Usos de modelos Matemáticos para el estudio del estallido social en Colombia. Un estudio en una perspectiva socio-crítica

Jainer Andres Gomez Chavarro

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

2023

Usos de modelos Matemáticos para el estudio del estallido social en Colombia. Un estudio en una perspectiva socio-crítica

Jainer Andres Gomez Chavarro

201826327

Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa

Director Trabajo de Grado

Trabajo de grado presentado como requisito para poder optar al título de

Licenciado en Matemáticas

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

2023

Los indígenas tradujeron el artículo 12 de la Constitución Política de Colombia: "Nadie podrá llevar por encima de su corazón a nadie ni hacerle mal en su persona, aunque piense y diga diferente". Con este artículo que nos aprendamos, podremos salvar a este país.

Jaime Andrés Garzón Forero "Heidi".

Agradecimientos

Primeramente, le doy gracias a Dios, la vida y el Universo por permitirme terminar esta hermosa etapa que viví en mi formación profesional. Agradezco a la Universidad del Valle por abrirme las puertas de su campus y hacerme parte de ella. Le doy gracias a mi madre Piedad Lucero y a mi tía Adriana por brindarme la educación y apoyo económico necesario para culminar esta etapa profesional, a mi padrastro Guillermo por su apoyo económico y emocional durante todo este tiempo; a mi hermano Juan José por su apoyo emocional y a mi padre Jainer Germán por su apoyo económico.

Infinitas gracias a todos los profesores que hicieron parte de este bello proceso, gracias por sus consejos, conocimientos y sabiduría, gracias al profesor Gilbert Andrés por motivarme en el mundo de la investigación, gracias al profesor Diego Garzón por sus consejos académicos brindados, al profesor Jhony A. Villa-Ochoa mi tutor por creer en mis capacidades para realizar este proyecto.

Finalmente, le doy gracias a mi pareja Stephanie por su apoyo incondicional durante estos cinco años, a mi compañero Camilo por su apoyo moral, a Carlos, Juan Manuel, Eddi, Juan Pablo y a todos los compañeros de física que hicieron parte de este proceso. A mis compañeros de carrera por permitirme culminar esta etapa de la mano de ellos; finalmente a los compañeros que ya no están pero que su memoria quedó vigente en los pasillos de la Universidad. Gracias a todos

Resumen

Este trabajo analiza el uso de los modelos matemáticos en estudiantes de estadística y de licenciatura en matemáticas para generar discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas, cuando se estudia un modelo logístico obtenido por medio de ecuaciones diferenciales para describe el estallido social en Colombia. A través de la metodología cualitativa y el estudio de casos, se llevó a cabo un análisis de entrevistas a cuatro participantes, compuestos por dos estudiantes de licenciatura en matemáticas y dos estudiantes de estadística. Estos análisis involucraron la codificación de datos para identificar categorías relacionadas con aspectos de la modelación desde una perspectiva sociocrítica. Los participantes estudiaron un modelo logístico que describe algunos factores presentes en el estallido social ocurrido durante 2021 en Colombia. En particular, los resultados dan cuenta de diferentes énfasis en las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas, las cuales están en correspondencia con el uso de las matemáticas en acción adquiridas durante la formación universitaria; para cada caso, se describen las características, usos, interpretaciones y análisis de los modelos matemáticos.

Palabras Claves: Modelación; Educación universitaria; Función logística; Programación; Matemáticas; Discusiones; Estallido Social.

Abstract

This paper analyzes the use of mathematical models in statistics and mathematics undergraduate students to generate mathematical, technological and reflective discussions, when studying a logistic model obtained through differential equations to describe the social outbreak in Colombia. Through the qualitative methodology and the case study, an analysis of interviews was carried out with four participants, made up of two undergraduate students in mathematics and two students in statistics. These analyzes involved data coding to identify categories related to aspects of modeling from a sociocritical perspective. The participants studied a logistic model that describes some factors present in the social outbreak that occurred during 2021 in Colombia. In particular, the results show different emphases in mathematical, technological and reflective discussions, which are in correspondence with the use of mathematics in action acquired during university education; for each case, the characteristics, uses, interpretations and analysis of the mathematical models are described.

Keywords: Modeling; University education; Logistics function; Programming; Math; Discussions; Social outbreak.

Tabla de Contenido

Pág.

1. Planteamiento y justificación del problema 17
1.1 Planteamiento del Problema 17
1.2 Justificación 23
1.2.1 Investigaciones recientes sobre el uso de la modelación matemática desde una perspectiva socio-crítica 27
1.2.2 Delimitación del problema 30
1.3 Objetivos 36
1.3.1 Objetivo General 36
1.3.2 Objetivos Específicos 36

2. Marco teórico 37
2.1 La Educación Matemática Crítica - EMC 37
2.2 Comprensiones de la EMC 37
2.2.1 Ideas principales de la Educación Matemática Crítica 41
2.2.2 Matemáticas en acción 44
2.3 Comprensiones teóricas de la Modelación Matemática 47
2.4 Los Modelos y la modelación en una perspectiva Socio-Crítica 53
2.5 Discusiones Matemáticas, Tecnológicas y Reflexivas en la modelación matemática 57
2.6 Caracterización de la actividad de modelación matemática desde una perspectiva crítica. 61

3. Metodología 63
3.1 Enfoque Metodológico: investigación Cualitativa 63
3.2 El contexto y los participantes: 64
3.3 El diseño 67
3.4 Recolección de datos 79
3.5 El análisis de la información 80

4. Resultados y conclusiones 83
4.1 Análisis de los resultados obtenidos 83

4.2 Discusión 105
4.3 Conclusiones 124
5. Referencias 127
6. Anexos 137

Índice de tablas

Pág.

Tabla 1 *Ambientes de aprendizaje* 43

Tabla 2 *Codificación de las unidades del significado de dos estudiantes* 95

Tabla 3 *Codificación de componentes priorizados de cada estudiante* 104

Tabla 4 *Codificación de las categorías de dos estudiantes* 115

Índice de figuras

Pág.

Figura 1 *Estructura curricular Licenciatura en Matemáticas* 32

Figura 2 *Curso de ecuaciones diferenciales para los programas 3492….* 33

Figura 3 *Malla curricular del pregrado en Estadística* 34

Figura 4 *Curso modelo lineal general I para el programa 3752* 35

Figura 5 *Ciclo de Modelización* 49

Figura 6 *Tipo de discusiones* 60

Figura 7 *Gráfico de función logarítmica, exponencial y raíz cuadrada* 68

Figura 8 *Gráfico de función logística* 69

Figura 9 *Gráfico de 60 datos linealizados del paro nacional en Colombia 2021* 70

Figura 10 *Grafica de las funciones logísticas establecidas* 76

Figura 11 *Consola del programa creado en Python* 77

Figura 12 *Grafica creada por el de programa de Python* 77

Figura 13 *Interpretación por intervalos de la función logística….* 85

Figura 14 *Consola del programa Rstudio usada por Cristina* 92

Figura 15 *Derivadas de la función logística* 98

Figura 16 *Representación de las correlaciones de violencias ….* 101

Introducción

En este documento se plantean los resultados de una investigación para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Valle. La investigación se propone estudiar las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas mediante el uso de un modelo logístico, el cual se obtuvo por medio de ecuaciones diferenciales para tratar de modelar algunos aspectos del estallido social en Colombia. Lo anterior se encuentra enmarcado en la teoría de la Educación Matemática Crítica y el uso de modelos matemáticos desde una perspectiva socio crítica (Skovsmose,2023; Paola Valero, 2015; Silva y Kato, 2012) junto con otros autores relevantes que se encuentran en el interior del documento. Con este trabajo, se pretende caracterizar las discusiones generadas mediante las componentes priorizadas de las matemáticas en acción en estudiantes de los programas Estadística y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle.

Para el desarrollo de la investigación resulto necesario hacer uso de la modelación matemática, la cual puede concebirse como práctica científica y profesional o como un dominio de investigación en Educación Matemática (Villa-Ochoa, Sánchez-Cardona, y Parra-Zapata, 2022). Como práctica científica y profesional se preocupa por estudiar, comprender, controlar e informar la toma de decisiones en relación con situaciones o fenómenos de las ciencias y la sociedad. Como dominio de la Educación Matemática se ocupa de investigar factores asociados al uso y construcción de modelos, aplicaciones,

relaciones interdisciplinares, la enseñanza, el aprendizaje de las matemáticas, el desarrollo de competencias de modelación, entre otros (Villa-Ochoa et al., 2022; Cevikbas, 2022; Carmona-Mesa, Cardona Zapata y Castrillón-Yepes, 2020).

El estudio de los modelos y la modelación es una recomendación en la mayoría de los currículos alrededor del mundo; sin embargo, no existe una comprensión homogénea de la modelación ni de sus alcances, tareas y formas de integración en la cotidianidad escolar (Kaiser, 2017). La investigación educativa sobre la producción y uso de modelos abarca diferentes niveles de escolaridad; por ejemplo, se ha utilizado para promover la enseñanza de las matemáticas articulada a los significados propios de la formación en ingeniería (Sepúlveda et al., 2020), para promover discusiones y la participación en educación primaria (Parra-Zapata et al., 2016; Ocampo-Arenas y Parra-Zapata, 2022) y para generar reflexiones sobre sus posibilidades de uso crítico en el aula y en la sociedad (Christiansen, 2001; 1999). Aunque existen comunidades para quienes el significado de los modelos se inscribe en un sistema consistente de ecuaciones (Borromeo,2021), también es cierto que existen otros significados que los vinculan con las representaciones mentales (Vasco, 2006) y a sistemas conformados entre usuarios, representaciones, objetos y significados (Villa-Ochoa, 2016).

Con respecto al uso crítico de los modelos matemáticos, Christiansen (1999) señala que la modelación es una actividad necesaria en el aula para descubrir maneras en el que el uso de las matemáticas puede influir en la sociedad; de modo que sea posible observar de manera explícita, la *actividad reflexiva;* es decir, una actividad que puede verse como la

base inicial de aquellas reflexiones que permitan formar opiniones y, por tanto, participar activamente en una democracia. En la misma dirección, Christiansen (2001) apunta que al someter a los estudiantes a participaciones que promuevan las discusiones generales sobre los modelos y su evaluación es posible desarrollar actitudes críticas frente a estos; dejando en manifiesto que involucrarse en el modelado, no es el único medio para promover la competencia crítica.

La competencia crítica se considera importante desarrollarla con respecto a las matemáticas, ya que significa estar preparado para cuestionar diversas formas del conocimiento matemático en el aula, asumiendo y cuestionando las formas de las matemáticas en acción. Es decir, ser crítico a través de las matemáticas significa estar preparado para recurrir a los recursos matemáticos cuando se cuestionan casos de injusticia social y ambiental (Skovsmose, 2023).

Por tal razón, la competencia crítica, junto con las discusiones que se generar a partir del uso de modelos, deben ser analizadas mediante el uso de las matemáticas. Esto debido a que una de las principales preocupaciones de la Educación Matemática Crítica pretende abordar las matemáticas en sus diferentes formas de aplicaciones y prácticas; donde las acciones basadas en las matemáticas pueden tener todo tipo de cualidades, siendo arriesgadas, confiables, peligrosas, sospechosas, engañosas, costosas, brutales, lucrativas, entre otras (Skovsmose, 2020a).

En esta misma perspectiva, Suela (2023) destaca la importancia de la competencia crítica, así como la articulación y relevancia de las matemáticas en acción dentro del ámbito de la Educación Matemática Crítica. Las matemáticas en acción, cuenta con cuatro dimensiones que permiten diferentes formas de percibir las funciones de las matemáticas en los diferentes contextos; siendo estas: *la descripción*, en ésta se usan los modelos matemáticos para describir realidades; *inscripción*, se basa en la creencia de que las matemáticas pueden proporcionar herramientas para priorizar aspectos del mundo exterior; *prescribir*, esta dimensión permite determinar acciones con el fin de usar las matemáticas como una herramienta para calcular el quehacer ; y, la *suscripción* que es aquella que acepta o legitimista las acciones de las matemáticas para la toma de decisiones (Suela, 2023). Lo anterior es definido por Jablonka (2020) como el pensamiento crítico, quien menciona que la educación matemática lo influye como un objetivo explícito en la educación matemática; siendo este pensamiento una condición importante para la resolución de problemas matemáticos. Este pensamiento crítico implica un compromiso activo con asuntos de gran relevancia en los ámbitos ambientales, políticos y sociales, utilizando los modelos matemáticos y estadísticas como herramientas para abordarlos de manera efectiva.

Entre las diferentes perspectivas de la modelación, se destaca la socio-crítica, la cual aborda aspectos en los modelos matemáticos de la sociedad. En esta perspectiva los estudiantes hacen uso de ideas matemáticas, pero en la mayoría de los casos manifiestan argumentaciones que pretenden explicar situaciones sociales por medio de la modelación;

en otras palabras, esta perspectiva pretende reconocer las diferentes maneras en que las matemáticas influyen en la sociedad (Barbosa, 2006).

En la perspectiva socio-crítica se reconoce que los modelos matemáticos no son descripciones neutrales sobre una realidad independiente y que la modelación tiene dispositivos que suelen ocultarse al público en general (Barbosa, 2006). Entre algunas actividades de la modelación es importante resaltar la argumentación que los estudiantes o individuos generar al usar modelos matemáticos, es decir, criticar un modelo es uno de los aspectos fundamentales que tiene lugar en el proceso del modelado de un fenómeno; su objetivo principal es contribuir a la generación de ciudadanos críticos y políticamente comprometidos con la sociedad (Barbosa, 2006).

En la actividad de la modelación, Barbosa (2006) destaca tres tipos de discusiones: *reflexivas*, *matemáticas* y *tecnológicas.* Además, de estas discusiones también resulta importante un tipo de actividad donde las matemáticas y las herramientas tecnológicas sean necesarias; es decir, actividades de tipo tecnológico y matemático. Estas actividades son consideradas para Christiansen (1999) fundamentales para distinguir entre la crítica del modelo y la crítica del uso del modelo, dejando así en evidencia la credibilidad del modelo o la credibilidad de las decisiones políticas.

Además de este tipo de discusiones, la Educación Matemática Crítica no solo se preocupa por la participación de los sujetos en la democracia; si no también, en la crítica de

situaciones de injusticia social. Es por esto que el ser crítico, significa abordar una situación crítica que representa una crisis y necesita ser abordada críticamente (Skovsmose, 2023).

En ese sentido, la investigación sobre discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas sobre los modelos sigue siendo pertinente para conocer la manera en que los modelos son producidos, concebidos o usados por los sujetos. En esta misma línea, la modelación desde la perspectiva socio crítica, está relacionada con objetivos pedagógicos que buscan una comprensión crítica del mundo basado en enfoque sociocríticos (Araujo, 2009).

Los modelos matemáticos actualmente rigen procesos en el mundo y desempeñan un papel importante en los funcionamientos en la sociedad. Por esta razón, es necesario que la población desarrolle una competencia critica para analizar críticamente tanto los modelos matemáticos en sí, como la manera en que se utilizan para describir y comunicar situaciones, así como en la toma de decisiones en la sociedad; es decir, esta competencia se ha convertido en una necesidad para el desarrollo y mantenimiento de sociedades basadas en la igualdad y la democracia (Blomhøj, 2009).

En este sentido, al usar las perspectivas mencionadas como base, se realizó la investigación sobre el uso de modelos matemáticos para describir la problemática social del estallido social en Colombia. El reporte de esta investigación se organizó en cuatro capítulos que se encuentran diferenciados por secciones. Cada capítulo abarca aspectos específicos sobre la modelación matemática en la educación matemática, proporcionando información

relevante y detalla sobre el uso de la modelación matemática desde una perspectiva socio crítica.

EL primer capítulo denominado “PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACION DEL PROBLEMA”, hace una presentación sobre los intereses que se tuvieron para seleccionar la problemática a estudiar, además de esto, se presentan los objetivos generales y específicos del trabajo junto con la respectiva justificación del por qué se considera importante investigar el uso de modelos matemáticos para el estudio del estallido social en Colombia.

El segundo Capítulo denominado “MARCO TEÓRICO” hace una descripción sobre la perspectiva teórica de la Educación Matemática Crítica (EMC) y el uso de modelos matemáticos en la perspectiva socio-crítica; además de esto, se exponen posturas de diversos autores que han estudiado el uso de los modelos para la comprensión de problemas sociales por medio de las matemáticas en acción.

El tercer capítulo de esta investigación “METODOLOGÍA” se propone explicar el tipo de investigación llevada a cabo, así como la forma en la que se recolectaron los datos. Además de lo anterior, este capítulo proporciona una reseña de cada entrevistado y detalla la manera la que se construyeron las actividades propuestas a los mismos.

El último capítulo presentado como “RESULTADOS Y CONCLUSIONES” proporciona un análisis detallado de los resultados con base en el marco teórico establecido; además, muestra los resultados individuales de cada participante, los cuales permitieron generar discusiones para obtener finalmente las conclusiones relevantes del trabajo.

1. Planteamiento y justificación del problema

En este capítulo se presenta la problemática investigada junto con su respectiva justificación. La justificación de la temática estudiada está sustentada en investigaciones relacionadas con la modelación desde un enfoque socio-crítico.

1.1 Planteamiento del Problema

La modelación matemática, al ser considerada como una actividad científica en matemáticas, involucra diferentes procesos tales como: estructuración, matematización, solución, interpretación y validación; los cuales se encuentran asociados al mundo. Esta actividad científica se refiere al proceso de representar un fenómeno del mundo mediante un conjunto de ecuaciones o modelos matemáticos (Hein,2004). En este sentido, esta actividad es desarrollada a través de la matematización, la cual es comprendida como la acción de convertir un problema o concepto del mundo en un problema matemático o en un conjunto de conceptos matemáticos; es decir, se recurre al conocimiento extra matemático para la construcción de un modelo matemático, usando diferentes representaciones como el uso dibujos o fórmulas, pero todas las afirmaciones se formulan utilizando un contexto matemático.(Borromeo Ferri,2021).

