



**UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA FORTALECER EL
CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES EN EL
GRADO SEGUNDO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA.**

**KATHERINE ANGEL TRUJILLO 0639482
MARIA FERNANDA CANDAMIL RENDÓN 0634075**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA
CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2013**



**UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA FORTALECER EL
CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES EN EL
GRADO SEGUNDO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA.**

KATHERINE ANGEL TRUJILLO 0639482

MARIA FERNANDA CANDAMIL RENDÓN 0634075

**Trabajo de grado presentado como requisito para acceder al título de
LICENCIADAS EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA**

Asesor

WILDEBRANDO MIRANDA VARGAS

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA
CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2013**

Nota De Aceptación

Director

Wilderbrando Miranda

Jurado

María Fernanda Mejía

Jurado

Marisol Santacruz

Santiago de Cali, Febrero de 2013

AGRADECIMIENTOS

Hoy damos gracias a Dios por haber estado presente en cada una de las etapas de nuestro trabajo dándonos sabiduría, entendimiento y fortaleza para lograr culminar una meta más en nuestras vidas y realizarnos como profesionales venciendo los momentos difíciles.

A nuestras familias, especialmente a Olga Trujillo y a Ángel Uriel Paladinez por su apoyo constante e incondicional y por la confianza que tuvieron desde el inicio de nuestra carrera hasta el día de hoy valorando en todo momento nuestras aptitudes.

A nuestros profesores y asesores que contribuyeron con su idoneidad en sus grandes aportes para la elaboración de este trabajo, por su paciencia, dedicación y comprensión.

A nuestros compañeros y amigos que durante la carrera nos acompañaron e hicieron que nuestro estudio fuera más ameno y enriquecedor compartiendo conocimientos.

Finalmente yo Katherine y yo María Fernanda nos damos agradecimiento mutuo como amigas y compañeras de trabajo de grado, por nuestro acompañamiento, entrega y comprensión durante este trabajo, dado que siempre tuvimos una buena disposición para la elaboración sin diferencia alguna, nuestros aportes brindados fueron muy asertivos y significativos en cada momento.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO 1	4
ASPECTOS GENERALES	4
1.1 Planteamiento del Problema	5
1.2 Objetivos	11
1.2.1 Objetivo General	11
1.2.2 Objetivos Especificos	11
1.3 Justificación	12
 CAPÍTULO 2	 17
REFERENTES TEÓRICOS	17
2.1 La Multiplicación	18
2.1.1 La Multiplicación en los Naturales ($\mathbb{N}$)	20
2.1.2 Propiedades de la Multiplicación	21
2.1.3 Sistema de Numeración Posicional Decimal	23
2.1.4 Las tablas de multiplicar	25
2.1.5 Modelos reflexivos de la Multiplicación	26
2.2 Referentes Curriculares	30
2.2.1 Coherencia Vertical y Horizontal	36
2.3 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)	40
2.3.1 Tipos de Situaciones	41
 CAPÍTULO 3	 45
METODOLOGÍA	45
3.1 Fases de la metodología	46
 CAPÍTULO 4	 50
PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES	50
4.1 Situaciones de la Secuencia Didáctica	52
4.1.1 Situación 1: Significado de la Multiplicación en los números	
Naturales ($\mathbb{N}$)	53
4.1.1.1 Tarea 1: Saltando encuentro el número.	53
4.1.1.2 Tarea 2: Juguemos con la suma.	58

4.1.1.3 Tarea 3: La geometría de la mano con la aritmética.	62
4.1.2 Situación 2: Estrategias para facilitar la multiplicación en los Números Naturales (N)	68
4.1.2.1 Tarea 1: Ordenando Números.....	68
4.1.2.2 Tarea 2: Combinando Operaciones.	73
 CAPÍTULO 5	76
RESULTADO Y ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES.....	76
5.2 Análisis de los resultados	77
5.2.1.Análisis Situación 1. Tarea 1: Saltando encuentro el número	77
5.2.2. Análisis Situación 1. Tarea 2: Juguemos con la Suma	83
5.2.3. Análisis Situación 1. Tarea 3: La geometria de la mano con la aritmética	88
5.2.4. Análisis Situación 2. Tarea 1: Ordenando números.....	95
5.2.5. Análisis Situación 2. Tarea 2: Combinando operaciones	96
 CAPÍTULO 6	98
CONCLUSIONES Y REFLEXIONES GENERALES.....	98
6.1 Conclusiones y Reflexiones.....	99
 BIBLIOGRAFIA	102
 ANEXOS	105

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Valor relativo	24
Figura 2: Principio aditivo y multiplicativo	24
Figura 3: Patrón numérico	26
Figura 4: Unión repetida	27
Figura 5: Distribución de objetos	28
Figura 6: Producto cartesiano	28
Figura 7: Modelo combinatorio	29
Figura 8: Asociación de elementos	32
Figura 9: Pensamiento Variacional	33
Figura 10: Pensamiento Métrico	34
Figura 11: Pensamiento Aleatorio	35

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Coherencia Horizontal	37
Tabla 2: Coherencia Vertical	39
Tabla 3: Situaciones Didácticas	43
Tabla 4: Situaciones y tareas	52

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo proponer una secuencia didáctica que fortalezca el concepto de multiplicación en los números naturales en grado segundo, partiendo del aporte que brinda el sistema de numeración decimal en este proceso y en la reflexión de las propiedades conmutativa y distributiva como estrategias de aplicación para situaciones que requieran del uso del cálculo mental y escrito.

La elaboración de la secuencia didáctica se realizó a partir de la reconstrucción de otra secuencia didáctica, para la cual se tuvieron en cuenta los modelos operatorios de la multiplicación que proponen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Rico.

Palabras clave: Secuencia de situaciones didácticas, Multiplicación de Números Naturales, TSD (Teoría de Situaciones Didácticas).

INTRODUCCIÓN

La multiplicación como operación dentro de un sistema numérico y su aplicación, han sido objeto de estudio por el MEN (1998), Rico (1998), Vergnaud (1990) y otros autores, en donde se hacen evidentes algunas problemáticas y dificultades que se han presentado y se siguen presentando en la escuela en su aprehensión, específicamente en la poca comprensión que alcanzan los estudiantes cuando deben resolver situaciones que involucren la operación de multiplicación, e incluso en la operatividad misma, donde no se hace evidente el papel que juegan las propiedades y los conceptos amarrados a la idea de multiplicar como por ejemplo, la reflexión sobre el sistema de numeración posicional y decimal en que se basan la mayoría de los cálculos.

Por tal motivo, este trabajo se elabora con el objetivo de proponer una secuencia didáctica que ayude a fortalecer la comprensión del concepto de multiplicación. Dicho interés surge inicialmente por la poca comprensión que tienen los estudiantes cuando comienzan el estudio de las tablas de multiplicar, muchas veces apoyados en procesos memorísticos y no en el estudio de las propiedades de dicha operación mediante situaciones que impliquen el uso del cálculo mental y escrito, para así facilitar la labor del docente en la enseñanza de dicho concepto.

En primer lugar para cumplir con lo anterior se realizará la exploración de algunos libros de textos de básica primaria, en donde se revisará la presentación del concepto de multiplicación y sus propiedades que este material ofrece, los cuales contribuyen a la elaboración y diseño de la secuencia didáctica.

Para la realización de este trabajo de grado se presentan cinco capítulos los cuales se distribuyen de la siguiente manera:

El primer capítulo contiene la información general del trabajo: planteamiento del problema en donde se describe la problemática que existe respecto a la

multiplicación, sus propiedades y el aprendizaje de las tablas de multiplicar, objetivos, justificación donde se menciona la importancia que tiene la investigación y la pregunta que guió el desarrollo del trabajo con algunas dificultades que se presentan durante el aprendizaje del concepto de multiplicación.

El segundo capítulo, hace alusión al referente teórico partiendo de la TSD de Brousseau (1986), retomando las propuestas realizadas por el MEN a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y finalizando con algunas reflexiones sobre las definiciones de multiplicación, propiedades en los números naturales ($\mathbb{N}$), sistema de numeración posicional y las tablas de multiplicar.

El tercer capítulo recoge los aspectos metodológicos en donde se describe el desarrollo del trabajo a través de sus fases y de los tiempos para la realización e implementación de cada una de ellas, teniendo en cuenta el ¿qué?, ¿cómo? ¿Cuándo?, ¿dónde? y ¿para qué? sirve la información recolectada.

En el cuarto capítulo se presentan las dos situaciones aplicadas a los estudiantes en donde se hace la descripción de cada una de las tareas a realizar con sus respectivos análisis matemáticos y resultados esperados.

En el quinto capítulo se encuentran los resultados de las situaciones aplicadas, el desarrollo y análisis de las producciones realizadas por los estudiantes a través de un estudio cuantitativo y cualitativo.

Por último el sexto capítulo comprende las conclusiones generales y reflexiones finales donde encontramos las fortalezas y debilidades de la enseñanza en la construcción del concepto de multiplicación en los números naturales.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES

Los aspectos generales que se tuvieron en cuenta para la realización de este trabajo, se fundamentan básicamente en la descripción y justificación del problema que existe respecto a la construcción del concepto de multiplicación y la aplicación de sus propiedades en los números naturales, partiendo de referentes como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), pruebas externas como las Pruebas Saber y algunos estudios realizados por Rico (1998) y Vergnaud (1990).

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Diferentes desarrollos investigativos realizados por estudiantes del IEP (Instituto de Educación y Pedagogía) de la Universidad del Valle como lo son: López & Rebellón, 2000; Girón & Romero, 1998; Valencia & Gómez, 2010, y Ospina & Salgado, 2011 y propuestas curriculares como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) hablan acerca de la multiplicación y de su comprensión como operación dentro de un sistema numérico con sus respectivas propiedades matemáticas.

En estas investigaciones se ha hecho relevante que los estudiantes presentan poca comprensión de las operaciones y de sus propiedades, esto se puede evidenciar cuando se deben enfrentar a resolver situaciones de cálculo mental y escrito que tienen implícitas el uso de la multiplicación donde los algoritmos se hacen de manera memorística, dejando de lado la noción de suma reiterada que hace parte del concepto de multiplicación y que está implícita en el aprendizaje de las tablas de multiplicar.

Además el papel que desempeña la escuela frente a la enseñanza de la multiplicación generalmente se orienta en lo que proponen los libros de textos, pues en la mayoría de los casos la escuela explica la multiplicación como una operación que resulta de adicionar repetidamente un número cardinal, noción que

es válida para iniciar el concepto de esta operación en los números naturales. (Ramírez, 2006).

El problema de este concepto está en la comprensión de la construcción de las tablas de multiplicar como una herramienta que se utiliza memorísticamente en donde se pierde el significado de la operación, es decir que el estudiante diga o conozca el resultado de una tabla, no significa que se las sabe o que ha aprendido todas las nociones implícitas que tiene la multiplicación, que sería lograr entenderla como el número de combinaciones que se pueden hacer con los elementos de dos conjuntos dados o como una operación que se puede resolver aplicando propiedades como la distributiva del producto, en donde se pone en juego el concepto de valor posicional de un número natural.

Aunque la noción de multiplicación como adición repetida es un concepto válido para entenderla en los naturales ($\mathbb{N}$) puede limitar la comprensión del significado de cada una de las operaciones de los números naturales ($\mathbb{N}$) (MEN, 1998) e impedir que se reconozca la relación que tiene dicha operación con otras nociones de las matemáticas (Ospina & Salgado, 2011), tales como la comprensión del significado de los números, su representación e interpretación y el reconocimiento del valor absoluto y relativo de los números entre otros.

Por ejemplo, en las pruebas censales SABER del 2005 y 2009, los resultados revelaron que hay dificultades en la comprensión de los enunciados de un problema, lo que significa que el razonamiento lógico es uno de los procesos más débiles, esto conlleva a pensar que los estudiantes desarrollan las situaciones aplicando algoritmos matemáticos de una forma mecánica en donde se pierde el sentido de las operaciones numéricas y de los procesos que genera el pensamiento matemático (Instituto Colombiano para la evaluación de la Educación, 2010)

Partiendo de lo anterior, respecto a la definición que se maneja en la Escuela en torno a la multiplicación como suma reiterada surgen varios problemas

en la enseñanza y en el aprendizaje de dicha operación. Uno de estos problemas se encuentra en la misma definición pues los textos escolares tienden a generalizarla, dejando de lado que la multiplicación dentro de cada conjunto numérico y contexto presenta ciertas restricciones, por ello es importante recalcar que dicha definición se cumple cuando se está trabajando con los números naturales o por lo menos cuando uno de los factores es un número cardinal ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ó $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$) que al representarlo se puede visualizar o tocar respectivamente (Rico, 1998).

Por ejemplo, si tenemos en cuenta que los términos de la multiplicación son multiplicando (número que se repite) y multiplicador (veces que se repite) en 9×8 nos referimos a que el nueve se está repitiendo ocho veces, en este caso el nueve representa un número cardinal (multiplicando) pero al aplicar la propiedad conmutativa diríamos 8×9 , aquí el cardinal concreto en este caso sería el ocho que se repetiría nueve veces, esto pasaría sin problema con los números naturales, pero si extendemos los conjuntos de aplicación por ejemplo con los reales diríamos: 2.5×8 en donde 2.5 se repite ocho veces y al aplicar la conmutatividad, 8×2.5 vemos que se complican las cosas porque no sabríamos con exactitud cuántas veces se va a repetir el ocho ya que el multiplicador en este caso es 2.5 el cual debería ser un número natural y no lo es. Por tanto, a veces es importante tener en cuenta la diferencia entre el multiplicando y multiplicador para que el contexto de la situación adquiera sentido (Gómez, 2000).

Seguidamente a este problema se le añade otro que se fundamenta en la comprensión de las propiedades matemáticas, en este caso, las propiedades del producto, pues los estudiantes las aprenden como reglas formales expresadas con símbolos y no son capaces de reflexionar sobre el manejo de los números al resolver problemas en diferentes contextos (MEN, 1998).

En la escuela se ha enseñado que la propiedad conmutativa del producto consiste en que el orden de los factores no altera el producto, es decir que n

veces k da el mismo resultado que **k veces n**, dejando de lado el tratamiento inmerso que hay en dicha propiedad pues el sentido, valor y función de cada número (multiplicando y multiplicador) puede cambiar en la misma operación de acuerdo al contexto.

Con esta idea de conmutatividad y relacionándolo con la noción de múltiplos de un número, los estudiantes han crecido y aprendido las tablas de multiplicar comprendiéndolas como un algoritmo que resulta de:

“sumar reiteradas veces un mismo multiplicador variando el multiplicando”
(Rico, 1998, pág.147)

Ó como lo presentan en algunos textos escolares, un ejemplo de ello se encuentra en el libro Aciertos Matemáticos 3 “las tablas de multiplicar representan los múltiplos de un número y son la forma abreviada de realizar una adición en donde progresivamente se va aumentando el mismo sumando” (Ramírez, 2006).

Para luego ir comprobando que el producto es conmutativo, en donde **$n \times k$** resulta igual que **$k \times n$** , aunque las tablas de multiplicar están ligadas a la multiplicación y a su vez la multiplicación la relacionan con la suma reiterada, las tablas de multiplicar bajo esta idea limita y presenta inconsistencias en algunas interpretaciones, como es el caso en donde el cero (**0**) cumple el papel del multiplicador es decir **$n \times 0$** (n por cero veces) pues al intentar resolver este algoritmo con la suma reiterada no están fácil comprender que **n** repetido cero veces significa que **n** no está ninguna vez y por tanto el resultado es cero (**0**).

Es aquí donde cuestionamos que para el aprendizaje de las tablas de multiplicar se debe tener un manejo adecuado, el cual depende del sistema o conjunto numérico, por ejemplo desde los números naturales el concepto de tablas de multiplicar generalmente se introduce con la noción de adiciones repetidas que pueden ser un buen comienzo en la construcción de ese concepto, pero debe reflexionarse sobre el conocimiento matemático que hay detrás de dicho concepto

y no dejar de lado la posibilidad de explorar formas donde se hacen presente las otras propiedades como estrategias de solución y de aprehensión.

Finalmente otra de las dificultades que existe en el aprendizaje de la multiplicación en una expresión matemática radica en: *“el dominio de los números y su simbolización”* (Rico, 1998, pág.139)

Pues cada operación tiene su propio modelo y una función para el número. En la multiplicación el número hace alusión a la acción de reiterar y para comprender dicha acción es necesario que el estudiante interprete el número no solo como un símbolo que representa cantidades, sino como un concepto operatorio que ayuda a contar o secuenciar determinadas características del mundo real (Castro, 1985), en donde la simbolización permite establecer la relación que hay entre los números que proporcionan la operación y la acción real que le da origen.

De acuerdo a lo anterior podemos decir que la dificultad que se presenta en la simbolización de esta operación está en la inferencia o interpretación de la información de la situación planteada y su relación matemática con el contexto.

Tomando como referente todo lo mencionado y apoyados en la importancia que tiene la comprensión de esta operación dentro del currículo de matemáticas en la educación básica primaria, el interés de este trabajo se centrará en indagar como el concepto de multiplicación y sus propiedades incide en el aprendizaje de las tablas de multiplicar en grado segundo, dado que esta operación es básica para entender conceptos de seriación, patrones, combinaciones y fracciones.

Por tal motivo este trabajo tiene el propósito de fortalecer el concepto de multiplicación a través de una secuencia didáctica la cual nos permitirá identificar las potencialidades y limitaciones que presentan los estudiantes cuando se enfrenta ante situaciones de tipo multiplicativo que requieran el uso del cálculo mental y cálculo escrito apropiándose de las propiedades de la multiplicación, para propiciar en ellos un saber matemático en donde se reflexione sobre la

aplicación y utilización de la operación en sí y de las tablas de multiplicar como una herramienta para el cálculo mental y en el docente un interés por diseñar nuevas situaciones que potencialicen a mejorar la enseñanza de un conocimiento matemático, en ese sentido nos interesa conocer:

¿Cómo a través de una secuencia didáctica se puede fortalecer la construcción del concepto de multiplicación en grado segundo comprendiendo sus propiedades desde la perspectiva de la TSD?

Esta pregunta que orienta la secuencia se concreta en una reflexión sobre el aprendizaje de las tablas de multiplicar, dado que se quiere insistir en la idea de que dicho conocimiento no debería estar basado en la mecanización explícita de resultados sino en una lógica de la operación de multiplicar y en los contextos que le hacen adquirir sentido.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

- Proponer una secuencia didáctica fundamentada en elementos de validación e institucionalización de la Teoría de Situaciones Didácticas que fortalezca la comprensión del concepto de multiplicación en los números naturales.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Reconocer algunos modelos reflexivos de la multiplicación propuestos por Rico y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas como apoyo en la elaboración y diseño de la secuencia didáctica.
- Evidenciar el proceso de aprendizaje que presentan los estudiantes en el grado segundo respecto al concepto de multiplicación en los naturales y sus propiedades a través de la aplicación de una secuencia didáctica en el colegio Panamericano de la ciudad de Cali.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas *“En la mayor parte de las actividades de la vida diaria de una persona y en la mayoría de profesiones se exige el uso de la aritmética”* (MEN, 1998, pág.42), es así como las operaciones básicas, (suma, resta, multiplicación y división) toman reconocimiento en la matemática puesto que ellas hacen parte de los procesos y conocimientos básicos que se desarrollan en los distintos pensamientos matemáticos y van evolucionando en la medida en que se contextualiza la noción de número.

De acuerdo con lo anterior, la atención de este trabajo se centrará en la comprensión del concepto de multiplicación entendiendo su estructura y sus propiedades facilitando la apropiación de las tablas de multiplicar, dado que estas se convierten en herramientas que ayudan a agilizar la realización de cálculos, pues constantemente nos encontramos con situaciones cotidianas que requieren de su utilización.

A continuación se describirán cuatro razones sobre la importancia de la realización de este trabajo como apoyo para el docente en la enseñanza de la multiplicación, la cual es un conocimiento básico para el desarrollo del pensamiento matemático.

La primera se sustenta en los estudios que han realizado Rico (1998) y Vergnaud (1990) en donde resaltan la función de esta operación (multiplicación) en el pensamiento numérico.

