

**HISTORIA DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL, CON
CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL EN LA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE**

SANDRA LORENA CHAVARRÍA BUENO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magíster en Educación con énfasis
en Educación Matemática.

DIRECTOR

Dr. Luis Carlos Arboleda Aparicio



UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EDUCACIÓN
MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2019

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2019

SANDRA LORENA CHAVARRÍA BUENO

**HISTORIA DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL, CON
CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL EN LA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE**

Materias o temas: Historia de las Matemáticas, Educación Matemática, formación de profesores de matemáticas.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES	7
RESUMEN	8
INTRODUCCIÓN.....	10
CAPÍTULO 0.	14
Contextualización del trabajo de investigación.	14
Planteamiento del problema	14
Metodología.....	17
Objetivos.....	21
CAPÍTULO 1	22
Raíces del desarrollo histórico del concepto de espacio vectorial.....	22
1.1 Búsqueda de métodos para resolver ecuaciones.....	23
1.2 Descartes y el método analítico.	36
1.3 La búsqueda del método universal.	39
1.4 Solución de Descartes al problema de Pappus	41
1.5 El sistema coordenado cartesiano	49
1.6 El surgimiento de los números complejos, una mirada partiendo de lo algebraico.	52
1.7 Aproximación de Bombelli a las raíces negativas.....	57
1.8 Descartes y las raíces negativas.....	61
1.9 Prefiguración del vector geométrico: La obra Wallis.....	65

1.10 Cantidades imaginarias: Wessel.	69
1.11 Los cuaterniones: Consolidación del concepto de vector.....	72
1.11.1 Rotaciones a través de cuaterniones	77
1.12 Teorema fundamental del álgebra.	80
1.13 Polinomios simétricos.	81
1.13 Aportes de Descartes	83
1.14 Vandermonde y las raíces n-ésimas de la unidad.....	85
1.15 Aportes de Gauss.....	86
1.15.1 Esquema de las pruebas presentadas por Gauss: primera y cuarta demostración. ...	87
CAPÍTULO 2.	93
Algunos conceptos del álgebra lineal.	93
2.1 La clasificación de las líneas curvas.....	93
2.1.1 Estudio cualitativo de las ecuaciones en un sistema de Ecuaciones lineales. Los aportes de Euler.	95
2.1.2 <i>Sobre una aparente contradicción en la teoría de las líneas curvas.</i>	95
2.1.3 Aportes de Euler en el desarrollo del álgebra lineal.....	101
2. 2 Cramer y la teoría de determinantes.	103
2.3 El concepto de Rango.	104
2.4 De los determinantes a las matrices: Arthur Cayley.	108

2.4.1 Una memoria sobre la teoría de matrices.	109
2.5 La complejidad en el trabajo de Hermann Grassmann.....	123
2.5.1 Concepciones filosóficas de Grassmann	125
2.5.2 La teoría de extensión por Hermann Grassmann.....	128
2.6 Hacia una axiomatización de espacios vectoriales.	130
CAPÍTULO 3	134
Aspectos históricos didácticos.....	134
3.1 Panorama general	134
3.2 Espacios vectoriales reales de dimensión finita.	147
3.3 Modos de describir y validar conceptos y sus relaciones.	155
3.4 Privilegiar los algoritmos de solución en los cursos de álgebra lineal.....	161
3.5 El referente geométrico en el desarrollo del concepto de espacio vectorial	165
3.6 Un posible camino para abordar el concepto de dependencia e independencia lineal.....	170
CAPÍTULO 4.	185
Conclusiones.....	185
4.1 Características del curso de álgebra lineal en la Licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle	185
4.1.1 Descripción general	185
4.1.2 Sobre los profesores que orientan el curso de álgebra lineal.....	189

4.2 Las dimensiones de lo histórico que hemos trabajado.	196
4.2.1 Dimensión sociológica.	196
4.2.2 Hallazgos filosóficos.	198
BIBLIOGRAFÍA.....	200

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Investigaciones entres Didáctica de las matemáticas e Historia de las matemáticas.	17
Ilustración 2: Caso particular del problema de Pappus (dadas 4 rectas).	44
Ilustración 3: puntos de intersección nombrados por Descartes en el problema de Pappus.	45
Ilustración 4: primer uso de coordenadas negativas	51
Ilustración 5: Carácter geométrico de los números negativos.	68
Ilustración 6: Representación de raíces negativas	69
Ilustración 7: Representación de Wessel de lo que actualmente llamamos número complejo.	70
Ilustración 8: Rotación del segmento unitario.	78
Ilustración 9: Suma de vectores	79
Ilustración 10: Descomposición de un vector en sus componentes	80
Ilustración 11: Gauss demuestra la existencia de las raíces de polinomio de grado 2.....	91
Ilustración 12: ejemplos de intersecciones entre dos líneas curvas	97
Ilustración 13: Contradicción en la intersección de dos curvas.	99
Ilustración 14: Interacciones entre la Didáctica de las matemáticas y la historia.....	134
Ilustración 15: Etapas en la transposición didáctica.	143
Ilustración 16: Tres planos que no tienen punto en común.	158
Ilustración 17: Programa curricular de la licenciatura en matemáticas.	187

RESUMEN

Con la certeza que el curso de álgebra lineal es una fuente de frustraciones para estudiantes, maestros e instituciones educativas y con la idea de aportar elementos que orientan la reforma del curso de álgebra lineal ofrecido a la licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en este trabajo se presenta un análisis histórico con vocación didáctica de las raíces de los conceptos modernos sobre los que subyace el concepto de espacio vectorial.

A lo largo del trabajo se presentan dos líneas de acción que se interrelacionarán constantemente, la línea Histórica y la línea Didáctica. Uno de los primeros momentos de este trabajo está enfocado en realizar una historiografía que permita conocer cómo se fue consolidando el concepto de espacio vectorial, qué conceptos subyacen alrededor de éste y cómo se relacionan; allí mismo identificaremos distintas etapas de retroceso, avance, cambios de paradigmas, obstáculos, que aporten alguna información útil al análisis didáctico. Para esta historiografía, centraremos nuestra atención en la etapa comprendida entre 1545 con Girolamo Cardano (1501-1576) situando, en medio de la teoría de ecuaciones, los primeros casos particulares de espacio vectorial; hasta 1888 con Giuseppe Peano (1858-1932), quien presenta la primera axiomatización sobre espacios vectoriales.

A partir de los resultados de estos análisis, volvemos a centrarnos en la didáctica para aportar elementos conceptuales que permitan caracterizar problemas que se dan en el momento de enseñar. La investigación histórica- epistemológica, nos permite identificar obstáculos que se dieron en la construcción del conocimiento y que, en algunos casos, al momento de enseñar se repiten, es así como estas reflexiones ofrecen elementos que permiten diseñar estrategias para la caracterización y superación de obstáculos.

A lo largo de este trabajo utilizamos la metodología que propone el historiador Jean Luc Dorier, quien presenta una perspectiva teórica novedosa basada en crear una dialéctica entre las investigaciones en didáctica y las investigaciones en historia, a través de una reflexión epistemológica continua entre ellas. Se propone pensar la historia de las matemáticas para que permita, mediante algunos aspectos epistemológicos, tener una implicación en la Didáctica de las matemáticas, es decir, que el didacta pueda aprovechar la riqueza histórica de un concepto a la hora de seleccionar sus variables didácticas y diseñar estrategias para intervenir en situaciones. También se propone ver la didáctica de las matemáticas a través de una epistemología, que podríamos llamar *epistemología didáctica*, nos permite encontrar respuesta de las prácticas del saber que no es posible encontrarlas solo en la historia de las matemáticas.

Finalmente, a modo de conclusión se dan algunas recomendaciones con respecto a la formación de profesores en cuanto a los énfasis y a quienes están a cargo de este proceso. También a la luz de las reformas actuales y algunos documentos rectores formulamos algunas pautas que deberían guiar el diseño de las propuestas de curso de álgebra lineal para la licenciatura en matemáticas.

Este documento se consolida como un material de consulta, tanto para estudiantes y profesores, como para didactas e historiadores de las matemáticas.

Palabras claves: Historia de las matemáticas, historia del álgebra, Didáctica de las matemáticas, álgebra lineal, espacio vectorial, Educación matemática, formación de profesores de matemáticas

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 se desarrolla un recorrido histórico de donde se rescatan algunos elementos, hechos y propuestas de la comunidad matemática, que sirven luego de base para consolidar los conceptos modernos del álgebra lineal. Se aborda este recorrido presentando un aparte importante de la teoría de ecuaciones, a través del trabajo de Cardano, Tartaglia y otros. Este relato histórico epistemológico deja ver cómo emerge el concepto de número complejo y cómo la influencia de lo geométrico, como paradigma de validación, orienta la búsqueda de la representación gráfica de los números complejos que desemboca en la aparición del vector geométrico y el posterior estatus alcanzado por estos al protagonizar la última y más aceptada versión de las demostraciones de Gauss del teorema fundamental del álgebra; con ellos se muestra también el advenimiento del conjunto y las operaciones que se convertirán en uno de los más importantes casos particulares de espacio vectorial.

En el capítulo 2, se continúa con el recorrido histórico, teniendo como objetivo ubicar hechos históricos importantes para la construcción de conceptos del álgebra lineal, en particular aquellos relacionados con el concepto de espacio vectorial, como, por ejemplo, independencia lineal, rango, bases, teoría de matrices, entre otros. Se retoma la teoría de ecuaciones enfocando nuestro interés en el punto de vista de Euler (1707 - 1783) en cuanto a la caracterización de la naturaleza del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir del análisis cualitativo de la relación existente entre las ecuaciones. En este punto del trabajo se manifiesta claramente lo que hemos llamado *análisis histórico con vocación didáctica*. Seguidamente se dejar ver la emergencia de un caso particular de espacio vectorial en la teoría de matrices

presentada por Cayley. Por su gran valor en este análisis epistemológico y por su papel en el camino hacia la axiomatización del concepto de espacio vectorial, se exhibe el trabajo de Hermann Grassmann. Se finaliza este capítulo con la primera axiomatización de espacio vectorial presentada por Peano.

En el capítulo 3 se pone a consideración, a partir del análisis histórico epistemológico que se ha desarrollado en los dos primeros capítulos, algunas posturas y aspectos importantes de carácter didáctico. Se inicia este capítulo con un panorama general sobre la metodología de trabajo. La metodología aplicada es la que propone Jean Luc Dorier que consiste en interrelacionar investigaciones en Didáctica e investigaciones en historia, a través de una reflexión epistemológica. Estas relaciones van en dos direcciones: en la dirección historia-didáctica de las matemáticas, Dorier propone pensar la historia de las matemáticas de tal forma que permita, mediante algunos aspectos epistemológicos, tener una implicación en la Didáctica de las matemáticas, es decir, que el didacta pueda aprovechar la riqueza histórica de un concepto a la hora de seleccionar sus variables didácticas y diseñar estrategias para intervenir en situaciones.

En la otra dirección didáctica-historia, propone ver la Didáctica de las matemáticas a través de una epistemología, que podríamos llamar epistemología didáctica, que nos permite encontrar respuesta de las prácticas del saber que no es posible encontrarlas solo en la historia de las matemáticas.

A lo largo de la presentación de esta metodología, se citan hechos de los capítulos 1 y 2, de tal forma que se rescatan aspectos interesantes que permiten recrear estas relaciones.

Se continúa con el análisis didáctico caracterizando una problemática asociada a la enseñanza- aprendizaje del álgebra lineal, el obstáculo del formalismo, que en términos generales se asocia a la naturaleza formal de los conceptos, a la poca familiaridad con conceptos u objetos previos y a los niveles de abstracción que exige este curso.

En esta misma dirección se presentan los diferentes modos de descripción por medio de los que se puede validar el aprendizaje de un concepto, Para ello se recurre a la propuesta de Joel Hillel, quien menciona 3 modos de descripción: algebraico, abstracto y geométrico; a la luz de la propuesta de Hillel se muestra un ejercicio que se le aplica con frecuencia a los estudiantes en el curso de álgebra lineal y las interpretaciones que se pueden hacer a partir de los 3 modos de descripción.

Otra de las teorías de la que se habla, relacionada con los distintos tipos de razonamiento que presentan los estudiantes a la hora de aprender conceptos de álgebra lineal, es la propuesta por Anna Serpinska (2000); ella menciona que, en un campo general, uno de los aspectos que afecta el razonamiento en los estudiantes es la tendencia a los cálculos, por encima de estudiar las formas teóricas del concepto; es decir, los estudiantes privilegian los algoritmos de resolución desconociendo la estructura que envuelve el concepto.

En los dos apartados siguientes, se caracterizan otros obstáculos identificados a partir del análisis histórico-epistemológico: privilegiar los algoritmos de solución en los cursos de álgebra lineal y el referente geométrico en el desarrollo del concepto de espacio vectorial.

El primer obstáculo tiene que ver con el interés constante de la comunidad matemática, a lo largo de la historia, por encontrar métodos de solución de ecuaciones, y a raíz del éxito “parcial”

en esa búsqueda, se fundó la idea equívoca de que, dado un problema, este se debe poder resolver. Como se muestra, este paradigma no permite que se consideren otras posibilidades, por ejemplo, un sistema de ecuaciones con infinitas o ninguna solución. De otro lado, se retoman algunos hechos históricos que nos permiten ver el doble papel que juega la geometría en el desarrollo del concepto de espacio vectorial, en algunos momentos sirve de marco de validación, mientras que en otros fue un obstáculo.

Al final de este capítulo, presentaremos una propuesta concreta, dirigida a los profesores, para introducir los conceptos de dependencia e independencia lineal a partir de algunos elementos que encontramos en el análisis histórico del trabajo de Euler.

Finalmente, en el capítulo 4, se presentan las conclusiones. Se sugiere a través de algunas explicaciones la forma concreta de aprovechar este tipo de investigaciones en el acto mismo de enseñar y aprender. Para esto mostramos el potencial que un trabajo de esta naturaleza tiene, rescatando los aspectos filosóficos, didácticos, epistemológicos, entre otros. También se describe parcialmente el cambio que actualmente sufren las licenciaturas, gracias a la Reforma a las licenciaturas, resolución 02041 de 2016 del Ministerio de educación nacional. Se argumenta una conclusión de carácter administrativo y político que hace parte de los aspectos claves que inciden en el buen desempeño de alumnos y maestros que se agrupan alrededor de los procesos de enseñanza-aprendizaje que genera el curso de álgebra lineal.

CAPÍTULO 0.

Contextualización del trabajo de investigación.

En este capítulo, se expone, de manera general, la problemática que orienta este trabajo de investigación, los objetivos y la metodología aplicada.

Planteamiento del problema

En la educación matemática se plantea una problemática que tiene que ver con el aprendizaje de conceptos de naturaleza abstracta en las matemáticas, como es el caso del concepto de espacio vectorial. Es un hecho que los estudiantes tienen dificultades en la transición de la aritmética al álgebra en la educación básica. Usualmente, se maneja la idea de que el álgebra constituye un cambio de registro elemental de números a letras, desconociendo el tránsito profundo que puede sintetizarse en el paso de lo concreto a lo abstracto; de los sistemas numéricos al universo de las estructuras. Indudablemente, este aspecto no solo se presenta en el nivel de la media y la básica, sino también en los cursos universitarios. Uno de los cursos por excelencia, a nivel universitario, donde el estudiante se debe desprender de las representaciones físicas de los objetos matemáticos y visualizar nuevos objetos a partir de las relaciones que se establecen entre estos, sin importar su naturaleza en cuanto a objetos matemáticos, es el curso de álgebra lineal.

Este curso representa para profesores, estudiantes e instituciones de educación superior, una fuente común de frustraciones. Para los profesores, porque a pesar de que se aborda básicamente un problema considerado elemental en las matemáticas como es el caso de la linealidad, en su práctica este problema no resulta tan elemental y se con problemáticas que se repiten tantas

veces como se enfrente a la asignatura, las cuales están asociadas con los principales conceptos de ésta; por citar algunos: sistemas de ecuaciones lineales, rango, dependencia e independencia lineal, base, dimensión, espacios vectoriales, etc. Para los estudiantes porque se encuentran con un panorama muy diferente a su experiencia anterior, encuentran la asignatura con un número importante de nuevos símbolos, al igual que de definiciones, teoremas, y muy ligada a los procesos formales de justificación y prueba en contextos totalmente abstractos; por ejemplo, la teoría de los espacios vectoriales aparece como un dominio abstracto y formal. Así también, desde el punto de vista institucional, el álgebra lineal se ha constituido en una asignatura obligada para numerosos planes de estudio universitarios, técnicos y tecnológicos, como también es motivo de preocupación por los altos índices de estudiantes que reprueban la asignatura, sin contar aquellos que cancelan la materia antes de terminarla, lo que añade nuevos componentes sociales y económicos al problema. En nuestro contexto local, la Universidad del Valle, el curso de álgebra lineal, ofrecido por el Departamento de Matemáticas, presenta altos índices de deserción y reprobación: alrededor del 50% para estudiantes que lo toman por primera vez.

Con base en los aspectos mencionados en el párrafo anterior, se puede afirmar que el álgebra lineal constituye una fuente propicia de investigación sobre los diferentes fenómenos, asociados a la Historia y a la didáctica, que se presentan en los estudiantes, profesores y en los cursos en general a la hora de trabajar con conceptos que exigen otro grado de abstracciones.

El concepto de espacios vectorial es tema central de nuestra investigación dada la importancia que tiene en el curso de álgebra lineal y en el que se manifiestan muchas de las dificultades que se han documentado sobre la enseñanza del álgebra lineal, es de nuestro interés

estudiar desde una perspectiva histórica y didáctica este concepto y algunos otros que subyacen a él, como por ejemplo el concepto de dependencia e independencia lineal y rango, para ello, en cuanto a la parte histórica, retomaremos algunos elementos de mi trabajo de grado titulado “De las Ecuaciones a la teoría de Grupos, Algunos obstáculos Epistemológicos” (Chavarría 2014) en este trabajo se presenta el desarrollo histórico de la resolución de ecuaciones y se realiza un análisis epistemológico con el que se caracterizaron algunos obstáculos epistemológicos, la pertinencia de retomar este trabajo está dada por la relación existente entre la resolución de ecuaciones y la consolidación del concepto de espacio vectorial. Un elemento importante que retomaremos de este trabajo y detallaremos a lo largo del capítulo 1 y 2 es el de la búsqueda constante por la comunidad matemática del algoritmo para resolver cualquier ecuación, como lo mostraremos, este es un problema transversal al desarrollo histórico del álgebra y por supuesto influye en los avances que se dieron hacia la consolidación de la estructura de espacio vectorial.

En esta perspectiva, nos proponemos reflexionar, a partir de una mirada histórica, epistemológica y didáctica, sobre la enseñanza del concepto de espacio vectorial, en nuestro caso particular, en el curso de álgebra lineal que se ofrece para los estudiantes de la Licenciatura en Matemática de la Universidad del Valle, con el objetivo de aportar algunos elementos que den respuesta a:

¿Qué elementos teóricos del análisis histórico epistemológico se pueden incorporar en la propuesta curricular actual del curso de álgebra lineal de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, para ayudar a los estudiantes en el aprendizaje?

Metodología.

Este trabajo de investigación pone en juego la metodología expuesta por Jean Luc Dorier, matemático y doctor en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de París, quien actualmente es profesor vinculado a la Facultad de Ciencias de la Educación en la Universidad de Ginebra, Suiza. Dorier ha investigado con especial interés los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, involucrando la historia en sus investigaciones; entre sus obras más destacadas está: *Sobre la enseñanza del álgebra lineal* (2000).

Dorier plantea en su metodología interrelacionar algunos elementos de investigaciones en Historia de las Matemáticas e investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Para ello identifica dos focos o direcciones en la relación entre Historia y la Didáctica de las Matemáticas:

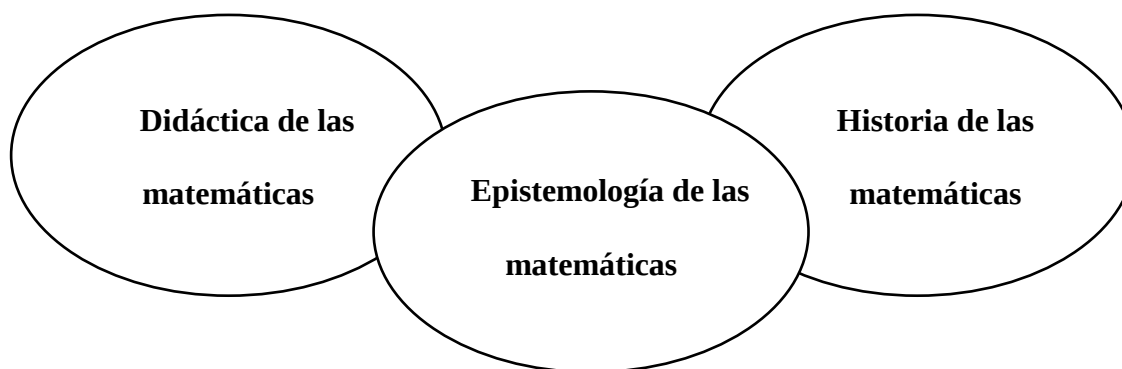


Ilustración 1: Investigaciones entre Didáctica de las matemáticas e Historia de las matemáticas.

Recuperado de (Delgado C, 2005)

En la dirección historia didáctica de las matemáticas, Dorier propone pensar la Historia de las matemáticas para que permita, mediante algunos aspectos epistemológicos, tener una implicación en la Didáctica de las matemáticas, es decir, que el didacta pueda aprovechar la

riqueza histórica de un concepto para seleccionar sus variables didácticas y diseñar estrategias para intervenir en situaciones.

En esta misma dirección historia- didáctica, Dorier considera que en el análisis didáctico se debe estudiar la constitución y evolución histórica de un conocimiento matemático y su desarrollo hasta llamarse saber enseñado. Este proceso está enmarcado en lo que conocemos como “transposición didáctica”, tema que Dorier (2000) describe como un proceso complejo y se aborda con algún detalle más adelante.

Lo novedoso del trabajo de Dorier no solo va en la dirección historia- didáctica de las matemáticas, sino que también propone un camino para ir de la Didáctica de las matemáticas a la Historia: ver la Didáctica de las matemáticas a través de una epistemología, que se puede llamar epistemología Didáctica, lo que permite encontrar respuestas de las prácticas del saber que no son posibles encontrarlas solo en la Historia de las matemáticas.

Los conceptos y fenómenos que se toman como objeto de estudio en esta investigación de corte histórico, epistemológico y didáctico son aquellos que tienen lugar en un sistema de enseñanza, aun cuando es claro que la ciencia encargada del estudio de los fenómenos que se presentan en medio de los procesos de enseñanza aprendizaje es la Didáctica de las matemáticas. Aunque el campo de observación inicial está en medio del dominio de investigación de la didáctica, los análisis histórico-epistemológicos deben velar por la independencia, es decir, el investigador debe cuidarse de caer en el sesgo de refrendar forzosamente en la Historia lo que se observa en los sistemas de enseñanza, es decir, el uso y

la apropiación de la Historia de las matemáticas impone condiciones de rigor a la indagación histórica por parte del didacta:

La labor en la investigación histórica se conduce independientemente del trabajo didáctico. En efecto, la reconstitución de la génesis histórica no depende en nada del conocimiento de algún problema de enseñanza. En otros términos, hay que abstenerse de un análisis demasiado superficial de la historia, que tendería a adaptar la realidad histórica para apoyar mejor un supuesto de origen didáctico. (Dorier, 2000, pág. 33)

El análisis de carácter epistemológico se toma de manera natural de la epistemología de las matemáticas, en el sentido que se analiza la evolución de los conceptos matemáticos, entendiendo la palabra evolución en un sentido más amplio, es decir, para el caso de los conceptos matemáticos esta evolución no es lineal, por lo tanto, en el periodo de evolución podemos encontrar periodos de estancamiento, avance e incluso retrocesos.

Es así como nuestra propuesta de investigación tiene dos líneas de acción que se interrelacionarán constantemente, la línea histórica y la línea didáctica. Uno de los primeros momentos de este trabajo está enfocado en realizar una historiografía que nos permita conocer cómo se fue consolidando el concepto de espacio vectorial, qué conceptos subyacen alrededor de éste y cómo se relacionan; allí mismo identificaremos distintas etapas de retroceso, avance, cambios de paradigmas, obstáculos, que aporten alguna información útil a la línea de didáctica. Para esta historiografía, centraremos nuestra atención en la etapa comprendida entre 1545 con Girolamo Cardano (1501-1576) hasta 1888 con Giuseppe Peano (1858-1932), quien presentó la primera axiomatización sobre espacios vectoriales. En este periodo de tiempo, se dieron los

mayores avances con respecto al álgebra y la conceptualización de estructuras como la de grupo y la de espacios vectoriales.

A partir de los resultados de estos análisis, volveremos a centrarnos en la didáctica para aportar elementos conceptuales que permitan caracterizar problemas que se dan en el momento de enseñar, la investigación histórica- epistemológica, nos permite identificar obstáculos que se dieron en la construcción del conocimiento y que, en algunos casos, al momento de enseñar se repiten, es así como estas reflexiones ofrecen elementos que permiten diseñar estrategias para la caracterización y superación de obstáculos. Dorier menciona que la historia le presta un montículo de observación con el cual se puede ver en cualquier dirección, los momentos de evolución, avance y retroceso en la constitución de un objeto matemático, como también todos los que a él subyacen.

Finalmente describiremos algunos aspectos generales, articulando el análisis histórico con las reflexiones didácticas realizadas al largo del trabajo, que se deben considerar en el currículo que orienta el curso de álgebra lineal.

Objetivos

Objetivo General:

- Presentar algunas de las bases históricas, epistemológicas y didácticas de los elementos conceptuales que sirvan de marco de referencia para la discusión de los procesos de reforma curricular del curso de álgebra lineal que se ofrece a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas ofrecida por el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Objetivos Específicos:

- Realizar un análisis histórico epistemológico desde Girolamo Cardano hasta Giuseppe Peano de los conceptos que subyacen en el concepto de espacio vectorial.
- Caracterizar algunas etapas trascendentales en la constitución del concepto de espacio vectorial y los conceptos subyacentes a este.
- Realizar un análisis didáctico a partir de los elementos que la Historia nos brinda para el caso de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal.

CAPÍTULO 1

Raíces del desarrollo histórico del concepto de espacio vectorial

En éste primer capítulo se hace un recorrido histórico por las nociones en las que se afirma el concepto de espacio vectorial. Este recorrido nos llevará por las etapas de desarrollo, estancamiento e incluso, mostraremos pasajes históricos en los cuales se podría juzgar, que se presentaron retrocesos en el camino que conduce al concepto de espacio vectorial.

Siguiendo en la Historia de las matemáticas el desarrollo del concepto de espacio vectorial y con el fin de situar un punto de partida en nuestro análisis histórico-epistemológico, se encuentra un primer momento ligado con la resolución de ecuaciones y con la evolución histórica del pensamiento algebraico.

La resolución de ecuaciones polinómicas no sólo fue objeto de estudio en sí misma, sino que también aportó ideas para construir nuevos conceptos matemáticos; como es el caso del concepto de números negativos, el de números complejos y con la conexión de estos últimos con la representación geométrica de vector. Se trata de un largo proceso del cual se ponderará aquí lo relativo al desarrollo del Álgebra lineal.

1.1 Búsqueda de métodos para resolver ecuaciones.

A partir del siglo XII, Europa sufrió cambios importantes que impactaron el desarrollo de las matemáticas. Se acabaron las cruzadas con lo que también se creó un nuevo tipo de sociedad: las burguesías. Estas eran personas que se dedicaban exclusivamente al comercio, lo que exigía una mejor formación en Matemáticas. Se empezaron a formar las primeras universidades: lugares donde las personas se dejaban enseñar por aquellas que tenían más conocimientos; generalmente los que enseñaban contaban con copias originales de libros antiguos y eran los encargados de traducirlos y explicarlos a sus estudiantes. Hacia los siglos XIII, XIV, XV aparecieron personajes distinguidos que aportaron al desarrollo del álgebra y la aritmética, en 1545 se publicó una obra que se puede considerar una de las más grandes aportaciones del periodo renacentista al álgebra y pieza fundamental para su desarrollo, *Artis magnae, sive de regulis algebraicis (del arte de las reglas de las ecuaciones algebraicas)* de Girolamo Cardano (1501-1576).

Cardano fue un reconocido matemático italiano que hizo importantes aportes a la estadística y el álgebra; con respecto a la resolución de ecuaciones logra dar un método completo para resolver por medio de radicales la ecuación cúbica y de cuarto grado. Hasta este momento, otros importantes matemáticos, entre ellos Diofanto (280 d.C.) y Al-Khwarizmi (820 d.C.), habían trabajado en la resolución de problemas que se podían representar por medio de la ecuación cuadrática. La obra de Al-Khwarizmi deja planteada la resolución de ecuaciones cuadráticas a través de la completación de cuadrados; Cardano pretendía hacer lo mismo con la ecuación cubica, es decir, quería encontrar un algoritmo general que resolviera este tipo de ecuaciones,

esto se vuelve tema de interés para él y otros matemáticos contemporáneos como Scipione del Ferro (1465-1526) y Nicola Fontana (1499-1557).

La primera resolución de una forma particular de la ecuación cúbica: “El cubo y la cosa (incógnita) igual a un número”, que corresponde a:

$$x^3 + px = q$$

se debe a Scipione del Ferro (1465-1526), profesor de matemáticas de Bolonia, quien no publicó su demostración.

Para la misma época, el matemático italiano Nicola Fontana (1499-1557) más reconocido como Tartaglia, presentó una solución a los siguientes problemas:

- Encontrar un número cuyo cubo sumado a tres veces su cuadrado es 5. Este problema corresponde a la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 = 5.$$

- Encontrar tres números tales que el segundo de ellos supera al primero en 2, el tercero supera al segundo también en 2, y cuyo producto es 100. Este problema corresponde a la ecuación:

$$x(x + 2)(x + 4) = 100,$$

Lo cual también se puede ver como:

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 100.$$

Después de resolverlos, Tartaglia concluye que puede solucionar cualquier problema asociado a la ecuación de la forma:

$$x^3 + px^2 = q.$$

Tartaglia trabajó insistentemente en encontrar la solución a la ecuación cúbica y aunque no lo logró, en términos generales, sí estableció un algoritmo para resolverlas que no tuvieran término cuadrático, es decir de la forma:

$$x^3 + px = q.$$

En la obra el *Ars Magna*, Cardano reconoce el interés que tuvo por los algoritmos trabajados por Tartaglia. A diferencia de Tartaglia, quien solo expone solamente el algoritmo para resolver las ecuaciones cúbicas que no tuvieran término cuadrático, Cardano lo interpreta y demuestra tomando algunos resultados utilizando el referente geométrico, es así como, basándose en algunos resultados planteados por Euclides, demuestra la igualdad:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

e equivalente a:

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3. \quad (i)$$

Si en (i) tomamos

$$p = 3ab. \quad (ii)$$

$$q = a^3 - b^3, \quad (iii)$$

obtenemos:

$$(a - b)^3 + p(a - b) = q.$$

Y por tanto se tiene que $x = a - b$ es solución de la ecuación cúbica:

$$x^3 + px = q, \quad p, q \in \mathbb{Z}^+.$$

Reemplazando $b = \frac{p}{3a}$ de (ii) en (iii), se tiene:

$$q = a^3 - \frac{p^3}{27a^3}.$$

Que se puede reescribir como:

$$a^3 - \frac{p^3}{27a^3} - q = 0.$$

Multiplicando por a^3 obtenemos la ecuación cuadrática:

$$(a^3)^2 - \frac{p^3}{27a^3} - qa^3 = 0.$$

Aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, se tiene:

$$a^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Que finalmente lleva a:

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

y de (ii):

$$b = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Tomando la solución $x = a - b$ entonces:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Después de esta demostración de cómo se llega a la fórmula para solucionar la ecuación cúbica, Cardano hace la siguiente sustitución:

$$a^3 = u \quad b^3 = v.$$

Donde por (ii) y (iii) se tuvo que:

$$u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

$$u - v = q.$$

Ahora se puede escribir:

$$x = u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}}.$$

La anterior solución ya había sido planteada por Tartaglia en álgebra retórica. A continuación, se presenta el texto escrito por Tartaglia y su correspondiente traducción a álgebra simbólica:

Caso 1:

Cuando el cubo más la cosa (incógnita) es igual a un número

$$x^3 + px = q, \quad p, q \in \mathbb{Z}^+,$$

se buscan dos números cuya diferencia es este número y cuyo producto sea igual al cubo de la tercera parte de las cosas conocidas; la diferencia de sus raíces cúbicas es la cosa principal.

$$u.v = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

$$u - v = q,$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}.$$

Caso 2:

Cuando el cubo está solo y es igual a la cosa más el número

$$x^3 = px + q, \quad p, q \in \mathbb{Z}^+,$$

se divide el número en dos partes tales que su producto sea igual al cubo del tercio de las cosas, y entonces la suma de las raíces cúbicas de esas partes dará lo buscado:

$$u.v = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

$$u + v = q,$$

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}.$$

Caso 3:

Cuando el cubo más el número es igual a la cosa:

$$x^3 + q = px, \quad p, q \in \mathbb{Z}^+.$$

Si se detalla detenidamente este caso, se resuelve similar al caso 2.

Cardano no solo demuestra que las soluciones satisfacen la ecuación, sino que presenta algunos ejemplos (Rascón, 2003) :

Encontrar la cosa si el cubo y seis veces la cosa hace veinte.

$$x^3 + 6x = 20.$$

Inicia tomando la mitad de la constante de la ecuación, en este caso da como resultado 10 y se eleva al cuadrado resultando 100. Se suma este resultado con $\frac{p^3}{27}$ que en este caso es $\frac{6^3}{27} = 8$, se obtiene 108. Luego, se toma la raíz cuadrada de este valor, es decir $\sqrt{108}$.

Ahora se establecen dos casos:

$$\sqrt{108} + 10 \quad \sqrt{108} - 10 .$$

Se le llamara a la suma “binomio” y a la resta “apotoma”, luego el valor de la cosa es la resta entre las raíces cúbicas del binomio y la apotoma:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} .$$

A continuación, se comprueba que cumple con las condiciones que estableció Tartaglia:

$$u \cdot v = 8 ,$$

$$u - v = 20 .$$

De donde la solución es $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

Veamos:

$$p = 6 , q = 20 ,$$

$$u = \sqrt{108} + 10,$$

$$v = \sqrt{108} - 10,$$

$$u.v = (\sqrt{108} + 10).(\sqrt{108} - 10),$$

$$u.v = \sqrt{108} + 10\sqrt{108} - 10\sqrt{108} - 100,$$

$$u.v = 108 - 100,$$

$$u.v = 8.$$

Así mismo:

$$u - v = (\sqrt{108} + 10) - (\sqrt{108} - 10).$$

$$u.v = 20.$$

Efectivamente se llega a los resultados propuestos por Tartaglia.

Haciendo una observación detallada del método propuesto por Cardano y Tartaglia para resolver la cúbica, que tiene coeficientes positivos, se encuentra que actualmente con este algoritmo se puede resolver cualquier variación de signos de la ecuación cúbica, es decir se pueden resolver todas las ecuaciones de la forma:

$$x^3 \pm px \pm q = 0.$$

Cardano no pudo llegar a esta conclusión, pues no se aceptaban los números negativos ni las raíces complejas, a las que precisamente llamaba *falsas*. Además, cuando era necesario establecía condiciones que se deben cumplir para llegar a resultados válidos para él.

Por ejemplo, en el caso 2, Cardano estableció que se debía cumplir que:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Pues, de no ser así, se encuentran radicales negativos. Este tema lo retomaremos más adelante.

Cardano le atribuye el crédito de este descubrimiento a Ludovico Ferrari (1522-1565), un estudioso matemático que fue su secretario por un tiempo.

Del mismo modo, Cardano estableció, en el capítulo XIX, los diferentes casos para las ecuaciones de cuarto grado, con el objetivo de no tener coeficientes negativos en una ecuación.