En esta perspectiva se puede concebir la modelación como una forma particular de resolución de problemas asociados al mundo real con el fin de explicar alguna situación, fenómeno o para anticiparse a comportamientos modelados bajo ciertas variables con condiciones establecidas previamente (Villa-Ochoa et al., 2022). En consecuencia, se

considera importante promover discusiones con un enfoque crítico en cursos donde se enseña el uso y aplicaciones de los modelos matemáticos, ya que se ha indagado el enfoque que tienen los modelos matemáticos en diferentes currículos de carreras profesionales, evidenciando que la mayoría de ellos se centran principalmente en aspectos tecnológicos y matemáticos (Sepúlveda,2020).

En este sentido, la modelación matemática se utiliza como una herramienta para que los estudiantes puedan integrar diversas disciplinas aplicado el pensamiento crítico en la toma de decisiones frente a los modelos matemáticos que puedan surgir al modelar diferentes fenómenos. El pensamiento crítico en la modelación se aplica mediante un análisis de una situación basada en un modelo matemático. En este enfoque, no se examina únicamente la situación en sí, sino que se exploran las diversas representaciones matemáticas y las implicaciones de la modelación de la situación que se está estudiando (Skovsmose, 2023).

En la modelación matemática los modelos prescriptivos se encargan de especificar o diseñar estructuras que estén destinadas a habitar algún dominio extra matemático con ciertas propiedades requeridas o deseadas (Niss, 2015). Para Niss (2015), el objetivo final de estos modelos es encontrar los caminos para tomar decisiones y promover acciones que sean un resultado de, entre otros aspectos, consideraciones matemáticas; dónde se considera necesario involucrar a los estudiantes a analizar los supuestos, requisitos previos y deseos ocultos que subyacen a una problemática a ser modelada. Es decir, se busca cambiar el

mundo en lugar de solo comprenderlo; en este sentido, los modelos prescriptivos pueden ser utilizados para contribuir a la formación de ciudadanos críticos y fomentar el trabajo en equipo.

Se considera que al enseñar la modelación matemática de una manera tradicional se limitan múltiples objetivos de estas, como lo es el trabajo en equipo, la interpretación de valores obtenidos, la justificación y validación de modelos y el desarrollo del pensamiento crítico en diferentes contextos escolares (Rodríguez, 2013). Así mismo, se pueden generar limitaciones en las diferentes áreas multidisciplinares del conocimiento en las que se usa la modelación como las ciencias naturales, la física, la química entre otras. La modelación matemática no se limita únicamente a la resolución de problemas del mundo real, sino que también tiene como objetivo promover la aplicación y la comprensión de conceptos matemáticos en diversos contextos y áreas del conocimiento. De esta manera, contribuye a la formación de ciudadanos con habilidades críticas en su pensamiento (Villa-Ochoa et al., 2022).

Para la Educación Matemática Crítica es importante abordar el estudio de situaciones críticas, pues permite no solo entender la participación de los sujetos en la democracia y el papel de las matemáticas en la sociedad, si no, también el estudio de tales situaciones para la toma de decisiones. En consonancia con ello, estudiar una situación como las revoluciones, guerras o estadillos sociales es una oportunidad para estudiar los tipos de violencias que se presenten, las desapariciones reportadas, la violencia de género, el abuso

de autoridad y entre otro tipo de conflictos que se puedan presentar. En coherencia con ello, en esta investigación se propuso estudiar el estallido social en Colombia en el año 2021 a partir de las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas. Por medio de estas discusiones se dio sentido a cómo los estudiantes de programas de licenciatura en Matemáticas y profesionales en estadística de la Universidad del Valle, comprendían el uso de modelos matemáticos para generar discusiones, con base en los conocimientos adquiridos sobre modelación en su formación profesional.

El interés de la investigación surge debido a las repercusiones que esta problemática social tuvo a nivel nacional, pues los estudiantes, campesinos, hijos y personas de la clase obrera fueron vilmente asesinados y ultrajados a manos de las fuerzas del Estado (Temblores,2021); además, el estudio se motivó en aspectos relacionados con la democracia y la participación ciudadana, los cuales son elementos clave [1]dentro de la teoría de la Educación Matemática Crítica de Ole Skovsmose (2023).

Las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas se generaron mediante el uso de un modelo de ecuaciones diferenciales que describe el estallido social en Colombia. El modelo fue diseñado por medio de valores iniciales utilizados en un modelo logístico, el

[1]En la EMC se encuentran diferentes elementos claves como: el contexto social y político, la crítica social, el desarrollo del pensamiento crítico, la modelación matemática, el diálogo y la colaboración, la ética y los valores, la contextualización y la transformación social Skovsmose (2023). La razón por la cual no se utilizaron todos estos elementos en la investigación se debe a que el enfoque del estudio se centró exclusivamente en la democracia y la participación ciudadana como objeto de estudio.

cual se determinó como el más adecuado después de realizar comparaciones con diferentes graficas soluciones de otras modelos de ecuaciones diferenciales como el modelo SIR, modelo de presa depredador, entre otros. Además de esto, se usaron diferentes lenguajes de programación, que permitieron la corroboración de los datos obtenidos haciendo uso del modelo, contra los datos reportados del estallido social.

A través de este estudio se espera comprender la manera en la que los estudiantes usaron el modelo logístico que describe el estallido social en Colombia para generar diferentes tipos de discusiones, analizando las componentes priorizadas de las matemáticas en acción tales como: *imaginación tecnológica, razonamiento hipotético, legitimación o justificación, la realización, la eliminación de responsabilidad*.

Al estudiar esta situación crítica, usando la modelación matemática como una actividad que permita formar ciudadanos críticos por medio de modelos matemáticos, se promueve la competencia del *conocer reflexivo*. Esta competencia hace referencia a las capacidades que tienen los individuos para tomar una posición justificada en discusiones sobre asuntos tecnológicos (Skovsmose, 1999). Desarrollar esto en la Educación Matemática Crítica (EMC) permite desarrollar tres competencias que están presentes en el *conocer reflexivo,* siendo estas:

i) El conocimiento matemático, se basa en las habilidades matemáticas que puede tener un individuo para expresar pensamientos matemáticos, teoremas,

demostraciones y ejecución de algoritmos que permitan realizar cálculos para descubrir nuevas matemáticas;

ii) Conocimiento tecnológico, basado en las habilidades para aplicar las matemáticas junto con los métodos formales para fines tecnológico;

iii) Conocimiento reflexivo, se encarga de evaluar y generar discusiones sobre lo que se logra identificar como fines tecnológicos, junto con las consecuencias éticas y sociales de una determinada herramienta seleccionada (Skovsmose, 1999).

En consecuencia, a partir de la EMC, los procesos tecnológicos pueden comprenderse como la aplicación de herramientas matemáticas y competencias necesarias para desarrollar modelos que faciliten la comprensión y el progreso del mundo; en tal sentido, estos procesos permiten interpretar la tecnología como una condición básica para una organización social. En otras palabras, los procesos tecnológicos están asociados con las formas de construcción y uso de las matemáticas (Méndez y Aguilar, 2022). Por tanto, las discusiones tecnológicas tienen en cuenta lo relacionado con la calidad del modelo, sus alcances, supuestos y procedimientos.

Las discusiones reflexivas en la modelación están dirigidas hacia un interés crítico, donde los estudiantes deben establecer límites basados en argumentos (matemáticos y tecnológicos) que les permitan analizar modelos matemáticos para discutir su uso y aplicabilidad en los diferentes contextos y situaciones; es decir, los límites establecidos en

un respectivo modelo resultaran cruciales para el acto crítico del mismo (Skovsmose y Greer, 2012). En esta misma línea, este tipo de discusiones permiten que las personas adquieran un tipo de empoderamiento matemático-reflexivo, pues este implica la capacidad de cuestionar y evaluar de manera crítica la información numérica y estadística que se presenta en la sociedad y en la toma de decisiones políticas y económicas (País, 2012). Lo anterior es reflejado en los entornos sociales al momento de generar discusiones sobre el uso de las matemáticas (modelos matemáticos) para la toma decisiones. Por esta razón, esta clase de empoderamiento resulta ser un aporte valioso para el mundo de las matemáticas (País, 2012).

Los elementos mencionados en el párrafo anterior destacan la importancia sobre el uso de la modelación de una manera socio-crítica para la formación de seres críticos en una sociedad. Esta formación permite generar discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas en la modelación matemática para la toma de decisiones en la sociedad; por tanto, en este documento, presentamos un avance de un estudio que ofreció una respuesta a la pregunta: *¿ Cuáles son el tipo de discusiones generadas al usar un modelo matemático que describe factores del estallido social en Colombia ?*

1.2 Justificación

El pensamiento crítico y el debate en el aula ante cualquier tipo de situación a modelar se considera fundamental para la toma de decisiones, pero, sobre todo, para los fenómenos sociales relacionadas con decisiones de regiones, ciudades o naciones (Sánchez

Useche, 2021). Para Sánchez Useche (2021) aunque se ha investigado sobre la modelación matemática desde enfoques críticos en contextos escolares, se ha observado que los temas más frecuentes en el aula son: sobrepoblación mundial, embarazos a temprana edad, aumento de trasporte público, etc; evidenciando la falta de información en otros contextos donde se analicen otro tipo de reflexiones diferentes a los discusiones matemáticas y tecnológicas.

En sentido, la modelación matemática en diversas partes del mundo ha sido usada para modelar diferentes problemáticas de la vida cotidiana. Un caso particular de esto es un estudio realizado en la población de Tamale donde se pretendía modelar la violencia intrafamiliar hacia niños y mujeres usando ecuaciones diferenciales (Haadi, 2014). Los resultados muestran que después de analizar diferentes modelos de ecuaciones diferenciales, el modelo de crecimiento logístico fue el más adecuado para modelar la problemática social, pues logro predecir cifras precisas de víctimas de violencia doméstica. Otro caso, fue un estudio donde se buscaba realizar una evaluación matemática de un modelo dinámico que modela la violencia sexual hacia las mujeres en Bangladesh por medio de ecuaciones diferenciales (Islam, 2020); los resultados muestran que la reducción de la violencia está relacionada con la disminución tanto de la población violenta como de las víctimas. Es decir, cuando la tasa de transmisión entre la población potencialmente violenta disminuye y la tasa de recuperación de la población violenta aumenta, se produce una reducción en las poblaciones violentas. Además, cuando la tasa de recuperación de las víctimas aumenta, se

deduce que habrá una disminución en el número de víctimas. De esta manera los investigadores concluyen que, mediante experimentos numéricos, es posible erradicar significativamente la violencia sexual de la sociedad, si se toman medidas adecuadas para cambiar las actitudes de las personas violentas. Estas medidas pueden incluir intervenciones educativas, programas de rehabilitación y concientización, entre otras estrategias.

En ambas investigaciones se evidencia la fortaleza de la creación y validación de los modelos, es decir, las discusiones matemáticas y tecnológicas, ya que en estos estudios se pretendían encontrar modelos que permitieran tomar acciones en la comunidad afectada para evitar la propagación de este fenómeno crítico, como lo es la violencia. En consecuencia, se percibe que se deja a un lado las discusiones reflexivas de los modelos usados en estas problemáticas, pues las discusiones que se pudieran generar mediante estos modelos, no eran parte de los objetivos principales de la investigación que pretendían encontrar modelos determinísticos.

Un caso local, realizado en Colombia fue la investigación titulada “Reflexión desde la Entropía: un análisis de la realidad según la violencia en la sociedad”, que tiene como objetivo brindar discusiones reflexivas iniciales sobre la modelización de la violencia en Colombia por medio de ecuaciones diferenciales (Montoya Carvajal, 2022). En este trabajo se evidencia el uso de discusiones matemáticas y tecnológicas. Las discusiones reflexivas son evidenciadas de una manera inicial, es decir, no se profundiza mucho en estas como en las otras discusiones. Esto debido a que la investigación centra su mirada en aspectos

matemáticos que están relacionados con la elaboración de un modelo determinístico, sin embargo, la investigación también manifiesta aspectos reflexivos ya que el modelo de violencia es una propuesta que facilita el diálogo entre la realidad y el fenómeno, permitiendo una interpretación fisicomatemática bajo un contexto filosófico social.

Otro argumento que justifica la necesidad de este estudio tiene que ver con los objetivos de la enseñanza de las matemáticas. De acuerdo con Alsina (2007), la enseñanza de las matemáticas debe proponer que los estudiantes sean ciudadanos críticos, que sean capaces de transferir conocimientos matemáticos en diferentes contextos diferentes a la escuela. En consecuencia , se considera importante que los estudiantes puedan tomar una postura crítica ante situaciones vulnerables como lo fue el estallido social en Colombia durante 2021; esto con el objetivo de hacer un frente a la injusticia social por medio de la crítica social y de las diferentes interpretaciones que se generen al usar la modelación matemática, permitiendo así que los estudiantes puedan convertirse en seres autocríticos ante problemáticas sociales que se presenten en el país.

El objetivo mencionado se puede desarrollar en un aula por medio de la modelación matemática, la cual es comprendida como una práctica que articula dos ententes; uno llamado modelo que sirve para actuar en otro llamado lo modelado (Villa-Ochoa, 2016). En esta misma línea la modelación tiene por objetivos capturar, representar, comprender o analizar fenómenos, situaciones o dominios extra-matemáticos existentes para responder a preguntas prácticas, intelectuales o científicas, y así resolver problemas relacionados algún

dominio en específico (Niss, 2015). Además de esto, la modelación matemática permite desarrollar ambientes de aprendizaje colaborativos, donde se unan fuerzas, intereses, talentos y competencias que permita las interacciones para dar soluciones a discusiones sociales complejas (Zaldívar Rojas, 2017).

En ocasiones, la enseñanza de la modelación matemática resulta escasa en diversos currículos académicos (Zaldívar Rojas, 2017). En consecuencia, se plantea la necesidad de realizar nuevos estudios con un enfoque cuantitativo que se centre en el uso de la modelación. Esto permitirá que los futuros docentes obtengan resultados más generales sobre los efectos de enseñar y aprender modelización matemática, teniendo en cuenta no solo los aspectos cognitivos, sino también los aspectos afectivos involucrados (Schukajlow, Kaiser y Stillman, 2018).

1.2.1 Investigaciones recientes sobre el uso de la modelación matemática desde una perspectiva socio-crítica

Algunas de las investigaciones reportadas en los últimos 6 años sobre el uso de la modelación matemática desde una perspectiva socio crítica en el aula reportan:

En la investigación de Parra-Zapata y Villa-Ochoa (2016) realizada con 27 alumnos de grado quinto en un colegio de Medellín; tiene por objetivo promover la formación ciudadana de los estudiantes haciendo uso de modelos matemáticos, además deja en evidencia que los beneficios de la modelación no solo se limitan a enseñar matemáticas. Por

esta razón, los autores sugieren usar modelos con enfoques sociocríticos para percibir la modelación desde la perspectiva crítica. Esta investigación nuevamente ratifica la importancia de los modelos desde una perspectiva sociocrítica, ya que permite trasladar debates al aula, brindándole a los estudiantes herramientas para crear conciencia sobre que el papel que estos tienen en la sociedad; cambiando así la perspectiva en la que perciben el mundo.

Zaldívar Rojas (2017) en su investigación titulada “La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes”, busca analizar la actividad reflexiva de los docentes en formación por medio del uso de modelos matemáticos; manifestando que el propósito de usar un modelo matemático consiste en que los docentes en formación “sean quienes propongan soluciones y desarrollen un modelo matemático a fin de dar respuesta a este” (p. 95).

Por otro lado, Camelo (2018) realiza una investigación sobre el uso de modelos alrededor de las condiciones del uso del STIP en Bogotá, tuvo por objetivo promover el pensamiento crítico en estudiantes de Licenciatura en Pedagogía Infantil de la Universidad Francisco José de Caldas por medio de un ambiente de modelación. Esta investigación dejó de manifiesto que los estudiantes separaron los procesos sociales de los matemáticos, brindando conclusiones como estudiantes y como seres autocríticos usando la perspectiva crítica y las matemáticas.

El estudio realizado por Mancera (2020) con estudiantes de grado décimo en una institución pública de Bogotá, promueve discusiones reflexivas por medio de la modelación matemática en estudiantes que viven en contextos de vulnerabilidad. Este trabajo tiene un enfoque sociocrítico que permitió a los estudiantes identificar diferentes factores de vulnerabilidad que ellos tiene en la sociedad como lo son la pobreza, violencia y la exclusión. Lo anterior permitió que los estudiantes tuvieran un visión más amplia y real de la realidad social. En esta investigación, se logra percibir cómo la competencia crítica es fomentada y desarrollada por medio de modelos matemáticos enfocados en la perspectiva sociocrítica, con el fin de que los estudiantes pudieran adquirir actitudes y competencias críticas para generar diferentes juicios y debates en el aula.

Siguiendo el enfoque de Camelo Sánchez (2022) en su estudio destaca una perspectiva sociocultural de la educación matemática donde expresa la necesidad de promover el pensamiento crítico en el aula de matemáticas, con el objetivo de reconocer el aula como un espacio que pueda permitir a los estudiantes tomar posiciones sobre las interacciones de los otros estudiantes por medio del debate y de la crítica; transformando el aula de matemáticas en un mecanismo que permita concebir a los estudiantes como sujetos históricos y políticos que hacen parte de la sociedad.

La investigación realizada por Méndez y Aguilar (2022) en México busca generar discusiones sobre el uso de la legalización de la marihuana, en una institución privada con estudiantes de una clase media alta, donde las familias de los alumnos tenían inclinación

política conservadora. El objetivo de la investigación consistió en centrar la mirada en los tipos de reflexiones que se desencadenaron entre los estudiantes durante la implementación, y el papel de las matemáticas en tales reflexiones. En los resultados reportados se obtuvieron tres tipos de reflexiones: (1) reflexiones éticas y morales, (2) reflexiones económicas y políticas, y (3) reflexiones matemáticas y técnicas. En estas reflexiones se evidenció un interés poco común por parte de los estudiantes hacia las actividades matemáticas propuestas estando participativos y comprometidos con la actividad. Además de esto, se evidenció una acogida de esta temática en el aula donde los estudiantes promovieron la actividad a grados superiores y a familiares para debatir dicha fenomenología.

1.2.2 Delimitación del problema

Con base en las investigaciones presentadas en la sección 1.2.1 y las razones mencionadas al inicio , se considera importante, además de estudiar la actividad reflexiva, estudiar las discusiones matemáticas (se refiere a las ideas pertenecientes a las matemáticas profesionales) y discusiones tecnológicas (se refiere a las técnicas de construcción del modelo matemático) de los docentes en formación junto con algún pregrado profesional que haga uso de los modelos matemáticos como lo es la estadística.