Particularmente Rico (1998) considera que el uso de la multiplicación como operación numérica es básico para entender su propia estructura y para acercarse a la noción de número, noción que juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, dado que el número es la base para comprender los conceptos de la aritmética y de la operatividad que posteriormente el niño va a desarrollar, además Rico (1998) contempla la idea que a la aprehensión de las tablas de multiplicar se le debe dedicar mayor tiempo puesto que en ellas están implícitas

las relaciones numéricas de esta operación y su empleo facilita la resolución de todo tipo de problemas.

Las tablas de multiplicar pierden sentido si se conciben solo como datos numéricos abreviados, es por eso que este autor plantea que ellas son el resultado de saber multiplicar ya que saber multiplicar implica comprender el concepto de la multiplicación y el nexo que tiene con las otras operaciones partiendo de la construcción del número, en este proceso lo importante no es la aprehensión memorística o repetitiva de las tablas de multiplicar, sino interiorizar el significado de la operación en cuestión.

Basado en lo anterior, la importancia de este trabajo radica en la comprensión del concepto de multiplicación junto con sus propiedades, las cuales podrían ser una estrategia del cálculo mental para luego aprender las tablas de multiplicar, puesto que ellas son una herramienta que facilitan el cálculo o estimación de algoritmos, que carecen de sentido si se desconoce el concepto que fundamenta el significado de la multiplicación.

La segunda razón está en cómo al aportar elementos reflexivos frente a la multiplicación se enriquecerá la relación de enseñanza aprendizaje entre el docente y el estudiante, esta razón surge desde la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud que, según él; proporciona un modelo coherente para entender la conceptualización de aspectos matemáticos que se involucran en las estructuras multiplicativas y considera que las operaciones numéricas dan potencialidad al número: *"...sin ellas el concepto de número podría incluso no existir..."* (Vergnaud, 1979, pág. 59), puesto que el número no solo representa cantidades sino que por medio de él, se inicia el concepto operatorio en donde se pueden expresar simbólicamente las acciones básicas de la vida real (agregar, separar, reiterar y repartir), conllevando a que el número tenga sentido dentro de un sistema numérico y estructurándolo para poder utilizarlo.

Además piensa que el trabajo desde esta perspectiva teórica enriquece tanto al docente como al estudiante en el momento de diseñar situaciones que permitan reflexionar sobre las temáticas de la matemática a partir de esta operación (multiplicación).

La tercera razón y de gran evidencia que sustenta la elaboración de este trabajo la encontramos en los resultados de pruebas externas como las pruebas SABER (2005 y 2009) para grados quinto y noveno y las pruebas TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study, 2007), que evalúan las competencias de los estudiantes en las diferentes áreas; en los últimos resultados de las pruebas SABER se puede observar que el 44% de los estudiantes de grado quinto y el 26% de grado noveno se encuentran en un nivel insuficiente en donde no demuestran los desempeños mínimos establecidos que deben conocer, lo que indica que presentan dificultades a la hora de hacer uso del razonamiento lógico, resolución y planteamiento de problemas y algunos ni siquiera lo alcanzan en el área de matemáticas, esto se refleja cuando se deben enfrentar a situaciones planteadas de diferentes maneras a las acostumbradas que involucran el uso de operaciones básicas como la multiplicación.

Lo preocupante de estos resultados es que del nivel mínimo en donde quedan plasmados los desempeños básicos del área (competencias)¹ y del grado evaluado se avanza pero hacia el nivel de insuficiencia y esto es más notorio en la educación básica primaria, pues únicamente una proporción cercana del 25% y 22%, respectivamente logran superar los desempeños en los niveles de satisfactorio y avanzado, es decir los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de situaciones donde tienen que hacer uso de procesos como razonamiento, resolución de problemas y comunicación. Lo que se esperarías es que los estudiantes fueran capaces de utilizar sus conocimientos básicos

¹Las *competencias* desde las pruebas Saber son aquellos procesos en donde evalúa el razonamiento, la comunicación y la formulación.

(componentes)² de manera competente, dado que el MEN viene presentando nuevas propuestas para mejorar la calidad educativa, de tal modo que estas propuestas proporcionen resultados favorables en el área de matemáticas ya que comparado con las otras áreas del conocimiento los porcentajes son muy preocupantes.

La última razón está dada desde la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006), en donde reconocen que la multiplicación debe asociarse a diversos tipos de problemas los cuales tienen como objeto construir el concepto de ella misma y clasificarla en diferentes modelos (factor multiplicante, adición repetida, razón, producto cartesiano) relacionándola con los otros pensamientos matemáticos (numérico, variacional y métrico) y permitiendo la movilización de nuevos conceptos (potenciación, seriación, combinaciones, entre otros), que se evidencian en la coherencia vertical y coherencia horizontal de la Educación Básica y Media apoyada en los estándares.

A nivel personal consideramos que la realización de este trabajo es importante dado que nos permite cuestionar sobre las dificultades de aprendizaje que se dan en el aula de clases en la enseñanza de las matemáticas, en este caso en particular la multiplicación, pues creemos que esta operación es básica para la apropiación de otros conceptos matemáticos que se van construyendo a lo largo del proceso académico, tales como la potenciación, seriación, función, entre otros.

La intención no solo radica en cuestionar las dificultades sino en poder identificar las fortalezas que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a un nuevo concepto matemático, para encontrar estrategias que ayuden a

² Los *componentes* desde las pruebas Saber son los conocimientos básicos que se han agrupado en tres pensamientos: numérico-variacional, geométrico-métrico y aleatorio.

potencializar la construcción de dichos conocimientos de una forma más reflexiva despertando motivación e interés por las matemáticas.

A partir de estas razones se hace necesario reflexionar sobre la influencia que tiene la multiplicación y sus propiedades en la aprehensión de las tablas de multiplicar, para ello lo principal sería reconocer que las tablas de multiplicar no son sólo una herramienta que ayuda a agilizar cálculos sino que dentro de ellas está inmerso todo el tratamiento que tiene el concepto de multiplicación y lo que abarca dicha operación, lo importante es fortalecer el saber matemático de esta herramienta en el estudiante a través de situaciones matemáticas que le permitan reflexionar y cuestionar este concepto matemático cuando se enfrente a situaciones que lo requieran en el uso del cálculo mental y escrito.

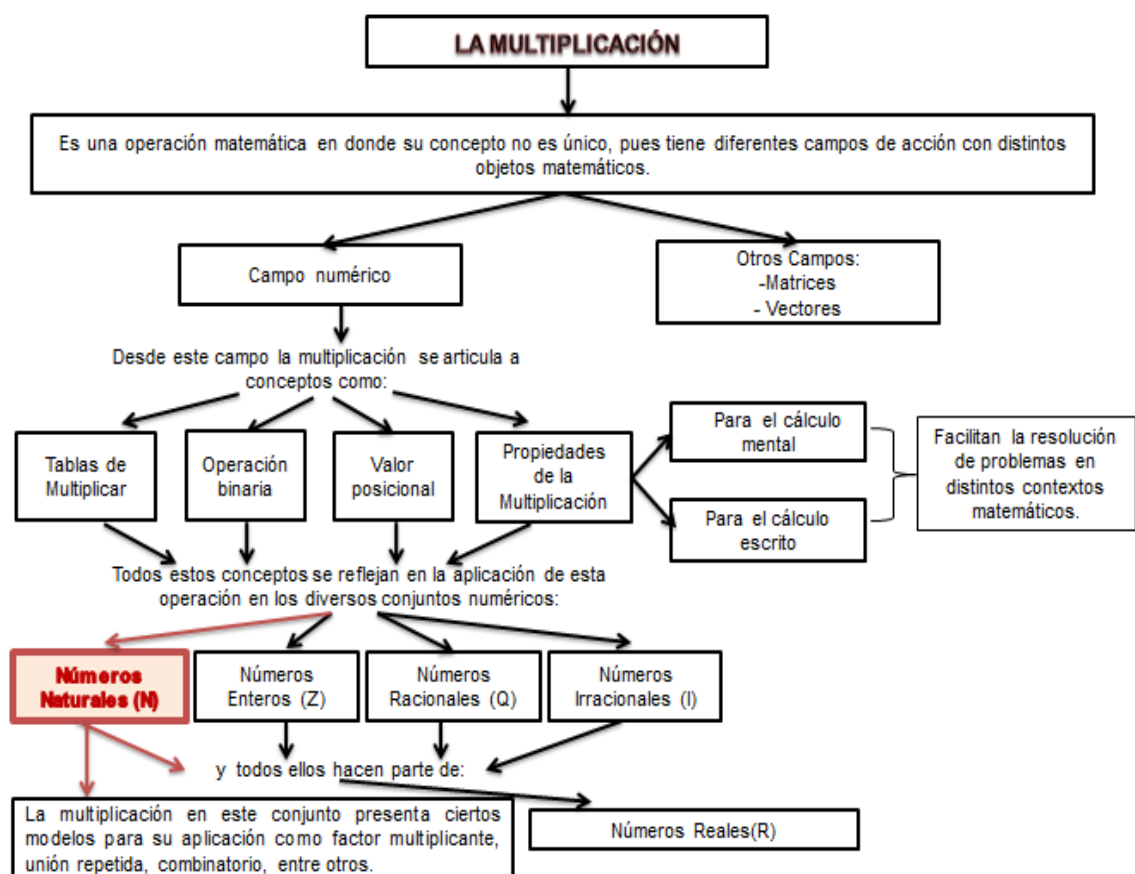
CAPÍTULO 2

REFERENTES TEÓRICOS

El marco teórico está compuesto por diversos referentes, tales como conceptos matemáticos sobre la multiplicación y sus propiedades como los propone Rico (1998) y Recalde (2006), reflexiones sobre el sistema de numeración decimal y algunas propuestas de textos escolares, estudios realizados por el MEN a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau.

2.1 LA MULTIPLICACIÓN

Para la elaboración de este referente matemático se ha tenido en cuenta la importancia que tiene la comprensión y uso de las operaciones en un sistema numérico, para ello nuestro objeto de estudio es la multiplicación y sus propiedades desde el pensamiento y sistema numérico.



Respecto a la figura 6, la multiplicación es una operación que de acuerdo al campo de acción de los objetos matemáticos en que se mueva cumple ciertas condiciones para su aplicación, nuestro enfoque se va analizar desde el campo numérico, el cual abarca la definición que tiene esta operación en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), las propiedades matemáticas que la sustentan, y conceptos que la constituyen como operación dentro del sistema de números decimales en donde se retoma el valor posicional de los números en el algoritmo.

Desde el punto de vista algebraico, la multiplicación es entendida como una operación binaria de $R \times R \rightarrow R$. Así, para cada pareja $(a, b) \in R \times R \exists c$ tal que $c = a \cdot b$, con $c \in R$. Es decir, que dentro del dominio de los números reales cualquier par de números reales multiplicados darán como resultado otro número real. Para el tratamiento didáctico escolar no es suficiente esta definición, pues es muy general y dependiendo del sistema numérico que se va a trabajar puede tener ciertas variaciones.

Ahora bien, partiendo de que la multiplicación es una operación binaria cabe resaltar que al verla como una adición repetida se puede relacionar con una

“sucesión la cual es una lista de números escritos en un orden específico, en donde una función f cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Los valores $f(1), f(2), f(3), \dots$, se llaman términos de la sucesión”. (Sterwart, Redlin & Watson, 2001, pág. 685)

Existen dos clases de sucesiones la aritmética y la geométrica, la primera se forma con sumas o restas y la segunda por multiplicación o división, de acuerdo al interés de este trabajo la definición sucesión que se trabaja es la de sucesión geométrica que se obtienen cuando se multiplica o se divide el término anterior por una cantidad constante llamada factor; a éste factor se le conoce por patrón (número cardinal) o regla de formación de la sucesión, y se representa con la letra r .

2.1.1 LA MULTIPLICACIÓN EN LOS NATURALES ($\mathbb{N}$)

Como se mencionó anteriormente la definición de la multiplicación desde el sistema de los números reales ($\mathbb{R}$) es una definición amplia en donde no se hacen presentes ciertas restricciones que surgen de acuerdo al conjunto numérico en donde se desarrolla esta operación. Para este trabajo la definición de multiplicación que abordaremos será la que se utiliza en los números naturales.

El concepto de multiplicación que circula constantemente en la escuela se relaciona con la definición que presenta (Recalde, 2006, pág.71):

Definición:

Dados los números m y n , el producto o la multiplicación entre m y n , simbolizado como $m \times n$ (o simplemente $m.n$), se define como:

$$m \times n = m.n = \underbrace{m + m + \cdots m}_{n \text{ veces}}$$

Con base en lo anterior, el producto entre números naturales cumple las siguientes propiedades básicas:

Definición:

Dados tres números naturales cualesquiera m , n y s , se tiene que:

- I. $n \times 0 = 0 \times n = 0$ (propiedad modulativa del producto)*
- II. $n . m = m . n$. (propiedad conmutativa del producto)*
- III. $(m . n) . s = m . (n . s)$ (propiedad asociativa del producto)*
- IV. $(m + n) . s = m . s + n . s$ (propiedad distributiva del producto)*

Una reflexión importante que hay que hacer es que en el acercamiento axiomático, estas propiedades se toman como verdades, es decir como axiomas. Sin embargo, en un sentido estricto no es tan evidente por ejemplo por qué se cumple la propiedad conmutativa, que exige un acercamiento formal y un tratamiento más constructivo que axiomático. Muchas propiedades que se estudian en la escuela se toman como verdades cumplidas que la propia axiomática soporta, pero no hay que olvidar que en el fondo de muchas de esas ideas subyace una idea de complejidad y no es tan evidente porque ciertas propiedades se cumplen sin mayor explicación, por lo que resulta útil que los docentes cuestionen dicho conocimiento de base con sus estudiantes porque precisamente el trabajo matemático del alumno podría comenzar con un cuestionamiento del saber socialmente aceptado.

2.1.2 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

De acuerdo a la definición de multiplicación en los naturales abordaremos sus respectivas propiedades, las cuales para la elaboración de este trabajo serán elementos primordiales que ayudaran a entender el concepto de multiplicación y del trabajo que potencializan las tablas de multiplicar.

La multiplicación como operación en los naturales tiene propiedades que hacen más fácil la resolución de problemas, en este caso trabajaremos con cuatro de ellas.

1. *Propiedad Conmutativa*

Cuando se multiplican dos números, el producto es el mismo sin importar el orden de los multiplicando, se cumple en general para dos números cualquiera x e y :

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Por ejemplo:

$$4 \times 2 = 2 \times 4$$

2. Propiedad Asociativa

Cuando se multiplican tres números cualquiera x , y , z , el producto es el mismo sin importar como se agrupan los factores y se cumple:

$$(x \cdot y)z = x(y \cdot z)$$

Los paréntesis indican que las operaciones dentro de los mismos deben ser realizadas con preferencia a cualquier otra operación.

Por ejemplo:

$$(8 \times 3) \times 2 = 8 \times (3 \times 2)$$

$$24 \times 2 = 8 \times 6$$

$$48 = 48$$

3. Propiedad Distributiva

La multiplicación de un número por una suma, es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos, así:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Por ejemplo

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

$$2 \cdot 8 = 6 + 10$$

4. Elemento Neutro

El producto de cualquier número por uno (1) es el mismo, así:

$$1 \cdot x = x$$

Por ejemplo:

$$1 \times 4 = 4$$

2.1.3 SISTEMA DE NUMERACIÓN POSICIONAL DECIMAL

Los sistemas de numeración se han venido desarrollando de acuerdo a las necesidades, intereses y condiciones particulares de las diferentes culturas. El sistema de numeración posicional decimal es el sistema que abordaremos para fortalecer las estrategias de cálculo escrito y mental que se tienen cuando se va a resolver el algoritmo de la multiplicación y a comprender su concepto, dado que a través de este sistema se puede adquirir una reflexión sobre la importancia de la aplicabilidad de las propiedades multiplicativas para hacer cálculos.

Empezaremos por decir que el sistema de numeración posicional decimal es de base diez, y que permite escribir y manipular números muy grandes o muy pequeños a partir de diez caracteres: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9; los cuales facilitan los procesos operativos.

Para representar cualquier número en este sistema de numeración se deben seguir cierto procedimiento:

1. Existe un proceso de agrupación para formar unidades de diferente orden, aquí se agrupan los elementos de acuerdo a niveles de diez en diez.
2. Cada agrupación de diez unidades se denomina **decena** o unidad de segundo orden.
3. Cada agrupación de diez decenas se denomina **centena** o unidad de tercer orden, así sucesivamente para las de un orden mayor (unidades de mil, decenal de mil, entre otros).

En este sistema se habla del **principio del valor relativo**, que consiste en que cada cifra numérica toma un valor dependiendo del lugar que ocupe, partiendo de derecha a izquierda en donde la primera cifra representa las unidades, la segunda las decenas, la tercera las centenas y así respectivamente. De este modo tenemos:

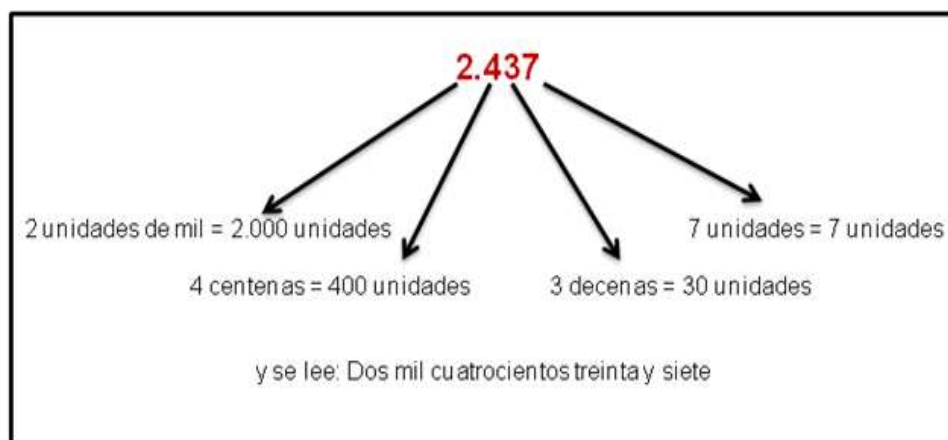


Figura 1: Valor relativo

También se rescata el **principio aditivo y multiplicativo**, pues el valor relativo de cada número (cifra) se obtiene multiplicando el valor absoluto por la potencia de diez correspondiente y se suman sus valores para la construcción de dicho número.

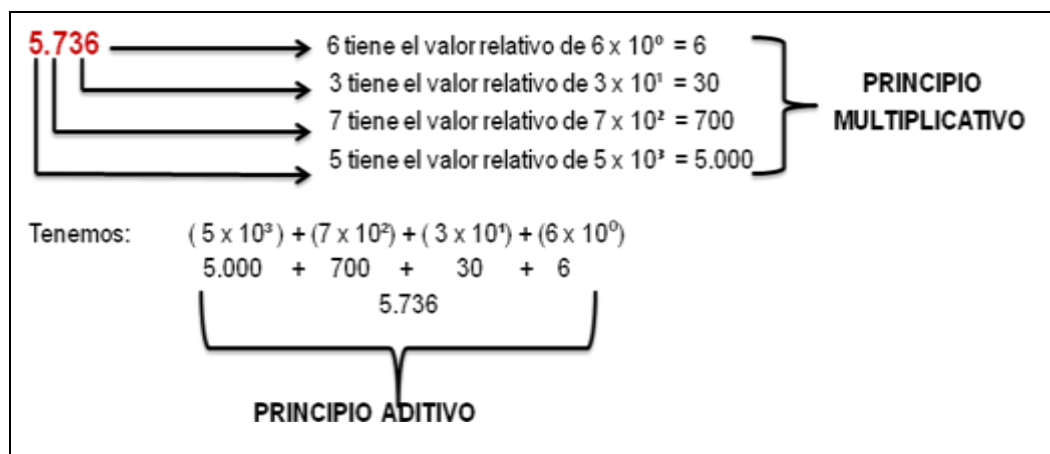


Figura 2: Principio aditivo y multiplicativo

Partiendo del tratamiento que tiene este sistema de numeración es importante rescatar la función que cumple la multiplicación como operación junto

con sus propiedades, las cuales permiten comprender de una forma más amplia el sentido numérico.

2.1.4 LAS TABLAS DE MULTIPLICAR

En la etapa del cálculo multiplicativo el trabajo con las tablas de multiplicar como herramientas para la solución de algoritmos es necesario, pero lo realmente interesante de estas tablas no es su resultado sino los conceptos implícitos de la multiplicación que se encuentran en ellas como la adición, valor posicional y descomposición del número, entre otros.