A continuación, se muestra el proceso, a partir de una mirada moderna, para solucionar la ecuación de cuarto grado. Si se tiene la ecuación de la forma:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

El primer paso es realizar una sustitución análoga a la de la ecuación cúbica, en este caso para eliminar el término cúbico de la ecuación bicuadrática, para esto se hace $x = y - k$:

$$(y - k)^4 + a(y - k)^3 + b(y - k)^2 + c(y - k) + d = 0,$$

$$y^4 + y^3(-4k + a) + y^2(6k^2 - 3ak + b) + y(-4k^3 + 3ak^2 - 2bk + 1) + k^4 - ak^3 + bk^2 - k + d = 0,$$

haciendo el coeficiente del término cúbico $-4k + a = 0$ se obtiene $k = \frac{a}{4}$ y se llega a la ecuación:

$$y^4 + y^2 \left(-\frac{3a^2}{8} + b \right) + y \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + 1 \right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{a}{4} + d \right) = 0 .$$

Que, con las sustituciones apropiadas se escribe como:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 ,$$

introduciendo un parámetro μ , en esta última ecuación, se puede escribir:

$$y^4 + 2y^2 \frac{p}{2} + 2\mu y^2 + p\mu + \frac{p^2}{4} + \mu^2 + qy + r = 2\mu y^2 + p\mu + \frac{p^2}{4} + \mu^2 ,$$

que equivale a tener:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \mu \right)^2 = 2\mu y^2 - qy + \left(\mu^2 + p\mu - r + \frac{p^2}{4} \right), \quad (\text{iv})$$

tomando el lado derecho de **(iv)** se puede hacer el siguiente paso:

$$2\mu \left(y^2 - \frac{q}{2\mu} y + \left(\frac{\mu^2 + p\mu - r + \frac{p^2}{4}}{2\mu} \right) \right),$$

para transformar esta expresión en un trinomio cuadrado perfecto debe pasar que:

$$\frac{q^2}{16\mu^2} = \frac{\mu^2 + p\mu - r + \frac{p^2}{4}}{2\mu},$$

y μ debe ser la raíz de la ecuación cúbica auxiliar. Que, actualmente, se conoce como “la cúbica resolvente” de la ecuación cuartica:

$$8\mu^3 + 8p\mu^2 - 8r\mu + 2p^2\mu - q^2 = 0 . \quad (\text{v})$$

Esta ecuación cúbica se resuelve con los algoritmos planteados anteriormente por Cardano, sin entrar en detalles en este paso, de la ecuación (iv) y el razonamiento expuesto sobre la completación del trinomio cuadrado perfecto, se tiene que:

Si μ_0 es una raíz de la ecuación:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \mu\right)^2 = 2\mu y^2 - qy + \left(\mu^2 + p\mu - r + \frac{p^2}{4}\right),$$

se puede escribir como:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \mu_0\right)^2 = 2\mu_0 \left(y - \frac{q}{4\mu_0}\right)^2,$$

de donde se encuentra que:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \mu_0\right) = \pm \sqrt{2\mu_0} y - \frac{q}{4\mu_0}.$$

Y así, se obtienen cuatro soluciones que, al reemplazar en $x = y - \frac{a}{4}$, conducen finalmente las soluciones de la ecuación:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Cabe señalar que la resolución de ecuaciones se validaba partiendo del referente geométrico.

Con respecto a esto, Cardano afirma que:

La sexta cosa a señalar [es] que en cuanto el hombre haya llegado a conocer todos los capítulos [ecuaciones] hasta el relativo al cubo, que son 19 [incluidos,

hacemos notar, los de primer y segundo grado], tendrá cuanto basta para cualquier caso algebraico, porque hasta el cubo se encuentra la gradación en la Naturaleza: de hecho, hay líneas, superficies y cuerpos. Y las líneas corresponden a la incógnita lineal, las superficies a los cuadrados y los cuerpos a los cubos. Por tanto, si sobre éstos hemos dado noticias suficientes, se conocerá todo lo que es necesario. En realidad, todo lo que añadiremos más allá, será por entretenimiento y no por el fruto que pueda obtenerse del [tal] estudio. Tales capítulos sucesivos no existen verdaderamente de por sí, sino por accidente, si bien existen [fórmulas] generales (Cardano, 1993).

El éxito obtenido por Tartaglia, Cardano y Ferrari, entre otros, en la solución por radicales de las ecuaciones de grado tres y cuatro, deja la certeza de poder encontrar procesos por medio de radicales que lleven a la solución no solo de las ecuaciones de grado cinco, sino a las de grado mayor y, por qué no, encontrar un método general, por radicales, para una ecuación polinómica de grado n ; esto explica la razón por la cual la comunidad matemática por cerca de tres siglos estuvo inmersa en esta tarea imposible. Sobre este hecho volveremos en repetidas ocasiones. Mostraremos cómo esta creencia es fuente de obstáculos para construir conceptos como dependencia e independencia lineal.

Las técnicas empleadas por Cardano, en particular, la que consistía en reducir de término la ecuación mediante un cambio de variable, son consideradas en el trabajo de otros matemáticos. Un siglo después, Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708), plantea un método para disminuir el grado del polinomio, generalizando de alguna forma lo propuesto por Cardano. Por ejemplo, si se tiene el polinomio de grado tres, se hace la transformación de la forma,

$$y = x^2 + ax + b,$$

que reduce el polinomio a la forma:

$$y^3 = K.$$

Esto mismo se puede hacer para la ecuación bicuadrática, procedimiento conocido como las *transformaciones de Tschirnhaus*:

Las transformaciones de Tschirnhaus constituyeron la contribución más prometedora a la resolución de ecuaciones algebraicas durante el siglo XVII, pero, no obstante, la eliminación del segundo y tercer término mediante tales transformaciones resultó ser totalmente inadecuada para la resolución de la quintica en general (Boyer, 2001, pág. 542).

El método que propone Cardano para la resolución de las ecuaciones cúbicas y bicuadrática, es el motivo que impulsa a los matemáticos de la época a la búsqueda de resolución de ecuaciones de quinto grado en adelante. Estos métodos inducen, de manera natural, a los matemáticos la idea de que cualquier ecuación se podía resolver por medio de radicales, la búsqueda de los algoritmos que completen el trabajo de Cardano es extendida por aproximadamente dos siglos. Es Lagrange que da un cambio de perspectiva, sus aproximaciones a la solución de las ecuaciones de quinto grado por medio de la resolvente le dejan la idea de la imposibilidad final de hallar el método. Con este mismo enfoque de Lagrange, Abel y Galois determinan que no es posible establecer un algoritmo con radicales para la resolución de estas ecuaciones. Esta búsqueda, centrada en la emergencia de los métodos de solución de ecuaciones, termina desembocando en ejemplos particulares de lo que a la postre

se convertiría en los conceptos de grupo, semigrupo, grupo normal y acercamiento a otras estructuras principales en el álgebra moderna.

1.2 Descartes y el método analítico.

Los aportes del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) marcaron el desarrollo de las matemáticas tanto en la geometría como en el álgebra. Descartes trabajó en matemáticas, física y filosofía, dejando importantes ideas y propuestas para establecer cambios y avances; fue uno de los personajes más destacados entre la Edad Media y la Edad Moderna por el cambio de mentalidad que propuso a partir de sus reflexiones, críticas y nuevas propuestas; contribuyó a una nueva forma de pensar y utilizar las matemáticas en la investigación científica: el método cartesiano, la geometría analítica y los avances en la simbología algebraica, son algunos de los aportes que impulsaron el desarrollo de las matemáticas.

Descartes aborda en su obra un problema de tipo geométrico, que lo lleva al álgebra por medio del uso de las ecuaciones y, una vez representado el problema en el lenguaje algebraico, lo resuelve con procedimientos no geométricos. Lo que hoy llamamos, Geometría Analítica. Gracias a su novedoso método, los matemáticos de su generación cambiaron de manera drástica el paradigma del estudio de las curvas.

En resumen, el trabajo de Descartes incorpora un lenguaje simbólico que relaciona el álgebra y la geometría; el método por medio del cual estrecha esta relación es el *método analítico*, que consiste, en aceptar que esta solución existe y, a partir de allí, remontarse por procedimientos

lógicos a un principio en el cual se funda tal solución. Esta estrategia ya había sido empleada por Euclides, Arquímedes y Apolonio.

Descartes conocía los avances en geometría y álgebra que se daban hasta ese momento. Estableció una distinción entre el pensamiento geométrico que apela a la representación figurativa, y el pensamiento algebraico que depende de la representación general a través de un lenguaje simbólico, en su obra célebre *El discurso del método*, manifiesta que:

En cuanto al análisis de los antiguos y el álgebra de los modernos, además de que no se extienden más que a materias muy abstractas y que no parecen de utilidad alguna, la primera está siempre tan restringida a la consideración de las figuras que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación; y se está de tal forma sometido, en la última, a ciertas reglas y ciertas cifras, que se ha hecho un arte confuso y oscuro que embaraza el espíritu, en lugar de una ciencia que lo cultive. (Descartes, 1996)

En adelante se muestra con detalle que, en el apéndice *Geometrie* (1996), Descartes resuelve problemas donde se debe buscar el lugar geométrico que satisface una condición específica; para ello no solo propone encontrar una respuesta usando la geometría, sino también que la curva, que responde al lugar geométrico buscado, debe tener una correspondencia con pares ordenados de números reales, que permitan establecer una ecuación algebraica en dos variables; esta correspondencia, que se basa en el método analítico, sentó las bases de lo que ahora se conoce como “geometría analítica”. Este apéndice al igual que *La Dióptrica* (Óptica) y *Los Meteoros* (Meteorología) tenía como propósito proveer de ejemplos sobre la aplicación del

"método" de pensamiento que se presentaba en la parte principal del texto. La obra principal de los apéndices es el "Discurso del método". Descartes ubica la *Geometría* en este apéndice.

Hasta este momento, las cónicas se agrupaban en un conjunto de curvas llamadas sólidas, puesto que estaban ligadas al cono y los posibles cortes a éste. Cada una de estas curvas se estudiaban por separado y las características de éstas siempre eran subyacentes al corte sobre el cono y por supuesto, a la figura geométrica.

Cabe anotar que, para Descartes, a menos que se pudiera mostrar el procedimiento por el que se construía la curva geoméricamente, el problema aún no se daba como resuelto. La ecuación algebraica asociada a la curva era el camino hacia la solución, mas no era la solución del problema. Esta condición que establece Descartes permite ver que la geometría seguía teniendo un lugar privilegiado como método de validación, aunque ya no tan preponderante como en Euclides y sus contemporáneos, como la forma de validar cualquier conocimiento matemático. La dificultad histórica y epistemológica que por más de diez siglos planteaba la resolución de este problema para los antiguos y que se advierte en la obra de Pappus, es abordada por Descartes quien combina los métodos de la aritmética con los de la geometría.

La obra de Descartes es uno de los referentes para estudiar la constante interacción entre el álgebra y la geometría, tema que abordaremos situando nuestra mirada didáctica en el capítulo 3.

A continuación, una descripción del método analítico en la obra *Colección Matemática de Pappus*:

El análisis es el camino que parte de la cuestión que se busca, suponiéndola conocida, para llegar, por medio de las consecuencias que se deduzcan, a la síntesis de lo que se dio por conocido.

Suponiendo obtenido, en efecto, lo que se busca, se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede hasta que, volviendo sobre los pasos dados, se llega a una cuestión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios; y este camino se llama análisis porque es una inversión de la solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en su orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que buscamos; y este método es la síntesis (Descartes, 1947, pág. 53).

Antes de examinar en detalle el uso del método de análisis en la *Geometría*, se estudiará brevemente su relación con el método universal en el pensamiento filosófico cartesiano.

1.3 La búsqueda del método universal.

La búsqueda de un método universal no solo tenía una intención desde el saber científico sino también para la construcción de un saber filosófico. El cúmulo de conocimientos geométricos, físicos, algebraicos y también filosóficos que tenía Descartes, se ven plasmados en su método. Para Descartes, el método es único independiente de la ciencia a la que se aplique, ya que todas avanzan a través del razonamiento; el método universal se puede aplicar a cualquier clase de datos y problemas. Para ese momento, la orientación metodológica que tenían los científicos estaba fundamentada en el sistema metafísico y lógico heredado de Aristóteles y

los escolásticos, quienes sostenían que cada una de las ciencias debe tener un método propio que responda a las diferentes características de los materiales que dicha ciencia investiga.

El objetivo de Descartes al aplicar dicho método es crear una ciencia única y no una colección de pluralidades de ciencias, separadas unas de otras. Al no encontrar dicho método universal, Descartes se dio a la tarea de crear una matemática universal (*mathesis universalis*) que se ocupara del orden y la medida independientemente de los objetos particulares como los números, las figuras, los sonidos, los astros; el orden asociado a una cadena de conocimientos donde uno sigue después de otro y, la medida a la relación entre los objetos gracias a la unidad. Descartes lo describe así:

Así pues, entiendo por método reglas ciertas y fáciles, mediante las cuales el que las observe exactamente no tomará nunca nada falso por verdadero, y, no empleando inútilmente ningún esfuerzo de la mente, sino aumentando siempre gradualmente su ciencia, llegará al conocimiento verdadero de todo aquello de que es capaz. (Descartes, 1989, pág. 79)

En su obra *Geometría*, Descartes presenta una aplicación de su método designado como el “método cartesiano”. Comienza por establecer los pasos básicos que le permiten resolver cualquier problema de carácter geométrico, es decir, una sistematización por medio de principios, los que plantea en términos generales en su método: el primer principio es suponer el problema como resuelto:

Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya hecho, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras (Descartes, 1947, pág. 53).

Este es un aporte crucial. Descartes parece mostrar que, para el establecimiento de una teoría matemática nueva, es fundamental empezar por designar los objetos en un lenguaje y someterlos a unos principios lógicos para enunciar las propiedades de tales objetos. En este punto, Descartes introduce la doble escritura para para lo conocido toma constantes a, b, c y para lo desconocido toma variables x, y, z . Esta asignación de símbolos que establece para las incógnitas, las operaciones y las potencias algebraicas, introduce el tratamiento que hoy es habitual en las teorías matemáticas que utilizan el lenguaje algebraico; lo que trae como consecuencia que gran parte de los contenidos de los textos modernos se asemejen aún al lenguaje usado por Descartes, tal como lo advierte Arboleda:

En términos modernos, Descartes dispone de los valores de los segmentos...en “función” de x y y . Esto es, las distancias de C a cada recta participan de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Observemos el carácter inequívoco de la escritura que Descartes está introduciendo. El procedimiento analítico le permite expresar sin ambigüedades distancias que se suponen conocidas en términos de cantidades no conocidas x y y . (Arboleda, 2012, pág. 8)

1.4 Solución de Descartes al problema de Pappus

El planteamiento de Descartes para resolver el problema general de Pappus, permite auscultar el método que aplica. Entre otros aspectos importantes, deja ver el camino para lo que

hoy se conoce como geometría analítica. Aunque el establecimiento de una correspondencia de lo que actualmente llamamos parejas ordenadas de números reales (con la salvedad que Descartes no estaba en posesión aún de los números reales) y los puntos del plano, le permitió designar a las curvas del plano ecuaciones en dos variables; de lo que se deriva la construcción de la teoría de las curvas algebraicas y la teoría de los polinomios asociada con ella. El aporte de Descartes va mucho más allá del instrumentalismo al que se le hace énfasis en la formación de profesores, donde la enseñanza de la geometría cartesiana se reduce al método instrumental de las coordenadas, dejando de lado la comprensión por parte de los docentes de aspectos epistemológicos que son esenciales en la formación de pensamiento algebraico.

Para Descartes el método filosófico sobre las reglas del razonamiento está íntimamente relacionado con su práctica matemática; no es algo acabado que anteceda a la matemática y que se aplique paso a paso en la solución del problema de Pappus; recordemos que Descartes ubica la *Geometría* como apéndice del *Discurso del Método*. El método de análisis y síntesis, tal como hoy se formula en lógica y filosofía de las matemáticas, tiene una adecuación práctica en la solución cartesiana de Pappus.

El “problema de Pappus”, es descrito por Descartes así:

Teniendo tres, cuatro o un mayor número de rectas dadas en su posición, se intenta hallar en primer lugar un punto a partir del cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto, guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no hay sino

tres; o bien con el rectángulo de las otras dos sino no hay más que cuatro; o bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por las otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el resultado obtenido de la multiplicación de cuatro guarde la proporción dada con el resultado obtenido de las otras cuatro. De este modo, tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier otro número de líneas (Descartes, 1996, págs. 400-401).

El problema se puede plantear para 3, 4 ó 5 rectas, en ésta caso, se tomarán 4 líneas rectas dadas. El problema se puede escribir en términos modernos así:

Dados un número par de rectas, encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a n de esas rectas se encuentren en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras n rectas. Descartes empieza llamando AB, AD, EF, GH a las líneas dadas. Una interpretación del problema que se quiere resolver se presenta en la siguiente figura:

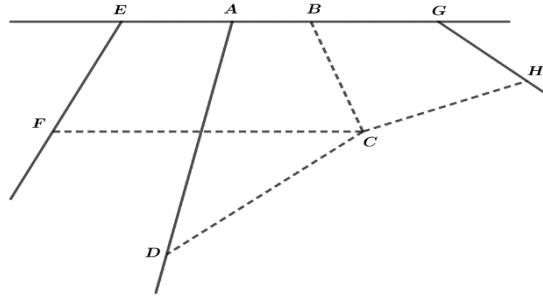


Ilustración 2: Caso particular del problema de Pappus (dadas 4 rectas).

El método, mencionado en páginas anteriores, es utilizado por Descartes para resolver este problema, por ello supone el problema como resuelto estableciendo una relación entre las líneas dadas y las que desea encontrar.

En lo que sigue se hace una presentación moderna de la demostración cartesiana teniendo en cuenta a (Recalde, 2013; Monroy, 2011). Partiendo de la Ilustración 2, se desea hallar el punto C , y en general el lugar geométrico de todos los puntos C , de tal forma que después de trazar los segmentos CB, CD, CF, CH y tener los ángulos $CBA = \beta$, $CDA = \alpha$, $CFE = \delta$, $CHG = \varepsilon$, el producto de CF, CD guarde una razón con el producto de CB, CH .

Una técnica que utiliza Descartes y que le permite llegar finalmente a ecuaciones algebraicas a través de un problema planteado desde lo geométrico, es asignarles una longitud a los segmentos: $AB = x$ y $BC = y$. Así toma AB y BC como los principales segmentos, seguidamente prolonga cada una de las líneas dadas hasta que se corten con la prolongación de BC : (ilustración 3)

Descartes nombra los puntos de intersección como S, R, T :

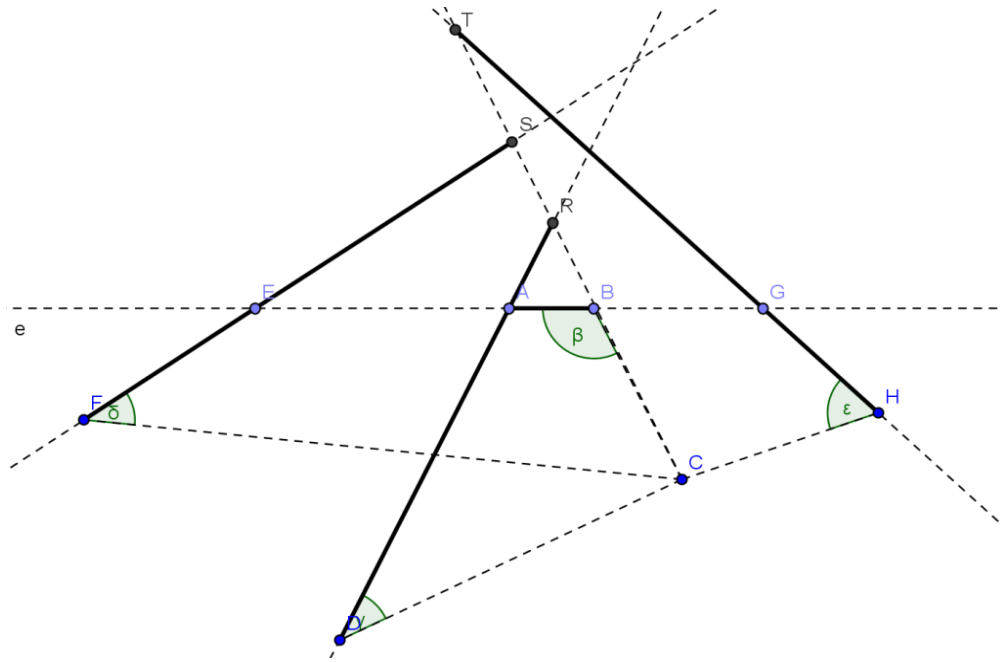


Ilustración 3: puntos de intersección nombrados por Descartes en el problema de Pappus.

A partir de los datos que proporciona el problema, se encuentra que los triángulos ARB, DCR, ESB, CSF, BGT y TCH son conocidos, por lo que Descartes los nombra y establece, introduciendo un parámetro z , las siguientes razones así:

$$\text{I. } \frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}.$$

$$\text{II. } \frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}.$$

$$\text{III. } \frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}.$$

$$\text{IV. } \frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}.$$

$$\text{V. } \frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}.$$

$$\text{VI. } \frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}.$$

De I y $AB = x$, se tiene $BR = \frac{bx}{z}$.

Teniendo en cuenta que $BC = y$, al calcular $CR = BC + BR$ se tiene $CR = y + \frac{bx}{z}$.

En este caso estamos tomando a B entre C y R . Descartes aclara (*Geometría*, págs. 31-32) que si fuera R el que estuviera entre C y B , entonces $CR = y - \frac{bx}{z}$. Así mismo, si C estuviera entre B y R , entonces tenemos $CR = -y + \frac{bx}{z}$. La asignación que establece Descartes entre segmentos con cantidades, en la que involucra cantidades negativas, deja ver una idea implícita de orientación vinculada a magnitud. Esta idea no solo se ve en este momento histórico, más adelante veremos que Wallis se apoya en esta para asignar números a puntos en la recta.

Continuando con la demostración, se tiene que de II y el anterior resultado, se tiene que

$$CD = \frac{CR}{y} + \frac{bcx}{z^2}$$

Tomando $EA = k$ se tiene que $EB = k + x$.

De III se tiene $BS = \frac{dk+dx}{z}$ y $CS = BS + BC$, de donde $CS = \frac{dk+dx}{z} + y = \frac{dk+dx+zy}{z}$.

Con el resultado anterior y IV, se tiene $CF = \frac{e}{z} \left(\frac{dk+dx+zy}{z} \right)$, calculando se tiene $CF = \frac{e}{z}y + \frac{dex}{z^2} + \frac{dek}{z^2}$.

Tomando $AG = l$ se tiene que $BG = l - x$. (Teniendo en cuenta que en este caso A está entre B y G), de V se tiene que $BT = \frac{fl+fx}{z}$ entonces $CT = CB + BT = \frac{zy+fl-fx}{z}$.

Partiendo de VI y el resultado anterior, se tiene $CH = \frac{CT \cdot g}{z} = \frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$.

Si se reemplazan todos estos valores en la condición que cumplen los puntos que pertenecen al lugar geométrico del problema de Pappus, se obtiene:

$$CD.CF = k(CS.CH)$$

que corresponde a la ecuación cuadrática general:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0 .$$

Aunque en el caso de Descartes el término F se considera nulo, como consecuencia del proceso de construcción que obliga a que las curvas pasen siempre por el origen. Esta expresión analítica corresponde al lugar geométrico que resuelve el problema de Pappus de manera general. Se trata de un objeto radicalmente diferente a los objetos euclidianos. Esta a su vez, contiene como casos particulares todas las soluciones de las cónicas de Apolonio.

El trabajo de Descartes agota la geometría clásica y deja en evidencia un nuevo método que asocia ecuaciones a curvas, lo que permite estudiar la naturaleza de las curvas como objetos de carácter algebraico, además el objeto curva algebraica es epistemológicamente distinto de la geometría euclidiana a pesar de que se ha construido en el campo conceptual de ella.

La geometría clásica, como se detalla más adelante, les presta a las matemáticas en general un cúmulo de herramientas y resultados que estimulan la imaginación, el mismo Descartes la usa como instrumento para construir lo que a la postre se convierte en su mayor aporte, el objeto curva algebraica. En particular, de la geometría clásica emplea la teoría general de las magnitudes y el teorema de Tales (teoría euclidiana de la proporcionalidad). Que Descartes apele a la geometría euclidiana es un asunto muy importante, filosófica y epistemológicamente, para la enseñanza. Él usa la geometría en el caso de la construcción del objeto que finalmente

le permite dar un tratamiento más general a los procedimientos euclidianos y superar varios obstáculos de los libros aritméticos de los *Elementos*, como por ejemplo, el producto aritmético de magnitudes que Euclides definía como un área, las ambigüedades euclidianas en la teoría de las razones y proporciones, reivindica el carácter epistemológico esencial del teorema de Tales en la construcción de la ecuación general de segundo grado, etc.:

Descartes no solamente resuelve el problema de Pappus para el caso más general, sino que emplea un enfoque radicalmente nuevo que le permite introducir las curvas algebraicas y estudiar su naturaleza como objeto distinto a las curvas euclidianas. En donde la solución clásica del problema se reclamaba de una cónica, Descartes impone un nuevo objeto, la curva algebraica (Giusti, 2000). Apolonio y Pappus exhiben construcciones singulares para casos particulares, pero la solución general está fuera del alcance de la geometría clásica. Al resolver el problema de manera completa, Descartes renueva la idea de lugar geométrico. La solución cartesiana impone sustituir la curva como construcción por la curva como ecuación. (Arboleda, 2012, pág. 4)

Aunque con el trabajo de Descartes se salvan grandes obstáculos, como los que se mencionaron anteriormente, ni él ni sus contemporáneos consideraron los números negativos abiertamente. Con respecto a este tema, se profundizará en otro apartado.

La geometría analítica vino a imponerse después de la invención del cálculo infinitesimal con la propuesta de Newton, es decir, 67 años después (hacia el año 1704) Newton utilizó de manera sistemática la geometría analítica para la clasificación de las curvas planas cúbicas, la cual fue publicada como uno de los apéndices de su *Óptica* (Newton, 1704).

1.5 El sistema coordenado cartesiano

En el problema de Pappus se puede evidenciar un sistema de coordenadas intrínseco; Descartes designa como x al segmento AB y como y al BC (*Ilustración 4*), además los nombra como los segmentos referenciales para resolver el problema; es así como forma un sistema de coordenadas oblicuo en el que solo tienen lugar cantidades positivas porque no hay cambio de orientación de segmentos. Es claro que el sistema de coordenadas que incorpora Descartes difiere del que actualmente se usa, lo que sí se debe reconocer es que deja sentadas las ideas para establecer el actual sistema de coordenadas. Como se pudo notar en la resolución del problema de Pappus, Descartes asigna letras $x, y, a, b, c, \dots$ a segmentos geométricos, más no las trabaja como números, sino que siguen siendo magnitudes geométricas a las que les fijó un literal.

Para Descartes tampoco tiene sentido hablar del punto de coordenadas $(0,0)$, ya que no estaría asociada a ninguna magnitud; además el sistema de coordenadas estaba asociado a cada curva en particular para estudiar sus propiedades, es decir, no contaba con un sistema de coordenadas referenciales independientes de la curva a representar gráficamente.

Las coordenadas cartesianas rectangulares con las que se cuenta actualmente son la herramienta por la que la geometría analítica cobra sentido, ya que es la que permite expresar la relación álgebra-geometría; además, tienen intrínseca una idea esencial de continuidad que vale mencionar:

En la identificación de cada punto del plano con un par ordenado (x, y) de números reales que provienen de la proyección ortogonal en cada uno de los ejes x y y respectivamente, se está asumiendo, en primer lugar, que la recta está hecha

de puntos, y que cada punto se identifica con un número real. En segundo lugar, se presume que el plano también está formado por puntos y cada punto se identifica con una pareja de números reales. En este sentido, el fundamento de un sistema de coordenadas radica en el hecho de que asume el continuo geométrico como hecho de puntos; esto es algo que no debemos olvidar si deseamos ir al fondo en el significado y valor matemático de los sistemas de coordenadas (Recalde, 2013, pág. 18).

El uso de los ejes ortogonales como se tienen actualmente se fue imponiendo como una herramienta necesaria en la ubicación de números asociados a puntos. El primer uso de coordenadas negativas se atribuye a Isaac Newton (1642-1727) en una colección de figuras y gráficos de los polinomios de tercer grado de su libro *Enumeratio lineari tertii ordinis* (Newton, 1704). Newton utilizó ejes perpendiculares y además incluyó cantidades positivas y negativas. De hecho, en algunas de las figuras utiliza la letra mayúscula *X* para nombrar el eje horizontal, la letra mayúscula *Y* para el eje vertical y la letra mayúscula *O* para que designar el punto de intersección de ambos ejes. Aunque la autoría de Newton con respecto al sistema de coordenadas se ha puesto en duda, pues al parecer en la traducción en inglés hay gráficas que difieren del tratamiento que realmente dio Newton al sistema de coordenadas, al revisar la edición en latín encontramos diferentes gráficas que corresponden a un manejo de sistemas de coordenadas tal como se había mencionado. Algunas de las gráficas que se encuentran en su obra escrita en latín son las siguientes:

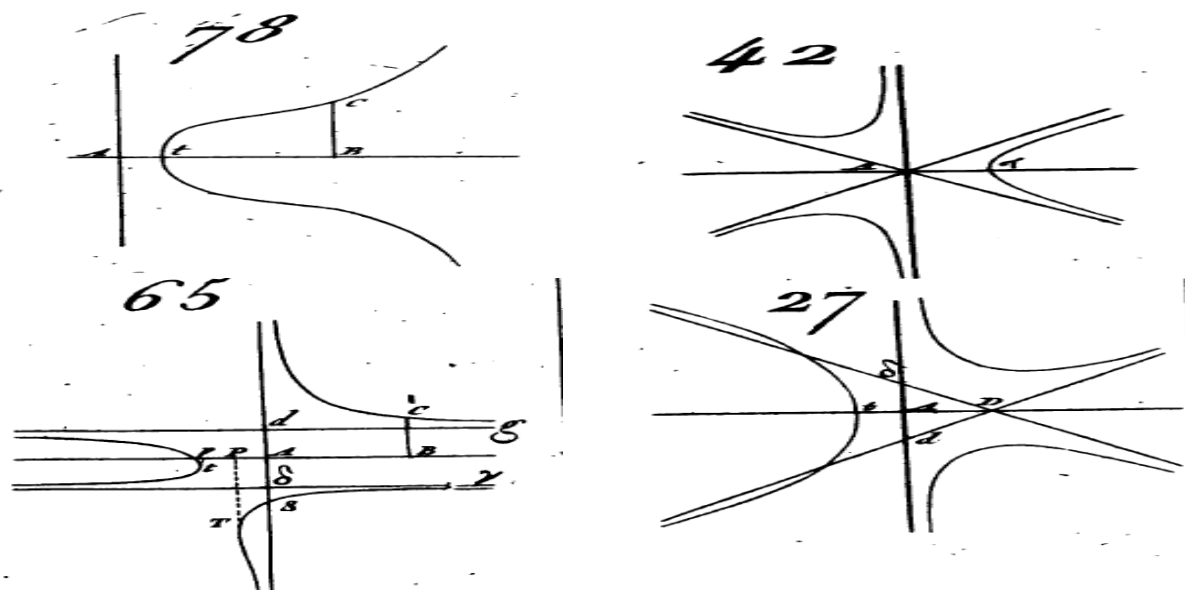


Ilustración 5: primer uso de coordenadas negativas

Recuperado de (Newton, 1704, p. 221-230)

Vectores y números complejos

En este apartado de nuestro análisis se destaca que, a partir del interés de establecer métodos para resolver ecuaciones de tercer grado por medio de radicales, se encuentran con las raíces negativas e imaginarias; es decir, los matemáticos se enfrentaron con cantidades que no se podían asociar a segmentos, este hallazgo matemático tropieza con el método que planteó Euclides y, que, por muchos siglos, fue el paradigma de demostración en matemáticas. Aun así, el concepto de número imaginario logra superponerse al paradigma y encuentra su lugar a través de su representación geométrica que, tal como se mostrará en este apartado, termina dando lugar al concepto de vector, y, más adelante, a casos particulares de espacios vectoriales.

En el álgebra lineal el concepto de vector adquiere su significado más general. Esto es debido al concepto central del álgebra lineal (el de “espacio vectorial”), puesto que todo elemento de

un espacio vectorial es llamado vector, sin importar su naturaleza en otros contextos matemáticos. Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^2$ es un “vector”, porque pertenece al espacio vectorial P_2 (espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual dos). Se mostrará en adelante el surgimiento del concepto de vector algebraico entendido como una n-upla de números y su estrecha relación con el desarrollo de la noción de vector geométrico. Este relato inicia con el surgimiento de las cantidades negativas, los números complejos y sus representaciones, nociones que lleva al concepto de vector geométrico y algebraico.

1.6 El surgimiento de los números complejos, una mirada partiendo de lo algebraico.

La aceptación de los números negativos y de las raíces negativas cobra un papel importante en la evolución de la geometría. Es a partir de los esfuerzos de representar tanto los números negativos como las raíces negativas en forma geométrica que surge el concepto de vector geométrico. Se señalará el papel de Cardano, Wallis, Wessel, Gauss y Hamilton en relación con a la emergencia de vectores en el plano y el espacio

Cardano no sólo trabajó en la resolución de la cúbica; también consideró varias formas de ecuaciones cuadráticas, como, por ejemplo, $x^2 + px = q$, $px - x^2 = q$, $x^2 = px + q$ haciendo uso de números negativos. Un ejemplo de ello es el siguiente problema:

Si alguien le pide a usted dividir 10 en dos partes, una que multiplicada por la otra produzca 30 o 40, es evidente que esta clase de preguntas es imposible. No obstante, vamos a resolverla de la siguiente manera. (Traducción en ingles de 1968 de la obra en latín de Cardano, 1945, Capítulo XXXVII)

Cardano se enfrenta a una solución imposible que lo conduciría a partir de procedimientos algebraicos a la raíz cuadrada de un número negativo. Cardano continúa afirmando que:

Esto, sin embargo, es más cercano a la cantidad que es verdaderamente imaginaria (*entidades sofisticadas*) ya que las operaciones no se pueden realizar con ella como con un número negativo puro, ni como en otros números. ... Esta sutileza resulta de la aritmética de que este punto final es como he dicho tan sutil como inútil. (Cardano, 1993)

En la resolución de algunas ecuaciones cúbicas, en las que propone un interesante método de resolución, también se encontró con números negativos; para las ecuaciones cúbicas que no tenían el término cuadrático de la forma:

$$x^3 + bx + c = 0 .$$

Estableció un método para reducir el término cuadrático y reescribirlas como una de las formas que se vieron anteriormente. Cardano la transforma en una ecuación equivalente que no contenga el término cuadrático a partir de la sustitución:

$$x = y - k .$$

Reemplazando esta igualdad en la ecuación general $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene:

$$(y - k)^3 + a(y - k)^2 + b(y - k) + c = 0 .$$

Haciendo procedimientos algebraicos:

$$y^3 - 3y^2k + 3yk^2 - k^3 + ay^2 - 2ayk + ak^2 + by - bk + c = 0 .$$

Reorganizando:

$$y^3 + y^2(-3k + a) + y(3k^2 - 2ak + b) - k^3 + ak^2 - bk + c = 0.$$

Haciendo $-3k + a = 0$ se obtiene $k = \frac{a}{3}$ y se llega a la ecuación:

$$y^3 + y\left(3\frac{a^2}{3^2} - 2a\frac{a}{3} + b\right) - \frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^2} - b\frac{a}{3} + c = 0,$$

la cual no tiene término cuadrático.

Haciendo:

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad y \quad q = -\frac{2a^3}{27} - \frac{ba}{3} + c,$$

la ecuación anterior:

$$y^3 + py = q,$$

que corresponde a una ecuación cúbica ya conocida.

Cardano enriquece su demostración con varios ejemplos en los que reduce el término cuadrático; a continuación, se presenta uno de ellos:

Un oráculo le ordenó a un príncipe construir un edificio sagrado cuyo espacio debería ser de 400 cubits, del cual lo largo debe ser seis más que lo ancho y lo ancho tres más que la altura. Se deben encontrar estas cantidades. (Rascón, 2003, pág. 50)

Si se llama y a la altura, entonces se tendrá:

$$\text{Ancho: } y + 3 \quad \text{largo: } (y + 3) + 6,$$

de donde se tiene la ecuación:

$$y(y + 3)(y + 9) = 400,$$

que resulta siendo una ecuación cúbica:

$$y^3 + 12y^2 + 27y = 400.$$

Aplicando el procedimiento visto para eliminar el término cuadrático, se hace:

$$y = x - k, \text{ donde } k = \frac{a}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Reemplazando:

$$(x - 4)^3 + 12(x - 4)^2 + 27(x - 4) = 400,$$

finalmente se llega a la ecuación cúbica:

$$x^3 = 380 + 21x,$$

que corresponde a una ecuación del caso 2 (página 29) planteado por Cardano y que tiene como solución:

$$x = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}},$$

De aquí se concluye que una de las raíces es:

$$y = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}} + 4.$$

A continuación, se presenta otro de los problemas resueltos por Cardano que corresponde, en términos modernos, a resolver la ecuación:

$$x^3 + 26x = 12x^2 + 12,$$

Reduciendo el término cuadrático con el método planteado por Cardano, haciendo $x = y + 4$, corresponde a la ecuación:

$$x^3 = 22x + 36 ,$$

de la cual Cardano afirmó que:

Por lo tanto, habrá tres soluciones, la primera de las cuales es $\sqrt{19} + 1$ y es verdadera; la segunda es falsa y es $-(\sqrt{19} - 1)$; y la tercera es también falsa y es 2. Suma estas individualmente a la tercera parte del coeficiente del cuadrado, y tendrás tres soluciones las cuales son: (1ª) $5 + \sqrt{19}$; (2ª) $5 - \sqrt{19}$; (3ª) 2 (Cardano, 1993).