El estudio se realizó con estos estudiantes debido a la disposición he interés que manifestaron en el objeto de estudio; además de esto, los estudiantes cumplían con las condiciones de estar cursando semestres superiores al quinto. También se requirió que los

estudiantes participantes contaran con conocimientos en modelación o hubieran completado cursos de cálculo diferencial, cálculo integral, ecuaciones diferenciales o algún curso en el que se trabajaran temas relacionados con la modelación matemática.

Los cursos mencionados no se centran exclusivamente en la modelación matemática, ya que también abordan otros aspectos dentro del ámbito de las matemáticas. Un ejemplo de esto es el curso de cálculo diferencial, donde se analiza la continuidad de funciones con una variable, pero también tiene un acercamiento inicial a la modelación por medio del estudio de la razón de cambio o derivada. En este contexto, al revisar la malla curricular del programa de formación de docentes en matemáticas de la Universidad del Valle (Figura 1), se identificó que los cursos en los que se puede encontrar temas relacionados con la modelación matemática son el cálculo integral, cálculo y ecuaciones diferenciales.

Figura 1.
Estructura curricular Licenciatura en Matemáticas.

Saberes Específicos y Disciplinares	
Asignatura	**Créditos**
Línea de Formación en Matemáticas	
Elementos de Lógica Matemática	4
Conjuntos Numéricos	4
Matemática Fundamental	4
Algebra Lineal	3
Geometría	4
Cálculo I	4
Algebra Moderna	3
Cálculo II	4
Estadística AEM	4
Ecuaciones Diferenciales	3
Análisis Matemático	3
Física General AEM	3
Elementos de Topología para Profesores en Formación	3
Tópicos de Matemáticas Modernas y Contemporáneas	3

Fuente:(https://drive.google.com/file/d/1NBOxcSKCo6XIsS9oqLhhNwuU0AZP6VZv/view)

Los cursos mencionados son impartidos con estudiantes de disciplinas como: ciencias, ingenierías y tecnologías, entre otros. Un ejemplo de esto se observa en la Figura 2 , donde se evidencia que el curso de ecuaciones diferenciales es ofertado en el programa académico Licenciatura en Matemáticas (identificado con código 3492) en el periodo Marzo-Julio 2023 donde es brindado al mismo tiempo para otro programas académicos como lo son Ingeniería Agrícola (identificado con el código 3745) e Ingeniería Química (identificada con el código 3747).

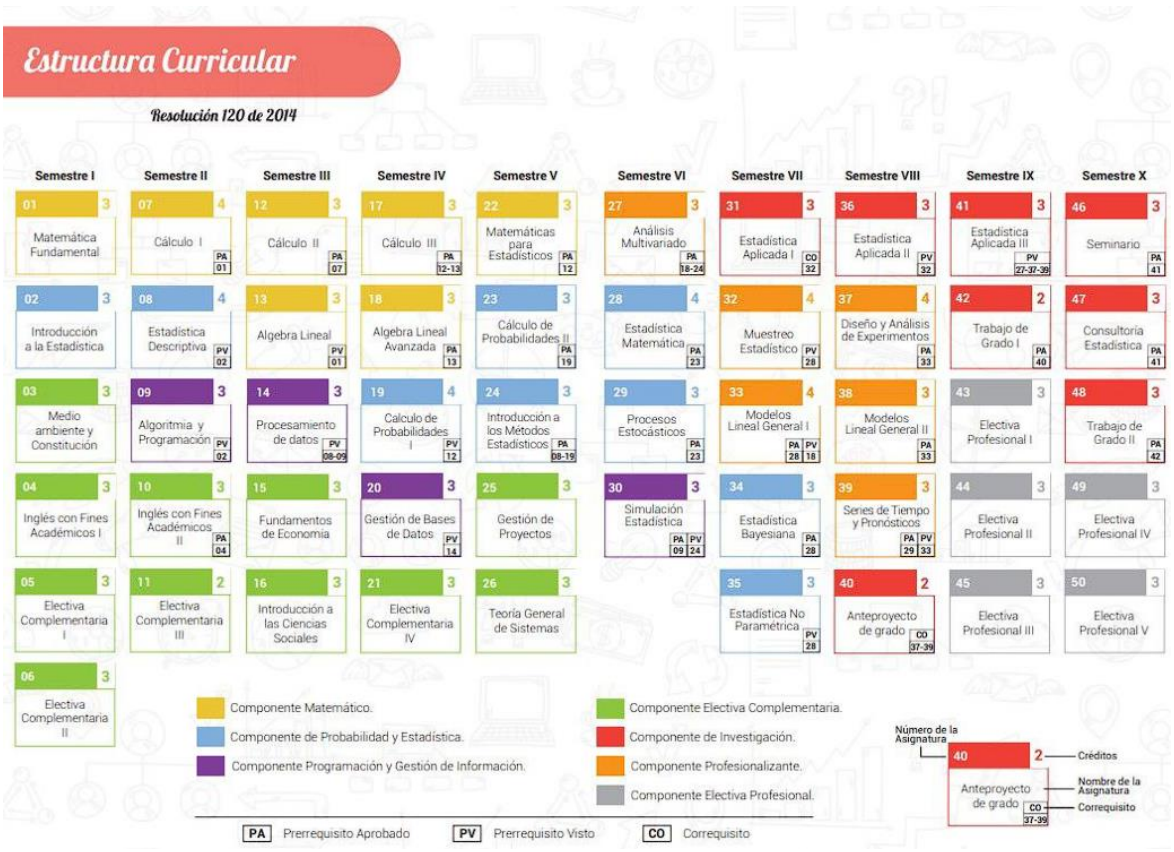
Figura 2.
Curso de ecuaciones diferenciales para los programas 3492-3745-3749.

111026C -> ECUACIONES DIFERENCIALES			Créd. 3			Sede: 00		
#	Periodo Académico	Grupo/Franja	Cupo Otorgado	Horario Asignatura	Docente Responsable	Programada para el Programa Académico:	Convertir a Genérico	Exclusivo para Repitentes
4	MARZO/2023 - JULIO/2023	04	31	MAR: 16:00-18:00 , Edf. E23 (E23) -> 1030 -- MG -- MELENDEZ JUE: 16:00-18:00 , Edf. E23 (E23) -> 1011 -- TL -- MELENDEZ VIE: 16:00-18:00 , Edf. E20 (E20) -> SC3 -- MG -- MELENDEZ	JHON JAIRO DUQUE ROBLES jhon.duque@correounivalle.edu.co	Cupo Genérico		
	MARZO/2023 - JULIO/2023	04	2			0001-00-DIU		
	MARZO/2023 - JULIO/2023	04	2			3492-00-DIU	SI	
	MARZO/2023 - JULIO/2023	04	1			3745-00-DIU	SI	
	MARZO/2023 - JULIO/2023	04	11			3749-00-DIU	SI	

Fuente:(https://sira.univalle.edu.co/sra/paquetes/programacionacademica/index_publico.php)

Al analizar la malla curricular del programa de profesionales en estadística (Figura 3), se evidencia que la formación en modelos matemáticos de estos estudiantes es extensa, pues este pregrado trabaja con modelos matemáticos en todo el ciclo académico.

Figura 3.
Malla curricular del pregrado en Estadística.



Fuente: (https://drive.google.com/file/d/1zD-S87kZ8nYCtjx4bNfkJ3V-3ScgEMc7/view)

En coherencia con lo anterior, se observa que la malla curricular del programa de estadística cuenta con diversos cursos de modelación matemática, teniendo así múltiples enfoques al usar la modelación matemática; siendo diferente al programa de docentes en formación, pues al analizar la Figura 4 se evidencia que los cursos brindados por la escuela de estadística de la Universidad del Valle se imparten solo con estudiantes de estadística (identificada con el código 3752) y no con estudiantes de otras áreas profesionales.

Figura 4.
Curso modelo lineal general I para el programa 3752.

761011M -> MODELO LINEAL GENERAL I				Créd. 4		Sede: 00		
#	Periodo Académico	Grupo/Franja	Cupo Otorgado	Horario Asignatura	Docente Responsable	Programada para el Programa Académico:	Convertir a Genérico	Exclusivo para Repitentes
1	MARZO/2023 - JULIO/2023	01	25	MIE: 7:00-10:00 , Edf. E56 (E56) -> 1004 -- MG -- MELENDEZ VIE: 7:00-10:00 , Edf. E23 (E23) -> 1011 -- MG -- MELENDEZ	CESAR A. OJEDA E. cesar.ojeda@correounivalle.edu.co	3752-00-DIU		

Fuente:(https://sira.univalle.edu.co/sra/paquetes/programacionacademica/index_publico.php)

Al analizar las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas de estudiantes de formación docente y de estadísticos, se genera un contraste entre el aprendizaje y los enfoques que tienen cada uno al momento de usar modelos matemáticos en diferentes tipos de contextos sociales. Es por esto, que está investigación permitió tener una mirada alternativa respecto al uso de modelos matemáticos en una problemática social que esta encajada en un panorama nacional; pues se espera tener tres clases de discusiones de los modelos matemáticos además del uso y comprensión que los estudiantes universitarios le asignen al modelo de la problemática social.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

- Caracterizar las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas de estudiantes de dos carreras profesionales que usan modelos matemáticos en su formación profesional

1.3.2 Objetivos Específicos

- Reconocer el tipo de discusiones que tiene los docentes en formación matemática y los estudiantes de estadística en la creación de modelos matemáticos que describan problemáticas sociales.
- Identificar el uso que tienen las matemáticas en acción en los estudiantes para validar y usar un modelo matemático que describe el estallido social en Colombia.

2. Marco teórico

En este capítulo se presentan consideraciones sobre la Educación Matemática Crítica y sobre la perspectiva socio-crítica de la modelación. El capítulo finaliza con una descripción detallada de las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas.

2.1 La Educación Matemática Crítica - EMC

"La Educación Matemática Crítica (EMC) es un constructo filosófico fundamental en el ámbito de la educación matemática. Este enfoque teórico proporciona las bases necesarias para abordar cuestiones sociales en el entorno educativo desde una perspectiva social, cultural y política.

La EMC tiene sus raíces en la década de los 80. El término "Critical Mathematics Education" o su traducción al español (EMC) fue introducido en Estados Unidos por Marilyn Frankenstein en 1983, y en Europa por Ole Skovsmose en 1985. Algunos investigadores consideran a Ole Skovsmose como el precursor de la Educación Matemática Crítica debido a sus múltiples contribuciones en el campo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas (Cárdenas Sierra, 2014)."

2.2 Comprensiones de la EMC

Valero y Skovsmose (2012) definen la EMC como “una perspectiva que privilegia la conceptualización del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y la investigación

misma sobre éstas como prácticas sociopolíticas" (p. XI). La EMC, para Valero y Skovsmose (2012), se puede caracterizar en dos momentos importantes.

En primer lugar, la EMC considera la alfabetización matemática de una manera similar a la alfabetización planteada por Paulo Freire; considerando así que la alfabetización en el término EMC "no solo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas" (Skovsmose, 2012, p. 110).

En segunda instancia, la EMC se preocupa por el "desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia, lo cual quiere decir que la micro sociedad del salón de clase de matemáticas debe encarnar aspectos democráticos" (Skovsmose,2012, p. 110). Este segundo aspecto resalta el hecho de que las matemáticas no deben ser enseñadas a los estudiantes solo para aprender matemáticas; si no también para poder percibir las matemáticas como una actividad que permitan formar ciudadanos críticos ante la toma de decisiones de problemas críticos, reflexionando así sobre decisiones gubernamentales y estatales.

En esta misma línea, Skovsmose (1999) argumenta que el papel crítico-formativo de los estudiantes va a requerir de un cierto grado de competencia para lograr tomar distancia juzgando así las decisiones gubernamentales, cuando estas decisiones son basadas en sistemas y modelos matemáticos expertos (Valero,2015).Lo anterior establece una conexión entre la competencia matemática con la crítica social, con el propósito de generar una visión

política que permita cuestionar las estructuras de poder en una sociedad por medio de modelos matemáticos.

La articulación de la competencia matemática y la crítica social, estarán dadas por las miradas que la EMC tiene en el desarrollo tecnológico. Las sociedades con un gran alto de desarrollo tecnológico tienen un alto nivel de competencia democrática. Siendo esta competencia la capacidad que tienen todos los ciudadanos para ejercer un control o tomar una decisión en discusiones gubernamentales; es decir, la competencia democrática permite que las personas puedan participar en las discusiones y evaluaciones de las acciones de un gobierno (Skovsmose,1999).

En la EMC, la acción de crítica tiene un papel fundamental, debido a que centra su mirada en los problemas sociopolítico pues busca ser parte de una lucha contra la opresión, las atrocidades y las exclusiones. Además de trabajar por la justicia social, se considera importante trabajar por los problemas ambientales, los cuales son entendidos como las relaciones con la naturaleza, pero al mismo tiempo se refiere a las relaciones sociales. Algunos de estos problemas ambientales son creados por las industrias, donde comprometen las relaciones sociales entre los ciudadanos. Lo anterior resulta importante desde la Educación Matemática Crítica, ya que se considera necesario que opere con la sustentabilidad como una de sus preocupaciones (naturalmente, sin ignorar ninguna de sus otras preocupaciones) (Skovsmose, 2023, traducido del inglés).

Por tanto, el objetivo principal de la EMC consiste en formar a los estudiantes a percibir los usos de las matemáticas de una manera diferente, donde sean capaces de comprender, juzgar y ejecutar las diversas aplicaciones de la matemática en la sociedad. Es decir, emplear las matemáticas en situaciones significativas para su vida privada, social y profesional. Además de esto, Skovsmose (1999) expresa que la EMC también ofrece posibilidades de crear una competencia crítica y de acción colectiva estando está caracterizada de la siguiente manera:

1. La deliberación, siendo este un proceso comunicativo y colectivo que permite a un determinado grupo considerar tres aspectos importantes para tener en cuenta. i) Las razones o falta de las mismas en sus opiniones y juicios iniciales antes de ser manifestados; ii) Ventajas y desventajas de posibles decisiones antes de tomarlas ; iii) los beneficios y perjuicios de posibles alternativas de acción antes de emprenderlas.
2. La coflexión como un proceso colectivo que hace parte del conocer reflexivo, en el que los sujetos de un grupo de una manera consienten generan reflexiones sobre las ideas generadas de los otros miembros sobre sí mismo y, en especial, sobre sus acciones conjuntas.
3. La transformación entendida como diferentes intencionalidades colectivas que se encaminan hacia un mejoramiento continuo de las condiciones sociales y materiales del grupo.

Los componentes mencionados caracterizan una competencia democrática de los ciudadanos; en otras palabras, la EMC inicialmente explora las diferentes sociedades con un alto desarrollo tecnológico, posterior a esto, da continuidad al acto de crítica definiéndolo como el poder formativo de las matemáticas. Finalmente, culmina su recorrido enfocándose en los sujetos críticos, los cuales son reconocidos como los estudiantes, profesores y ciudadanos que participan en la acción del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

2.2.1 Ideas principales de la Educación Matemática Crítica

La EMC tiene como base principal el desarrollo de la *alfabetización matemática* como una competencia similar y sustentada en la alfabetización descrita por P. Freire. En coherencia con lo anterior, la alfabetización matemática (Skovsmose, 2020a) y la alfabetización de Paulo Freire (2005) deja en manifiesta que la educación debe ir más allá de la repetición de las palabras, privilegiando el uso de los saberes propios para construir argumentos que permitan comprender de manera crítica el contexto del mundo en el que viven (Freire, 2005). Con ello se busca establecer una educación matemática que permita centrar la atención en diversas situaciones críticas, comprendiéndolas e identificando los factores que están actuando sobre esta. Asimismo, se busca reaccionar ante dicha problemática, generando soluciones y oportunidades de un activismo para actuar en colectivo como respuesta a las crisis (Agostinho y Reis, 2021). En esta perspectiva, la

modelación matemática tiene un potencial tanto para promover la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como para la formación ciudadana de los estudiantes

Con la alfabetización matemática, se busca construir ambientes en el aula de clase, los cuales son considerados para Skovsmose (2012) como escenarios de investigación, donde se incentiva a los estudiantes a formular clases de preguntas, estimulando así la búsqueda de soluciones correspondientes a estas preguntas. Con esto, se busca que los estudiantes se apropien de los procesos de exploración y explicación; de esta manera, se constituyen los escenarios de investigación que, a su vez, generan nuevos ambientes de aprendizaje.

En la EMC existen diferentes ambientes de aprendizaje basados en los escenarios de investigación, que contrastan con el paradigma del ejercicio. La distinción entre esta práctica educativa está relacionada con un tipo de "referencia", siendo esta la base para la construcción del significado de los conceptos matemáticos y las actividades en clase en los estudiantes. Por tal razón, es posible encontrar diferentes tipos de referencia (Skovsmose,2012). Los tipos de referencia están dados para Skovsmose (2012) de la siguiente manera:

> Primero, las preguntas y actividades matemáticas pueden referirse exclusivamente a las matemáticas. Segundo, es posible referirse a una semirealidad —no una realidad que de hecho podemos observar sino una realidad construida, por ejemplo, por el

autor de un libro de texto. Finalmente, los estudiantes y el profesor pueden trabajar con tareas que se refieren a situaciones de la vida real (p.9).

Al unir los paradigmas del salón de clase junto con los tres tipos de referencia surge la matriz que define los seis tipos de ambientes de aprendizaje.

Tabla 1. *Ambientes de aprendizaje*

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

(Skovsmose, 2012, p.116).

Para Skovmose (2012), el ambiente a partir de las matemáticas puras con paradigma del ejercicio - ambiente (1)- es caracterizado por la resolución de ejercicios en las clases de matemáticas, es decir, el ejercicio repetitivo de una larga lista de problemas desconociendo el sentido del trabajo matemático junto con la razón de ser del mismo. El ambiente a partir de las matemáticas puras con escenarios de investigación - ambiente (2)- promueve a los estudiantes a construir el sentido de sus saberes, trabajando en torno a las competencias matemáticas.