Las tablas de multiplicar constantemente están presente en el aula de clases pues ellas como se ha mencionado anteriormente hacen parte de las herramientas para desarrollar cálculo escrito y mental dado que agilizan la solución de algoritmos más grandes.

Para que el trabajo de las tablas de multiplicar sea más consciente por parte de los estudiantes se han propuesto algunas estrategias de cálculo (Gómez A, 1993):

1. *Conmutar*: Cambiar de posición los factores según la tabla de multiplicar más sencilla.
2. *Doblar*: Consiste en recurrir a la suma de dobles y a la operación de doblar.
Ejemplo: $4 \times 7 = (7 + 7 = 14) = 14 + 14 = 28$
3. *Añadir un cero*: La multiplicación por 10 es tan fácil que se retiene inmediatamente porque se agrega un cero.

Ejemplo: $10 \times 6 = 60$

4. Descomposiciones:

- *Uno más:* Consiste en incrementar un producto próximo más familiar aplicando implícitamente la propiedad distributiva respecto a la adición.

Ejemplo: $6 \times 8 = (5 + 1) \times 8 = (5 \times 8) + (1 \times 8) = 40 + 8 = 48$

- *Uno menos:* Consiste en disminuir un producto próximo aplicando implícitamente la propiedad distributiva respecto a la diferencia.

Ejemplo: $9 \times 8 = (10 - 1) \times 8 = (10 \times 8) - (1 \times 8) = 80 - 8 = 72$

5. *Patrones:* Sin necesidad de efectuar ningún cálculo, simplemente creciendo o decreciendo el valor en las cifras numéricas.

Ejemplo:



Figura 3: Patrón numérico

2.1.5 MODELOS REFLEXIVOS DE LA MULTIPLICACIÓN

Como se ha mencionado anteriormente Rico (1998) considera que el aprendizaje de la multiplicación es enriquecedor y complejo dado que para estudiarlas es necesario tener un dominio del concepto y función del número en

una operación, además es primordial reconocer la naturaleza de la multiplicación sin tener que asociarla a las definiciones de otras operaciones.

La multiplicación requiere ser tratada con conocimientos matemáticos mucho más maduros, dentro de su teoría plantea unos modelos que facilitan el algoritmo de la multiplicación de los cuales retomaremos los que sean útiles para la elaboración de la secuencia didáctica tales como el modelo cardinal y combinatorio los cuales asociaremos con los que presenta el MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998):

- **Modelos cardinales:** Se utiliza en el contexto cardinal para representar uno o los dos factores. Entre los tipos más utilizados tenemos:
 - a. La unión repetida o adición repetida de conjuntos cardinales, usualmente con los mismos objetos.

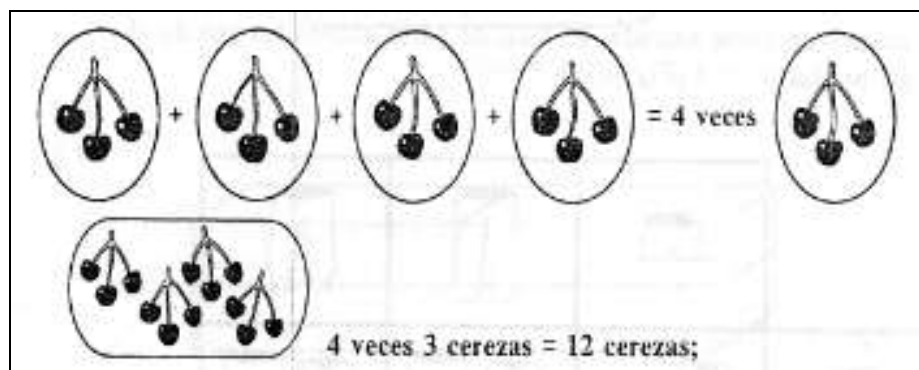


Figura 4: Unión repetida

- b. La distribución de objetos en un esquema rectangular o de razón, para ello se hace una fila con tantos objetos como nos indica el multiplicando y se forman tantas filas como dice el multiplicador.

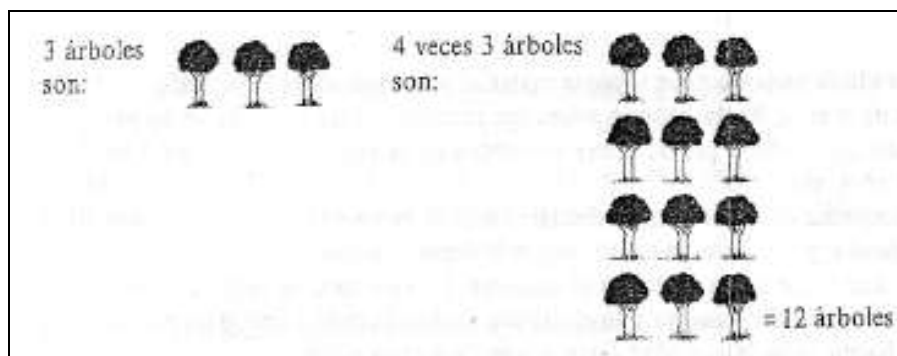


Figura 5: Distribución de objetos

- c. Producto cartesiano de dos conjuntos, así el producto 2×3 se puede representar tomando un conjunto de 2 blusas y otro de 3 pantalones, y formar todos los pares ordenados de blusa y pantalón, normalmente mediante un cuadro de doble entrada. El total de pares ordenados nos da el resultado del producto 2×3 .

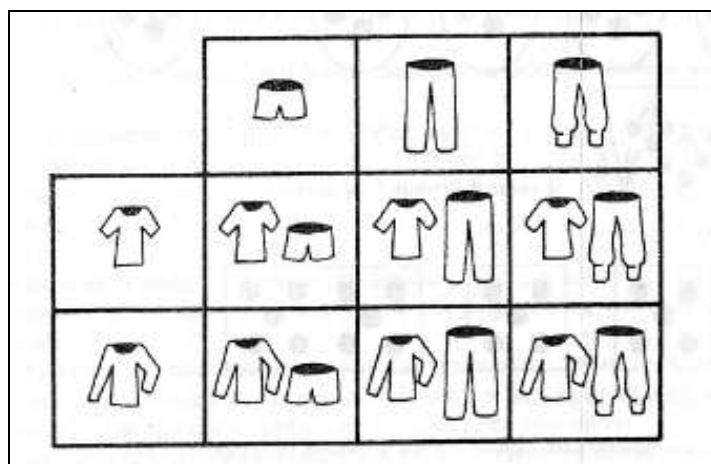


Figura 6: Producto cartesiano

Este tipo de modelos cardinales usualmente se presentan en los ejercicios de aplicación que proponen los libros de textos los cuales aparecen de una forma contextualizada con el medio del estudiante, con la intención de que pueden

entender el concepto de multiplicación a través de diferentes situaciones para resolver la operación.

- **Modelos combinatorios:** Se usan diagramas lineales como el diagrama de árbol, en donde se abre a partir de un punto tantas líneas o ramas como lo indique el multiplicador, y en cada uno de los extremos se vuelven a abrir tantas líneas como lo indica el multiplicando. Ejemplo 3×4

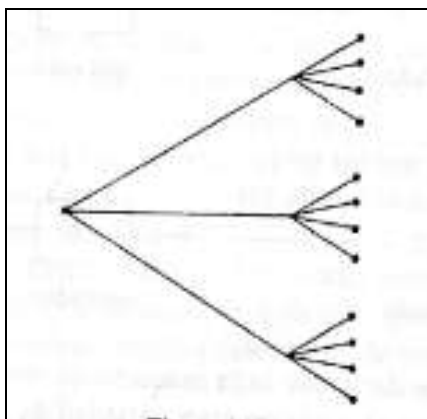


Figura 7: Modelo combinatorio

Como se mencionó anteriormente, el modelo combinatorio al igual que el modelo cardinal hacen parte de la propuesta de los libros de textos para el trabajo en el aula de clases, aunque la intención de este modelo es poder interpretar la multiplicación como un diagrama de árbol en donde las ramas se abren de acuerdo al multiplicador y luego vuelven a abrir dependiendo de la cantidad del multiplicando. Los ejercicios se le presentan a los niños con una situación en donde deben encontrar multiplicaciones que den como respuesta cierto producto, así lo asemejan a dicho modelo.

Estos dos modelos de Rico (1998) están incluidos dentro de los modelos de problemas que plantea el MEN (1998) a través de los Lineamientos Curriculares, los cuales permiten que el estudiante desarrolle procesos de razonamiento y resolución de problemas creando así estrategias de cálculo mental y escrito.

La definición de este autor y de estos respectivos modelos es de gran apoyo para la realización de este trabajo dado que nos permite revisar el tipo de situaciones que pueden estar dentro de la secuencia didáctica que diseñaremos con el objetivo de fortalecer el concepto de multiplicación y la aprehensión de las tablas de multiplicar.

2.2 REFERENTES CURRICULARES

Con el propósito de fortalecer el estudio y el sentido pedagógico en la Escuela el Ministerio de Educación Nacional (MEN) plantea algunos criterios que se deben tener en cuenta a la hora de enseñar un saber matemático, de tal modo que estos criterios propicien interés y reflexiones en los estudiantes. Para ello presenta la estructura curricular que recoge los conocimientos básicos que se relacionan con los cinco pensamientos matemáticos, los procesos generales que son aquellos que se espera que el estudiante desarrolle y el contexto que *“tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a las matemáticas que aprende”*. (MEN, 1998, pág. 36)

El Ministerio de Educación Nacional a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) propone el estudio de los sistemas numéricos para el desarrollo del pensamiento numérico, en el cual se pretende que los estudiantes despierten un sentido operacional, con habilidades y destrezas numéricas en la aritmética para comprender el concepto de número.

En su propuesta el MEN considera que la escuela sea quien se encargue de acercar a los estudiantes al conocimiento matemático a través de situaciones problemas que involucren su propio contexto, de tal forma que estas situaciones propicien en los estudiantes reflexiones y desarrollo de procesos matemáticos (MEN, 1998).

Para el caso del pensamiento numérico y variacional que es el interés de este trabajo, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean que el estudiante accede gradualmente a estos pensamientos en la medida que se amplía y evoluciona en la comprensión del número, numeración y del concepto de las operaciones, por ende consideran que en actividades de la vida cotidiana como contar, agrupar surge el acercamiento al significado del número (MEN, 1998).

Pensando en el currículo de matemáticas en la educación básica primaria el MEN, considera que la base fundamental del pensamiento matemático se encuentra en la comprensión de las operaciones, pues en ellas hay distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos, para entender su significado es necesario:

- *reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen;*
 - *reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones;*
 - *comprender las propiedades matemáticas de las operaciones;*
 - *comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.*
- (MEN, 1998, pág. 48)

Dentro del pensamiento numérico encontramos la operación de la multiplicación, que al igual que las otras operaciones puede verse desde diferentes modelos: el de factor multiplicante y razón y el del producto cartesiano, los cual son complejos si se compara con la adición y sustracción dado que estas *“se asocian con situaciones en las que se combinan dos conjuntos de objetos similares”*, mientras que en la multiplicación de acuerdo a su estructura *“cada caso se asocia a cada uno de los elementos de uno de los conjuntos con un subconjunto equivalente del otro”* (MEN, 1998, pág.50), es decir su relación está dada por una función en donde el subconjunto equivalente depende de los elementos del primer conjunto, tal como se muestra en la siguiente figura.

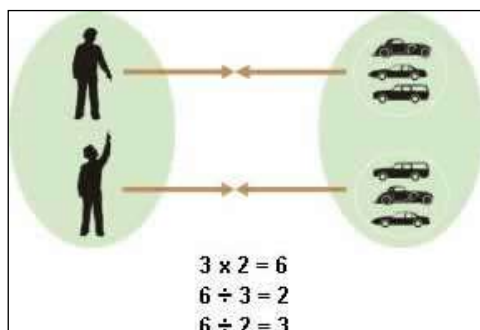


Figura 8: Asociación de elementos (MEN, 1998, pág. 50)

Estos modelos presentan problemas cotidianos que tienen como finalidad que es el estudiante desarrolle diversas estrategias de cálculo (mental) y estimación en la aplicación de la multiplicación, a continuación presentaremos ejemplos que proponen los Lineamientos Curriculares (MEN, 2006, pág. 80):

- a) **Factor multiplicante:** Juan tenía 3 carritos. María tenía 4 veces más. ¿Cuántos carritos tenía María?
- b) **Adición repetida:** Juan compró 3 carritos cada día durante 4 días. ¿Cuántos carritos tiene en total?
- c) **Razón:** Cuatro niños tenían 3 carritos cada uno. ¿Cuántos carritos tenían en total?
- d) **Producto cartesiano:** Un carrito de juguete se fabrica en 3 tamaños distintos y en 4 colores diferentes. ¿Cuántos carritos distintos se pueden comprar?

La multiplicación como operación no solo se encuentra en el pensamiento numérico, desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) también la podemos relacionar con los otros pensamientos matemáticos como el pensamiento variacional, el pensamiento métrico, el pensamiento espacial y el pensamiento aleatorio, aunque en los dos últimos no es tan evidente su relación

pues en estos pensamientos la utilización de esta operación hace parte de conceptos más avanzados que seguramente son tomados en los grados superiores.

En el pensamiento variacional se encuentra el reconocimiento de nociones y procedimientos que permiten analizar, organizar y modelar situaciones en donde se involucra la variación y el cambio en diferentes contextos, este pensamiento involucra los conocimientos de los otros pensamientos matemáticos, pues recoge todos los procesos que se han construido durante la educación primaria y secundaria. Las actividades que se presentan en el pensamiento variacional se pueden relacionar con la multiplicación, dado que en ellas se hace uso de patrones numéricos los cuales ayudan a la construcción y comprensión de las expresiones algebraicas, un ejemplo de esto lo encontramos en el tipo de preguntas que se realizó en las Pruebas Saber del grado quinto en el 2009.

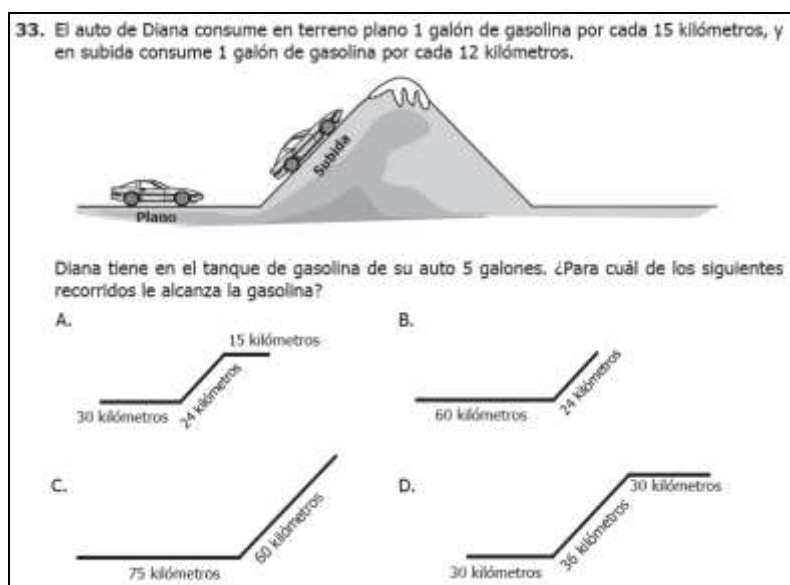


Figura 9: Pensamiento Variacional (ICFES, 2009, pág. 22)

En este ejercicio se puede observar como la multiplicación se relaciona con el concepto de función (producto cartesiano) entre los galones de gasolina y las distancias recorridas (kilómetros), en donde estas varían de acuerdo a los galones de gasolina que se tengan.

El pensamiento métrico está orientado a conceptos y procedimientos que hacen referencia a las magnitudes, las medidas, patrones de medición y las cantidades en diferentes situaciones, dentro de estos conceptos la multiplicación como operación favorece a la estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes tales como la longitud, el área, el volumen y la ampliación angular dado que su aplicación hace que los cálculos se hallen de una forma rápida y que las nociones que están implícitas dentro de estas medidas sean un poco más evidentes cuando se apliquen en el entorno social, un ejemplo de esto es:

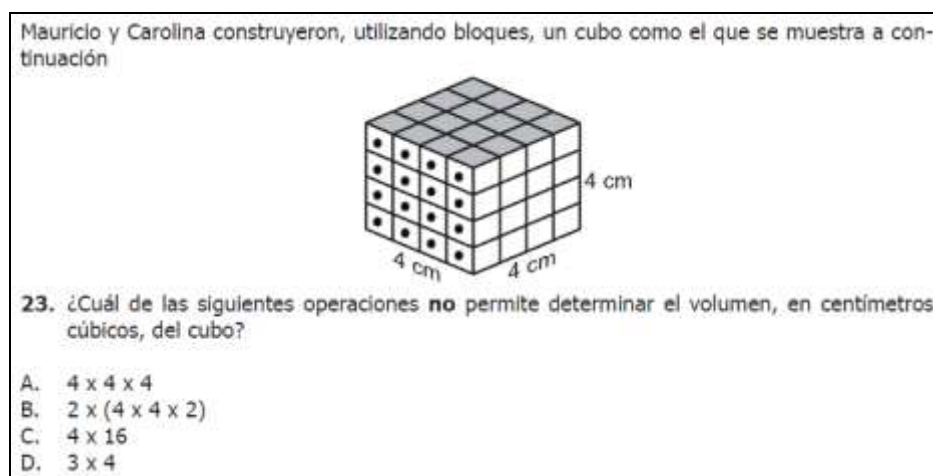


Figura 10: Pensamiento Métrico (ICFES, 2009, pág. 16)

La figura 10 muestra la relación que tiene la multiplicación con el pensamiento métrico pues para resolver una situación de este tipo se necesita un patrón de medida para hacer un cálculo y así hallar el volumen.

El pensamiento aleatorio se refiere al aprendizaje estadístico y probabilístico, en donde es necesario explorar e interpretar datos para hacer conjeturas con variables cualitativas o cuantitativas a través de conceptos, métodos e interpretación de diagramas, un ejemplo de este podría ser:

El jueves, un restaurante ofrece las siguientes opciones de almuerzo:

Sopa	Bandeja con	Postre
Sancocho	Pollo	Helado
	Carne de res	Torta

El almuerzo completo en el restaurante tiene sopa, bandeja y postre.

40. ¿Cuántos almuerzos completos diferentes podrían elegirse en el restaurante el jueves?

A. 3
B. 4
C. 5
D. 6

Figura 11: Pensamiento Aleatorio (ICFES, 2009, pág. 25)

En este ejemplo la multiplicación es tomada como la combinación de elementos mediante arreglos para dar solución a una situación. Por lo anterior se puede concluir que los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) aunque no dan una definición específica sobre la multiplicación y los distintos sistemas numéricos que se construyen en la Escuela, le otorgan importancia a la multiplicación y a su función como operación, dado que permite movilizar nuevos conocimientos matemáticos en el pensamiento numérico y en otros pensamientos, de tal manera que se logre establecer durante la trayectoria escolar las relaciones que tiene dicha operación con los diferentes conjuntos numéricos (Naturales, enteros, reales) y pueda ser vista como herramienta útil en la resolución de distintas situaciones problema.

2.2.1 COHERENCIA VERTICAL Y HORIZONTAL

Basándonos en la relación que tienen las operaciones numéricas especialmente la multiplicación con los pensamientos matemáticos y reconociendo que el saber matemático que tiene implícito dicha operación hace parte de muchos procesos en la educación básica y media, nuestro interés sobre los estándares radica en poder establecer como un conocimiento contribuye a la complejidad y gradualidad del aprendizaje de las matemáticas.

Para ello se tendrá en cuenta la coherencia horizontal y la coherencia vertical, la primera es aquella que permite entender la relación que tiene un estándar determinado de un pensamiento con los estándares de los otros pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Conjuntos de grados	Pensamiento Numérico	Pensamiento Métrico	Pensamiento Variacional	Pensamiento Aleatorio
De primero a tercero	▪ Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. ▪ Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes. ▪ Resuelvo y formulo problemas en situaciones de	▪ Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas. ▪ Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y en los eventos su duración. ▪ Realizo y describo procesos de	▪ Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas. ▪ Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical entre otros). ▪ Describo cualitativamente situaciones	▪ Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos. ▪ Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos. ▪ Explico desde mi experiencia— la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. ▪ Predigo si la

	variación proporcional.	medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizado, de acuerdo al contexto. ▪ Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición.	de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. ▪ Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo como cambian los símbolos aunque el valor siga igual	posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
--	-------------------------	--	---	---

Tabla 1: Coherencia Horizontal

Se puede observar que en los diferentes pensamientos existe una relación con la multiplicación como operación y a su uso en el momento de resolver una situación donde involucre la relación con los otros pensamientos, pues en ciertos casos será vista como un algoritmo que agiliza cálculos (estimaciones, mediciones, entre otros) y para otros su función dependerá del contexto (numérico, geométrico, musical entre otros).

