cubos reconocidos en cada figura.

Tabla 10

Rol de los elementos de control introducidos en la T2.2

Elementos de control incluidos en la tarea	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Fraccionamiento	Operación visual	Promueve configuración y refraccionamiento
Fraccionamiento lineal	Cambio de focalización	Permite discriminar unidades de medida
Tono y grosor	Cambio dimensional	Permite discriminar sub-figuras
Proyección	Cambio de focalización	Promueve conteo de unidades

Fuente: este estudio. Elaboración propia

4.1.2.2 Paso de la medida directa a la indirecta del VPRR

Considera la tarea T2.3, que solicita calcular la medida del volumen de sólidos geométricos con formas y características perceptivas de igual naturaleza (Figura 10, Figura 11, Figura 12 y Figura 13), y se asume como unidad de medida la Figura 9. Se pretende que quien resuelve la tarea considere la unidad de medida asignada (Figura 9) para confrontar las cantidades existentes en los sólidos que ha de medir, y así dar cuenta del número de unidades necesarias para tal fin. En consecuencia, calcular las medidas solicitadas, en el caso de la Tarea T2.3, cuatro unidades en la Figura 10; nueve para la Figura 11; diez para la Figura 12, y catorce para la Figura 13.

Para resolver la problemática planteada en la tarea que conforma el tercer momento de la propuesta de enseñanza (calcular la medida del volumen de tres sólidos formas iguales y características perceptuales diferentes), es necesario considerar, dinamismos visuales de naturaleza parcial-mixto, puntualmente, la aplicación de las operaciones de configuración y refraccionamiento; y la inclusión de cambios dimensionales operatorios y de focalización figural. Para propiciar o inducir la consideración del dinamismo reseñado, se incluyeron, como elementos de control: la perspectiva isométrica (Figura 10) perspectiva caballera (Figura 12 y

Figura 13), la perspectiva dimétrica (Figura 11), asimismo, se resaltó un contraste tono-grosor, un fraccionamiento lineal, la posición del fraccionamiento y el número de unidades a considerar en cada figura (Figuras, 10,11 y 12 y 13).

Para solucionar la T2.3, que solicita calcular el volumen de las Figuras 10,11 12 y 13, se debe considerar la configuración por reiteración y el refraccionamiento, por lo tanto, la atención se debe centrar en uno de los prismas que conforman las Figuras 10, 11, 12 y 13, que representa la unidad de medida. Los elementos de control tono y grosor y fraccionamiento, presentes en las Figuras 10, 11, 12 y 13, ayudan en la discriminación de todos los prismas y así el cálculo del número total de ellos.

Elementos de control incluidos en T2.2 y procesos de resolución promovidos: quien soluciona la T2.3 (Ver Ilustraciones 11,12,13 y 14), inicialmente centra la atención en el prisma representado en la Figura 9 para luego hacerlo en las Figuras 10,11,12 y 13 promoviendo un cambio de focalización configural que induce a identificar sub-figuras, todas de igual naturaleza a la representada en la Figura 9, por tanto, es posible configurar la Figura 10 con 4 prismas, la Figura 11 con 9 prismas, la Figura 12 con 10 prismas y la Figura 13 con 14 prismas.

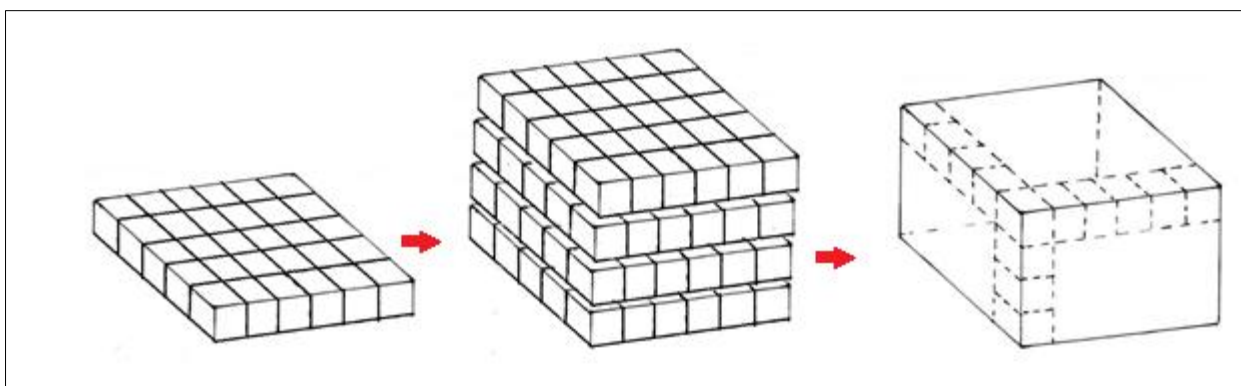


Ilustración 11. Desarrollo Visual Tarea 2.3 del Momento 2(parte 1).

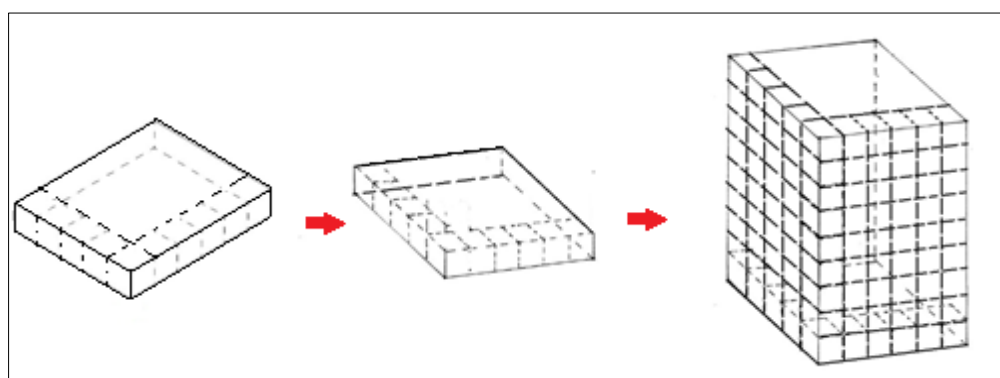


Ilustración 12. Desarrollo Visual Tarea 2.3 del Momento 2(parte 2).

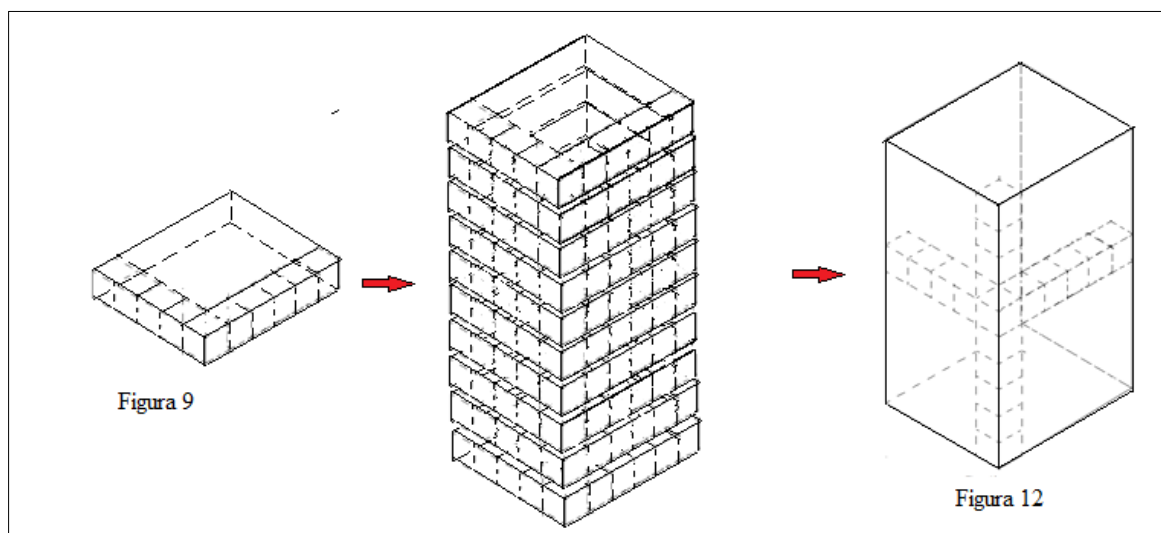


Ilustración 13. Desarrollo Visual Tarea 2.3 del Momento 2(parte 3).

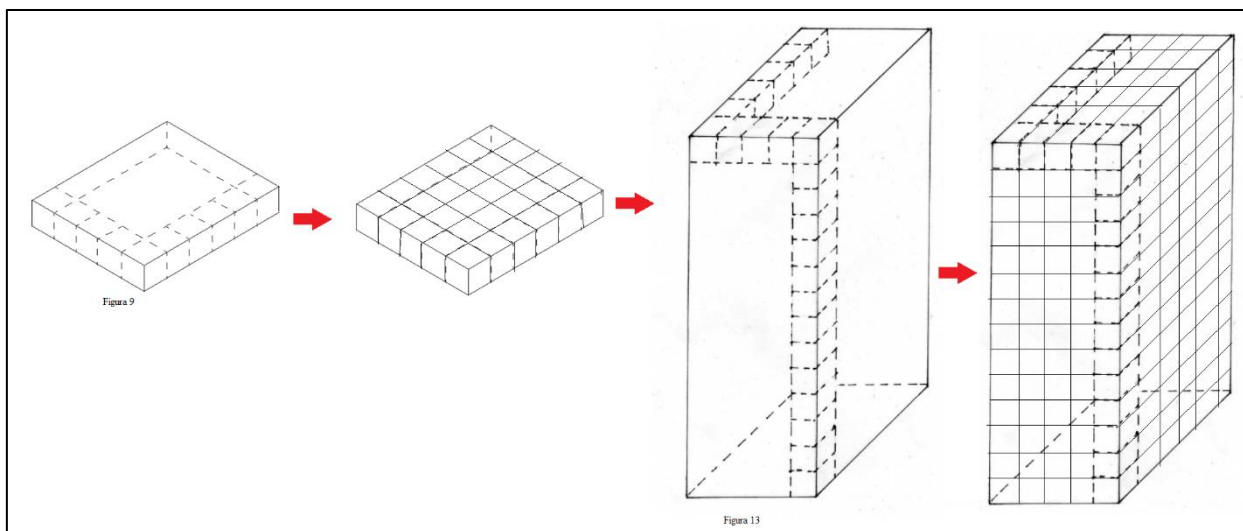


Ilustración 14. Desarrollo Visual Tarea 2.3 Del Momento 2 (parte 4)

Son cinco los elementos de control considerados en la T2.3: el tono y grosor, fraccionamiento lineal, posición del fraccionamiento, número de unidades y la perspectiva, todos presentes en las Figuras 10,11,12 y 13; el primero se identifica en la discriminación de cubos que conforman las figuras, el segundo en los cubos introducidos en las figuras, el tercero de acuerdo a la posición del fraccionamiento lineal presente en las figuras, el cuarto se observa en la cantidad de unidades de medida presentes en las figuras, el quinto de acuerdo a la inclinación en que se representan las figuras.

En el desarrollo de las tareas, el fraccionamiento lineal obstaculiza la discriminación de las unidades de medida que conforman las Figuras 10,11,12 y 13, y contribuye al cambio dimensional operatorio, por su parte la ubicación del fraccionamiento permite fraccionar la figura en las unidades patrón que la constituyen; en cuanto al elemento número de unidades complejiza la tarea a medida que crece la cantidad de unidades de medida. Finalmente, las perspectivas en este caso permiten ver al menos tres caras del prisma y así establecer el número de unidades que conforman las figuras.

Tabla 11
Rol de los elementos de control visual incluidos en la T2.3

Elementos de control incluidos en la tarea	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Fraccionamiento lineal	Cambio de focalización	Obstaculiza la discriminación de las unidades de medida/ Promueve cambio dimensional operatorio
Número de unidades de medida	Operación visual Cambio dimensional	complejiza la solución de la tarea
Ubicación del fraccionamiento	Operaciones visuales	Promueve la dificultad e la solución de la tarea
Proyección	Cambio de focalización	Ayuda a reconocer las unidades de medida

Fuente: este estudio. Elaboración propia

4.1.2.3 Procedimientos para el cálculo del VPRR

Considera la T3.1 que solicita proponer procedimientos que permitan calcular el volumen de un ortoedro, la unidad de medida no está definida, es el estudiante quien debe considerarla. Se pretende que quien resuelve la tarea propuesta, considere los procesos realizados anteriormente para reconocer procedimientos que permitan establecer una expresión matemática para calcular el VPRR a partir de las medidas de los contornos de la figura propuesta. A continuación, describimos algunos procedimientos que se pueden considerar.

Un primer procedimiento es el tomar una unidad patrón y usando la configuración por reiteración calcular el volumen de la figura propuesta. Este procedimiento se puede realizar solo si se indica de alguna manera la cantidad de unidades patrón, para conformar la figura.

Un segundo procedimiento es reconociendo en la figura propuesta el número de unidades patrón que se pueden identificar en la figura, y hacer su conteo respectivo.

Un tercer procedimiento es contar las unidades verticales (altura), las horizontales (ancho) y las que conforman profundidad (largo) de la figura y multiplicarlas entre sí.

4.1.2.4 Aplicación de la fórmula para calcular la medida del VPRR

Considera cuatro tareas (T 4.1, T4.2, T4.3 y T4.4), en la T4.1 exige calcular la medida del volumen de sólidos geométricos con formas y características perceptivas de igual naturaleza, en la T4.2 los sólidos geométricos, tienen distintas formas y características perceptivas, en la T4.3 se solicita hacer representaciones de sólidos que tienen igual volumen pero características perceptivas distintas. Finalmente, en la T4.4 se solicita hacer la transformación de un prisma en un paralelepípedo de igual volumen. En todos los casos la unidad de medida a considerada es un centímetro cúbico (1cm^3).

En la T4.1 la atención recae en tres sólidos geométricos (Figuras 14, 15 y 16), en la T4.2 también son tres los sólidos geométricos a considerar (Figuras 17,18 y 19), en la T4.3 son tres los sólidos propuesto por los estudiantes. Por último, en la T4.4, se considera un sólido representado por el estudiante y sobre el cual debe hacer un tratamiento figural.

Se pretende, que quien las resuelve las tareas considere el procedimiento deducido en los momentos anteriores y así dar cuenta de las medidas solicitadas: 150cm^3 en la Figura 14, 127.428cm^3 en la Figura 15 y 277.440cm^3 en la Figura 16, de la tarea T4.1, en el caso de la tarea T4.2, 420.000cm^3 en la Figura 17, 167.625 en la Figura 18 y 490.500cm^3 en la Figura 19. En cuanto a la tarea 4.3 se considera un volumen de 300 cm^3 , y en la Tarea 4.4, la medida del volumen de los sólidos geométricos es la misma en ambos casos.

Para resolver las problemáticas planteadas en las tareas que conforman el cuarto momento de la propuesta de enseñanza, en la Tarea 4.1 (calcular la medida del volumen de tres sólidos de formas y características perceptuales iguales), es necesario considerar, dinamismos visuales de naturaleza estático. De otra manera, en la T4.2 se considera calcular la medida del volumen de

tres sólidos de formas y características perceptuales distintas, los dinamismos visuales a considerar son de naturaleza parcial-total, se incluye la operación refraccionamiento, cambio dimensional fijo y cambio de focalización intra-figural.

En cuanto a la Tarea 4.3 se pretende, la representación de los sólidos geométricos de igual volumen, pero de forma y características distintas, puntualmente, se considera el dinamismo parcial total, el cambio dimensional fijo y un cambio de focalización configural. Finalmente, en la T4.4 se considera un dinamismo parcial-total, puntualmente, la operación de reconfiguración, un cambio dimensional de desdoblamiento y un cambio de focalización intra-figural.

Para propiciar o inducir la consideración de los dinamismos reseñados, se incluyeron, como elementos de control: la perspectiva isométrica (Figura 15 Y 18) perspectiva caballera (Figura 16 Y 17), la perspectiva dimétrica (Figura 14 Y 19), asimismo, se resaltó un contraste tono-grosor en todas las figuras, un fraccionamiento parcial (Figura 14) y los índices (Figuras 15,16, 17 y 18).

La diferencia entre las cuatro tareas radica en que, se consideran procedimientos y tipos de acciones visuales distintas, y los elementos de control, tienen efectos visuales diferentes, es decir, en la solución de la Tarea 4.1, se calcula el volumen de las Figuras (14,15 y 16), considerando uno de los procedimientos establecidos en los momentos anteriores; el elemento de control fraccionamiento lineal, incluido, permite discriminar la cantidad de unidades cúbicas que constituyen las figuras; mientras que, en la solución de la Tarea 4.2, se calcula el volumen de las Figuras (17,18 y 19) mediante la fórmula matemática establecida, pero es necesario aplicar la operación de refraccionamiento en la discriminación de sub-figuras, el elemento de control índice, ayuda a reconocer medidas en la figura, el elemento perspectiva permite identificar sub-figuras.

Elementos de control incluidos en T4.1 y procesos de resolución promovidos: quien realiza la Tarea 4.1 (Ver Ilustraciones 15 y 16), inicialmente centra su atención en las aristas del contorno de la Figura 14, que muestran la longitud de una arista de un cubo que la conforman, esto se logra trazando líneas internas en la figura, usando como referencia el fraccionamiento introducido sobre ella, lo que permite reconocer la cantidad de cubos en la cara frontal de la figura, en este caso 30 cubos, para formar la figura total se necesitan cinco caras con un volumen igual al de la primera, luego se multiplica treinta cubos por cinco caras y se obtiene en total 150 cubos es decir, un volumen de 150cm^3 .

Las Figuras 15 y 16, son agrandamientos de la Figura 14, aunque no aparecen divisiones en las aristas, se sugieren a partir de las medidas representadas sobre las aristas de cada figura; lo que induce a reconocer la cantidad de cubos que hay por cada cara en la figura (Ver Ilustraciones 14 y 15).

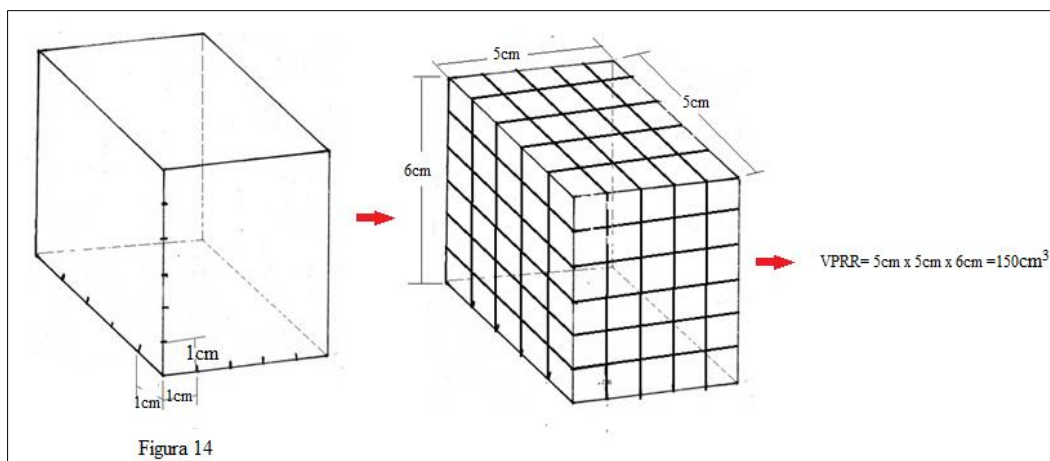


Ilustración 15. Desarrollo Visual Tarea 4.1 del Momento 4(parte 1).