El ambiente a partir de la semirrealidad con paradigma del ejercicio -ambiente (3)- consiste en las diferentes lecturas e interpretaciones de informaciones reales con el objetivo de que los estudiantes puedan hacer uso de conocimientos específicos de ellos. El anterior ambiente también es trabajado en el ambiente a partir de la semirrealidad con escenarios de investigación -ambiente (4)-, ya que este pretende trabajar en un contexto de situaciones ficticias en los alumnos tratar de encontrar una serie de explicaciones matemáticas a estos sucesos.

El ambiente a partir de las situaciones de la vida real -ambiente (5)- con paradigma del ejercicio y el ambiente (3) son similares, pero se desarrollan en condiciones diferentes; es decir, poseen las mismas características y objetivos. Finalmente, el ambiente a partir de las situaciones de la vida real con escenarios de investigación -ambiente (6)- busca articular diferentes disciplinas para generar un trabajo interdisciplinario donde el docente de matemáticas planifique junto a otros docentes de otras disciplinas (Rodríguez, 2015).

Lo anterior se considera fundamental para lograr construir y promover una EMC, pues, para Skovsmose (2012), el trabajo en el aula de matemáticas debería recorrer los distintos ambientes de aprendizaje.

2.2.2 Matemáticas en acción

En la EMC se pueden abordar las matemáticas desde múltiples enfoques que involucran la aplicación de conceptos y herramientas tecnológicas con el propósito de

resolver situaciones concretas o representar problemas del mundo real. En esta perspectiva, las dimensiones sociales y éticas de las matemáticas abren un gran espacio para la reflexión de éstas en el mundo de las aplicaciones; es decir, la dimensión social se refiere a las formas en que el mundo social impacta en las matemáticas, mientras que la dimensión ética se refiere a las formas en que la actividad matemática impacta en la sociedad (Skovsmose, 2020b).

En concordancia con lo anterior, Skovsmose (2020b) reconoce diferentes componentes basados en las matemáticas, que incluyen la imaginación tecnológica, el razonamiento hipotético, la legitimación o justificación, la realización y la disolución de la responsabilidad. Estos componentes se describen de la siguiente manera:

- *Imaginación tecnológica*, se refiere a la acción de poder identificar nuevas tecnologías, expresándose por medio de cualquier tipo de lenguajes. Es decir, esta se basa en la identificación de nuevos diseños tecnológicos donde las matemáticas intervienen.
- *Razonamiento hipotético,* resulta esencial para cualquier desarrollo tecnológico debido a las declaraciones lógicas e hipotéticas que se deben realizar para realizar un determinado modelo matemático. Esté razonamiento, busca definir y omitir las variables necesarias para establecer un modelo matemático

- *La legitimación o justificación* está basada en las diferentes formas de crear argumentos por medio de la lógica para la toma de decisiones de los modelos matemáticos creados. Se espera que por medio de los argumentos se pueda justificar la construcción de un modelo matemático, esto para legitimar las acciones tomadas en la sociedad por medio del modelo matemático.
- *La realización* se refiere a la acción de que el modelo matemático parte a ser parte de un entorno real.
- *La eliminación de responsabilidad* tendrá lugar cuando se implementen la toma de decisiones automáticas, es decir, al automatizar los procesos por medio de las matemáticas se considera que las acciones basadas en esta, disfraza la identidad del ejecutante, donde las acciones realizadas no tendrán un determinado autor.

Las componentes mencionadas son retomadas por Skovsmose (2023) para hacer énfasis en que no solo se puede desarrollar matemáticas a través de la crítica, sino también realizar críticas por medio de las matemáticas. Las matemáticas se pueden poner en acción para identificar casos de injusticia social y ambiental; es decir, las matemáticas pueden ser utilizadas para señalar desigualdades económicas en la sociedad. La EMC reconoce que el poder que tiene las matemáticas es indefinido, pues las matemáticas pueden ponerse en acción para cualquier tipo de propósito tecnológico, económico, ideológico y político;

además de lo anterior, también permiten ponerse en acción para empoderar a los estudiantes (Skovsmose, 2023)

2.3 Comprensiones teóricas de la Modelación Matemática

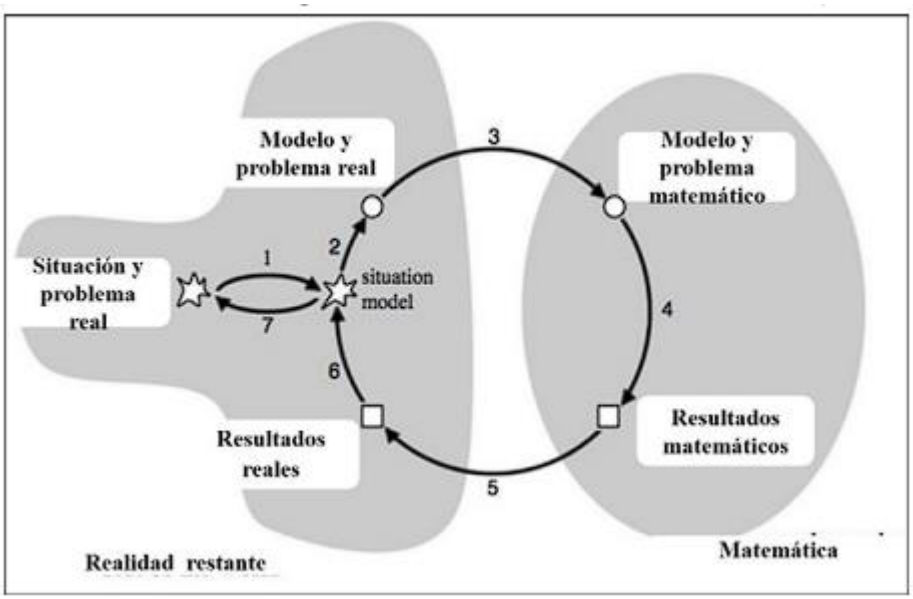
La modelación matemática es entendida por Hein (2004) como un proceso que involucra la obtención de un modelo matemático de un fenómeno o una situación problema que se quiera expresar por medio de un modelo. En esta misma comprensión Hein (2004) expresa que un modelo matemático de un determinado fenómeno es comprendido como la representación de un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa de alguna manera la problemática a modelar; además, el modelo no solo permite obtener soluciones particulares a un problema inicial, sino también servir de soporte a otras aplicaciones o teorías (Hein, 2004). Al respecto, Hein (2004) agrega que:

> El proceso de modelación involucra una serie de procedimientos, a saber, elección del tema; reconocimiento de la situación/problema - delimitación del problema; familiarización con el tema que va a ser modelado - referencial teórico; formulación del problema - hipótesis; formulación de un modelo matemático - desarrollo; resolución del problema a partir del modelo - aplicación; interpretación de la solución y validación del modelo - evaluación. La elaboración de un modelo matemático requiere, por parte del modelador, conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos, además de una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto y discernir cuáles son las variables involucradas (p.106).

Para Villa-Ochoa et al. (2022), la modelación radica en comprenderla como una forma de resolución de problemas del mundo real, con el fin de explicar, controlar o anticiparse a un determinado comportamiento de alguna fenómeno. En esta misma dirección, Stillman (2019) expresa que “la modelación reconoce un problema del mundo real el cual es estudiado y analizado, a partir de diversas posturas y con propósitos diferentes” (p. 68, traducido del inglés).

Siguiendo la idea de Stillman (2019), la modelación matemática tiene diferentes utilidades y enfoques, desde un enfoque académico, se puede considerar como un ambiente de aprendizaje que está asociada con el estudio, la problematización y la investigación de problemas no matemáticos por medio de las matemáticas. Este tipo de ambientes no solo se usan para aprender matemáticas o para desarrollar habilidades que estén inherentes a ella. La modelación también permite comprender de una forma crítica situaciones cotidianas por medio de las matemáticas ofreciendo la oportunidad de representar, analizar, modelar y tomar decisiones respecto a la situación que se le atribuye (Villa-Ochoa et al., 2017). Las ideas de los autores mencionados anteriormente pueden ser comprendidas por medio del ciclo de la modelación (Figura 5), el cual es usado para modelar diferentes fenómenos de la naturaleza por medio de las matemáticas y este dado de la siguiente manera

Figura 5.
Ciclo de Modelación



Fuente: Blum y Borromeo Ferri (2009)

La explicación del ciclo para Borromeo Ferri (2021) está dada de la siguiente manera:

(Los números indican transiciones)

- Situación/problema en el mundo real.

(1). Proceso de construcción de un primer modelo

Primer modelo a partir de su entendimiento parcial del problema (incluso en forma implícita e inconsciente).

(2). El modelador filtra información del problema; define cómo tratarlo (de acuerdo con su estilo de pensamiento matemático); lo idealiza y simplifica (más conscientemente que antes).

- Modelo real hecho de dibujos o fórmulas; incluye conocimiento extramatemático (manifiesto en declaraciones verbales que lo sustentan).

(3). Matematización: se construye un modelo matemático; también se usa dibujos o fórmulas y se incluye conocimiento extramatemático (pero las declaraciones son de naturaleza matemática).

- Modelo matemático

(4). Trabajo matemático (requiere competencias matemáticas del modelador).

- Resultados matemáticos

(5). Los resultados matemáticos son interpretados (incluso inconscientemente).

- Resultados reales.

(6) Validación de los resultados reales de acuerdo con su correspondencia eventual con la representación mental de la situación (intuitiva e inconscientemente; o bien con base en el análisis, reflexivo de la correspondencia entre problema y su representación).

- Modelo de la situación

(7) Contrastación del modelo obtenido con la situación real. (p.20;21)

Hein (2004), al igual que Villa-Ochoa et al. (2022), comparten la idea en que la modelación matemática se deben hacer uso de herramientas para poder resolver un problema del mundo real. Ambos destacan la importancia de delimitar el problema para poder representar una problemática por medio de un modelo matemático.

Hein (2004) sostiene que un modelo matemático está compuesto por diferentes símbolos y relaciones matemáticas que representan la problemática a modelar. En esta misma perspectiva, Hein (2004) destaca aspectos importantes que se deben de tener en cuenta desde la creación del modelo hasta la aplicabilidad; estos aspectos también son retomados por Borromeo Ferri (2021) donde explica por medio del ciclo de modelación, la manera en la que se debe abordar una problemática para poder ser modelada.

Además de lo anterior, también se destacan algunas diferencias entre Villa-Ochoa et al. (2022) y Hein (2004). El primer autor enfatiza la idea de la modelación desde una perspectiva crítica, destacando su uso como un ejercicio que debe tener la ciudadanía para generar diferentes análisis y reflexiones desde diversas perspectivas. Mientras que para Hein la modelación matemática esta encamina hacia la obtención de soluciones de problemas particulares donde puedan servir de soporte a nuevas aplicaciones o teorías.

Al tomar una postura al respecto, se logra concluir que los autores comparten la idea de que en la modelación matemática se deben determinar diferentes procesos para establecer

un modelo que permita representar una problemática del mundo real. Además de esto, se resalta la importancia de diversas interpretaciones en los resultados obtenidos para poder validar los modelos de una manera adecuada. No obstante, los fundamentos presentados difieren en ciertos aspectos como la importancia del modelo, la creatividad e intuición que se debe de tener al realizar un modelo, así como los propósitos del mismo; sin embargo, resaltan la utilidad de la modelación para el desarrollo de las habilidades críticas y la toma de decisiones en los ciudadanos.

Aunque en la investigación a nivel en general se afirma que la modelación matemática se fundamenta en la idea, de que los fenómenos del mundo real pueden ser descritos y analizados mediante relaciones matemáticas establecidas, a partir de variables y parámetros relevantes que intervienen en el fenómeno. Desde la perspectiva socio-crítica la modelación matemática se encuentra inscrita en la perspectiva epistemológica y psicológica; la primera perspectiva, implica la construcción de modelos que están separados del mundo real. Estos modelos se basan en la idea de que los fenómenos complejos del mundo real se pueden describir y analizar mediante relaciones matemáticas. Estas relaciones se establecen identificando y considerando las variables y parámetros relevantes que influyen en el fenómeno en estudio (Doerr y Pratt ,2008).

En esta misma línea los autores expresan que, desde la perspectiva psicológica, el modelado matemático se considera un proceso activo y dinámico en el que los alumnos construyen y refinan su propia comprensión de los fenómenos que se modelan; reconociendo

que el modelado implica no solo explorar modelos prefabricados, sino también construir los propios modelos para representar e interpretar situaciones del mundo real. Un aspecto clave desde la perspectiva psicológica es el reconocimiento de la naturaleza iterativa del modelado donde los estudiantes participan en ciclos de interpretación, refinamiento y validación de sus modelos a medida que le dan sentido al problema y su representación matemática. Este proceso iterativo, permite el desarrollo de una comprensión más profunda y el refinamiento de los modelos a lo largo del tiempo (Doerr y Pratt, 2008).

Por tal razón, la modelación matemática desde la perspectiva socio-crítica no se inscribe en la idea de ciclos de modelación debido a que desde la perspectiva socio-crítica se prioriza la interacción entre los modelos matemáticos y el mundo real, destacando la importancia del análisis crítico, los marcos teóricos y la naturaleza iterativa del modelado para mejorar la comprensión y descripción de fenómenos complejos. Lo anterior brinda una oportunidad para que los alumnos hagan explícito su pensamiento, perfeccionen su comprensión y desarrollen una comprensión conceptual más profunda del tema.

2.4 Los Modelos y la modelación en una perspectiva Socio-Crítica

La Educación Matemática Crítica es una filosofía de la educación matemática que se preocupa por

> […] el desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia, lo cual quiere decir que la micro sociedad del salón de clase de matemáticas debe

> encarnar aspectos democráticos. La educación matemática crítica recalca el hecho de que las matemáticas no son simplemente una materia que debe enseñarse y aprenderse (sin importar si los procesos de aprendizaje se organizan de acuerdo con los principios de los enfoques constructivistas o socioculturales del aprendizaje) (Christiansen, 2001, pp.4-5).

Para Silva y Kato (2012), la modelación matemática puede brindar oportunidades en las que los estudiantes pueden llevar las discusiones del aula a su vida cotidiana, crear conciencia sobre su papel en la sociedad, así como generar cambios en su forma de ver el mundo. En esta misma perspectiva Camelo et al. (2013) hace referencia a los escenarios en los que son impartidos la modelación matemática desde un enfoque crítico, donde expresa que:

Los escenarios deben posibilitar reflexionar sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y dar cuenta de la naturaleza crítica de los modelos matemáticos, pues es a través de dichos modelos que es factible tanto la construcción de matemáticas como las reflexiones de sus implicaciones sociales, en otras palabras, ser consciente que quien propone un modelo matemático atiende a intereses particulares y que estos no deben asumirse como neutrales (p. 125).

Lo anterior deja en manifiesto que el ejercicio de la crítica ofrece cuestionamientos en una determinada población ante la toma de decisiones, es aquí cuando las matemáticas pueden ser parte de estos cuestionamientos, pues a partir de los diversos resultados obtenidos

de la modelación matemática de una problemática social, los estudiantes y los profesores pueden tomar decisiones por medio de la crítica.

En este misma línea, se debe de tener en cuenta los fundamentos que permiten que la modelación adquiera un sentido desde la perspectiva sociocrítica en el aula con los estudiantes; siendo estos pues: i) promueve el desarrollo de una competencia crítica en los modelos matemáticos, para cuestionar la manera en la que estos son usados en sociedades basadas en la igualdad y democracia; ii) posee una serie de características que permite empoderar a los estudiantes, convirtiéndolos en ciudadanos autónomos e independientes ; iii) permite capacitar a los estudiantes en el uso de modelos matemáticos para desarrollar diferentes reflexiones críticas de problemáticas sociales asociadas a contextos reales y iv) en general, en la enseñanza de la modelación, la reflexión y la crítica tienen un papel fundamental en la perspectiva socio-crítica (Ortiz, 2023).

La EMC deja en manifiesto las diferentes acciones y cuestionamientos que una determinada sociedad puede tomar para contribuir a su comunidad en el crecimiento íntegro, político, económico, social y ambiental. Asimismo, esta práctica permite desarrollar un uso crítico en los modelos matemáticos donde los estudiantes pueden concebir y reflexionar sobre los cambios fenomenológicos que ocurren a diario percibiendo el mundo de las aplicaciones de una manera diferente.

En tal sentido, Christiansen (2001) enfatiza que la educación matemática crítica busca sustentar la democracia, donde en el aula de matemáticas se debe centrar la mirada en

aspectos democráticos para comprender el significado que pueden tener las matemáticas en la sociedad. Así pues, Silva y Kato (2012) comparten la idea presentada por Christiansen, donde además de esto, también consideran necesario destacar que la modelación matemática brinda oportunidades para que los estudiantes lleven las discusiones del aula a su vida cotidiana, generando conciencia sobre su papel en la sociedad para generar cambios en la manera en la que los estudiantes ven el mundo.

A diferencia de Silva y Kato (2012), Camelo et al. (2013) plantea diversos escenarios de modelación que permitan generar reflexiones sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y reconoce la naturaleza crítica que pueden tener los modelos matemáticos en el mundo real. Además de esto, el autor considera importante mencionar que el uso de los modelos matemáticos estará propuesto según los intereses propios de cada persona, es decir, estos no se pueden asumir que los modelos matemáticos estarán aislados de algún interés particular.

Al analizar las ideas de Silva y Kato (2012) y Camelo et al. (2013), Ortiz (2023) considera necesario tener presente los escenarios de modelación planteados por Camelo et al. (2013) para enfocar la modelación hacia una perspectiva socio crítica que permita promover las competencias argumentadas por Christiansen (2001) junto con Silva y Kato (2012). Es decir, al hacer uso de los modelos enfocados hacia una perspectiva sociocrítica, se logra empoderar a los estudiantes como ciudadanos autónomos e independientes. Esto

permitiría generar en los estudiantes reflexiones críticas a problemáticas sociales para la toma de decisiones en la sociedad.

Por tal razón, se considera necesario reconocer que los modelos matemáticos no son una herramienta neutral aislada a las problemáticas sociales. Si no que reconocen la importancia y perspectiva socio-crítica que tienen los modelos para generar seres críticos que sean capaces de tomar acciones ante situaciones críticas. Es decir, se considera esencial fomentar el pensamiento crítico en el uso de modelos, para de desarrollar la capacidad de cuestionar no solo sus supuestos, alcances y aplicaciones, sino también las implicaciones éticas al usar el modelo.