Esta afirmación permite ver que, aunque Cardano no consideraba las soluciones negativas como válidas, en algunas situaciones se encontró en su camino de resolución con estas y las manipuló, llegando finalmente a resultados admitidos a partir de sus juicios. Es importante notar que en el trabajo de Cardano las operaciones que realizaba estaban respaldadas en una relación que había encontrado entre las raíces y los coeficientes de la ecuación: de esto se evidencia que el coeficiente del cuadrado, en los tres ejemplos en los cuales hay tres soluciones para la cosa (término que se asocia a la variable), es siempre la suma de las tres soluciones (Cardano, 1993).

Tomando las raíces de la anterior ecuación, lo que plantea Cardano es:

$$(5 + \sqrt{19}) + (5 - \sqrt{19}) + (2) = 12 .$$

A modo de paréntesis, es importante notar que esta relación marca el inicio de una forma de entender el problema de resolución de ecuaciones a partir del estudio de sus coeficientes; esta relación entre las raíces de una ecuación y el coeficiente del término cuadrático es un hallazgo remarcable no sólo por el gran movimiento matemático que se gesta, sino también porque se

hace utilizando un lenguaje matemático limitado; comparado con el actual. La relación existente entre las raíces de la ecuación de grado tres y el coeficiente del término cuadrático es un resultado que luego se extiende a los restantes coeficientes de la ecuación por medio del concepto de polinomios simétricos, concepto que hasta hoy prevalece. Así mismo se verá un poco más adelante que Descartes también establece una relación similar y hace un análisis de los signos de los coeficientes y la relación con el número de raíces de una ecuación, llegando a establecer propiedades muy próximas a lo que después se llamaría el Teorema Fundamental del Álgebra.

1.7 Aproximación de Bombelli a las raíces negativas.

Continuando con el rastreo del tratamiento y la operación entre números negativos y de las raíces negativas, como base para el surgimiento de los números complejos, se encuentra a Rafael Bombelli (1526-1573), matemático italiano que siguió muy de cerca el trabajo de Cardano y Tartaglia. En su obra *El álgebra*, escrita en 1572, Bombelli presenta una serie de reglas para el manejo de cantidades negativas y positivas:

Más veces más hace más

Menos veces menos marcas más

Más veces menos hace menos

Menos veces más hace menos.

Note que estas reglas son las que actualmente llamamos la ley de los signos para la multiplicación de números enteros. Con respecto a las raíces negativas afirmó qué:

... Este tipo de raíz cuadrada tiene diferentes operaciones aritméticas de los demás y una denominación diferente ... Pero lo llamaré 'más de menos' cuando se agregue, y cuando se va a sustraer llamo "menos de menos", y esta operación es más necesaria. ... Esto parecerá a muchos más artificiales que reales, y sostuve la misma opinión, hasta que encontré la demostración geométrica. (Bombelli, 1572)

Bombelli también examina los diferentes casos que planteó Cardano, particularmente el caso 3 (página 30), donde las soluciones podían ser raíces negativas. Bombelli trabajó con raíces negativas operándolas como cantidades, esto se puede observar en el siguiente ejemplo:

Si se tiene la ecuación que corresponde al caso 2 (página 29):

$$x^3 = 15x + 4 ,$$

al aplicar el método que se presentó anteriormente (página 29), se obtienen las expresiones:

$$u + v = 4 .$$

$$u \cdot v = \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 125 .$$

Al aplicar el algoritmo que vimos en la página 29 de este documento para el caso 2, se tiene que:

$$u = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{y} \quad v = 2 - \sqrt{-121} ,$$

Teniendo en cuenta que una de las soluciones es:

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} ,$$

se obtiene:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} .$$

De donde Bombelli hace un interesante análisis, intentando darle una nueva forma a esta expresión. Se plantea encontrar dos números a y b tales que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} .$$

Elevando al cubo:

$$\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \right)^3 = (a + \sqrt{-b})^3 ,$$

se obtiene:

$$2 + \sqrt{-121} = a^3 + 3a^2\sqrt{-b} + 3a(\sqrt{-b})^2 + (\sqrt{-b})^3 ,$$

de lo anterior se deduce que:

$$2 = a^3 - 3ab \quad \text{y} \quad \sqrt{-121} = 3a^2\sqrt{-b} + (\sqrt{-b})^3 ,$$

en donde:

$$\sqrt{-121} = (3a^2 - b)(\sqrt{-b}) .$$

De manera análoga, se obtiene:

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b} .$$

Sin perder el objetivo, se calcula el producto:

$$\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \right) \left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \right) = (a + \sqrt{-b})(a - \sqrt{-b}) .$$

$$\sqrt[3]{125} = a^2 + b .$$

Remplazando en $2 = a^3 - 3ab$, se tiene:

$$2 = a^3 - 3ab(5 - a^2) ,$$

$$2 = a^3 - 15a + 3a^3 ,$$

$$2 = 4a^3 - 15a .$$

Ecuación cúbica con solución real $a = 2$.

Finalmente se tiene que $b=1$, de donde se encuentra la igualdad:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

Y

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} .$$

Luego la solución de $x^3 = 15x + 4$ que se tenía inicialmente escrita como:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} ,$$

se puede reescribir así:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} ,$$

que corresponde finalmente a:

$$x = 4 .$$

Este procedimiento deja notar la habilidad de Bombelli para operar a pesar de no tener conciencia de la naturaleza conceptual del objeto ni de la operación. Aunque para ese momento

no existía el objeto matemático “número complejo”, si se empiezan a crear unas condiciones de posibilidad para el avance en la prefiguración del objeto matemático. Este aspecto se retomará en el capítulo 3 a partir de una mirada didáctica.

1.8 Descartes y las raíces negativas.

Cardano ya había señalado relaciones entre las soluciones de una ecuación y sus coeficientes; ahora Descartes establece una “regla de signos” por medio de la cual se puede estimar el número de soluciones reales de una ecuación y en donde se hace evidente el encuentro con números negativos.

La propiedad que establece Descartes es: el número posible de las raíces positivas de una ecuación es igual al número de cambios de signos en los coeficientes de los términos o menor que los cambios de signo por un número par. A manera de ejemplo, se toma la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 - x - x^4 - 2 = 0 .$$

Ahora, para calcular cuántas soluciones positivas tiene, se ordenan los términos de la ecuación en orden descendente con respecto a los grados de los exponentes:

$$-x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 2 = 0 ,$$

Se observa cuántas variaciones de signo se encuentran:

$$\overset{\curvearrowright}{-x^4 + x^3} + 3x^2 - x - 2 = 0 .$$

Note que en este caso hay dos variaciones de signo, lo que quiere decir que esta ecuación tendrá dos soluciones positivas o ninguna solución positiva (este último resultado se obtiene de restar un número entero menor al número de soluciones que ya se tiene).

Así mismo se puede determinar el número de soluciones negativas, sustituyendo x por $-x$ y realizando el mismo proceso. En este caso:

$$-(-x)^4 + (-x)^3 + 3(-x)^2 - (-x) - 2 = 0,$$

Simplificando:

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0 .$$

Se observa que hay dos variaciones de signos, lo que significa que tendrá dos soluciones negativas o ninguna.

Finalmente, a través de esta técnica se sabe, por ejemplo, que la ecuación $x^3 + 3x^2 - x - x^4 - 2 = 0$ tiene 4 soluciones reales (dos negativas y dos positivas) o que tendrá cuatro soluciones complejas a las que Descartes llamaba imaginarias. Descartes era consciente de las carencias que tenía su método y aportó un poco más en esta línea, afirmando que:

Ni las verdaderas raíces ni las falsas son siempre reales; algunas veces son solamente imaginarias; esto es, mientras que siempre podemos concebir tantas raíces para cada ecuación de la forma como ya las he asignado, no siempre existe una cantidad definida que corresponda a cada raíz así concebida. De esta manera, si bien podemos concebir que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tiene tres raíces, solamente existe una raíz real, 2, mientras que las otras dos, de cualquier manera que las incrementemos, disminuyamos, o las multipliquemos de acuerdo con las reglas ya expresadas, permanecen imaginarias. Traducido de (Descartes, 1954, pág 83).

Descartes reconoce que en el análisis de las raíces de una ecuación se ha encontrado con unos objetos matemáticos que para su época aun no estaban definidos: raíces falsas (los números negativos) y raíces imaginarias (raíces de números negativos), la correspondencia que establece entre el grado del polinomio y el número de raíces empieza a generar en los matemáticos una nueva perspectiva de las relaciones que se pueden encontrar entre la ecuación y sus raíces. Este aporte va en dirección a lo que después se configuraría como el Teorema Fundamental del álgebra.

En la obra la *Geometría* también tiene un acercamiento a la construcción de raíces de cantidades positivas:

Para realizar la construcción inicia definiendo un segmento de recta, llamémoslo GH :



El problema es construir una longitud igual a $\sqrt{GH}$.

Descartes extendió GH hasta F , donde FG es el segmento unidad, es decir tiene longitud unitaria:

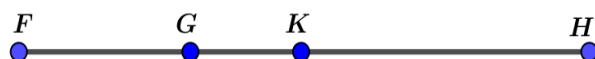


El Segmento FG tiene que ser también de una longitud dada, lo que establece la longitud o escala de la construcción. Es importante notar que, en la propuesta dada por Descartes para las construcciones geométricas, define una operatividad para las magnitudes semejante a la de los números y para esto introduce una nueva magnitud, la cual llamó *unidad*. Ésta le permitió

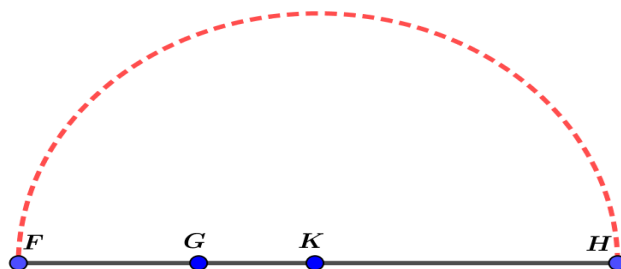
trasladar las operaciones de los números al campo de las magnitudes, como se evidencia en esta construcción. Así,

$$FH = FG + GH = 1 + GH.$$

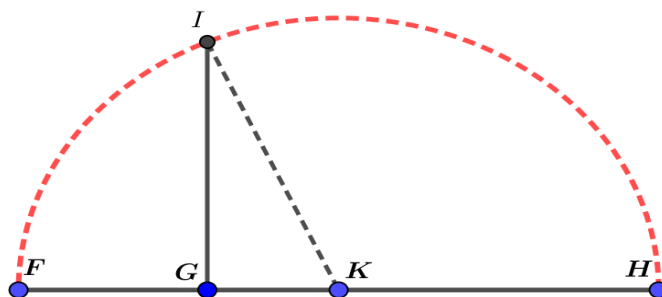
Luego, utilizando el conocido método de bisección de un segmento para ubica el punto medio de FH al que llamó K :



Ahora, tomando como centro K y radio $KH = FK$ trazo el semicírculo FIH .



Finalmente levanta una perpendicular por G que interseca al semicírculo en I (por lo que IK es también un radio).



A partir de lo anterior se deduce:

$$FG + GH = 2IK$$

$$1 + GH = 2IK,$$

$$\frac{1}{2}(1 + GH) = I.$$

También

$$FG + GK = IK,$$

$$GK = IK - FG = IK - 1 = \frac{1}{2}(1 + GH) - 1,$$

$$GK = \frac{1}{2}(GH - 1).$$

Ahora, por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$(IG)^2 + (GK)^2 = (IK)^2,$$

$$(IG)^2 + \frac{1}{4}(GH - 1)^2 = \frac{1}{4}(1 + GH)^2,$$

$$(IG)^2 = \frac{1}{4}[(1 + GH)^2 - (GH - 1)^2] = G.$$

Por lo tanto, $IG = \sqrt{GH}$.

1.9 Prefiguración del vector geométrico: La obra Wallis

La construcción del objeto vector se dio en medio de la consolidación de los números complejos y su necesidad de representarlos en el campo de la geometría. Después de los acercamientos de Descartes, una de las primeras representaciones geométricas de números negativos y de raíces de números negativos fue propuesta por el matemático inglés John Wallis

(1616-1703), en su obra titulada *A Treatise of álgebra* (Wallis, 1685). Para aquel momento Wallis no solo había estudiado la obra de Descartes, sino que se había replanteado el trabajo de éste con respecto a la solución de la ecuación de cuarto grado; además ya llevaba un largo tiempo discutiendo con otros matemáticos, como John Collins (1625-1683), sobre algunos problemas geométricos que daban lugar a este tipo de números. En uno de sus escritos Collins menciona el problema que había trabajado con Wallis:

Wallis había analizado un triángulo de lados 1 y 2 con base de 4. Wallis mostró que, si uno simplemente avanza a través de los cálculos algebraicos formales, entonces los dos segmentos de la base resultan reales, aunque el triángulo sea imposible de construir, Collins continúa afirmando que: De haber continuado él habría encontrado que la perpendicular debía ser imaginaria, lo cual había revelado la imposibilidad (Nahin, 1998, pág. 64).

Esta cita señala que al parecer Wallis abandonó el estudio geométrico cuando no tenía una interpretación física completamente clara. Notemos que triángulo no se puede construir porque no cumple con la desigualdad triangular. Wallis estuvo muy cerca de establecer una conexión entre el álgebra y la geometría a través de los números imaginarios.

En el capítulo LXVI de su obra, Wallis hace notar que los números negativos tenían un lugar claro en el espacio físico y que la desconfianza con la que los matemáticos lo abordaban no permitía darles este lugar. Es quizás ante la insistente aparición de los números negativos en la solución de diferentes problemas en las matemáticas, que Wallis se esfuerza por darles un lugar en el mundo físico:

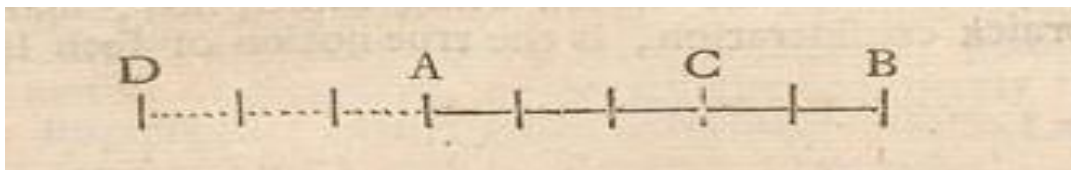
En cuanto a la notación algebraica, importa la cantidad a la izquierda de la nada: sin embargo, cuando se trata de aplicaciones físicas, denota una cantidad tan real como si fuera el signo+; pero debe interpretarse en un sentido contrario (Wallis, 1685, pág. 265)

En esta cita, Wallis explica cómo representar los números negativos en la recta, considerándolos como cantidades contrarias a las cantidades positivas y ubicándolas antes de la “nada” (el punto cero u origen, en términos modernos). Aunque para un lector moderno, la definición de Wallis de número negativo resulta obvia o muy básica, para su época es un gran avance, ya que está dotando de interpretación física las cantidades negativas.

Hemos sido testigos, lo largo de la historia, de cómo los matemáticos esquivaron la interpretación física de los números negativos por los paradigmas planteados en la geometría euclidiana. Wallis enriquece su explicación presentando una serie de ejemplos que relacionan operaciones aritméticas con movimientos en la recta; estos ejemplos sustentan el carácter geométrico del que estaba dotando a los números negativos. A continuación, algunas observaciones traducidas de su obra original:

Supongamos que un hombre ha avanzado de A a B, 5 yardas, y luego se devuelve 2 yardas (de B a C), si al llegar a C se le pregunta, ¿cuánto avanzó (en toda la marcha)? Yo encuentro que está avanzado 3 yardas. Pero si, habiendo avanzado 5 yardas a B, de allí retrocede 8 yardas a D; Y luego se le preguntó cuánto avanzó cuando estaba en D: digo -3 yardas. Es decir, está avanzado 3 metros a la izquierda que nada. (Wallis, 1685, pág. 265)

La imagen que provee Wallis es la siguiente:



*Ilustración 6: Carácter geométrico de los números negativos.
Recuperado de (Wallis,1685)*

Estos ejemplos, donde se hace uso del movimiento y de la intuición, son muy similares, por no decir iguales, a los ejemplos que se encuentran en algunos textos actuales para explicar la inclusión de los números negativos en la recta. Es importante distinguir que, Wallis trata a las cantidades negativas asignando una magnitud, es decir, asocia una medida de cantidad física a segmentos de la recta, mas no ubica números negativos como objetos (puntos) en la recta; establece una correspondencia entre magnitudes determinadas a partir del origen con segmentos de recta. Actualmente, se puede evidenciar una prefiguración del concepto de vector.

Cabe destacar el interés de Wallis por el estatuto conceptual de las cantidades negativas, pues a pesar de darles una interpretación geométrica como segmentos de sentido opuesto a los positivos, no esquivó el uso de los números negativos. Este hecho marca una diferencia en el trabajo de Descartes, quien no apeló al uso de números negativos en su análisis de curvas algebraicas.

Adicional a esto, Wallis presenta la operación (suma o resta) asociada a los movimientos que genera en la recta. Resulta interesante que, actualmente, para la enseñanza de los números negativos en muchos de los casos se utilice una metodología similar a la que plateó Wallis en su época.

Para Wallis, así como se podían representar números negativos en la recta, también había lugar para la representación de las raíces negativas. El método de representación propuesto consiste en simbolizar la parte real de un número complejo sobre la recta horizontal, teniendo en cuenta que si es negativo estará a la izquierda del origen y si es positivo a su derecha. A partir del número ubicado en la recta se traza un segmento perpendicular que simboliza la parte imaginaria multiplicada por $\sqrt{-1}$.

La siguiente imagen corresponde a lo explicado:



Ilustración 7: Representación de raíces negativas

Cabe preguntarse por la dimensionalidad ausente que tiene la representación de Wallis. Para la época, el método de las coordenadas propuesto por Descartes ya cumplía aproximadamente 40 años y, al parecer, no se había reconocido, (al menos esto deja ver la representación de Wallis).

1.10 Cantidades imaginarias: Wessel.

Después de más de 100 años de la propuesta de Wallis, el problema de la representación de los números complejos es abordado por Casper Wessel (1745-1818), un agrimensor que se enfrentaba a problemas prácticos asociados al levantamiento de planos donde, por supuesto, hacía uso de la geometría. Su única obra fue *Sobre la representación analítica de la dirección*:

un acercamiento (Wessel, 1897), dado su poco reconocimiento como matemático y el lenguaje en que fue escrita, fue olvidada por cerca de 100 años.

Wessel inicia presentando el objetivo de su obra:

El presente ensayo tiene por objeto la cuestión de saber cómo la dirección debe representarse analíticamente; es decir, cómo se debía expresar los segmentos de rectas si uno quisiera, por medio de una ecuación única entre un solo segmento desconocido y otros segmentos dados, encontrar una expresión representando a la vez la longitud y la dirección del segmento desconocido puedan ser expresadas. (Wessel, 1897, pág. 1)

Se puede observar que Wessel tenía como objetivo determinar la forma de representar la dirección de un segmento analíticamente.

La interpretación de Wessel sobre lo que actualmente llamamos *Número Complejo* fue muy práctica y solo difiere en la notación con la representación actual; veamos:

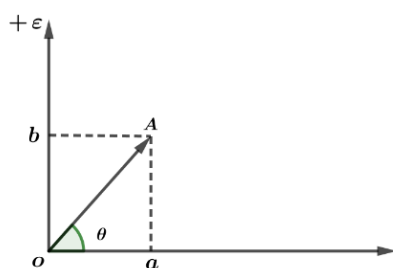


Ilustración 8: Representación de Wessel de lo que actualmente llamamos número complejo.

Recuperado de (Monroy, 2011, p. 22)

Wessel construye su plano complejo trazando dos rectas perpendiculares, donde el punto de intersección lo llama origen. La unidad en la recta horizontal es +1 y en la vertical +ε, en una interpretación moderna corresponde a $\sqrt{-1}$ (Euler es quien introduce el símbolo i para denotar

la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$). Así, lo que actualmente llamamos como número Complejo de la forma $a + \varepsilon b$, era representado por un segmento de recta que une al origen O con el punto A.

En esta perspectiva, cualquier línea en un plano puede ser representada analíticamente de la siguiente forma:

$$a + \varepsilon b = z(\text{Cos}\theta + \varepsilon \text{Sen } \theta)$$

Donde z corresponde a la longitud del segmento $\overline{OA}$.

Previo a estos importantes resultados, Wessel describe en su artículo las operaciones adición, y multiplicación de segmentos; ésta propuesta cobra gran importancia en nuestro trabajo porque, como se verá, es una aproximación de lo que se llama vector geométrico: si se tienen dos segmentos dirigidos, ambos sobre el eje x , la suma corresponde al segmento resultante de ubicar el punto inicial de uno de los segmentos en el punto final del otro.

En términos algebraicos, Wessel propone la suma muy similar a lo que ya había presentado Wallis: si se tienen dos segmentos (a, b) y (c, d) la representa como

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

El producto de segmentos lo define basado en dirección contraria a las manecillas del reloj a partir del producto con los operadores, así:

$+1$ *corresponde a una rotación de 0°*

$+\varepsilon$ *corresponde a una rotación 90°*

-1 *corresponde a una rotación de 180°*

A partir de esto establece las siguientes reglas:

$$(+1)(+1) = +1$$

$$(+\varepsilon)(+1) = +\varepsilon$$

$$(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon$$

$$(-\varepsilon)(-\varepsilon) = +1.$$

1.11 Los cuaterniones: Consolidación del concepto de vector.

William Rowan Hamilton (1805-1865) trabajó en replantear las ideas de la teoría de la luz establecidas hasta el momento. En el seno de la física, Hamilton tenía la necesidad de representar rotaciones y movimientos en el espacio tridimensional; por eso se interesó en los trabajos de Argand y sus contemporáneos sobre la representación de los números complejos como vectores en el plano.

Hacia la década de 1820-1830, Hamilton introduce las ecuaciones de conjugación (presentadas por Cauchy), donde una función de variable compleja es representada por dos funciones de variables reales o funciones conjugadas. Actualmente éstas ecuaciones son una condición necesaria para determinar la derivabilidad de una función de variable compleja, en términos modernos se define así (Hamilton, 1853) sea $f(z)$ una función compleja, con $z = a + bi$. Se sabe que $f(z)$ se puede descomponer en suma de dos funciones reales de dos variables u y v , de manera que $f(z) = f(a, b) = f(a + bi) = u(a, b) + iv(a, b)$. Si la función $f(z)$ es derivable en un punto $z_0 = a_0 + ib_0$ entonces deben verificarse las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{\partial v}{\partial a} \quad \text{en} \quad (a_0, b_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = (a_0, b_0) = -\frac{\partial v}{\partial a} (a_0, b_0)$$

A partir de este descubrimiento, Hamilton empezó a considerar los números complejos como parejas de números reales de la forma $a + bi$.

Un aspecto importante por destacar en el trabajo de Hamilton es la forma como aborda y estudia los números complejos y su representación. Como se mostrará a lo largo de este capítulo, para esta época algunos matemáticos como Wallis, Wessel y Gauss, habían propuesto representaciones geométricas para los números complejos, sin establecer propiedades estructurales de sus operaciones, tal como ocurría en el marco de la resolución de ecuaciones donde se operaban y raíces negativas, y manipulaban simbólicamente, Aunque carecían de un significado algebraico (un ejemplo de ello lo vimos en el trabajo de Bombelli). La propuesta de Hamilton parte del interés por establecer propiedades de las operaciones entre números complejos; es evidente el interés de Hamilton por precisar una estructura algebraica para los números complejos:

Me sentía insatisfecho con cualquier postura que no les diera (a los números complejos) desde el principio una interpretación clara y un significado; y deseaba que se hiciera esto, para las raíces cuadradas de los negativos, sin introducir consideraciones tan expresamente geométricas como las que están involucradas en el concepto de ángulo. Afirmación de Hamilton en (Nahin, 1998, pág. 99) .

Al dotar de estructura a un nuevo conjunto de objetos matemáticos se dio un avance sustancial en las matemáticas, poniendo de manifiesto que la naturaleza de las cantidades y, en general, de los objetos matemáticos, no se agotan con una representación simbólica producto

de operarlas o manipularlas, sino que es necesario establecer un universo donde cohabiten y tengan un sentido por encima de su utilización.

Para Hamilton, el álgebra tenía una relación muy estrecha con la física: es en el álgebra donde se materializa toda interpretación geométrica; Hamilton afirmaba que, así como la geometría es la ciencia del espacio y que había encontrado un lugar en las Matemáticas a través de los *Elementos* de Euclides, seguramente el álgebra también tendría un lugar de ciencia en las matemáticas. Esta convicción de la importancia del álgebra, así como de la geometría, lo llevó a establecer conjuntos de números dotados de una estructura algebraica que además tuvieran una representación espacial muy útil para los trabajos en física.

Análogo a la notación de número complejo, Hamilton definió unos números con la forma $P = a + bi + cj$, donde $a, b, c \in R$ pero además que cumplían $i^2 = j^2 = -1$. A estos números los llamó “tripletas”. Para Hamilton $i, j, 1$ eran la base de todas las tripletas, y eran perpendiculares entre sí, como lo eran $1, i$ en el plano complejo.

Hamilton definió operaciones entre tripletas, la suma la definió cómo:

$$(a + bi + cj) + (a^* + b^*i + c^*j) = (a + a^*) + (b + b^*)i + (c + c^*)j$$

Ahora, para definir la multiplicación, estableció la condición que el módulo del producto fuera el producto de los módulos: Si P y P^* son tripletas, entonces: $|PP^*| = |P||P^*|$,

Al efectuarlo resultó un poco confuso:

$$(a + bi + cj)(a^* + b^*i + c^*j) = (aa^* - bb^* - cc^*) + (ab^* + ba^*)i + (ac^* + ca^*)j \\ + (bc^* + cb^*)ij$$

Note que el producto de tripletas no resultaría ser una tripleta pues tiene cuatro componentes $i, j, 1, ij$. En términos geométricos esto significa que el producto se “sale” del espacio tridimensional; de aquí Hamilton concluyó, después de largos intentos fallidos, que para que el producto de tripletas resultara ser otra tripleta, se debía considerar $ij = -ji$, es decir que no conmutaran. Este fue un Resultado sorprendente no solo por romper con los avances que se tenían hasta el momento, sino que daría lugar a nuevas posibilidades, entre ellas al desarrollo de nuevas álgebras como: los cuaterniones, la teoría de extensiones, la teoría de matrices y el álgebra de Boole, entre otras. La decisión de considerar la no conmutatividad estaba rompiendo un paradigma de siglos. Sobre este hecho volveremos una mirada didáctica.

Pero Hamilton se encontró con otro problema: la ley de los módulos para este caso no se cumplía; trabajó en ello a lo largo de 10 años hasta se decidió por la construcción de otros números con una componente más a los que llamó “cuaterniones”. Los cuaterniones son números de la forma $P = a + bi + cj + dk$, donde $a, b, c, d \in R$ y k es unidad imaginaria, que satisface las siguientes propiedades:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk - 1$$

$$k = ij = -j.$$

Hamilton los caracterizó así:

La parte algebraicamente real puede recibir todos los valores contenidos sobre una escala de progresión de números de lo negativo a lo positivo infinitamente; nosotros llamaremos entonces la parte escalar, o simplemente el escalar del cuaternion, y designaremos este símbolo prefijando, a el símbolo del cuaternion, la característica *Scal.*, o simplemente *S.*, cuando no haya confusión para usar esta

última abreviatura. De otro lado, la parte algebraicamente imaginaria, la cual es geoméricamente construida por una línea recta o radio vector. En general, un cuaternion tiene una determinada longitud y dirección en el espacio, puede ser llamada la parte vector, o simplemente vector del cuaternion; y puede ser denotada prefijando la característica *Vect*, o *V*. (Hamilton tomado de Crowe, 1985)

A partir de este momento Hamilton es el primero en definir los términos de *escalar* y *vector*.

Las propiedades establecidas para los cuaterniones resultan similares a las que se tienen actualmente para el producto escalar y vectorial. Veamos algunas de estas propiedades:

- El conjugado de un cuaternion $P = a + bi + cj + dk$ es $P^* = a - bi - cj - dk$.
- El producto entre un cuaternion P y su conjugado P^* corresponde a lo que hoy conocemos como la norma de un vector:

$$PP^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |P|^2 = N(P)$$

- El inverso multiplicativo de un cuaternion es un cuaternion no nulo de la forma:

$$P^{-1} = \frac{P^*}{PP^*}$$

- Análogo a las tripletas, la suma y multiplicación por un escalar, se define componente a componente. La multiplicación se define utilizando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y las reglas que se establecieron entre la base $i, j, 1, k$. El producto de cuaterniones no cumple la propiedad conmutativa. Los cuaterniones son el primer ejemplo de un campo no conmutativo.

- La ley de los módulos que satisfacen los cuaterniones, junto con las propiedades presentadas hacen que, en términos modernos, se consideren los cuaterniones como un espacio vectorial, de dimensión cuatro, sobre los reales, con base $\{i, j, k, 1\}$ lo que además los constituye en un álgebra de división normada.

Hamilton afirma que los cuaterniones son esa poderosa herramienta para describir la realidad. Los últimos años de su vida, se enfocó en las aplicaciones de los cuaterniones a la astronomía, la dinámica y la teoría de la luz. Las rotaciones en el espacio que representan los cuaterniones, son producto de esta asociación entre álgebra, física y geometría. La teoría de los cuaterniones fue adquiriendo tanta fuerza que durante la mitad del siglo XIX se expresaba el cálculo en términos de cuaterniones. Se formaron por un tiempo dos corrientes de estudio la “corriente cuaternionista” y la “corriente vectorial”.

1.11.1 Rotaciones a través de cuaterniones

Para hablar de las rotaciones que propuso Hamilton a partir de los cuaterniones, nos remitimos a un importante texto de carácter académico y que ha sido mencionado como un buen ejemplo de transposición matemática de los resultados de Hamilton: el libro escrito por el matemático escocés Peter Guthrie Tait (1831, 1901) llamado *Elementary Treatise on Quaternions* (Tait, 1873).

Tait sostuvo una relación académica con Hamilton y se dio a la tarea de reescribir su obra, con el objetivo de mostrar la profundidad conceptual de sus resultados, sin la complejidad que presentaba. Intentó mostrar la importancia de los cuaterniones en la física y la geometría y organizar los conceptos de forma sistemática y causal. Es importante además mencionar que

algunos historiadores afirman que el primer capítulo de la obra de Tait bien podría ser un capítulo de un texto actual de análisis vectorial y álgebra lineal.

En el Capítulo I, Tait caracteriza el número $\sqrt{-1}$ como un operador, que se les aplica a las rectas, de rotación de 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Así entonces se presenta el producto de la siguiente manera:

*	1	$\sqrt{-1}$	-1	$-\sqrt{-1}$
$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-1}$	-1	$-\sqrt{-1}$	1

En términos geométricos corresponde a rotar el segmento unitario en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del punto de origen. Con una rotación de un ángulo de 90° se llega al segmento unitario imaginario y realizamos la misma operación repetidamente, se llega al segmento unitario real. De esta forma, en principio, se generarían las cuatro rotaciones:

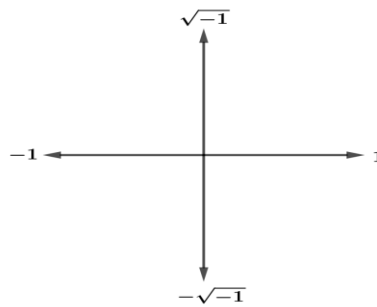


Ilustración 9: Rotación del segmento unitario.

Tait utiliza el concepto de segmento dirigido para representar las cantidades negativas, así como el plano cartesiano para el caso de las cantidades imaginarias. A las raíces negativas las

llamaba raíces imposibles, así como a los números complejos los llamaba números imaginarios. Las actuales designaciones de “número complejo” se le deben a Gauss (1831).

En éste primer capítulo, Tait establece las nociones y definiciones básicas que corresponden a la definición actual de vector geométrico: “Todas las rectas iguales y paralelas son susceptibles de ser representadas por un mismo símbolo, y este símbolo dependerá de tres elementos numéricos. Es bajo esta relación que una recta se denomina vector”. (Tait, 1873, pág. 8)

Así mismo estableció operaciones entre vectores como la suma que actualmente conocemos y la multiplicación de un escalar por un vector. Suma: “Sean A, B, C tres puntos cualesquiera, donde $\overline{AB} = \alpha, \overline{BC} = \beta, \overline{AC} = \gamma$, establezcamos la siguiente relación: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} \leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma$ ” (Tait, 1873, pág. 9), la interpretación geométrica de este resultado es el mismo método del triángulo que hoy utilizamos para sumarlos:

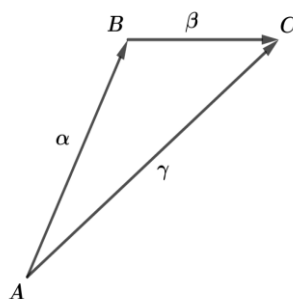


Ilustración 10: Suma de vectores

Para la multiplicación: “Si componemos un número cualquiera de vectores paralelos entre sí, el resultado será un múltiplo de uno de ellos por un número abstracto.” (Tait, 1873, pág. 9)

Un hecho importante en este primer capítulo es la definición que da sobre componentes de un vector: “Un vector cualquiera puede ser descompuesto en tres componentes paralelas a tres vectores dados, no paralelos entre ellos dos a dos ni paralelos a un mismo plano. Esta descomposición no puede hacerse más que de una sola manera.” (Tait, 1873, pág. 13)

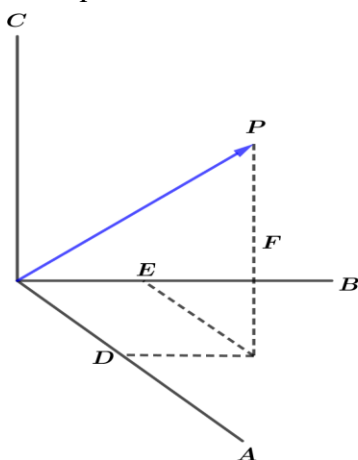


Ilustración 11: Descomposición de un vector en sus componentes

Recuperado de (Tait, 1873, P. 13)

Tait persigue el mismo interés de Hamilton por relacionar sus resultados con la física. En este capítulo define curvas en el espacio utilizando vectores y cálculo diferencial al estilo de Newton y describe la velocidad instantánea en cada punto sobre una curva, además presenta la relación del cálculo vectorial con la física a través del movimiento que le atribuye a los vectores.

1.12 Teorema fundamental del álgebra.

En este análisis histórico se le dio un sitio especial a lo que actualmente se conoce como el Teorema Fundamental del álgebra, el cual, en una de sus versiones más populares, garantiza la existencia de n raíces complejas para un polinomio de grado n con coeficientes reales. Las aproximaciones conceptuales y las distintas demostraciones de este teorema dan como resultado

el posicionamiento de los números complejos como objetos matemáticos; se hace popular su estudio y los intentos naturales de generalización, en esa misma dirección su validación geométrica, desemboca en lo que hoy conocemos como vector algebraico y geométrico.