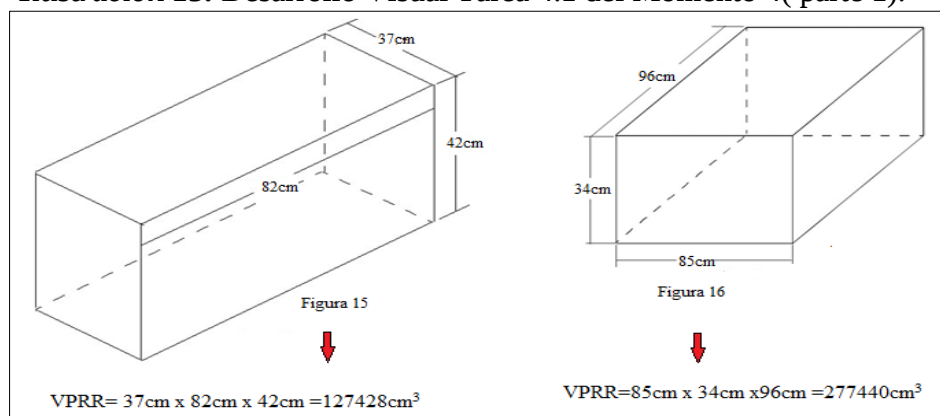


Ilustración 16. Desarrollo Visual Tarea 4.1 del Momento 4(parte 2).

En este momento de la propuesta de enseñanza, son tres los elementos de control considerados: la perspectiva isométrica (Figuras 15 y 18), la dimétrica (Figura 19) y la caballera (Figuras 16 y 17), el fraccionamiento numérico (Figura 14) e Índices (Figuras 15, 16, 17, 18 y 19)

La introducción del elemento de control índice busca el reconocimiento de la cantidad de unidades de dimensión tres de la figura. Por su parte, el tono y grosor permite identificar los segmentos del contorno de las figuras, pero dificulta el reconocimiento de unidades de dimensión

tres. Así mismo las perspectivas ayudan en el reconocimiento de las unidades de dimensión uno y cero que hacen parte de la figura, pero en este caso, obstaculiza el cambio dimensional fijo.

Tabla 12

Rol de los elementos de control visual introducidos en la T4.1

Elementos de control incluidos en la tarea	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Perspectiva	Cambio dimensional	Ayuda a discriminar segmentos que conforman figuras Obstaculiza el cambio dimensional fijo
Fraccionamiento numérico	Cambio dimensional y de focalización Operaciones visuales	Promueve el reconocimiento de sub-figuras Promueve el refraccionamiento
Índice	Cambios dimensionales	Ayuda a discriminar sub-figuras, y al reconocimiento de aristas de las figuras
Tono y grosor	Cambio de focalización	Promueve el reconocimiento de segmento que conforman las figuras

Fuente: la presente investigación. Elaboración propia

En la solución de la Tarea 4.2, en la que se solicita calcular el volumen de las Figuras 17, 18 y 19, inicialmente se centra la atención en la figura que acompaña la consigna; en la primera se reconocen tres sub-figuras con forma de prisma rectangular recto, a las que se les calcula el volumen aplicando la fórmula del VPRR, luego se suman las medidas encontradas (Ver Ilustración 17). En la segunda figura, se calcula la medida del volumen de toda la figura, luego se calcula la medida del orificio que hay en el centro, estas dos medidas se restan y se obtiene el volumen de la figura (Ver ilustración 18). En la última figura, la complejidad para calcular el volumen es mayor, se puede dividir en varias sub-figuras, a las que se les calcula el volumen, dos sólidas y un orificio, luego se suman las partes sólidas y se resta el volumen del orificio (Ver Ilustración 19).

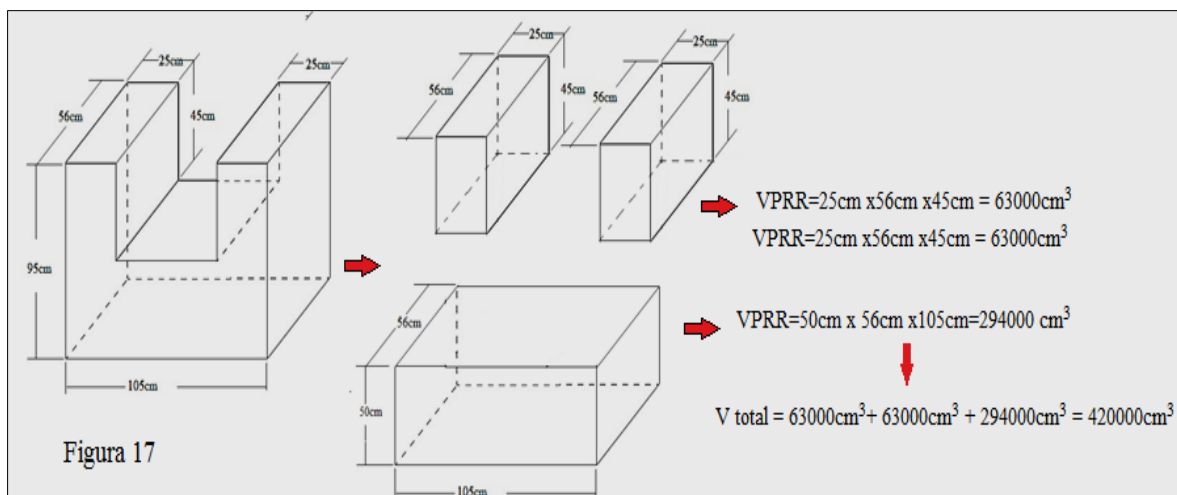


Ilustración 17. Desarrollo Visual Tarea 4.2 del Momento 4 (parte 1).

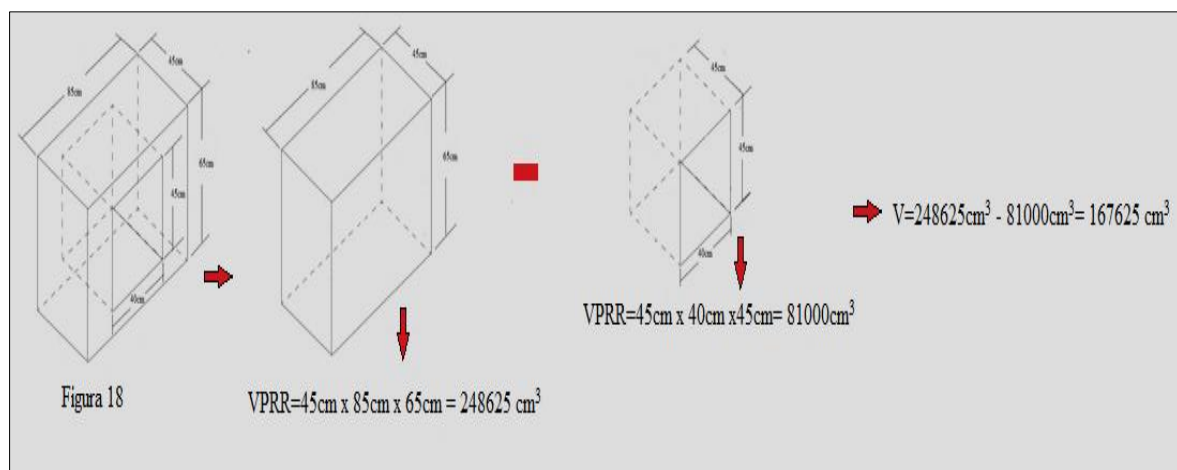


Ilustración 18. Desarrollo Visual Tarea 4.2 del Momento 4 (parte 2).

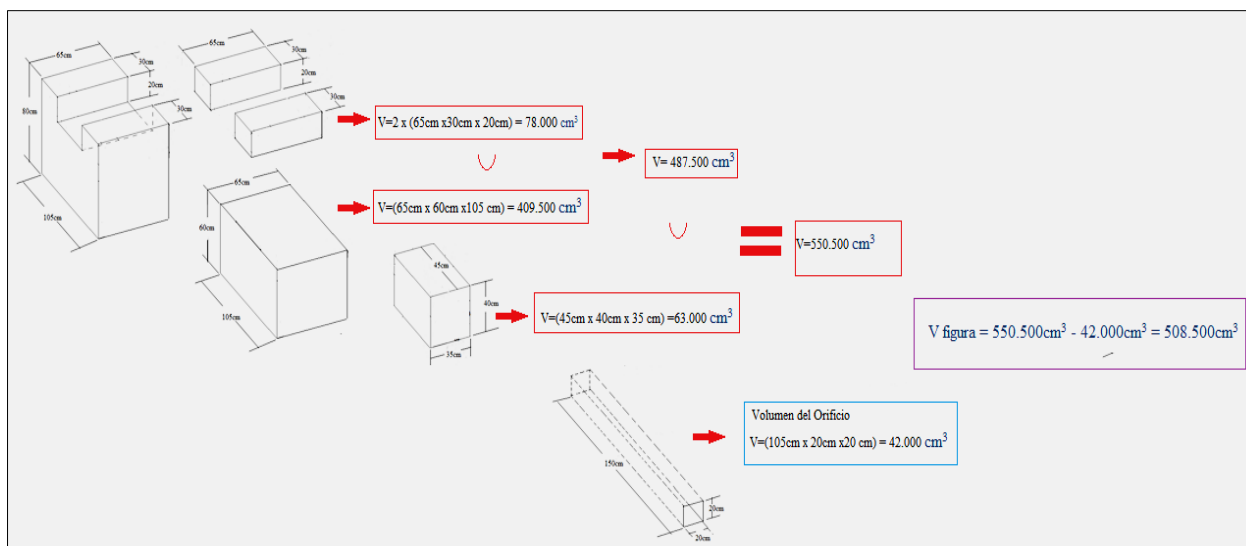


Ilustración 19. Desarrollo Visual Tarea 4.2 del Momento 4 (parte 3).

Son tres los elementos de control considerados, perspectiva (caballera en la Figura 17; isométrica en la Figura 18; y la dimétrica en la Figura 19); el fraccionamiento numérico y el elemento índice, presentes en las tres figuras incluidas en la tarea.

El elemento perspectiva induce el cambio dimensional por desdoblamiento, mientras que el fraccionamiento numérico lo obstaculiza, pero induce al cambio de focalización. La perspectiva en este caso permite discriminar las unidades de dimensión uno que conforman la figura, mientras que el fraccionamiento numérico introducido permite reconocer las sub-figuras. Por otro lado, el elemento índice permite discriminar la longitud de las unidades 1D que conforman la figura, y ayuda en el reconocimiento de sub-figuras.

Tabla 13

Rol de los elementos de control introducidos en la T4.2

Elementos de control incluidos en la tarea	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Perspectiva	Cambio dimensional	Ayuda a discriminar segmentos que conforman figuras
Fraccionamiento numérico	Cambios dimensionales y de focalización Operaciones visuales	Promueve el reconocimiento de sub-figuras Promueve el refraccionamiento
Índice	Cambios dimensionales	Ayuda a discriminar sub-figuras, y al reconocimiento de aristas de las figuras

Fuente: este estudio. Elaboración propia

Elementos de control incluidos en T4.3 y procesos de resolución promovidos: quien resuelve la Tarea 4.3 (Ver Ilustración 20), debe construir prismas de distinta naturaleza pero de igual volumen, para lo cual, deberá utilizar la expresión obtenida para el cálculo del VPRR, por lo que se recurre a varias combinaciones de medidas, descomponiendo la medida del volumen total que debe tener la figura (300cm^3) mediante un proceso aritmético, esto le ayuda a reconocer posibles medidas de las figuras a representar.

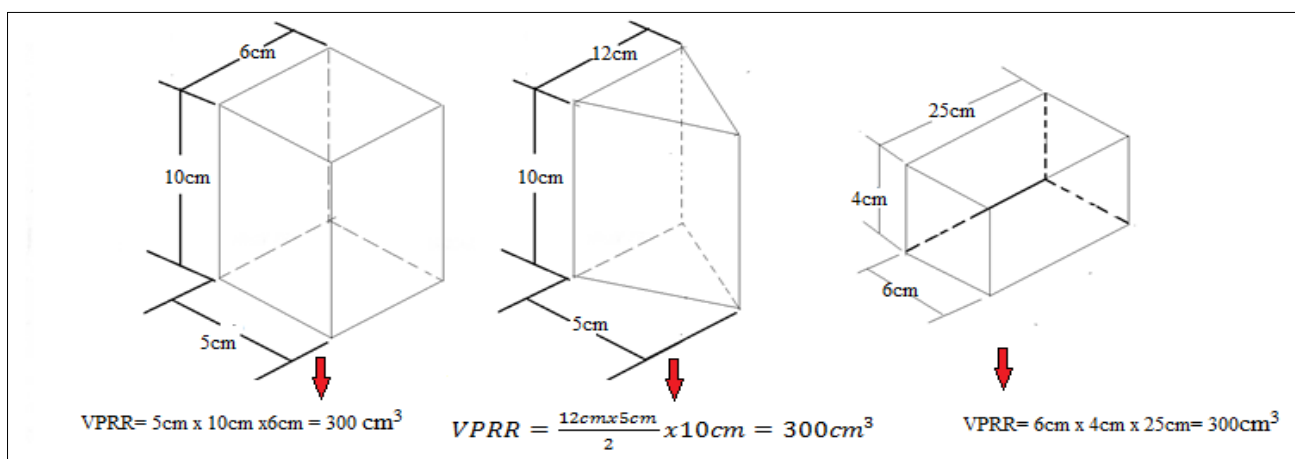


Ilustración 20. Desarrollo Visual Tarea 4.3 del Momento 4.

El elemento de control considerado está en la consigna de la tarea, y corresponde al número de unidades cúbicas que se deben representar en cada figura solicitada. El elemento en este caso, promueve el cambio dimensional fijo. En este sentido el número de unidades se conserva en las tres figuras a proponer, pero con diferentes configuraciones.

Tabla 14
Rol de los elementos de control introducidos en la T4.3

Elementos de control incluidos en la tarea	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Número de unidades	Cambio dimensional	Reconocimiento de distintas configuraciones, con el mismo volumen

Fuente: este estudio. Elaboración propia.

En cuanto a la solución de la Tarea 4.4 exige trazar un prisma rectangular recto, construir un paralelepípedo que tenga el mismo volumen.

Elementos de control incluidos en T4.4 y procesos de resolución promovidos: quien realiza la tarea debe centrar la atención en la figura de inicio, introducir trazos auxiliares, cuestión que promueve un refraccionamiento. Finalmente, la sub-figura suscitada en uno de los extremos del prisma, se traslada al otro extremo del prisma. En consecuencia, se conserva el volumen y se forma un paralelepípedo, como se solicita en la consigna (Ver Ilustración 21).

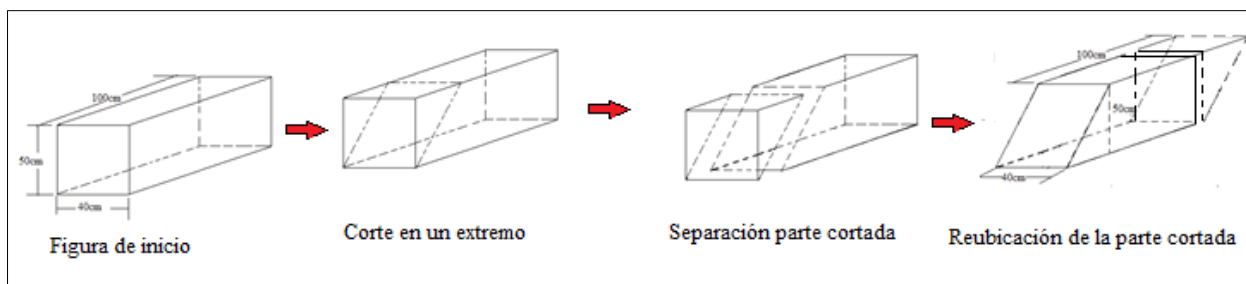


Ilustración 21. Desarrollo Visual Tarea 4.4 del Momento 4.

El elemento de control considerado está presente en la consigna de la tarea y corresponde al número de unidades cúbicas que conforman la figura, en este caso, promueve las operaciones de refraccionamiento y la reconfiguración.

Tabla 15

Rol de los elementos de control visual introducidos en la T4.4

Elementos de control incluidos en la tarea	Aspecto visual en el que interviene	Posibilidades/ obstáculos
Número de unidades	Operaciones visuales	Reconocimiento de distintas configuraciones, con el mismo volumen Se promueve el refraccionamiento y la reconfiguración

Fuente: esta investigación. Elaboración propia

4.2 Análisis a posteriori

El desarrollo de las tareas diseñadas en la investigación provocó procedimientos visuales de distinta índole adoptados por los estudiantes. A continuación, caracterizamos y describimos en detalle, el rol heurístico y los grados de potencia heurística de las figuras. Así como, los efectos visuales que propiciaron los elementos de control introducidos en las distintas tareas. También, se consideran las ideas métricas desarrolladas en las descripciones de los procedimientos realizados por los estudiantes. Finalmente, se establecen posibilidades y dificultades que se suscitaron al resolver las tareas en la construcción de la fórmula para calcular el VPRR.

4.2.1 Roles heurísticos y grados de potencia heurísticas identificadas en la investigación

En el estudio de la geometría, las figuras juegan un papel importante: “dejan ver mucho más de los que los enunciados dicen (Duval, 1999, p. 152), pues permiten la conducta abducción; es decir, “delimitar de entrada la clase de hipótesis o de alternativas que han de considerarse en la resolución de un problema” (p.152). En este sentido, “hablar del papel heurístico [o Rol heurístico] de las figuras viene a significar que es la conducta de abducción la que guía la deducción” (p. 152). Los elementos de control (Marmolejo y González, 2015) son las que determinan *el grado de potencia heurística* de una figura, es decir, en qué nivel la figura desempeña un rol heurístico en la resolución de una problemática.

En la presente investigación, el diseño de las tareas privilegió la inclusión de una serie de elementos de control para que el nivel de potencia heurística de las figuras fuese alto (ver análisis a priori, pp. 39-61). No obstante, al intentar resolver las tareas, los estudiantes, asignaron roles

heurísticos de naturaleza distinta a las figuras: *operatorio compuesto*, *operatorio mixto*, *simple* y *nulo*. Todos los roles heurísticos reseñados coinciden con los reportados en Marmolejo, Guzmán & Insuaty (2015) al caracterizar el rol que los libros de texto asignan a las figuras al promover la introducción de las fracciones, donde no todos los roles heurísticos evidencian altos niveles de potencia heurística. En este sentido, fueron tres los grados de potencia heurística considerados en el estudio: *máximo*, *intermedio* y *bajo*, solo el primero de ellos alude a una alta potencia heurística.

En lo que sigue, definimos, caracterizamos y ejemplificamos los roles heurísticos antes reseñados:

Rol heurístico-operatorio compuesto: quién resuelve la tarea propuesta, asigna sentido a los elementos de control visual incluidos, los cuales suscitan la composición de operaciones visuales, es decir: configuración simple – reconfiguración, refraccionamiento – configuración simple, refraccionamiento- reconfiguración. La aplicación compuesta de tales operaciones sobre las figuras que acompañan la consigna de la tarea es el acto que explicita, inicializa, guía a o permite, el proceso de resolución de la problemática en cuestión.