Al fomentar el pensamiento crítico en relación con los modelos, se podrá empoderar a los estudiantes para que puedan analizar y cuestionar las implicaciones y consecuencias del uso de los modelos; lo cual implica ir más allá de la aceptación de estos como una representación de un fenómeno de la realidad, reconociendo que los modelos son una construcción orientada a un interés especifico.

2.5 Discusiones Matemáticas, Tecnológicas y Reflexivas en la modelación matemática

Las matemáticas, en términos generales, son concebidas como una disciplina abstracta y no como una disciplina empírica que permite dar cuenta de diferentes situaciones críticas asociadas al mundo real. Más allá de ello, para Skovsmove (2005), la matemática

puede comprenderse como una ciencia aplicada, no solo para lograr entender fenómenos naturales si no, todos aquellos procesos tecnológicos y sociales.

En la EMC, los procesos tecnológicos pueden comprenderse como las herramientas, procesos y competencias para construir modelos y entender el funcionamiento de los dispositivos o sistemas tecnológicos; en tal sentido, estos procesos permiten interpretar la tecnología como una condición básica para una organización social. En otras palabras, los procesos tecnológicos están asociados con las formas de construcción y uso de las matemáticas (Méndez y Aguilar, 2022). Por tanto, las discusiones tecnológicas tienen en cuenta lo relacionado con la calidad del modelo, sus alcances, supuestos y procedimientos.

Christiansen (1999) expresa que la *actividad tecnológica* involucra aquellas reflexiones que apuntan a la construcción de un mejor modelo. En esta actividad se recoge todo aquello relacionado con la calidad del modelo en relación con lo que se quiere calcular, es decir, los aspectos técnicos y tecnológicos del modelo. En esta misma línea, la autora señala que las *actividades reflexivas* de la modelación están dirigidas en dirección al interés crítico, donde se reconocen los elementos restrictivos de un modelo, con el objetivo de identificar el significado y la acción en un contexto social; ofreciendo las perspectivas éticas de la aplicación de un modelo en la sociedad.

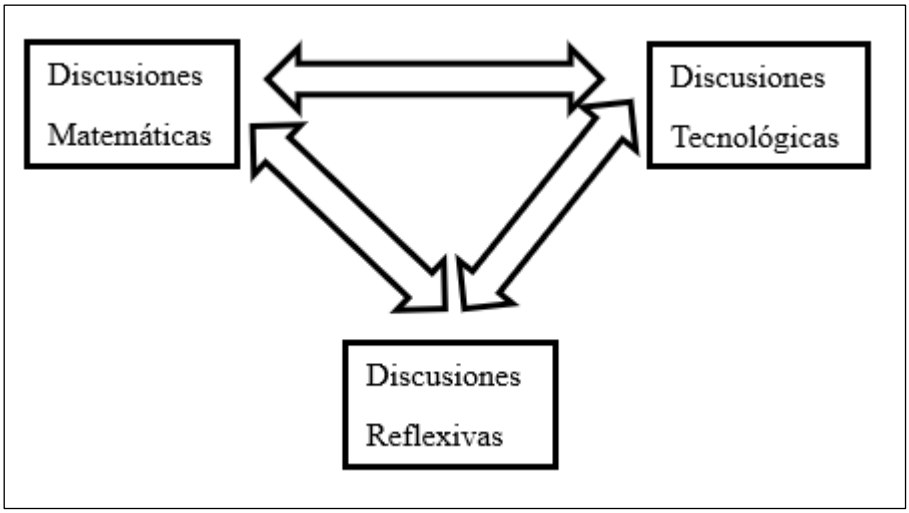
Las actividades reflexivas en la modelación están dirigidas hacia un interés crítico, donde los estudiantes deben establecer límites basados en argumentos (matemáticos y tecnológicos) que les permitan analizar modelos matemáticos para discutir su *uso y*

aplicabilidad en los diferentes contextos y situaciones; es decir, los límites establecidos en un respectivo modelo resultarán cruciales para el acto crítico del mismo (Skovsmose y Greer, 2012). En esta misma línea, este tipo de discusiones permiten que las personas adquieran un tipo de empoderamiento matemático-reflexivo; viéndose este reflejado en los entornos sociales al momento de generar discusiones sobre el uso de las matemáticas (modelos matemáticos) para la toma decisiones. Por esta razón, esta clase de empoderamiento resultan ser un aporte valioso para el mundo de las matemáticas (País, 2012).

En esta misma dirección, Barbosa (2006) destaca tres tipos de discusiones en esta perspectiva: *reflexivas* (se refiere a la naturaleza del modelo matemático, los criterios utilizados en su construcción y sus consecuencias), *matemáticas* (se refiere a las ideas pertenecientes a las matemáticas profesionales) y *tecnológicas* (se refiere a las técnicas de construcción del modelo matemático). Lo anterior se considera importante promover en el aula de clase ya que como lo menciona el autor, los discursos de los estudiantes permite analizar los procedimientos que estos están realizando, es decir, los procedimientos de los estudiantes para argumentar sobre un determinado modelo se traducen a ideas que están surgiendo dentro de sus cabezas.

Al centrar la mirada en el uso de modelos por medio de las discusiones matemáticas tecnologías y reflexivas, se espera que los estudiantes relacionen los tres tipos de discusiones como se observa en el siguiente gráfico.

Figura 6.
Tipo de discusiones



Fuente: Barbosa (2006, p.298, traducido del inglés)

Estas discusiones se encuentran estrechamente relacionadas entre ellas, donde al hacer uso de estas tres discusiones los estudiantes puedan llegar a responder preguntas como ¿Cuál es la consecuencia de solo usar las variables definidas?, ¿Qué criterios se usaron para establecer las variables?, ¿Estos resultados resultan importante para alguien?, etc. Por medio de estas discusiones se espera que los estudiantes den respuesta a cada una de las preguntas a partir del establecimiento de argumentos que tendrán un enfoque socio crítico debido a la presencia de las discusiones reflexivas. Lo anterior, para Barbosa (2006), permite criticar el modelado, siendo esta una actividad que hace parte del proceso de la modelación, cuyo objetivo es producir ciudadanos críticos y políticamente comprometidos.

2.6 Caracterización de la actividad de modelación matemática desde una perspectiva crítica.

La caracterización de la modelación matemática desde un enfoque crítico fue llevada a cabo por Silva y Kato (2012) mediante un análisis discursivo de diversas fuentes literarias. Este análisis busca identificar las distintas perspectivas de varios autores con el fin de definir la actividad de modelación desde una perspectiva crítica. Esta caracterización es realizada por Silva y Kato (2012) mediante la recolección de fragmentos de diferentes literaturas que son considerados importantes.

En esta misma perspectiva, la autora propone diez unidades de significado, las cuales están dadas por : i) trabajo en grupo; ii) Participación crítica y democrática en las clases; iii) Elección de problemas por parte de los alumnos; iv) Desarrollo de acciones comunitarias; v) Extensión al Contexto Social; vi) La acción crítica en la sociedad ;vii) Importancia de las Matemáticas en la sociedad ;viii) Uso de problemas no matemáticos de la realidad; ix) Interpretación de modelos matemáticos según la realidad; x) Considerar la cultura de los estudiantes.

Una vez establecido las unidades del significado, Silva y Kato construyen categorías características para caracterizar cada unidad de significado definiéndolas de la siguiente manera:

***Participación del alumno en la construcción del modelo*:** Trabajo en grupo; Participación crítica y democrática en las clases; Elección del problema por parte de los estudiantes.

Participación del estudiante en la sociedad: Desarrollo de acciones comunitarias; Extensión al contexto social; Acción crítica en la sociedad; Importancia de las Matemáticas en la sociedad.

Problema no matemático de la realidad: Utilizar problemas no matemáticos de la realidad; Elección de problemas por parte de los estudiantes; Interpretar modelos matemáticos según la realidad; Considerar la cultura de los estudiantes; Importancia de las Matemáticas en la sociedad

Rol del docente como mediador: Elección del problema por parte de los estudiantes; Participación crítica y democrática en el aula; Considerar la cultura de los estudiantes; Importancia de las Matemáticas en la sociedad y Trabajo en grupo.

Las cuatro categorías definidas anteriormente junto con cada unidad del significado correspondiente ofrecen elementos que permiten caracterizar una actividad de modelación desde una perspectiva sociocrítica (Silva y Kato, 2012).

3. Metodología

En este capítulo se presentan el enfoque metodológico, el contexto del estudio, los participantes, el diseño, los datos construidos y su respectivo análisis. La investigación está orientada a un estudio cualitativo que tiene por objetivo analizar las respuestas de dos estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y dos estudiantes de Estadística con base en aspectos conceptuales del marco teórico.

3.1 Enfoque Metodológico: investigación Cualitativa

Para el desarrollo de esta investigación se hizo uso de la metodología cualitativa, a partir del cual la atención se enfocó en los procesos desarrollados por los participantes con el fin de comprender sus actuaciones. En la metodología cualitativa, la recolección de la información pretende obtener las diferentes perspectivas y puntos de vistas de los participantes (sus emociones, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos) (Hernández Sampieri, 2014). El estudio es considera cualitativo, puesto que utiliza las representaciones y discursos obtenidos como información para interpretar los análisis y respuestas brindadas por cada caso estudiado (Pérez, 2002).

Por medio del enfoque cualitativo se pretende producir preguntas antes, durante o después de la recolección y análisis de la información. La acción indagatoria se encontrará en un movimiento dinámico entre los hechos y su interpretación; a partir de ello, resulta un proceso más bien en “espiral” en el que la secuencia no siempre es la misma, pues esta puede variar en cada estudio (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2020).

Se siguió el método de estudio de casos; el cual "se concentra en el conocimiento experiencial del caso y se presta detallada atención a la influencia de sus contextos social, político y otros" (Stake, 2013, p. 155). Este enfoque estuvo orientado en un estudio de casos múltiple o colectivo; este trata de un análisis instrumental extendido a varios casos, donde cada uno de los análisis es un instrumento para aprender sobre las concepciones de un determinado proceso desarrollado; donde deberá existir una buena coordinación entre cada uno de los estudios individuales (Stake, 2020).

3.2 El contexto y los participantes:

Para analizar las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas y usos del modelo matemático establecido, se seleccionaron cuatro casos. Ellos son:

Carlos (seudónimo) quien era estudiante de un programa para ser profesor de matemáticas de 22 años de edad. Carlos se encontraba cursando octavo semestre de la carrera profesional (10 semestres en total). Contaba con experiencias de cursos como cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, análisis matemático, didáctica del pensamiento variacional, didáctica del pensamiento espacial, etc. Además de esto, se desempeñaba trabajando como tutor personalizado de estudiantes de diferentes carreras de la Universidad como lo son: ingeniería civil, ingeniería industrial, ingeniería química, licenciatura en matemáticas, etc. Carlos tenía por función brindar un acompañamiento a los estudiantes de estas carreras durante el semestre en cursos de cálculo, geometría y algebra. El interés investigativo de Carlos está orientado al uso de recursos digitales para promover

la enseñanza de las matemáticas, por esa razón contaba con un canal de YouTube y Tik-tok donde tenía por objetivo suministrar contenido digital educativo sobre problemas matemáticos que están situados desde un nivel escolar hasta un nivel universitario.

El segundo caso corresponde a una estudiante denominada con el seudónimo de Cristina, quien estudiaba un pregrado en estadística de 22 años de edad. Cristina se encontraba cursando noveno semestre de su carrera profesional (10 semestre en total). Cristina contaba con experiencia de cursos de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, procesamiento de datos, cálculo de probabilidades, simulación estadística, modelo lineal general I, etc. Cristina desempeñaba labores de apoyo administrativo en la Universidad; su trabajo consistía en la elaboración de gráficas y análisis de datos que esta recolectaba de los estudiantes de toda la universidad por medios electrónicos. Además de esto, se encontraba desarrollando su trabajo de grado el cual estaba orientado en la minería de datos. Para el desarrollo de este trabajo Cristina hacia uso de modelos logísticos generalizados, modelos lineales generalizados y lenguajes de programación como lo es R Studio.

El tercer caso responde al seudónimo de Andrés, un estudiante de 23 años que cursaba séptimo semestre del pregrado en estadística. Andrés tenía conocimientos en programación en R y había cursado las asignaturas de cálculo diferencial, integral y en varias variables además de esto había tenía formación en cursos propios del programa de estadística como estadística aplicada I, simulación estadística. En aspectos laborales Andrés trabajaba

con una compañía de abogados, donde brindaba apoyo en cuestiones tecnológicas como la creación de enlaces por Meet o Zoom para videoconferencias.

La última participante responde al seudónimo de Stephanie, una estudiante de 20 años que cursaba sexto semestre del programa que forma profesores de matemáticas. Stephanie contaba con conocimientos en curso de álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral y cursos propios de la carrera como uso de las tecnologías digitales en el aula, Didáctica I: Desarrollo del pensamiento numérico, Didáctica II: Desarrollo de pensamiento geométrico y métrico, entre otros. En aspectos laborales Stephanie no contaba con un trabajo fijo, pero se dedicaba a brindar apoyo académico en la asignatura de matemáticas a estudiantes de diversos colegios.

Todos los estudiantes pertenecían a una universidad pública del suroccidente colombiano (Universidad del Valle). Estos casos se seleccionaron con base en el deseo de participar de manera voluntaria; además, debían estar familiarizados con la modelación o tener una formación mínima en ecuaciones diferenciales, cálculo diferencial e integral. Asimismo, se requería que tuvieran manejo de calculadoras graficadoras o de lenguajes de programación.

3.3 El diseño

El trabajo de campo fue diseñado en tres fases, a saber: 1) Fase de Organización, 2) Fase de Estructuración, y 3) Fase de Realización.

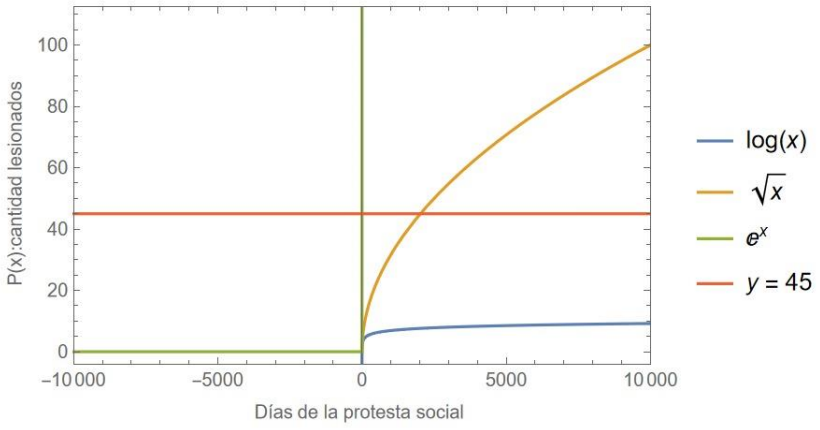
1. Fase de organización. En esta fase se recolectaron los datos que representaran la violación de los derechos humanos de los participantes de las protestas durante en estallido social en 2021. Estos datos se recolectaron en las páginas de una ONG, con el fin de crear una base de datos en Excel. Esta base de datos se diseñó con el objetivo de tener los datos de una manera más organizada y concatenada, para poder crear y programar el modelo que trata de describir el estallido social en Colombia. Además de esto, se definieron los lenguajes de programación a usar, los programas académicos analizar y los conocimientos mínimos de cada estudiante para poder participar en el análisis.

2. Fase de estructuración. En esta fase se hizo uso de los datos recolectados de las ONG para analizar los posibles patrones que describieran el incremento de la violencia al pasar los días; esto con el fin de determinar un posible modelo que describiera dicha problemática social. Posterior a esto, se realizó un análisis con gráficas para determinar cuál tenía un mejor ajuste al comportamiento de los datos recolectados.

Se analizaron los modelos de ecuaciones diferenciales junto con las gráficas de las soluciones de cada uno. Entre los modelos analizados, se centró la mirada en los modelos de crecimiento de una población, modelo SIR, modelo predador-presa y el modelo de una propagación de una bacteria (modelo logístico). Para analizar las soluciones de los modelos

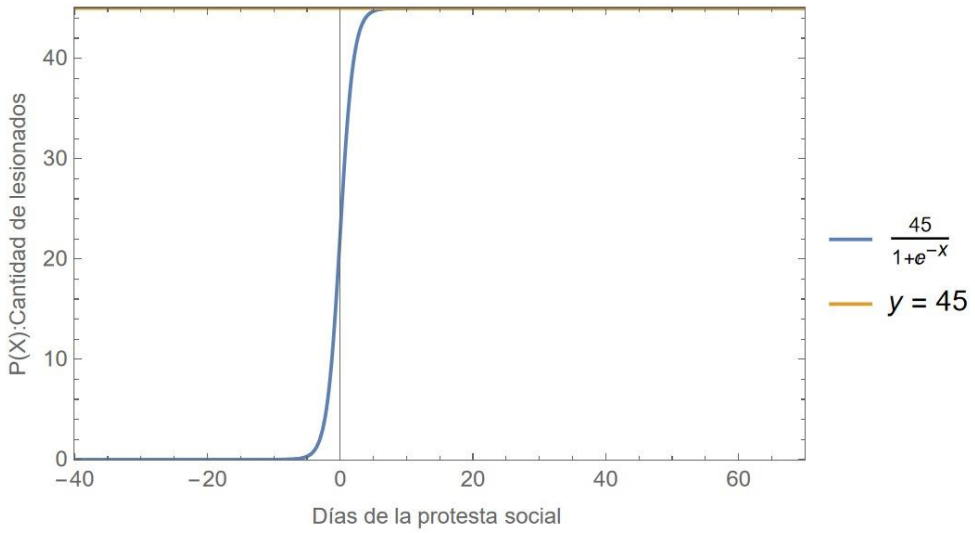
mencionados anteriormente se supuso inicialmente, que en Colombia la cantidad de personas que efectuaron la protesta social (cantidad de personal susceptibles) era un total de 45 personas, la cual se representó con una línea horizontal y = 45 que representaría además la cota máxima superior de todas las gráficas, este valor se estableció para realizar pruebas con el fin de poder analizar el comportamiento de las funciones al estar acotadas y así usar posterior a esto la cota real. Se decidió analizar las gráficas de las funciones: logarítmica, exponencial, raíz cuadrada y logística, las cuales se graficaron en Wólfram Alpha obteniendo así las figuras 7 y 8. En la Figura 1 se encuentra la población susceptible y = 45, la función logarítmica de color azul, la función raíz cuadra de color amarillo y la función exponencial de color verde. En la Figura 2 se encuentran presentes la población susceptible y = 45 de color amarillo y un caso con valores reducidos de la función logística presentada de color azul.