Aunque los Estándares se crearon con el objetivo de proponer criterios de evaluación de las competencias que van alcanzando los estudiantes en su vida escolar, en la realidad estos tiene una dificultad que se evidencia cuando se quiere relacionar lo que se pretende alcanzar con lo que se hace, dado que dichas competencias tienden a hacer muy generales y amplias y en ciertos momentos limitan al docente y al estudiante.

Respecto a la coherencia vertical lo que se pretende es encontrar una concordancia entre un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados.

Conjuntos de grados	Pensamiento Numérico
De 1° a 3°	▪ Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. ▪ Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes. ▪ Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional
De 4° a 5°	▪ Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. ▪ Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. ▪ Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes. ▪ Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades. ▪ Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medida. ▪ Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. ▪ Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.
De 6° a 7°	▪ Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos. ▪ Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. ▪ Utilizo números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medidas. ▪ Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. ▪ Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.

De 8° a 9°	▪ Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellas. ▪ Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. ▪ Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.
De 10° a 11°	▪ Comparo y contrasto las propiedades e los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

Tabla 2: Coherencia Vertical

Con lo anterior se expone que la multiplicación es una operación necesaria para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos durante toda la educación básica y media, pues entender su concepto y su estructura representa avances en el reconocimiento de los diferentes sistemas numéricos, pues en los distintos grados de escolaridad su función como operación para resolver algoritmos va cambiando paulatinamente hasta convertirse en una operación que potencializa procesos de razonamiento, resolución de problemas, formulación y comparación, se podría decir que cada vez es más compleja su utilización.

Hay que recordar que el estándar de cada pensamiento se ha creado para establecer una relación con los otros pensamientos y con la secuencialidad de los grados, en nuestro caso el tratamiento de la multiplicación dentro de cada sistema numérico se logra identificar, ya que manejan la noción de adición repetida, pero lo que no es muy claro es cómo se articulan estos sistemas numéricos entre sí, dado que cada conjunto numérico presenta ciertas restricciones en su operatividad, por ejemplo en los números naturales no se tienen en cuenta los signos como se hacen en los números enteros y como seguramente se hacen en los racionales.

2.3 TEORIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD)

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986) pretende modelizar los fenómenos didácticos que se presentan en el sistema escolar cuando se enseña un conocimiento matemático concreto, a partir de situaciones que inicialmente serán de tipo a- didáctico, para posteriormente convertirse en situaciones didácticas, en la TSD se resalta el sistema didáctico entre el Maestro, Estudiante y Saber estableciendo ciertas funciones para cada uno de ellos.

Brousseau (1986) en su teoría maneja la noción de “situación matemática” como primitiva, exigiéndose que pueda ser modelizada mediante un juego formal. Una situación matemática que se utiliza para **explicar** un conocimiento concreto debe cumplir dos condiciones:

- (i) Que sea comunicable sin utilizar dicho conocimiento
- (ii) Que la estrategia optima del juego formal asociado a la situación matemática se obtiene a partir de la estrategia de base utilizando el conocimiento en cuestión (Chevallard, 1997, pág.214).

A partir de la comprensión y aplicación de la situación matemática se generan dos situaciones la adidáctica y la didáctica, la primera es específica de un conocimiento concreto en donde el protagonista de la interacción es el estudiante junto con el medio, que es el que permite adaptarse a la situación desarrollando estrategias sin intervenciones del docente que ayuden a acercarse a un conocimiento matemático concreto; la segunda situación comprende las relaciones que el estudiante genera con el medio y la intervención del docente.

Dentro de la TSD de Brousseau existe la *devolución del problema* que es el momento en donde el docente no solo presenta las reglas de juego o del problema, sino que hace vivir el problema para los alumnos (situación adidáctica), en la cual comunica o se abstiene de comunicar informaciones, preguntas,

producciones entre otras según el caso; de tal forma que el estudiante a través de dichos cuestionamientos asuma el problema como suyo y coloque en escena lo que experimenta, de tal que el docente intente producir o enseñar un conocimiento matemático concreto³ a partir de la situación matemática.

La devolución del problema hace parte del proceso que se realiza en el contrato didáctico en donde intervienen el estudiante, el docente y el saber (que nace del medio), una vez realizada esta fase el docente continua con la etapa de la *institucionalización del conocimiento matemático* que consiste en dar un estatuto cultural a las producciones de los alumnos, aquí se encuentra lo enriquecedor que ofrece la situación adidáctica que vivencia el estudiante después de haber experimentado sus ideas, en esta actividad el docente retoma y transforma el saber matemático que ha desarrollado el estudiante, formalizándolo y ampliando los conceptos que estaban implícitos en el juego, definiendo el conocimiento concreto desde un punto de vista más formal con un lenguaje propio de la matemática que resulta de las proposiciones y conjeturas que presenta el estudiante.

2.3.1 TIPOS DE SITUACIONES

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propone que las situaciones adidácticas se pueden analizar de tal forma que se evidencie una relación entre los conocimientos matemáticos y el modo en que funciona dichos conocimientos. Para entender este tipo de situaciones nos apoyaremos por lo dicho por Gascón & Chevallard (1998) y García & Pérez (2011).

³ Enseñar un conocimiento matemático concreto consiste en hacer devolución al alumno de una situación adidáctica específica de dicho conocimiento.

TIPO DE SITUACIÓN	CARACTERÍSTICAS
De acción	• El alumno inicialmente en un acercamiento puramente lúdico intenta entender y resolver una situación asociada a un conocimiento concreto C que se desea enseñar. • Se produce un diálogo entre el alumno y la situación. • Al intentar resolver el problema propuesto, la situación le devuelve al alumno informaciones sobre las consecuencias de sus acciones. • Las nociones utilizadas en la práctica para resolver la situación tienen un estatus protomatemático, es decir, nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio, ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.
De formulación	• El alumno puede intercambiar información de la situación con él mismo o con otros alumnos de tal manera que explicita su modelo implícito de la situación. • Los interlocutores intercambian mensajes escritos u orales que son expresados en lenguaje matemático según las posibilidades de cada emisor. • Las nociones utilizadas en la situación tienen un estatus paramatemático, es decir, que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas.
De validación	• Se trata de que el alumno ponga a prueba las soluciones que ha encontrado mediante el dialogo con otro interlocutor al que deberá convencer sobre sus resultados. • Se trata de una dialéctica de argumentación entre dos personas que cumplen roles diferenciados, el proponente que intenta convencer y el oponente que puede pedir explicaciones suplementarias y rechazar las que no comprende o con las que no está de acuerdo.

	• Las nociones que se utilizarán en una situación de validación, especialmente después de la institucionalización por parte del docente, tienen un estatus matemático, es decir, son objeto de estudio en sí mismas, además de que pueden servir para el estudio de otros objetos.
De Devolución	• En primera instancia la devolución consiste en hacer vivir el problema al alumno por parte del profesor, en hacer que el estudiante se sienta responsable (en sentido de responsabilidad matemática, no de culpabilidad) del resultado que debe buscar. • Además, todas las intervenciones que haga el maestro al alumno con el objetivo de que éste realice una construcción del conocimiento involucrado tienen también el carácter de una devolución siempre y cuando se trate de intervenciones los más independiente posible de intenciones didácticas y lo más fecunda posible con relación a la construcción del conocimiento por parte del alumno.
De Institucionalización	• Consiste en que el maestro de entre todas las reflexiones y resultados que se presenten en la solución de la situación, pueda explicitar aquellas nociones, propiedades que tienen un interés científico, es decir, un estatuto cultural. • Es una actividad que le compete al profesor, porque los estudiantes deben reconocer en alguien externo la validez de sus producciones.

Tabla 3: Situaciones Didácticas (Gascón & Chevallard, 2007)

Una secuencia didáctica se entiende como el plan de actuación del profesor, para diseñar y estructurar el trabajo en el aula de una manera sistemática de la relación didáctica (estudiante, profesor, saber y entorno) Grupo DECA (1992).

El plan de actuación del profesor es la operativización de la relación didáctica, en la cual existen momentos diferentes para la construcción del significado matemático por parte del docente y los estudiantes⁴.

Una secuencia didáctica debe especificar las formas de trabajo:

- El tiempo para la implementación,
- La descripción y la intención de la actividad,
- Los materiales
- Los referentes teóricos para la actividad.

La TSD dentro de este trabajo es útil y pertinente porque permite comprender la enseñanza de un concepto matemático en un sentido más amplio, es propia para la realización y ejecución de una secuencia didáctica dado que a través de la secuencia se puede introducir un nuevo conocimiento donde el propio estudiante sea quien ayude a construirlo reflexivamente partiendo de sus propias nociones y estrategias.

Respecto a la presentación de los referentes teóricos que orientaran este trabajo de grado, cabe resaltar que la secuencia didáctica se rediseña teniendo en cuenta los modelos reflexivos de Rico (1998) y del MEN (1998). Mientras que para el análisis de los resultados y la aplicación de la secuencia en el aula de clases se tomaran algunos elementos de la TSD (Teoría de Situaciones Didácticas) tales como las situaciones de validación, devolución e institucionalización, que permitirán reconocer como los estudiantes comprenden y construyen el concepto de multiplicación y crean estrategias para desarrollar cálculos a partir del uso de las propiedades de la multiplicación.

⁴ Tomado del trabajo de grado GARCÍA M. OLGA LUCÍA, PÉREZ E. JOHANA MARÍA (2011). *Secuencia Didáctica: Los contextos numéricos como forma de fortalecer el concepto de número en grado transición*.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

Para la realización de este trabajo se emplea una metodología cualitativa apoyada en datos estadísticos los cuales permiten describir los procesos desarrollados por los estudiantes en la solución de la secuencia didáctica, para ello se explicita en cada fase los tiempos y como se va llevan a cabo la recolección de la información para alcanzar el objetivo propuesto.

3.1 FASES DE LA METODOLOGÍA

Fase I: Ampliación del marco teórico y caracterización de la problemática. Se profundizó en los referentes bibliográficos para identificar los tipos de situaciones didácticas que se emplean en cada uno de los momentos de la aplicación de la secuencia, además esta ampliación contribuiría con el reconocimiento de los modelos de Rico (1998) y el MEN (1998) que se utilizan como apoyo en el rediseño de la secuencia didáctica, para obtener la información necesaria y dar respuesta a la pregunta problema.

- Se tomaron algunos elementos teóricos del libro de Rico (1998) “Números y Operaciones” y de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), de la cual se enfatiza en elementos importantes como las situaciones de validación, devolución e institucionalización.
- Tomando como textos centrales los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Los estándares básicos de calidad en Matemáticas (2006) retomando ejemplos de las pruebas Saber del 2009.
- Se fundamentó la importancia del concepto de multiplicación en los números naturales y sus propiedades teniendo en cuenta los aportes de Rico (1998) y Recalde (2006) y reflexiones sobre el sistema de numeración decimal.

Fase II: Rediseño de la Secuencia Didáctica basado en los modelos de la Multiplicación.

En esta fase se hizo el rediseño de la secuencia didáctica basándonos en el Proyecto: La resolución de problemas aritméticos de estructura multiplicativa. Comprensión y producción de enunciados, empleadas en las Instituciones Educativas: España, Gabriela Mistral, José María Córdoba y Luis Carlos Valencia en grado quinto, en el municipio de Jamundí en Octubre de 2007.

Ajustándolo con actividades que hicieron referencia a la apropiación del concepto de multiplicación a través de operaciones que implicaron el cálculo mental, cálculo escrito apoyándonos en algunos de los modelos que proponen Rico y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

La secuencia tuvo dos situaciones con sus respectivas tareas, las cuales tienen el propósito de orientar paulatinamente al estudiante en la comprensión del concepto de multiplicación, partiendo del conteo, de la noción de adición repetida y diferenciando el multiplicando del multiplicador, para finalmente comprender las propiedades conmutativa y distributiva de esta operación tomándolas como estrategias de cálculo mental y escrito.

Fase III: Aplicación de la Secuencia Didáctica

Después de haber rediseñado la secuencia didáctica en donde hubo grandes cambios debido a que el objetivo de la propuesta inicial de la secuencia era para un grado más avanzado como lo es quinto de primaria, se aplicó la situación 1 con las tres tareas respectivas en el grado segundo del Colegio Panamericano con 25 estudiantes, para cada una de estas sesiones el trabajo fue de manera individual y se contó con un tiempo de una hora de clase.

La situación 2 queda expuesta en el trabajo como una propuesta de aplicación, dado que no se alcanzó a aplicar en el aula por cuestiones de tiempo y reajuste de calendario académico en el colegio donde se realizó la práctica.

Fase IV: Resultados

En esta última etapa se analizan los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica tomando los elementos de validación, devolución e institucionalización de la TSD de Brousseau (1986), para la descripción de dichos análisis, en donde se observan las fortalezas y debilidades que tienen los estudiantes para la comprensión y aplicación del concepto de multiplicación.

Fase V: Conclusiones

Después de analizar los resultados de la secuencia realizada por los estudiantes se pudo identificar las fortalezas y debilidades que se presentaron durante el desarrollo de la situación 1 de la secuencia aplicada, permitiendo verificar que tan eficaz resultó la implementación de la TSD en el aula de clases y los aportes curriculares en la construcción del concepto.

Para el caso de la situación 2 se realizó un análisis a priori de lo que se puede esperar que suceda cuando se aplique, basándonos en los resultados obtenidos en la situación 1.

Las tareas de la secuencia se realizaron con los niños de grado segundo de la jornada de la tarde del Colegio Panamericano de la ciudad de Santiago de Cali. Se encuentra ubicado en la Calle 72u 26H3-15 del barrio Los Lagos Comuna 13 del distrito de Agua Blanca, estrato 2.

En este año escolar el colegio contó con dos grupos del grado segundo uno en la jornada de la mañana con 30 niños y otro en la jornada de la tarde con 25 niños. Para la aplicación de la secuencia trabajamos con los niños de la

jornada de la tarde cuyas edades oscilan entre 7 y 8 años, el colegio es mixto, se trabaja desde pre-escolar, hasta grado once de la educación media, el cual es de carácter privado, no hay un desempeño específico en matemáticas es decir los estudiantes van desarrollando las habilidades y procesos según el trabajo en el aula.

CAPÍTULO 4

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES

Para el desarrollo de esta fase se hizo la reconstrucción de la secuencia que se aplicó en el Proyecto: La resolución de problemas aritméticos de estructura multiplicativa. Comprensión y producción de enunciados, empleadas en las Instituciones Educativas: España, Gabriela Mistral, José María Córdoba y Luis Carlos Valencia en grado quinto, en el municipio de Jamundí en Octubre de 2007.

En este proyecto el objetivo estuvo orientado en desarrollar la capacidad de resolver y formular problemas de tipo multiplicativo en contextos que impliquen el uso de enunciados verbales y gráficos en estudiantes de grado quinto, lo cual es muy similar a nuestro propósito en este trabajo.

Las tareas que se plantearon en la secuencia original van dirigidas a niños de quinto grado, y en su orden las situaciones están orientadas en comprender y formular enunciados multiplicativos, y en resolver problemas a partir de distintas representaciones del producto y del cociente, la reconstrucción de dicha secuencia inicia principalmente en el cambio de formulación de enunciados adecuándolos a estudiantes de segundo grado, en donde el orden de las situaciones y de sus respectivas tareas van encaminadas en fortalecer el concepto de multiplicación en los números naturales y de sus propiedades para facilitar el aprendizaje de las tablas de multiplicar y su uso en situaciones de cálculo mental y escrito, puesto que esta operación dentro del conjunto de los números naturales resulta de adicionar repetidamente un mismo número y que dentro de ella cada número (factores) toma un tratamiento distinto.

Para ellos se realizarán dos situaciones la primera con tres tareas donde cada tarea consta de consignas o ejercicios que abordan el concepto de multiplicación desde la noción de adición repetida y la diferenciación entre multiplicando y multiplicador y un acercamiento a la propiedad conmutativa, la segunda situación consta de dos tareas y se diseñó específicamente en las propiedades conmutativa y distributiva del producto como estrategias del cálculo mental y escrito.

La situación 1 se llevó a la práctica, mientras que la situación 2 queda expuesta como una propuesta para futuros trabajos, dado que por cuestiones de tiempo y reajuste a calendario académicos en el colegio.

4.1 SITUACIONES DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

A continuación se presentara una tabla que mostrará cómo se han estructurado las situaciones de la secuencia didáctica, evidenciando sus nombres y explicitando las tareas correspondientes a cada una, teniendo en cuenta los modelos que propone Rico (1998) y el MEN (1998) para su rediseño.

SITUACIÓN 1: Significado de la multiplicación en los números naturales	TAREAS	NIVELES DE DOMINIO U OTROS PROCESOS DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO
Saltando encuentro el número	1,2 y 3	Conteo Sucesión numérica
Juguemos con la suma	1,2 y 3	Modelo cardinal: • Unión o adición repetida
La geometría de la mano con la aritmética	1,2,3 y 4	Modelo cardinal: • Distribución de objetos o esquema rectangular
SITUACIÓN 2: Estrategias para facilitar la multiplicación en los números naturales		
Ordenando números	1y 2	Modelo combinatorio Modelo cardinal: • Producto cartesiano
Combinando operaciones	1,2 y 3	Modelo cardinal: • Producto cartesiano Descomposición de números.

Tabla 4: Situaciones y tareas

4.1.1 SITUACIÓN 1: SIGNIFICADO DE LA MULTIPLICACIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES (N)

4.1.1.1 TAREA 1: SALTANDO ENCUENTRO EL NÚMERO.

ESTÁNDAR DE LA TAREA:

Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Este estándar se ha escogido para el diseño e implementación de las tareas de la situación 1, puesto que las actividades que los estudiantes deben realizar conllevan principalmente a usar distintas estrategias de cálculos en situaciones matemáticas, dichas estrategias deberán surgir de los conceptos básicos que han estudiado en la construcción del número y en las situaciones de tipo aditivo, de tal forma que ayuden a que el mismo estudiante se aproxime al concepto de multiplicación en los números naturales.

PROPÓSITO DE LA TAREA:

- Reconocer que existe un número cardinal que hace parte del conteo, el cual representa una agrupación de cantidades que permite realizar operaciones básicas como la adición o sustracción en los números naturales.
- Identificar que en el conteo hay un número cardinal que representa una agrupación el cual toma la misma función que el multiplicando en la multiplicación de números naturales.

DESARROLLO DE LA TAREA:

En esta primera tarea el estudiante tendrá un acercamiento a reconocer que en el conteo existe un número cardinal que permite relacionar una sucesión o seriación numérica asociándolo con una operación de acuerdo a su realización que puede darse a saltos, hacia adelante o hacia atrás. Ese número cardinal que

está en dicha secuencia, en una multiplicación representaría el número que se va a repetir tantos saltos que requiera el conteo y que se conoce como multiplicando.

En una primera etapa de esta tarea, la maestra contará una historia corta sobre el zoológico de Cali con la intención de que el estudiante se familiarice con el contexto que se ha diseñado la actividad para que se les facilite la resolución de las tareas propuestas. La historia llevará por nombre “De paseo por el zoológico de Cali”.

“De paseo por el zoológico de Cali”

Los hermanos Juan Esteban y Sofía querían hacer algo diferente en sus vacaciones y decidieron ir de paseo al zoológico de Cali. Cuando llegaron al lugar los recibió el guía quien se encargó de acompañarlos durante el recorrido mostrándoles y contándoles sobre las diversas y maravillosas especies de animales que tiene el lugar para que su paseo fuera inolvidable.

El recorrido empezó en el acuario donde el caballito de mar fue el animal que más les gusto de esta zona, luego se dirigieron al aviario y se encontraron con la iguaza y sus lindos hijos y con los gansos y sus hermosos ojos, de ahí pasaron a la zona de los primates donde apreciaron tres especies, los titis fueron su mayor entretenimiento.