Así pues, cuando se resuelve una tarea y se privilegia un Rol heurístico-operatorio, se aplica a la figura en cuestión acciones netamente cualitativas que suscitan “la aplicación compuesta de dos o más operaciones” (Marmolejo, et al, 2015, p. 53). Es en este sentido que afirmamos que el grado de potencia heurística involucrado es máximo.

En la resolución de tareas que solicitan calcular el volumen de un sólido de naturaleza irregular y donde no es posible aplicar, en primera instancia, una fórmula, fue el lugar donde el

Rol heurístico-operatorio compuesto fue mayormente considerado. Como se evidenció en el análisis a priori, las tareas que exigen para su resolución lo anterior son T4.2, T4.3 y T4.4.

Privilegiar un Rol Heurístico-Operatorio compuesto en el desarrollo de las tareas antes reseñadas, promueve el desarrollo de la Aprehensión Operatoria.

Con el propósito de ejemplificar el Rol heurístico-operatorio compuesto, en lo que sigue se reseña el procedimiento realizado por E1 al resolver la T4.4 (Ver Ilustración 21). En la T4.4 se solicita representar un prisma rectangular recto, transformarlo en un paralelepípedo con igual volumen y exponer un método que permita calcular su volumen.

Por tanto, para resolver esta tarea, es necesario, inicialmente, discriminar una sub-figura específica en la figura de partida (prisma rectangular recto) y aplicar sobre ella una reconfiguración, generando un paralelepípedo. Posteriormente, se ha de considerar la figura de llegada para generar un procedimiento que suscite el cálculo de su volumen. El procedimiento adoptado por E1 es discriminar la cantidad de unidades de medida presentes en el largo, el ancho y la altura del paralelepípedo y aplicar un procedimiento multiplicativo.

En lo que sigue, exponemos el procedimiento de resolución privilegiado por el estudiante E1:

T4.4 Representa un prisma recto y transformalo en un paralelepípedo con igual volumen. Teniendo en cuenta el proceso anterior, escribe de forma detallada un método que te permita calcular el volumen de cualquier paralelepípedo.

“Primeramente, al prisma original se le hace un corte transversal, y la parte recortada obtenida, la trasladamos al otro extremo del prisma; para así tener como resultado un paralelepípedo. Como el paralelepípedo es equivalente al prisma rectangular, entonces para hallar su volumen sólo tenemos que multiplicar sus tres dimensiones (ancho por largo por alto) al igual en el prisma rectangular”

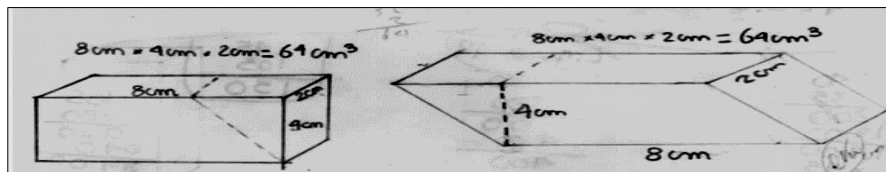


Ilustración 22. Tarea Desarrollada Por E1, Para Rol Heurístico Operatorio.

Inicialmente E1 introdujo un refraccionamiento sobre la figura lo que generó una subfigura *“Primeramente, al prisma original se le hace un corte transversal”* seguidamente, realizó una reconfiguración, al trasladar la subfigura al otro lado del prisma *“y la parte recortada obtenida, la trasladamos al otro extremo del prisma”*. El anterior procedimiento le permitió transformar el prisma en un paralelepípedo como se solicita en la consigna *“para así tener como resultado un paralelepípedo”*. Finalmente, expuso un procedimiento que le permite calcular el volumen de un paralelepípedo *“como el paralelepípedo es equivalente al prisma rectangular, entonces para hallar su volumen sólo tenemos que multiplicar sus tres dimensiones (ancho por largo por alto) al igual en el prisma rectangular”*

Rol heurístico-operatorio mixto: quien resuelve la tarea propuesta asigna sentido a los elementos de control visual que suscitan el refraccionamiento de la figura de partida, esto a través de la inclusión de trazos auxiliares. La nueva reorganización perceptiva de la figura es la que induce la discriminación de sub-figuras que adquieren el estatus de unidades patrón de medida, su conteo suscita el cálculo de la medida del sólido en cuestión.

De esta manera, en la figura de partida el Rol heurístico-operatorio mixto privilegia una visualización de naturaleza intrafigural. En este sentido, se deja de centrar la atención en la globalidad de la figura de partida para hacerlo en las sub-configuraciones que aparecen por acción de los trazos suplementarios introducidos.

La diferencia entre el Rol heurístico-operatorio mixto y el Rol heurístico operatorio compuesto, radica en dos aspectos: 1) mientras que en el segundo de los roles, se contemplan exclusivamente acciones cualitativas (reconfiguración), en el primero la atención recae tanto en acciones cualitativas (re-fraccionamiento) como cuantitativas (procedimientos multiplicativos), y 2) en el primero de los casos solo se incluye una operación (re-fraccionamiento) y en el segundo,

la composición de dos operaciones (configuración simple – reconfiguración, refraccionamiento – configuración simple y refraccionamiento- reconfiguración).

Lo anterior, nos lleva a afirmar que el grado de potencia heurística subyacente a un Rol heurístico operatorio-mixto es menor que en el Rol heurístico-operatorio compuesto, y siguiendo los parámetros establecidos en Marmolejo, Guzmán, & Insuaty(2015), lo definimos como una potencia heurística intermedia.

La mayor presencia del Rol heurístico- operatorio mixto se dio en la resolución de tareas que solicitan calcular la medida del volumen de un sólido regular a través de unidades patrón de medida, y donde se solicita establecer un procedimiento que permita calcular la medida del volumen de cualquier prisma rectangular recto, cuestión presente en las tareas T2.1, T2.2 , T2.3 y T3.1.

En la consigna de la T2.3, se solicita calcular el volumen de un prisma, a partir de una unidad patrón de forma prismática; y escribir el procedimiento a seguir; su resolución exige, introducir trazos auxiliares y considerar una operación en la figura. En consecuencia, los trazos introducidos inducen a contemplar la operación de refraccionamiento, lo que permite reconocer sub-figuras en el sólido a medir.

Los elementos de control introducidos, proyección, fraccionamiento lineal y la posición del fraccionamiento, permitieron el reconocimiento de las unidades patrón de medida, en la figura. En este tipo de tarea, se promueve un dinamismo visual parcial mixto, procesos multiplicativos, la inclusión de trazos auxiliares en las figuras y se recurre a la construcción de figuras a mano alzada en la solución de la tarea.

A continuación, se presenta el procedimiento de resolución que E3 aplicó al desarrollar la tarea T2.3 ejemplifica el Rol que acabamos de definir y pone en evidencia un grado de potencia heurística intermedio (Ver Ilustración 23).

Tarea 2.3 La figura 9 representa un prisma, ¿cuántos necesitas para construir las figuras 10, 11, 12 y 13? Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.

“En la Figura 12, tracé líneas y observé que en la parte de arriba había un prisma de 6 cubos de largo por cinco de ancho, luego dividí en diez partes, multiplique $10 \times 6 \times 5 = 300$ (para obtener la totalidad de cubos que conforman la figura). Obtengo diez prismas, dividiendo la figura que me da 30 cubos que conforman un prisma, en total serían 10 prismas” (Ver ilustración 22).

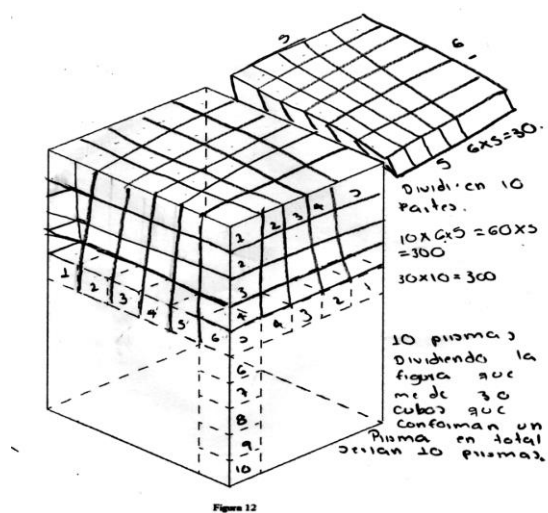


Ilustración 23. Tarea Desarrollada Por E3, Para Rol Heurístico Operatorio-Mixto

En la solución de la tarea, el estudiante E3 realizó un refraccionamiento lo que permitió identificar prismas de igual naturaleza a las de la unidad de medida: *“tracé líneas y observé que en la parte de arriba había un prisma de 6 cubos de largo por cinco de ancho”*. Seguidamente, realizó un proceso multiplicativo, con el fin de calcular el número de cubos que conforman el sólido a medir: *“luego multiplique $10 \times 6 \times 5 = 300$, para obtener la totalidad de cubos que conforman la figura”*.

Finalmente, realizó un proceso aritmético de división, para calcular el número de unidades de medida que conforman la figura *“luego obtengo diez prismas, dividiendo 300 cubos de la figura grande, entre los 30 cubos que conforman un prisma; en total serían 10 prismas”*

Rol heurístico- simple: quien resuelve la tarea propuesta asigna sentido a los elementos de control visual que pretenden suscitar de forma compuesta cambios de focalización y cambios dimensionales de naturaleza fija (acciones cualitativas), cuestiones necesarias para la consideración de fórmulas de cálculo de la medida de volumen de un sólido. La aplicación de estas acciones cualitativas y cuantitativas es lo que posibilita, inicializa o guía el proceso de resolución de la problemática en cuestión.

El hecho que en ningún momento se considera en este tipo de rol la aplicación de operaciones que modifiquen global o internamente la figura de partida, tampoco cambios dimensionales de naturaleza operatoria, lleva a que el grado de potencia heurística sea bajo: salvo los cambios de focalización percibidos, la figura en estudio es asumida de forma estática (Marmolejo et al, 2015)

El Rol heurístico- simple fue considerado por la mayoría de los estudiantes, en la resolución de tareas que solicitan calcular el volumen de un sólido de naturaleza regular, utilizando una fórmula que se aplica directamente, si sobre las figuras se representan números que aluden a las medidas del largo, el ancho y la altura. La consideración del cambio dimensional fijo permite hacer de las figuras elementos que coadyuvan en el uso de la fórmula para el cálculo del VPRR, cuestión presente en el momento cuatro de la propuesta de enseñanza, puntualmente, en la T4.1.

El desarrollo realizado por el estudiante E2, en la solución de T4.1 ejemplifica, como la mayoría de la población participante en la investigación asignó un rol heurístico- simple, al recurrir a las figuras en el uso de la fórmula para calcular el VPRR (Ver Ilustración 24).

La problemática planteada en la T4.1 solicita calcular el volumen de un prisma, utilizando la FVPRR. En este tipo de tarea, se promueve un dinamismo visual intermedio, la introducción de trazos auxiliares sobre las figuras y también procedimiento de sustitución en la fórmula.

T4.1 Definición 2: Centímetro cúbico, es una unidad para medir volumen y corresponde a un patrón representado por un cuerpo que ocupa un espacio euivalente a un cubo de 1cm de arista, y se escribe de esta manera cm^3 .

Tomando como unidad de medida un cm^3 , calcula el volumen de los siguientes prismas. Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.

“Primero que todo teniendo en cuenta la medida de un centímetro mire cuántos de esos cm habían de alto, de largo y de ancho, dándome como resultado seis cm 5 centímetros y 5 centímetros, que son las distintas dimensiones del prisma luego para determinar el volumen multipliqué estas medidas obteniendo como resultado 150m^3 ”

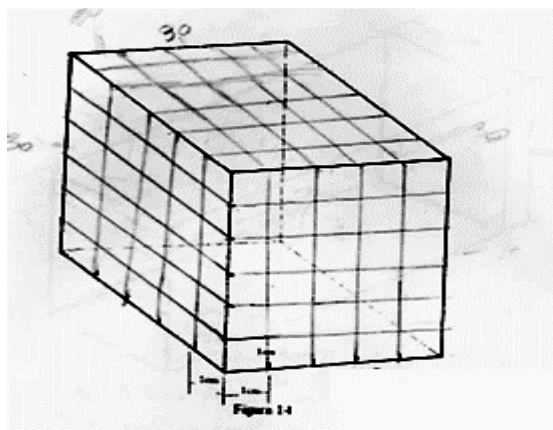


Ilustración 24. Tarea Desarrollada Por E2, Para el Rol Heurístico Operatorio Simple.

El estudiante E2 inicialmente hizo sobre la figura un cambio dimensional fijo y un cambio de focalización, pues dejó de centrar la atención en la totalidad de la figura, para hacerlo sobre las medidas de sus contornos *“Primero que todo teniendo en cuenta la medida de un centímetro mire cuántos de esos cm habían de alto, de largo y de ancho, dándome como resultado seis cm 5 centímetros y 5 centímetros, que son las distintas dimensiones del prisma”*. Lo anterior le

permitió remplazar en la FVPRR y realizar un proceso multiplicativo para calcular el volumen del sólido geométrico *“luego para determinar el volumen multipliqué estas medidas obteniendo como resultado $150m^3$ ”*

Rol heurístico- Nulo: quien resuelve la tarea propuesta, asigna sentido a los elementos de control visual incluidos que no suscitan operaciones ni otro tipo de acción sobre la figura que acompaña la consigna.

El resolver una tarea en donde se privilegia un rol heurístico- nulo, está asociado con un grado de potencia heurística bajo, es decir, sobre la figura presente no se realiza ningún tipo de acción y solo sirve de apoyo para realizar procedimientos aritméticos tipo conteo (Marmolejo & Vega, 2012).

En la resolución de tareas donde las figuras que aparecen representan un sólido de naturaleza irregular y sobre el que solo se reconocen unidades patrón de medida que lo conforman, se presenta el rol heurístico- nulo.

El no considerar sobre las figuras ningún tipo de tratamiento hace que este rol heurístico promueva una aprehensión perceptiva, es decir, “se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figuralas que son discernibles en una figura dada” (Duval, 1999, p. 145).

El rol heurístico- nulo fue considerado por la mayoría de los estudiantes, en la resolución de tareas que solicitan calcular el volumen de un sólido de naturaleza irregular a partir de una unidad patrón de medida, para el que no hay una fórmula a aplicar directamente, cuestión presente en el momento uno y dos de la propuesta de enseñanza, puntualmente en las T1.1 y T2.1.

Las tareas en donde está presente este tipo de rol heurístico se suscita un dinamismo visual estático. Promueve procedimientos aritméticos, como, el conteo uno a uno de unidades que componen un sólido geométrico y procedimientos aditivos. La consideración de estas acciones, promueven la medición directa del VPRR.

El proceso de solución de T1.1 que solicita calcular el volumen de un sólido irregular a partir de un cubo como unidad de medida, realizado por el estudiante E6 ejemplifica como la mayoría de los estudiantes participantes en este estudio, asignó el rol heurístico -nulo al acudir a las figuras en la construcción de la FV(PRR) (Ilustración 25).

Tarea 1.1 ¿En la Figura 1 se representa un cubo, cuántos cubos se necesitaron para construir la figura 2?

Describe, paso a paso, el proceso utilizado para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.

“Conté los cubos que se veían a simple vista, que son 16, luego observé que en la parte da abajo en cada esquina había de a un cubo luego en total obtuve 18 “

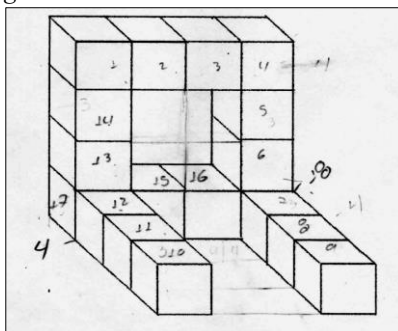


Ilustración 25. Procedimiento Realizado por E6. Rol Heurístico Nulo

En la solución de la tarea el estudiante realizó un conteo uno a uno de los cubos que conforman la figura: *“Conté los cubos que se veían a simple vista, que son 16”*, finalmente el estudiante logró identificar dos cubos que no se ven a golpe de vista, lo que le permitió calcular el volumen del sólido geométrico: *“luego observé que en la parte da abajo en cada esquina había de a un cubo luego en total obtuve 18”*.

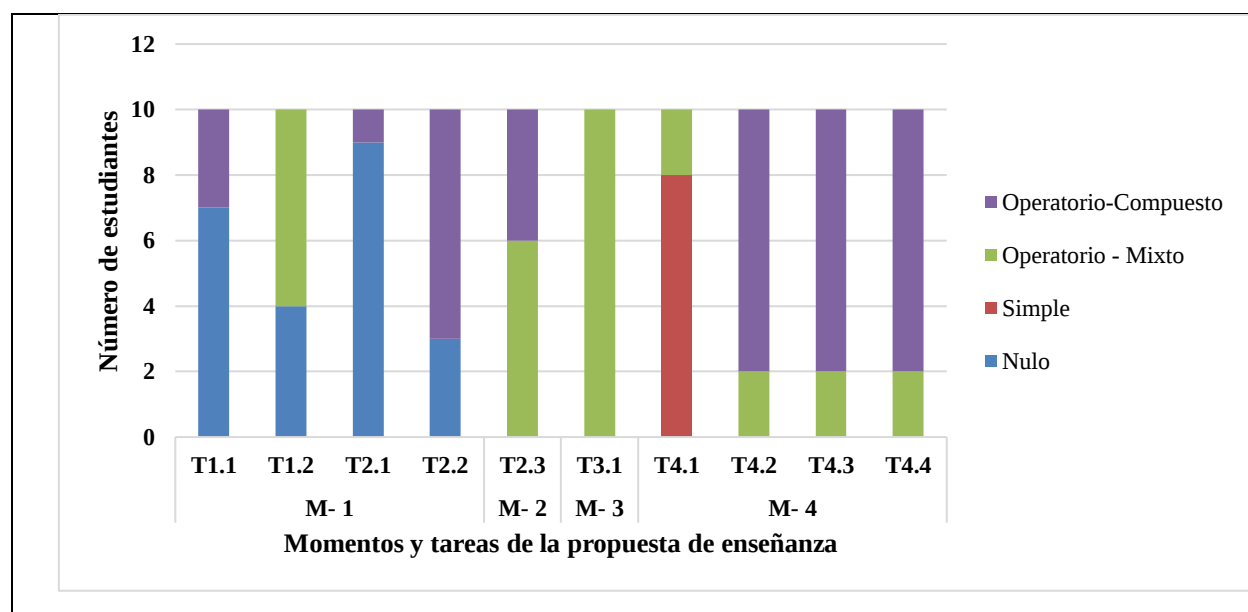
4.2.2 Dificultades y posibilidades de las figuras, en cada uno de los Momentos de la propuesta de enseñanza

En los procedimientos de los estudiantes se identificaron dificultades y posibilidades que, respectivamente, promovieron u obstaculizaron la construcción de la FVPRR, las cuales son descritas a continuación según los momentos en que fue dividida la propuesta de enseñanza (ver análisis a priori, p.50-51) y los diferentes roles heurísticos detectados en la investigación.