Figura 7.
Gráfico de función logarítmica, exponencial y raíz cuadrada



Fuente: Elaboración propia

Figura 8.
Gráfico de función logística



Fuente: Elaboración propia

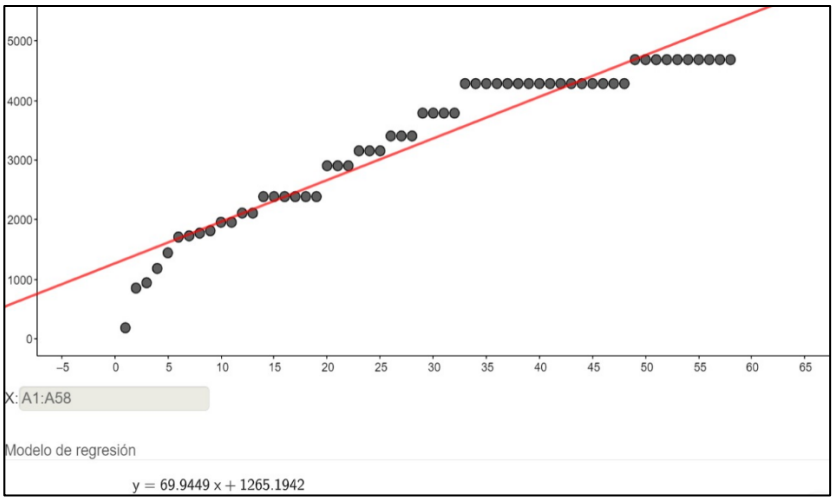
El análisis de cada gráfica permitió usar la función logística para analizar las discusiones de los estudiantes, ya que cuando x tiene a infinito $P(x)$ tiende a la función restricción que es $y = 45$ convirtiéndose así en una asíntota de la función, además de esto, el incremento de la función logística esta dado de una manera paulatina ya que tiene un incremento respecto a una constante K de proporcionalidad del problema.

No se hizo uso de la función exponencial debido a que esta siempre va a estar en aumento lo cual no tendría sentido alguno en la problemática social; la función logarítmica siempre tendrá un incremento muy lento y para alcanzar a llegar a la cantidad de personas susceptible tomaría muchos días en la problemática social, lo cual no tiene sentido en el fenómeno estudiado. Por último, se hizo uso de la función raíz cuadrada, ya que el

incremento de esta es moderado y se puede modificar mediante parámetros; el uso de esta función se descartó debido a que siempre tendrá a aumentar sobrepasando así la cota superior $y = 45$ previamente establecida.

Una vez realizado este análisis, se graficaron los datos recolectados de la ONG TEMBLORES (60 datos acumulados) como lo muestra la Figura 9, donde la pendiente de linealización de los datos con el fin de determinar una posible constante r de proporcionalidad respeto a la violencia.

Figura 9.
Gráfico de 60 datos linealizados del paro nacional en Colombia 2021.



Elaboración propia

Con la pendiente de la linealización, el uso del modelo logístico $\frac{dp}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$, diversos supuestos planteados y el uso de ecuaciones diferenciales se logró construir un posible modelo el cual, por la naturaleza de su construcción tendría días en los que el modelo

se ajustaría perfectamente a los valores iniciales planteados, además permitiría hacer un posible estimado de los demás días; siendo esto uno de sus mayores alcances. Así mismo el modelo no permite obtener resultados exactos por día debido a las limitaciones que se generar al tener varias variables y supuestos sobre el tipo de violencia usada por la fuerza pública. Este modelo se resolvió mediante dos maneras:

i) Resolviendo la ecuación diferencial del modelo logístico por medio de un problema de valor inicial.

Para usar este método uso la población inicial de afectados reportados por la ONG, la cual correspondía a $P(0) = 184$ los cuales corresponden a los afectados del día 1 del estallido social, la constante de proporcionalidad $r = 0.15$ y la población susceptible $K = 4687$. Posterior a esto, se continuo a resolver el modelo logístico haciendo uso del método de variables separables de las ecuaciones diferenciales.

Modelo logístico

$$\frac{dp}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{1}$$

Se separan las variables y se integra a ambos lados respecto a *dp* y *dt*

$$\int \frac{dp}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int r dt \tag{2}$$

Resolviendo el lado izquierdo de la ecuación 2 por medio de fracciones parciales se tiene

$$\int \frac{dp}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\left(1-\frac{P}{K}\right)} \tag{3}$$

$$\frac{1}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \frac{A\left(1-\frac{P}{K}\right) + BP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} \tag{4}$$

$$1 = A\left(1-\frac{P}{K}\right) + BP \tag{5}$$

Haciendo $P = 0$ en la ecuación 4 se tiene:

$$1 = A\left(1-\frac{0}{K}\right) + B0 \tag{6}$$

$$1 = A(1-0) + 0 \tag{7}$$

$$1 = A \tag{8}$$

Reemplazando $A = 1$ y haciendo $P = K$ en la ecuación 5 se tiene

$$1 = \left(1-\frac{K}{K}\right) + BK \tag{9}$$

$$1 = (1 - 1) + BK \tag{10}$$

$$1 = BK \tag{11}$$

$$\frac{1}{K} = B \tag{12}$$

Obteniendo así finalmente el valor de A = 1 y el valor de $B = \frac{1}{K}$. Integrando la fracción parcial definida en la ecuación 3 se tiene

$$\int \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{K}}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dp \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{P} + \frac{1}{k\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dp \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{P} + \frac{1}{(k - P)} dp \tag{15}$$

$$\ln|P| - \ln|k - p| + C \tag{16}$$

Resolviendo el lado derecho de la ecuación 2 se obtiene que

$$\int rdt = rt + C \tag{17}$$

Igualando la ecuación 16 y 17 para aplicar la función en ambos lados se tiene que:

$$\ln|P| - \ln|k - p| + C = rt + C \tag{18}$$

$$\ln\left|\frac{P}{k-p}\right| + C = rt + C \tag{19}$$

$$e^{\ln\left|\frac{P}{k-p}\right|+C} = e^{rt+C} \tag{20}$$

$$\frac{P}{k-p} = ce^{rt} \tag{21}$$

Usando el problema de valor inicial donde $P(0)= 184$ donde $t = 0$ en la ecuación 21 se obtiene

$$\frac{P_0}{k-P_0} = C \tag{22}$$

Finalmente usando el valor obtenido de *C* en la ecuación 22 y resolviendo para *P* en la ecuación 21 se obtuvo la ecuación final resultante

$$P(t) = \frac{K}{\frac{K-P_0}{P_0}\, e^{-rt} + 1} \tag{23}$$

Reemplazando los valores correspondientes a cada variable se tiene que

$$P(t) = \frac{4687}{\frac{4687-184}{184}\, e^{-0.15t} + 1} \tag{24}$$

$$P(t) = \frac{4687}{24.47e^{-0.15t} + 1} \tag{25}$$

Siendo la ecuación 25 el modelo que describe el estallido social por medio de la resolución de un problema de valores iniciales de ecuaciones diferenciales.

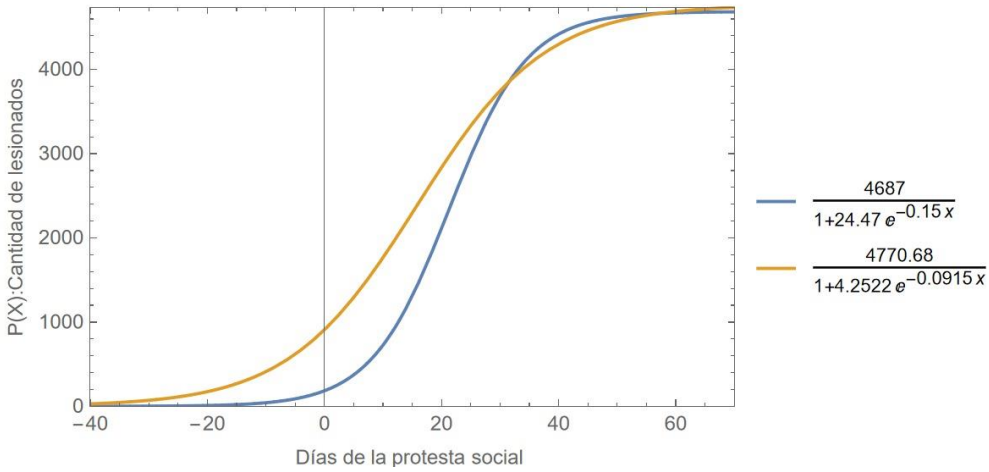
ii) Realizando un modelo de regresión logística después de introducir los 60 datos con una calculadora graficadora.

Para este método se usó la calculadora graficadora GeoGebra introduciendo los 60 datos recolectados por la ONG para obtener la expresión de la regresión logística dada por GeoGebra de donde se obtuvo:

$$H(t) = \frac{4770.68}{1 + 4.2522e^{-0.0915x}} \tag{26}$$

Estos dos métodos se usaron para comparar ambas gráficas y determinar si la función logística obtenida por medio del problema de valor inicial haciendo uso de ecuación diferenciales, tenía una relación con un margen de error mínimo respecto a la función logística realizada por medio de la programación de una regresión logística de los 60 datos usados. Ambas funciones se graficaron en Wólfram Alpha (Ver anexo D), como se muestra en la Figura 10, para comparar la similitud de cada una. La función del problema de valor inicial solucionada por medio de ecuaciones diferenciales se graficó de color azul $P(x) = \frac{4687}{1+24.47e^{-0.15x}}$ con x = número de días y P(x) cantidad de lesionados, mientras que la función realizada por medio de una programación de regresión logística se realizó de color amarillo $H(x) = \frac{4770.68}{1+4.2522e^{-0.0915x}}$ con x = número de días y $H(x)$= cantidad de lesionados.

Figura 10.
Gráfica de las funciones logísticas establecidas



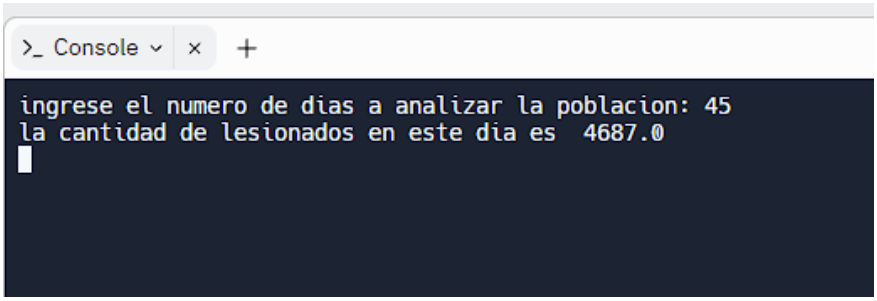
Fuente: Elaboración propia

Finalmente se estableció el modelo logístico como adecuado para la investigación, debido a que la solución de este modelo se ajustaba a los datos recolectados y permitía realizar interpretaciones con enfoque crítico. Sin embargo, se buscaba también que los participantes reconocieran sus alcances y sus limitaciones, e incluso, propusieran otros modelos que, según ellos, pudieran representar mejor el fenómeno.

Una vez definido el modelo, se estableció un contexto para aplicar dicho modelo junto con las demás suposiciones para ponerlo en práctica. Además de esto, se creó un algoritmo en Python (Ver anexo A) donde los estudiantes pudieran interactuar con la aplicación para analizar la gráfica de la función logística de diversas maneras. Este algoritmo está diseñado para solicitar al usuario un día determinado a analizar, una vez realizado esto el usuario podrá evidenciar la gráfica de la función logística hasta el día establecido y la

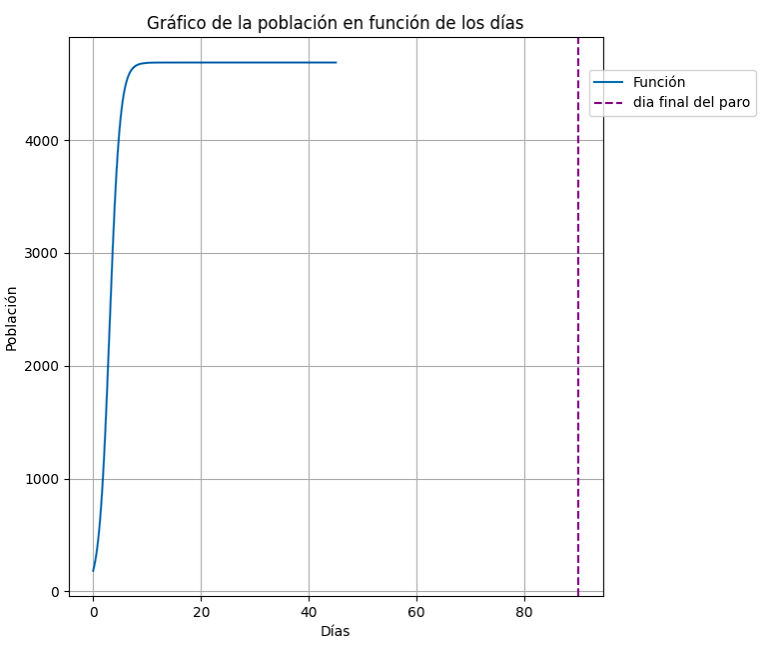
cantidad de lesionados en el día dado. En la figura 11 y 12 se puede evidenciar un ejemplo del uso que los estudiantes pueden llegar a tener

Figura 11.
Consola del programa creado en Python



Fuente: Elaboración propia

Figura 12.
Gráfica creada por el de programa de Python



Fuente: Elaboración propia

Por último, se establecieron las posibles preguntas con un enfoque socio-crítico que generaran discusiones de tipo matemático, tecnológicas y reflexivas sobre el modelo como por ejemplo : ¿Piensas que las variables definidas son las más adecuadas?, ¿Existe algún mecanismo para validar los resultados brindados por el modelo?, ¿Qué factores intervienen en la problemática?,¿El modelo permite establecer cuál es la población más vulnerable?, otras preguntas emergieron a medida que se interactuó con los estudiantes. Además del tipo de discusiones generadas por las preguntas, estas permitirían dejar en manifiesto las componentes de las matemáticas en acción priorizadas por los estudiantes cuando se les solicitaba validar, reestructurar o crear un nuevo modelo con base en el modelo previamente presentando.

3.Fase de realización. En esta fase se entregó a cada estudiante un documento que contenía los procedimientos presentados en la fase dos para obtener la ecuación 25; adicionalmente, los estudiantes tuvieron a disposición una computadora que contenía un programa en Python, un programa en Wólfram Alpha y una serie de valores iniciales informativos del estallido social; se aclaró que los programas brindados podrían ser usados cuando fueran requeridos. Una vez entregado el material, se les solicitó a los estudiantes que analizaran de manera exhaustiva el modelo y compararan los resultados obtenidos contra los datos informativos dados inicialmente. Posterior a esto, se hizo una entrevista episódica basada en las preguntas establecidas en la fase dos (fase de estructuración).

3.4 Recolección de datos

Para esta investigación se utilizaron audios, videos, documentos o diarios de campo; los recursos como audios y videos se produjeron en 4 grabaciones que se guardaron formato MP4 que correspondía cada uno respectivamente a cada estudiante. Cada grabación cuenta con un tiempo promedio de 35-50 minutos, las cuales se almacenaron en una nube. El investigador y su director de trabajo de grado tenían acceso a éstas. Además de las grabaciones de voz, se recolectaron los documentos creados por los estudiantes que contenían gráficas y algoritmos de programación realizados por los estudiantes entrevistados.

Para responder a la pregunta de estudio, se realizó una trascripción completa de cada audio; estas trascripciones permitieron extraer un subconjunto de datos, los cuales se dividieron en dos archivos. El primer archivo se diseñó en formato Word que contaba con una tabla en la que se codificaban las acciones matemáticas priorizadas por los participantes al realizar, validar o invalidar un modelo matemático presentado. Esta clasificación se realizó siguiendo cinco componentes de las matemáticas en acción. El segundo archivo, en Excel, contenía el diseñó de una matriz para identificar patrones y categorías de cada entrevistado. Se obtuvo por cada entrevistado un archivo en Excel con 3 libros en cada archivo; cada libro correspondía a: i) Actividades reflexivas; ii) Actividades matemáticas; iii) Actividades tecnológicas.

En estas sesiones los participantes tuvieron la oportunidad de expresar sus argumentos matemáticos, tecnológicos y reflexivos. Además de esto, dejaron en evidencia las conjeturas y posturas que cada uno de ellos puede tener para enfrentar un problema crítico en la sociedad por medio de las matemáticas y de lenguajes de programación.

3.5 El análisis de la información

Las discusiones brindadas por los estudiantes se analizaron con base en referentes teóricos descritos en el segundo capítulo. Estas discusiones se analizaron siguiendo las orientaciones del análisis temático Braun et al (2019) que busca capturar las difusiones de un significado, uniendo datos que podrían parecer disipados o podrían ser un significado que ocurre en múltiples contextos. Es decir, por medio de este análisis se espera encontrar significados más explícitos y concretos que son construidos en unidades menores de un significado (patrones)(Braun et al., 2019).

Se revisaron las trascripciones de cada entrevista con el objetivo de evidenciar el tipo de discusiones presentes en cada fragmento. Se realizó una primera codificación siguiendo la "orientación inductiva, donde el investigador inicia el proceso analítico a partir de los datos, trabajando de abajo hacia arriba para identificar significados sin importar ideas" (Braun et al., 2019, p. 853, original en inglés). En esta parte no se definieron categorías y el respectivo análisis se realizó con base en la pregunta de investigación. Posterior a esto, se crearon cuatro matrices en Excel que contenía la transcripción de cada entrevista; las matrices creadas, se discutieron con la finalidad de encontrar fragmentos relevantes sobre

los aspectos matemáticos, tecnológicos y reflexivos del uso de los modelos junto con los componentes priorizados de las matemáticas en acción al usar el modelo matemático establecido.