1.13 Polinomios simétricos.

En medio de la resolución de ecuaciones, Cardano expuso varios ejemplos donde la suma de las raíces de una ecuación de tercer grado era igual al opuesto del coeficiente del término de grado 2 y, en el caso de las ecuaciones de cuarto grado, la suma de estas es igual al opuesto del coeficiente del término de tercer grado. Para el caso del polinomio de tercer grado:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Las raíces x_1, x_2, x_3 de esta ecuación, cumplen que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a. \quad (vii)$$

Para mostrar la validez de su método por radicales, dio ejemplos en muchos casos particulares de la relación anterior y además de los resultados:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \quad (viii)$$

Y

$$x_1x_2x_3 = -c. \quad (ix)$$

Es importante señalar que, Cardano no aceptaba los números negativos y tampoco los números complejos, pero aun así les dio un lugar importante dentro de la teoría de ecuaciones, operó con ellos y abrió camino para que pronto se convirtieran en los objetos matemáticos que actualmente conocemos. La actitud de la práctica de matemáticos como Cardano, de no aceptar

la existencia conceptual de un objeto, pero en todo caso operar con él, es un hecho histórico que tiene implicaciones en la enseñanza, en lo relacionado con el pensamiento operatorio y pensamiento formal. Retomaremos este asunto en el capítulo 2, en nuestro análisis didáctico.

Los aportes sobre la notación realizados por François Viète (1540, 1603) fueron de suma importancia en la consolidación del concepto de polinomios simétricos. Viète muestra, de forma general y a través de símbolos, las propiedades existentes entre las raíces de un polinomio y sus coeficientes.

Los polinomios simétricos se caracterizan por ser invariantes bajo cualquier permutación, Además, si corresponden a las sumas de todos los productos posibles de tamaño k ($k = 1, 2, \dots, n$) de las variables involucradas, se designan como polinomios simétricos elementales. Los polinomios (vii), (viii) y (ix) son los polinomios simétricos elementales de la ecuación de tercer grado. Por ejemplo, si se tiene la ecuación cuadrática:

$$x^2 + ax + b = 0 ,$$

y las raíces de esta ecuación son x_1 y x_2 se puede escribir como:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 .$$

Al multiplicar se obtiene:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 .$$

De donde se encuentra una relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces. Así los polinomios simétricos elementales de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 + x_2 = -a ,$$

$$x_1 \cdot x_2 = b .$$

Con este mismo proceso se pueden encontrar los polinomios simétricos elementales de la ecuación de cuarto grado y se puede generalizar para cualquier ecuación de grado n . En la búsqueda de los polinomios simétricos asociados a una ecuación encontramos un aspecto que muestra una aproximación al Teorema Fundamental del Álgebra y es que no es necesario conocer las raíces, sino garantizar su existencia.

1.13 Aportes de Descartes

En el trabajo de Descartes se encuentran también sustanciales resultados encaminados a establecer una relación entre el grado de la ecuación que modela una curva y las posibles soluciones de ésta. Como vimos en apartados anteriores, Descartes define una propiedad (*Geometría*, 1954): El número de raíces positivas es, a lo sumo, igual al número de variaciones de signos de sus coeficientes, el número de raíces negativas es, como máximo, el número de permanencias de estos signos. Con respecto a este método propuesto por Descartes, no se desconoce el aporte en lo que respecta al desarrollo de ecuaciones, pero desde una mirada moderna, ya conociendo el Teorema Fundamental del Álgebra, no es una técnica que permita caracterizar con certeza cómo son las raíces del polinomio. Descartes reconoce que, en el análisis de las raíces de una ecuación, se ha encontrado con unos objetos matemáticos (números negativos) que para su época aun no estaban definidos, tal como lo habíamos mencionado anteriormente en el trabajo de Cardano. Descartes llama a los números negativos raíces “falsas”, y a las raíces negativas raíces “imaginarias”; la correspondencia que establece entre el grado del polinomio y el número de raíces empieza a generar en los matemáticos una nueva perspectiva de las relaciones que se pueden encontrar entre la ecuación y sus raíces. Este aporte

va en dirección de lo que después se configuraría como el Teorema Fundamental del Álgebra. Descartes dio ejemplos particulares sobre lo que constituye una de las propiedades básicas para el teorema fundamental, a continuación, algunos ejemplos (*Geometría*, 1947, pág. 372):

Por ejemplo, si suponemos que x es igual a 2, o $x - 2$ es igual a nada; y de nuevo $x = 3$, o bien $x - 3 = 0$; al multiplicar estas dos ecuaciones

$$x - 2 = 0 \text{ y } x - 3 = 0,$$

uno por el otro, tendremos

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

o bien

$$x^2 = 5x - 6$$

que es una ecuación en la que la cantidad x es 2 y todo lo que se establece es 3.

Ahora, si de nuevo lo hacemos

$$x - 4 = 0,$$

y multiplica esa suma por

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

tendremos

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

que es otra ecuación en la cual x , que tiene tres dimensiones, también tiene tres valores, que son 2, 3 y 4.

Pero a menudo sucede que algunas de estas raíces son falsas o menos que nada; como si supusiera que x también denota el defecto de una cantidad que es 5, tenemos:

$$x + 5 = 0,$$

que, al multiplicarse por

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

Da lugar a:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

Para una ecuación en la que hay cuatro raíces, a saber, tres reales que son 2, 3,

4

y una falsa que es 5.

En el periodo de 1637 a 1828 se produjo una gran cantidad de intentos de demostración de este teorema sin que ninguno de ellos lograra su objetivo (por citar algunos, Leibniz en 1702, Euler en 1742, D'Alembert en 1746, Vandermonde en 1770, Lagrange en 1772, Laplace en 1795). Estos esfuerzos sirvieron para analizar casos particulares y para explicar las propiedades asociadas al actual teorema.

1.14 Vandermonde y las raíces n -ésimas de la unidad

Hacia 1770 el matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) publicó su obra titulada *Mémoire sur la Résolution des Equations*, en la que afirma que todas las ecuaciones, que obedecen a la forma:

$$x^p - 1 = 0,$$

donde p es primo, son resolubles por el método de radicales. Aunque esta afirmación no pudo ser demostrada en general, Vandermonde logró probarla para $p \leq 11$. En la actualidad estas ecuaciones se denominan polinomios ciclotómicos y sus n soluciones complejas se denominan las raíces n -ésimas de la unidad. A las raíces complejas cuyas potencias generan todas las raíces

n -ésimas de la unidad se les llama primitiva. Por ejemplo, las raíces cuartas de la unidad son $1, -1, i, -i$, de las cuales sólo i y $-i$ son raíces primitivas, obsérvese que $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

Hacia 1801, Karl Frederick Gauss retoma el planteamiento de Vandermonde y logra probar que esta ecuación es soluble por medio de radicales; la técnica empleada por Gauss se basa en reducir de grado la ecuación, método que actualmente conocemos como la resolvente de Lagrange.

1.15 Aportes de Gauss

Es el matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) quien logra una demostración del Teorema Fundamental del Álgebra aceptada por toda la comunidad matemática contemporánea. Las demostraciones de quienes lo precedieron encontraron críticas precisamente en el propio Gauss. En 1799 presenta su tesis de doctorado bajo el título *Demonstration nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Nuevas pruebas del teorema donde cada función integral algebraica de una variable puede resolverse en factores reales [i.e. polinomiales] de primer o segundo grado) que no es otra cosa que la primera de cuatro demostraciones que Gauss daría del Teorema Fundamental del Álgebra.

La demostración de Gauss no encontró quien le hiciera críticas más que él mismo; quizás ésta es la razón por la cual en un período de 50 años presentó cuatro pruebas del mismo teorema. El trabajo de Gauss se instala como la primera prueba de existencia, algo realmente novedoso puesto que en las pruebas anteriores siempre se buscaba un método para hallar las raíces.

Nuestro interés lo situaremos en la primera demostración, ya que por primera vez se utilizan los números complejos y el plano complejo en un proceso matemático de tal importancia. Gauss populariza entre la comunidad matemática los números complejos, pero más que eso, su representación en el plano complejo, lo que se convertiría en el camino por el que años más tarde emergen los cuaterniones de Hamilton (los números Hipercomplejos), la definición general de vector y su representación gráfica.

1.15.1 Esquema de las pruebas presentadas por Gauss: primera y cuarta demostración.

El Teorema Fundamental del Álgebra como se conoce actualmente establece que toda ecuación polinomial de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas, es decir, si se tiene el polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para $i = 0, 1, \dots, n-1, n$, entonces existen n números complejos $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ que cumplen que:

$$p(z_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n.$$

En otras palabras: *Todo polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ puede ser factorizado en factores lineales sobre los números complejos.*

Gauss uso una formulación alterna y mucho más conocida:

Todo polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ puede ser factorizado en factores lineales y cuadráticos.

Ésta última versión es equivalente a la primera pues si $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ entonces $g = f\bar{f} \in \mathbb{R}[x]$ y una factorización de $g(x)$ implica una factorización de f puesto que toda raíz de f también lo es de g .

Gauss empezó con un polinomio real (Cruz, 2009)

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Lx + M$$

Ahora, tomando x como una cantidad indefinidamente grande, a lo que llama Gauss en su obra *unbestimmte Größe*, como indeterminada. Un factor lineal real puede ser escrito como $x \pm r$, con $r \geq 0$. Un factor cuadrático irreducible sobre los reales se puede escribir como $x^2 - 2xrcos\theta + r^2$, considerando de nuevo $r \geq 0$, las raíces serían $r(cos\theta \pm i sen\theta)$, veamos si realmente cumplen:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - (r(cos\theta + i sen\theta)))(x - r(cos\theta - i sen\theta)) \\ &= (x - (rcos\theta + i rsen\theta))(x - (rcos\theta - ir sen\theta)) \\ &= (x - r cos\theta)^2 + r^2 sen^2\theta \\ &= x^2 - 2xr cos\theta + r^2 (cos^2\theta + sen^2\theta) \\ &= x^2 - 2xrcos\theta + r^2 \end{aligned}$$

ahora, al sustituir x por $r(cos\theta \pm i sen\theta)$ dentro del polinomio

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Lx + M$$

tenemos:

$$\begin{aligned} X &= (rcos\theta + i rsen\theta)^m + A(rcos\theta + i rsen\theta)^{m-1} + B(rcos\theta + i rsen\theta)^{m-2} \\ &\quad + \dots L(rcos\theta + i rsen\theta) + M \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad distributiva y separando la parte real y la parte imaginaria, se tiene:

$$U = r^m cosm\theta + Ar^{m-1} cos(m-1)\theta + \dots + Lrcos\theta + M$$

$$T = r^m senm\theta + Ar^{m-1} sen(m-1)\theta + \dots + Lrsen\theta + M$$

Gauss nota que (r, θ) satisfacen $T = 0$ y $U = 0$ juntamente, entonces el polinomio X es divisible por $x \pm r$ y $x^2 - 2xr\cos\theta + r^2$. Para llegar a esta conclusión se basó en una demostración que había hecho Euler en su obra, *On an apparent contradiction in the theory of curved lines* en 1759.

Gauss considera $T = 0$ y $U = 0$ como curvas algebraicas de orden m dadas en las coordenadas polares r y θ , dibujadas en un plano ortogonal con coordenadas $(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Para ver que las curvas son algebraicas, sólo se tiene que usar la trigonometría básica para expresar U y T como expresiones algebraicas en $r \cos\theta$ y $r \sin\theta$. Para probar el Teorema Fundamental del Álgebra, Gauss probó que existe un punto de intersección entre las dos curvas $T = 0$ y $U = 0$. Ahora, note que tal intersección sería una raíz del polinomio X , porque si

$$U(r, \theta) = \operatorname{Re}(X(x)) = 0 \text{ y } T(r, \theta) = \operatorname{Im}(X(x)) = 0 \text{ entonces } X(x) = 0.$$

Para determinar las intersecciones de las dos curvas, Gauss estudia sus intersecciones dentro de un círculo de radio R y demuestra que, “Para un radio R suficientemente grande hay exactamente $2m$ intersecciones del círculo con $T = 0$ y $2m$ intersecciones con $U = 0$ y cada punto de intersección del segundo tipo se encuentra entre dos de primer tipo.” (Van Der Waerden, 1985, pág. 96).

Este resultado es demostrado inicialmente haciendo uso de la intuición y después lo demuestra formalmente: como R tiende a infinito, las curvas $T = 0$ y $U = 0$ se aproximan las curvas $\operatorname{Re}(x^m) = 0$ y $\operatorname{Im}(x^m) = 0$, las cuales son líneas rectas que pasan por el origen. De otro lado, las líneas donde $\operatorname{Re}(x^m) = 0$ alternan con aquellos donde $\operatorname{Im}(x^m) = 0$.

Ahora, Gauss presenta una prueba formal de este resultado, sin hacer uso del concepto de límite. Gauss afirma que "se puede ver fácilmente" que los $4m$ puntos de intersección con círculo varían muy poco cuando R cambia poco. En términos modernos, podríamos hablar de que son funciones continuas de R , pero para aquella época el concepto de continuidad aún no estaba totalmente definido. Gauss llega a la parte esencial de su prueba, que es mostrar que las dos curvas se cruzan dentro del círculo. Para esta conclusión él da una idea intuitiva apoyándose en la geometría: Gauss empieza enumerando las intersecciones con el círculo secuencialmente, empezando por 0 para el eje x negativo del plano (que siempre es parte de la solución a $T = 0$), dando números impares a las intersecciones de $U = 0$ con el círculo, y números pares a las intersecciones de $T = 0$. Ahora afirma que "si una rama de una curva algebraica entra en un espacio limitado, necesariamente tiene que dejarlo de nuevo ". En una nota a pie de página Gauss añade: (Van Der Waerden, 1985, pág. 96)

Parece estar bien demostrado que una curva algebraica ni termina abruptamente (como ocurre en la curva trascendental $y = 1 / \log x$), ni se pierde después de un número infinito de devanados en un punto (como una espiral logarítmica). Hasta donde yo sé, nadie ha dudado de esto, pero si alguien lo requiere, le presentaré, en otra ocasión, una prueba indudable.

Tomando cómo verdadera esta observación, entonces cada punto de intersección impar en el círculo está conectado con otro punto impar a través de una rama de la curva $U = 0$, de manera análoga para puntos pares y ramas de la curva $T = 0$. Ahora, para mostrar que existen tales intersecciones, Gauss presenta un análisis más complicado, con el que concluye que siempre existe un punto de intersección para las curvas:

$$\operatorname{Re}(x^m) = T = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(x^m) = U = 0.$$

Para ejemplificar (Chavarria, 2014), consideremos la ecuación:

$$x^4 - 4i = 0.$$

Gauss muestra gráficamente que existe un valor $z = a + bi$, tal que $p(z) = 0$; para ello sustituye la incógnita del polinomio por $a + bi$, de donde separando la parte real e imaginaria, se obtienen dos funciones de a y b :

$$a^2 - b^2 = 0 \text{ (parte real).}$$

$$ab - 2 = 0 \text{ (parte imaginaria).}$$

Realizando una representación en un mismo sistema de coordenadas, en las abscisas la parte real a y en las ordenadas la parte imaginaria b , se obtiene un par de rectas $a + b = 0, a - b = 0$, y una hipérbola equilátera $ab = 2$, así como se observa en la siguiente figura:

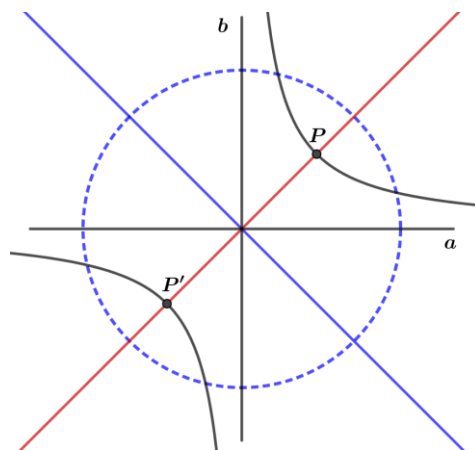


Ilustración 12: Gauss demuestra la existencia de las raíces de un polinomio de grado 2.

Las dos curvas se cortan en dos puntos P y P' con una de las rectas; estos puntos de intersección serán las raíces de la ecuación. Gauss basa su razonamiento en las gráficas de las curvas, garantizando siempre los puntos de intersección, que le permiten concluir que cualquier ecuación polinómica tiene al menos una raíz compleja.

CAPÍTULO 2.

Algunos conceptos del álgebra lineal.

Linealidad y dependencia inclusiva

Partiendo de las ideas del capítulo anterior, donde la búsqueda constante por parte de los matemáticos del método para solucionar cualquier ecuación fue fortaleciendo, a medida que tienen éxito en sus hallazgos, la idea de que cualquier ecuación se puede resolver a través de una fórmula general. En este apartado se mostrará cómo la concepción filosófica de las matemáticas parece estar ligada a la noción generalizada de los matemáticos sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Se pensaba que aquellos sistemas que se indeterminaban o terminaban siendo no cuadrados provenían de sistemas mal planteados: “Todo problema que se pueda modelar matemáticamente, tiene solución, y si tiene solución existe el método para encontrarla”. La aproximación de Euler, llamada por Dorier como dependencia inclusiva, contiene el germen de conceptos como dependencia e independencia lineal, al menos en el caso particular de las ecuaciones lineales. Señalando la relación entre ellas y la naturaleza de la solución, pero como se verá más adelante, el avance hacia un método más “eficiente” para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como fue considerado para esa misma época la regla de Cramer, consigue retardar la emergencia de estos nuevos conceptos por más de un siglo.

2.1 La clasificación de las líneas curvas.

En nuestra línea de interés, retomando lo mencionado en el capítulo anterior sobre Descartes, otro de los aspectos que se debe resaltar de los aportes de Descartes es que, en la reclasificación de las curvas, separa la línea recta de su clasificación anterior (la propuesta por Euclides) y la

posiciona como la más sencilla, pero a su vez fundamental. Descartes deduce la ecuación de la línea recta como la solución para el caso más trivial del problema de Pappus. Con respecto a la línea recta afirmó que: si el problema de los antiguos (...refiriéndose al problema de Pappus) fuere puesto para cinco líneas, siendo todas paralelas, es evidente que el punto buscado se encontrará siempre en una línea recta.

Descartes obtiene la ecuación $ay^2 = cx^2$ correspondiente a la línea recta, su representación geométrica estaba dada por un rayo en el primer cuadrante puesto que no se aceptaban aún los números negativos; de donde se puede entrever que finalmente la ecuación de la línea recta debió haber tomado rápidamente la forma que conocemos hoy, veamos:

$$ay^2 - cx^2 = 0$$

Dado que solo se consideraban los números positivos, podemos escribir la expresión anterior así:

$$(\sqrt{a}y - \sqrt{c}x)(\sqrt{a}y + \sqrt{c}x) = 0$$

Con el mismo argumento anterior,

$$Ax + By = 0$$

Ecuación moderna de una línea recta que pasa por el origen. Donde $A = \sqrt{a}$ y $B = \sqrt{c}$.

Descartes vislumbra la importancia particular que tenía la línea recta. Por sus afirmaciones parece ser que podía ver lo que en esencia se convertiría en el cálculo de Newton y Leibniz:

Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forma ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella. Y me atrevería a decir que este no

es sólo el problema más útil y más general de la geometría que conozco, sino incluso de los que hubiera deseado nunca conocer. (Citado en Boyer, 2001)

Este aspecto debe subrayarse como uno de los aportes fundamentales en nuestra línea de interés. El hallazgo de la ecuación de la línea recta y la ubicación privilegiada que se le otorga marca la dirección evolutiva del álgebra lineal: en medio de los sistemas de ecuaciones que más adelante emergen los principales conceptos de esta disciplina.

2.1.1 Estudio cualitativo de las ecuaciones en un sistema de Ecuaciones lineales. Los aportes de Euler.

Los numerosos trabajos del matemático y físico suizo Leonhard Euler , lo catalogan como uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos. Sus numerosos aportes a las matemáticas puras lo hacen ser reconocido como el principal matemático del siglo XVIII. En la dirección de nuestro trabajo, se estudia uno de sus artículos escrito en 1750. Euler complementa el trabajo que había empezado Descartes sobre la clasificación de curvas algebraicas según su orden y presenta, en este artículo, un análisis cualitativo de las ecuaciones en un sistema de ecuaciones lineales, a partir de una aparente contradicción entre dos hechos conocidos y aceptados por los matemáticos de la época.

2.1.2 *Sobre una aparente contradicción en la teoría de las líneas curvas.*

En este artículo, Euler empieza haciendo dos anotaciones importantes:

- El carácter riguroso de las demostraciones en la geometría plantea que, a diferencia de otras ciencias, en la geometría no hay lugar para las contradicciones o las controversias; si

en algún momento se presentan dos proposiciones contradictorias, posiblemente es una contradicción aparente debido al desconocimiento de algunas ideas más profundas.

- A pesar de no concebir contradicciones entre proposiciones en la geometría, Euler llama la atención sobre dos proposiciones conocidas y aceptadas por la comunidad matemática, que presentan una aparente contradicción; una de estas proposiciones hace parte de la teoría de líneas curvas.

Las dos proposiciones que plantea son (Euler, 1748):

Proposición I

Una línea recta o de primer orden se puede trazar a partir de dos puntos dados; así mismo una línea de segundo orden o sección cónica se puede trazar con cinco puntos dados, una línea de tercer orden con 9 puntos y una de cuarto orden con 14 puntos dados. En general, una línea de orden n -ésimo puede ser determinada por $\frac{(n^2 + 3n)}{2}$ puntos cualesquiera.

La forma general de una línea curva de orden n -ésimo es:

$$Ay^n + (B + Cx)y^{n-1} + (D + Ex + Fx^2)y^{n-2} + (G + Hx + Ix^2 + Jx^3)y^{n-3} + \dots P_n(x) = 0$$

Note que la anterior expresión tiene $\frac{(n^2 + 3n)}{2} + 1$ coeficientes arbitrarios $A, B, C, D, E, \dots$ ahora, al reemplazar cada punto dado por donde debe pasar la curva, nos dará una ecuación. Esto quiere decir que con $\frac{(n^2 + 3n)}{2}$ puntos dados se llega al mismo número de ecuaciones, lo que significa además que todos los coeficientes pueden determinarse y en consecuencia la propia curva.

Proposición II

Dos líneas rectas o de primer orden se intersecan a lo más en un punto, hecho conocido de Los *Elementos* de Euclides; así mismo dos líneas de segundo orden o secciones cónicas se intersecan a lo más en cuatro puntos, si tenemos dos líneas de tercer orden se interceptarán como máximo en nueve puntos, para cuarto orden será en 16 puntos, y así sucesivamente.

Ahora, una línea de grado m puede ser intersectada por una línea recta en m puntos, por una línea de segundo orden $2m$ puntos, de tercer orden en $3m$ puntos y en general una línea de orden m puede ser intersectada por una línea de orden n en nm puntos.

Luego de este análisis, debería concluirse que el número de intersecciones de dos líneas curvas, una de orden m con otra de orden n será de nm puntos o menor, dado que algunos de estos puntos pueden extenderse hasta el infinito o ser imaginarios. Algunos ejemplos que refuerzan esta proposición:

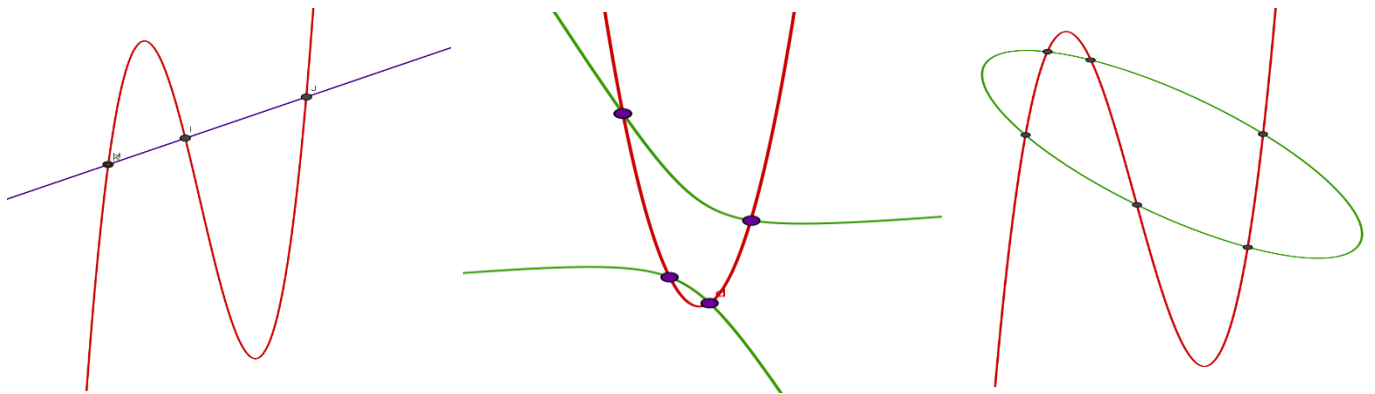


Ilustración 13: ejemplos de intersecciones entre dos líneas curvas

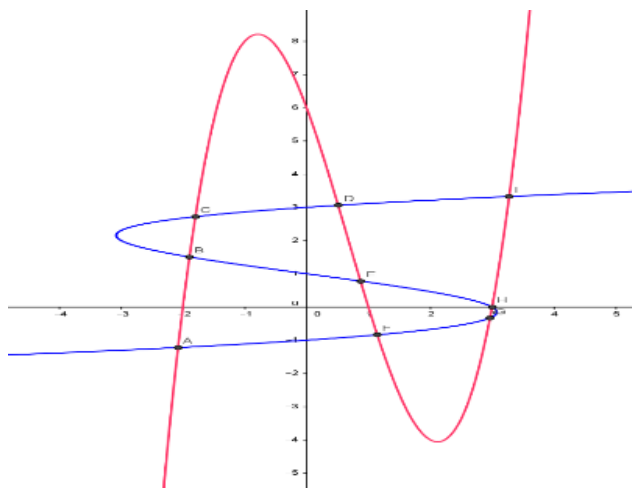
Aparente Contradicción.

Se ha presentado la proposición I que dice que la ecuación polinómica de grado n , en las variables x, y , contiene $\frac{n^2 + 3n}{2} + 1$ coeficientes arbitrarios, es decir, se necesitan $\frac{n^2 + 3n}{2}$ puntos para determinar los coeficientes. Lo ejemplifica para el caso de una línea recta diciendo que se necesitan los tres coeficientes A, B y C , para escribir la ecuación dada por $Ax + By + C = 0$, pero es claro que con dos puntos que no resulten iguales, se halla la relación entre dos coeficientes de éstos con respecto a uno de ellos tomado como arbitrario. Por ejemplo, tomando $A = 1$, al sustituir por separado los dos puntos dados en la ecuación general anterior se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas con solución única.

Euler plantea que éstas dos proposiciones son reconocidas y verdaderas, pero que hay una sutileza de razonamiento que no es fácil de identificar. Para identificar la aparente contradicción Euler articula éstas dos proposiciones:

La contradicción se presenta con las líneas curvas de tercer orden, notemos que por la primera proposición, una línea de tercer orden se determina a partir de nueve puntos distintos dados o por nueve puntos distintos pasa una única línea curva de tercer orden; ahora, por la proposición II, una línea de tercer orden se intersecta con otra línea del mismo orden en a lo más nueve puntos (Euler quiere destacar en éste caso, cuando las intersecciones son distintas y todas reales), lo que significa que se pueden identificar estos puntos, por los que pasarán las dos líneas curvas. Aquí hay una clara contradicción. Euler, afirma su planteamiento con las líneas curvas de cuarto orden; observemos que según la proposición I se necesitan catorce puntos distintos para obtener la ecuación de una única línea de grado cuatro, pero por la

proposición II, nos muestra que dos líneas de orden cuatro, pueden cortarse en 16 puntos. La pregunta que surge es, ¿cómo escoger los 14 puntos que determinan una sola línea curva de orden cuatro sin que éstos no sean parte de los 16 que puede compartir con otra de su mismo grado? Teniendo en cuenta, además, si por éstos 14 puntos no solo pasa una curva de orden cuatro, obligatoriamente pasarán infinitas (no se puede dar el caso que sean solo dos curvas las que pasen por allí); esto es consecuencia de las tres posibilidades de la naturaleza de la solución.



Después de un análisis similar con la ecuación de quinto grado, Euler llega a la conclusión que es necesario hacer una precisión en la proposición I, es decir, que no basta con que los puntos sean diferentes (en la figura anterior se tiene nueve puntos distintos, pero infinitas curvas de grado tres que pasan por ellos) para poder determinar una curva de grado n con $n \geq 1$. Sin esta precisión la proposición I no resulta verdadera en general. Euler hace las siguientes observaciones:

Observación I:

En un caso sencillo de un sistema 2×2 , podemos escribir actualmente como:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$$

Menciona qué: “puede ocurrir que dos ecuaciones no son suficientes para determinar el valor de dos variables, aun cuando en ambas ecuaciones aparezca cada una de ellas”. (Euler, 1748)

Note que en el ejemplo propuesto por Euler una de las ecuaciones es múltiplo de la otra.

Euler menciona que:

Cuando decimos (proposición I) que, para determinar dos cantidades desconocidas, es suficiente tener dos ecuaciones, es necesario añadir a esta proposición la restricción de que estas dos ecuaciones deben ser diferentes una de la otra o que una ya no esté incluida en la otra, y es sólo con esta restricción de que dicha propuesta puede ser aceptada. (Euler, 1748, pág. 6)

Ésta primera observación de Euler es de suma importancia para nuestro trabajo, pues es uno de los primeros acercamientos de los conceptos de dependencia e independencia lineal. En el capítulo tres se retomará el trabajo de Euler a partir de un análisis didáctico.

Observación II

El mismo caso con un sistema 3×3 :

$$4x - 6y + 10z = 16,$$

$$3x - 5y + 7z = 9,$$

$$2x - 3y + 5Z = 8,$$

En el anterior sistema hay una ecuación incluida en otra, lo que hace que realmente se tengan dos ecuaciones y que no se puedan determinar las tres incógnitas x, y , y z . Hay un caso más interesante

$$2x - 3y + 5z = 8,$$

$$3x - 5y + 7z = 9,$$

$$x - y + 3z = 7,$$

En este sistema la suma de dos de las ecuaciones genera la otra ecuación, lo que permite que se puede omitir cualquiera de estas tres ecuaciones que deseamos y es como si sólo hubiera dos ecuaciones.

Euler termina afirmando de nuevo que:

De esta manera, cuando decimos que para la determinación de tres incógnitas se requieren sólo tres ecuaciones, es necesario añadir la restricción que estas tres ecuaciones deben diferir entre sí de tal manera que ninguno ya está incluido en los otros. (Euler, 1748, pág. 7)

2.1.3 Aportes de Euler en el desarrollo del álgebra lineal

Los matemáticos contemporáneos con Euler trabajaban solo con sistemas de ecuaciones lineales cuadrados; cuando en un sistema lineal cuadrado desaparecía una de las ecuaciones, producto del proceso de solución o cuando no tenía solución, era rechazado con el argumento de estar mal planteado, es decir, se tenía como verdadera la noción de que n ecuaciones bastaban para encontrar n variables:

También los tratados de álgebra, hasta el siglo XVIII, piensan haber cumplido su misión, en lo que a primer grado se refiere, una vez que han expuesto reglas;

en cuanto a los sistemas con tantas ecuaciones como incógnitas (no consideran otros) sistemas cuyos primeros miembros no sean formas linealmente independientes, se contentan simplemente con señalar de pasada que se trata de un problema mal planteado. (Bourbaki N. , 1976, pág. 86)

Actualmente, con el estudio de sistemas con infinitas soluciones podemos encontrar la relación existente entre el número de ecuaciones, el número de variables y el número mínimo de soluciones que son necesarias para generar todas las demás. En efecto, los sistemas consistentes, tales que el número de ecuaciones sea en medio del proceso de resolución, termine siendo menor el número de ecuaciones que el número de incógnitas, son claves; puesto que abordando el análisis de su solución es que se puede aproximar a los conceptos relativos al álgebra lineal o más precisamente a los preconceptos del concepto que se han señalado como centrales en el álgebra lineal: rango, dependencia e independencia lineal y conjunto generador. Euler, por su parte, estudia detenidamente el caso de los sistemas cuadrados en los que finalmente se revelan una o más variables indeterminadas y plantea el análisis que debe hacerse a la hora de determinar la razón por la cual un sistema de ecuaciones no tiene solución única:

Si uno tiene tantas ecuaciones como incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales puede suceder que una o más de las variables permanezca indeterminada si una de la ecuación es igual o es un múltiplo de otra o si una de ellas está contenida entre las demás. (Euler, 1748)

Actualmente, la observación hecha por Euler se podría tomar como una verdadera aproximación al concepto de dependencia lineal entre las ecuaciones de un sistema. Era de esperarse que el concepto de dependencia e independencia lineal emergiera rápidamente gracias

al análisis iniciado por Euler, pero transcurrieron más o menos cien años para que se retomara esta perspectiva; en adelante se intentará dar las razones para que fuera desestimado el interesante enfoque de Euler.

Teoría de matrices

El álgebra de matrices y, más específicamente, la suma de matrices y su producto por un escalar, dan lugar a un conjunto que dotado con estas operaciones se convierte en un caso particular de espacio vectorial. Sin embargo, el concepto de matriz actual, aquel que es sujeto de enseñanza, no solo da cuenta de estas como objeto matemático, sino como herramienta para representar y resolver sistemas de ecuaciones. Históricamente el surgimiento de las matrices como objeto matemático se puede localizar en la obra de James Joseph Sylvester (1814-1897) y Arthur Cayley (1821-1895) a mediados del siglo XIX, mientras que, como herramienta de representación, se puede ubicar en distintas y remotas épocas, como también en distintos contextos de las matemáticas como se mostrará en adelante.

2. 2 Cramer y la teoría de determinantes.

En el mismo año en que Euler presenta su trabajo, Gabriel Cramer (1704 -1752) presenta su tratado titulado *Introduction á l'analyse des Courbes Algébriques* (1750). Este fue el primer texto que introdujo una notación generalizada para escribir los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, como también una regla (Regla de Cramer), con la que se puede expresar la solución de un sistema $n \times n$ en función de sus coeficientes; ésta regla emplea lo que a la postre se llamaría determinantes.

Los determinantes se usaron en numerosos estudios e investigaciones y la teoría de determinantes se convirtió en una línea de estudio prolija de las matemáticas. A raíz de los aportes de Cramer el enfoque cualitativo, iniciado por Euler, pierde interés. Cramer y los matemáticos de la época se interesaron en encontrar la solución de los sistemas lineales cuadrados con solución única por medio de esta regla totalmente mecánica. Un siglo después de la aparición de la regla de Cramer encontramos el primer texto colombiano de “geometría analítica” donde se propone el método de Bézout, que se basa en una demostración de tipo heurístico que llega a mostrar la validez de la regla de Cramer. Este texto llamado *Lecciones de Geometría analítica* fue escrito en 1850, por Lino de Pombo O’Donell (1797-1862). Lino de Pombo, era cartagenero de padres españoles, realizó sus estudios en España y fue profesor del Colegio Militar, Pombo afirmaba que la geometría analítica juega un importante papel en las matemáticas, nos brinda la oportunidad de establecer relaciones coherentes entre el álgebra y la geometría.

El texto *Lecciones de Geometría* escrito en 1850 por Pombo, es el primero de geometría analítica para la enseñanza en la educación superior escrita por un colombiano, nace del esfuerzo por escribir notas de clase a partir de la experiencia que ya tenía al dictar el curso durante varios semestres consecutivamente, para la época no existía un texto local que se adaptara a lo que Pombo deseaba enseñar.

2.3 El concepto de Rango.

Del trabajo de Euler y, más específicamente, de lo que llama Jean Luc Dorier la dependencia inclusiva, se podría esperar que emergiera naturalmente el concepto de rango entre los matemáticos, posiblemente alrededor de 1750, fecha de publicación del artículo *Sur une*

contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. Pero la historia muestra que debieron pasar casi 100 años para que esto sucediera. El trabajo de tipo histórico hecho por el grupo de investigación de Jean Luc Dorier muestra que la comunidad matemática tras el hallazgo de la regla de Cramer enfila toda su atención alrededor de lo que hoy llamamos la teoría de determinantes, teoría de innegable valor teórico dentro de las matemáticas pero que, al parecer, desvía la atención del enfoque cualitativo que pretende explicar la razón del porqué de los sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones e inconsistentes. La historia muestra que es en este enfoque cualitativo, donde surge el concepto de rango.

Existen razones muy fuertes por las cuales la comunidad matemática abandona la postura cualitativa de Euler. El interés generalizado era el de mejorar el método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que hasta el momento estaba basado en una sucesión de sustituciones que agobiaban a quien intentara resolver un sistema de más de tres variables.

La regla de Cramer “alivia” esta tensión, da las soluciones de un sistema cuadrado a partir de sus coeficientes, es decir, sin manipular nunca las ecuaciones.