En la tabla 16 se hace una comparación entre los tipos de rol heurístico asignados en los procedimientos de los estudiantes, al realizar cada una de las tareas en los momentos de la propuesta de enseñanza.

Tabla 16

Roles heurísticos de las figuras, asignados por los estudiantes, al resolver las tareas propuestas



Fuente: la presente investigación. Elaboración propia

Los resultados previos muestran que en las tareas T1.1 y T2.1 los elementos de control introducidos (tono y grosor, fraccionamiento simple y perspectiva), suscitaron que la mayoría de los estudiantes asignaron a las figuras el rol heurístico nulo, y en una minoría, el rol operatorio –

compuesto. En este tipo de tareas, las figuras no son utilizadas de forma dinámica, cuestión que no ayuda a promover la visualización.

Mientras en las tareas T1.2 y T2.2, los elementos de control (fraccionamiento, perspectiva, fraccionamiento lineal, tono y grosor) promovieron que la mayoría de los estudiantes asumiera el rol operatorio mixto, y en menor número, el rol heurístico nulo.

Lo anterior muestra que la introducción de los elementos de control considerados en tareas de esta naturaleza, promueven la visualización, pero por otro suscitó la consideración de procedimientos aritméticos tipo conteo que ayudan en la construcción de la fórmula para calcular la medida del VPRR.

El caso fue distinto en las tareas T2.3 y T3.1. Los elementos de control considerados (fraccionamiento lineal, el número de unidades, la posición del fraccionamiento, el tono y grosor), suscitaron que la mayoría de los estudiantes privilegiaran en la T2.3 el rol heurístico operatorio mixto, y en menor número, el operatorio compuesto, mientras que en la T3.1 solo se contempló el rol operatorio mixto.

Lo expuesto anteriormente, nos indica que en este tipo de tareas los elementos de control introducidos promueven que las figuras se convierten en soportes heurísticos para la solución de las problemáticas planteadas.

Por su parte en la T4.1, la consideración de elementos de control (proyección, fraccionamiento numérico e índices), indujo en todos los estudiantes a asignar a las figuras el Rol heurístico simple. Lo anterior permite establecer que las figuras en este tipo de tarea son utilizadas en la solución de la problemática planteada introduciendo en ellas operaciones de tipo visual (refraccionamiento). Por otro lado, promueve el uso de la fórmula para el cálculo de la medida del VPRR.

Finalmente, en las T4.2, T4.3 y T4.4, los elementos de control (tono y grosor e índices), promovió en la mayoría de los estudiantes, asignar a las figuras el Rol heurístico operatorio compuesto, y en una minoría, el rol heurístico simple.

Es de considerar, que en este tipo de tareas las figuras fungen como soportes heurísticos potentes, porque son consideradas como parte fundamental en la solución de las problemáticas presentadas.

4.2.2.1 Medición directa VPRR

En la medición directa del volumen de los sólidos geométricos (T1.1, T1.2, T2.1 y T2.2) fueron tres los roles heurísticos que los estudiantes asignaron a las figuras, a saber: nulo, operatorio mixto y operatorio compuesto. Mientras que el rol heurístico nulo fue considerado en las cuatro tareas: 7 estudiantes T1.1, 9 en T2.1, 4 en la T1.2 y 3 en la T2.2. En cuanto al Rol operatorio compuesto, fue privilegiado en la T1.1 y la T2.1, respectivamente, por tres y un estudiante. Finalmente, el operatorio mixto fue tenido en cuenta en la T2.2 por 7 estudiantes.

Los resultados anteriores evidencian que en el estudio de la medida directa del VPRR, al menos en las T1.1 y T2.1, existe una relación directa entre los elementos de control reseñados (fraccionamiento y fraccionamiento lineal), y las posibilidades que un sujeto tiene de asignar un Rol heurístico fijo u operatorio compuesto en el tratamiento de las figuras tridimensionales.

La presencia de un fraccionamiento y un fraccionamiento lineal promovieron en mayor parte de los estudiantes el considerar un Rol heurístico fijo. Esto llevó a que las figuras asociadas a tales tareas fungieran de forma estática en la resolución de las problemáticas planteadas: suscitaron la discriminación de cubos y prismas, y al asumirlos como patrones de medida

posibilitaron la inclusión de un conteo uno a uno para calcular la medida del volumen de las figuras en cuestión.

En consecuencia, de lo anteriormente expuesto, los elementos de control considerados promovieron que la mayoría de los estudiantes recurrieran a procedimientos aritméticos para calcular la medida del volumen de un sólido geométrico, como el de la tarea propuesta, cuestión que dificulta asumir el cálculo del volumen a partir de una configuración.

Solo en casos aislados, los mismos elementos de control suscitaron en el desarrollo de las T1.1 y T2.1 la asignación de un Rol heurístico operatorio compuesto, en tales casos la reconfiguración pasó a ser la operación clave.

Con respecto a los procederes evidenciados en la resolución de las T1.2 y T2.2, la cuestión fue totalmente diferente, la relación existente entre los elementos de control considerados (fraccionamiento y fraccionamiento lineal), y las posibilidades que un estudiante tiene de asignar un Rol heurístico operatorio mixto y operatorio compuesto en las figuras 3D presentes en las tareas. La presencia de un fraccionamiento y un fraccionamiento lineal promovieron que una mayor parte de los estudiantes consideraran un Rol operatorio mixto. Como consecuencia de lo anterior, las figuras asociadas a las problemáticas planteadas a estas tareas suscitaron: la introducción de trazos auxiliares y la discriminación de cubos y prismas, que fueron asumidos como patrones de medida y posibilitaron el cálculo del volumen de las figuras 3D en cuestión.

Solo en algunos casos, los mismos elementos de control suscitaron en el desarrollo de las T1.2 y T2.2, la asignación de un Rol heurístico operatorio compuesto, en tales casos la configuración es la considerada en los procederes.

Es de mencionar, que, en la solución de las tareas propuestas, la mayoría de los estudiantes acudieron a procesos visuales como son los cambios dimensionales, cambios de focalización y

las operaciones de refraccionamiento y de configuración, cuestión que promueve procedimientos para la construcción de la FVPRR.

4.2.2.2 Paso de la medida directa a la indirecta del VPRR

El paso de la medida directa a la indirecta de los sólidos geométricos (T2.3) fueron dos los roles heurísticos que los estudiantes asignaron a las figuras, a saber: nulo y operatorio mixto. Por un lado, el Rol operatorio mixto fue considerado por 8 estudiantes en la solución de la tarea. Mientras que solamente 2 estudiantes lo hicieron con un Rol operatorio nulo.

De acuerdo con lo anterior, se evidencia que en el estudio del paso de la medida directa a la indirecta del VPRR, en la T2.3 existe una relación directa entre los elementos de control reseñados (fraccionamiento lineal y posición del fraccionamiento), y las posibilidades que un sujeto tiene de asignar un Rol heurístico operatorio mixto o un Rol heurístico nulo en el tratamiento de las figuras 3D.

La presencia de un fraccionamiento lineal y la posición del fraccionamiento promovieron en mayor parte de los estudiantes el considerar un Rol heurístico operatorio mixto. Esto llevó a que las figuras asociadas a tales tareas fueran asumidas de manera dinámica y fueran parte esencial en la resolución de las problemáticas planteadas: la introducción de trazos auxiliares sobre las figuras que ayudaron en la discriminación de prismas, que fueron asumidos como patrones de medida que posibilitaron aplicar procesos multiplicativos para calcular la medida del volumen de las figuras en cuestión.

Los elementos de control considerados potencializaron en los procedimientos de los estudiantes al resolver las tareas, la aplicación de refraccionamiento y la configuración simple, cuestión que

promueve la visualización. Los procedimientos multiplicativos aplicados, generaron ideas para la construcción de la FVPRR.

Así mismo, solo en algunos casos los elementos de control suscitaron en el desarrollo de la T2.3 la asignación del Rol heurístico nulo. En estos casos, no se realizó ninguna acción sobre ellas, y las utilizaron solo para procedimientos aritméticos tipo conteo uno a uno.

4.2.2.3 Deducción de la fórmula para calcular VPRR

En la deducción de la fórmula para calcular el VPRR (T3.1), la totalidad de los estudiantes asignaron a las figuras un Rol heurístico operatorio mixto en el desarrollo de la tarea.

Lo expuesto anteriormente evidencia que en el estudio de la deducción de la fórmula para calcular el VPRR, promovida en la T3.1, los elementos de control considerados (fraccionamiento lineal y número de unidades), promovieron, que los estudiantes asignaran el rol heurístico operatorio mixto, en la solución de la tarea.

Este tipo de tareas en donde se solicita escribir un método que permita calcular de manera indirecta del VPRR, promueven acciones visuales como el refraccionamiento, el cambio dimensional fijo y el cambio de focalización intrafigural.

4.2.2.4 Aplicación de la fórmula del VPRR

En la aplicación de la fórmula para calcular el volumen de sólidos geométricos (T4.1, T4.2, T4.3, T4.4) fueron tres los roles heurísticos que los estudiantes asignaron a las figuras, a saber: nulo, operatorio mixto y operatorio compuesto.

Por su parte en la T4.1 el Rol heurístico nulo fue considerado por 8 estudiantes y el Operatorio mixto fue asignado por 2 estudiantes respectivamente. Mientras, el comportamiento en las T4.2, T4.3 y T4.4 fue distinto, el Rol heurístico Compuesto fue asignado por 8 estudiantes y sólo 2, asignaron el rol heurístico Operatorio mixto.

Los resultados expuestos anteriormente evidencian que la aplicación de la fórmula para el cálculo de un sólido geométrico se puede hacer de distinta manera, de acuerdo con los elementos de control reseñados. Particularmente en la T4.1 los elementos reseñados (fraccionamiento numérico, tono y grosor, índices) guardan relación con las posibilidades que tiene un estudiante de asignar un Rol heurístico simple u operatorio mixto en las figuras 3D.

La presencia de un fraccionamiento numérico, el tono y grosor y los índices promovieron en gran parte de los estudiantes el asignar un Rol heurístico nulo. Lo anterior llevó a que las figuras asociadas a las tareas funcionaran de manera dinámica en la resolución de la tarea planteada: suscitaron la discriminación de unidades de medida, posibilitaron la aplicación de la fórmula deducida con anterioridad para el cálculo del VPRR.

En muy pocos casos, los mismos elementos de control considerados promovieron en el desarrollo de la T4.1 la asignación del Rol heurístico operatorio mixto, en tales casos fue el refraccionamiento, la operación que se privilegió.

Con relación a los procedimientos evidenciados en la T4.2, T4.3 y T4.4 la cuestión fue distinta, la relación existente entre los elementos de control considerados (el tono y grosor y los índices), y las posibilidades que un estudiante tiene de asignar un Rol heurístico Operatorio Compuesto u Operatorio mixto en las figuras 3D presentes en las tareas. La presencia del tono y grosor y los índices promovieron que la mayor parte de los estudiantes consideraran un Rol heurístico operatorio compuesto. En consecuencia, las figuras asociadas a las problemáticas planteadas a

estas tareas suscitaron: la introducción de trazos auxiliares, la discriminación de sub-figuras (prismas rectangulares rectos) que posibilitaron las operaciones de fraccionamiento y reconfiguración, lo que permitió aplicar la fórmula deducida para el cálculo del VPRR, y posteriormente calcular la medida del volumen de las figuras en cuestión.

Solo en algunos casos, los mismos elementos de control suscitaron en el desarrollo de la T4.2, T4.3 y T4.4 la asignación del Rol heurístico operatorio mixto, en tales casos el refraccionamiento es la operación considerada en los procedimientos.

Aunque la mayoría de los estudiantes realizaron las tareas propuestas, utilizando operaciones visuales, y aplicaron la fórmula deducida para el cálculo del VPRR, los elementos de control considerados causaron algunas dificultades en cuanto al desarrollo de ideas geométricas y métricas.

Es el caso de las perspectivas en que se representó cada una de las figuras, que dificultaron el reconocimiento de sub-figuras en las figuras propuestas. En cuanto al tono y grosor también suscitó que, en la representación de aristas ocultas de las figuras por medio de líneas punteadas, los estudiantes no las consideraran como parte de una sub-figura, cuestión que limitó la aplicación de la FVPRR.

No sucedió lo mismo con el elemento de control visual índice, que, en este caso, ayudó al reconocimiento de sub-figuras, y permitió el uso de la fórmula deducida para el cálculo del VPRR, a partir de los valores numéricos presentes en las figuras.

En la tabla 17 se muestra una comparación entre los tipos de dinamismos visuales, rol heurístico, potencia heurística, y los elementos de control asignados en los procedimientos de los estudiantes, al realizar cada una de las tareas en los momentos de la propuesta de enseñanza.

Tabla 17

Dinamismos visuales, potencias heurísticas y elementos de control en los procedimientos de los estudiantes

Dinamismo visual	Potencia heurística	Rol de la figura	Número de Estudiantes	Elementos de control	Figura	Tarea	Momento
Estático	Mínima	Nulo	7	Perspectiva, Tono y Grosor, Fraccionamiento Lineal	2	1.1	Medición indirecta del VPRR
Parcial Total	Máxima	Operatorio compuesto	3				
Parcial mixto	Intermedia	Operatorio mixto	6	Perspectiva, Tono y Grosor, Fraccionamiento Lineal	3,4	1.2	
Estático	Mínima	Nulo	4				
Estático	Mínima	Nulo	9	Perspectiva, Tono y Grosor Fraccionamiento Lineal	6,7,8	2.1	
Parcial total	Máxima	Operatorio compuesto	1				Paso de la medida directa a la indirecta del VPRR
Parcial mixto	Intermedia	Operatorio mixto	7	Perspectiva, Fraccionamiento Lineal, Número de unidades, Posición de fraccionamiento, Tono y grosor	10,11,12,13	2.2	
Estático	Mínima	Nulo	3				
Parcial mixto	Intermedia	Operatorio mixto	8	Perspectiva, Fraccionamiento Lineal, Número de unidades, Posición de fraccionamiento	10,11,12,13	2.3	
Parcial total	Máxima	Operatorio compuesto	2	Tono y grosor			
Parcial mixto	Intermedia	Operatorio mixto	10	Perspectiva, Fraccionamiento Lineal, Número de unidades, Posición de fraccionamiento	10,11,12,13	3.1	Deducción de la FVPRR
Estático	Mínima	Nulo	8	fraccionamiento numérico, tono y grosor, índices	14,15, 16	T4.1	Aplicación de FVPRR
Parcial mixto	Intermedia	Operatorio mixto	2				
Parcial Total	Máxima	Operatorio compuesto	8	El tono y grosor y los índices	17,18,19	T4.2	
Parcial mixto	Intermedia	Operatorio mixto	2			T4.3 T4.4	

Fuente: la presente investigación. Elaboración propia

4.3 Contraste entre análisis a priori y a posteriori

Al contrastar lo propuesto en el análisis a priori y lo expuesto en el análisis posteriori, se logra identificar tres aspectos: 1) Influencia de los elementos de control visual y de las estrategias visuales, en el Rol heurístico asignado a las figuras tridimensionales al construirse la FV(PRR). 2) Papel de los elementos de control visual y de las estrategias visuales, en el desarrollo de ideas geométricas asociadas a la construcción de FV(PRR). 3) Papel de los elementos de control visual y de las estrategias visuales, en el desarrollo de ideas métricas asociadas a la construcción de FV(PRR).

4.3.1 Influencia de los elementos de control y las estrategias visuales en el Rol heurístico asignado a las figuras 3D al construirse la FV(PRR).

Los elementos de control y las estrategias visuales introducidos en las tareas en el análisis a priori, suscitaron, que los estudiantes al momento de resolverlas asignaran distintos roles heurísticos a las figuras, en algunos casos estas fungieron como elementos dinámicos mientras que en otros solo lo hicieron de manera estática, lo que suscitó que las figuras fueran utilizadas con distintas potencias heurísticas, mínima, intermedia y máxima.

Potencia heurística baja: los procedimientos desarrollados por la mayoría de los estudiantes al resolver tareas en donde se evidenció la potencia heurística baja en las figuras mostraron que los elementos de control considerados no permitieron que sobre las figuras se aplicaran operaciones visuales, como la configuración o la reconfiguración. Por ejemplo, en las T1.1 y T2.1 en la mayoría de los casos, las figuras fungieron de manera estática, pues solo se utilizaron para realizar procesos tipo aritmético.

Aunque las figuras sirvieron de alguna manera para dar respuesta a las problemáticas planteadas en las consignas, y los estudiantes les asignaron un rol heurístico bajo, esto no permitió el desarrollo de la visualización.

En el caso del elemento de control tono y grosor, suscitó diferenciar las líneas de contorno de la figura en estudio de las que limitan cada cubo, en la figura 2. Mientras que el fraccionamiento y la perspectiva contribuyeron en la identificación de cada uno de los cubos que conforman las figuras. Por otro lado, no suscitaron la operación de configuración simple como se había previsto inicialmente. Lo anterior, permitió que los estudiantes hicieran un proceso aritmético tipo conteo uno a uno de los cubos que conformaban la figura 2.

En cuanto a los elementos de control fraccionamiento presente en las figuras 3 y 4, permitió discriminar cada uno de los cubos que constituyen las figuras, pero no suscitó la configuración ni la reconfiguración. De otra manera, el tono y grosor ayudó a delimitar los cubos que componían las figuras. En cuanto a la perspectiva permitió ver algunos de los cubos que conformaban las figuras, así como su conteo.

De acuerdo con lo anterior, al introducir los elementos de control considerados en las tareas propuestas las figuras no se utilizaron como soportes heurísticos en los procedimientos de los estudiantes. En consecuencia, el diseño de las tareas permitió la medida indirecta del volumen de la figura en cuestión.

Potencia heurística intermedia: los procedimientos de los estudiantes al resolver las tareas en donde las figuras fungieron con un grado de potencia heurística intermedia evidencian que los elementos de control considerados propiciaron que las figuras fueran utilizadas en la solución de las problemáticas planteadas en las consignas.

De acuerdo con lo propuesto anteriormente, los elementos de control fraccionamiento y tono y grosor introducidos en figuras 3 y 4, permitieron discriminar cada uno de los cubos que constituían las figuras, y suscitaron la configuración como se esperaba. En cuanto a la perspectiva obstaculizó ver algunos de los cubos que conformaban las figuras, dificultando su conteo, cuestión que los estudiantes solucionaron, introduciendo trazos auxiliares en las figuras.

De otra manera, el tono y grosor presentes en las figuras 5, 6, 7 y 8, delimito los cubos que componen las figuras, promovió un cambio dimensional fijo y no se suscitó el Cambio dimensional operatorio, como se había previsto. Así mismo, el fraccionamiento lineal introducido permitió discriminar la cantidad de unidades patrón que conformaban las figuras y la perspectiva facilitó el conteo de los cubos reconocidos en las figuras.

En las figuras 9,10, 11, 12 y 13 los elementos de control considerados promovieron u obstaculizaron distintos procederes: el tono y grosor promovió la discriminación de los elementos 1D que conforman el contorno de la figura. Mientras el fraccionamiento lineal por su parte suscitó la introducción de trazos auxiliares, cuestión que ayudó en la discriminación parcial de cubos que la conforman. Por su parte, la ubicación del fraccionamiento no obstaculizó la discriminación de unidades patrón de medida en las figuras, y contribuyó al refraccionamiento. Finalmente, el elemento de control perspectiva, no obstaculizó la discriminación de las unidades 3D que conforman las figuras.