A lo largo de la visita entre las zonas de los reptiles, anfibios y tortugas, los hermanitos tuvieron la oportunidad de observar otras especies de animales como los osos, tigres, jaguares, pelicanos, llamas, avestruces, nutrias, guacamayos, suricatos, cebras y el gran espectáculo del cóndor de los Andes.

Juan Esteban Y Sofía quedaron maravillados al conocer todas esas especies en el zoológico de Cali.

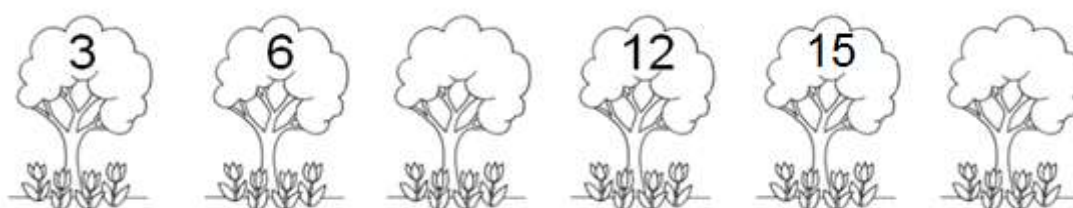
Una vez se haya leído la historia los niños deberán realizar la tarea presentada por la maestra, esta tarea hace parte de una situación de acción que llama Brousseau en la TSD, en donde el estudiante tendrá la opción de juzgar su

acción sobre la situación y ajustarla de acuerdo a la información que le propone el medio, creando así un diálogo entre el estudiante y la situación. Las nociones que se evidencian en una situación de acción tienen un tipo de estatus protomatemático⁵ para su implementación.

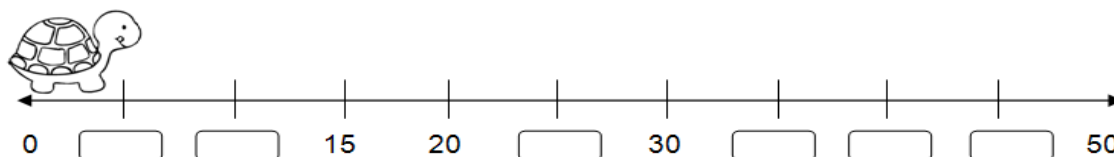
Las actividades que se proponen para la tarea se muestran a continuación:

Observación: En la mayoría de actividades propuestas, se dejarán espacios en blancos donde los niños deben completar la información de acuerdo a los razonamientos que ellos hagan, es decir realizando conteos y comparando los cardinales al reconocer e identificar el patrón numérico.

1. Para que los micos coman en cada árbol se deja cierto número de bananos. Ayuda a encontrar ¿cuántos bananos hay en los árboles en blanco?



2. La tortuga del zoológico recorre un camino de 50 metros en el cual hace 10 paradas para descansar, observa y completa la gráfica, descubre cada cuántos metros para la tortuga.



La tortuga para cada [] metros.

⁵Nociones de estatus protomatemático se refiere a nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver problemas, de tal forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio, ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos. (Chevallard, 1997, pág.222).

3. Observa el dibujo y responde:



- Enumera todos los cuadrados vacíos y llenos hacia donde indica la flecha.
- Completa la secuencia gráfica del alimento.
- ¿Cuál es la secuencia numérica del alimento? _____
- ¿De acuerdo a la respuesta anterior que puedes concluir?

Como se mencionó anteriormente estas actividades presentan tareas de tipo experimental para el estudiante, que pretenden que en un momento de validación el niño reconozca que para la construcción de una secuencia numérica existe un número cardinal que tiene una característica, el cual se halla realizando conteos hacia adelante o hacia atrás u operaciones de tipo aditivo (adiciones o sustracciones). Este número cardinal dentro de una sucesión puede ser un número antecesor ($n-1$) o sucesor ($n+1$) que varía de acuerdo a la agrupación que se haga en el conteo.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

Esta tarea tiene varios conceptos matemáticos involucrados como lo son el número como cardinal, sucesión numérica de números naturales y conteo numéricos.

El énfasis de esta actividad está en la construcción de secuencia numérica a partir de una sucesión numérica mediante el conteo.

Estos conceptos se integran para darle sentido a la construcción de la noción de multiplicación, dado que al hablar de números antecesores y sucesores se está pasando de un nivel de conteo a un nivel operatorio, en donde la sustracción se utiliza para retroceder y la adición para avanzar y encontrar el respectivo número cardinal, es decir que para un caso donde el conteo sea extenso se pueda aplicar una estrategia basada en algunas propiedades de la multiplicación, en particular la propiedad distributiva, por ejemplo: Si se quiere calcular el valor de 2×55 , se puede descomponer la multiplicación así: $2 \times (50 + 5)$ ó $2 \times (60 - 5)$.

Este tipo de tareas de secuencias numéricas ayudan a crear estrategias para comprender la multiplicación y las tablas de multiplicar, pues en cada uno de los conteos existe una propiedad matemática implícita que sustenta dicha estrategia.

RESULTADOS ESPERADOS

Se espera con esta tarea que los niños logren reconocer e identificar el número cardinal a través del conteo en cada secuencia numérica haciendo uso del cálculo mental o escrito relacionándolo con las operaciones de adición o sustracción según el caso, de tal manera que puedan concluir que una secuencia numérica es una sucesión de números el cual sigue un patrón específico.

4.1.1.2 TAREA 2: JUGUEMOS CON LA SUMA.

ESTÁNDAR DE LA TAREA:

Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

PROPÓSITO DE LA TAREA:

- Reconocer que una adición repetida se puede simplificar en una expresión multiplicativa equivalente.
- Identificar la adición repetida como el principio básico de la multiplicación en los números naturales.

DESARROLLO DE LA TAREA:

Esta tarea tiene como objetivo que el estudiante reconozca el significado y la relación que pueden tener la adición y la multiplicación de números naturales, que siendo dos operaciones de distinta naturaleza la primera asociada a conceptos de agregar, unir o añadir y la segunda orientada a la acción de reiterar tienen rasgos comunes que complementan la definición y estructura de una operación más amplia en los naturales.

Al igual que en la tarea anterior la maestra entregará una ficha de trabajo en donde continuará con la temática del zoológico de Cali, la tarea se desarrollará en dos momentos, el primero que hace parte de una situación de acción en donde el niño intentará resolver la actividad a partir de los conceptos que el maneja y de estrategias y el segundo es el intercambio de información con sus compañeros.

Teniendo en cuenta la lectura de la historia “De paseo por el zoológico de Cali” resuelve las siguientes preguntas:

1. En el zoológico de Cali hay 10 cebras.

a. ¿Cuántas patas tiene una cebra? _____

b. ¿Cuántas patas tienen 10 cebras juntas? _____

c. ¿Cómo calculaste el número de patas de todas las cebras? _____

2. En el zoológico hay guacamayas y ellas comen almendras.

a. Completa la siguiente tabla y contesta las preguntas:

Número de Guacamayas	Número de almendras consumidas
1	6
	12
	18
4	
7	
	60

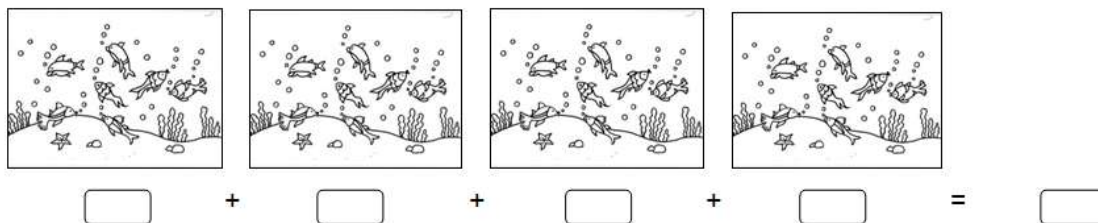
b. ¿Cómo completaste la tabla? _____

c. ¿Cuántas guacamayas hay en el zoológico? _____

d. ¿Cuántas almendras se come una guacamaya? _____

e. ¿Cuántas almendras se comen cinco guacamayas? _____

3. Según la gráfica completa y contesta las preguntas:



a. ¿Cuántos peces hay en cada acuario? _____

b. ¿Cuántos acuarios hay? _____

c. ¿Cuántos peces hay en total? _____

d. De acuerdo a los datos que encontraste, ¿de qué otra forma se puede escribir la suma del ejercicio? _____

Teniendo en cuenta que en la tarea anterior se debió haber realizado la respectiva institucionalización del concepto a movilizar, en las tareas 1 y 2 se pretende que el niño emplee nociones o estrategias conocidas, dado que en la tarea anterior se institucionalizó el concepto de adición repetida mediante la agrupación de un número cardinal constante, de tal forma que estas nociones las utilice como estrategias de manera consciente ya que se ha tenido un conocimiento previo, igualmente se espera que hagan uso de la suma reiterada como lo proponen el MEN (1998) y Rico (1998) en sus modelos para acercarse al concepto de multiplicación en los naturales. La tarea 3 intenta orientar al niño explícitamente hacia la suma reiterada para asociarla con la multiplicación de tal forma que se pueda establecer una relación entre dichas operaciones.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO:

La tarea tiene como propósito reconocer el significado de la adición y de la multiplicación en los números naturales, el principal concepto matemático es el de

la adición repetida que no solo hace parte de una definición o abreviación para escribir una multiplicación, sino que también es un modelo que contextualiza la naturaleza de dicha operación como lo mencionan Rico (1998) y el MEN (1998) en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

La adición repetida es el principio básico para acercarse a la construcción de la noción de multiplicación, puesto que este tipo de adiciones inducen a que se encuentre una expresión matemática representativa más corta para su escritura y solución.

Esto significa que: $m+m+m+m+...$ (Sumandos iguales), pasarían a representarse así: $m \times n = m . n$, en donde esta expresión indica una relación entre dos conjuntos, m tomaría el nombre de multiplicando y sería el número que se va a sumar o a repetir, y n número que estaba implícito en la adición se llamará multiplicador e indicará las veces que se debe sumar el multiplicando. El multiplicador es el número que permite abreviar la adición repetida por eso se dice que está implícito en la operación.

RESULTADOS ESPERADOS:

Con esta tarea se espera que entre las devoluciones y validaciones de los niños y la maestra se logre reconocer e identificar que la adición repetida o suma reiterada es el principio básico para comprender el concepto de la multiplicación en los números naturales, estableciendo que las expresiones aditivas y multiplicativas son equivalentes en un contexto particular, es decir que determinada situación se puede resolver mediante la adición repetida o la multiplicación conllevando a un mismo resultado.

4.1.1.3 TAREA 3: LA GEOMETRÍA DE LA MANO CON LA ARITMÉTICA.

ESTÁNDAR DE LA TAREA:

Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

PROPÓSITO DE LA TAREA:

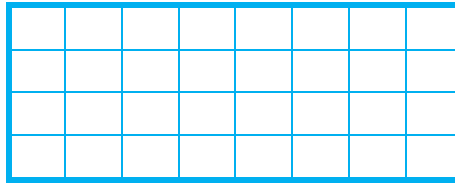
- Reconocer los términos de la multiplicación en los números naturales: multiplicando y multiplicador con sus respectivas funciones.
- Identificar que en la propiedad conmutativa aunque se empleen los mismos factores la naturaleza de estos es diferente.
- Establecer que a partir de técnicas de conteo o agrupaciones basadas en la propiedad conmutativa se puede obtener una multiplicación.

DESARROLLO DE LA TAREA:

En la última tarea de la situación 1, el estudiante se enfrentará a dar solución a pequeñas multiplicaciones usando técnicas de conteo o agrupaciones que el medio le propicie, en donde convenga que dichas agrupaciones pueden escribirse como multiplicaciones intentando distinguir la función de los factores de la operación para acercarlos a la noción de la propiedad conmutativa del producto.

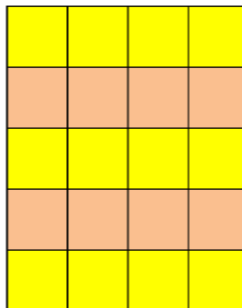
Para la implementación de esta tarea la maestra presentará la ficha de trabajo para las situaciones a didácticas de acción y formulación del estudiante, posteriormente para la institucionalización del conocimiento matemático se apoyará en el uso de diapositivas referentes a la actividad.

1. Observa la siguiente gráfica y responde:



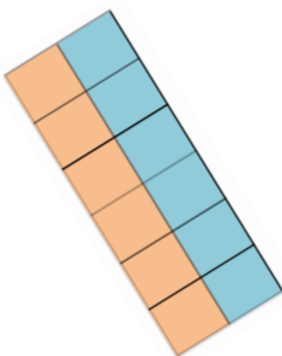
- a. ¿Cuántos cuadrados hay dentro del rectángulo? _____
- b. ¿Cómo lo calculaste? _____
- c. ¿Qué agrupaciones de cuadrados podrías hacer para hallar el total? _____
- d. Escribe la operación que representa el total de cuadrados: _____

2. Observa y responde las siguientes preguntas:



- a. ¿Cuántos cuadrados hay en toda la gráfica? _____
- b. ¿Qué suma representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- c. ¿Qué multiplicación representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- d. Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta

3. Observa y responde:



- a. ¿Cuántos cuadrados hay en toda la gráfica? _____
- b. ¿Qué suma representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- c. ¿Qué multiplicación representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- d. Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta:

4. Compara y responde:

Figura 1

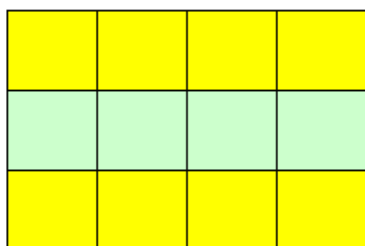
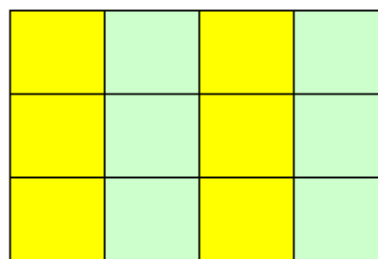


Figura 2

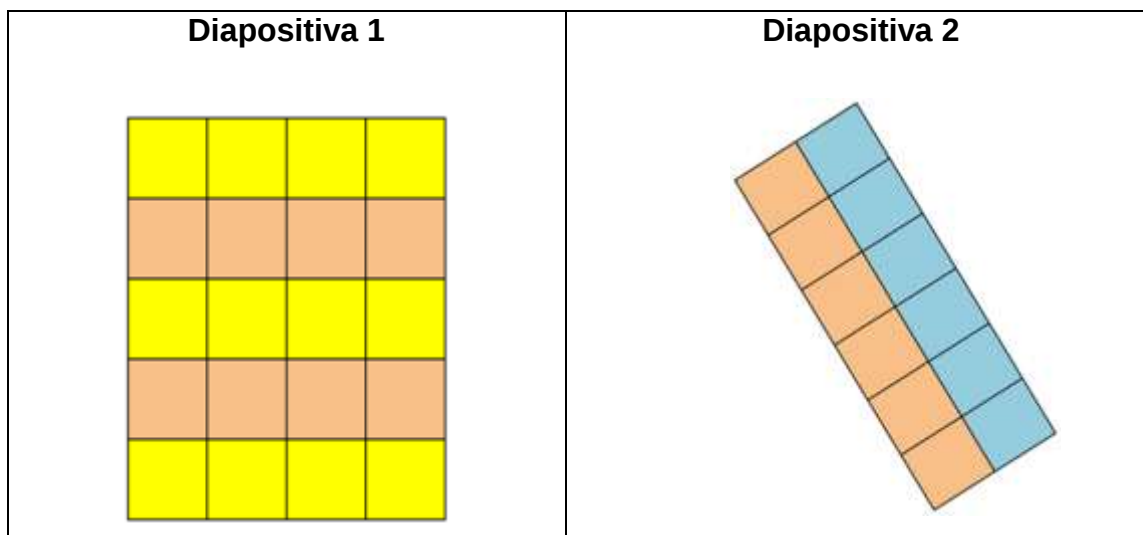


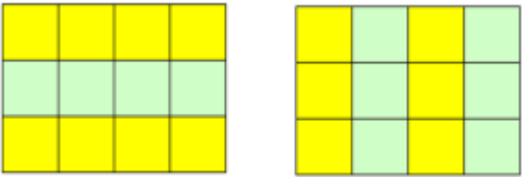
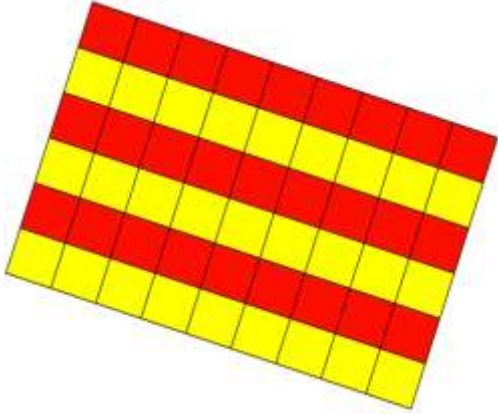
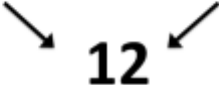
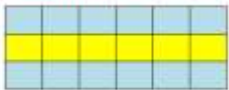
- a. ¿Qué multiplicación representa la gráfica de la figura 1? _____
- b. ¿Qué multiplicación representa la gráfica de la figura 2? _____
- c. ¿Cómo son los resultados de las dos figuras? _____
- d. Si observas las operaciones que hiciste, ¿Qué puedes decir? _____

e. Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta:_____

Para el momento de la institucionalización la maestra hará la presentación de las diapositivas como un recurso que ayude a visualizar los conceptos que se están movilizando, en este caso: el multiplicando y el multiplicador, en donde parte de la información que brinda el medio deberá ser relacionada con la agrupación de un mismo color que representa de manera implícita el número cardinal (multiplicando) que se ha venido trabajando desde el conteo.

Diapositivas de la Institucionalización



Diapositiva 3 	Diapositiva 4 
Diapositiva 5  $4 \times 3 = 4 + 4 + 4$ $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$  12	Diapositiva 6 SIGNIFICADO DE LA MULTIPLICACIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES EJEMPLO: 6×3 Significa el 6 repetido 3 veces ARITMETICAMENTE $6 \times 3 = 6 + 6 + 6 = 18$ GEOMETRICAMENTE 

Las consignas de la tarea pretenden que el niño identifique elementos de agrupación o de conteo para asociarlo con las sumas reiteradas y posteriormente con el producto, de acuerdo a las agrupaciones que ellos utilicen como estrategia irán afianzando el valor numérico que representa cada factor en una multiplicación, es decir comprender el significado de ser multiplicando o de ser multiplicador en una misma expresión: **axb** es diferente de **bxa** aunque conlleven a un mismo resultado, dado que el multiplicando es el número cardinal que evidencia las agrupaciones en el conteo y que se repite tantas veces como lo

indica el multiplicador, de acuerdo a lo anterior se puede decir que la cantidad que representa **a** en las dos expresiones no son de la misma naturaleza al igual que **b**.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO:

Como continuación de las tareas pasadas y partiendo de los conocimientos matemáticos tratados: patrón, sumas o adiciones repetidas para la escritura de una multiplicación se hace necesario que el estudiante identifique los términos que hacen parte en un producto estableciendo la función de cada número en la operación.

La tarea se ha realizado retomando el modelo de distribución de objetos en un esquema rectangular que propone Rico (1998), dado que las agrupaciones de un mismo color representan la cantidad de cuadros que se van a repetir (multiplicando) en toda la figura, mientras que las agrupaciones de distintos colores indican la cantidad de veces que se debe repetir las agrupaciones de igual color (multiplicador), en el modelo de Rico él lo plantea como filas por columnas con igual característica en donde de acuerdo al gráfico (rectángulo) las filas representarían el multiplicando y las columnas el multiplicador, es decir en una situación las filas pueden ser el multiplicando y en otros casos el multiplicador, esto depende del limitante que ofrezca el medio donde el gráfico puede ser de un solo color diferenciar las columnas de las filas con colores.

Como se ha mencionado el objeto de estudio está en la diferenciación de los términos y función del producto, dado que si se tiene dos números **a** y **b** en una misma operación como: **axb** ó **bx a** y conlleven a un mismo resultado, no significa que estén representando la misma relación, porque el primer término en la multiplicación es el número que se conserva en una adición repetida y se hace explícito al poderse observar en una expresión matemática, es decir, **a+a+a+a+....** ó **b+b+b+b+....**, mientras que el segundo término resulta de algo implícito que se debe abstraer según la cantidad de veces que se repita el multiplicando y

matemáticamente se hace énfasis en que la idea de la propiedad conmutativa no es tan evidente como suele aparecer en los textos.