La razón por la que en medio del desarrollo de la teoría de los determinantes no se da tempranamente el concepto de rango, es por el costo computacional que trae dicho método. Los profesores Martínez y Sanabria muestran en su artículo *Énfasis en la enseñanza del álgebra lineal*, que este método, aunque tiene un valor teórico importante, como algoritmo resulta ruinoso.

En el libro de álgebra lineal de Grossman se comenta que, si uno intenta resolver un sistema de ecuaciones lineales 25×25 resolviendo cada uno de los determinantes que resultan

necesarios por medio del método de cofactores y, aún con la ayuda de un veloz computador, podría tardarse más tiempo del que el hombre lleva en la tierra. En el texto de Jean Luc Dorier también mencionan algunos obstáculos y dificultades que los matemáticos debían superar para la aceptación del concepto de rango (Dorier, 2000, pág. 9):

- El reconocimiento de la invariancia que era, sino inadvertida, por lo menos asumida sin necesidad de prueba.
- La posibilidad de la misma definición de dependencia entre las ecuaciones y n -uplas.
- La anticipación del concepto de dualidad y la consideración de todos los sistemas de ecuaciones que tienen el mismo conjunto de soluciones.

Aun así, en medio del uso de los determinantes se abandonó la posición de solo resolver sistemas de ecuaciones cuadrados con solución única. Cabe señalar nuevamente que para el año de 1750 existía una idea generalizada dentro de la comunidad matemática, que consistía en que cuando un sistema no tenía solución única era porque provenía de un sistema mal planteado. De alguna manera la obra de Euler debió haber tenido algo que ver en este evento. Aunque las largas cadenas de cálculos en medio de la solución de sistemas de ecuaciones a través de la regla de Cramer mantenían en la penumbra el pensamiento intuitivo, y surgiendo las ideas y nociones que anteceden al concepto de rango, como, por ejemplo, la idea de decantar el mayor no nulo y, a partir de él, redefinir variables dependientes e independientes (parámetros), es decir, extender la regla de Cramer aún para sistemas con infinitas soluciones:

El método clásico consistió en separar la parte de las ecuaciones correspondientes al menor no nulo de máximo orden y luego usando la regla de

Cramer, con las otras variables apareciendo como parámetros en el segundo miembro de las ecuaciones.

Esta manipulación requería justificaciones teóricas las cuales preceden los descubrimientos hechos sobre determinantes, además, ésta primera fase abrió nuevos caminos para más investigaciones sistemáticas en sistemas de ecuaciones. Sin embargo, fue más la búsqueda por un método práctico que por un acercamiento teórico lo que condujo a éste primer paso. (Dorier, 2000, pág. 9)

Los matemáticos de la época, aunque sin prueba, ya tenían claro que el tamaño de este menor era un invariante relativo al sistema: es decir, el rango del sistema; pero no existía teoría alrededor de esto ni mucho menos demostraciones. Es sólo a través de un enfoque nuevamente de tipo cualitativo como emerge el concepto de rango con todo el peso teórico necesario para quedar posteoado en la historia del álgebra; esto se da con el trabajo de Henry John Stephen Smith (1826 –1883).

Ejemplo: Dado el sistema 3×3 planteado por Euler:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8 \\ 3x - 5y + 7z = 9, \\ x - y + 3z = 7 \end{cases}$$

dado que el determinante de la matriz del sistema es nulo y el sistema resulta consistente, se buscaba el mayor menor no nulo, que en este caso, tiene tamaño 2×2 y se optaba por resolver

el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 8 - 5z \\ 3x - 5y = 9 - 7z \end{cases}$ usando el método de Cramer.

Al sistematizar un algoritmo general y válido, a pesar de ser computacionalmente costoso, para encontrar la solución a sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, la perspectiva de Euler pierde interés. Este hecho lo mencionamos reiterativamente porque la historia nos muestra que los conceptos de dependencia e independencia lineal surgen de manera más natural y temprana si se aborda un enfoque cualitativo y haciendo uso de la intuición.

Como lo evidenciamos en el anterior capítulo y a lo largo de este, la historia que envuelve el desarrollo del álgebra y, de manera más específica, lo concerniente a la teoría de las ecuaciones, muestra el interés constante de los matemáticos por encontrar los métodos de solución de ecuaciones; la regla de Cramer reafirma la creencia generalizada de que siempre se pueden encontrar estos métodos. Estos hallazgos conducen a una idea equivocada de que el método existe y que por lo tanto debe poder encontrarse. A partir de la línea de la Didáctica, estos hechos recurrentes se pueden caracterizar como un obstáculo epistemológico, puesto que se muestra un conocimiento, en este caso el algoritmo de solución, que no permite reflexionar sobre la no existencia de las soluciones o de la existencia de infinitas soluciones. Hablaremos más sobre este obstáculo en el capítulo dedicado a la reflexión didáctica.

2.4 De los determinantes a las matrices: Arthur Cayley.

Actualmente para resolver un sistema se propone representarlo a través de una matriz, es decir, a través de un arreglo rectangular de sus coeficientes; luego, haciendo uso del determinante del sistema y los determinantes auxiliares de cada variable, se determina la solución del sistema aplicando el método de Cramer. Parece entonces natural concluir que históricamente surgieron primero las matrices que sus determinantes, pero no es así; en el desarrollo histórico primero se trabajó con los determinantes y después se construyó la teoría de matrices. Para la época de

Euler ya se había considerado trabajar sistemas de ecuaciones solo haciendo un análisis de sus coeficientes, en su trabajo con las formas cuadráticas, Euler utilizó una escritura similar a la matricial para representar la composición de transformaciones sobre una forma cuadrática.

En la China antigua (200 A.C.) construían arreglos cuadrados de números para resolver problemas (lo que ahora llamamos cuadrados mágicos) los que, en la actualidad, corresponden a sistemas de ecuaciones lineales; pero la matemática china no tuvo continuidad y muchos de sus métodos solo se conservaban por transmisión oral o copias clandestinas.

En 1850, el matemático Inglés James Joseph Sylvester (1814, 1897) le dio el nombre de matriz a un arreglo cuadrilongo de términos. Sylvester sostuvo amistad y constante comunicación con Arthur Cayley, a quien finalmente se le considera el creador de la teoría de matrices. En 1858 Cayley publica su memoria sobre la teoría de matrices, la cual contiene una definición un poco mejorada con respecto a la dada por Sylvester: El término *matriz* es usado sin asociarlo a ningún conocimiento específico; es decir, los objetos del arreglo son magnitudes de naturaleza cualquiera; puede ser entendido como un arreglo de cantidades en forma de un cuadrado.

Cayley advierte que las matrices pueden ser arreglos con cualquier número de términos, pero a pesar de esa afirmación en su artículo solo trabaja con matrices cuadradas 3×3 y 2×2 .

2.4.1 Una memoria sobre la teoría de matrices.

(Cayley, 1858) inicia su obra definiendo una matriz como un conjunto de cantidades dispuestas en forma de cuadrado y da un ejemplo de una matriz 3×3 :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

Además, justifica que esta notación surge naturalmente de abreviar un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$X = ax + by + cz$$

$$Y = a'x + b'y + c'z$$

$$Z = a''x + b''y + c''z$$

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Agrega que ésta es la base para construir una teoría de matrices y que, si los conjuntos de matrices de igual tamaño se consideran como un objeto en sí, se comportan como cantidades que se pueden operar. La suma de matrices es similar a la suma que se realiza entre cantidades, mientras que la multiplicación, a la que también llama composición, no conmuta.

Cayley a continuación señala que cualquier matriz, satisface una ecuación algebraica de su propio orden. Teorema que actualmente se conoce como el teorema de Cayley-Hamilton. Hamilton lo estableció para el caso de orden 4 dentro de su estudio de cuaterniones. Sin desviar la atención, veamos brevemente un ejemplo en notación moderna de este teorema:

Tomemos la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, el polinomio característico es:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \gamma & 2 \\ 3 & 4 - \gamma \end{pmatrix} =$$

$$= (1 - \gamma)(4 - \gamma) - (2)(3)$$

$$= 4 - \gamma - 4\gamma + \gamma^2 - 6 = \gamma^2 + 5\gamma - 2$$

Ahora, el teorema Cayley-Hamilton afirma que, al reemplazar $M = \gamma$ se satisface la ecuación:

$$M^2 + 5M - 2I = 0$$

Notemos:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En la memoria de Cayley, la regla de formación de esta ecuación y las operaciones que se aplican en el anterior teorema cobran sentido.

A continuación, se muestra una breve inspección de los 58 puntos en los que Cayley presenta su teoría de matrices. Con el objetivo de facilitar la lectura y aportar a nuestras conclusiones posteriores, en algunos casos, se establece un comparativo con el correspondiente tema actual. Cayley define en términos muy próximos a los modernos, la suma de matrices, el producto por un escalar, el producto entre matrices, potencias, las propiedades de cada una de estas operaciones, polinomio de matrices y polinomio característico. Es decir, hace una presentación exhaustiva del álgebra matricial actual. Veamos:

1. Aunque trabajará con matrices 3×3 , los resultados, definiciones y conclusiones podrán ser aplicados a matrices cuadradas de cualquier tamaño y, en algunos casos, en matrices rectangulares; además cuando se establezca alguna relación para dos o más matrices, se deberá asumir que las matrices son del mismo orden.
2. La notación

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

representa el conjunto de funciones lineales

$$(ax + by + cz, a'x + b'y + c'z, a''x + b''y + c''z)$$

3. Define la matriz cero, como aquella donde todos los términos son cero

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz unitaria como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Actualmente la llamamos matriz identidad.

4. Define la suma y la resta de matrices tal como lo conocemos actualmente.
5. La matriz no se altera si se suma o resta con la matriz cero, es decir, si tenemos M como matriz y llamando 0 a la matriz cero del mismo orden que M , se tiene que:

$$M \pm 0 = M$$

Así también al restar dos matrices iguales se obtiene la matriz cero. Obsérvese que la matriz cero, en términos modernos, es el elemento neutro en la suma.

6. La opuesta de una matriz M se escribe como $L = -M$, y al sumar M con su opuesta dará la matriz cero, $M + L = 0$. En términos modernos, Cayley está definiendo el elemento opuesto para la suma; en este caso de matrices, será aquella matriz del mismo orden cuyos términos tengan signo contrario.
7. Cayley define la conmutatividad y asociatividad en la suma de matrices.
8. Define el producto de una manera equivalente a como lo hacemos actualmente, en particular al que llamamos producto externo o producto por un escalar

$$\begin{aligned}
 (X, Y, Z) &= \\
 &= m \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z) \\
 &= \begin{pmatrix} ma & mb & mc \\ ma' & mb' & mc' \\ ma'' & mb'' & mc'' \end{pmatrix} (x, y, z)
 \end{aligned}$$

Además, afirma que esta operación cumple la propiedad conmutativa y que si se tiene $m(L + M)$ equivale a tener $mL + mM$; es decir que también cumple la distributividad.

9. De las matrices L y mL se dice que la una es similar a la otra; en particular si $m = 1$ son iguales y si $m = -1$ son opuestas.
10. Define el envolvente de la matriz unitaria como el conjunto donde están todas las posibles combinaciones que se pueden hacer con la matriz identidad (a la que Cayley llama unitaria), que en otras palabras son todas las multiplicaciones de esta por un escalar.
11. Define la regla para componer matrices, en términos modernos la multiplicación de matrices, así:

Se establece la primera matriz como la que está más a la izquierda y se dice que la primera línea de la matriz producto se obtiene combinando la primera línea de la primera matriz con cada una de las columnas de la segunda y de manera análoga se definen las demás filas de la matriz producto. (Cayley, 1858, pág. 21)

También, comenta que esta operación no es conmutativa.

12. La composición de una matriz con la matriz cero, siendo la matriz cero la primera o segunda componente, será la matriz cero.
13. Una matriz no se altera al hacer su composición con la matriz unitaria y hacer la composición con cualquier matriz envolvente es equivalente a multiplicar por un escalar. La regla, así vista, es un caso particular del producto de dos matrices cuando una de las dos matrices es múltiplo de la matriz idéntica.
14. Cayley habla del producto de más de dos matrices: Nosotros podemos, de alguna manera, componer tres o más matrices; el orden de arreglo de los factores es importante y nosotros podríamos distinguir luego como la primera o extremo, segunda, tercera, etc. y la última de la matriz compuesta, pero dos factores consecutivos pueden ser compuestos y reemplazados por una sola matriz. Cayley está afirmando la propiedad asociativa en el producto de las matrices. El resultado es independiente del modo particular del cual se componga el orden de las matrices.
15. Define las potencias enteras y positivas de una matriz. Si L es una matriz entonces $L^p L^q = L^{p+q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

16. Continuando con las propiedades, Cayley define el producto $L^p \cdot L^o = L^p$ donde $L^o = I$, es decir, la potencia cero sobre una matriz es igual a la matriz unitaria. Además, $L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I$, a la matriz L^{-1} la llaman inversa o matriz recíproca.

17. Define la matriz inversa así:

Dada una matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\nabla} \begin{pmatrix} \partial_a \nabla & \partial_{a'} \nabla & \partial_{a''} \nabla \\ \partial_b \nabla & \partial_{b'} \nabla & \partial_{b''} \nabla \\ \partial_c \nabla & \partial_{c'} \nabla & \partial_{c''} \nabla \end{pmatrix}$$

Donde ∇ denota el determinante, es decir:

$$\nabla = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix},$$

Y cada ∂_a corresponde a lo que ahora conocemos como cofactor, a continuación, un ejemplo:

$$\partial_a = \det \begin{pmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{pmatrix}$$

Nótese, que en el cálculo de la matriz inversa, se utiliza la matriz adjunta utilizando cofactores, pero no lo define como tal, y utiliza una notación diferente de la actual.

18. Cayley aclara que cuando el determinante es cero, la anterior definición falla; en este caso decimos que la matriz es indeterminada. Así también la matriz cero es indeterminada, y el producto de dos matrices puede dar como resultado cero, sin que ninguna de las dos sea la matriz cero.

19. A partir de las definiciones anteriores, establece las potencias negativas de una matriz como potencias positivas de su inversa.

20. Utilizando potencias y escalares de una matriz, define el polinomio de grado n de la matriz M , como:

$$P(M) = aM^n + bM^{n-1} + \dots + zM^0$$

21. A partir de la definición anterior, presenta un caso particular así:

Sea M la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Al desarrollar el determinante:

$$\begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix}$$

tiene:

$$P(M) = M^2 - (a + d)M + (ad - bc)M^0$$

La cual es una función de M .

Ahora, al reemplazar M en la ecuación anterior se obtiene la matriz cero, es decir, los valores de M^2, M, M^0 respectivamente son:

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Luego, realiza el cálculo explícito y demuestra que al remplazar M en la ecuación se obtiene la matriz cero, esto es

$$\begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix} = 0$$

donde la matriz del determinante es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta definición hace parte de la demostración del teorema Cayley-Hamilton que enunciamos anteriormente.

22. Cayley introduce una notación análoga a lo que llamamos hoy el polinomio característico de la matriz M en función de sus valores propios, los que Cayley denota como:

$$\tilde{M}: \text{Det}(M - \tilde{M} \cdot 1) = 0.$$

23. Verifica el anterior teorema para el caso de una matriz 3×3 .

24. Una matriz cualquiera siempre satisface su propia ecuación algebraica, lo cual es la parte sustancial del teorema enunciado en el punto 20. (Cayley, 1858, pág. 24)

25. Presenta un ejemplo (Monroy, 2011, pág. 62), Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se requiere encontrar $L = \sqrt{M}$. En este caso M satisface la ecuación:

$$M^2 - (a + d)M + (ad - bc)M^0 = 0$$

y si $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, entonces satisface la ecuación:

$$L^2 - (\alpha + \delta)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)L^0 = 0$$

Ahora, como $L = M^2$ podemos escribir a L en términos de M así:

$$L = \frac{1}{\alpha + \delta} [M + (\alpha\delta - \beta\gamma)]$$

Y para escribir las entradas de L en función de las entradas de M hace

$$x = \alpha + \delta \quad y \quad \alpha\delta - \beta\gamma = y$$

Luego

$$L = \begin{pmatrix} \frac{a+y}{x} & \frac{b}{x} \\ \frac{c}{x} & \frac{d+y}{x} \end{pmatrix}, \text{ con } x = \sqrt{P + 2\sqrt{Q}}, \quad y = \sqrt{Q}.$$

Donde

$$P = a + d \quad \text{y} \quad Q = ad - bc.$$

Hace luego la observación que el signo de $\sqrt{Q}$ es el mismo en ambas expresiones y en consecuencia el radical $\sqrt{M}$ tiene cuatro valores.

26. Cayley ilustra un poco más lo descrito en el punto anterior, toma $L^2 = M^2$.
27. Define que las raíces de un polinomio característico asociado a una matriz 2×2 se consideran envolventes de la matriz unitaria.
28. Un polinomio característico puede tener varias matrices que satisfagan su ecuación.
29. Define lo que actualmente se conoce como matriz nilpotente de orden k . Veamos un ejemplo en términos modernos:

La matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es nilpotente, ya que $M^2 = 0$. En términos más generales,

actualmente decimos que una matriz cuadrada cuyos elementos por encima o por debajo de su diagonal principal son cero (matriz triangular) es nilpotente.

30. Da un ejemplo de lo anterior para una matriz 3×3 .
31. Cayley da una definición un poco más general de la matriz periódica, estableciendo que $M^2 - k = 0$ entonces M es una matriz periódica.
32. Generaliza la anterior definición, diciendo que en algunos casos es más conveniente referirse a la ecuación $M^n = k$, se puede decir que M es periódica de orden n .

33. Define que M y L son matrices conmutables cuando $ML = LM$. Además, presenta un caso particular para las matrices 2×2 .

34. M y L no son conmutables cuando $ML = -LM$. Note que esta definición de anticonmutatividad está relacionada con un resultado que encontró Hamilton en su trabajo con cuaterniones.

35. Cuando se componen dos matrices LM y ML y son similares, ellas son de signo positivo o negativos, entonces son conmutables o anticonmutables respectivamente.

36. Define lo que hoy llamamos transpuesta de una matriz.

37. Enuncia la propiedad de matrices transpuestas:

$$(tr. M)^p = tr. (M^p)$$

y en particular dice:

$$tr. (M^{-1}) = (tr. M)^{-1}$$

38. Enuncia otra propiedad:

$$tr. (L.M) = tr. M. tr. L$$

La notación de Cayley difiere muy poco de la notación actual

40. Una matriz que no se altera después de la transposición se define como matriz simétrica.

41. Cayley define la matriz antisimétrica como la matriz M tal que:

$$tr. M = -M$$

42. Cayley realiza la suma de los ejemplos generales de matriz simétrica y antisimétrica que ha dado para matrices 3×3 así:

$$\begin{pmatrix} a & h+v & g-u \\ h-v & b & f+\gamma \\ g+u & f-\gamma & c \end{pmatrix}$$

Y afirma que es fácil ver que cualquier matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, que a la luz de hoy y con su notación sería:

$$M = \left(\frac{M + \text{tr}.M}{2} \right) + \left(\frac{M - \text{tr}.M}{2} \right).$$

Se prueba fácilmente la primera matriz es simétrica y la segunda es antisimétrica, lo cual probaría la afirmación de Cayley. (Monroy, 2011, pág. 62)

43. El producto de una matriz por su transpuesta da como resultado una matriz simétrica.

44 y 45. Presenta una relación entre matrices similar a la que presentó Hamilton en la teoría de cuaterniones:

si L y M son dos matrices anticonmutativas y además $L^2 = -1$ $M^2 = -1$ si llamamos $N = L.M$ entonces $N = -L.M$ y en consecuencia $N^2 = -1$ lo cual dice que es un sistema de relaciones similar a la teoría de cuaterniones. (Cayley, 1858, pág. 32)

46. Las potencias enteras de una matriz M se pueden obtener a través de su ecuación característica. Esta afirmación hace parte de la demostración de teorema Cayley-Hamilton que mencionamos anteriormente.

De los puntos 47 a 51 presenta una serie de propiedades relacionadas con las potencias de una matriz.

52. Clasifica las matrices rectangulares en extensas cuando el número de columnas excede el número de filas y profundas cuando el número de filas es mayor que el número de columnas.

53. la matriz cero existe para matrices rectangulares, mientras que la matriz unitaria no; así mismo la suma y la resta en dos matrices con igual número de filas que de columnas se puede extender para matrices rectangulares.

54. La operación multiplicación se puede realizar en aquellas matrices rectangulares que por izquierda tengan el mismo número de columnas igual al mismo número de filas de la matriz por derecha.

55. Da varios ejemplos de composición entre matrices rectangulares 2×3 , 3×2 y 2×4 .

56. Muestra ejemplos en el que se puede componer dos matrices en orden distinto.

57. Nociones como inversa y potencia de una matriz no pueden extenderse a matrices rectangulares.

58. La matriz transpuesta si se puede aplicar a matrices no cuadradas, mientras que la matriz simétrica y antisimétrica no.

La introducción que hace Cayley en este documento nos deja ver cómo a partir de un sistema de ecuaciones lineales cimenta la noción de matriz del mismo tamaño. En efecto, estamos en presencia del surgimiento de un universo de objetos matemáticos a los cuales va a dotar de operaciones, propiedades y un buen número de resultados teóricos aún vigentes

En la dirección del álgebra lineal y teniendo en cuenta los hallazgos historiográficos, Cayley en los numerales 3, 4, 5, 6, 7 y 8 expuestos anteriormente. Da un ejemplo implícito, particular

de espacio vectorial, sin existir, para aquel momento, la definición de espacio vectorial. Este ejemplo que aporta Cayley es de una naturaleza totalmente distinta a otros ejemplos que presenta la historia, como es el caso de los números reales, las parejas ordenadas (R^n), los polinomios. Es decir, la historia nos muestra que primero se dota de estructura algebraica a los objetos matemáticos, como por ejemplo las matrices, polinomios, parejas ordenadas, cuaterniones etcétera, y después esa estructura algebraica común a diversos conjuntos de objetos de distinta naturaleza, necesita de una nuevo “levantamiento” o abstracción para etiquetarlos a todos como: “espacios vectoriales”.

En la obra de Cayley, el principio de permanencia, ya salvado por Hamilton diez años antes, cobra el mismo lugar importante y estabilizador que tuvo en la teoría de cuaterniones.

Hacia finales del siglo XIX se fueron desarrollando las primeras prefiguraciones axiomáticas asociadas al concepto de espacio vectorial. Para aquel momento, las relaciones y la red que se había entretejido entre la geometría y el álgebra habían cobrado importancia por la proliferación de muchos desarrollos matemáticos.

Axiomatización del concepto de espacio vectorial

Todo conjunto no vacío dotado de dos operaciones cualesquiera $(+,\cdot)$, que cumplan una suerte de propiedades que más adelante especificaremos, recibe el nombre de *espacio vectorial*. Además, sin importar su naturaleza, sus objetos (funciones, polinomios, matrices, etcétera) pasarán a llamarse *vectores*. Debe entenderse que el antiguo vector algebraico o geométrico pasa a ser un caso particular de vector en este nuevo sentido. Este nombre es un mero capricho del lenguaje matemático, bien podría ser espacio matricial, y en este caso los elementos pasarían

a ser matrices. Grassmann, un adelantado a su época, intuye los problemas que este tipo de nombres traería para la mayoría de las personas que intenten acercarse al concepto y, en su obra, propone lo que considera un nombre más apropiado a los elementos de un conjunto con estas características, pero no logra hacerse entender de sus contemporáneos. Es solo en el inicio de la época del estructuralismo en las matemáticas que su trabajo es retomado por Peano y surge, al menos en el caso finito, el concepto central del álgebra lineal

2.5 La complejidad en el trabajo de Hermann Grassmann

Herman Grassmann (1809-1877) nació en 1809 en Stettin Alemania; no tuvo formación universitaria formal en matemáticas; en los años de su secundaria, su padre consideró que no tenía habilidades para las ciencias y llegó a pensar que dedicaría su vida al arte.

Entre los años 1832 a 1864, Grassmann desarrolla sus primeros descubrimientos en el campo de las matemáticas. Una de sus primeras contribuciones a las matemáticas fue su ensayo *Theorie der Ebbe und Flut* de 1840, basado en su interés por matematizar los fenómenos de las turbulencias y las mareas. Al parecer su trabajo se basó en la *Mécanique analytique* de Lagrange y la *Mécanique céleste* de Laplace, pero exponiendo toda su teoría por métodos vectoriales.

Su obra más significativa fue escrita en 1844 titulada *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, más conocida como *Ausdehnungslehre*, que se puede traducir como *Teoría de la extensión* o *Teoría de las magnitudes extensivas*. Para esta obra, Grassmann recurrió a sus habilidades como lingüista profesional y a sus conocimientos filosóficos para dotarla de una extensa introducción, justificando cualquier idea desde su postura filosófica y

definiendo todos los conceptos con palabras del lenguaje alemán, recurriendo a novedosos símbolos, que incluso ni los mismos matemáticos alemanes conocían. La comunidad matemática de la época, incluyendo los matemáticos alemanes, criticaron fuertemente su obra. Como consecuencia, pocas personas la leyeron con detalle. Fue años después de su muerte en 1877 que se reconoció el valor matemático de esta.

Para la época, esta teoría ofreció una perspectiva totalmente nueva de la geometría, así como la relación entre lo que después se llamaría álgebra lineal y la geometría. Aunque su trabajo estaba fundamentado en la intuición geométrica, Grassmann adoptó un punto de vista formalista. Su texto se caracteriza por capítulos meramente formales, cargados de largas listas de nuevos conceptos, con ideas desarrolladas desde lo abstracto y con algunas aplicaciones al final de cada capítulo. Grassmann plantea que la geometría, solo debería constituir una mera aplicación de una teoría formal en una nueva rama de las matemáticas: construyó un vasto edificio algebraico-geométrico, basándose en una concepción geométrica “intrínseca” (ya más o menos axiomatizada) del espacio vectorial de n dimensiones. (Bourbaki N. , 1976, pág. 93). Esta perspectiva va en la misma dirección de lo que hemos rastreado a lo largo de varios matemáticos y tiene que ver con el replanteamiento que se dio entre la relación de la geometría y las matemáticas en general. Como lo hemos reiterado, la geometría fue por mucho tiempo el lugar de validación de las construcciones matemáticas.

El trabajo de Grassmann influenció indirectamente el desarrollo de la geometría, la teoría de espacio vectorial y por ende la evolución del álgebra lineal. Aunque no cabe duda de que tenía clara la definición actual de espacio vectorial, no presentó ninguna definición formal explícitamente. Su obra es retomada cincuenta años después por distintos matemáticos, entre

ellos Giuseppe Peano, dándose la primera axiomatización del concepto de espacio vectorial de dimensión finita; la definición general de espacio vectorial se la debemos a Hermann Weyl, en 1920. Las concepciones filosóficas que soportan toda su propuesta matemática permiten entenderla y justificar el por qué del rechazo de la comunidad matemática de la época a sus ideas. Antes de dar una mirada a algunos aspectos importantes de su obra, hablaremos sobre las concepciones filosóficas que soportan toda su propuesta matemática.

2.5.1 Concepciones filosóficas de Grassmann

El lenguaje en el que Grassmann presenta sus ideas está permeado por su formación como lingüista y por sus concepciones filosóficas sobre la ciencia. Estas dos circunstancias, que complejizaron su trabajo, no favorecieron que su obra despertara algún interés en sus contemporáneos. En la obra *Ausdehnungslehre* exhibió su teoría sin dar explicaciones sobre el estilo que utilizaría en la presentación de cada uno de los capítulos, con el objetivo de poder llegar a ser leído; pero añadió un prólogo en la que intenta explicar la teoría filosófica que justifica la presentación de cada uno de los conceptos. Aun así, su obra no logró un impacto inmediato, pero medio siglo después y aún hoy sigue siendo estudiada.

Una de las preguntas a resolver por la comunidad matemática con respecto a Grassmann, era el porqué de sus concepciones filosóficas frente a la matemática y la ciencia en general, cuestión que no fue fácil de resolver pues Grassmann no dejó muchas pistas sobre ello en ninguna de las dos ediciones de su obra (1844 y 1862).

Fue Albert Lewis quien expuso un análisis detallado, en los *Anales de Science* (1977), sobre las marcadas coincidencias que tenía la postura filosófica de Grassmann con la propuesta

teórica de Friedrich Schleiermacher (1768-1834), quien era filósofo, religioso y además profesor de filosofía de Grassmann en una clase que había tomado junto a su hermano.

La dialéctica de Schleiermacher se explica como (Petsche, 2014):

Ese pensamiento que está en camino a ser conocimiento; aparece como la teoría del arte de establecer conocimiento, pero no esto como el conocimiento mismo, y como esa teoría del arte del pensamiento, que trata del pensamiento que se esfuerza por el conocimiento o trata con el conocimiento a medida que se convierte en conocimiento, [y] problematiza el lugar sistemático de la unidad de los opuestos (relativos) en el especial, individualidad inalienable de un sujeto pensante que está en proceso de construir su conocimiento.

Además, el método dialéctico de proceder por medio de los opuestos se ve reflejado en la obra de Grassmann, Lewis explica este método a la luz de la organización de conceptos en el *Ausdehnungslehre* y siguiendo los objetivos de la dialéctica de Schleiermacher, que pretende ser la herramienta para la construcción de nuevos conocimientos (Petsche, 2014, pág. 556):

- El Uno y los muchos aparecen en algún aspecto en cada contraste, por ejemplo, general y particular, continuo y discreto, e igual y diferente.
- Relativismo: cada una de las dos cualidades opuestas depende de la otra para su definición y no se debe pensar que describe un existente puro que tiene esta cualidad solo.

- Falta de resolución: la esencia de la realidad está representada por la tensión entre elementos opuestos en lugar de su síntesis o resolución; y
- Los contrastes se utilizan como determinantes de los conceptos y del género de la especie relaciones entre esos conceptos. En la mayoría de los casos, estas características serán evidente por sí mismo cuando se presentan los pasajes relevantes de *Ausdehnungslehre*
- Estos cuatro puntos podrían complementarse con un quinto, que también corresponde específicamente a la dialéctica de Schleiermacher. A saber, la construcción del conocimiento se produce mediante el doble cruce de los opuestos.

Lewis afirma que (Lewis, 1977)

La complementariedad de rigor y visión general proporciona el contraste final que hace que el *Ausdehnungslehre* sea un todo consistente en su metodología. Este contraste lo ilustra Schleiermacher donde presenta el original significado de 'heurístico' (...) Él dio a entender que una de las principales ventajas de este método fue su referencia frecuente a la original intuición. Grassmann deja claro en su obra que el desarrollo riguroso de la ciencia se desarrolla desde los conceptos elementales, mientras que la visión general se establece relacionando constantemente la deducción de nuevos conceptos a la geometría "la cual es la base de nuestra ciencia".

Grassmann presenta esta oposición de conceptos haciendo la distinción entre la dialéctica que estaría asociada a la lógica y lo opuesto que sería la teoría de formas relacionado con la matemática pura; (Dorier, 2000, pág. 23) explica el uso de los opuestos así:

Un opuesto hace un antagonismo entre dos polos, pero ellos son dos lados de una sola idea. Por ejemplo, dos objetos no pueden pensarse como iguales si ellos no han estado previamente opuestos de tal manera que ellos pudieran aparecer como distintos. Por consiguiente, la noción de opuesto no es absoluta, pero, al contrario, refleja la relatividad del pensamiento que lleva sistemáticamente a analizar cosas desde ángulos opuestos y complementarios, de esta manera es un componente dialectico esencial del proceso de pensamiento.

2.5.2 La teoría de extensión por Hermann Grassmann

Sin el ánimo de atribuir más valor del que ya tiene la obra de Grassmann de 1844, se presenta en esta parte, entre otros, los conceptos que se pueden cotejar con los actuales conceptos de: dependencia lineal, independencia lineal, conjunto generador, conjunto generado, vector de coordenadas y, por supuesto, espacio vectorial

En su primer capítulo encontramos las definiciones que dan cuerpo a la teoría de espacio vectorial. Grassmann inicia dando una noción muy próxima al concepto de *combinación lineal* así:

digo que una magnitud a se deriva de las magnitudes $b, c, \dots$ por los números $\beta, \gamma, \dots$ si

$$a = \beta b + \gamma c + \dots$$

donde $\beta, \gamma, \dots$ son numeros reales, racionales o irracionales, diferentes o no de cero. También digo que a es numéricamente derivado de $b, c, \dots$

Seguidamente define lo que actualmente llamamos el concepto de *dependencia lineal*:

Es más, digo que dos o más magnitudes extensas $a, b, c, \dots$ están sujetas a una relación numérica o que el conjunto de magnitudes extensas $a, b, c, \dots$ está sujeto a una relación numérica, si puede derivarse cualquiera de ellos numéricamente de los otros, es decir si no se puede escribir, por ejemplo: $a = \beta b + \gamma c + \dots$ Donde $\beta, \gamma, \dots$ son números reales. En caso en que el conjunto contiene sólo una magnitud a , diremos que el conjunto está sujeto a una relación numérica, sólo si $a = 0$.

A continuación, Grassmann define la unidad así:

Llamo unidad a cualquier magnitud que permite derivar una serie de magnitudes numéricamente y llamo a esta unidad primitiva, si no puede derivarse numéricamente de cualquier otra unidad. Llamo la unidad de números, que es uno, unidad absoluta y las otras las llamo unidades relativas. Cero nunca puede servir como una unidad.

Como se había mencionado, Grassmann tenía la fuerte intención de separar las matemáticas de las aplicaciones; la geometría la consideraba como un contexto de aplicación de las matemáticas; esta afirmación se puede ver en la cita anterior donde define *unidad*. Parte de la unidad numérica uno, reales diferentes de cero pueden ser unidad; el uno lo llama unidad absoluta y a los otros (diferentes de cero) unidades relativas. La *unidad* relativa que define Grassmann es equivalente al papel del elemento generador en un espacio vectorial.

En la siguiente afirmación, define conjunto linealmente independiente y base:

Llamo sistemas de unidades cualquier conjunto de magnitudes, que no están en relación numérica una con otra. Esto permite derivar otras magnitudes numéricamente por medio de números arbitrarios.

A continuación, define como magnitud extensiva lo que equivale a la definición de vector en términos de espacios vectoriales, es decir, pueden tratarse de funciones, polinomios, matrices cuadradas, etc. Los números que pertenecen a las unidades corresponden a los vectores de coordenadas.

Llamo magnitud extensa cualquier expresión que se deriva numéricamente de un sistema de unidades (aun no reducida a la unidad absoluta), y llamo a los números que pertenecen a las unidades, la derivación numérica de esta magnitud.

Grassmann define la multiplicación exterior y después la multiplicación interior, con lo cual proporciona las herramientas para resolver problemas propios del álgebra lineal, además define todas las operaciones que se pueden realizar entre magnitudes y sus propiedades, aunque uso otros nombres dedujo de manera precisa lo que hoy llamamos espacios vectoriales.

2.6 Hacia una axiomatización de espacios vectoriales.

Basado en el trabajo de Grassmann, el matemático, lógico y filósofo italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) presenta uno de los primeros acercamientos axiomáticos a la teoría de espacios vectoriales. En su obra titulada *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdhenungslehre di H. Grassmann e preceduto dalle Operazioni della logica Deduttiva* en el que presenta con más claridad los aspectos básicos del trabajo de Grassmann, aunque también limitado a la geometría.

Este es un importante aspecto que destacar ya que el referente geométrico, del que incluso Peano no logró desprenderse, ocultó en parte la riqueza y la naturaleza propia de su obra. En la obra de Peano hay dos capítulos que parecen desvinculados de toda la obra, el primero y el último. El primer capítulo está dedicado a los fundamentos de lógica deductiva, cuyo desarrollo presenta muchas similitudes con el álgebra y el cálculo geométrico. Este capítulo es en sí mismo una herramienta base para consolidar un lenguaje propio de las matemáticas y para el desarrollo de muchas ramas matemáticas.

Los siguientes ocho capítulos tratan sobre la clasificación de objetos geométricos y sus operaciones, así como la aplicación de éstas en el cálculo infinitesimal. El octavo capítulo tiene relación con una obra que ya había publicado (Peano, 1887) *Aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal*; el último capítulo, el de nuestro mayor interés presenta una organización axiomática de lo que él llamó sistema lineal que, en términos modernos, corresponde al concepto de espacio vectorial.