Por otro lado, en las figuras 14,15 y 16 los elementos de control introducidos desencadenaron distintas reacciones al resolver las tereas: el índice permitió a quien realizó la tarea reconocer la cantidad de cubos de la figura. Mientras, el tono y grosor ayudó a identificar el contorno de la figura. Así mismo, la perspectiva obstaculizó el cambio dimensional fijo.

Potencia heurística máxima: los procedimientos de los estudiantes en el desarrollo de las tareas en donde los elementos de control introducidos suscitaron que las figuras tuvieran una potencia heurística máxima, en algunos casos ayudaron en el desarrollo de las tareas, mientras que en otros la obstaculizaron.

En las figuras 17, 18 y 19 de la propuesta de enseñanza los elementos perspectiva y tono - grosor, permitieron a los estudiantes discriminar unidades de dimensión uno, y al reconocimiento de las sub-figuras presentes en el sólido geométrico a medir, suscitando un refraccionamiento y una reconfiguración. Por otro lado, el elemento índice proporcionó los valores numéricos que se sustituyeron en la fórmula deducida en las tareas anteriores.

4.3.2 Papel de los elementos de control visual y de las estrategias visuales, en el desarrollo de ideas geométricas asociadas a la construcción de FV(PRR)

En el diseño de las tareas propuestas en la investigación, los elementos de control introducidos suscitaron distintos procedimientos por parte de los estudiantes al momento de realizarlas y promovieron acciones cognitivas sobre las figuras presentes, como por ejemplo las operaciones visuales, cambios de focalización, cambios dimensionales. En consecuencia, las tareas se convirtieron en herramientas que inducen a los estudiantes a generar ideas geométricas en la construcción de la FVPRR.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente el desarrollo de las tareas propuestas suscitó ideas a saber: 1) El reconocimiento de unidades patrón de medida. 2) La construcción de un sólido geométrico a partir de una unidad patrón de medida. 3) La transformación de una figura en otra.

Reconocimiento de unidades patrón de medida: los elementos de control introducidos en las figuras: tono y grosor, fraccionamiento, fraccionamiento lineal, fraccionamiento numérico,

promovieron en las tareas el reconocimiento de las unidades patrón de medida, en unos casos fue un cubo la unidad discriminada, y en otros casos, un prisma conformado por cubos. Lo anterior, suscitó que, en algunos procederes, los estudiantes privilegiaran la configuración simple de una figura, promoviendo la visualización.

De manera distinta, los elementos de control considerados provocaron que la mayoría de los estudiantes privilegiara solo acciones de tipo aritmético en la solución de las tareas, cuestión que causó que las figuras fungieran con poca productividad heurística.

Construcción de un sólido geométrico a partir de una unidad patrón de medida: el reconocimiento en las figuras de unidades patrón de medida, fue promovido por los elementos de control fraccionamiento tono y grosor, cuestión que permitió la construcción de figuras 3D a partir de cubos o prismas propuestos como unidades de medida. Lo anterior, promovió en algunos casos la configuración simple, y en otros, la reconfiguración de las figuras en cuestión. Este tipo de situaciones se pudo evidenciar en las tareas que promovieron la medición indirecta del volumen del VPRR y las que indujeron al paso de la medida directa a la indirecta

Transformación de una figura en otra: los elementos de control: índice y tono y grosor, fueron considerados en las tareas que promueven el uso de la fórmula para el cálculo de la medida del VPRR, cuestión que permitió a los estudiantes realizar procedimientos visuales como la reconfiguración, que suscitaron la transformación de una figura, en otra de naturaleza perceptiva distinta a la presentada inicialmente.

4.3.3 Papel de los elementos de control visual y de las estrategias visuales, en el desarrollo de ideas métricas asociadas a la construcción de FV(PRR)

Los elementos de control introducidos y las estrategias visuales implementadas, permitió el desarrollo de ideas métricas en la solución de las tareas, entre otras: 1) Conservación del volumen. 2) Reconocimiento de procesos de medición del volumen, cuestiones que intervinieron en la construcción de la FV(PRR).

Conservación del volumen: en las tareas que promovieron el uso de la fórmula para el cálculo del VPRR, por ejemplo, los elementos de control suscitaron en la solución de las tareas T4.3 y T4.4 la aplicación de operaciones de refraccionamiento y reconfiguración, cuestión que permitió el reconocimiento de procedimientos para el cálculo de la medida del volumen de una figura, aplicando procedimientos cualitativos y cuantitativos. En este sentido las figuras presentes en las tareas suscitaron que la mayoría de los estudiantes, reconocieran que una figura puede ser transformada en otra de distinta naturaleza perceptiva, pero de igual volumen.

Reconocimiento de procesos de medición del volumen: la introducción de los elementos de control suscitó distintos procedimientos al resolver las tareas propuestas. En este sentido el tono y grosor, el fraccionamiento y el fraccionamiento lineal contribuyeron a la medición directa de un sólido geométrico a partir de una unidad patrón de medida, mientras que la perspectiva en algunos casos la obstaculiza.

De manera distinta, los elementos de control fraccionamiento lineal, número de unidades suscitaron el paso de la medida directa a la indirecta del volumen de las figuras en cuestión. En consecuencia, los estudiantes recurrieron al refraccionamiento en las figuras, para luego aplicar

procesos multiplicativos que contribuyeron a la deducción de la fórmula para calcular la medida del VPRR.

Es de mencionar, que el desarrollo de las tareas anteriores, promovieron procederes que influyeron, para que los estudiantes adoptaran procedimientos que finalmente llevaron a deducir la fórmula para cálculo del VPRR.

Finalmente, los estudiantes resolvieron tareas que involucran el refraccionamiento y la reconfiguración, suscitados por los elementos de control tono y grosor, fraccionamiento numérico y los índices que permitieron la aplicación de la fórmula para calcular el $V(\text{PRR})$.

5. Conclusiones Generales

El desarrollo de la presente investigación muestra su importancia, porque aporta elementos a la educación matemática, y de manera concreta a la enseñanza de la geometría en el nivel básico de secundaria. Así mismo responde al objetivo propuesto de establecer el rol de la visualización en la construcción de la fórmula para calcular la medida del volumen de un prisma rectangular recto.

De la misma manera, se da respuesta a cuestiones como: ¿Cuáles ideas geométricas o métricas promueven la construcción de la FV(PRR)? ¿Qué elementos de control visual deben contemplarse en tareas para que promuevan la inclusión de flujos visuales asociados a la construcción de la FV(PRR)? ¿Los elementos de control incluidos en las tareas propuestas a los estudiantes influyeron en la consideración de las acciones visuales pretendidas? ¿Las acciones visuales privilegiadas en el desarrollo de las tareas suscitaron u obstaculizaron la construcción de la FV(PRR)? ¿Cómo influye la sinergia estrategias visuales y elementos de control visual privilegiados en las tareas propuestas en la explicitación de ideas métricas y geométricas que favorecen la construcción de la FV(PRR)? ¿Qué posibilidades (potencialidades y limitantes) brindó el desarrollo de las tareas propuestas para la comprensión de la construcción de la FV(PRR)

Para dar respuesta a las cuestiones anteriormente expuestas se parte de lo propuesto por Duval (1995, 1999, 2003, 2004) sobre la visualización asociada a las figuras geométricas que considera la visualización es necesario enseñarla, puesto que esta no se aprende de manera espontánea. Así mismo, la noción de elemento de control visual a partir de los estudios de Marmolejo & González (2013a, 2013b, 2014, 2015), resaltan acerca de los elementos de control visual que se

introducen en el diseño de las tareas, que promueven distintos procederes de los estudiantes para resolverlas.

A continuación, se describe, en qué medida han sido alcanzados los objetivos específicos que inicialmente nos habíamos planteado en la presente investigación.

El primero y el segundo de los objetivos: Discriminar qué estrategias visuales y elementos de control visual deben considerarse en tareas que favorezcan la construcción de la FV(PRR).

Contemplados en el capítulo 4, en los apartados 4.1.1 y 4.1.2. Mientras que en el apartado 4.1.1 se caracteriza la secuencia de enseñanza que se diseñó: las tareas propuestas, los elementos de control introducidos; en el apartado 4.1.2 se describen los procedimientos que se espera, los estudiantes realicen, para resolver cada una de las tareas diseñadas.

De acuerdo con lo anterior, la investigación mostró que el considerar los elementos de control visual (Tono y grosor, fraccionamiento, fraccionamiento lineal, número de unidades, posición del fraccionamiento, índices y perspectiva) en las tareas, induce a quien las resuelve a contemplar en algunos casos operaciones visuales, como la reconfiguración, el refraccionamiento y la configuración. Así mismo, la consideración de cambios de focalización, cambios dimensionales y cambios figúrales. Mientras que, en otros, las acciones suscitadas por tales elementos son los procedimientos aritméticos (conteo uno a uno, aditivos y multiplicativos). En consecuencia, como lo proponen Marmolejo & González (2015) la introducción de elementos de control visual en una tarea induce significativamente a que un estudiante privilegie acciones visuales al resolver una tarea.

En cuanto al tercer objetivo propuesto, con el que se pretendió identificar las acciones visuales, elementos de control visual que favorecen u obstaculizan el desarrollo de tareas que suscitan la construcción de la FV(PRR), contemplado en el capítulo cuatro, en los apartados

4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3, en donde se expuso las distintas reacciones de los estudiantes al resolver las tareas propuestas.

Los elementos de control visual considerados en las tareas suscitaron distintas acciones visuales sobre las figuras. Por ejemplo, el elemento de control perspectiva (isométrica, dimétrica, caballera) utilizada para representar las figuras, en algunos casos permitió la visualización y en otros la obstaculizó.

De otra manera, el tono y grosor promovió en algunas tareas la operación visual de refraccionamiento, en otras, obstaculiza la configuración simple y ayuda en el conteo de unidades patrón de medida en el sólido geométrico a medir, convirtiendo las figuras en elementos estáticos, con muy poco grado de potencia heurística.

En cuanto al elemento de control fraccionamiento, contribuyó a que el grado de potencia heurística de las figuras fuera intermedio y se promoviera la introducción de trazos auxiliares; lo que ayudó a los estudiantes realizar cambio dimensional fijo, y a un cambio de focalización intrafigural.

Así mismo en algunas de las tareas los estudiantes recurrieron a la aplicación de una operación de reconfiguración, acción que se promovió significativamente, cuando la consigna de la tarea solicitó construir un sólido geométrico, de distinta forma a la del propuesto inicialmente y de igual volumen.

Los resultados mostraron que los estudiantes en algunos casos recurrieron a las figuras para resolver las tareas propuestas, mientras que en otras no. En consecuencia, al igual que en Marmolejo & Vega (2012), las figuras fungieron con distintos roles heurísticos y niveles de potencia heurística, de acuerdo con como las utilizaron en la solución de las tareas. Cuestión que

se ve influenciada por los elementos de control considerados en el diseño de la propuesta de enseñanza.

Con relación al cuarto objetivo específico, que pretendía establecer las relaciones entre las decisiones visuales adoptadas por los estudiantes, los elementos de control incluidos en las tareas desarrolladas y la promoción de ideas matemáticas que suscitan la construcción de la FV(PRR), se contempló en los apartados 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3.

Los resultados mostraron que los elementos de control introducidos, y las acciones visuales consideradas ayudaron a que los estudiantes reconocieran ideas métricas y geométricas, entre otras, la construcción de un sólido geométrico a partir de una unidad de medida, transformar una figura 3D en otra de igual volumen y distinta forma, la posibilidad de medir el volumen de un sólido geométrico sin recurrir a una fórmula matemática para ello.

Otros aspectos importantes para tener en cuenta son que la visualización como proceso cognitivo es susceptible de ser enseñada (Marmolejo & Vega, 2012). Por lo que es necesario diseñar propuestas de enseñanza en las que el uso de las figuras en la solución de las tareas, sean parte esencial y se conviertan en verdaderos soportes heurísticos, y no sean un simple elemento que acompaña una consigna en una tarea propuesta.

Por otro lado, “la importancia de construir una fórmula matemática es que el alumno difícilmente la olvida o si no la recuerda, puede utilizar el procedimiento para reconstruirla” (Estrada, 2002). Para el caso de la construcción de la FV(PRR), la visualización aporta elementos que le dan sentido y significado, pues incluye la magnitud volumen como un objeto “manipulable”, y promueve la discriminación de diferentes formas de proceder. En consecuencia, la explicitación de variados puntos de vista conlleva a la discusión y negociación del conocimiento.

Todo lo anterior beneficia el desarrollo de la autonomía, la concientización de procesos realizados y la elicitación de conclusiones. De esta manera, la inclusión en el aula de propuestas de enseñanza como la aquí expuesta aporta elementos para que el estudio del volumen deje ser una cuestión estrictamente numérica (que privilegie como recurso único y fundamental el conteo uno a uno de unidades de medida o la aplicación de fórmulas), particularidad que explica muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes al reflexionar sobre la magnitud y sus medidas (ver Marmolejo y González, 2015B).

Finalmente es necesario llamar la atención al hecho que los educadores debemos reflexionar sobre la inclusión de referentes teóricos (validados en Educación matemática) en el diseño, aplicación y evaluación de propuestas de enseñanza, lo cual posibilitará a los profesores tanto formas distintas de asumir y promover el vínculo enseñanza- aprendizaje de las matemáticas, como de comprender, adaptar y aplicar las sugerencias curriculares realizadas por el MEN. Pero, para que lo anterior sea posible, es necesario que los programas de cualificación y formación docente consideren como objeto de reflexión (funcional y experimentalmente), variados referentes conceptuales que, de una forma u otra, aportan elementos para comprender fenómenos particulares que subyacen al estudio de las matemáticas, en este sentido, referentes como el de la visualización (Duval, 1999, 2003, 2004; Marmolejo y Vega, 2012; Marmolejo y González, 2013, 2015a, 2015b) desempeñan un papel preponderante.

Referencias Bibliográficas

- Agudelo, M. Y., & García, C. L. (2016). Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *UNO, Revista Iberoamericana de educación Matemática*, Número 46, 139-158.
- Alzate, S. M. (2015). *Intervención didáctica mediada por ls TIC para la generalización del volumen de los cuerpos redondos en grado noveno. Estudio de caso en la Institución Educativa Monseñor Francisco Cristóbal del Municipio de Medellín*. Tesis de Grado de maestría, Universidad Nacional, Antioquia, Medellín.
- Baquero, C. (2014). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen dirigida a estudiantes de grado octavo*. Bogotá, Colombia.
- Barrantes, L. M., Balletbo, F. I., & Fernández, L. M. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, innovación y Educación*, 1-14.
- Bisquerra, A. R. (1989). *Clasificación de los Métodos de investigación*. Barcelona.
- Calderón, D., & León, O. (2012). *La ingeniería didáctica como metodología de de investigación del discurso en el aula*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1-9.
- Del Olmo, M., Moreno, M., & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Vallehermoso, Madrid: Síntesis.
- Duval, R. (2004). Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas cuatro entradas y ... una quinta. En D. Raymond, *Números, formas y volúmenes en el entorno*

- del niño* (págs. 159-188). Ministerio de Educación Cultura y Deporte, Subdirección General de Información y Publicaciones.
- Duval, R. (2003). “Voir en mathématiques”. (C. d. Estudios, Ed.) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, 41-76.
- Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Traducción realizada por Myriam Vega restrepo*. Santiago de Cali, Colombia: Artes gráficas UNIVALLE.
- Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view*. En C. Mannmane y V. Villani (Eds). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht Netherlands: Kluwer Academic Publishers 37-51.
- Duval, R. (1995). *Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings*. Springer, Berlin, Heidelberg: Serie NATO ASI (Serie F: Ciencias de la Computación y Sistemas), vol 138.
- Estrada, W. (2002). De la generación espontánea de las fórmulas de volumen a su construcción. En C. J. Luque, *Memorias XIII Encuentro de Geometría y I encuentro de Aritmética* (págs. 167-181). Bogotá, Colombia.
- Fernández, M. E., & Marmolejo, A. G. (Octubre de 2013). Volumen y capacidad en grado quinto de primaria. Desarrollo de procesos aditivos y multiplicativos en mediciones directas e indirectas. *Revista científica, Educación científica y Tecnológica*, 601-605.
- Flavell, J. (1976). *Metacognitive aspects of problem solving*, en Resnick, L.B. *The nature of intelligence* (231-236). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.

- García, M., & Guillén, G. (2010). Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la escuela a libros de texto a tres editoriales. *Investigación en Educación Matemática XIV*, 327-340.
- Gómez, C. I. (2014). Visualización y razonamiento. Creando imágenes para comprender las matemáticas. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (págs. 5-28).
- Gonzato, M., Blanco, T., & Dias Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, 99-117.
- Guerrero, S., & Flores, P. (2015). Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear fórmulas. *Epsilon- Revista De Educación Matemática*, vol 32(2). No 90, 21-30.
- Guillen, G. (1997). *Poliedros*. Vallehermoso, Madrid: Sintesis.
- Gutierrez, Á. (1988). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *REVISTA EMA VOL,3 No 3*, 193-220.
- Hernández Sampieri, R., Fernández, C. C., & Baptista, L. M. (2010). *Metodología de la Investigación*. México D.F: McGraw Hill.
- Hoyos, S. E., & Acosta, M. A. (2014). Mejoramiento de habilidades de visualización espacial mediante el uso de un ambiente informático. *XV Encuentro Virtual Educa Perú 2014*, (pág. 16).
- Maris, S., Herrera, N., & Nappa, N. (2013). Aplicación de una estrategia para el aprendizaje de geometría tridimensional usando un recurso educativo abierto. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 55-76.

- Marmolejo, G. A., & González, M. (2017). Dinamismos visuales en el estudio del área. Un estudio comparativo de textos escolares colombianos y españoles . No publicado.
- Marmolejo, G. A., Guzmán, L. Y., & Insuaty, A. L. (2015). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista Científica*, 43-56.
- Marmolejo, G., & Gonzalez, T. (2015). Control visual en la cosntrucción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 18 (3), 301-328.
- Marmolejo, G. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de suerficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Salamanca, España.
- Marmolejo, G. A., & González, M. T. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 61-102.
- Marmolejo, G., & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *EDucación Matemática*, 7-32.
- Marmolejo, G. A., & Vega, M. (2005). Geometria desde una perspectiva semiótica: visualización figuras y áreas. *Memorias XV Encuentro de Geometría y Aritmética*, (págs. 661- 693). Bogotá, Colombia.
- MEN. (2009). Decreto 1290. *decreto 1290*. Santafé de Bogotá, Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas Ciencias y Ciudadanas*. Santafé de Bogotá: MInisterio de Educación Nacional.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de matemáticas. En MEN, *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

- Monteagudo, N. Y., & Rivero, M. M. (mayo de 2016). Material didáctico para la resolución de problemas sobre cálculo de volumen de cuerpos geométricos en la educación preuniversitaria. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo*. Obtenido de <http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/05/geometria.html>
- Montecino, A., & Andrade, M. (2013). Análisis del discurso escolar. *La visualizacion espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional* (págs. 481-488). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Moreno, I. (2004). Obtenido de <http://webs.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf>
- Ortiz, S., & Valencia, A. (2017). *Conocimiento cognitivo en estudiantes de básica primaria*. Manizales: Tesis de Grado de Magister en Educación Y Desarrollo Humano. Centro de estudios avanzados en Niñez y Juventud. Universidad de Manizales.
- Padilla, S. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des Mathematiques*. Thèse U.L.P. Strasbourg, Francia.: Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée ISSN 0755-3390.
- Pogorélov, A. (1974). *Geometría elemental*. Moscú: Traducción de Carlos Vega, Editorial Mir.
- Sainz, L. O. (2014). *La visualización en geometría: un estudio en 3º ESO*. Cantabria: Facultad de Educación, Universidad de Cantabria.
- Soto, S. M., Herrera, N. E., & Nappa, N. R. (2013). Aplicación de una estrategia para el aprendizaje de geometría tridimensional usando un recurso educativo abierto. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en ciencias y Tecnología, volumen 4, número 3*, 50-76.
- Stake, R. (1988). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*.