Esta distinción entre multiplicando y multiplicador es básica para comprender los enunciados de la multiplicación en los cálculos mentales o escritos y en situaciones que usen la propiedad conmutativa.

RESULTADOS ESPERADOS:

Se espera con esta tarea que los niños logren reconocer claramente los términos y la función que toma cada número en la multiplicación y que establezcan comparaciones entre expresiones multiplicativas que usan los mismos números y que conlleven a un mismo resultado, pero cada número tiene su propia naturaleza y por ende un tratamiento diferente, como se evidencia en el modelo de Rico (1998) de esquema rectangular, esta distinción permitirá que el niño comprenda con más facilidad las regularidades que están implícitas en las tablas de multiplicar.

4.1.2 SITUACIÓN 2: ESTRATEGIAS PARA FACILITAR LA MULTIPLICACIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

4.1.2.1 TAREA 1: ORDENANDO NÚMEROS.

ESTÁNDAR DE LA TAREA:

Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical entre otros).

Este estándar se ha escogido para el diseño e implementación de las tareas de la situación 2, puesto que las actividades que los estudiantes deben realizar han venido fortaleciendo el concepto de la multiplicación como operación y de sus

factores, de tal forma que en esta situación se pretende que sea el estudiante quien reconozca las regularidades que están implícitas en las propiedades del producto como la propiedad conmutativa y distributiva a través de modelos combinatorios y producto cartesiano, aceptándolas como parte de estrategias para la resolución de problemas que requieran el uso del cálculo mental como lo son el trabajo de las tablas de multiplicar o el cálculo escrito para la interpretación de un conocimiento matemático concreto.

PROPÓSITO DE LA TAREA:

- Identificar la propiedad conmutativa de la multiplicación en los números naturales a través de modelos combinatorios y de productos cartesianos para resolver situaciones que requieran el uso del cálculo escrito.
- Resolver distintas situaciones problemas utilizando estrategias de combinación ya sea por medio de un diagrama de árbol o por el algoritmo de la multiplicación en los números naturales.

DESARROLLO DE LA TAREA:

Esta primera tarea viene reforzando el concepto matemático que se trabajó en la tarea 3 de la situación 1, que estaba orientada en diferenciar las funciones de los términos de la multiplicación: multiplicando y multiplicador, estableciendo una cercanía a la naturaleza que tiene la propiedad conmutativa del producto en los números naturales.

Para el desarrollo de esta tarea la maestra presentara una ficha de trabajo en donde las consignas son situaciones problemas relacionadas con un contexto particular como una fiesta infantil, las consignas planteadas en la situación de acción tienen como objetivo que el estudiante las relacione con el concepto institucionalizado en la tarea anterior.

María Camila va a hacer una fiesta para celebrar su cumpleaños, en esa fiesta va a estar el payasito Rin Rin quien animara a los niños invitados, participa en los juegos de Rin Rin.

1. En la fiesta hay 50 invitados, y el payaso Rin Rin va a regalar a algunos niños unos globos de figuras, y cada figura puede ser de color azul, rojo, naranja o blanco:



- a. ¿Cuántos globos tiene el payaso Rin Rin en la gráfica? _____
- b. ¿Qué figuras tienen esos globos? _____
- c. ¿Cuántos corazones puede hacer Rin si hace uno de cada color? _____
- d. ¿Cuántos globos de color azul puede hacer el payaso Rin Rin? _____
- e. ¿Cuántos globos en total puede realizar el payaso Rin Rin? _____
- f. ¿Cuántos niños recibirán globos? _____

2. Rin Rin va a rifar otros globos de diferentes figuras y colores, según la información de la tabla 1 completa la tabla 2:

Tabla 1

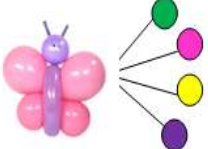
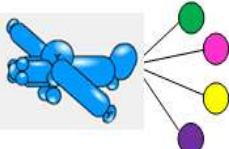
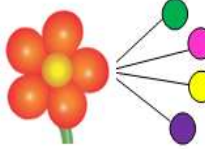
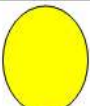



¿Cuál es el multiplicador? _____ ¿Cuál es el multiplicando? _____ ¿Qué multiplicación representa el anterior arreglo? _____

Tabla 2





¿Cuál es el multiplicador? _____ ¿Cuál es el multiplicando? _____ ¿Qué multiplicación representa el anterior arreglo? _____

¿Qué relación existe entre las multiplicaciones obtenidas en las tablas 1 y 2? _____

Ayuda al payaso a descubrir, ¿cuántos globos debe hacer en total para la rifa? _____

Estas actividades pretenden que el niño reconozca las propiedades de la multiplicación, para este caso la tarea se centrara en la propiedad conmutativa del producto, la cual se trabajara mediante el modelo combinatorio y de producto cartesiano que plantea Rico (1998) y el MEN (1998) en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, que facilitara el reconocimiento de la función que cumple cada número (Factores) dentro de la multiplicación es decir la función del multiplicando y del multiplicador.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

En esta tarea los conceptos matemáticos involucrados son: combinaciones, producto cartesiano, propiedades de la multiplicación (propiedad conmutativa), función del multiplicando y multiplicador.

Los conceptos mencionados anteriormente se integran para darle una aproximación a la noción de la propiedad conmutativa de la multiplicación en los naturales, dado que los modelos combinatorios ayudan a visualizar la función de cada número en una multiplicación, ya que estos modelos son aquellos que permiten hacer arreglos o agrupación de objetos de subconjuntos mediante un diagrama de árbol o de líneas, en donde se representa gráficamente las opciones de arreglos combinatorios en situaciones de conteo. Como lo dice Rico (1998) el diagrama se abre a partir de un punto tantas líneas o ramas como lo indique el multiplicador, y en cada uno de los extremos se vuelven a abrir tantas líneas como lo indica el multiplicando.

Para el caso de la tarea 2, la situación presenta dos características una son los diferentes colores de los globos y la otra se refiere a las figuras que se pueden realizar con los globos, según el arreglo de la tabla 1 y la definición de Rico (1998) de este modelo el multiplicando son los colores de los globos (4) en donde se evidencia la suma reiterada en grupos de cuatro y el multiplicador son las formas de estos globos (3) que indican la cantidad de veces que se repiten estos grupos, dando como resultado una multiplicación de 4×3 , mientras que en el arreglo de la tabla 2 aunque aparecen nuevamente estos números su función es distinta dado que el número 4 representa el multiplicador y el 3 el multiplicando.

El producto cartesiano al igual que el modelo combinatorio ayuda a visualizar la función específica del multiplicando y del multiplicador, como lo dice Rico (1998) y el MEN (1998) en los Lineamientos este producto es un arreglo mediante un cuadro de doble entrada en donde se relacionan diferentes características para obtener todos los pares ordenados posibles los cuales dan como resultado el producto del número que representa cada característica.

RESULTADOS ESPERADOS

Se espera con esta tarea que los niños logren identificar arreglos combinatorios para describir cantidades en una multiplicación, además que comprendan que una multiplicación se puede representar con expresiones equivalentes como se hace en la propiedad conmutativa del producto, en donde lo principal de esta propiedad no es su resultado sino la diferenciación y función de cada factor (multiplicando y multiplicador) en los números naturales los cuales ayudan a crear estrategias de cálculo mental y escrito en el momento de resolver situaciones.

4.1.2.2 TAREA 2: COMBINANDO OPERACIONES.

ESTÁNDAR DE LA TAREA:

Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical entre otros).

PROPÓSITO DE LA TAREA:

- Reconocer que la multiplicación de números naturales puede expresarse a través de descomposición de números.
- Identificar la propiedad distributiva de la multiplicación a través de la descomposición de números como una estrategia para el cálculo mental o escrito.

DESARROLLO DE LA TAREA:

A partir de los conceptos y estrategias institucionalizados en las tareas anteriores, la actividad no va a tener un contexto particular pero si va a estar orientada a la reflexión de la propiedad distributiva, tendrá un momento de acción en donde cada estudiante se enfrentará a las consignas determinando la información que brinda el medio de la tarea, para que luego la maestra haga las devoluciones pertinentes con la intención de que el estudiante construya el conocimiento concreto a movilizar.

1. Resuelve la siguiente expresión:

$$(6 \times 2) + (6 \times 3) =$$

2. ¿La expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera: $6 \times (2+3)$?

_____, ¿Por qué? _____

3. Completa la tabla de acuerdo a la información:

x	20	3
5		

a. ¿Qué multiplicaciones realizaste? _____

b. ¿Existe algún número en común en las multiplicaciones? _____

¿Cuál? _____

c. Escribe una expresión matemática en la cual representes las multiplicaciones realizadas: _____

d. ¿Qué multiplicación representa la tabla? _____

Con esta actividad se pretende que el estudiante tenga un acercamiento a la noción de la propiedad distributiva mediante la descomposición de números naturales y que a su vez la entienda como una posible estrategia para el cálculo mental y escrito cuando se requiera el uso de las tablas de multiplicar.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO:

En esta tarea el concepto matemático a movilizar es el de la propiedad distributiva respecto a la adición, entendiéndose que uno de los factores se puede descomponer aditivamente respecto al sistema de numeración decimal (unidades, decenas, centenas, etc.).

Esta tarea como aparece en el marco teórico tiene dos orientaciones la primera es reconocer el sistema de numeración decimal a partir de descomposiciones aditivas de números naturales y la segunda es aplicar dichas

descomposiciones en situaciones que requieran el uso de la multiplicación, como lo es el caso de la propiedad distributiva.

En las consignas de la tarea el concepto de la propiedad distributiva y de la descomposición decimal es evidente, teniendo en cuenta que una multiplicación de operadores binarios se puede también entender o resolver descomponiendo uno de sus factores en una adición equivalente, es decir, si se tiene axb , en donde b se puede escribir como $c+d$, tal que c y d son números que descomponen aditivamente a b , de tal forma que se reconozca que las expresiones: $axb = a \times (c+d) = (axc) + (axd)$, en donde $b = c+d$.

RESULTADOS ESPERADOS:

Con esta tarea se esperaba que el medio le permita comprender y entender al estudiante que todo número natural se puede descomponer aditivamente y que estas descomposiciones están de forma implícita en las operaciones, además que pueda apropiarse de la utilidad que aporta la propiedad distributiva cuando se tengan multiplicaciones de números mayores, ejemplo si se quiere multiplicar: 9×99 se puede resolver $9 \times (100 - 1)$ ó $9 \times (90 + 9)$, de tal forma que se conviertan en estrategias para resolver cálculos.

CAPÍTULO 5

RESULTADO Y ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES

Para facilitar el análisis de los resultados de estas tareas se tendrá en cuenta la clasificación de las tareas diseñadas de acuerdo a los modelos reflexivos que proponen Rico (1998) y el MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) sobre la multiplicación, que se presentaron en la tabla 4 en el capítulo anterior, aunque las tareas fueron diseñadas y estructuradas de acuerdo a dichas modelos, cabe resaltar que estas no se limitan exclusivamente a un modelo en particular, es decir las tareas pueden tener diversas estrategias para su solución e involucrar otros conceptos matemáticos que complementan la noción de multiplicación.

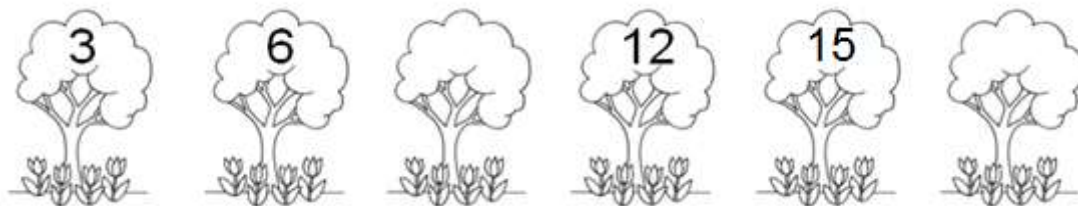
5.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El trabajo está orientado a analizar los resultados de la situación 1 que fue aquella que se aplicó en el grado segundo del Colegio Panamericano, que esta contextualizada en la el capítulo 3 que hace referencia a la metodología. La situación 2 queda como un diseño o propuesta para contribuir al fortalecimiento del concepto de multiplicación desde las propiedades y descomposición aditiva.

Como se mencionó anteriormente este trabajo es de carácter cualitativo y para poder analizar los resultados se recurrirá a datos cuantitativos por medio de porcentajes que permiten hacer una comparación y establecer conclusiones, las cuales serán estudiadas desde los elementos de validación, devolución e institucionalización que propone la TSD de Brousseau (1986).

5.2.1. ANÁLISIS SITUACIÓN 1. TAREA 1: SALTANDO ENCUESTRO EL NÚMERO

1. Para que los micos coman en cada árbol se deja cierto número de bananos. Ayuda a encontrar ¿cuántos bananos hay en los árboles en blanco?

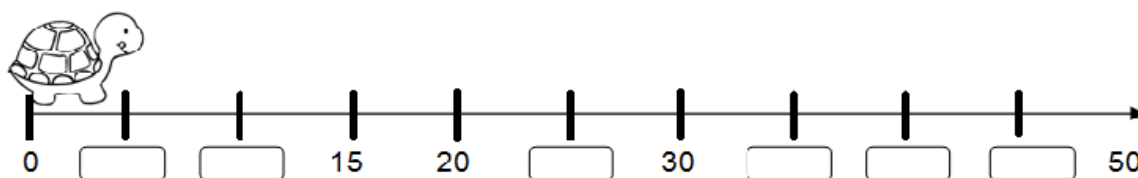


De acuerdo a las respuestas de los estudiantes, el 56% de ellos contestaron de manera correcta a la pregunta, pues la información que brindaba el gráfico les permitió identificar el número 3 como el número cardinal que agrupaba para construir la secuencia, esto se constató cuando al hacer la didáctica de validación los estudiantes argumentaron que para encontrar los números que faltaban debían contar o sumar de tres en tres.

Algunos estudiantes como el 20% no lograron identificar el cardinal sucesor ya que no tuvieron en cuenta la agrupación, utilizando la cadena irrompible como estrategia, la cual se entiende que completaron la secuencia con la idea del número siguiente, haciendo una mala interpretación de la información que brindaba el gráfico, es decir si la secuencia tenía un orden así : 3, 6, _, 12, 15... completaban era con el número 7 como sucesor de 6 sin establecer la diferencia entre cada número ya fuera de forma ascendente o descendente, es decir no tuvieron en cuenta la didáctica de devolución por parte de la maestra en donde se les sugería que observaran la regularidad que había en la secuencia numérica.

El otro 24% de los estudiantes no comprendieron la situación ni lo que representaba el gráfico pues en sus respuestas se evidenciaban números que no iban acorde con la secuencia, es decir realizaron conteos aislados a lo que se proponía sin ningún sentido.

2. La tortuga del zoológico recorre un camino de 50 metros en el cual hace 10 paradas para descansar, observa y completa la gráfica, descubre cada cuántos metros para la tortuga.



La tortuga para cada metros.

Como se ha mencionado, la tarea va orientada a identificar un número cardinal en una sucesión numérica, aunque en la consigna 1 hubo un porcentaje favorable para las respuestas, en esta consigna cabe resaltar que los estudiantes deben dar dos respuestas que están relacionadas entre sí, dado que una de ellas es completar la secuencia numérica y la otra es identificar el número cardinal (patrón), el 28% de los estudiantes completaron la secuencia satisfactoriamente determinando a través de conteos y sumas el número 5 como el cardinal concreto y como el número que daba respuesta a la pregunta, que consistía en determinar cada cuánto paraba la tortuga. Aquí los estudiantes hicieron una correcta interpretación del resultado obtenido sin necesidad de hacer devoluciones, solo validaciones mediante el conteo de cinco en cinco.

El 48% de los estudiantes logró identificar el cardinal que completaba la secuencia correctamente debido a las devoluciones que hizo la maestra, tales como: *“que pasa entre los números 15 y 20”*, *“si comparamos esta consigna con la anterior que puedes decir”*, pero al momento de validar su respuesta con la pregunta 2 no relacionaron el número 5 como el cardinal que determinaba cada cuanto debía parar la tortuga, sino que la pregunta tomó otro sentido entendiéndola como las veces que paraba la tortuga dando un número totalmente diferente de acuerdo a lo que reflejaba el gráfico, esto nos lleva a pensar que la intención del enunciado no fue claro y presentó dificultad en su interpretación, porque para los estudiantes no fue fácil distinguir el número de veces que paró la tortuga con el número que indicaba cada cuántos metros paraba, siendo estos 10 y 5 respectivamente.

El 24% restante fueron estudiantes que no lograron identificar el cardinal que completaba la gráfica de la secuencia pues las devoluciones realizadas por la maestra no fueron suficiente para que ellos se apropiaran de la consigna de la tarea y dieran la respuesta correcta generando la misma dificultad para dar respuesta a la pregunta 2, pues sus conteos fueron a saltos de uno en uno, dos en dos o cualquier número sin relacionarlo con la información del gráfico.

3. Observa el dibujo y responde:



- Enumera todos los cuadrados vacíos y llenos hacia donde indica la flecha.
- Completa la secuencia gráfica del alimento.
- ¿Cuál es la secuencia numérica del alimento? _____
- ¿De acuerdo a la respuesta anterior que puedes concluir? _____

Para esta consigna los estudiantes debían completar un cuadro con números de uno en uno y ubicar el alimento según la indicación la flecha, es importante resaltar que los enunciados de esta consigna no fueron muy claros y que se necesitó de las devoluciones realizadas por la maestra para completar la

secuencia, debido a esto el 100% de los estudiantes completo satisfactoriamente el cuadro con los números del 1 al 32.

Las dificultades se evidenciaron en el momento que debían completar la secuencia gráfica del alimento dado que el 58% de los estudiantes no identificaron el 4 como el número cardinal que representaba la ubicación correcta del alimento dentro de la secuencia, por lo tanto cuando se les solicitó escribir la secuencia numérica que representaba el alimento hubo errores dentro del conteo al continuar la secuencia, a pesar de las devoluciones que se realizaron con la docente los estudiantes no consiguieron hallar el resultado correcto pues dibujaban el alimento en una casilla incorrecta sin tener en cuenta la seriación.

El 42% restante de los estudiantes comprendieron adecuadamente la información brindada por el gráfico, identificando claramente el número 4 como aquel número que permitía completar correctamente la secuencia numérica y posición del alimento.

En conclusión en esta tarea los estudiantes reconocieron el número cardinal pero no lo asociaban como un número que era constante para completar las secuencias, es decir dentro de las estrategias que utilizaron para validar las respuestas encontradas recurrieron al conteo y a la suma.

Se esperaba con esta tarea que los niños logaran reconocer e identificar el número cardinal a través del conteo en cada secuencia numérica, haciendo uso del cálculo mental o escrito relacionándolo con las operaciones de adición o sustracción según el caso, de tal manera que puedan concluir que la noción de multiplicación se asocia con la definición de sucesión dado que estas son funciones con reglas precisas que orientan a la construcción de las tablas de multiplicar.

Teniendo en cuenta lo anterior, la maestra continuó con el momento de la institucionalización en donde se explicó que existe un número cardinal que hace parte del conteo y que representa una agrupación, el cual de acuerdo a la

experiencia se puede hallar a través del uso de operaciones como adición si es en forma ascendente o sustracción si es de forma descendente y que más adelante este mismo número nos ayudara a sintetizar expresiones numéricas, estas son algunas fotografías que evidencia la aplicación y desarrollo de esta tarea.



5.2.2. ANÁLISIS SITUACIÓN 1. TAREA 2: JUGUEMOS CON LA SUMA

Para esta tarea el propósito era que el estudiante a través de la información obtenida en las devoluciones e institucionalización de la tarea anterior relacionara el conteo o sucesión de un número con la adición, para comprender que una adición repetida se puede simplificar en una expresión multiplicativa equivalente.