Una vez analizada las trascripciones se realizó el análisis de los datos en dos partes, con el fin de abordar los dos primeros objetivos específicos planteados. Para responder al primer objetivo de, *reconocer el tipo de discusiones que tiene los docentes en formación matemática y los estudiantes de estadística en la creación de modelos matemáticos que describan problemáticas sociales* se usaron dos de las cuatro entrevistas. En dichas entrevistas se identificaron conceptos claves en las trascripciones que estuvieran asociados a las categorías establecidas por Silva y Kato (2012), descritas en la sección de caracterización de la actividad de modelación matemática desde una perspectiva crítica. Estas categorías permitieron crear una codificación para analizar los tipos de discusiones que generaban los estudiantes al usar el modelo matemático.

Para responder al objetivo de *identificar el uso que tienen las matemáticas en acción en los estudiantes para validar y usar un modelo matemático que describe el estallido social en Colombia*,se analizaron las otras dos transcripciones con el propósito de enfocar la mirada en las componentes de las *matemáticas en acción* priorizados por los estudiantes, se generó una codificación por cada componente de las matemáticas en acción mencionadas por Skovsmose (2020b). Los dos procesos mencionados estuvieron orientados en un proceso de codificación deductiva “donde el investigador aborda los datos con diversas ideas, conceptos

y teorías, o incluso códigos potenciales basados en ellos, que luego se exploran y etiquetado dentro del conjunto de datos" (Braun et al., 2019, p. 853, original en inglés).

Finalmente se analizaron nuevamente las codificaciones creadas para identificar la cantidad de fragmentos presentes en cada categoría. Se obtuvo una alta presencia en las actividades reflexivas en cada entrevista además de las maneras en la que los estudiantes priorizan los componentes de las *matemáticas en acción*.

A partir de los datos obtenidos junto con la respectiva categoría de cada uno, se analizó nuevamente los fragmentos para encontrar evidencias que permitieran dar cuenta de: El uso adecuado de las variables, el uso del modelo o ecuación diferencial, validez de los resultados numéricos obtenidos, restricciones del modelo, tensiones que puede ocasionar modelar la problemática social, interpretación de los datos al pasar los días, responsabilidad al usar el modelo, consecuencias al afirmar el modelo logístico o algún otro modelo como el más adecuado, discusiones que expresen la causa de los resultados obtenidos y la creación de nuevos modelos más ajustados a la realidad.

Este análisis buscó dejar de manifiesto, las acciones tomadas por cada estudiante para lograr generar cuestionamientos que permitieran validar el uso y aplicabilidad de los modelos que describen la problemática del estallido social en Colombia.

4. Resultados y conclusiones

Este capítulo se organiza para describir los resultados, discutir los hallazgos y plantear las conclusiones del estudio. La sección de resultados se organizó para describir cada caso de manera individual y acompañarlo de su respectivo análisis. En la parte de discusión se presenta un análisis global de los cuatro casos y los aportes del estudio.

4.1 Análisis de los resultados obtenidos

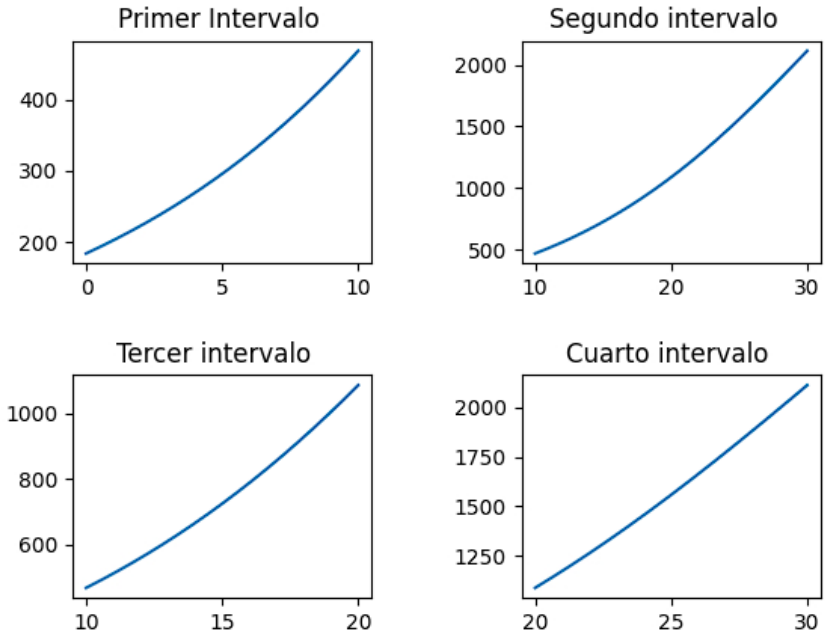
El caso de Carlos: después de recibir el material y las orientaciones, Carlos analizó los aspectos matemáticos del modelo; es decir, revisó los supuestos y procedimientos matemáticos que se realizaron para obtener la ecuación logística y la constante *K* del modelo pues manifestó "*La constante K de proporcionalidad que se obtuvo fue de -0.15……en este caso me gustaría hacer primero una comparación entre la base datos que presentas aquí y pues el modelo*.".

Luego, Carlos usó el algoritmo de Python para obtener datos sobre el número de víctimas en *n* días; donde expreso que *"usando el modelo que está aquí en Python , en mi caso deseo ver cuántos casos de abuso policial hubo en el día 15 del estallido social , según esto me dice que son 1309.54 aprox 1310 casos si especificamos un poco más"*; Con ello, se busca confirmar la validez de los supuestos utilizados, ya que se establece un contraste entre los datos reales y los datos generados por el modelo para verificar si hay alguna divergencia entre ellos. Al respecto Carlos anotó que "[…] *el modelo nos sirve bastante*

como para tener idea de lo que podría llegar a pasar con ciertos casos […]parece ser que el modelo se acopla bastante a los datos". Carlos atribuye la función logística como "*la más adecuada*" para este fenómeno, pues no encontró errores en el desarrollo matemático y tecnológico del modelo. Analizó de nuevo el modelo y expresó: "*la cuestión es que tenemos muchas variables […], pero habría que tomar otro tipo de datos porque no tendría sentido comparar abusos de causa policial con muertes y laceraciones*".

A pesar de esta limitación, Carlos ratificó la función logística dada como adecuada para describir el fenómeno social e hizo uso de las ecuaciones diferenciales y del cálculo integral para validar la parte matemática y tecnológica del modelo. Luego, Carlos hizo una gráfica usando herramientas de cálculo diferencial. En particular, seccionó por intervalos la función logística, como se evidencia en la Figura 13 (Ver anexo B), para atribuir un tipo de función a cada intervalo. Allí expresó que "*Pues a ver yo la cortaría primero en un intervalo de 0 a 10 días, entonces veamos que de 0 a 10 días tenemos un incremento, pero no es un incremento tan extremado […] de 10 a 30 ahí sí ya vemos un comportamiento exponencial […] de 20 a 30 pero es que pega un salto brutal*".

Figura 13.
Interpretación por intervalos de la función logística dada por Carlos



Fuente: Elaboración propia

Esta interpretación le permitió a Carlos comprensiones sobre el comportamiento del estallido social; pues a cada gráfica de los intervalos seleccionados, le asignó una respectiva interpretación social. Una vez realizado este análisis, Carlos expresa "[….] *considero que es un modelo que se acopla bastante a la realidad aunque no es exacto hay que tenerlo en cuenta, por lo factores que se pueden llegar a presentar , pero si es algo que nos puede llegar a dar una idea de lo que puede pasar en una manifestación social*" ello le permitió

concluir que "*le vería aplicabilidad [al modelo] en ese sentido, en capacitar a los oficiales que van a hacer parte de este escuadrón para evitar que esta gráfica siga en aumento*".

Una posible interpretación del análisis de este caso permite señalar que, desde la perspectiva de este futuro profesor de matemáticas, los modelos pueden cumplir diversas usos y funciones, entre ellas las funciones descriptivas y las prescriptivas; explicando que se puede hacer uso del modelo sin necesidad de que este logre ser preciso. Esto ratifica que para Carlos los usos, alcances y precisión del modelo dependerán de la cantidad de variables que se tengan en cuenta en su construcción. Se puede colegir que Carlos usará el modelo con fines no determinísticos, pues al no tener en cuenta todas las variables del modelo, tal y como lo mencionó en la parte tecnológica, el modelo presenta ciertas variantes en los resultados; es decir, el modelo no será usado por Carlos para determinar valores exactos. Con respecto a la situación estudiada, esto se evidencia en el uso que hace del modelo para comprender aspectos críticos durante el estallido social, a la vez que le permite "anticipar" el número de víctimas cuando las condiciones en las que se creó el modelo se conserven.

Estas funciones estuvieron soportadas en la coherencia entre el tipo de datos, el correcto uso de procedimientos matemáticos, argumentos e interpretación de gráficas y resultados. En el análisis del modelo, Carlos hizo uso de las matemáticas para realizar y ratificar su construcción, dejando en evidencia las diferentes perspectivas sociales que este puede tener por medio de la modelación de un fenómeno. Estas interpretaciones realizadas

a partir del ejercicio del análisis del modelo logístico, le permitió tener una comprensión más precisa sobre dicha situación.

En el análisis del modelo logístico, Carlos utilizó las matemáticas para ratificar la construcción y validación del modelo, dejando en evidencia las diferentes perspectivas sociales que este puede tener por medio de la modelación de un fenómeno. Estas interpretaciones, derivadas del ejercicio de análisis del modelo, contribuyeron a una comprensión más precisa de la situación; en otras palabras, estas discusiones matemáticas actuaron como soporte de una coherencia interna del modelo, a partir de las cuales se hizo y se confió en su validez. Carlos se apoyó en la tecnología como una manera de generar visualizaciones, disminuir la carga operatoria y generar interpretaciones; asimismo, confió en el modelo como un indicador/herramienta para comprender de manera más detallada otros factores del estallido social.

Las discusiones tecnológicas (el uso de herramientas y la matemática como herramienta para la construcción de mejores modelos) atendió a requerimientos clave de la actividad matemática desarrollada. Una vez analizada la parte matemática y tecnológica del modelo, Carlos decidió generar discusiones reflexivas en torno a la aplicabilidad de éste.

Carlos argumenta las acciones que se pueden desarrollar por medio del modelo logístico para la toma de decisiones en un eventual estallido social, expresando "[…] *con ese modelo logístico hacen una predicción de lo que puede llegar a pasar con estas intervenciones que va a hacer el ESMAD (Escuadrón Móvil Anti-Disturbios), pues entonces*

usted empieza a preparar a sus oficiales con que: a es que bueno nosotros primero vamos a intervenir con el diálogo […]". El argumento expuesto por Carlos explica y pone en práctica el uso del modelo sin importar si este es preciso o no. Carlos usa el modelo para encontrar estimaciones de cifras que puedan dejar en manifiesto la cantidad de heridos generados por la fuerza pública, si se disuelve una manifestación con un choqué directo; es decir, sin la intervención de uno o más diálogos. Para Carlos, el propósito de esta aplicabilidad consiste en mostrarle a agentes en formación del ESMAD, un intervalo de heridos en un día cualquiera si se dispersa una manifestación con violencia; buscando generar así una conciencia en estos, donde se pretende promover usar el diálogo como primera herramienta para disolver una manifestación social.

En esta misma línea se logró evidenciar que las reflexiones brindadas por Carlos trascienden más allá de una interpretación académica de un modelo, pues este expresó dos argumentos fundamentales que permiten pensar en la experiencias o acercamientos que este tiene con problemáticas sociales fuera del aula. Carlos mencionó que "[…] *debemos tener presente que yo lo estoy viendo desde la perspectiva estudiantil, desde la perspectiva de un ciudadano que vivió todos casos, que estuvo cerca de una de las fuentes de estallido social* […]" donde también pudo determinar que "*Podríamos estar hablando de una lucha de clases sociales, porque no es para nadie un secreto que el oriente siempre ha estado relegado de la sociedad caleña, siempre todo lo malo que pasa es culpa del oriente* […]"; estos argumentos dados por Carlos, permiten pensar en el rol que este tiene como individuo

crítico en la sociedad; además de que hace uso de las matemáticas como un instrumento para la argumentación de problemáticas que resultan críticas en un determinado contexto social.

Finalmente, en relación con la actividad reflexiva, Carlos evidenció que el modelo permite reflexionar sobre los actores del estallido social, identificando la población más vulnerable junto con su localidad. Manifestó que el modelo permite inferir un abandono por parte del estado y una falta de compromiso para entrar en diálogos que permitieran detener el incremento de personas afectadas. Estos elementos se consideraron claves en las discusiones reflexivas, como medio para dar sentido a los roles que el modelo cumple en el estudio del fenómeno. Llama la atención que, durante el análisis del modelo, Carlos no tuvo en cuenta el uso de la regresión lineal y otros factores fundamentales (supuestos adecuados) que permiten una mejor estructuración del modelo logístico para aprobar su validez; este hecho puede interpretarse como una consecuencia del poco énfasis que tienen estas temáticas en el currículo de formación de profesores, o, una interpretación alternativa, en que la atención de Carlos estuvo en la coherencia interna del modelo que le permitiera inferir conclusiones sobre el fenómeno social.

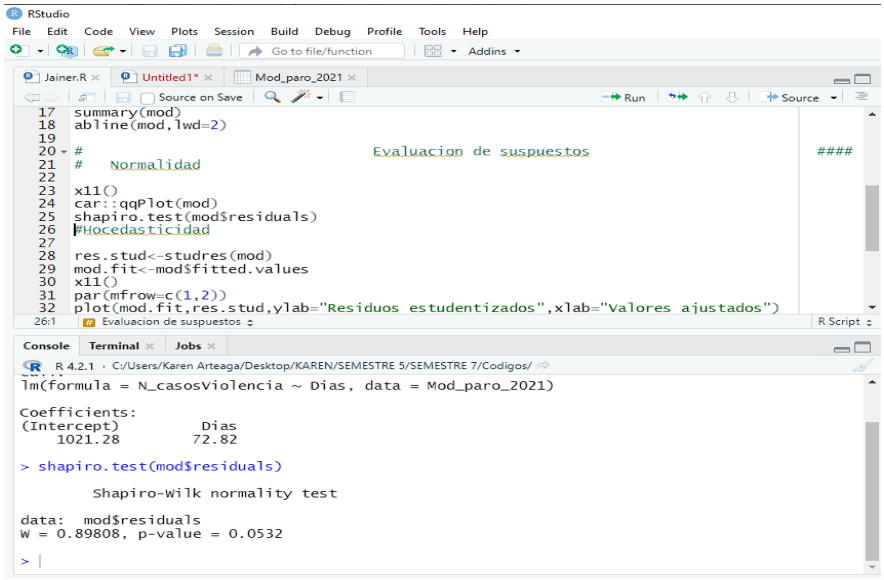
El caso de Cristina: una vez entregado el material y las orientaciones, Cristina analizó los supuestos usados para crear el modelo junto con los datos dados. Luego, ella analizó el modelo lineal y logístico de manera conjunta, manifestando que "*Al ser tan pocos días, la ecuación logística y lineal son muy similares, digamos que el comportamiento allí va a ser parecido, en ambas se ven que hay una relación, se podría decir que ambas siguen*

creciendo". El primer estudio desarrollado por ella fue de manera analítica, Cristina se realizó la pregunta ¿Qué criterio podría establecer para comparar el modelo lineal con el modelo logístico? A partir de ello, ella se dio cuenta que el criterio más adecuado es la dispersión que tienen los datos respecto a las gráficas. Al respecto, observó en la regresión de datos un comportamiento que se mantenía lineal al pasar los días; expresando que *"Allí la más adecuada parece que fuera la lineal, debido a que el tiempo es demasiado pequeño y digamos que los datos están como más condensados."* Cristina atribuye la función de regresión lineal como "la más adecuada" para este fenómeno, pues es la función que más se ajusta al criterio establecido por ella. Al darse cuenta que ambas gráficas iban en aumento, y para corroborar la función lineal como las más adecuada, decidió hacer uso de lenguajes de programación con la idea de buscar verificar los resultados que, de maneara analítica para ella, resultaban como válidos en un día específico.

Cristina hizo uso del lenguaje de programación R (Ver anexo C) para comparar los resultados de la función logística y función lineal. Con los valores obtenidos expresó que "*Si la relación es tan fuerte como parece ser en la gráfica (lineal), diría que el número de casos aumenta, pero esto no tiene sentido realmente, porque no es así.*" Con lo anterior ella explicó que no tiene un sentido hacer una comparación final entre la función lineal y la función logística; esto debido a que la función lineal siempre seguirá en aumento, mientras que la curva de la función logística se aplanará desde un día *n* hasta infinito.

Por último, manifiesta que la única utilidad que puede tener el modelo logístico puede ser para "*ver métricas asociadas a un modelo logístico que permitan ver si es bueno o no; o también podrías ver en un determinado tiempo (intervalo) entre los datos que tienes y poner ese mismo tiempo y calcular las diferencias en cuántas veces ha sido muy cercano, tu dirás que tan cercano tiene que estar el valor entre el real que tienen y el que te arrojo el que programaron*". Con ello, dejó en evidencia los errores en el desarrollo matemático y tecnológico que tiene el modelo logístico y argumentó la necesidad de otro modelo. En esta misma línea, Cristina con ayuda del lenguaje de programación R, revisó el desarrollo matemático y tecnológico de la función lineal tal y como se evidencia en la Figura 14, observando que "[…] R^2*es de 91 [se refiere al modelo lineal], lo que podemos decir que el 91% de los casos de violencia que hay puede estar explicado por el modelo que ajustamos de acuerdo al tiempo, porque es un modelo lineal simple […]*", por lo que valida los procesos matemáticos y tecnológicos del modelo lineal.

Figura 14.
Consola del programa R studio usada por Cristina



Fuente: Elaboración de la participante Cristina

Cristina hizo uso de los modelos lineales simples para analizar la pendiente del modelo, logrando hacer una interpretación en la extensión de los datos con la regresión lineal, comprendiendo el estallido social según las variables que estuvieran actuando en el modelo. Esto le permitió a Cristina concluir en la parte matemática y tecnológica del modelo, que en caso de tener un segundo estallido social el modelo lineal "*se puede usar para comparar, donde se podría hacer un nuevo modelo con los nuevos datos y comparar si creció o disminuyó, si en el uno hay más violencia que en el otro*".