Barcelona: Paidós.

Torregosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría.

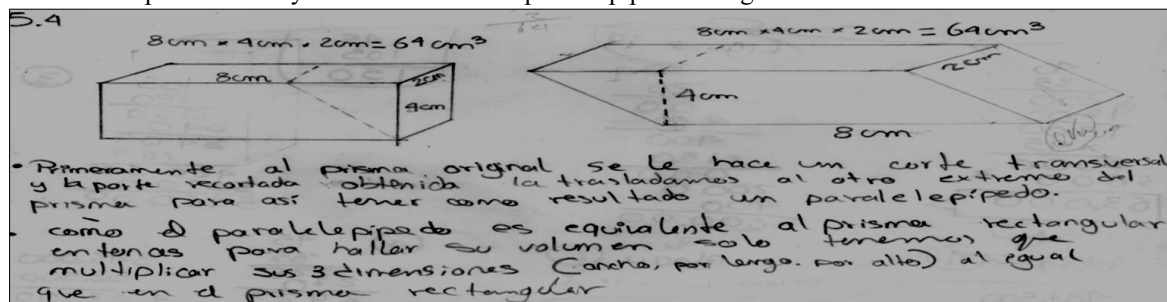
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) , 275-300.

ANEXOS

ANEXO 1: CATEGORÍA DE ANÁLISIS DINAMISMOS VISUALES

Dinamismo Visual Parcial Total

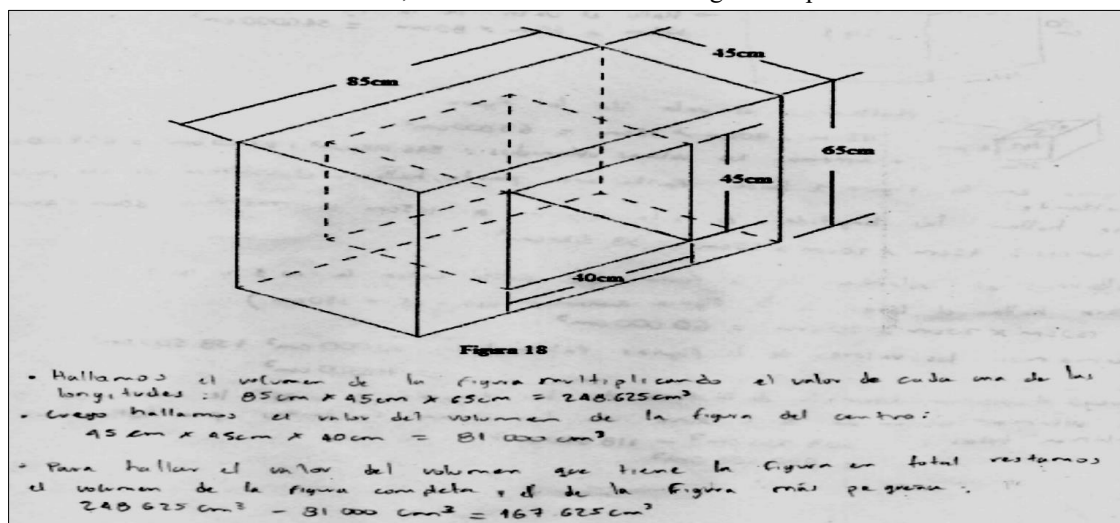
En la ilustración 26 se presenta el despliegue del procedimiento de resolución de una tarea, que solicita representar “un prisma recto y transformarlo en un paralelepípedo con igual volumen.”

**Ilustración 26.** Ejemplificación de un Dinamismo Visual Parcial Total

Quien realiza la tarea inicialmente hace un refraccionamiento sobre la figura de inicio (prisma rectangular recto) lo que suscitó un cambio dimensional operatorio y un cambio de focalización intrafigural. El refraccionamiento permitió reconocer una sub-figura en uno de los extremos, que luego se trasladó al lado izquierdo de la figura de partida. Al trasladar la sub-figura, se forma un paralelepípedo de igual volumen que el ortoedro inicial.

Dinamismo visual parcial Mixto

En la ilustración 27, se presenta el despliegue del procedimiento de resolución de una tarea, la cual solicita: Tomando como unidad de medida un cm^3 , calcula el volumen de los siguientes prismas”

**Ilustración 27.** Ejemplificación de un Dinamismo Visual Parcial Mixto

En la solución de la tarea se centra la atención inicialmente en la totalidad de la figura, se discriminan las unidades 1D y 2D que las conforman, a partir de un cambio dimensional, para obtener la cantidad de unidades de medida que conforman la altura, el ancho y el largo. Posteriormente se calcula el volumen total de la figura empleando la fórmula. Luego se aplica la operación de refraccionamiento, y se reconoce una sub-figura a partir de un cambio de focalización intrafigural. A la sub-figura se le calcula el volumen aplicando la fórmula. Finalmente se restan las medidas de del volumen de la figura total y el de la sub-figura. Lo anterior permite calcular la medida del volumen de la figura en cuestión.

Dinamismo visual Estático

En la ilustración 28 se presenta el despliegue del procedimiento de resolución de una tarea, la cual solicita: Tomando como unidad de medida un cm^3 , calcula el volumen de los siguientes prismas”

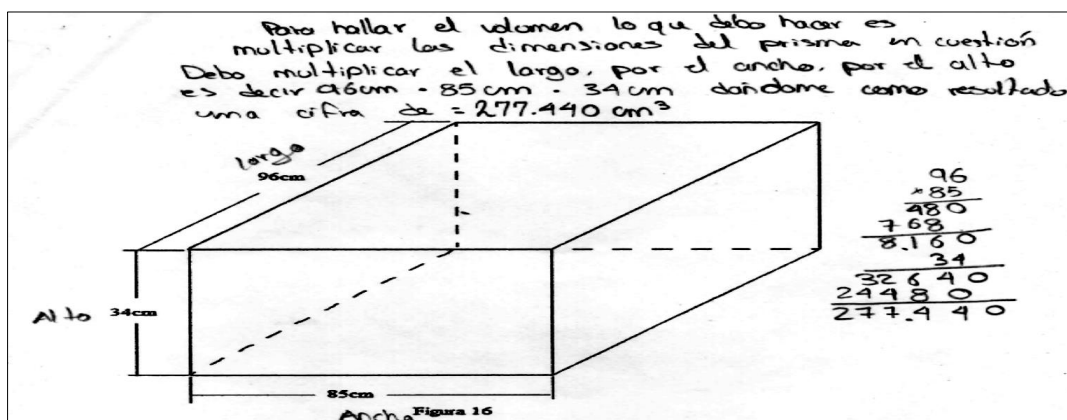


Ilustración 28 Ejemplificación de un Dinamismo Visual Parcial Estático

Para el desarrollo de la tarea se deja de fijar la atención en la totalidad de la figura, y centra la atención en las unidades 2D (caras de la figura) suscitado por un cambio dimensional fijo. Lo anterior suscita establecer en la altura, ancho y largo de la figura, la cantidad de cubos que la constituyen. Posteriormente se sustituye en la fórmula las medidas de la altura el ancho y el largo, lo que permite calcular el volumen de la figura.

ANEXO 2: CATEGORÍA DE ANÁLISIS ELEMENTOS DE CONTROL VISUAL

FACTORES DE VISIBILIDAD

Elemento de control Proyección

En la ilustración 29 se muestran figuras representadas en las perspectivas caballera (figura 7), dimétrica (figura 8), Isométrica (figura 5), que están presentes en la Tarea 2.2, que solicita “Si tomamos como unidad de medida uno de los cubos que conforman la Figura 5, ¿cuál es el volumen de las figuras 6, 7 y 8? Utiliza dos procedimientos diferentes para resolver esta tarea, explica, paso a paso, cada uno, si es necesario, utiliza dibujos.

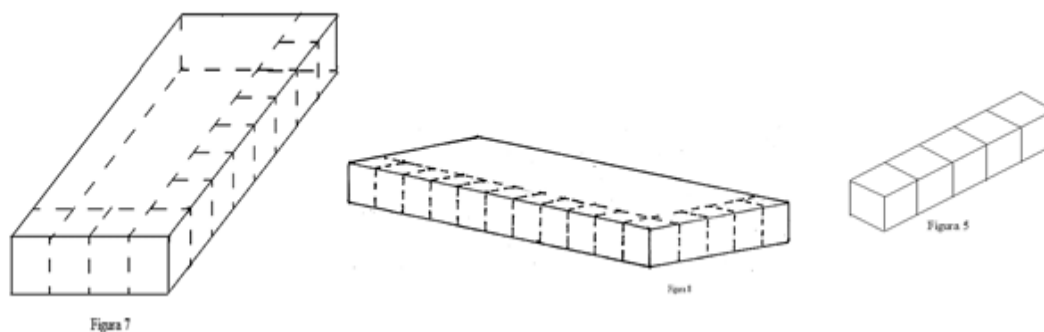


Ilustración 29 Elemento de control Proyección

En este caso, las proyecciones con que se representaron las figuras, guían la manera de ver, permitieron realizar acciones sobre ellas (Introducción de trazos auxiliares), lo que ayudó a identificar la cantidad de cubos de cada una de las figuras. cuestión que permitió resolver la problemática planteada.

Elemento de control Fraccionamiento

En la ilustración 30 se muestran los tipos de fraccionamiento: lineal (figura 9) que mediante líneas punteadas ayuda a identificar la cantidad de cubos de la figura. Numérico (figura 15) que discrimina la cantidad de unidades de medida que tienen la altura el ancho y el largo de la figura. Parcial (figura 14) que permite establecer la cantidad de cubos que tiene la figura, en su ancho largo y altura, lo que permite calcular el volumen del prisma

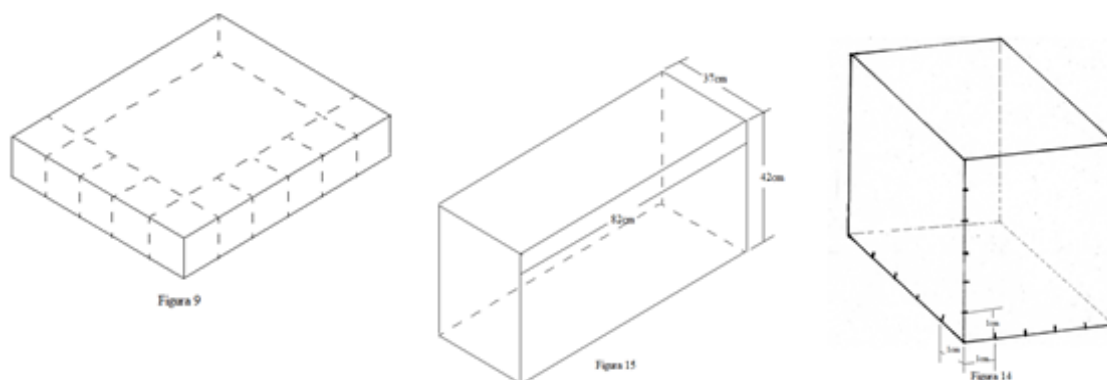


Ilustración 30 Elemento de control Fraccionamiento

Elemento de control Número de unidades

En la ilustración 31 se muestran sólidos geométricos que contienen distinto número de cubos que constituyen su altura, el largo y el ancho. El elemento de control número de unidades, introduce distintos grados de dificultad, en el cálculo de la medida del volumen de un sólido geométrico. Cuestión que hace que la dificultad de la solución de la tarea propuesta sea creciente.

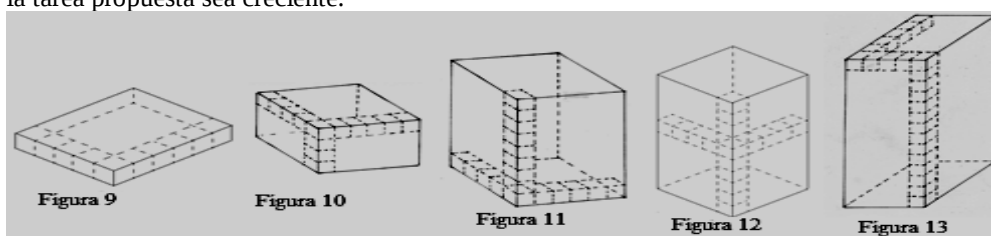


Ilustración 31. Elemento de Control Visual Número de unidades

Elemento de control Posición del fraccionamiento

En la ilustración 32 se observan las figuras 11 y 12, en ellas se indica un fraccionamiento lineal ubicado en distintas posiciones en cada sólido geométrico a medir. La introducción de este elemento de control dificulta resolver la tarea varía, pues no permite ver la totalidad de unidades de medida que conforman la figura.

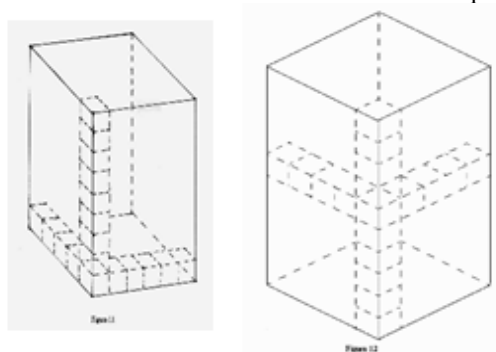


Ilustración 32. Elemento de control Posición del fraccionamiento

Elemento de control Índices

En la ilustración 33 se representa una figura, en la que se ha introducido el elemento de control índice, en este caso son líneas de cota y valores numéricos, que proporcionan información sobre las unidades de medida que hay en el largo(96cm), el ancho (85cm) y la altura(34cm) del prisma representado en la figura.

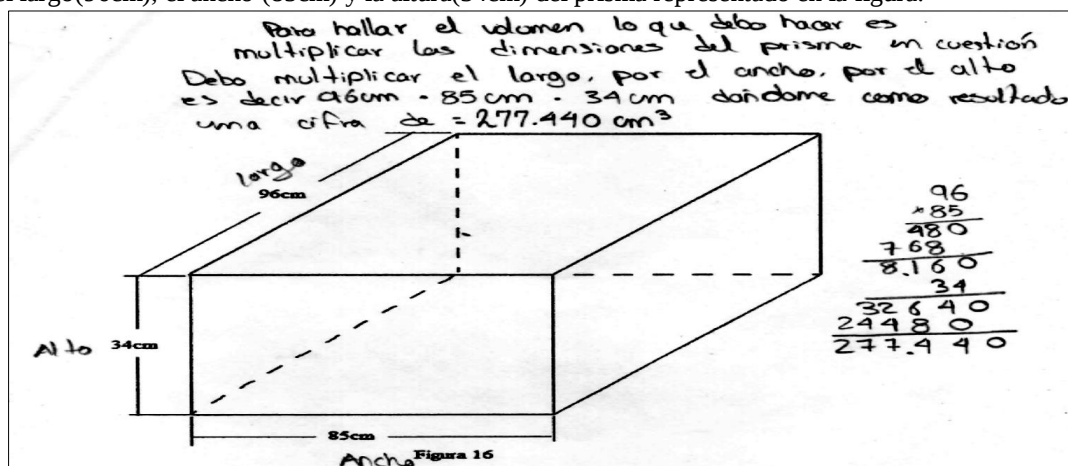


Ilustración 33. Elemento de control Índices

Elemento de control Contraste en tono y grosor

En la ilustración 34 se muestra la representación de un sólido geométrico, que tiene un fraccionamiento lineal (líneas punteadas), que permite resaltar las unidades cúbicas en la que esta dividida la figura, estas líneas son diferentes de las de contorno, que están representadas de manera continua. En este caso el tono y grosor permite discriminar la unidades de medida que componen la figura y promueven el fraccionamiento.

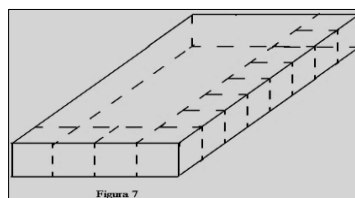


Ilustración 34 Elemento de control Contraste en tono y grosor

En la ilustración 35 se muestra la representación de un sólido geométrico, que tiene líneas de referencia de cota, estas son las líneas que indican la medida de los contornos de la figura (96cm de largo, 34cm de altura y 85cm de ancho)

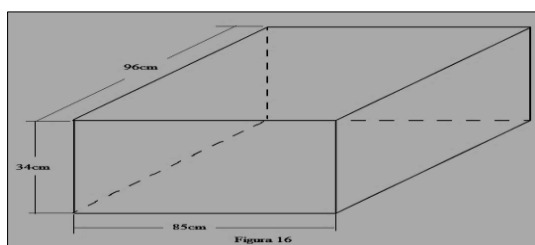


Ilustración 35. Elemento de control Contraste Índices

ANEXO 3: CATEGORIA DE ANÁLISIS PROCEDIMIENTOS

Procedimiento Tratamiento

En la ilustración 36 se muestra el despliegue de una tarea realizada por un estudiante que solicita: "Tomando como unidad de medida un cubo con arista de 1cm de arista (1cm^3), representa 3 prismas distintos, cada uno con un volumen de 300. Explica el proceso, paso a paso, que realizaste en cada caso, si es necesario realiza dibujos"

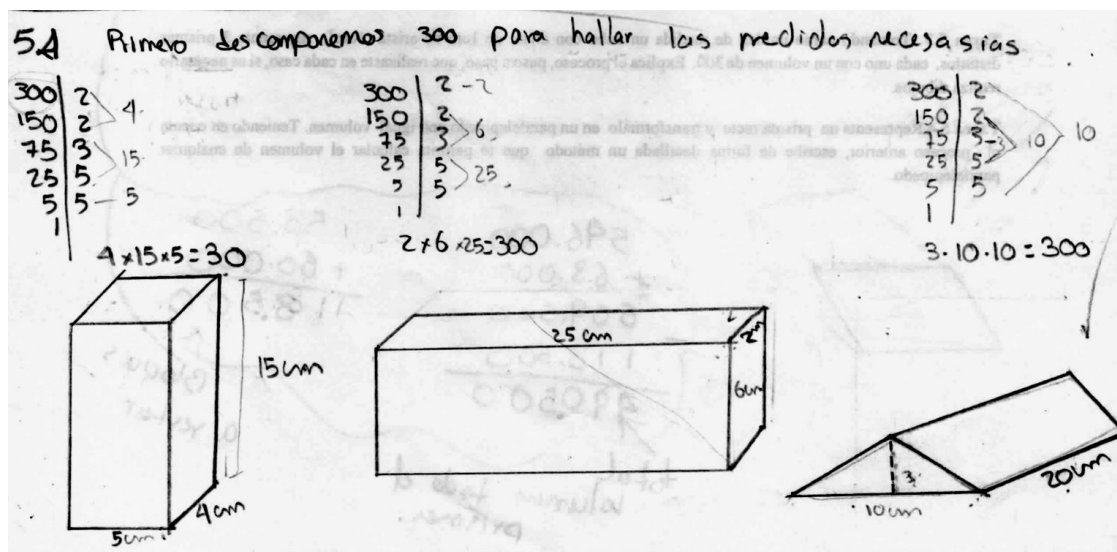


Ilustración 36. Tratamiento

La solución de la tarea exigió considerar la construcción de un sólido geométrico con un volumen de 300cm^3 , y luego transformarlo por medio de una reconfiguración de la figura en estudio

Procedimiento Transformación

En la ilustración 37 se observa el despliegue de una tarea realizada por un estudiante que solicita: Si consideras la Figura 1 como unidad de medida, cuál es la medida del volumen de las figuras 3 y 4?