Teniendo en cuenta la lectura de la historia “De paseo por el zoológico de Cali” resuelve las siguientes preguntas:

1. En el zoológico de Cali hay 10 cebras.
 - a. ¿Cuántas patas tiene una cebra? _____
 - b. ¿Cuántas patas tienen 10 cebras juntas? _____
 - c. ¿Cómo calculaste el número de patas de todas las cebras? _____

La tarea está diseñada respecto al modelo de adición repetida propuesta por el MEN (1998) y Rico (1998), en este ejercicio el 88% de los estudiantes contestaron correctamente las dos preguntas de la situación y usaron la suma y el conteo de un número repetido como la estrategia que les permitía calcular un número más grande, es decir utilizaron nociones ya conocidas en la institucionalización de la tarea anterior, dado que partieron del reconocimiento del número cardinal que agrupa y que es constante en un conjunto dado.

La pregunta era precisa y por ende el número era sencillo de reconocer lo cual facilitaba el cálculo para responder a la segunda pregunta, veamos: ¿Cuántas patas tiene un cebra?, los 25 estudiantes contestaron correctamente que este animal tiene 4 patas identificando a este número como aquel cardinal constante y agrupador que está en la sucesión y para hallar ¿Cuántas patas tienen 10 cebras juntas?, partieron de la respuesta anterior y contaron de cuatro en cuatro utilizando dibujos como círculos, palitos o sumaron de cuatro en cuatro, como se muestra en la fotografía.

COLEGIO PANAMERICANO

NOMBRE: Katherine Arango M. p.
 FECHA: Col 12 de agosto del 2012
 TAREA 2: Juguemos con la suma.

Teniendo en cuenta la lectura de la historia "De paseo por el zoológico de Cali" resuelve las siguientes preguntas:

1. En el zoológico de Cali hay 10 cebras.
 - a. ¿Cuántas patas tiene una cebra? Cuatro
 - b. ¿Cuántas patas tienen 10 cebras juntas? Cuarenta
 - c. ¿Cómo calculaste el número de patas de todas las cebras? Contando en Cuatro en Cuatro

El 12% restante de los estudiantes aunque comprendieron que el número cuatro era aquel cardinal que se repetía, la aproximación en sus cálculos fue errónea ya que sus cuentas registraban números diferentes a 40 pero sus argumentos en las devoluciones daban cuenta de que su estrategia fue el conteo o la suma repetida.

2. En el zoológico hay guacamayas y ellas comen almendras.
 - a. Completa la siguiente tabla y contesta las preguntas:

Número de Guacamayas	Número de almendras consumidas
1	6
	12
	18
4	
7	
	60

- b. ¿Cómo completaste la tabla? _____
- c. ¿Cuántas guacamayas hay en el zoológico? _____
- d. ¿Cuántas almendras se come una guacamaya? _____
- e. ¿Cuántas almendras se comen cinco guacamayas? _____

En este ejercicio la información se registra en una tabla que los estudiantes debían completar, en esta tabla se solicitaba consignar la relación número de guacamaya y número de almendras consumidas por cada guacamaya, es decir una relación uno a uno, en donde el 100% de los estudiantes completaron correctamente la tabla como se evidencia en la fotografía, identificando el número seis (6) como el cardinal constante en la sucesión, realizando conteos y sumas de seis en seis como en el caso anterior.

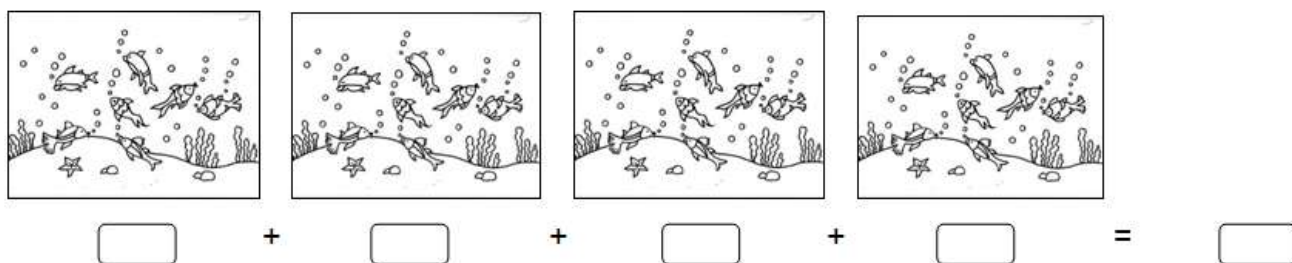
Número de Guacamayas	Número de almendras consumidas
1	6
2	12
3	18
4	24
5	30
6	36
7	42
8	48
9	54
10	60

Aunque los registros fueron satisfactorios, las dificultades que se presentaron estuvieron en la comprensión de las consignas que se hicieron

respecto a la tabla y se hicieron algunas devoluciones por parte de la maestra que iban dirigidas a la revisión de la información que estaba en la tabla, debido a esto el 68% de los estudiantes relacionó el conteo realizado en la tabla con las preguntas del ejercicio dando cuenta de las relaciones que tenía cada variable (número de guacamaya y número de almendras consumidas por cada guacamaya).

Por otro lado, el 16% de los estudiantes que equivalen a 4 niños contestaron las preguntas sin tener en cuenta la tabla, lo que habían completado y las devoluciones de la maestra, esto pudo haber sucedido porque los niños no lograron extraer o interpretar la información que les brindaba la tabla que ellos mismos habían completado, inclusive escribieron números que no aparecen en dichos registros.

3. Según la gráfica completa y contesta las preguntas:



- ¿Cuántos peces hay en cada acuario? _____
- ¿Cuántos acuarios hay? _____
- ¿Cuántos peces hay en total? _____
- De acuerdo a los datos que encontraste, ¿de qué otra forma se puede escribir la suma del ejercicio? _____

La solución e interpretación de las consignas anteriores relacionadas con la adición repetida son estrategias para el desarrollo de este ejercicio, dado que lo se buscaba era que el estudiante llegara a relacionar la suma de los naturales con otra operación del mismo conjunto, entendiéndola como una expresión simplificadora.

Se presentaban cuatro preguntas precisas de acuerdo a la información brindada y dentro de estas preguntas había una específica que conllevaba a que el estudiante validara sus respuestas a través de determinadas expresiones matemáticas.

El 88% de los estudiantes completaron y contestaron correctamente las preguntas de acuerdo al gráfico, identificando la correspondencia que hay entre un cuadrado y el número de imágenes constantes que están dentro del cuadrado, para luego generalizar todo el gráfico. Esos números son: 7,4 y 28, siete representa la cantidad de imágenes en un cuadrado, cuatro los cuadrados y veintiocho la cantidad total de peces.

El 12% restante de estos estudiantes en las devoluciones realizadas con la docente evidenciaron dificultad al comprender los enunciados, dado que sus respuestas estaban dirigidas a la estrategia u operación que habían utilizado para obtener 28, es decir la suma o el conteo, sin detenerse a analizar lo que sucedía en cada cuadro y el sentido de la pregunta.

Para la pregunta específica: *“De acuerdo a los datos que encontraste, ¿de qué otra forma se puede escribir la suma del ejercicio?”*, se obtuvo variedad de porcentajes, el 56% de los estudiantes usaron como estrategia la multiplicación para simplificar la suma repetida que presentaba el gráfico, relacionando al número siete (7) como aquel que se estaba repitiendo cuatro (4) veces y que por lo tanto se podía escribir así: 7×4 .

El 12% de estos niños no encontraron otra estrategia a parte del conteo de uno en uno, pues para llegar al número 28 a pesar de haber completado la gráfica sus escritos no fueron suficientes y para ellos era más fácil contar cada pescadito en cada cuadro, determinando que no se podía escribir de una forma más corta dicha adición.

El 32% restante no comprendieron el enunciado dado que su respuesta fue nula, es decir no concluyeron ni escribieron nada respecto a las estrategias de

cálculo, esto pudo darse porque se limitaron y no pudieron relacionar los datos que habían obtenido en los ítems anteriores para finalmente lograr escribir la expresión simplificada de la representación gráfica.

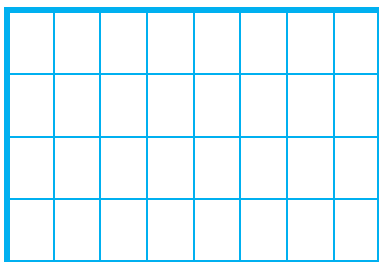
Para la institucionalización de esta tarea se tuvieron en cuenta todos los aportes dados en las devoluciones por parte de la maestra y validaciones por parte de los estudiantes, que permitieron reconocer e identificar la adición repetida como el principio básico de la multiplicación en los números naturales.

5.2.3. ANÁLISIS SITUACIÓN 1. TAREA 3: LA GEOMETRIA DE LA MANO CON LA ARITMÉTICA

El propósito de esta tarea básicamente consiste en que el estudiante reconozca los términos de la multiplicación en los números naturales: multiplicando y multiplicador con sus respectivas funciones y que además identifique que en la propiedad conmutativa aunque se empleen los mismos factores la naturaleza de estos es diferente.

Para esto es importante tener en cuenta las situaciones de validación, devolución que se presenten durante el desarrollo de la tarea y además la institucionalización de la tarea anterior ya que al relacionarla con el conteo o la sucesión de un número con la adición y de acuerdo con la información que le brinde la consigna podrá comprender que esta sucesión se puede escribir con otra expresión equivalente como lo sería una multiplicación. La tarea se diseñó teniendo en cuenta el modelo rectangular que propone Rico (1998).

1. Observa la siguiente gráfica y responde:



- ¿Cuántos cuadrados hay dentro del rectángulo?_____
- ¿Cómo lo calculaste?_____
- ¿Qué agrupaciones de cuadrados podrías hacer para hallar el total?_____
- Escribe la operación que representa el total de cuadrados:_____

De acuerdo a las respuestas de los estudiantes el 29% de ellos respondieron de manera adecuada ya que mediante técnicas de conteo que la información les propicio, lograron identificar al 4 o al 8 como el número cardinal que al relacionarlo con el conteo en una sucesión repetida mediante una adición podrían encontrar el total de cuadros dentro del rectángulo e igualmente lograron escribir dichas agrupaciones como una multiplicación. Es importante recalcar que en este ejercicio la información brindada por la gráfica fue un limitante, donde el gráfico es de un solo color sin hacer diferencia entre columnas y filas.

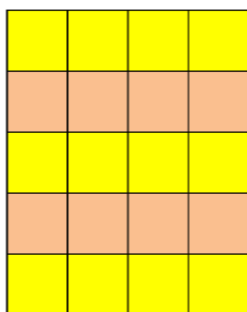
El 58% aunque respondieron casi todas las preguntas de esta consigna correctamente no lograron hacer una adecuada interpretación de la información para escribir la multiplicación que representaba la sucesión de agrupaciones escritas anteriormente, esto se evidenció en las validaciones que ellos dieron porque aún estaban movilizando la noción de conteo impidiendo el uso de la operatividad, esto es un claro ejemplo de lo que es un obstáculo⁶ en la TSD, pues el cambio de estrategia no se infirió tan evidentemente a pesar de tener toda la información.

Y el 12% restante aunque dieron el número exacto de cuadros que componían el rectángulo no lograron responder correctamente el resto de

⁶ Según Brousseau (1986) quien fue quien introdujo la noción de obstáculo en didáctica de las matemáticas, un obstáculo es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades.

preguntas, es decir no identificaron ningún número cardinal como agrupación, sino que lo hicieron de uno en uno, lo que conlleva a pensar que a pesar de las devoluciones realizada por la maestra no comprendieron la pregunta y en lugar de buscar una operación que simplificara el conteo les resulto más fácil colocar el total.

2. Observa y responde las siguientes preguntas:



- ¿Cuántos cuadrados hay en toda la gráfica?_____
- ¿Qué suma representa el total de cuadrados en la gráfica?_____
- ¿Qué multiplicación representa el total de cuadrados en la gráfica?_____
- Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta:_____

La limitación que brindaba la información en la consigna anterior, aquí en esta consigna ya no se hace presente puesto que el gráfico tiene dos colores en donde se supone el estudiante deberá distinguir más claramente las agrupaciones que se hacen, bien sea por filas o por columnas para que así logren identificar los términos de un producto (multiplicando y multiplicador) haciendo la distinción de la naturaleza de cada uno, lo cual se hará evidente en el momento de la institucionalización.

Respecto a los resultados el 54% de los estudiantes identificaron de acuerdo a la información que les brindo la gráfica el número 4 como el cardinal que se agrupaba, el cual en este caso sería el número que se repetiría en la sucesión mediante una suma e igualmente lo relacionaron con la multiplicación como otra forma de expresar el resultado, finalmente expresaron que las agrupaciones de un mismo color si les ayudo a determinar las respuestas.

El 25% de los estudiantes identificaron al 4 como el cardinal que agrupaba y escribieron la adición repetida correspondiente, pero al momento de relacionar dicha operación con otra que expresara lo mismo (la multiplicación) no lo hicieron correctamente, dado que no comprendieron la pregunta y tampoco la relacionaron con la operación aditiva ya escrita en multiplicación, sucedió lo mismo que en la consigna anterior presentan el total de cuadros por medio de conteo y no de operatividad, pero igualmente aseguraron que las agrupaciones de un mismo color si les ayudo para hallar el número cardinal 4.

Y el 21% restante aunque dieron cuenta de la cantidad de cuadros que componía el rectángulo, no lograron relacionarlo con sus expresiones aditivas o multiplicativas correspondientes, argumentaron que lo hallaron contando de uno en uno es decir no tuvieron en cuenta la información que brindaba la consigna mediante las agrupaciones de un mismo color en la representación gráfica, lo que nos lleva a pensar que no hubo una relación entre el lenguaje gráfico y el lenguaje escrito ya que no se hizo una adecuada reflexión de las preguntas.

3. Observa y responde:



- ¿Cuántos cuadrados hay en toda la gráfica? _____
- ¿Qué suma representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- ¿Qué multiplicación representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta: _____

Esta consigna va ligada a la consigna dos, puesto que en ambas se pretende lo mismo, el acercamiento a los términos de la multiplicación, pero al parecer la información que se brinda de haber una sola agrupación de cada color hizo que el porcentaje con respecto a la consigna anterior bajara pues en esta consigna el 46 % de los estudiantes respondieron correctamente.

El 36% escribió la suma reiterada que daba cuenta de la representación gráfica ya que para este caso según la información que se brindaba, la adición repetida sería $6+6$, y que al expresarla en multiplicación sería 6×2 , pero ellos lo hicieron 6×6 , es decir utilizaron los mismos números más no lograron relacionarlo con la operación adecuada, el limitante en este caso se podría pensar que fue la agrupación de una fila por cada color.

Pero al igual que disminuyó el porcentaje de respuestas correctas igualmente disminuyó el porcentaje de respuestas incorrectas, puesto que las devoluciones realizadas en la consigna anterior permitió que el 18% de los estudiantes definitivamente no lograran relacionar la información brindada por la consigna mediante el gráfico con las operaciones aditivas y multiplicativas que lo expresaban.

4. Compara y responde:

Figura 1

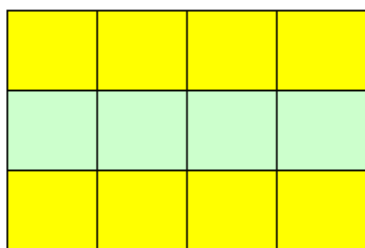
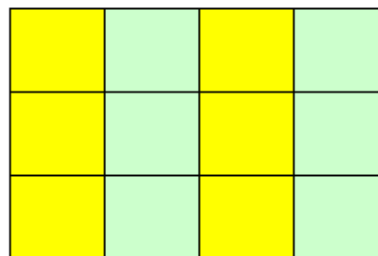


Figura 2



- ¿Qué multiplicación representa la gráfica de la figura 1? _____
- ¿Qué multiplicación representa la gráfica de la figura 2? _____
- ¿Cómo son los resultados de las dos figuras? _____
- Si observas las operaciones que hiciste, ¿Qué puedes decir? _____
- Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta: _____

Partiendo de que en las consignas 2 y 3 hubo un acercamiento a los términos de la multiplicación, esta consigna pretende además de reforzarlos, hacer conocer la noción de la propiedad conmutativa para corroborar que la naturaleza de los términos de la multiplicación es diferente, para eso se utilizaron dos rectángulos con igual número de cuadros pero con dos colores que hacen agrupaciones en distintas posiciones entre las filas y las columnas.

De acuerdo a las devoluciones y la información que se brindó a los estudiantes el 40% de ellos lograron escribir la multiplicación que representaba a cada rectángulo, en este caso uno era 4×3 y el otro 3×4 , es decir tuvieron en cuenta los colores y argumentaron que aunque los resultados eran iguales cada número (el 4 y el 3) no estaban cumpliendo las mismas funciones esto se evidenció en el momento de la institucionalización.

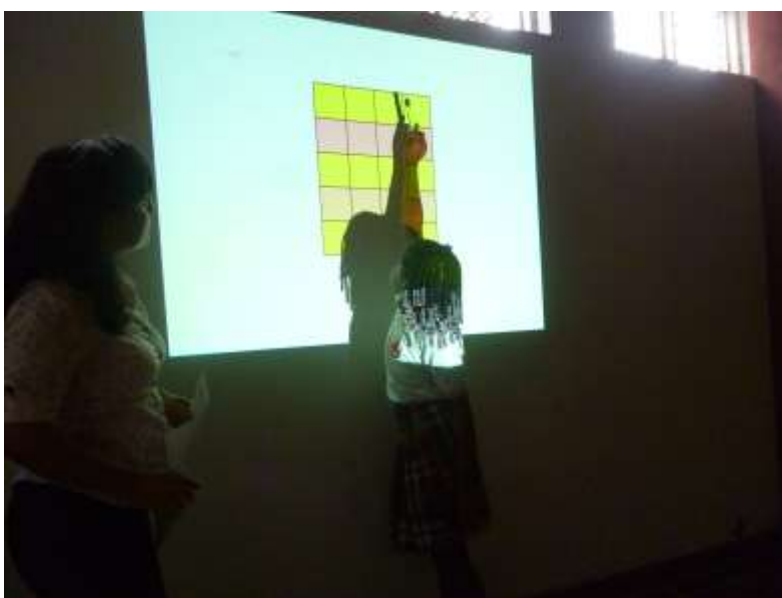
El 26 % escribió una sola multiplicación representativa para ambos rectángulos lo que nos indica que no tuvieron en cuenta la información de los gráficos, argumentando que en ambos rectángulos había igual cantidad de cuadrados, esto significa que la posición y variación del color no represento mayor información para ellos es decir no encontraron ninguna diferencia.

Mientras que el 34% restante solo escribieron el total de cuadros en cada rectángulo y simplemente dijeron que eran iguales pero no lograron relacionarlos con ninguna multiplicación, a pesar de las devoluciones que la maestra hizo para facilitar la solución de la consigna.

Como se mencionó en la presentación de la situación en el capítulo anterior una de las herramientas de trabajo para llevar a cabo la institucionalización fue el uso de las diapositivas con los gráficos que tenían los estudiantes en la tarea, estas diapositivas tenían el propósito de fortalecer la idea de agrupación en sumas reiteradas a partir de la diferenciación de colores, los cuales serían útiles para reconocer los términos de la multiplicación como multiplicando y multiplicador e igualmente distinguir sus respectivas funciones.

De acuerdo con las expresiones obtenidas (4×3 y 3×4) en las respuestas de los estudiantes se hace la respectiva institucionalización del concepto matemático que en este caso es el acercamiento a la propiedad conmutativa de la multiplicación, partiendo de las funciones que toma cada número en determinada expresión, es decir que aunque se tenga **axb** o **bxa** , tanto **a** como **b** representan números y naturalezas diferentes en la misma operación.

A continuación se presenta una fotografía evidenciando el momento de la institucionalización del concepto.



Durante el desarrollo y análisis de esta situación con sus tres respectivas tareas, se puede concluir que las dificultades que tuvieron los estudiantes dependieron de la formulación de algunos enunciados, los cuales no eran lo suficientemente claros y la intención tomaba diferente sentido, al darse esto la maestra en varias ocasiones tuvo que hacer devoluciones o intervenciones para lograr contextualizar al estudiante, por lo tanto sería necesario realizar una reescritura de estos enunciados.

Un ejemplo de esto sería la reescritura de la tarea 3 que esta relacionada con la geometría, es decir en lugar de hablar de gráfico se utilizaría el termino figura, y al presentar la figura esta debe ir con su respectiva nomenclatura: asignarle una letra a cada vértice para denotarlo.