Vemos los axiomas que presenta Peano (Traducción de su obra original):

Existen sistemas de entidades para los que se dan las siguientes definiciones:

1. Se define la igualdad de dos entidades a y b del sistema: significa que se define una proposición, escrita como $a = b$, que expresa una condición entre las dos entidades del sistema, satisfecho por algunos pares de entidades y no satisfecho por otros pares, y que satisface las ecuaciones lógicas:

$$(a = b) = (b = a), (a = b) \cap (b = c) \leq (a = c)$$

2. La suma de dos entidades $a + b$ es definida así: significa que se define una entidad, escrita $a + b$, que pertenece nuevamente al sistema dado y que cumple las condiciones:

$$(a = b) < (a + c = b + c), \quad a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c$$

y se escribirá el valor común de los dos lados de la última igualdad $a + b + c$.

3. Que a sea una entidad del sistema, y m un entero positivo, con la expresión ma designamos la suma de m entidades igual a a . es fácil de ver, dado $a, b \dots$ entidades del sistema, $m, n, \dots$ enteros positivos, que

$$(a = b) < (ma = mb);$$

$$m(a + b) = ma + mb;$$

$$(m + n)a = ma + na;$$

$$m(na) = (mn)a; 1a = a$$

suponemos que se da un significado a la expresión ma , para cualquier número real m , de modo que las ecuaciones anteriores todavía se satisfacen. La entidad ma se llamará el producto del número (real) m por la entidad a .

4. Finalmente suponemos que existe en el sistema una entidad, a la que llamamos entidad cero, y designamos por 0 , de modo que, para cualquier entidad a , el producto del número 0 por la entidad a siempre hará que la entidad 0 , $0a = 0$. Si le damos a la expresión $a - b$ el significado de $a + (-1)b$, se deduce que

$$a - a = 0;$$

$$a + 0 = a$$

Definición: Los sistemas de entidades para los cuales las definiciones 1, 2, 3, 4 se dan de tal manera que se satisfacen las condiciones dadas, se llaman *sistema lineal*.

CAPÍTULO 3

Aspectos históricos didácticos

3.1 Panorama general

A lo largo de este trabajo se utiliza la metodología que propone el historiador Jean Luc Dorier, quien presenta una perspectiva teórica novedosa basada en crear una dialéctica entre las investigaciones en Didáctica y las investigaciones en Historia, a través de una reflexión epistemológica continua entre ellas. Dorier identifica dos focos o direcciones en la relación entre Historia y la Didáctica de las matemáticas:

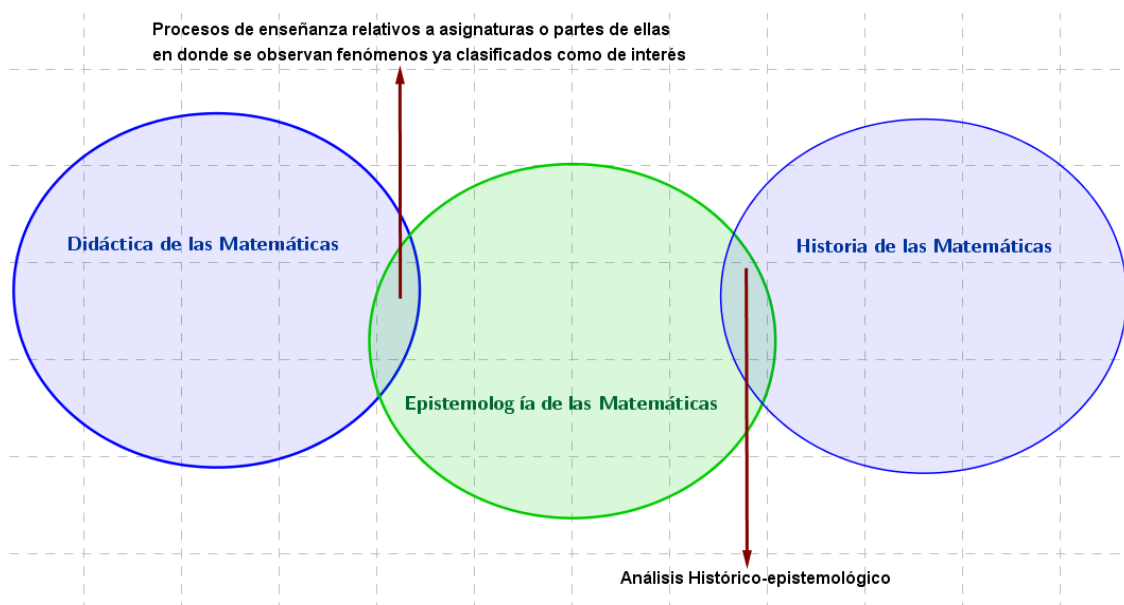


Ilustración 15: Interacciones entre la Didáctica de las matemáticas y la historia.

Nota. Modificado por Sandra Chavarría, tomado de “Investigaciones en Historia y en Didáctica de las Matemáticas Sobre Álgebra Lineal: Perspectivas Teóricas sobre sus interacciones”, Traducción de Delgado C., (2005) al documento *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l’Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions* de Dorier J.L. (2000)

Por un lado, en la dirección historia- didáctica de las matemáticas, Dorier propone pensar la Historia de las matemáticas de tal forma que permita, mediante algunos aspectos epistemológicos, tener una implicación en la Didáctica de las matemáticas, es decir, que el didacta pueda aprovechar la riqueza histórica de un concepto a la hora de seleccionar sus variables didácticas y diseñar estrategias para intervenir en situaciones.

En esta misma dirección historia- didáctica, Dorier considera que en el análisis didáctico se debe estudiar la constitución y evolución histórica de un conocimiento matemático y su desarrollo hasta llamarse saber enseñado. Este proceso está enmarcado en lo que conocemos como “transposición didáctica”, tema que abordaremos más adelante y del que Dorier (2000) habla como un proceso complejo.

Lo novedoso del trabajo de Dorier no solo va en la dirección historia- didáctica de las matemáticas, sino que también propone un camino para ir de la Didáctica de las matemáticas a la Historia: ver la Didáctica de las matemáticas a través de una epistemología, que podríamos llamar epistemología didáctica, nos permite encontrar respuesta de las prácticas del saber que no es posible encontrarlas solo en la historia de las matemáticas.

Para ejemplificar el modelo de Dorier, es necesario presentar algunas ideas del concepto de transposición didáctica. Este concepto, introducido por Yves Chevallard (1991), consiste básicamente en el análisis de la transformación que sufre un objeto matemático desde su emergencia como saber sabio o académico, validado por la comunidad matemática, pasando por el proceso de constitución en objeto de enseñanza, hasta convertirse en objeto enseñado.

En una fase inicial, encontramos una presentación axiomática formal de los saberes académicos (teoría) que explican el objeto matemático. En nuestro caso, la teoría de espacios vectoriales. Un ejemplo de esta fase es la propuesta que hizo el grupo Bourbaki a la comunidad matemática en 1943 sobre el estado del arte de la teoría de espacios vectoriales que fue presentada en el capítulo II de lo que corresponde a la primera parte de álgebra abstracta. Este capítulo, aunque se titula álgebra lineal, en su introducción advierte que será dedicado al estudio de un tipo especial de grupos conmutativos con operadores, llamados módulos. En este sentido los Bourbaki señalan en el texto de historia *Eléments d'histoire des Mathématiques* (1972), que el álgebra lineal había sido relegada a la resolución de ecuaciones de primer grado y es solo hasta el reconocimiento de la linealidad presente en general en las estructuras algebraicas que hacían parte del álgebra abstracta, que para aquel entonces, se le da un trato especial incluyéndolo en un capítulo:

...Por otra parte, no solamente estas cuestiones, sino casi todo lo referente a las ecuaciones de primer grado, habían sido relegadas hacía mucho tiempo a la enseñanza elemental, cuando el desarrollo moderno de las nociones de cuerpo, de anillo, de espacio vectorial topológico, etc., vino a poner en evidencia y a valorar las nociones esenciales del Álgebra lineal (por ejemplo: dualidad); es entonces cuando se percibió el carácter esencialmente lineal de casi toda el álgebra moderna, de la que esta “linealización” es una de las propiedades más características, y cuando se volvió a situar el álgebra lineal en el lugar que le correspondía. (Bourbaki N. , 1976, pág. 85)

A pesar del reconocimiento que encontramos en el texto de historia de los Bourbaki al álgebra lineal, el concepto central (espacio vectorial) se presenta subordinado por un concepto más general del álgebra abstracta como es el concepto de módulo (Bourbaki N. , 1943):

Dado un anillo A , un módulo a izquierda de A es un conjunto E con una estructura dada por:

1. Un grupo aditivo conmutativo en E ;

Tomando de capítulos anteriores de este mismo libro de Bourbaki, lo anterior significa que:

Dados x, y, z :

- I. $x + y \in E$
- II. Existe un elemento $e \in E$ tal que $ex = x$.
- III. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in E$.
- IV. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y \in E$.
- V. Existe un $-x$ para todo x tal que $x + (-x) = e$.

2. Una ley de acción. $(\alpha, x) \rightarrow \alpha Tx$, donde $Tx \in A$ la cual satisface los siguientes axiomas:

$$M_I: \alpha T(x + y) = \alpha Tx + \alpha Ty \text{ para todo } \alpha \in A \text{ y } x \in E \text{ y } y \in E.$$

$$M_{II}: (\alpha + \beta)Tx = \alpha Tx + \beta Tx.$$

$$M_{III}: \alpha T(\beta Tx) = (\alpha\beta)Tx \text{ para todo } \alpha \in A, \beta \in A \text{ y } x \in E.$$

$$M_{IV}: 1Tx = x \text{ para todo } x \in E.$$

Para definir un módulo por derecha, basta con reemplazar el axioma M_{III} por M^I_{III} :

$$\alpha T(\beta Tx) = (\beta\alpha)Tx.$$

Cuando se habla de A –módulos por derecha o izquierda los elementos de A son habitualmente llamados escalares.

Usualmente la operación externa de un A módulo por izquierda o derecha se expresa multiplicativamente, es decir, $M_{III}: \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ por $M^I_{III}: (\alpha\beta)x = x(\beta\alpha)$. En consecuencia, si el producto en A es conmutativo un módulo por derecha también lo es por izquierda.

Después de describir la operación como un homomorfismo y mencionar varias propiedades que se desprenden de los axiomas de A -módulo se define a partir de los términos ya dados, un espacio vectorial, así:

Un espacio vectorial a izquierda sobre un campo K es un K -módulo a izquierda.

Es decir, un espacio vectorial es un A -módulo donde A es un campo y se insinúa, sin llegar a definirse, que los elementos de un espacio vectorial son a veces llamados vectores.

La diferencia entre la presentación del concepto de espacio vectorial dado en la obra de los Bourbaki y la forma como es presentado hoy en los libros clásicos de álgebra lineal, nos proveen un ejemplo concreto y situado del concepto de transposición didáctica. Es clave señalar que la presentación axiomática formal de la teoría sobre un objeto esconde las transformaciones que ha sufrido. Por ejemplo, cuando definimos un concepto en la teoría de espacio vectorial como la dependencia e independencia lineal, la teoría presenta las definiciones sin importar lo que pasó en la historia, se deja de lado las dificultades que se tuvieron en la historia para su constitución y las particularidades de la génesis histórica del proceso, es decir que la teoría sufre un proceso de descontextualización histórica.

El producto final, la definición en la teoría o el enunciado del teorema en la teoría, esconde todas las heurísticas empleadas por el o los autores, los errores cometidos, los caminos erróneos o inocuos que se dan:

Antes de comunicar lo que piensa que ha encontrado, un investigador tiene que determinarlo: no es fácil distinguir, en el laberinto de las reflexiones, cuáles son susceptibles de convertirse en un saber nuevo, e interesante para los otros; las demostraciones obtenidas, pocas veces coinciden con las conjeturas previas; hay que proponerse toda una reorganización de los conocimientos más próximos, anteriores o nuevos. (Brousseau, 1986, pág. 2)

Además, antes de comunicar a la comunidad matemática se debe realizar una tarea no menos onerosa; sintetizar, decantar y comunicar el hallazgo conceptual libre de errores:

También es necesario suprimir todas las reflexiones inútiles, la huella de los errores cometidos y los caminos erráticos. Es necesario esconder las razones que han conducido en una determinada dirección y las condiciones personales que han presidido el éxito, problematizar hábilmente ciertos logros, incluso los más triviales, evitando, a la vez, las trivialidades... Es necesario además encontrar la teoría más general en la que los resultados sigan siendo válidos... De esta manera, el productor de saber despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados. (Brousseau, 1986, pág. 2)

Por el contrario, si el productor del saber sabio descontextualiza, uno de los propósitos del historiador con vocación didáctica, es el de desmontar el formalismo propio del objeto y más bien restituirle las heurísticas asociadas a cada etapa crucial de su construcción, entendiendo

que en estas heurísticas están las ideas y preconcepciones que movilizaban a los matemáticos, cómo trabajaban con los objetos, sus prácticas, su creatividad para llegar al objeto, las concepciones en ciertos momentos; conocer esta información da cuenta de la reorganización del objeto en el contexto matemático y su relación con otros objetos.

En el capítulo 1 y 2 se tienen varios ejemplos de momentos históricos donde las creencias, las concepciones, los preconceptos son los que movilizan las prácticas de los matemáticos y aunque en algunos de ellos no se consolida el concepto, el didacta debe conocer ese proceso heurístico y entender la importancia del camino que se recorrió.

Uno de estos ejemplos es el trabajo de Hermann Grassmann. Tal como se presentó en el apartado del capítulo 2, sus aportes no fueron reconocidos como una aproximación a la axiomatización del concepto de espacio vectorial ni logró una posición social importante. Al parecer, la razón de ese rechazo fue la poca claridad en sus posturas filosóficas y las redefiniciones de algunos conceptos, los cuales argumentó partiendo de la lingüística, es decir, el interés de Grassmann por darle un soporte filosófico amplio y por definir con nuevas palabras algunos conceptos, se debió a su experticia como lingüista y especialista en literatura. En efecto, sus ideales y sus conocimientos permearon fuertemente sus aportes al concepto de espacio vectorial. Su obra es retomada cincuenta años después por distintos matemáticos, entre ellos Giuseppe Peano, dándose la primera axiomatización del concepto de espacio vectorial de dimensión finita.

Ahora bien, el objeto del saber matemático sufre cambios adaptativos cuando es incluido en los currículos académicos y es considerado como un contenido importante a enseñar. Es aquí

donde el saber recibe el nombre de “saber a enseñar”: es aquel que la comunidad (agentes de la enseñanza de las matemáticas) considera integrar a la enseñanza escolarizada. Los textos y las publicaciones son la fuente principal en el análisis del saber a enseñar, ya que son productos tangibles de la transformación que sufre el saber, en ellos encontramos una propuesta de cómo enseñar cierto saber matemático, una organización “lineal” y “lógica”:

El saber matemático inscrito en el texto escolar es susceptible de una valoración sociocultural que *grosso modo* depende de la valoración que la época hace de las matemáticas como discurso con determinada estructura interna, su función social, su capacidad explicativa, sus aplicaciones, etc. Estas valoraciones influyen en el saber enseñado. (Arboleda & Castrillon, 2007, pág. 16)

Es así como los textos tienen características generales que permiten ser analizados con el fin de describir el objeto como saber a enseñar:

1. Los textos se elaboran con una clara y explícita intención didáctica; esto es, sus autores tienen el propósito de enseñar, y sus lectores el de aprender.
2. Los textos son una fuente central de consulta para la preparación de clases por parte del docente, y de estudio para los alumnos.
3. En los textos se desarrollan explicaciones de saberes a enseñar especificados en su contenido.
4. Los autores de los textos eligen y elaboran una forma específica de discurso explicativo de los conceptos. Forma que expresa su experiencia y conocimiento didácticos. (Bravo & Cantoral, 2012)

Una vez el profesor prepara el tema y lo pone en marcha en el aula, el saber se constituye en lo que denomina Chevallard como “saber enseñado”. Como lo mencionan Arboleda y Castrillón (2007), el profesor debería estar preparado para adaptar el objeto a enseñar, recontextualizarlo, repersonalizarlo y actualizarlo en clase, generando así un medio para acercar al estudiante al objeto. El trabajo del profesor es, en cierta medida, el proceso inverso al que realiza el científico; debe buscar para sus estudiantes los problemas de donde surja el saber cómo objeto matemático, para esto debe recontextualizarlo, creando escenarios para adaptar estos problemas a la realidad, de modo que tengan sentido para ellos.

El esquema a continuación muestra de manera gráfica las diferentes etapas de la transposición didáctica, lo que consideramos una ayuda para que el lector aclare las ideas que hemos presentado:

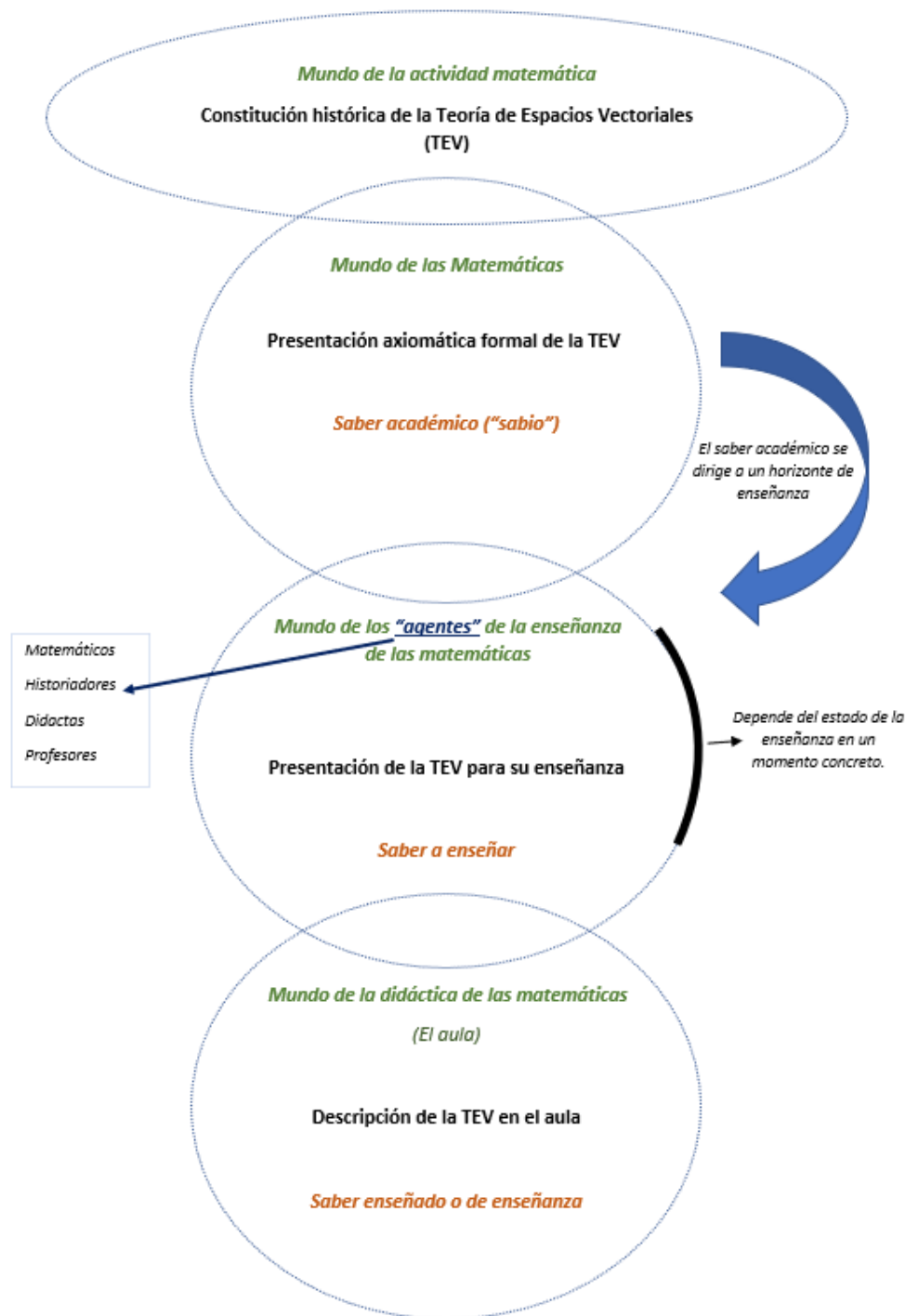


Ilustración 16: Etapas en la transposición didáctica.

Nota. Elaborado por Luis Carlos Arboleda y Sandra Chavarría (2018)

La organización lógica de los conceptos matemáticos a través de un discurso axiomático-formal como aparecen en los textos y en las publicaciones, como también en las explicaciones que tradicionalmente realiza el profesor a través de las cuales intenta hacer emerger el conocimiento en juego, se denomina “génesis ficticia”. Es ficticia, porque esta presentación axiomática formal oculta las heurísticas del proceso de su construcción en la actividad matemática. De otro lado, al conjunto de hechos que se dan en la historia, de los cuales finalmente emerge el saber sabio relacionado, se le conoce como “génesis natural”, en nuestro caso particular, corresponde a la constitución histórica de la teoría de espacio vectorial.

Con el concepto de espacio vectorial, podemos distinguir las dos definiciones mencionadas en el anterior párrafo. La presentación axiomática formal de la teoría de espacio vectorial en los cursos de álgebra lineal podemos denominarla génesis ficticia, en esta presentación se menciona un conjunto no vacío cualquiera dotado de dos operaciones que cumplen una lista de ocho propiedades que en adelante se llamará espacio vectorial y sus elementos vectores, a partir de esto se da una lista de definiciones y teoremas, desarrollando la teoría gruesa del álgebra lineal de una forma axiomático- deductiva. Se privilegia esta presentación axiomática por su simplicidad y economía en el lenguaje, organización lógica y coherente que no da lugar a contradicciones, redundancias ni equívocos:

Así llegamos a la época moderna, en la que el método axiomático y la noción de estructura (primeramente, intuitiva, y definida solo muy recientemente) nos permiten distinguir conceptos que hasta entonces habían estado indisolublemente unidos, formular con precisión lo que era vago o inconsciente,

y demostrar con la generalidad que les corresponde teoremas que solamente eran conocidos en casos particulares. (Bourbaki N. , 1976, pág. 97)

Esta simplicidad entra en conflicto con la dificultad que se le presenta a quien recibe la instrucción, la indicación no puede ser capturada por todo el mundo, la dimensión subjetiva del estudiante debe ser preparada para tener un estado cognitivo apropiado para entender la simplicidad de esta teoría.

De otro lado, para llegar a esta presentación axiomática se pasó por un proceso complejo de constitución histórica (génesis natural), que no es llevado a la escuela, pero que si es necesario que el profesor o investigador en didáctica lo conozca.

Otro ejemplo se encuentra en el caso del concepto de rango, su desarrollo histórico tal como se muestra en el capítulo 2 se da inicialmente, sin mucho éxito, en los sistemas de ecuaciones lineales y luego se vuelve a mostrar dentro de la teoría de los determinantes, para finalmente aparecer de forma general 100 años después de su asomo inicial. De otro lado, su presentación axiomática formal se da, en general, en medio del álgebra matricial, aparece como el número de pivotes de lo que se conoce como una matriz escalonada. Luego, más adelante, el concepto de rango es asociado con el de dimensión de un espacio vectorial, al menos en el caso particular de los espacios vectoriales finitos que son básicamente los que tienen lugar en el curso que analizamos.

A la luz de la teoría de transposición didáctica, es necesario señalar que el profesor se encuentra ante el saber a enseñar con ciertas limitaciones, y que para enriquecer el panorama y contar con más variables didácticas que las locales, el profesor o el investigador en didáctica

debe remontarse a fuentes de la producción del conocimiento sabio, es decir, debe hacer uso de la historia en el diseño didáctico a través del cual pretende hacer emerger un concepto o conceptos particulares. Tal como lo menciona Artigue, cuando contamos con la génesis histórica o natural narrada con una intención didáctica, tenemos un panorama más amplio, lo que llama “promontorio de observación”:

Por cierto, las restricciones que gobiernan estas génesis (artificiales) no son idénticas a aquellas que han gobernado la génesis histórica, pero esta última permanece, sin embargo, para el didacta, como un punto de anclaje del análisis didáctico, una clase de promontorio de observación, cuando se preocupa por analizar un proceso de enseñanza dado, o base de trabajo, si de lo que se trata es la elaboración de tal génesis. (Artigue, 1990, pág. 244)

En el caso particular del álgebra lineal, en el capítulo 1 y 2 detectamos algunos conceptos, como por ejemplo el de dependencia e independencia lineal, o como el de espacio vectorial, para los cuales su emergencia se da después de periodos de evolución, estancamiento e incluso retrocesos; estos momentos nos dan luces de cómo se debe tratar un concepto a la hora de enseñarlo. Estos conceptos no solo tienen que ver con el álgebra lineal, sino con las concepciones matemáticas en general. Por citar uno de los ejemplos, la solución de sistemas de ecuaciones lineales se enseña de manera muy algorítmica, en la mayoría de los textos de álgebra lineal, para mencionar el caso más trivial de sistemas cuadrados homogéneos $n \times n$, se lleva al alumno a reconocer un sistema con infinitas soluciones como aquel donde resultan menos de n pivotes.

Ahora, si nos vamos a la historia y específicamente al trabajo de Euler, se sugeriría que quien enseña álgebra lineal debería centrar el hallazgo de las infinitas soluciones en la relación existente entre las n ecuaciones del sistema, es decir, debería asociarse la naturaleza de la solución a la dependencia o no entre las ecuaciones que es lo que nos muestra la génesis histórica.

3.2 Espacios vectoriales reales de dimensión finita.

Alrededor del año 1960, la enseñanza del álgebra lineal en Francia sufrió un cambio considerable debido a la famosa Reforma de las Matemáticas modernas. De manera natural, en todos los países de influencia occidental se presentó una reforma similar; uno de los cambios fue la incorporación de la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita en la enseñanza del álgebra básica. En nuestro medio, en la educación secundaria, no solo se replanteó el papel de la geometría en la enseñanza de las matemáticas en general, sino que también se propuso un acercamiento al álgebra por la vía estructuralista. Citemos un ejemplo en el álgebra lineal para aclarar en qué consiste: “se presenta el concepto de espacio vectorial y como tarea se espera que, a partir de los axiomas dados, se puedan deducir teoremas importantes, como la unicidad del elemento neutro, sin necesariamente recurrir a los ejemplos particulares”. A pesar de que la introducción del estructuralismo se hizo con la intención de simplificar modelos y volverlos más accesibles a los estudiantes, los resultados de esta reforma se reconocen ampliamente como desastrosos, lo que condujo rápidamente a abandonar esta propuesta. La mención sobre el descontento de Louis François Antoine Arbogast con esta reforma, hecha por Fréchet en medio de un discurso, nos puede dar claridad del por qué fracasa en general el estructuralismo como método de enseñanza:

Lo que él [Arbogast] deseaba, ante todo, es proscribir el método que presenta la ciencia como una revelación divina, organizada en lemas, teoremas, corolarios, cada uno perfectamente demostrado, pero cuya sucesión se desarrolla de acuerdo con una ley misteriosa e inaccesible. (Arboleda, 2002, pág. 63)

La cita anterior muestra que la génesis ficticia es una forma de presentar el conocimiento más no una forma de enseñar. La comprensión es una construcción de conocimiento por parte del sujeto, que parte de intuiciones y se transforma en pensamiento formal. La comprensión del sujeto no se logra con la transmisión de los conceptos en el orden lógico de los textos (génesis ficticia), es decir, la enseñanza consiste en el diseño de una secuencia didáctica que emule la génesis natural en cuanto a que pondrá en juego por parte del estudiante las heurísticas y estrategias propias del matemático como científico, guardando las proporciones.

Se abandona entonces el estructuralismo en la enseñanza secundaria y aunque se proponen nuevas metas, el énfasis en la enseñanza se centra en los procesos algorítmicos sin acercar al estudiante a las nociones previas a las que el estructuralismo apostaba alcanzar de manera lineal. Por tanto, aunque el enfoque estructuralista del álgebra moderna se traslade al primer año de la educación terciaria, el problema persiste, puesto que los individuos que deben abordar estos temas se enfrentan nuevamente a presentaciones de parte de sus profesores del tipo génesis ficticia.

En consecuencia, los estudiantes de la mayoría de los cursos de matemáticas y en especial los de los cursos de álgebra lineal manifiestan estar abrumados después de cada clase; debido a la gran cantidad de nuevas definiciones, teoremas, las diferencias a veces imperceptibles entre dos conceptos distintos, las estrechas relaciones de cada nuevo concepto con sus predecesores,

lo difícil que resulta demostrar, reconocer los distintos métodos y la mecánica que esta importante práctica envuelve. Por su parte los profesores se quejan de la poca formación que tienen los estudiantes en lógica, teoría de conjuntos, geometría y coinciden en afirmar que, los nuevos conceptos abordados en el álgebra lineal no poseen conexiones con sus saberes previos de matemáticas. En cuanto a los que hemos estado mencionado, Dorier señala que:

Los conocimientos de los estudiantes pueden ser muy limitados, para que lleguen a abstraer de los ejemplos que conocen, la estructura de espacio vectorial... Para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que 'un catálogo de nociones muy abstractas, que no se llegan a representar; además esas nociones están sumergidas bajo una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos'. (Dorier, 1997)

Dorier aclara que los problemas de aprendizaje del álgebra lineal y el formalismo no están tan claramente ligados, él llega a esta conclusión después de que en 1990 probó con herramientas estadísticas y en diferentes contextos que el problema principal se debía a la falta de interpretación de los principales conceptos, en contextos más intuitivos como los que ofrece la geometría y los sistemas de ecuaciones lineales, en los cuales estos conceptos emergen históricamente.

Para ejemplificar lo que señala Dorier podemos volver a traer el caso que hemos mostrado sobre el concepto de rango, pues su génesis natural se da en medio de las ecuaciones lineales y particularmente con el trabajo de Euler como ya lo hemos señalado, mientras que este concepto se asocia inicialmente en los cursos de álgebra lineal en medio del álgebra de matrices. En consecuencia, se pone en escena el concepto de rango de manera muy formal y en medio de

objetos muy abstractos y poco familiares para los estudiantes. Ahora, para mostrar un caso donde podamos ver el sentido de la afirmación de Dorier en cuanto que la geometría nos ofrece contextos más intuitivos, iniciemos por la idea de envolvente lineal cuando se trata de un solo vector, en este caso, la geometría y más especialmente un software de geometría dinámica nos permite asociar a través de la operación multiplicación por un escalar que la envolvente lineal de un conjunto unitario no trivial (con elementos distintos de cero) es desde el punto de vista geométrico, una línea recta. Si al conjunto anterior (conjunto generador) le adicionamos un vector que no esté en su envolvente lineal e iniciamos el proceso de visualizar los elementos que se forman a partir de las combinaciones lineales, la geometría nos permite intuir que se trata de un plano. Por otro lado, ese campo que nos ofrece la geometría para presentar de manera tan natural las primeras nociones de envolvente lineal, se transforma también en el sitio donde queda cautiva la imaginación. Por ejemplo, una vez el profesor ha mostrado que dos vectores ortogonales a un mismo plano deben ser paralelos, sentencia que es cierta solo en el caso del espacio, con el que naturalmente estamos familiarizados, pero en general es falsa. Es imposible imaginar dos vectores perpendiculares a un mismo plano que no sean paralelos, lo que resulta ser posible en $\mathbb{R}^n$ cuando n es mayor que tres. Es necesario recurrir a otros escenarios para mostrar que los vectores, aunque se puedan imaginar siempre como flechas, viven también en mundos donde la geometría euclidiana deja de ser nuestra mejor aliada, para convertirse en un obstáculo, es allí donde Dorier señala que se deben poner en juego herramientas de la didáctica para no caer en ligerezas, para tal efecto cita a Brousseau así:

para organizar una génesis experimental que dé un sentido conveniente a la noción de, hay que hacer un estudio epistemológico con el fin de poner en

evidencia las formas bajo las cuales la noción se manifestó y establecer su estatuto cognitivo. [...]. Hay un equilibrio a encontrar entre una enseñanza "histórica" que restauraría un bosque de distinciones y de puntos de vista precarios en los cuales se perdería el niño, y una enseñanza directa de lo que se sabe hoy es una estructura única y general, sin preocuparse de unificar las concepciones del niño, necesaria y naturalmente diferentes. La búsqueda de las condiciones de tal equilibrio es uno de los grandes problemas que se plantea actualmente a la didáctica. (Brousseau 1981, 48).

Lo que dice Brousseau es que, siendo la historia muy importante para la didáctica, hay que planear su uso en cada caso en función de la enseñanza; que la erudición de la génesis natural (los detalles del proceso complejo que han seguido las ideas sobre un concepto cualquiera del álgebra lineal), por ella misma, no tiene valor didáctico; que no ayuda directamente a la comprensión del concepto por parte del alumno; que el profesor debe saber cómo le da sentido didáctico a la explicación histórica de tal o cual explicación sobre la manera como se construyó el concepto; por ejemplo, el profesor que conoce el "obstáculo epistemológico" (por ejemplo, la geometría euclidiana), está tal vez mejor preparado para entender las dificultades de comprensión del alumno, pero no es la simple erudición histórica, sino una manera de ver la historia a partir de la enseñanza en el aula, lo que le permite su aprovechamiento para proceder a darle el tratamiento didáctico adecuado a tales dificultades. Eso se llama saber apropiarse de la historia en las condiciones didácticas del aula en función del estado de conocimiento del alumno: a lo que se refiere Brousseau como la "búsqueda de las condiciones de equilibrio".

La geometría analítica en dos o tres dimensiones hace parte de los conocimientos previos que debe tener quien enfrenta el estudio del álgebra lineal, pues esta le sirve de campo de imaginación de las primeras nociones de los conceptos básicos e incluso del concepto central de espacio vectorial, pero cuando se trabaja con espacios vectoriales de dimensión mayor que tres, la intuición geométrica se convierte en una fuente de errores recurrentes que resultan rezagando la aparición de los conceptos en su forma más general, es decir, para espacios vectoriales de dimensión n . Este se denomina obstáculo epistemológico llamado “ el referente geométrico”, volveremos con más detalle sobre este tema en el apartado 2.6.

El capítulo 1 de este trabajo se ubica en la zona de intersección entre la Historia de las matemáticas y la Epistemología. Este análisis histórico epistemológico tiene una clara intención de servir de insumo en el campo didáctico de las matemáticas, en cuanto que, en este caso, muestra el proceso heurístico de constitución teórica del concepto de espacio vectorial y de la gran red de conceptos que le son constitutivos. Ahora bien, la propuesta de Dorier en la dirección historia-didáctica se pone de manifiesto si se contrastan todas las variables didácticas que puede tener en cuenta el profesor, una vez conoce el proceso presentado en el capítulo 1 y 2 frente al saber sabio.

El concepto de espacio vectorial y las nociones que lo subyacen son, en general, de difícil comprensión para los estudiantes. Recordemos que los espacios vectoriales sobre los cuales nos hemos enfocado son aquellos de dimensión finita, la razón más importante para abordarlos es que son precisamente sobre los que se trabaja en los cursos de álgebra lineal de primer año universitario. Algunos ejemplos de espacios vectoriales de dimensión infinita son por ejemplo el conjunto de todos los polinomios de x con coeficientes reales (rationales o complejos), el

conjunto $C^0[0, 1]$ de todas las funciones continuas definidas en el intervalo $[0, 1]$, El conjunto de todas las series convergentes, etcétera.

Un espacio vectorial se define sobre un cuerpo cualquiera. Para nuestro caso, podemos escoger el conjunto de los números reales, aunque podrían ser los racionales o los complejos, en consecuencia, se llamará espacio vectorial real o como habitualmente lo hacen los textos de enseñanza, que, si los escalares son reales, simplemente diremos espacio vectorial.

Un espacio vectorial real V se define como un conjunto no vacío en el cual se definen dos operaciones, llamadas suma y producto por escalar (dados los elementos u y v de V y un escalar λ de R , la suma de u y v la denotamos $u + v$ y el producto por escalar de λ por u la denotamos λu). Si las siguientes propiedades o axiomas se satisfacen para todo u, v y w de V es un espacio vectorial real y sus elementos se llaman vectores.

1. $(u + v) \in V$ Propiedad clausurativa
2. $u + v = v + u$ Propiedad conmutativa para la suma.
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$ Propiedad asociativa para la suma.
4. *Existe un elemento $0 \in V$, tal que $u + 0 = u$, para todo $u \in V$.*

Propiedad modulativa para la suma.

5. *Para cada $u \in V$, existe un elemento $v \in V$, tal que $u + v = 0$*

Propiedad del opuesto para la suma.

6. $\lambda u \in V$ Propiedad clausurativa del producto externo
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ Propiedad distributiva respecto la suma de vectores.
8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ Propiedad distributiva respecto la suma de escalares.

9. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ Propiedad asociativa para el producto externo

10. $1u = u$ Propiedad del neutro del producto

Ahora bien, la estructura de espacio vectorial, redefine la naturaleza de los objetos que la cumplen, estos objetos se unifican y adquieren el carácter general de vectores.

Veamos algunos ejemplos de Espacios Vectoriales:

- Sea P_2 el conjunto de todos los polinomios (en algebra lineal son vectores) de grado menor o igual a 2. Es decir,

$$P_2 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in R, i = 0,1,2\}$$

Tomando la suma y el producto por escalar de polinomios como se hace habitualmente; esto es, dados

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{y} \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2,$$

Dos polinomios de grado menor o igual a 2, y α , un escalar, entonces

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

$$\alpha p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2$$

- El conjunto de las funciones continuas definidas en R , tomando la suma dos funciones, y el producto de una función por un escalar real como es habitual.
- Sea $F[0,1]$, el conjunto de todas las funciones de valor real definidas en el intervalo $[0,1]$.

Si definimos suma y producto por escalar como lo hacemos habitualmente en cálculo: dadas f y g , dos funciones de valor real definidas en $[0,1]$, tenemos que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y } (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

Notamos en estos ejemplos que la teoría de espacios vectoriales requiere un grado de abstracción mayor, ya que sobre nuevos dominios de objetos abstractos, se definen nuevas propiedades de estos objetos, lo que exige de los profesores y de los estudiantes un nivel más profundo en las operaciones mentales. Dorier menciona que los espacios vectoriales son un concepto que generaliza y unifica varios saberes para crear un todo:

Es importante recalcar que la axiomatización (... en álgebra lineal) en sí misma no permitió a los matemáticos solucionar nuevos problemas, pero permitió un acercamiento y un lenguaje más universal que fue utilizado en una variedad de contextos (análisis funcional, formas cuadráticas, aritmética, geometría, etc.). Este acercamiento marcó un nuevo nivel en la abstracción, el concepto de espacio vectorial que es una abstracción de un dominio de objetos abstractos: vectores geométricos, n-uplas, polinomios, series o funciones. Esto representa un cambio de perspectiva que induce un cambio sofisticado a nivel de las operaciones mentales. De hecho, uno puede distinguir dos fases en la construcción de un concepto: unificación (poner juntos varios saberes para crear un todo) y generalización (Dorier y Serpinska, 2001).

3.3 Modos de describir y validar conceptos y sus relaciones.

Con respecto a las diferentes interpretaciones que se le pueden dar a una misma definición, Joel Hillel, miembro investigador del grupo Dorier y profesor de Matemáticas en Canadá, menciona (Dorier, 2000) tres modos de descripción que se presentan en el álgebra lineal; estos modos coexisten, pero no necesariamente son siempre equivalentes:

- Modo abstracto: Se presenta cuando se hace uso del lenguaje y conceptos de la teoría formal; se refiere a las abstracciones que se puede hacer sobre las definiciones, por ejemplo, espacios vectoriales, subespacios, dimensiones.
- Modo algebraico: Usando el lenguaje y conceptos de R^n como matrices, rango, n-uplas, sistemas de ecuaciones, etc.
- Modo geométrico: Se hace uso del lenguaje y conceptos asociados al plano y al espacio con segmentos dirigidos, líneas, puntos, transformaciones geométricas, etc.

A continuación, un ejemplo de todas las conexiones entre los distintos modos que debe hacer un estudiante a partir de un sencillo ejercicio:

Tenemos un sistema homogéneo con tres ecuaciones y tres incógnitas; supongamos que el estudiante, al resolver el sistema, encuentra que una de las ecuaciones desaparece, es decir, al escalar quedan dos pivotes. Se espera que el estudiante sea consciente de los siguientes hechos:

Modo geométrico: el conjunto solución son todos los múltiplos de un vector; éste vector a su vez es ortogonal al plano generado por los tres vectores renglón o por los dos vectores renglón pivotaes. Modo abstracto: el espacio generado por el vector ortogonal es el espacio ortogonal del espacio renglón de la matriz del sistema. Modo algebraico: la matriz tiene rango dos y nulidad uno, el espacio columna de la misma matriz tiene dimensión dos igual al del espacio renglón, pero estos espacios son diferentes. Este discurso y las conexiones que debe hacer no terminan allí, se pueden derivar muchas otras afirmaciones.

En esta misma dirección, otra de las teorías que habla sobre los distintos tipos de razonamiento que presentan los estudiantes a la hora de aprender conceptos de álgebra lineal, es la propuesta por Anna Serpinska (2000); aunque inicialmente esta propuesta fue planteada para estudiantes de álgebra lineal, actualmente su teoría ha sido aplicada a otras áreas de las Matemáticas. Serpinska menciona que, en un campo general, uno de los aspectos que afecta el razonamiento en los estudiantes es la tendencia a los cálculos, por encima de estudiar las formas teóricas del concepto; es decir, los estudiantes privilegian los algoritmos de resolución desconociendo la estructura que envuelve el concepto. En un campo más específico, hay tres modos de razonamiento que se pueden reconocer en las interacciones con el lenguaje: el lenguaje visual-geométrico, el lenguaje aritmético y el lenguaje estructural. En los estudiantes no solo se presenta una resistencia a la parte estructural sino también poca flexibilidad entre estos lenguajes, es decir, un estudiante puede razonar sobre un objeto en un determinado lenguaje, pero no logra conectar esto con lo que razona en otro de los lenguajes. Por ejemplo, un estudiante puede reconocer en un sistema de ecuaciones lineales 3×3 que cuando, en medio del proceso de solución, se obtiene una ecuación de la forma $0x + 0y + 0z = b$ con $b \neq 0$, el sistema original no tiene solución; pero posiblemente lo que geométricamente esto significa no le queda claro: tenemos tres planos que no tienen un punto en común, como se muestra en la figura siguiente:

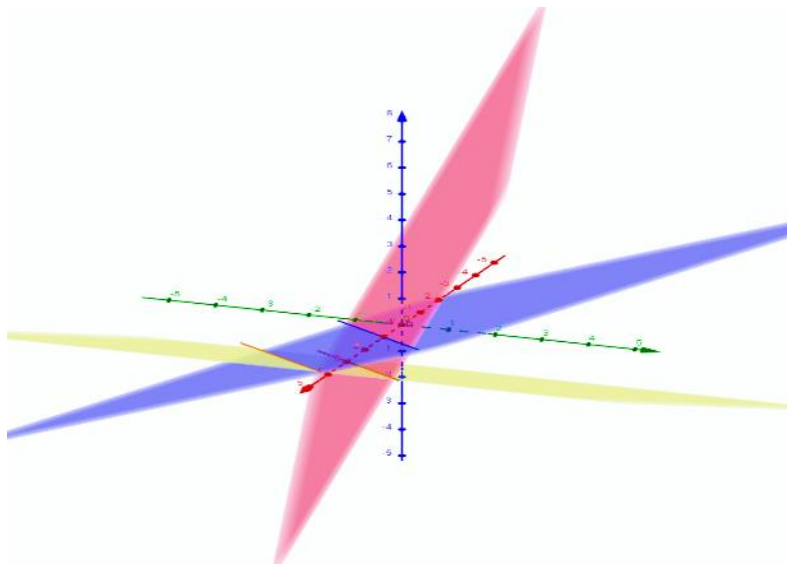


Ilustración 17: Tres planos que no tienen punto en común.

Estos tipos de lenguajes, que Serpinska los llama modos de aprendizaje, están basados en un análisis histórico y un estudio a los diferentes lenguajes que se usan en la teoría del álgebra lineal. Las distinciones que hace Serpinska son similares a varias perspectivas teóricas que han propuesto otros psicólogos, educadores matemáticos, filósofos, sobre la comprensión en Matemáticas; por citar algunos ejemplos, está el que vimos anteriormente con Hillel, como también está Ana Sfard (1987) con su teoría de la reificación que sostiene que hay dos tipos de razonamiento en la comprensión del significado de los conceptos matemáticos: el razonamiento procedimental u operatorio y el razonamiento conceptual; éstos dos tipos de razonamiento son necesarios, pero el paso de un razonamiento a otro, es decir, ver un proceso como un objeto, es gradual y evolutivo.

Años atrás, Richard Skemp (1978), psicólogo y matemático, había hecho una distinción entre la comprensión y el conocimiento, señalando que la comprensión estaba clasificada en dos categorías: la comprensión instrumental y la relacional; la primera se refiere al conjunto de reglas sin conocer la justificación, estas reglas permiten realizar procesos para resultados a corto plazo (procedimiento que se usan para resolver problemas de inmediato). La comprensión

relacional se refiere a reconocer qué se debe hacer y por qué se hace; se podría decir que está asociada a la justificación de las reglas o procedimientos que se usan.

Serpinska clasifica los modos de pensamiento en dos categorías más generales: pensamiento práctico y pensamiento teórico; para la identificación de las características que suponen estos dos pensamientos incorporó, en su marco teórico, las ideas de Vygotsky (1896-1934) sobre conceptos cotidianos y conceptos científicos:

Aun en el más mínimo nivel de desarrollo el discurso escrito requiere un alto grado de abstracción... El discurso escrito es discurso en pensamiento, en representaciones... El discurso escrito difiere del discurso hablado en la misma forma que el pensamiento abstracto difiere del pensamiento gráfico... El discurso escrito es más abstracto que el discurso hablado en cuanto que es un discurso sin interlocutor. [...]

El discurso que carece de sonido real (discurso que está solamente representado o pensado y además requiere de simbolización del sonido - un segundo orden de simbolización) será más difícil que el discurso hablado en el mismo grado que el álgebra es más difícil que la aritmética. Es un plano nuevo y superior en el sistema desarrollado del discurso hablado... El discurso hablado está regulado por la dinámica de la situación ... Con el discurso escrito, por otra parte, nos vemos obligados a crear la situación o, más precisamente, a representarla en el pensamiento. El uso del discurso escrito presupone una relación fundamentalmente diferente con la situación, más libre, más independiente, más voluntaria. (Vygotski, 1987, pág. 203)

El pensamiento teórico se refiere a una reflexión concisa de los significados semióticos de la representación del conocimiento y a las conexiones lógicas y semánticas entre conceptos. Estas conexiones son hechas sobre las bases de sus relaciones con conceptos más generales, de los cuales ellos pueden ser casos específicos; no se hacen asociaciones empíricas. Las relaciones entre conceptos, a las que se refiere Serpinska, son mediadas por diferencias y comparaciones entre conceptos y no sobre ejemplos que cumplen con las condiciones del concepto; para desarrollar pensamiento teórico, no se puede formar un concepto a través de ejemplos típicos: es necesario hacer abstracciones mentales a partir de un ambiente semiótico. Los símbolos, aislados de la acción, se vuelven objetos de reflexión y análisis.

De otro lado, el pensamiento práctico, está acompañado y guiado por acciones físicas; su prueba está asociada y condicionada a la acción y a la estructura de los sistemas de signos: el lenguaje está condicionado por el contexto. Serpinska (2000) Señala que los modos de pensamiento teórico y práctico difieren fuertemente en la manera en que organizan el significado de las palabras:

Para la mente práctica, los objetos matemáticos son "objetos naturales", no "objetos discursivos" (a estos últimos sólo las definiciones y teorías pueden describirlos, no crearlos o construirlos). Consecuentemente, un término matemático es interpretado, primariamente, a través de su denotación o referente, como representación de una colección de objetos particulares, y la connotación, o propiedad de definición, aparece así solamente como una propiedad (Serpinska, 2000).

Es importante mencionar que Serpinska basa su teoría en una evidencia histórica:

La evolución del álgebra lineal inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico. Tomando una perspectiva muy general, se podrían distinguir, en esta evolución, los grandes pasos referidos a dos procesos. Uno fue la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n . El otro fue la desaritmetización del espacio o su estructuralización, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas. (Serpinska, 2000)

3.4 Privilegiar los algoritmos de solución en los cursos de álgebra lineal.

Como se mencionó anteriormente, el enfoque algorítmico de los profesores ha generado en los estudiantes la percepción de que el álgebra lineal es un curso donde se aprende a resolver sistemas de ecuaciones lineales o simplemente a escalar matrices. Dado el lugar privilegiado que se le da a los métodos de resolución, se pierde la idea central del curso de álgebra lineal.

En nuestro análisis histórico se mostró que en el estudio de las ecuaciones lineales y cuadráticas hubo una insistente búsqueda de métodos de solución. En los trabajos de Tartaglia, Cardano y Ferrari se encontró la solución por medio de radicales de la ecuación cúbica y de cuarto grado; estos métodos estimulan a los matemáticos de la época a la búsqueda de los algoritmos que completen este trabajo; se dan la tarea de buscar la solución de ecuaciones de grado $n \geq 5$.

En este contexto aparece la aproximación que dio Descartes al teorema fundamental del álgebra y, más adelante, la formalización de éste que dio Gauss; este teorema garantiza la

existencia de las raíces y caracteriza su naturaleza (reales, complejas), lo que invita a pensar que sólo falta encontrar el método para hallarlas.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, el uso de los determinantes como algoritmo para encontrar las soluciones trae como consecuencia una alta complejidad en los cálculos y computacionalmente resulta costoso. En la perspectiva de la enseñanza actual, cuando se incorpora el método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones, no sólo se muestra el desconocimiento de la búsqueda del método para resolver cualquier ecuación, que hemos señalado arriba, sino que se hace uso de un ineficiente método, con un alto su costo computacional comparado con el método de eliminación Gaussiano:

El álgebra lineal es una de las bases de la matemática en general, desafortunadamente, muchos textos (y por lo tanto los cursos que lo usan) dan un énfasis “computacional” a la teoría y la notación, no sólo descuidando el verdadero aspecto computacional y numérico, sino que también desorientan al lector o al estudiante en lo que a cálculos se refiere. (Martínez & Sanabria, 1996, pág. 23)

Este no es el único caso en el que un objeto matemático, potente por su valor teórico, se usa forzosamente como algoritmo, sin ser esa su esencia e importancia dentro de las matemáticas.

Volviendo a la época de Euler, la regla de Cramer significó un algoritmo general y válido que los matemáticos adoptaron fuertemente. En consecuencia, la perspectiva de Euler pierde interés. El punto es que la historia nos sugiere que los conceptos de dependencia e

independencia lineal surgen de manera natural en medio del estudio de los sistemas de ecuaciones donde resulten infinitas soluciones, abordando éstos desde un enfoque cualitativo.

Como lo hemos expuesto, la historia que envuelve el desarrollo del álgebra en general muestra el interés constante de los matemáticos por encontrar los métodos de solución de ecuaciones. Estos ejemplos y otros, que se abordaron en los dos anteriores capítulos, muestran que la comunidad matemática se conducía con la idea equivocada: dado un problema, se debe poder resolver; dada una ecuación, debe existir el método para encontrar sus raíces; dado un sistema de n ecuaciones con n variables, éstas deben ser suficientes para hallar las n variables. El problema es que estas concepciones son válidas en muchos contextos y se creían válidas en general. Euler para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales y Abel para el caso de los polinomios de grado mayor o igual que 5 señalaron el error. Abel, en su artículo titulado *Mémoire sur les equations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré* (1824) menciona:

Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora. Por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de ecuaciones algebraicas. (Abel, 1824, pág. 3)

Dado que, en la perspectiva de la enseñanza, las concepciones equivocadas se repiten con pasmosa similitud, podemos concluir que estamos frente a lo que Brousseau llamó un obstáculo de tipo epistemológico: un conocimiento que resulta efectivo en un contexto, pero que en algún

momento se convierte en un obstáculo para adquirir un nuevo conocimiento. En otras palabras, el conocimiento eficaz en un contexto es disfuncional dentro de otro más amplio.

El algoritmo general de la regla de Cramer produce el estancamiento de conceptos como rango, dependencia e independencia lineal. Fue solo después de más de un siglo que la perspectiva de Euler dio lugar a la aparición de estos conceptos gracias a Frobenius, quien retomó las ideas de Euler del ambiente de las ecuaciones lineales y las extendió a las n -uplas. Este hecho, que pudiese parecer irrelevante, es el que da lugar a una conceptualización más clara de lo que ahora llamamos rango. Frobenius no sólo definió lo que actualmente conocemos como base de soluciones, sino que también asoció un sistema de ecuaciones para tal base, es decir cada n -upla se transforma en una ecuación, resultando lo que conocemos como el sistema escalonado asociado a un sistema inicial (Dorier, 1997, pág. 7) Luego, Frobenius deja claro que esta base de soluciones no es única, pero que cada una de ellas tiene a su vez un sistema asociado con el mismo conjunto de soluciones que el sistema inicial, lo que en la bibliografía utilizada en nuestro entorno se conoce como sistemas equivalentes.

Este primer resultado sobre la dualidad en espacios vectoriales de dimensión finita mostró la relación invariante entre el número de variables, el número de variables indeterminadas el número de elementos de la base de soluciones y la base del conjunto solución del mismo sistema. De otro lado, el enfoque de Frobenius permitió que un sistema fuera visto como un elemento de la clase de equivalencia de todos los sistemas equivalentes con él, lo que constituye un paso fundamental hacia la representación de un subespacio por medio de expresiones algebraicas.

Este hecho, que resume más de un siglo de historia, muestra cómo la adopción de una definición formal (aquí de dependencia e independencia lineal) puede ser un paso fundamental en la construcción de una teoría y, por lo tanto, constituyente esencial de esta teoría. Es sólo hasta que Frobenius retoma la perspectiva cualitativa propuesta por Euler que se logra avanzar en esta dirección.

Con respecto a la búsqueda de algoritmos se puede destacar, partiendo de una postura filosófica de las matemáticas, que el hecho de que los matemáticos consideren que los algoritmos existen y que simplemente no se había encontrado un algoritmo para resolver ecuaciones en general, va de la mano con la concepción platónica de las matemáticas, que afirma que los objetos matemáticos no son producto de la mente humana sino que son verdades preexistentes que habitan en un mundo distante de la condición humana, el mundo de las ideas, núcleo de la filosofía platónica caracterizado, en muchos de sus diálogos; en otras palabras, la búsqueda de algoritmos, suponiéndolos ya existentes, se asocia con que no son invenciones humanas sino que existen por sí mismos en un mundo ya terminado al que los matemáticos deseaban llegar.

3.5 El referente geométrico en el desarrollo del concepto de espacio vectorial

Una de las formas como los estudiantes aprenden conceptos matemáticos es a través de la construcción de objetos mentales a partir de su intuición; es así como lo describe Efraím Fischbein (1920,1998) quien estudió la importancia de la intuición en los razonamientos matemáticos y sus consecuencias:

El estudiante tiende a olvidar las propiedades formales y tiende a mantener aquellas impuestas por un modelo intuitivo. La explicación parece ser muy simple: las propiedades impuestas por el modelo concreto constituyen una estructura coherente, mientras que las propiedades formales aparecen, al menos a primera vista, más bien como una colección arbitraria. (Fischbein, 1989, pág. 10)

Hemos recurrido a la explicación propuesta por Fischbein, ya que la intuición guarda una estrecha relación con la geometría que tiene un fuerte impacto en el desarrollo del álgebra lineal; Aunque es quizás R^n , el caso más sencillo de espacio vectorial, es con objetos que “habitan” en el plano o en el espacio (R^2, R^3 respectivamente) que se describen la gran mayoría de los elementos de R^n , es decir, cuando trabajamos en álgebra lineal, es habitual que al presentar propiedades de R^n , recurramos a R^2 ó R^3 para tener el referente geométrico e intentar imaginar en “dimensiones mayores”.

Fischbein hace una caracterización de varios términos asociados a la intuición. Uno de los que nos llama la atención es la “coerción”, que se define como las nociones intuitivas que tiene el sujeto y que las considera como representaciones absolutas y únicas, a pesar de entrar en contradicción con la teoría formal. Un ejemplo de ello en álgebra lineal en un primer nivel es el caso de las rectas no paralelas en el plano, las cuales sin remedio se cortan; el estudiante termina tomando como representación absoluta de las rectas no paralelas aquellas que se cruzan. En el espacio este hecho no es verdad y, aunque cuesta alguna dificultad, puede ser superado por la mayoría de los estudiantes, puesto que contamos con ejemplos que podemos visualizar en nuestro entorno natural. En esta misma línea, pero en otro nivel, en el espacio se toman como

representación absoluta de planos distintos no paralelos aquellos que se cruzan formando una línea recta; dicho de otra manera, la ecuación de una línea recta en el espacio está dada por un sistema de dos planos no paralelos. Una vez planteamos éste mismo problema en un espacio de dimensión mayor a tres, nos podemos encontrar con el caso de que dos planos no paralelos nunca se intersectan; un matemático vería este fenómeno como una especie de generalización del caso que mencionamos como de primer nivel.

Otro de los rasgos de la intuición al que haremos referencia es de “Implicidad” que se define como la inconciencia que tiene el sujeto sobre sus nociones intuitivas.

Como se caracterizó antes, hay un rasgo transversal al álgebra lineal: su formalismo. Este hace que con frecuencia los estudiantes busquen caminos familiares para ellos con el objetivo de entender el carácter abstracto del álgebra lineal; uno de los caminos que toman es el de asociar a ideas intuitivas las propiedades, definiciones o teoremas con los que trabajan. Este hecho no es inaceptable en sí mismo, sino que, en la necesidad, a veces inconsciente, de plasmar en un modelo intuitivo una idea formal, el nivel de abstracción se puede ver reducido y mal interpretado (Fischbein, 1987). La mayoría de los modelos tácitos o intuitivos son mediadores imperfectos, llevando algunas veces a interpretaciones incorrectas e incompletas.

La intuición geométrica se desarrolla a partir de un conjunto de acciones interiorizadas. Se realiza allí una captura del objeto físico mediante el lenguaje. Los objetos matematizados pueden tener una cierta autonomía lógica, pero, ontológicamente, permanecen dependientes de los objetos físicos y, en consecuencia, aquellos objetos están obligados a respetar los límites impuestos

a los objetos físicos. En esta perspectiva, el objeto magnitud matemática permanece subordinado al objeto magnitud física. Por ejemplo, la magnitud matemática sólo puede ser infinita en potencia (Moreno-Waldegg, 1995).

La conclusión que se quiere ubicar aquí es que, aunque los modelos intuitivos en una primera etapa aportan hacia la construcción de conocimientos, dado el carácter abstracto del álgebra lineal es necesario desprenderse de estos, como también de la geometría, ya que al tender a generalizar hay problemas.

En la historia de las matemáticas vemos la constante interacción entre la geometría y el álgebra; esta interacción se caracteriza por diferentes momentos en los que el ambiente geométrico posibilita al álgebra a avanzar en la conceptualización de objetos matemáticos y viceversa, como también otros en los que los límites que le impone el mundo físico a la geometría no permiten, a su vez, progresos en la línea algebraica.

La axiomática propuesta en la obra de Euclides fue un hecho transversal en la historia de las Matemáticas por más de 20 siglos: esta forma de validar resultados matemáticos se convirtió por mucho tiempo en el lugar de partida para aceptar o rechazar avances matemáticos. La validación de procesos que actualmente se conocen como algebraicos, se daba en el seno de la geometría. Esto se puede observar con varios matemáticos que citamos en nuestro capítulo anterior, por citar uno de ellos mencionaremos a Cardano.

Aceptación de raíces y de cantidades negativas.

En la obra de Cardano podemos resaltar, desde la filogénesis, entendiendo esta como el desarrollo de un concepto en la historia, el inicio de una etapa operativa entre los números

negativos y los números complejos, los cuales ni Cardano ni sus contemporáneos aceptaban como números; pero el hecho de cumplir las propiedades de las raíces de una ecuación de tercer grado le asigna accidentalmente un estatus de objeto matemático a las llamadas raíces falsas; en la obra de Bombelli y otros matemáticos de la época, se acentúa mucho más este posicionamiento. En la ontogénesis, entendiendo esta como desarrollo del conocimiento en un individuo, se podría sugerir como estrategia de apropiación y aceptación de los números negativos y sus raíces, operarlos en el contexto de la solución de ecuaciones; en una primera etapa se podría trabajar con soluciones negativas y complejas de ecuaciones de segundo grado, de las cuales su semisuma es siempre la abscisa del vértice de la parábola (tomando parábolas con eje de simetría vertical) y brindar las representaciones geométricas respectivas. La idea clave aquí es que la solución de ecuaciones brinda la posibilidad de cambiar números reales aceptados fácilmente, como los números reales positivos, por números negativos y complejos que no son aceptados naturalmente.

Es precisamente la imposibilidad de validar los números negativos y sus raíces en el ambiente geométrico, lo que hacía inadmisible que Cardano y su generación los legitimara como números, aunque tenían un comportamiento similar al de los números aceptados hasta el momento. La obligación de demostrar o validar todos sus resultados a través de la geometría Euclidiana, que representaba el paradigma de las matemáticas para la época, se constituye en un obstáculo que se comparte en el desarrollo filogenético y ontogenético de los números complejos. Lo que se acaba de señalar, es conocido en el ambiente didáctico como uno de los obstáculos que hacen parte del referente geométrico, como lo caracteriza Dorier y otros investigadores.

Podría pensarse que la enseñanza de la geometría euclidiana puede ser de alguna manera nociva, lo que, aunque no es parte de nuestra investigación, debemos aclarar que es absolutamente falso. La geometría representa una fuente potente de imaginación para la construcción de pensamiento algebraico, pero en sus etapas tempranas aparece muy ligada al mundo físico, lo que hace que se convierta a su vez en fuente de obstáculos.

3.6 Un posible camino para abordar el concepto de dependencia e independencia lineal.

Como lo hemos mencionado, el formalismo que caracteriza el álgebra lineal trae como consecuencia que los estudiantes se enfrenten a una asignatura que para ellos es totalmente nueva y que no tiene relación con sus conocimientos previos. A la luz de lo que se caracterizó como el obstáculo del formalismo y del análisis histórico que adelantamos, a continuación, presentamos unas notas como propuesta para introducir los conceptos de dependencia e independencia lineal, que se basa en introducir inicialmente la noción de dependencia inclusiva de Euler. La hipótesis de la propuesta es que, familiarizando al estudiante en la etapa de solución de sistemas de ecuaciones con las nociones de combinación lineal, dependencia lineal y rango del sistema, en el contexto de las ecuaciones lineales, Le proveerá al estudiante un contexto de objetos que le son familiares y así hacer emerger el concepto de dependencia lineal en su sentido más general, en una etapa más o menos temprana en el desarrollo del curso.

ECUACIÓN LINEAL

La expresión $ax = b$ es el caso más simple de ecuación lineal donde x es la variable, a es el coeficiente de la variable y b es llamado el término constante; tanto $a, b \in R$. Ahora note que $a_1x + a_2y = b$ es una ecuación lineal en dos variables.

DEFINICIÓN:

En forma general una ecuación es lineal en n -variables si se puede escribir de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1)$$

Donde $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in R, a_i$ es el coeficiente correspondiente a x_i y b es el término constante.

Veamos algunos ejemplos de ecuaciones lineales:

1. $3x + 4y - 5z = 4$

2. $3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 2$

3. $x_1 + 3x_2 - x_5 = 4$

Observemos que la ecuación 3 es una ecuación lineal de cinco variables; la razón por la que no aparecen x_3 y x_4 es porque $a_3 = a_4 = 0$. En algunos casos se hará necesario especificar el número de variables de una ecuación lineal.

NOTACIÓN:

Una ecuación lineal de n -variables $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ se puede denotar de la siguiente forma: $E(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ (2)

Ó simplemente $E(X) = b$ donde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Solución:

Una solución de una ecuación lineal de n -variables es una n -upla ordenada que satisface la igualdad $E(X) = b$.

EJEMPLO 1:

$X_1 = (1, -4, 3, 2, 5)$ es una quintupla que satisface la ecuación lineal $x_1 + 2x_3 - x_5 = 2$: $E(X) = 2$, veamos: $1 + 0(-4) + 2(3) + 0(2) - 5 = 2$ (VERDADERO).

Hemos probado que $E(X_1) = 2$; por lo tanto X_1 es una solución de la ecuación lineal $E(X) = 2$.

2. No es difícil intuir que infinitas quintuplas satisfacen la ecuación $E(X) = 2$.

EJEMPLO 2 (Actividad de discusión):

¿Toda quintupla es solución de $E(X) = 2$?

Dé ejemplos de quintuplas que no sean solución.

II CASOS ESPECIALES:

Si el término constante b es igual a cero la ecuación lineal es llamada homogénea.

EJEMPLO 3:

a. $4x - 2y + 3z = 0$ $E_1(X) = 0$

b. $3x_1 - 4x_2 - 6x_4 = 0$ $E_2(X) = 0$

Observe que $X_1 = (0,0,0)$ es una solución de la ecuación homogénea $E_1(X) = 0$ y también $X_2 = (0,0,0,0)$ es una solución de la ecuación homogénea $E_2(X) = 0$.

En general una ecuación lineal homogénea $E(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (3)

Siempre tendrá como solución la n -upla $X = (0,0,0, \dots, 0) = 0_n$ la cual es llamada la solución trivial. Es necesario precisar que 0_n es una solución obligada de $E(X) = 0$; pero no es la única.

- Si todos los coeficientes de una ecuación homogénea son cero, es decir, $a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Ésta se convierte en una identidad, veamos que:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = 0, \quad E_0(X) = 0 \quad (4)$$

Entonces para cualquier valor de $x_1, x_2, \dots, x_n$ en los reales la igualdad se cumple; éste hecho convierte esta ecuación en una identidad.

- El hecho de que todos los coeficientes a_i de una ecuación lineal no homogénea sean todos cero, trae como consecuencia que ninguna n -upla sea solución de la ecuación.

La ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = b, \quad E_D(x) = b, b \neq 0 \quad (5).$$

Es llamada ecuación lineal degenerada.

EJEMPLO 4:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5$$

Observe que el lado izquierdo de esta igualdad es siempre cero sin importar qué valores tomen x_1, x_2, x_3, x_4 en los reales.

III CONJUNTO SOLUCIÓN

El conjunto de todas las n -uplas ordenadas constituidas por números reales es llama R^n , es decir $R^n = R \times R \times R \dots \times R$ (n veces)

El conjunto de todas las n -uplas X_s que son solución de la ecuación lineal $E(X) = b$ forman el conjunto de solución de E , $S_E = \{X_s \in R^n / E(X_s) = b\}$

EJEMPLO 5:

a. $S_{E_0} = R^n$ E_0 es la ecuación (4)

b. $S_{E_D} = \emptyset$ E_D es la ecuación (5)

IV ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones lineales son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

V. OPERACIONES ENTRE ECUACIONES LINEALES

Recordemos que las ecuaciones son igualdades y que por lo tanto las propiedades de las igualdades se cumplen para ellas; en particular, si multiplicamos a ambos lados de una ecuación por una constante $c \in R, c \neq 0$ la ecuación resultante es equivalente.

- **(Producto por un escalar):** Sea $E_1(X) = b_1$; la ecuación $cE_1(X) = cb_1$ es llamada la *ecuación múltiplo escalar* de $E_1(X)$ y es equivalente a ella.

Demostración:

Sea $E_1(X) = b_1$; $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b_1$

Sea $X_p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ una solución particular de $E_1(X) = b_1$; en consecuencia:

$$\text{I. } a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + \cdots + a_np_n = b_1$$

$$\text{II. } ca_1p_1 + ca_2p_2 + ca_3p_3 + \cdots + ca_np_n = cb_1 \quad c \neq 0$$

Donde $cE_1(X_p) = cb_1$, lo que prueba que X_p también es solución de la ecuación múltiplo escalar.

Los pasos I y II pueden hacerse en cualquier orden lo que prueba que cualquier solución de la ecuación múltiplo escalar también es solución de la ecuación original. Por lo tanto, se puede concluir que las ecuaciones son equivalentes.

- **(Suma de ecuaciones):** La ecuación suma $E_s(X) = b_s$ está definida así $\underbrace{E_i(X) + E_j(X)}_{E_s} = \underbrace{b_i + b_j}_{b_s}$

El conjunto solución de la ecuación lineal suma contiene la intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones sumandos; en otras palabras, las soluciones comunes a E_1 y E_2 son también soluciones de E_s (No debe pensarse que estas son las únicas ecuaciones de E_s).

Como la ecuación lineal $E_i(x) = b_i$ es equivalente a la ecuación $cE_i(x) = cb_i$ podríamos reemplazar la operación adición (suma) de la siguiente forma:

$$\underbrace{cE_i(X) + E_j(X)}_{E_s} = \underbrace{cb_i + b_j}_{b_s}$$

Ejemplo 6:

Sean las ecuaciones lineales con solución en R^4 :

1. $3x_1 + 2x_2 + \quad x_4 = 2$
2. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

La cuádrupla $X_s = (1, 1, 2, -3)$ es solución de las dos ecuaciones lineales. Probar que es también solución de a) $3E_1(x)$; b) $2E_1(x) + E_2(x)$.

Solución:

$$a) \quad 9x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 6$$

$$9(1) + 6(1) + 0(2) + 3(-3) = 6 \quad (\text{verdadero})$$

$$b) \quad 2E_1 + E_2: 7x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$$

$$7(1) + 5(1) + 2 + 3(-3) = 5 \quad (\text{verdadero})$$

Observación:

La cuádrupla $X = (2, -1, 4, -2)$ es solución de $E_1(X) = b_1$; luego es solución de $3E_1(X) = 3b_1$:

$$3E_1: 9x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 6$$

$$9(2) + 6(-1) + 0(4) + 3(-2) = 6 \quad (\text{verdadero})$$

En la ecuación adición no es solución:

$$2E_1(x) + E_2(x): 7x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$$

$$7(2) + 5(-1) + 4 + 3(-2) = 5 \quad (\text{falso})$$

¿Por qué? Explique.

VI. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales está formado por un conjunto de ecuaciones con el mismo número de variables.

$$\begin{cases} E_1(X) = b_1 \\ E_2(X) = b_2 \\ \vdots \\ E_m(X) = b_m \end{cases}$$

Este es un sistema lineal que denominaremos sistema $m \times n$, donde m indica el número de ecuaciones y n el número de variables.

Ejemplo 7:

$$7.1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_3 - x_4 = 7 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{Sistema lineal } 4 \times 4$$

$$7.2 \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \text{Sistema lineal } 3 \times 3$$

$$7.3 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{Sistema lineal } 2 \times 3$$

VII. SOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL

La solución de un sistema lineal $m \times n$ es el conjunto S formado por todas las n -uplas que son soluciones simultáneamente de las m -ecuaciones lineales E_1 ; es decir:

$$S = S_{E_1} \cap S_{E_2} \cap \dots S_{E_m}$$

Observaciones:

- Si E_i y E_j donde $1 \leq i, j \leq m$ no tienen soluciones comunes, en consecuencia, el sistema no tiene solución, es decir $S = \emptyset$.

Demostración:

$$\begin{aligned} S &= S_{E_1} \cap S_{E_2} \cap \dots \underbrace{\dots S_{E_i} \cap S_{E_j} \dots}_{\emptyset} \dots \cap S_{E_m} \\ &= \underbrace{S_{E_i} \cap S_{E_j}}_{\emptyset} \cap \underbrace{S_{E_1} \cap S_{E_2} \cap S_{E_m}}_A \\ &= \emptyset \cap A \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Un sistema que carece de soluciones se llama **sistema inconsistente**.

- Si la ecuación degenerada $E_D(X) = b, b \neq 0$ hace parte de las ecuaciones de un sistema; entonces el sistema es inconsistente. (Recuerde que $S_{E_D} = \emptyset$)

¿Por qué? Explique.

VIII. SISTEMAS LINEALES EQUIVALENTES

Dos sistemas lineales son equivalentes si el conjunto solución de ellos es igual.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sistema 1: } \begin{cases} E_1(X) = b_1 \\ E_2(X) = b_2 \\ E_0(X) = 0 \end{cases} & \underbrace{\sim}_{\text{Se lee "ES EQUIVALENTE"}} & \text{Sistema 2: } \begin{cases} E_1(X) = b_1 \\ E_2(X) = b_2 \end{cases} \end{array}$$

Demuestre que los sistemas 1 y 2 son equivalentes.

Demostración:

1. Sea $S_1 = S_{E_1} \cap S_{E_2} \cap S_{E_0}$

como $S_{E_0} = R^n$ y $S_2 = S_{E_1} \cap S_{E_2} \subset R^n$, entonces

2. $S_1 = S_{E_0} \cap S_2 = R^n \cap S_2 = S_2 = S_{E_1} \cap S_{E_2}$

En general la ecuación lineal $E_0(X)$ (3), se puede eliminar de un sistema lineal que la contenga; entonces el sistema que se obtiene es equivalente.