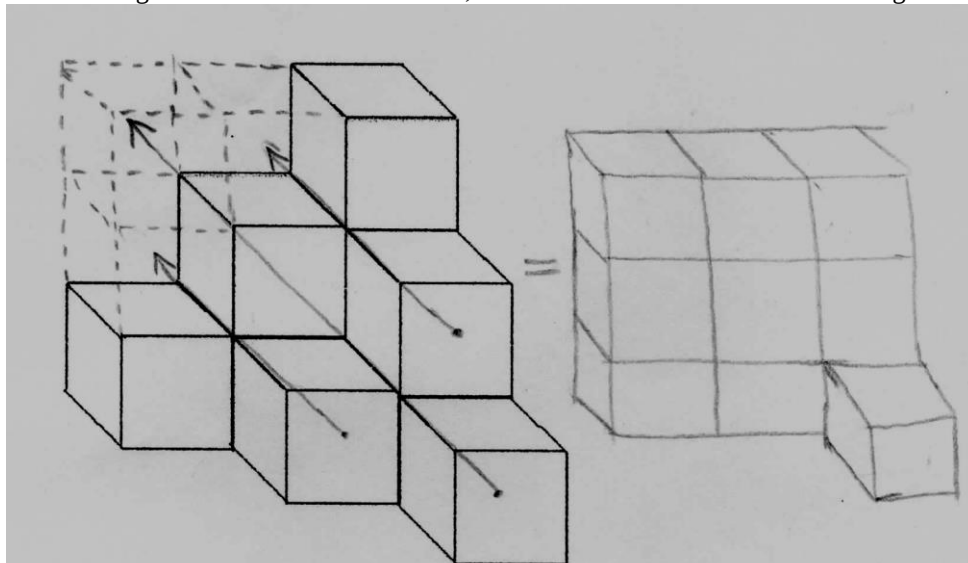


Figura 3

Ilustración 37. Transformación

Quien realiza la tarea inicialmente hace una reconfiguración sobre la figura de inicio, transformando el sólido geométrico a medir, en otro, de distinta naturaleza perceptiva. En consecuencia, esta reorganización de la figura permitió identificar la cantidad de cubos que conforman la figura en cuestión

Procedimiento Composición

En la ilustración 38 se muestra el despliegue de una tarea realizada por un estudiante, esta solicita “La figura 9 representa un prisma, cuántos necesitas para construir las figuras 10, 11, 12 y 13? Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.”

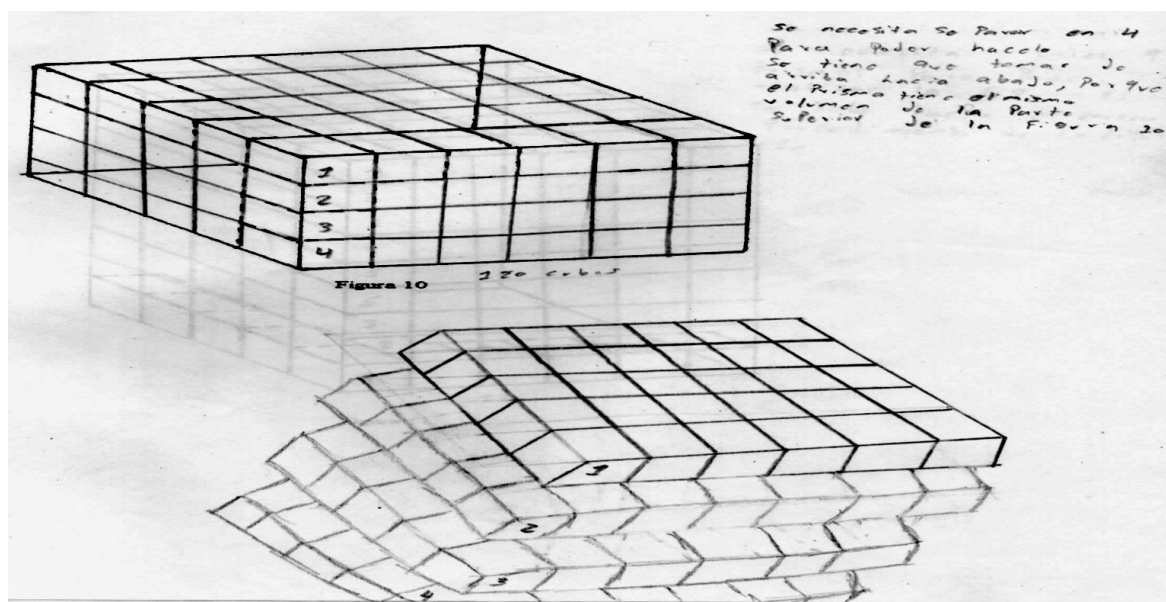


Ilustración 38 Procedimiento Composición

En este caso se consideró identificar en la tarea la cantidad de prismas que componen la figura, luego se realizó un proceso de configuración para construir la figura propuesta a partir de un prisma utilizado como unidad de medida. Como respuesta se obtuvo un total de 4 prismas como los de la figura 9.

Procedimiento Aditivos

En la ilustración 39 se muestra el procedimiento realizado por un estudiante de una tarea que solicita: “Si consideras la Figura 1 como unidad de medida, cuál es la medida del volumen de las figuras 3 y 4?”

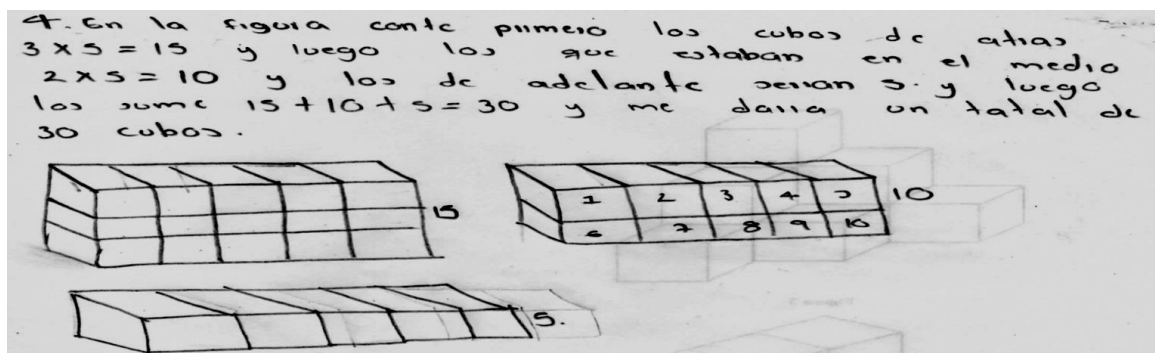


Ilustración 39. Procedimientos Aditivos

Quien resolvió la tarea inicialmente hace una reconfiguración del sólido para reconocer todos los cubos que la componen, luego realiza sumas sucesivas para calcular el volumen del sólido geométrico, obteniendo treinta cubos.

Procedimiento Multiplicativos

En la ilustración 40 se muestra el procedimiento realizado por un estudiante en donde se solicita “La figura 9 representa un prisma, cuántos necesitas para construir las figuras 10, 11, 12 y 13? Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.”

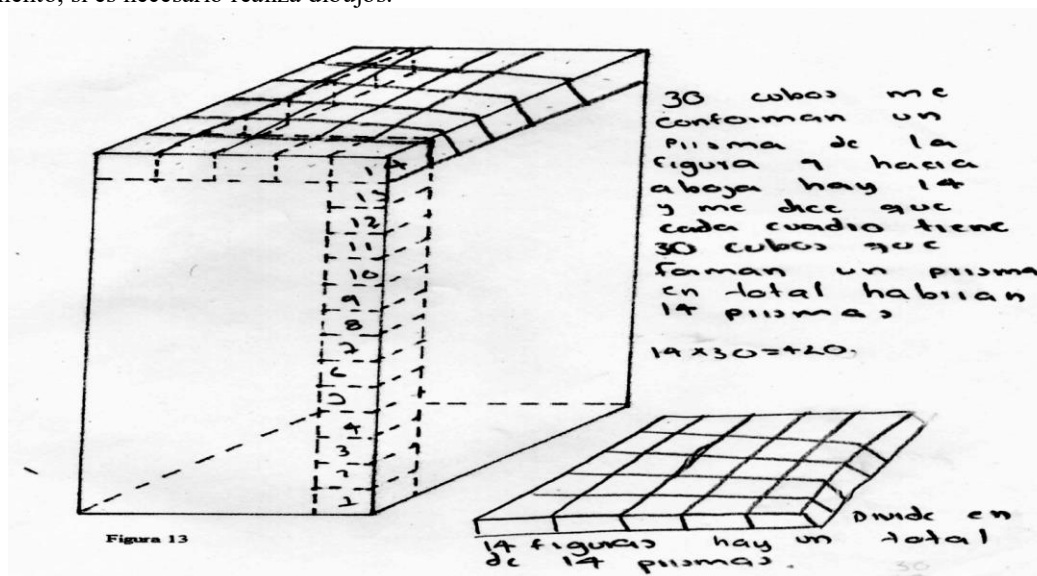


Ilustración 40. Procedimientos Multiplicativos

En la solución de la tarea se consideró inicialmente como unidad patrón de medida en este caso un prisma y se calculó la cantidad de cubos que la conforman a partir de un proceso multiplicativo. Luego se comparó el prisma con la cara superior de la figura a medir, y se numeró los cubos que conforman en la altura de la figura, y se consideró que cada cubo parte de un prisma como el de la unidad de medida. Finalmente se hace un conteo y se obtienen 14 prismas como los de la figura 9 en total.

Procedimiento Conteo uno a uno

En la ilustración 41 se muestra el proceso de solución de una tarea que solicita: En la Figura 1 se representa un cubo, cuántos se necesitaron para construir la figura 2? Describe, paso a paso, el proceso utilizado para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.

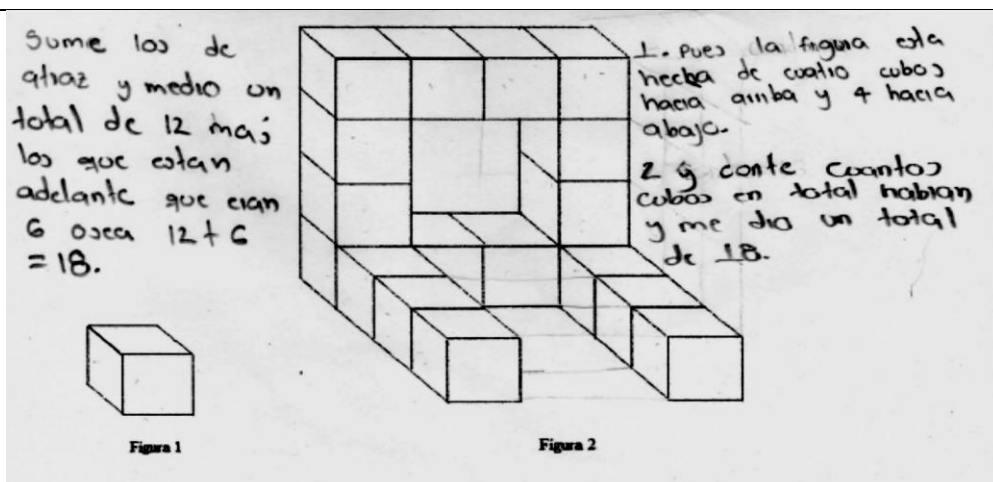


Ilustración 41. Procedimiento Conteo Uno a Uno

En la solución de la tarea se hizo un conteo uno a uno de los cubos que componen la figura, pero se debe tener en cuenta que hay dos cubos en la figura que no son visibles, pero que hacen parte de ella.

Procedimiento Sustitución

En la ilustración 42 se presenta el despliegue del procedimiento de resolución de una tarea, la cual solicita Tomando como unidad de medida un cm^3 , calcula el volumen de los siguientes prismas. Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.

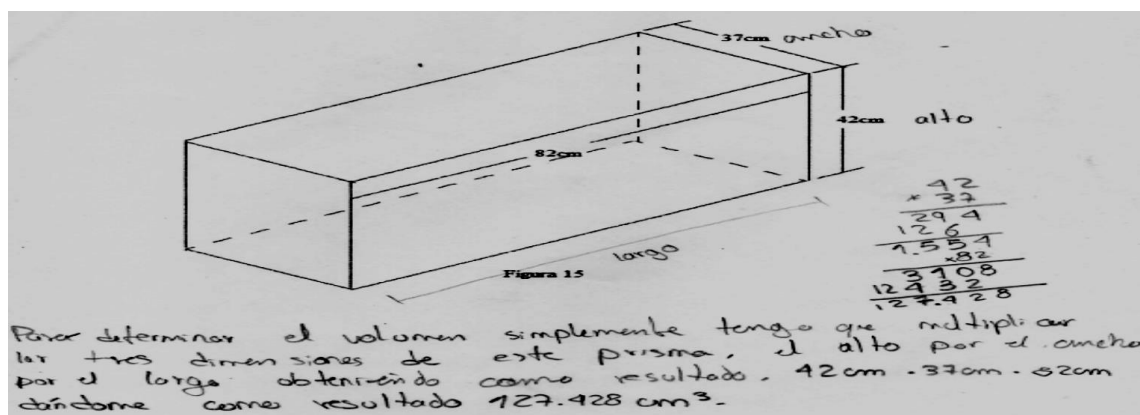


Ilustración 42. Procedimiento Sustitución En la Fórmula

En el desarrollo de la tarea es necesario centrar la atención inicialmente en la figura específicamente, en la medida de sus contornos. Luego se utiliza la fórmula, se sustituyen las variables (altura, largo y ancho) por los valores numéricos representados en la figura, se multiplica y se obtiene la medida del volumen del sólido.

ANEXO 4 CATEGORIA DE ANÁLISIS ACCIONES SOBRE EL SOPORTE

Acciones sobre el soporte Rayado sobre las figuras

En la ilustración 43 se presenta el despliegue del procedimiento de resolución de una tarea, la cual solicita: “La figura 9 representa un prisma, cuántos necesitas para construir las figuras 10, 11, 12 y 13?”

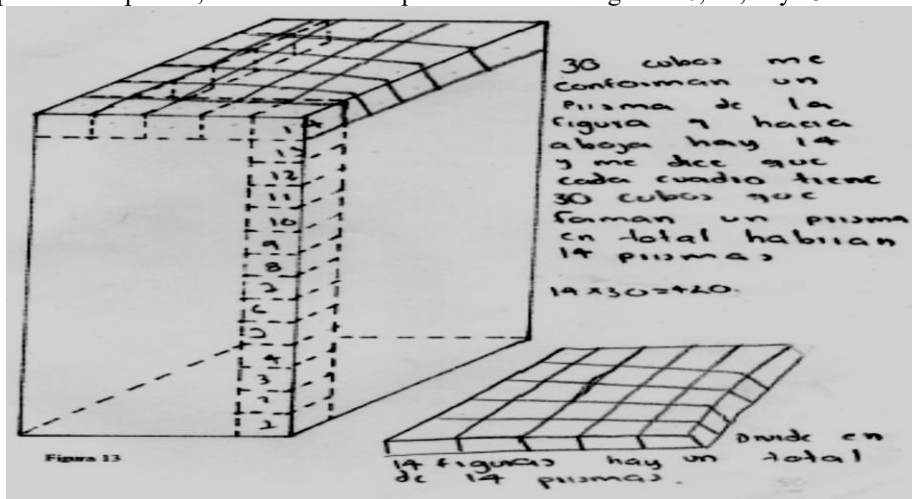


Ilustración 43. Acciones sobre el soporte Rayado Sobre La Figura

En la solución de la tarea se hacen representaciones o trazos auxiliares, que permiten identificar los cubos que componen la cara superior del sólido representado para luego ser comparado con el prisma escogido como unidad patrón de medida, esto permite calcular el volumen del sólido propuesto.

Acciones sobre el soporte Dibujo a mano alzada

En la ilustración 44 se muestra el despliegue de una tarea que solicita: “Si consideras la Figura 1 como unidad de medida, cuál es la medida del volumen de las figuras 3 y 4?”

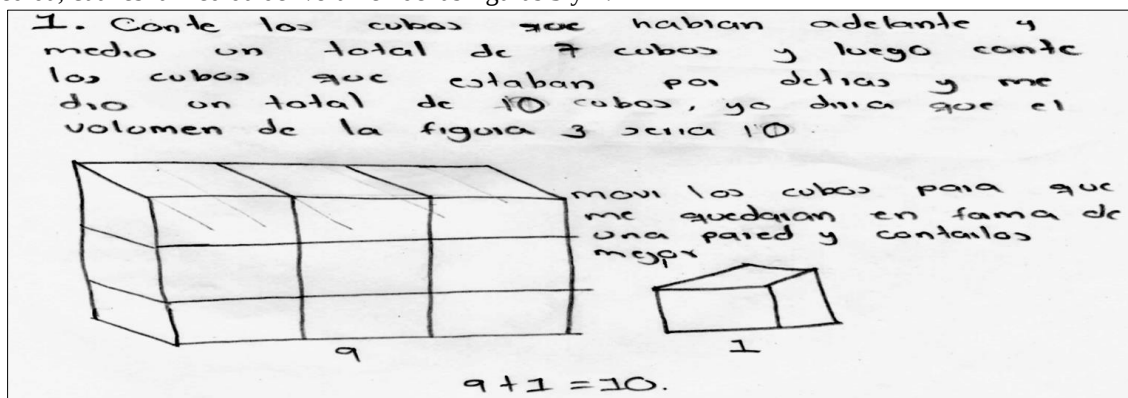


Ilustración 44. Acciones sobre el soporte, Dibujo a Mano Alzada

En la solución de la tarea propuesta, se hace una reconfiguración de la figura inicial. Luego se realiza un dibujo sin la ayuda de instrumentos de trazo, esto permite identificar la totalidad de los cubos que componen la figura. Finalmente se aplica un procedimiento multiplicativo para calcular el volumen de la figura que tiene un total de 10 cubos.

ANEXO 5 PROCEDIMIENTOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES

Tarea 1.1 - Estudiante 1

Tarea 1.1 En la Figura 1 se representa un cubo, cuántos se necesitaron para construir la figura 2? Describe, paso a paso, el proceso utilizado para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.