A pesar de esta dificultad se avanzó en la noción de multiplicación a partir de la adiciones repetidas reconociendo el número cardinal que facilita las agrupaciones y más aún se obtuvieron aportes reflexivos por parte de los estudiantes cuando en una de las devoluciones se les pidió calcular “ 5×0 ”, y sus respuestas fueron que el resultado era 0 porque el multiplicador indicaba que no se debía repetir el multiplicando.

Se deja claro que cada una de las tareas fue realizada de manera individual por parte de los estudiantes orientados constantemente por la maestra, y que en algunos momentos de la validación se hicieron aportes mutuos entre estudiantes que contribuían a la construcción de los conceptos a movilizar en esta situación.

5.2.4. ANÁLISIS SITUACIÓN 2. TAREA 1: ORDENANDO NÚMEROS

Como se mencionó en la presentación de las tareas de la secuencia didáctica, las tareas de la situación 2 se dejarán expuestas como una guía que permita orientar el trabajo reflexivo de las propiedades conmutativa y distributiva del producto en los estudiantes, sus consignas hacen referencia a las estrategias de cálculo mental y cálculo escrito apoyadas en estas propiedades con el objetivo de fortalecer el concepto de multiplicación y el aprendizaje de las tablas de multiplicar a partir de una situación matemática.

Esta tarea es el resultado del trabajo que se realizó en la situación de acción de cada una de las consignas de la situación anterior, su diseño da cuenta de la propiedad conmutativa con un nivel más amplio y complejo, dado que en la

tarea 3 de la situación anterior se realizó la institucionalización del concepto de propiedad conmutativa desde la diferenciación entre multiplicando y multiplicador.

El propósito precisa en que los estudiantes diferencien la función que toma cada factor en esta operación y que recurran a ella como estrategia de cálculo para realizar conteos, además se espera que para el desarrollo de esta tarea los estudiantes asuman y reconozcan que la multiplicación va más allá de adicionar repetidamente un número, que detrás de ella existen otros contenidos matemáticos que le dan soporte, tales como: sucesión, descomposición numérica, combinación, entre otros.

Lo que significa que al momento de resolver el algoritmo de la multiplicación en los números naturales no lo haga de forma memorística, sino que encuentren el sentido de la operación que en términos de la TSD sería “aprender un conocimiento matemático”.

5.2.5. ANÁLISIS SITUACIÓN 2. TAREA 2: COMBINANDO OPERACIONES

En esta tarea el estudiante se verá enfrentado a analizar y a entender que un número se puede descomponer aditivamente en números más pequeños, para que en un caso dado se pueda utilizar como una estrategia en el momento de realizar una multiplicación con números de mayor cantidad.

En la primera consigna resolverán dos multiplicaciones sencillas $6 \times 2 = 12$ y $6 \times 3 = 18$, que luego deberán sumar dichos resultados para obtener el resultado final así $12 + 18 = 30$, pero en la segunda consigna se les pregunta si esas operaciones que resolvieron con una expresión determinada se puede también escribir de otra forma, como sacando a parte un número común que se conoce como factor común y en un paréntesis quedaría la descomposición aditiva del número 5 en $(2+3)$, se piensa que ellos realizaran el cálculo necesario para

descubrir si efectivamente esas dos expresiones son equivalentes y poder responder el por qué.

En la tercera consigna ya se empieza a trabajar más el factor común, con una multiplicación un poco más compleja que la de las consignas anteriores, en este caso el número 5, puesto que es el número que se va a distribuir o a multiplicar con el 20 y con el 3. En una de las consignas ellos deberán responder cuáles son esas multiplicaciones (5×20 y 5×3), y si ellos tienen en cuenta las acciones que realizaron en las consignas anteriores se podría pensar que ellos logran escribir otra expresión que represente esas multiplicaciones teniendo en cuenta el factor común, siendo este el número a distribuir y de manera más resumida la expresión sea $(5 \times (20+3))$.

Y que finalmente al responder la última pregunta que da cuenta de la multiplicación que representa el ejercicio de la tabla logren escribir 5×23 , quedando así claro que el número que se descompuso fue el 23 en $20 + 3$ y que luego al distribuir el número 5 en dos multiplicaciones para $5 \times 20 = 100$ y por otro lado $5 \times 3 = 15$, logren decir de manera estratégica que el resultado es $100 + 15 = 115$ sin necesidad de realizar el algoritmo de manera escrita.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES GENERALES

6.1 CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Durante el desarrollo de este trabajo se evidenció el aporte que brindan los modelos reflexivos que proponen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Rico (1988) para la implementación de actividades que ayudan a fortalecer el saber matemático, en este caso el concepto de multiplicación en los números naturales, permitiendo que el estudiante sea quien explore el medio y realice conjeturas de forma individual con el objetivo de comparar y validar su comprensión y acercarse a la construcción del conocimiento matemático concreto.

Los modelos reflexivos fueron de gran apoyo en el diseño de las situaciones, dado que contribuyeron a identificar los diferentes contextos en los que se aplica la noción de multiplicación, para así mismo facilitar la comprensión y estrategias de operatividad.

Partiendo de la pregunta que sustenta este trabajo que va dirigida al fortalecimiento del concepto de multiplicación a través del uso de las propiedades del producto como herramienta de cálculo mental y escrito, se observó que los estudiantes asocian la adición repetida con la noción de multiplicación, relacionándolas como operaciones que tienen expresiones matemáticas equivalentes, es decir que una multiplicación resulta de abreviar una suma repetida o viceversa, esto se evidencia cuando validan sus conceptos e ideas previas en los momentos de interacción con el docente, que desde la TSD sería la devolución de la situación.

El fortalecimiento del concepto de multiplicación es importante en el proceso de la aprehensión de las tablas de multiplicar puesto que con este trabajo los niños lograron comprender que una tabla de multiplicar resulta del tratamiento de una sucesión numérica y aunque para ciertos casos se utilizan los mismos números, su condición y función son diferentes, dejando ver que se hizo un trabajo más reflexivo que memorístico.

Es necesario resaltar que para llegar a esta idea es importante partir del conteo y distinguir la característica de ese conteo haciendo referencia a la idea del número cardinal que agrupa y que más adelante toma el nombre de multiplicando, igualmente se identificó que los estudiantes lograron avanzar en la percepción y significación de los términos y funciones del “multiplicando” y “multiplicador” para institucionalizar e interiorizar el uso de la propiedad conmutativa, comprendiendo que aunque son los mismos números en una multiplicación su naturaleza es diferente según su valor o posición.

Dentro de las dificultades que se encontraron para el objetivo de este trabajo se resalta los enunciados de las consignas en algunas tareas no fueron claros para los estudiantes, conllevando de esta forma a que se presentara un obstáculo cuando se vieran en la necesidad de cambiar la estrategia de acuerdo a la actividad, lo que se evidencia en los porcentajes de las estadísticas de los análisis de la situación aplicada y haciéndonos reflexionar sobre una posible reescritura de dichas consignas.

En términos generales se puede decir que la secuencia contribuyó a que en la gran mayoría de los niños la construcción del concepto de multiplicación y sus propiedades, fuera satisfactorio puesto que algunos de los niños daban cuenta de esto al argumentar sus respuestas a la situación propuesta en las devoluciones y validaciones.

A nivel personal podemos decir que la realización de este trabajo nos ayudó a comprender que cada concepto que se moviliza en la escuela en las Matemáticas debe tener un manejo especial para su aprehensión, en este caso en particular el concepto de la multiplicación.

Además para nuestra formación como docentes y práctica profesional es relevante la realización de este tipo de trabajos donde se cuestionen dificultades de aprendizaje de temas en particular ya que durante el desarrollo del mismo nos dimos cuenta que se fueron generando estrategias para solucionar dificultades que se iban generando en el aula en nuestra cotidianidad.

Este tipo de investigaciones son las que fortalecen la labor del docente en el proceso educativo, puesto que permite que este proceso se lleve de una manera más consciente reconociendo la importancia de construir unas bases sólidas en los primeros años de la educación

Al finalizar la aplicación de la secuencia fue satisfactorio ver como los niños a medida que se iba avanzando en la aplicación de la misma, poco a poco iban desarrollando el concepto de multiplicación puesto que cuando realizábamos preguntas generalmente escuchábamos las respuestas esperadas.

Ahora bien, respecto a los objetivos específicos planteados para lograr el desarrollo de este trabajo, reafirmamos que fue muy enriquecedor estudiar, conocer y clasificar los modelos que proponen Rico y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, dado que tuvimos la posibilidad de organizar y reescribir las tareas de las situaciones bajo estos criterios, y que de igual manera nos permitieron visualizar una nueva forma de enseñar un concepto matemático a partir de nociones ya experimentadas por los estudiantes.

La experiencia de trabajar con estudiantes de segundo grado fue grata dado que a pesar de ser la primera vez que nos enfrentábamos a niños de esa edad y que teníamos un gran reto como el de iniciarlos en un concepto básico como lo es el de la multiplicación, nos queda la satisfacción de haber despertado un interés en las matemáticas y sembrado inquietudes por conocer más ampliamente este concepto.

BIBLIOGRAFIA

CASTRO M. Encarnación, RICO R. Luis, CASTRO M. Enrique. (1998). *Números y Operaciones: Fundamentos para una aritmética escolar. Colección Matemática: Cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis S. A. Madrid.

CHAVARRÍA. Jesennia (2006). *Teoría de las Situaciones Didácticas*. Escuela de Matemática .Universidad Nacional. Tomado de URL:
cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/viewFile/10/15

CHEVALLARD. Y. & GASCÓN. J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Orsori. Barcelona.

GARCÍA M. OLGA LUCÍA, PÉREZ E.JOHANA MARÍA (2011). *Secuencia Didáctica: Los contextos numéricos como forma de fortalecer el concepto de número en grado transición*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

GIRÓN Ezequiel, ROMERO G. Adriana. (1998). *Familiarización y búsqueda de estrategias en la resolución de problemas matemáticos multiplicativos estudio de casos*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

GÓMEZ A. Bernardo. (1993). *Numeración y cálculo. Colección Matemática, Cultura y Aprendizaje*. Editorial Síntesis S.A. Madrid.

GÓMEZ B. Alfonso. (2000). *El multiplicando y el multiplicador ¿es necesario distinguirlos o es indiferente?* Departamento de Didáctica de Matemática. Universidad de Valencia. España. Tomado de URL:
www.uv.es/gomezb/28Elmultiplicando.pdf

Grupo DECA. (1992). *Orientaciones para el diseño de elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación*. En: *Revista AULA*, No. 6.

HERNÁNDEZ P. Fuensanta, SORIANO A. Encarnación. (1997). *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria una experiencia didáctica*. Universidad de Murcia. España.

books.google.com.co/books?isbn=847684770X...

INSTITUTO COLOMBIANO PARA LA EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN (2010). Informe nacional SABER 5º y 9º, 2009. ICFES. Bogotá. Tomado de URL: www.icfes.gov.co/

LÓPEZ Gloria Mireya, REBELLÓN Sonia Margot. (2000). *Caracterización del proceso de enseñanza de la estructura multiplicativa en el grado de segundo de primaria en dos instituciones de la ciudad de Cali*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. MEN. Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. MEN. Bogotá.

MORA Ana Julia. (1995). *Matemáticas 4*. Editorial Santillana. Bogotá.

OSPINA P. Marlen Andrea, SALGADO P. Jennifer. (2011). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

PIÑEROS. Astrid. (2011). *Misión Matemática 2*. Grupo Editorial Educar. Bogotá.

RAMÍREZ M. Carlos O. (2006). *Aciertos Matemáticos 3*. Grupo Editorial Educar. Bogotá.

RECALDE. Luis, ORTIZ. Guillermo, HINESTROZA. Doris. (2006). *Matemáticas Básicas Semilleros de Matemáticas*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

ROJAS. Aldemar, LUCUMÍ Jair José, BORRERO. Lizeth, SANDOVAL. Noralba, MESA. Alejandro, HURTADO. Antonio José. (2007). *La resolución de problemas aritméticos de estructura multiplicativa. Comprensión y producción de enunciados*. Empleadas en las Instituciones Educativas: España, Gabriela Mistral, José María Córdoba y Luis Carlos Valencia. Jamundí.

STEWART. James, REDLIN, Lothar, WATSON, Salee. (2001). *Precálculo Tercera Edición*. Thomson Learning, S.A de C.V. México.

VALENCIA C. Jennifer Andrea, GÓMEZ L. Diana Marcela. (2010). *Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal con niños de tercero de primaria*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

VERGNAUD. G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. CNRS y Université René Descartes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Traducción de Juan D Godino.

ZEA Angélica, RIVEROS G. Olga, De CASTELLANOS Victoria. (2000). *Habilidades Matemáticas 3*. Editorial Libros & Libros S.A. Bogotá.

ANEXOS

A continuación se muestra la secuencia tal como fue presentada a los estudiantes.

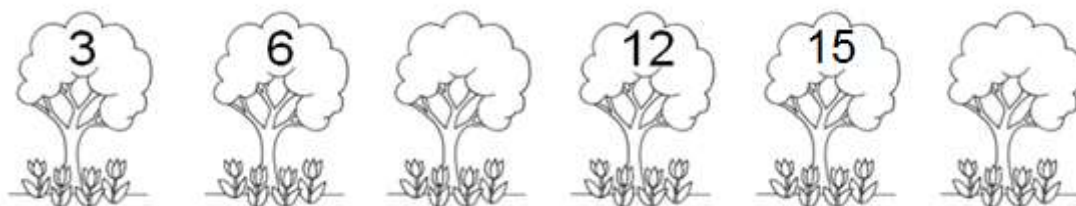
COLEGIO PANAMERICANO

NOMBRE: _____

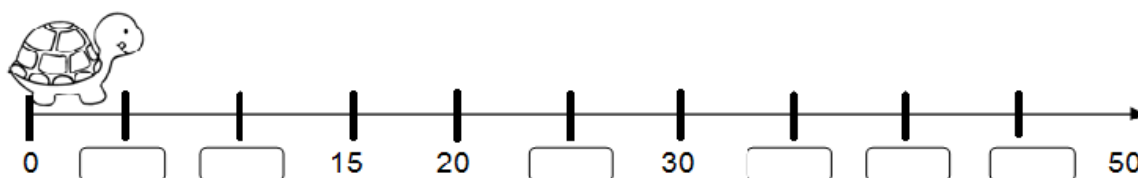
FECHA: _____

TAREA 1: Saltando encuentro el número.

4. Para que los micos coman en cada árbol se deja cierto número de bananos. Ayuda a encontrar ¿cuántos bananos hay en los árboles en blanco?



5. La tortuga del zoológico recorre un camino de 50 metros en el cual hace 10 paradas para descansar, observa y completa la gráfica, descubre cada cuántos metros para la tortuga.



La tortuga para cada metros.

6. Observa el dibujo y responde:



- e. Enumera todos los cuadrados vacíos y llenos hacia donde indica la flecha.
- f. Completa la secuencia gráfica del alimento.
- g. ¿Cuál es la secuencia numérica del alimento? _____
- h. ¿De acuerdo a la respuesta anterior que puedes concluir
? _____

COLEGIO PANAMERICANO

NOMBRE: _____

FECHA: _____

TAREA 2: Juguemos con la suma.

Teniendo en cuenta la lectura de la historia “De paseo por el zoológico de Cali” resuelve las siguientes preguntas:

1. En el zoológico de Cali hay 10 cebras.
 - a. ¿Cuántas patas tiene una cebra? _____
 - b. ¿Cuántas patas tienen 10 cebras juntas? _____
 - c. ¿Cómo calculaste el número de patas de todas las cebras? _____

2. En el zoológico hay guacamayas y ellas comen almendras.
 - a. Completa la siguiente tabla y contesta las preguntas:

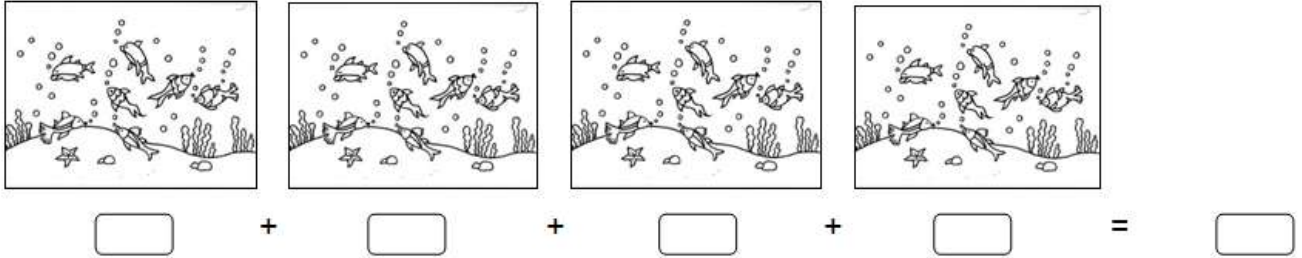
Número de Guacamayas	Número de almendras consumidas
1	6
	12
	18
4	
7	
	60

- b. ¿Cómo completaste la tabla? _____

 - c. ¿Cuántas guacamayas hay en el zoológico? _____
 - d. ¿Cuántas almendras se come una guacamaya? _____

e. ¿Cuántas almendras se comen cinco guacamayas? _____

3. Según la gráfica completa y contesta las preguntas:



a. ¿Cuántos peces hay en cada acuario? _____

b. ¿Cuántos acuarios hay? _____

c. ¿Cuántos peces hay en total? _____

d. De acuerdo a los datos que encontraste, ¿de qué otra forma se puede escribir la suma del ejercicio? _____

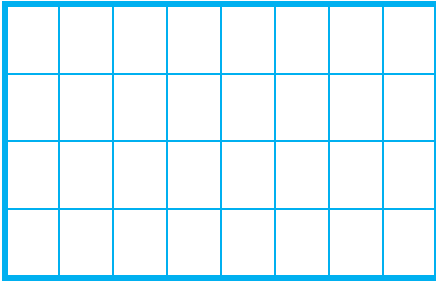
COLEGIO PANAMERICANO

NOMBRE: _____

FECHA: _____

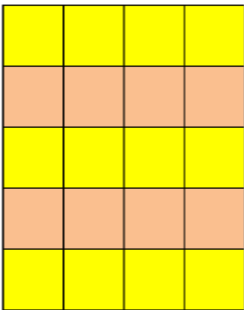
TAREA 3: La geometría de la mano con la aritmética.

1. Observa la siguiente gráfica y responde:



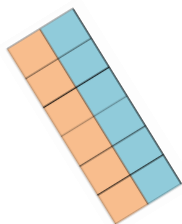
- ¿Cuántos cuadrados hay dentro del rectángulo? _____
- ¿Cómo lo calculaste? _____
- ¿Qué agrupaciones de cuadrados podrías hacer para hallar el total? _____
- Escribe la operación que representa el total de cuadrados: _____

2. Observa y responde las siguientes preguntas:



- ¿Cuántos cuadrados hay en toda la gráfica? _____
- ¿Qué suma representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- ¿Qué multiplicación representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta: _____

3. Observa y responde:



- a. ¿Cuántos cuadrados hay en toda la gráfica? _____
- b. ¿Qué suma representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- c. ¿Qué multiplicación representa el total de cuadrados en la gráfica? _____
- d. Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta: _____

4. Compara y responde:

Figura 1

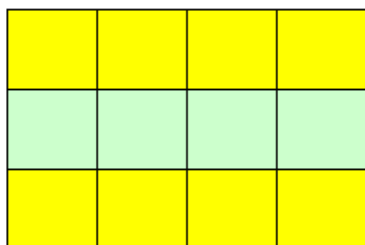
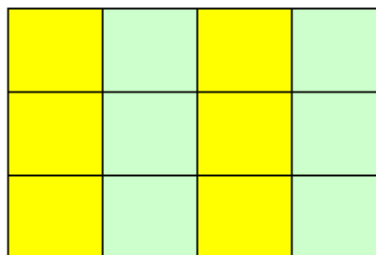


Figura 2



- a. ¿Qué multiplicación representa la gráfica de la figura 1? _____
- b. ¿Qué multiplicación representa la gráfica de la figura 2? _____
- c. ¿Cómo son los resultados de las dos figuras? _____
- d. Si observas las operaciones que hiciste, ¿Qué puedes decir? _____

- e. Los colores te ayudaron a encontrar el total de cuadrados. Explica tu respuesta: _____