Ejemplo:

Probar que los siguientes sistemas son equivalentes:

$$1. \begin{cases} E_1(X) = b_1 \\ E_2(X) = b_2 \\ E_1(X) + E_2(X) = b_1 + b_2 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} E_1(X) = b_1 \\ E_2(X) = b_2 \end{cases}$$

Solución:

El sistema 1 tiene como solución: $S_1 = S_{E_1} \cap S_{E_2} \cap S_{E_1+E_2}$

Como $S_{E_1} \cap S_{E_2} \subseteq S_{E_1+E_2}$ entonces $S_1 = S_{E_1} \cap S_{E_2} = S_2$.

Volviendo la vista a los ejemplos numéricos de los sistemas lineales anteriores:

$$7.1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_3 - x_4 = 7 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{Este sistema se denomina **sistema triangular**.}$$

Observemos que la ecuación final del sistema nos da un valor específico para la variable x_4 sustituyendo este valor en la tercera ecuación tenemos: $4x_3 - 1 = 7 \rightarrow 4x_3 = 8 \rightarrow x_3 = 2$; sustituyendo el valor de x_3 en la segunda ecuación se tiene:

$x_2 - 2(2) + 2(1) = 1 \rightarrow x_2 = 3$. Finalmente sustituyendo los valores de x_4, x_3 y x_2 y en la primera ecuación se tiene:

$x_1 + 3 + 2 + 1 = 10 \rightarrow x_1 = 4$. Este proceso se denomina **sustitución hacia atrás** y se utiliza en los sistemas triangulares.

Siempre que se tenga un sistema triangular se puede emplear el método de sustitución hacia atrás. El problema es, ¿qué hacer cuando el sistema no es triangular?

Esta pregunta preocupó a los matemáticos durante muchos siglos; la principal causa de que el avance fuera lento era la creencia de que **un sistema lineal siempre tenía solución**; afirmación que no es cierta.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

1. Encuentre ejemplos de sistemas lineales que no tengan solución.
2. ¿A qué le atribuye usted, que un sistema sea inconsistente?

Los matemáticos de la época orientaron sus investigaciones a encontrar un método que llevara un sistema lineal $n \times n$ a una forma triangular.

El método con más éxito para resolver sistemas lineales ha sido el método de eliminación de Gauss; dado que este método persiste hasta nuestros días y actualmente es la base de los métodos que emplean las calculadoras y computadoras para resolver sistemas lineales $m \times n$.

IX. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Basados en las operaciones entre ecuaciones lineales se realizan transformaciones de los sistemas de ecuaciones en nuevos sistemas lineales equivalentes hasta llevarlos a una forma triangular.

- **Transformación de eliminación:**

Consiste en sustituir la ecuación E_i del sistema lineal por la ecuación $E_i + cE_j$.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = b_1 \\ E_2 = b_2 \\ \vdots \\ E_i = b_i \\ \vdots \\ E_m = b_m \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} E_1 = b_1 \\ E_2 = b_2 \\ \vdots \\ E_i^* = b_i^* \\ \vdots \\ E_m = b_m \end{array} \right. ; \text{ Con } \begin{array}{l} E_i^* = E_i + cE_j \\ b_i^* = b_i + cb_j \end{array}$$

Esta transformación se denota: $E_i \rightarrow E_i + cE_j$ y se lee “la ecuación E_i se sustituye por $E_i + cE_j$ ”

- **Transformación de permutación:**

Consiste en permutar las ecuaciones E_i y E_j :

$E_i \leftrightarrow E_j$ y se lee “la ecuación E_i y E_j se permutan”

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = b_1 \\ E_2 = b_2 \\ \vdots \\ E_i = b_i \\ \vdots \\ E_j = b_j \\ \vdots \\ E_m = b_m \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} E_1 = b_1 \\ E_2 = b_2 \\ \vdots \\ E_j = b_j \rightarrow \text{Posición } i \\ \vdots \\ E_i = b_i \rightarrow \text{Posición } j \\ \vdots \\ E_m = b_m \end{array} \right.$$

El método de eliminación de Gauss tiene como base estas dos transformaciones elementales, que nos permiten encontrar la solución de un sistema, si éste lo tiene. De lo contrario, el método nos llevará a un sistema que tiene entre sus ecuaciones a $E_D(x)$ (5); es decir, podemos concluir fácilmente que el sistema es inconsistente. *¿Por qué? Explique.*

Ejemplo 8:

Dado el sistema lineal 3×4 $A \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{array} \right.$ Realice las siguientes

transformaciones elementales:

1. $E_2 \rightarrow E_2 + E_1$; de donde se obtiene:

$$A_1 \sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{array} \right.$$

3. $E_3 \rightarrow E_3 + (-1)E_2$; de donde se obtiene:

$$A_2 \sim \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2 \rightarrow E_D \end{cases}$$

En este momento podemos concluir que el sistema inicial es inconsistente; puesto que $A \sim A_2$

Ejemplo:

Dado el sistema lineal 3×3 $B \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 58 \\ 2x_1 + 4x_3 = 28 \end{cases}$

Realice las siguientes transformaciones elementales para obtener un sistema triangular:

1. $E_2 \rightarrow E_2 + (-3)E_1$

$E_3 \rightarrow E_3 + (-2)E_1$

2. $E_3 \rightarrow E_3 + (1)E_2$

Solución:

Realizando las transformaciones elementales, el sistema que se obtiene es:

$$\sim B_2 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 4x_2 - x_3 = 10 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

Empleando el *método de sustitución hacia atrás* para un sistema triangular se tiene que:

$x_3 = 6$, si se sustituye este valor en la segunda ecuación se obtiene:

$4x_2 - (6) = 10 \rightarrow 4x_2 = 16 \rightarrow x_2 = 4$; sustituyendo x_2 y x_3 en la primera ecuación se obtiene:

$x_1 + 2(4) + 6 = 16 \rightarrow x_1 + 14 = 16 \rightarrow x_1 = 2$ R/ La tripla $(2, 4, 6)$ es la única solución del sistema lineal B y se escribe: $S_B = \{(2, 4, 6)\}$ **Ejemplo:**

Dado el sistema lineal 3×3 $C \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 6 \\ 3x - 3y + z = 11 \end{cases}$

Realice las siguientes transformaciones elementales para obtener un sistema triangular:

1. $E_1 \rightarrow E_2 + (-1)E_1$

$E_3 \rightarrow E_3 + (-3)E_1$

2. $E_3 \rightarrow E_3 + (-2)E_2$

$\sim C_2 \begin{cases} x + y - z = -1 \\ -3y + 2z = 7 \\ 0x - 0y + 0z = 0 \end{cases}$

$\sim C_3 \begin{cases} x + y - z = -1 \\ -3y + 2z = 7 \end{cases}$

La idea, en la perspectiva de Euler es encontrar de qué manera la ecuación tres C_3 está incluida en las primeras dos ecuaciones para concluir finalmente que esta es esencialmente la razón por la cual el sistema tiene infinitas soluciones, observemos que la idea de estar incluida no es más que la noción previa del concepto de dependencia lineal.

CAPÍTULO 4.

Conclusiones

4.1 Características del curso de álgebra lineal en la Licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle

En los dos capítulos anteriores se plantean los insumos para responder la pregunta que motivó este trabajo de investigación, la respuesta la entrelazamos con nuestra propuesta al Instituto de Educación y Pedagogía, en cuanto a las transformaciones que deben darse en relación con el diseño y orientación del curso de álgebra lineal para los futuros profesores de matemáticas en formación.

Inicialmente presentamos una breve descripción de la asignatura y su contexto en el programa, mostramos también una característica, que debe tenerse en cuenta, de quienes tienen habitualmente el curso a su cargo y finalmente describimos las metas que deberían plasmarse en una propuesta del curso de álgebra lineal para un futuro inmediato.

4.1.1 Descripción general

El programa de Licenciatura en matemáticas que ofrece la Universidad del Valle a través del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP), está actualmente (2018) reconocido por el acuerdo número 07347 del 4 de mayo de 2018 del Ministerio de Educación Nacional. En el marco de la reforma a las licenciaturas que se desarrolló bajo la resolución 02041 de 2016 del Ministerio de Educación Nacional, se adelantó una revisión en el IEP de los programas de licenciatura que se ofrecían, particularmente en el programa de Licenciatura de matemáticas y física, se hicieron

una serie de ajustes y un proceso de autoevaluación con el fin de obtener la acreditación de alta calidad. Fue necesario cambiarle la denominación al programa académico Licenciatura en Matemáticas y Física por el de Licenciatura en Matemáticas. Este programa académico busca formar licenciados en matemáticas con los conocimientos y habilidades necesarias para desempeñarse de manera idónea como educadores matemáticos, en los niveles de básica secundaria y media, tal como reza su objetivo general.

La estructura curricular del programa académico Licenciatura en Matemáticas se organiza en cuatro componentes: fundamentos generales, didáctica de las disciplinas, saberes específicos y disciplinares, pedagogía y ciencias de la educación y electivas profesionales, cada una de estas componentes está estrechamente relacionada con una de las cinco líneas de formación del Programa:

FUNDAMENTOS GENERALES

Asignatura	Créditos
Inglés I	2
Inglés II	2
Inglés III	2
Inglés IV	2
Deporte formativo	2
Electiva Complementaria I	3
Electiva Complementaria II	3
Electiva Complementaria III	3
Electiva Complementaria IV	3

SABERES ESPECÍFICOS Y DISCIPLINARES

LÍNEA DE FORMACIÓN EN MATEMÁTICAS	
Asignatura	Créditos
Elementos de lógica Matemática	4
Conjuntos numéricos	4
Matemáticas Fundamentales	4
Geometría	4
Álgebra Lineal	3
Álgebra Moderna	3
Cálculo I	4
Cálculo II	4
Ecuaciones Diferenciales	3
Estadísticas	4
Física General	3
Análisis Matemático	3
Topología	3
Tópicos de Matemáticas Modernas y Contemporáneas	3

LÍNEA DE FORMACIÓN EN HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS	
Asignatura	Créditos
Historia de las matemáticas griegas	3
Historia y epistemología de las matemáticas	3
Filosofía de las matemáticas	3

PEDAGOGÍA Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Asignatura	Créditos
Introducción a la Pedagogía	3
Historia de la Educación y la Pedagogía	3
Trabajo de Grado I	4
Trabajo de Grado II	4

DIDÁCTICA DE LAS DISCIPLINAS

LÍNEA DE FORMACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS	
Asignatura	Créditos
Elementos de Educación Matemática	3
Aspectos socioculturales de la Educación Matemática	3
Didáctica I: Desarrollo de pensamiento numérico	4
Didáctica II: Desarrollo de pensamiento geométrico y métrico	3
Didáctica III: Desarrollo de pensamiento estocástico y aleatorio	3
Didáctica IV: Desarrollo de pensamiento variacional	3
Didáctica V: Tópicos en Didáctica de las matemáticas	3
Práctica Docente I	6
Práctica Docente II	6

LÍNEA DE FORMACIÓN EN LENGUAJE, RAZONAMIENTO Y COMUNICACIÓN DE SABERES MATEMÁTICOS	
Asignatura	Créditos
Conocimiento y Cultura	4
Conocimiento y desarrollo	3
Lenguaje y Comunicación	4
Discurso matemático en el aula	4
Razonamiento Matemático	3

LÍNEA DE FORMACIÓN EN TECNOLOGÍA DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
Asignatura	Créditos
Tecnologías digitales en Educación matemática	3
Integración de las TIC con el currículo	3
Diseño de actividades de aprendizaje con apoyo de las TIC	4
Implementación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas	4

ELECTIVAS PROFESIONALES

Asignatura	Créditos
Electiva Profesional I	3
Electiva Profesional II	3
Electiva Profesional III	3
Electiva Profesional IV	3

Ilustración 18: Programa curricular de la licenciatura en matemáticas.

Nota. Tomado de la página web: iep.univalle.edu.co/licenciatura-en-matematicas-2

El curso de álgebra lineal es una de las 14 asignaturas que se ofrecen en la línea de formación en matemáticas. Como prerrequisito para matricular esta asignatura están los cursos de elementos de *lógica matemática*, *conjuntos numéricos*, *matemáticas fundamentales* y *geometría*. Llamamos la atención sobre los cambios que se hicieron con respecto a la anterior licenciatura, el primero es que anteriormente las asignaturas *Elementos de Lógica Matemática* y *Conjuntos Numéricos* conformaban una sola que se llamaba *lógica y Teoría de Conjuntos*. Suponemos que este cambio se debe a que estas asignaturas son fundamentales en la formación matemática de los estudiantes, entre otras cosas, para apropiarse del lenguaje matemático y para entender métodos demostrativos que se utilizan en las matemáticas, y que una queja frecuente de los profesores es la falta de formación previa en Lógica y conjuntos del lenguaje como también en la geometría. De otro lado, anteriormente se daban dos cursos de geometría, geometría euclidiana y geometría analítica; observamos que ahora solo se ofrece un curso. Es pertinente fortalecer la componente de formación en lógica, pero resulta por lo menos extraño que se haya recortado la formación en geometría no sólo porque la historia nos muestra que sirvió de campo de validación, sino como lo sugieren múltiples autores sirve de campo de imaginación o caldo de cultivo para los más abstractos conceptos de las matemáticas.

Continuando con nuestra descripción del curso de álgebra lineal, es importante señalar que los estudiantes del plan de licenciatura toman este curso en compañía de estudiantes de ingenierías y en general con estudiantes que lo tienen incorporado en su ciclo básico de formación. El curso de álgebra lineal cuenta con una intensidad de 5 horas semanales y 3 créditos, lo que en teoría exige un estudio de 10 horas semanales de trabajo individual por parte de los estudiantes. Desde el año 2002 hasta la actualidad el curso no ha sufrido cambios en

cuanto a metodología y temáticas que se abordan. Las cinco horas semanales del curso se distribuyen en tres horas de teoría y dos para realizar talleres. La metodología de trabajo con la que se debe desarrollar el curso no se especifica en el programa, aunque indagando a algunos profesores que lo han orientado a lo largo de los años, se deduce una especie de metodología que consiste básicamente en una presentación de los temas que hacen parte del curso en forma deductiva, es decir, se presentan los axiomas, definiciones y a partir de estos, se enuncia un buen número de teoremas y corolarios, algunos incluyendo demostraciones con cierto rigor matemático. Se presentan también algunos ejemplos preponderantemente en R^2 y R^3 , y en la clase taller se realizan ejercicios que correspondan a los temas que se abordan en la semana.

4.1.2 Sobre los profesores que orientan el curso de álgebra lineal

El curso es ofrecido por el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad, a través de sus profesores de planta y contratistas. A pesar de la buena formación en matemáticas de estos, la gran mayoría de ellos tienen poca o ninguna formación en Didáctica de las matemáticas, con el agravante de que algunos desestiman o desconocen esta formación como requisito para enseñar. Al menos eso nos muestra el espíritu actual de la reforma que se adelanta del programa de Matemáticas, reforma discutida y aprobada en reunión de profesores de planta en el primer semestre (febrero- junio) del año 2017.

En términos de créditos, en la reforma del programa de Matemáticas se presentaron dos propuestas, una de 156 créditos (para 10 semestres) y otra de 140 créditos (para 9 semestres). Ningún porcentaje de la totalidad de créditos se destinó a asignaturas que pudieran aportar en la formación para la actividad docente, léase, historia de las matemáticas, epistemología,

psicología cognitiva y didáctica de las matemáticas. Así, se desconoce la resolución 2769 de noviembre de 2013 que fija las características específicas de calidad para cada programa de ciencias naturales y exactas, en la cual se señala:

Artículo 2. Punto 1. Todo programa en Ciencias Exactas y Naturales propenderá por [...] la apropiación, por parte del estudiante, de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la epistemología [...]

Más adelante en el mismo documento, se señala:

Punto 2. Los programas académicos en ciencias exactas y naturales se organizarán teniendo en cuenta las siguientes áreas de formación [...] Reflexión sobre historia, la naturaleza y las formas de producción del conocimiento propio de las ciencias [...]

Aunque los egresados del programa de Matemáticas obtienen el título de Matemáticos y se espera que estos se dediquen a la investigación en matemáticas y “en otros casos” participen en distintos roles en la industria y el comercio, la realidad es que estos profesionales en un amplio porcentaje (por encima del 80%) terminan enseñando en colegios y universidades en Colombia. El perfil oficial del egresado tomado de la página web de la Universidad del Valle de este programa no da cuenta de esta realidad:

El egresado del Programa Académico (de matemáticas) se caracterizará por:

- Ser un profesional con una sólida formación matemática, familiarizado con métodos propios del razonamiento y pensamiento matemático, capaz de contribuir al desarrollo y difusión de esta disciplina.
- Ser un profesional capaz de acceder a etapas avanzadas del conocimiento ya sea de manera autónoma o mediante la realización de estudios de postgrado en matemáticas o en disciplinas afines.
- Ser un profesional capaz de vincularse a procesos y proyectos de investigación en el sector académico y/o productivo.
- Ser un profesional íntegro, pensante, poseedor de los principios éticos, conocedor de los principios constitucionales y útil a la sociedad.

Adicional presentamos una cita de la resolución 2566 del 2003, que establece las condiciones mínimas de calidad y demás requisitos para el ofrecimiento y desarrollo de programas académicos de educación superior, que en cuanto a políticas y estrategias de seguimiento a egresados señala que:

La institución deberá demostrar la existencia de políticas y estrategias de seguimiento a sus egresados que:

1. Permitan valorar el impacto social del programa y el desempeño laboral de sus egresados, para su revisión y reestructuración, cuando sea necesario.

El subrayado en la cita es nuestro. Dado su impacto social, era de esperarse que la reforma actual incorporara un aceptable componente de formación en historia, filosofía de las matemáticas y didáctica de las matemáticas, pero reiteramos, no es así. Lo que permite inferir que se desestima la labor docente y en particular los elementos que hemos señalado como fundamentales en la formación de quien enseña, es pues necesario que en las futuras propuestas

de reforma de la asignatura de álgebra lineal para licenciados se le incorporé de manera explícita objetivos y metodologías que den cuenta de las demandas de formación anteriores.

En el aparte 3.6 presentamos una propuesta concreta para el caso particular de la enseñanza del concepto de dependencia lineal con base en nuestra siguiente sentencia: un curso de álgebra lineal para estudiantes de licenciatura en matemáticas debe articular la reflexión epistemológica entre la historia y la didáctica, en el sentido que lo propone Dorier, la componente disciplinar y la práctica docente. Para tal fin, nuestro trabajo se convierte en un insumo de consulta para posteriores propuestas de esta cátedra.

Según lo señala el Ministerio de Educación Nacional, la formación del maestro no debe separar la formación disciplinar de la epistemológica y la didáctica. A continuación, presentaremos en la perspectiva de las políticas públicas los elementos que respaldan la sentencia anterior.

La reforma a las licenciaturas. (resolución 02041 de 2016 del Ministerio de Educación Nacional)

Los programas de licenciatura, es decir, los programas en Colombia donde se forman los futuros maestros de los niveles de educación correspondientes a primaria y secundaria, aunque no de forma exclusiva pues muchos licenciados terminan siendo maestros universitarios, se han visto enfrentados a reformarse gracias a la resolución 02041 de 2016 del Ministerio de Educación Nacional por la cual se establecen las características específicas de calidad de los programas de licenciatura. Esta reforma está orientada a cumplir con la meta de que Colombia

será el país más educado en América Latina para el 2025. Para dar cumplimiento a esta meta, la reforma se centra en señalar la formación del maestro:

[...] la necesidad de crear una política de mejoramiento del sistema educativo del país; proceso que inicia desde la adecuación de las condiciones en la formación de quienes se preparan profesionalmente para el ejercicio docente, con la premisa de que la excelencia de los educadores es un factor esencial para garantizar la calidad de la educación que prestan las instituciones educativas a los niños, niñas, jóvenes y adultos en los diferentes niveles y ciclos educativos. (MEN, 2015)

La reforma 02041 por su parte cita dentro de sus considerandos que:

La excelencia de los educadores depende de las características de su formación inicial [...] en ese proceso cumple un papel destacado la educación que se imparte en los programas de licenciatura [...]

Atendiendo este y los restantes considerandos la reforma fija las pautas rectoras para la formación de maestros así:

Los valores, conocimientos y competencias del educador comprenderán cuatro componentes que deben ser desarrollados conjuntamente asegurando su articulación.

Las cuatro componentes que se mencionan en la cita anterior son básicamente: la componente de fundamentos generales que va desde las competencias comunicativas y argumentativas en español, el uso de TIC y las competencias comunicativas en inglés, la competencia de

pedagogía y ciencias de la educación, la competencia en didáctica de la disciplina y, por último, la competencia de saberes específicos y disciplinares que se describe así:

El educador [...] debe estar en capacidad de investigar [...] lo cual involucra apropiar la trayectoria histórica y los fundamentos epistemológicos del campo disciplinar que lo involucra.

La reforma plantea así que el factor clave del mejoramiento de la educación en nuestro país se centra en la formación inicial de maestros y en particular en la articulación real y efectiva de estas componentes.

4.1.4 Elementos para una propuesta de asignatura de álgebra lineal para licenciados

Las reflexiones que planteamos en este punto están encaminadas a brindar elementos para la discusión que enriquezcan posibles preguntas de investigación o propuestas para el curso de álgebra lineal. Aunque nos enfocamos en una disciplina matemática en particular, creemos que los elementos que señalamos como esenciales deben o se pueden aplicarse, al menos, a un buen porcentaje de los cursos que hacen parte de la línea de formación en matemáticas de la estructura curricular del programa actual de Licenciatura en Matemáticas.

La idea de la transversalidad en cuanto que integra la parte disciplinar, la historia, la filosofía y la didáctica de los conceptos involucrados de los contenidos parece ser una de las formas de responder a las demandas actuales de repensar los currículos. En efecto, en el desarrollo de las asignaturas de la línea de formación en matemáticas se debe dar cuenta de gran parte de los contenidos que se esperan alcanzar en las líneas de formación en Historia, Filosofía y Didáctica de las matemáticas. Para tal fin, formulamos algunas pautas que deberían guiar el diseño de las propuestas de curso de álgebra lineal para la licenciatura en matemáticas:

- I. Procurar la formación disciplinar en álgebra lineal del futuro profesor, a través de recrear análisis históricos con vocación didáctica de algunos conceptos básicos. Es decir, el profesor debe conocer más allá del formalismo propio del objeto matemático, conocer un poco sobre las heurísticas asociadas a cada etapa crucial de su construcción, entendiendo que en estas heurísticas están las ideas y preconcepciones que movilizaban a los matemáticos, cómo trabajaban con los objetos, sus prácticas, su creatividad para llegar al objeto, las concepciones en ciertos momentos; esto le permite al profesor dar cuenta de la reorganización del objeto en el contexto matemático, su relación con otros objetos, entender algunas situaciones que se presentan a la hora de enseñar (situaciones asociadas a obstáculos epistemológicos. Cabe aclarar que no es volver historiador al profesor de matemáticas, sino que el profesor no desconozca la importancia de la historia para su formación en didáctica y que aproveche todos los trabajos (este es un ejemplo de estos) que se tienen en esta dirección.
- II. Analizar las actividades de aprendizaje diseñadas por el profesor, en cuanto a los elementos dentro del diseño que fueron inspirados a partir de la reflexión histórico-epistemológica.
- III. Diseñar estrategias o ejercicios que potencien, cuando sea pertinente, los modos de descripción y razonamiento que presentamos en el capítulo 3, con el objetivo de lograr hacer las abstracciones que se exigen en el curso y así familiarizar al estudiante con el formalismo de los conceptos que se desarrollan.

- IV. Incorporar las tecnologías en el diseño de actividades que potencien las posibilidades de imaginar gran parte de los contenidos sobre los que se sustenta el álgebra lineal en un curso introductorio. Para este aspecto es importante que el docente conozca las implicaciones que hemos advertido en el apartado 3.5 con relación a lo que denominamos el referente geométrico.

4.2 Las dimensiones de lo histórico que hemos trabajado.

A lo largo de este trabajo hemos recreado una propuesta metodológica que pretende mostrar las interacciones que se pueden dar entre la historia y la didáctica de las matemáticas. Con esta metodología se quiere mostrar la importancia de remitirnos a la historia para aportar a fenómenos (dificultades) de interés en el proceso de enseñanza- aprendizaje de algún concepto matemático, en nuestro caso el concepto de espacio vectorial y conceptos subyacentes. Es así como la historia es una referencia fundamental para las investigaciones que se adelantan en didáctica, porque permite ver las matemáticas como un saber dinámico y contribuye a justificar, a través de las etapas de constitución de un concepto, cómo este se convierte en un saber digno de ser enseñado.

4.2.1 Dimensión sociológica.

En el capítulo I y II encontramos diferentes episodios históricos de los que se develan fenómenos colectivos asociados al quehacer de la comunidad matemática, determinados por las creencias generalizadas y los intereses en determinado momento. Mencionemos dos fenómenos del colectivo formado por la comunidad matemática en dos épocas distintas, véase en los apartados 1.6, 1.7 y 1.8, que cronológicamente van del siglo XV al XVII, el fenómeno de

carácter colectivo que consiste en la no aceptación de los números negativos ni sus raíces, muy a pesar de que operaban con ellos y refrendaban las mismas propiedades de las raíces positivas.

Desde el desarrollo de las ecuaciones lineales y cuadráticas con las que trabajaron Al-Khowarizmi y Diofanto, se erige una búsqueda constante de métodos para resolver estas ecuaciones. En esta misma línea, los trabajos de Tartaglia, Cardano y Ferrari tuvieron éxito al encontrar la solución por medio de radicales de la ecuación cúbica y de cuarto grado. En consecuencia, se enfrasca la comunidad matemática en la búsqueda de los algoritmos que completen este trabajo, es decir, buscar la solución por medio de radicales para las ecuaciones polinómicas de grado $n \geq 5$.

Este fenómeno de carácter colectivo es alimentado en un largo periodo histórico a través de resultados que parecen ratificar la idea de que existe el método, por medio de radicales, para resolver las ecuaciones de quinto grado y mayores; por ejemplo, el teorema fundamental del álgebra cuya primera aproximación fue dada por Descartes y luego Euler lo completa hasta el grado seis. Los hechos anteriores garantizaban en cierto sentido la existencia de las raíces. En consecuencia, en cuanto a las ecuaciones, la búsqueda de algoritmos para encontrar las soluciones era lo más relevante. Por otro lado, en el escenario que nos interesa ubicar el fenómeno, Euler presenta sus ideas alrededor de las características de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones y cómo estas determinan la naturaleza del conjunto solución. Simultáneamente, emerge el algoritmo de la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales, y como era de esperarse la comunidad matemática se interesa más por la regla de Cramer (Ver 2.1 y 2.2). De nuevo, en este momento histórico, vemos cómo la idea

equivoca, de que si las soluciones existen debe existir el método que me lleve a ellas, orientó los intereses de los matemáticos por largo tiempo.

Los matemáticos de la época de Euler, como hemos reiterado, solo resolvían los sistemas de ecuaciones cuadrados, que son aquellos que tienen igual número de incógnitas que de ecuaciones, los que no tenían única solución se descartaban por considerarse mal planteados. Esta concepción de los matemáticos condicionó las estrategias investigativas de la época, lo que muestra claramente un fenómeno de características sociológicas.

4.2.2 Hallazgos filosóficos.

La postura filosófica determinante en la situación que hemos descrito en el punto anterior es del tipo platónico, bien conocida en el mundo de los matemáticos como *realismo* que se define como: cualquier explicación metafísica de las matemáticas que implica que las entidades matemáticas existen, que son abstractos, y que son independientes de todas nuestras actividades racionales. (Recuperado de <https://www.iep.utm.edu/mathplat/>. 25 de Noviembre de 2018).

En otras palabras, tanto los objetos matemáticos como las leyes que los rigen no se inventan, sino que se descubren. En el periodo histórico que hemos descrito en el apartado anterior y por muchos siglos más, la comunidad matemática decididamente creyó, sin prueba alguna que, si una ecuación tiene solución, en consecuencia, debe existir un método y más concretamente un método por radicales que nos lleve a obtener dichas soluciones. La creencia de naturaleza platónica, como ya hemos señalado, se centraba en el método por radicales para resolver ecuaciones: se tenía la certeza que debía existir en el mundo de las ideas, sólo era cuestión de encontrarlo. En general persiste la discusión milenaria sobre si los objetos matemáticos se

descubren o son invenciones del hombre. Creemos que las dos posturas coexisten. Nuestro análisis histórico realizado en el capítulo 1, nos deja la idea que la geometría juega un papel preponderante en la emergencia de un concepto básico como es el de vector, en particular la geometría del plano y el espacio le presta al álgebra lineal un campo donde poder descubrir a partir de visualizar e imaginar gran parte de los conceptos que le son constitutivos. Pero debemos advertir que la geometría que desinteresadamente sirve de caldo de cultivo para que germinen los conceptos básicos, se convierte a la postre en obstáculo para aquellos espacios de más de tres dimensiones, es ahí, donde el que aprende debe pasar de la etapa del descubrimiento a la etapa de las invenciones.

BIBLIOGRAFÍA

- Abel, N. H. (1824). *Mémoire sur les equations algébriques, ou l'on demontre l'impossibilité de la resolution de l'aquation générales du cinquiéne degré.*
- Álvarez, Y. (2014). *Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la mitad del siglo XIX y primera del siglo XX.* Logroño: Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática.
- Arboleda, L. C. (2002). *El problemas didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las Matemáticas.* Revista Colombiana de filosofía de la ciencia., 3(6-7), 59-84.
- Arboleda, L. C. (2006). *Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 101-107.
- Arboleda, L. C. (2012). *El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas.* Asociación Colombiana De Educación Matemática. ASOCOLME, 1-10.
- Arboleda, L. C., & Castrillon, G. (2007). *Educación matemática, pedagogía y Didáctica.* REVEMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática., 5-27.
- Artigue, M. (1990). *Epistémologie et didactique.* Reserches en didactique des mathématiques.
- Bombelli, D. R. (1572). *L'Algebra.* Bolonia.
- Bourbaki, N. (1943). *Eléments des Mathématique.* París: Grat- Britain.
- Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas.* (J. Hernández, Trad.) Springer-Verlag.
- Boyer, C. B. (2001). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.
- Bravo, A., & Cantoral, R. (2012). *Los Libros de Texto de Cálculo y el fenómeno de la Transposición didactica.* Educación Matemática, 24(2), 91-122.

- Brousseau, G. (1981). *Problèmes de didactique des décimaux*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 37-127.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 33-115.
- Camargo, D. Y. (2006). *Pedro José Sosa y su contribución a la matemática y la ingeniería colombiana*. Sociedad Colombiana de Matemáticas. Lecturas especiales, especial, 333-346.
- Cardano, G. (1993). *Ars magna or the rules of algebra*. (Translated by T. Richard Witmer). Dover Publications, Inc., New York.
- Cayley, A. (1858). *A memoir on the theory of matrices*. Royal Society, 17-37.
- Chavarria, S. (2014). *De las Ecuaciones a la teoría de grupos: Algunos Obstáculos Epistemológicos*. Cali. Universidad del Valle, trabajo de Grado.
- Crowe, M. J. (1985). *History of Vector Analysis. The Evolution of the Ideas of a Vectorial System*. New York: Dover pub.
- Cruz, L. M. (2009). *Teorema Fundamental del álgebra y sus diferentes demostraciones*. Bogotá. Pontificia universidad Javeriana, Trabajo de grado.
- Dávila Rascón, G. (2003). *El desarrollo del álgebra moderna, parte III: el surgimiento del álgebra abstracta*. Apuntes de historia de las matemáticas, 38-78.
- Delgado., J. L. (2000). *Interacciones entre investigaciones en Didáctica de las Matemáticas para la elaboración de una reflexión epistemológica sobre cuestiones de enseñanza y aprendizaje. El ejemplo del álgebra Lineal*. Didactique des mathématiques à Genève (DiMaGe).
- Descartes. (1989). *Reglas para la dirección del espíritu*. (J. M. Cordón, Trad.) Madrid: Alianza editorial.
- Descartes, R. (1947). *La Geometría*. Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe.
- Descartes, R. (1954). *The Geometry. Book I*. (D. E. Smith, Ed., & M. L. Latham, Trad.) New York: Dover Publications.

- Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría*. Barcelona, España.
- Dorier, J. L. (1997). *The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces*. Laboratory Leibniz, 1-22.
- Dorier, J. L. (Octubre de 2000). *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathematiques sur L'algebre Lineaire. Perspectives theorique sur leurs interactions*. Equipe DDM- Laboratoire Leibniz, 77.
- Dorier, J. L. (2000). *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathematiques sur L'Algebre Lineaire*. Laboratoire Leibniz, 1- 70.
- Euler, L. (1759). *Introductio in analysin infinitorum*.
- Euler, L. (1759). *On an apparent contradiction in the theory of curved lines*. (V. C. Translated by Sandrah Eckel, Ed.) *Memoires de l'Academie des sciences de Berlin* , 291-233.
- Eychenne, B. (2013). *L'enseignement de Lino de Pombo au colegio Militar de Bogota: Les lecons de géométrie analytique*. Université de Nantes.
- Fischbeim, E. (1989). *Tacit models and mathematical reasoning*. *For learning of Mathematics*, 9-14.
- Fischbeim, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Netherlands: Reidel.
- Grassmann, H. (1844). *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* .
- Grossman, S. I. (1987). *Álgebar Lineal*. México: Iberoamérica.
- Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Royal Irish Academy.
- Lewis, A. (1977). *Hermann Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik*. *Annals of Science*, 103-162.
- Martínez, H. J., & Sanabria, A. M. (1996). *Énfasis en la enseñanza del álgebra Lineal*. ERM.

- MEN, M. d. (diciembre de 2015). *decreto 2450 de 2015. «Por el cual se reglamentan las condiciones de calidad para el otorgamiento y renovación del registro calificado de los programas académicos de licenciatura y los enfocados a la educación.*
- Monroy, L. (2011). *El álgebra lineal en el contexto histórico de las matemáticas.* Santiago de Cali: Trabajo de grado. Universidad del Valle.
- Moreno, Luis E.; Waldegg, Guillermina (1995). *Variación y representación: del número al continuo.* Educación Matemática, 07(01), pp. 12-28 .
- Nahin, P. J. (1998). *Esto no es real, la historia de i.* (P. Pinasco, Trad.) Mèxico: Princenton University Press.
- Newton, I. (1704). *Enumeratio lineari tertii ordinis* . Traducido al inglés por Jacobo Stirling.
- O'Neill, J. (1986). *Formalism, Hamilton and Complex numbers.* Studies in History and Philosophy of Science, 17, 351-372.
- Peano, G. (1887). *Aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal.* Turín.
- Petsche, H. J. (2014). *The 'Chemistry of Space': The Sources of Hermann Grassmann's.* Scientific Achievements. En Annals of Science (Vol. 71, págs. 522-576). Germany: Universität Potsdam.
- Pombo, L. d. (1850). *Lecciones de Geometria analítica.* Santa fè de Bogota: El día.
- Rueda, M., & Brito, A. (1887). *Lecciones de àlgebra.* Santa fè de Bògota.
- Rascón, G. D. (2003). *El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones.* Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2(1), 27-58.
- Recalde, L. (2013). *Lecturas de historia de las matemáticas.* (e. Revisión, Ed.) Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Sánchez B., C. H., & Albis G., V. (Enero- Abril de 2012). *Historia de la enseñanza de las Matemáticas en Colombia. De mutis al siglo XXI.* Revista Quipu, 14(1), 109-157.

- Sánchez, C. H. (2005). *Fuentes para la historia de la matemática en Colombia. Discurso de apertura de estudios pronunciado en la Universidad del Cauca, el día primero de Octubre de 1830 por el matemático catedrático Linio Pombo*. *Lecturas Matemáticas*, 111-124.
- Serpinska, A. (2000). *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. En J. L. Dorier, *On the Teaching of Linear Algebra* (págs. 209-246). Kluwer Academic Publishers.
- Tait, P. (1873). *Elementary Treatise on Quaternions*. Oxford.
- Van Der Waerden, B. (1985). *From al-Khawrizmi to Emmy Noether. the History of Algebra*. Berlin: Springer-Verlag.
- Vygotski, L. S. (1987). *Development of scientific concepts*. The collected Works os L.S. Vigotsky, I.
- Wallis, J. (1685). *A Tratise of álgebra*. Londres.
- Wessel, C. (1897). *Essai sur la représentation analytique de la direction*. Dinamarca: Copenhague, Bianco Luno.
- Zea, C. A. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático*. Santiago de Cali: Trabajo de grado. Universidad del Valle.