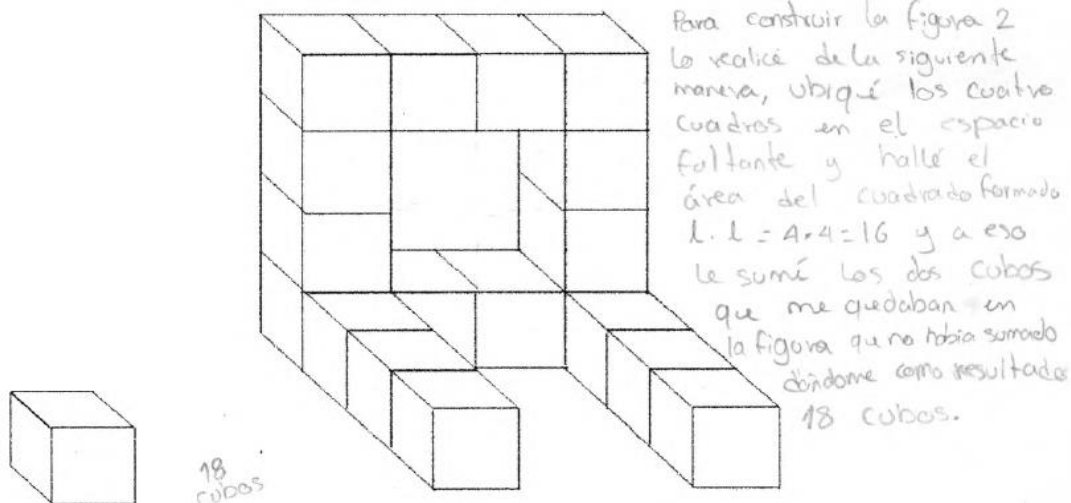


Figura 1

Figura 2

Ilustración 45. Tarea 1.1 -Estudiante 1

Tarea 1.1 - Estudiante 4

Tarea 1.1 En la Figura 1 se representa un cubo, cuántos se necesitaron para construir la figura 2? Describe, paso a paso, el proceso utilizado para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.

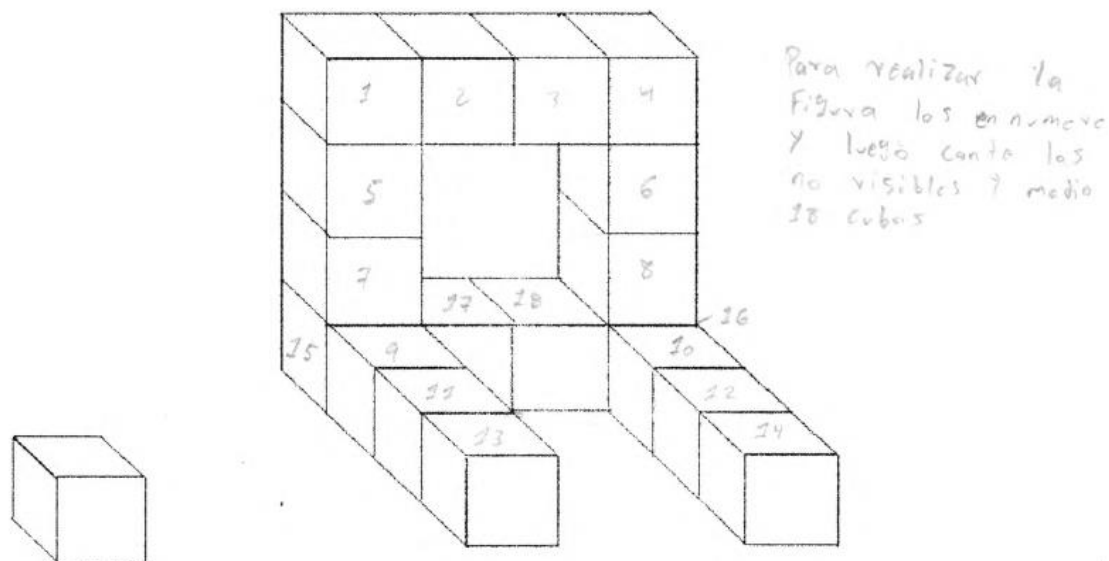


Figura 1

Figura 2

Ilustración 46. Tarea 1.1 - Estudiante 4

Tarea 1.2- Estudiante 8

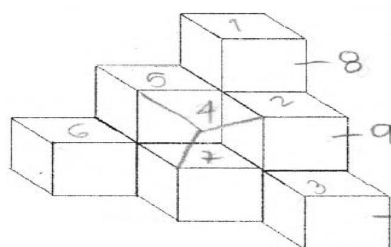


Figura 3

NUMERE los cubos
y mederon 7 porque
en el de la mita forme
otro por que era neceso
vio y al contar los
cubos de citras y
medio un total de 10

Ilustración 47. Tarea 1.2- Estudiante 8**Tarea 2.1 - Estudiante 2**

Primero halle cuantos cubos cuban en la figura.
8 multiplicando el largo por el ancho. obteniendo 56
y despues dividi 56 entre 5 que son los cubos
que conforman la figura 3 y así se que en la figura
3 puedo introducir 11. Prismas compuestos por
5 cubos cada uno.

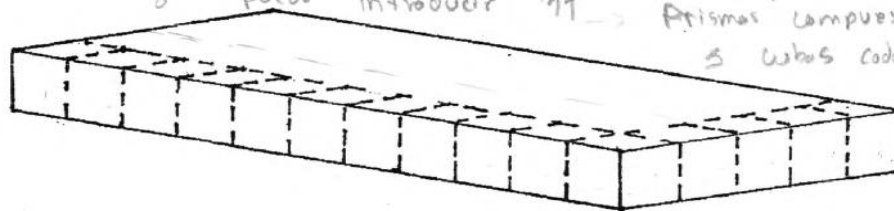
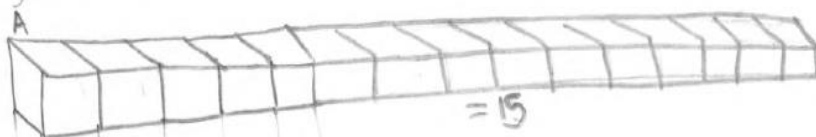


Figura 8

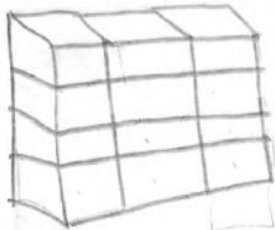
Ilustración 48. Tarea 2.1 - Estudiante 2**Tarea 2.2 - Estudiante 3**

Tarea 2.2 Si tomamos como unidad de medida uno de los cubos que conforman la Figura 5, ¿cuál es el volumen de las figuras 6, 7 y 8? Utiliza dos procedimientos diferentes para resolver esta tarea, explica, paso a paso, cada uno, si es necesario, utiliza dibujos

Figura 6.



b).



$$3 \times 4 = 12 + 2 = 15$$

hize una linea recta y
me dio un volumen de 15 y
el segundo hize una pared 3
de largo y 4 de ancho para $3 \times 4 = 12$
+ los 2 cubos que me sobian.

Ilustración 49. Tarea 2.2 - Estudiante 3

Tarea 2.3 - Estudiante 5

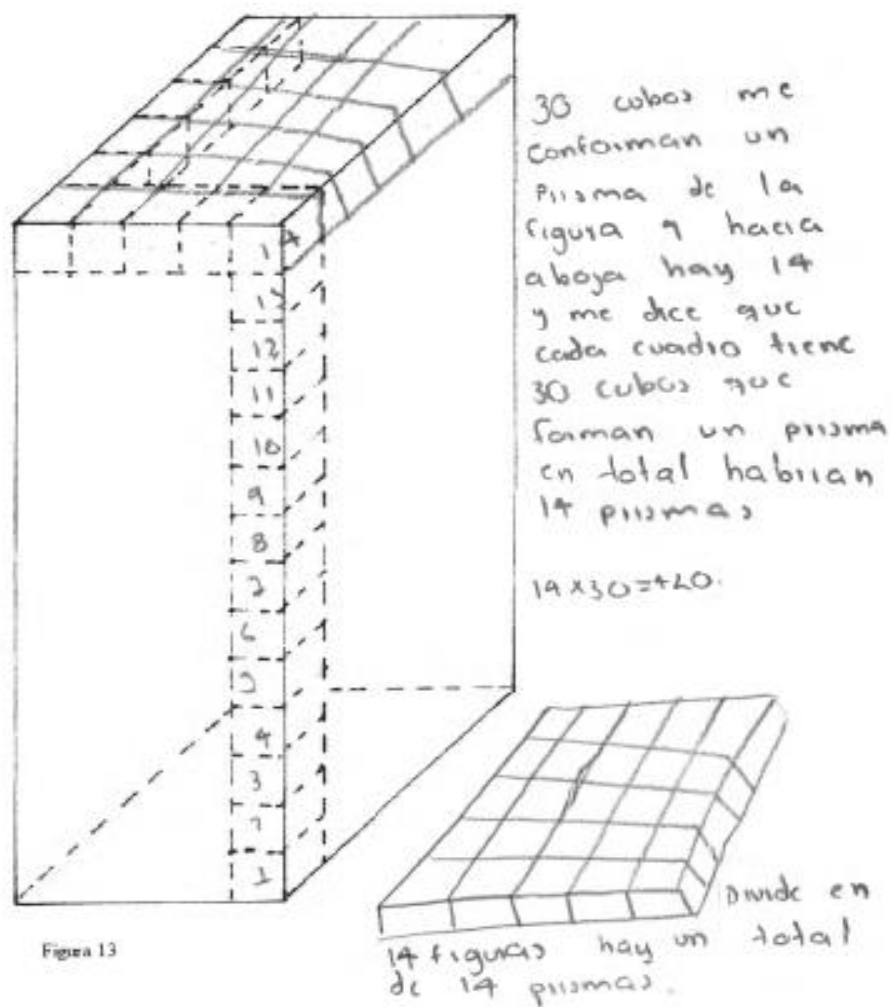


Ilustración 50. Tarea 2.3 - Estudiante 5

Tarea 3.1 - Estudiante 6

- 1). Tomar como base el prisma, separarlo y sumarlo
 - 2). Enumerarlos y multiplicarlos
 - 3). Enumerarlos y sumarlos cada uno
- Para mi la más facil es la primera

Ilustración 51. Tarea 3.1 - Estudiante 6

Tarea 4.1- Estudiante 1

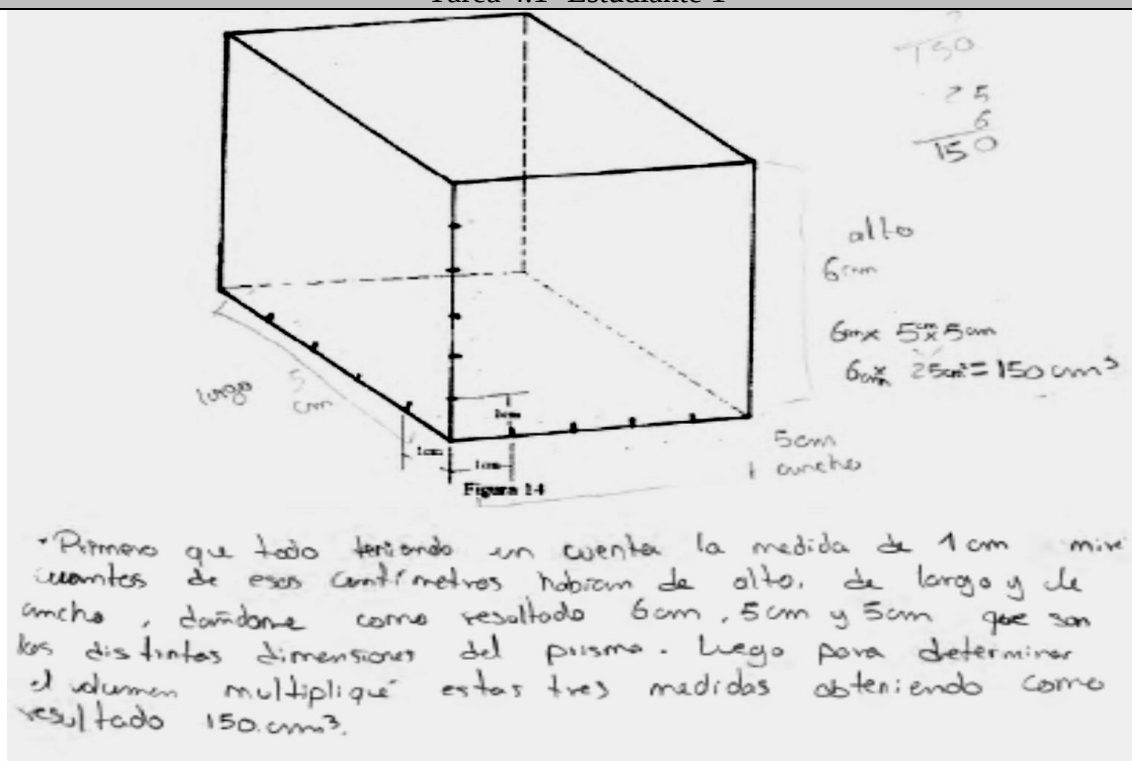


Ilustración 52. Tarea 4.1- Estudiante 1

Tarea 4.2 - Estudiante 5

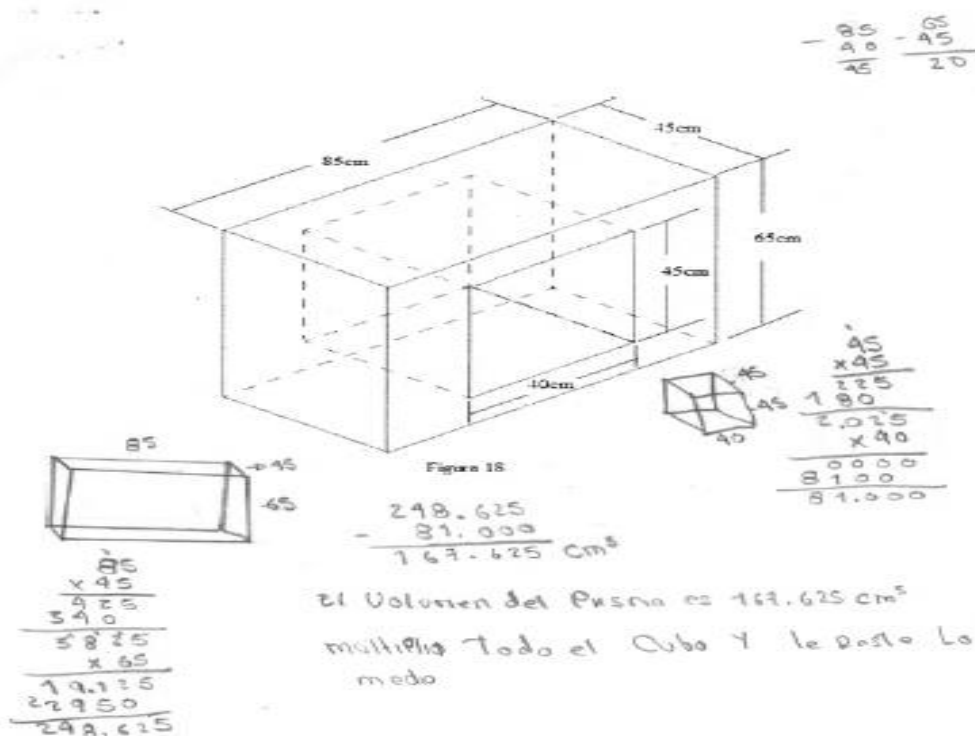


Ilustración 53. Tarea 4.2 - Estudiante 5

Tarea 4.3 - Estudiante 2

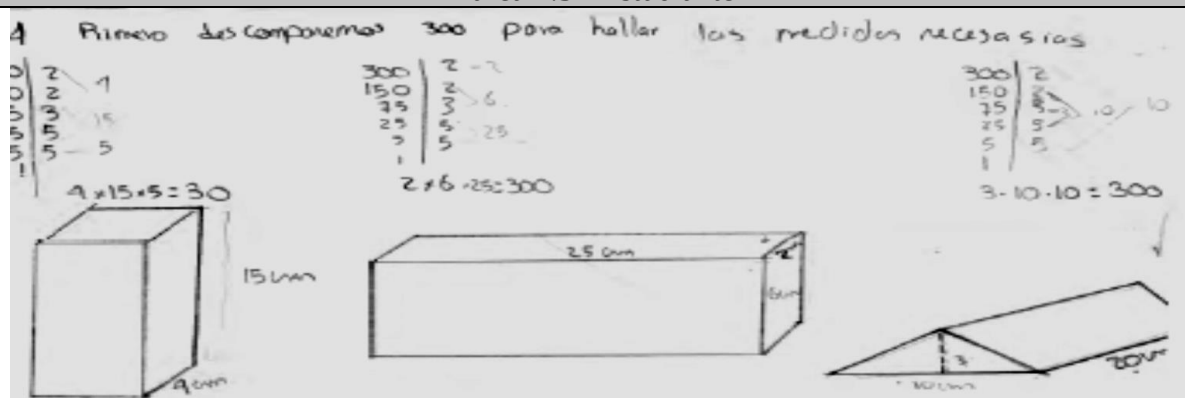


Ilustración 54. Tarea 4.3 - Estudiante 2

Tarea 4.4 - Estudiante 2

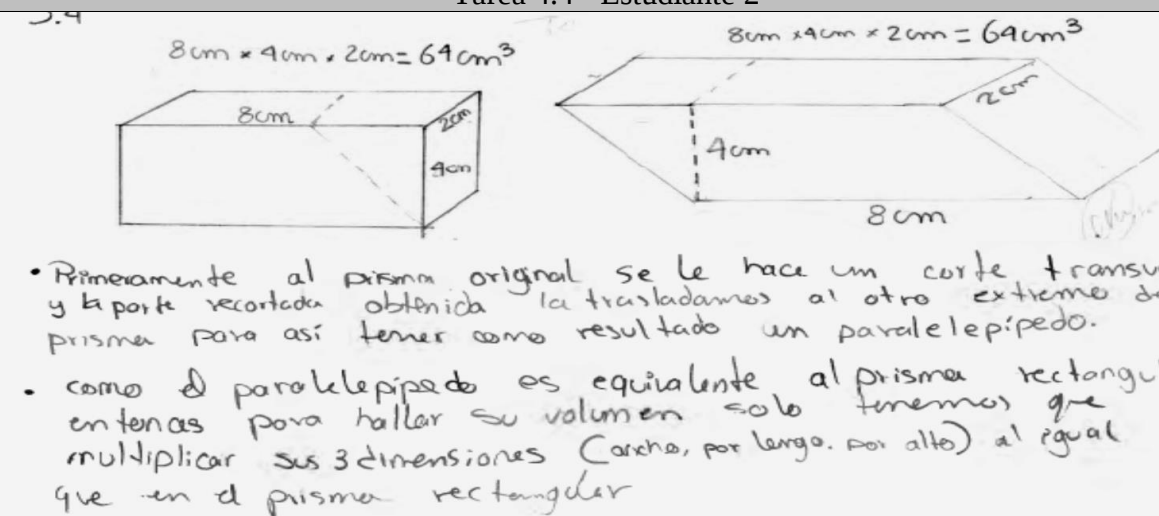


Ilustración 55. Tarea 4.4 - Estudiante 2