Con respecto a la actividad reflexiva, se evidencia que Cristina no hizo uso del modelo para dar argumentos que permitieran criticar las maneras de accionar del estado en el estallido social. Al hacer uso del modelo y asociarlo con problemáticas sociales que son

del conocimiento de ella, manifestó que la población más vulnerable en el estallido social se dio en "*el oriente de Cali, donde pertenecen las personas con menos recursos, las personas que siento que se sienten más olvidadas, podría decirse así*"; en esta misma línea, logró hacer un paralelo con otros barrios de la ciudad de Cali, esto lo hizo con el fin de mostrar el abandono del oriente de la Ciudad respecto a otros sectores de esta misma. Cristina también expresó que "*Si es que es así, o no has visto las calles de ciudad de jardín, divinas preciosas [....] Precisamente ciudad jardín es un gran contraste a puerto resistencia (oriente de la ciudad de Cali)*". Es de resaltar que Cristina no se atrevió a hablar sobre este paralelo y el estallido social como una lucha de clases sociales.

En esta misma dirección reflexiva del uso del modelo, Cristina esbozó una posible aplicación del modelo lineal para llegar a tomar acciones a futuro y evitar el aumento de casos de violencia, apuntando que "*Yo creo que las personas que se encargan de calmar por así decirlo, los policías, el ESMAD, no están haciendo bien su trabajo, porque protestar no está mal, es un derecho, ellos no saben hacer su trabajo, entonces es eso, la violencia es el último recurso y no debería ser un recurso, ellos deberían intentar de mil formas no llegar a eso*."

El argumento expuesto por ella, expresa que no es necesario un modelo matemático para mostraré a una comunidad en específico (agentes del ESMAD) que no es necesario hacer uso de la violencia para dispersar una protesta social; por tanto, no considera importante exponer el modelo lineal a los agentes del ESMAD antes de una protesta social,

pues ella considera que la fuerza pública debe hacer bien su trabajo. Por último, llama la atención a la crítica que hace Cristina sobre el estallido social en medio de una pandemia que ponía en estado crítico diferentes países del mundo, expresando que "*También noté que tiene que estar muy, muy pailas un país para que se movilice en pandemia donde el riesgo no es solamente salir a movilizarse ni estar expuestos a los tipos de violencia que mencionaste en tu modelo, si no también expuesto al COVID-19 [....]*".

Un análisis de este caso permite colegir que, para esta futura profesional en estadística, los modelos solo pueden cumplir funciones descriptivas con respecto a la situación estudiada, esto debido a que el modelo logístico solo fue analizado centrado en los fundamentos matemáticos para establecer su validez. La no validez del modelo logístico y la reformulación de un nuevo modelo lineal deja en evidencia la importancia de los argumentos matemáticos en la construcción de modelos, lo cual sustenta evidencia sus discusiones matemáticas y tecnológicas. Cristina se apoyó en diferentes lenguajes de programación, para obtener resultados matemáticos y estadísticos para interpretar y estructurar un modelo lineal adecuado.

Finalmente, en relación con la actividad reflexiva, Cristina logra identificar, con su modelo, cuál fue la población afectada y más vulnerada. Sobre esto, llama la atención dos aspectos; el primero, las discusiones reflexivas fueron sucintas y con poco alcance, lo cual puede interpretarse como que, la principal preocupación de esta estudiante fue la validez del modelo y, a partir de ello, determinar sus alcances y usos. En segundo lugar, atribuyó una

nueva variable social (Pandemia COVID-19), la cual no se tuvo en cuenta en el estallido social y fue relacionada como una de las posibles causas que impulsaran a los manifestantes a seguirse manifestando en las calles; esto ofrece un panorama diferente de las posibles problemáticas que pudieron ocasionar el estallido social.

De manera conjunta, los datos de Cristina y Carlos fueron posteriormente codificados a partir del uso de uso de las categorizaciones y unidades de significado planteadas por Silva y Kato (2012). Esto con el fin de observar la presencia de características de la perspectiva sociocrítica de la modelación matemática. Los resultados obtenidos que se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. *Codificación de las unidades del significado de dos estudiantes*

ESTUDIANTE	CATEGORIAS	UNIDADES DE SIGNIFICADO
Carlos	Participación activa del alumno en la construcción del modelo	Participación crítica y democrática en las clases
	Participación activa del estudiante en la sociedad	Desarrollo de acciones comunitarias; Extensión al contexto social; Acción crítica en la sociedad; Importancia de las Matemáticas en la sociedad.
	Problema no matemático de la realidad	Interpretar modelos matemáticos según la realidad; importancia de las Matemáticas en la sociedad; Importancia de las Matemáticas en la sociedad
	Rol del docente como mediador	Participación crítica y democrática en el aula; Importancia de las Matemáticas en la sociedad
	Participación activa del alumno en la construcción del modelo	Participación crítica y democrática en las clases

Cristina	Participación activa del estudiante en la sociedad	Extensión al contexto social
	Problema no matemático de la realidad	Utilizar problemas no matemáticos de la realidad; Interpretar modelos matemáticos según la realidad
	Rol del docente como mediador	Participación crítica y democrática en el aula

Elaboración propia

La anterior tabla deja en manifestó la diferencia de las unidades del significado en cada estudiante, lo que implica de manera a priori que los estudiantes tendrán diversas maneras de usar los modelos matemáticos en la perspectiva socio-crítica.

El caso de Stephanie: Una vez entregada las gráficas y las instrucciones, Stephanie analizó la curva amarilla y azul de la Figura 10. Luego se le pregunta si se puede considerar la función amarilla como la más precisa ya que fue diseñada por una máquina; Stephanie manifestó que, para ella, no es suficiente que una computadora realice una regresión logística de los datos para que pueda ser muy precisa, poniendo en duda la validez de la curva amarilla que fue realizada por medio de la regresión logística.

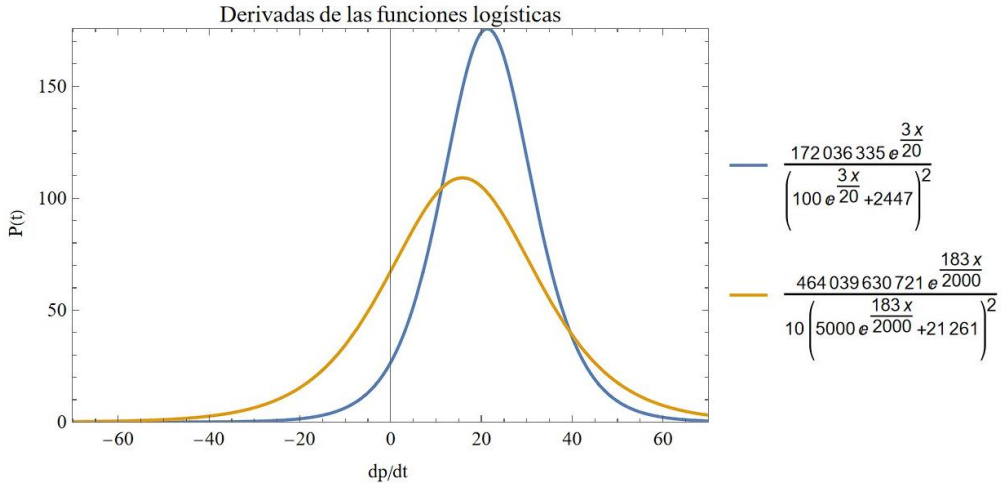
Stephanie analizó nuevamente las gráficas para determinar cuál de las dos modelos se ajusta mejor a la problemática social y expresó que "*Ambas gráficas representan un ajuste aceptable, la diferencia entre estas dos varía de acuerdo con el intervalo de confianza que tenga cada una de ellas, es decir se deben corroborar con los datos iniciales cuál de las dos gráficas tiene un mejor ajuste en todos los días de la protesta social, pero ambas*

tendrán un porcentaje de error. Pues es de recordar que el porcentaje de error dependerá de los supuestos planteados para crear el modelo".

Posterior a esto, se le solicitó a la estudiante que corroborar los datos haciendo uso de ambas funciones, por lo que usa valores para la variable *x;* Ella empezó a comparar respecto a los datos reportados del estallido social. Una vez realizado esto, ella expresa que "*La computadora puede hacer un ajuste más preciso a través de la regresión logística, pero esto no garantiza que sea más confiable, pues puede haber una mayor desviación en los datos iniciales. Por otro lado, el modelo planteado con ecuaciones diferenciales mediante valores iniciales puede ser más confiable, ya que los datos obtenidos son similares a los datos reales. Es decir, la computadora tiene la capacidad de considerar aquellos parámetros que no se pueden visualizar con lápiz y papel, pero en términos de precisión, el problema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales es mejor*".

Stephanie manifestó que existe otra forma de verificar cuál de las dos gráficas tiene mayor validez, lo cual implicaba derivar cada función logística de la Figura 10 para usar el día $x = 20$ y corroborar si efectivamente en las gráficas se evidencia que el día 20 es un día crítico como lo fue en el estallido social; se le pregunto a la estudiante si era posible hacer esto; al respecto, ella inmediatamente respondió que sí, calculando las derivadas de las funciones por medio de la calculadora graficadora Wolfram Alpha (Ver anexo E). El resultado por Stephanie se puede observar en la Figura 15 la cual corresponde a las derivadas de la función logísticas.

Figura 15.
Derivadas de la función logística



Fuente: Gráfico realizado por Stephanie

Una vez planteadas las gráficas, la estudiante manifiesta "*Aquí podemos trazar una línea recta x=21 con el fin de llegar al punto máximo de la función azul, de esta manera evidenciamos un punto máximo en la derivada, lo que nos indica que en la gráfica original de la función azul de la función logística tendrá un máximo, es decir el día x= 21 representa el día máximo del estallido social según mis cálculos e interpretaciones. Además, esto no esta tan fuera de la realidad ya que si lo comparamos con lo que realmente pasó ese día los datos estarían oscilando en un intervalo*".

En concordancia con la respuesta brindada por la estudiante, se le preguntó ¿Qué ocurre entonces con los primero 20-21 días, ya que nos explicaste que ocurre en un solo día concreto, pero y en los demás días? Al respecto, respondió "*En la gráfica azul se observa que los primeros 20 días tiene un incremento un poco paulatino, es decir la constante de*

proporcionalidad en estos días puede resultar un poco baja, además se logra percibir que en el día P(0) se tiene pocos casos de violencia. Por otro lado la gráfica amarilla representa un incremento un poco más rápido en los primeros 20 días, lo que representa una constante de proporcionalidad mayor, además se logra evidenciar que lo casos de violencia en P(0) son mayores que los de la gráfica azul."

Por último, la estudiante expresó que anclar las matemáticas con esta situación crítica "*[…] me permite relacionarlas más con lo 'cotidiano', aunque no se crea ser cotidiano que los policías tengan un abuso de autoridad diaria en la sociedad, pero si me permiten introducir las matemáticas en un contexto social y no en algo tan tradicional*".

Un análisis a los datos presentados sobre el caso de Stephanie deja en evidencia que, para esta profesora en formación, los modelos matemáticos pueden ser usados para generar diversos análisis y discusiones; además de esto, se destaca la manera en la que la estudiante abordó el desarrollo de la actividad, ya que inicialmente analizó las gráficas para evaluar la confiabilidad de alguna de las dos sin revisar ningún tipo de supuesto del modelo, solo realizó evaluaciones en las funciones. En este caso puede notarse un uso de la imaginación tecnológica debido a que la estudiante identifica acciones de las matemáticas por medio de un lenguaje, el cual en este caso es la calculadora graficadora Wólfram Alpha.

Por otro lado, también pueden observarse características del razonamiento hipotético; en particular, se observa su presencia de una manera implícita ya que la estudiante menciona que la variabilidad del modelo dependerá de los supuestos realizados

al crear el modelo, pero no se percata de analizar estos mismos en la creación del modelo. Además de esto, las respuestas brindadas por esta estudiante dejan en manifiesto la manera en la que esta prioriza la imaginación tecnológica, ya que, identifica las componentes priorizadas al momento de construir el modelo matemático presentado por medio de herramientas tecnológicas y lenguajes de programación. Es decir, Stephanie reconoce la manera en la que los lenguajes de programación pueden actuar como diseños tecnológicos que permitan la validación, restructuración y realización de un modelo matemático; identificando finalmente los diseños tecnológicos donde las matemáticas intervienen Skovsmose (2020b).

En consecuencia, la estudiante decide optar por la realización del modelo logístico legitimando la veracidad de este por medio del uso del cálculo inferencial, pues hace uso de la primera derivada para poder determinar los máximos y mínimos de una función. La estudiante realiza dicha acción, con el fin de contrastar el resultado obtenido como máximo de la derivada de la función logística con el valor crítica del estallido social; esto para verificar, si los valores obtenidos correspondían con los valores reales del estallido social en el respectivo día analizado.

El caso de Andrés: Este estudiante de estadística, al recibir el material, lo primero que hizo fue revisar la regresión lineal de la Figura 9, luego de ello preguntó por los supuestos establecido para elaborar el modelo de la función logística. Antes de determinar cuál de las funciones es la más adecuada o de responder alguna pregunta relacionada con

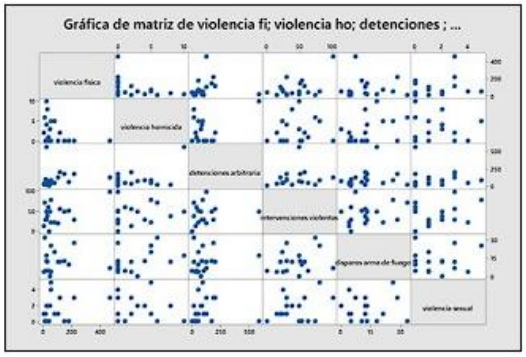
los modelos, este estudiante creó una base de datos para hacer uso de un lenguaje de programación R y determinar las variables que puedan tener relación entre ellas para la creación de modelos matemáticos.

Una vez realizado esto, se le preguntó al estudiante si efectivamente encontró una relación de los datos haciendo uso de la tecnología, por lo que expresó que "*Si, pero hay muchas variables que se deben de tener en cuenta para modelar este fenómeno, debido a que en dicho fenómeno social se vieron múltiples violencias. Es por esta razón que realice una base de datos la cual programe en R obteniendo así los siguientes resultados de la figura [Figura 16]. Los datos obtenidos por el programa R me permitirán encontrar una correlación entre cada variable para así poder determinar la cantidad de variables a usar junto con el modelo que se logre ajustar a estos parámetros.*"

Figura 16.
Representación de las correlaciones de violencias del estallido social

Correlaciones

	violencia fisica	violencia homicida	detenciones arbitraria	intervenciones violentas	disparos arma de fuego
violencia homicida	-0,425				
detenciones arbitraria	0,091	0,385			
intervenciones violentas	0,484	0,167	0,152		
disparos arma de fuego	-0,003	0,438	0,200	0,261	
violencia sexual	0,242	-0,043	-0,079	0,242	0,100



Fuente: gráficos extraídos de las elaboraciones de Andrés

Andrés explicó los resultados obtenidos por medio del lenguaje de programación R, los cuales estaban dados por dos matrices: la primera matriz estaba denominada como

correlaciones la cual está ubicada al lado izquierdo de la Figura 16, Andrés manifiesta que una correlación adecuada de datos es cuando se tiene un valor numérico próximo a 1 o -1. La segunda matriz está ubicada al lado derecho de la Figura 16; esta matriz deja en evidencia la dispersión de todas las variables al graficarse. Esta gráfica de dispersión de datos fue realizada por Andrés con el fin de determinar el comportamiento de las variables.

En esta misma perspectiva, el estudiante explica que en la matriz numérica los únicos datos que tendían a tener una correlación eran: las intervenciones violentas asociadas a la violencia física, la violencia homicida asociados a los disparos de arma de fuego y la violencia homicida asociado a la violencia física. En coherencia con lo anterior, Andrés manifiesta que "*las gráficas obtenidas anteriormente permiten establecer cuáles deben ser las variables principales para la construcción del modelo matemático*", explicando que aquellos puntos que traten de seguir una misma trayectoria, sin estar tan dispersos, significan que estos datos se podrán modelar mediante una función lineal, exponencial, logarítmica, etc.

Por último, se le preguntó al estudiante por la manera en la que actúan las matemáticas en este problema, al respecto Andrés expresa que "*los problemas de modelación matemática desde la estadística siempre actuaran de diversas formas, pues el estadístico siempre debe tener un pensamiento diferente a las demás ciencias, debido a que deben analizar cada dato desde una perspectiva diferente, para si lograr modelar o*

anticiparse a problemáticas desde las ciencias naturales hasta contextos sociales cotidianos".

Es importante resaltar que este estudiante se abstuvo de responder las preguntas ¿Cuál de las dos gráficas representa un mejor ajuste a este fenómeno social?, ¿Qué ocurre en los primeros 20 días en cada gráfica?, ¿Es mejor el ajuste logístico que hace la computadora que el ajuste que se hace haciendo uso de las ecuaciones diferenciales? ¿Por qué?, ¿Cómo podrías argumentar los días más críticos de este fenómeno social a partir de sus soluciones gráficas dadas? Las cuales estaban asociadas a la construcción del modelo. Al respecto, Andrés señaló que no respondió a estas preguntas porque "*Es posible modelar esta problemática social, pero llevaría mucho tiempo debido a todas las variables que se deben de tener en cuenta, por esta razón no responderé todas las preguntas asociadas al modelo*".

Un análisis de este caso permite colegir que Andrés logró percibir que el componente priorizado de las matemáticas en acción fue el razonamiento hipotético, ya que el primer paso abordado por estudiante una vez recibido el material, fue analizar los supuestos matemáticos para así poder continuar con la elaboración del modelo. En este punto se evidencia también el uso de la imaginación tecnológica, debido a que Andrés hace uso de un lenguaje de programación para comprender y obtener nuevos argumentos matemáticos que le pudieran servir de sustento para validar o invalidar el modelo.

Además de lo anterior, se destaca que Andrés no validó ni invalidó el modelo debido a que consideraba pertinente tener mucho más tiempo para analizar cada variable a usar; es por esta razón que Andrés hizo uso de los modelos matemáticos de una manera determinística para poder encontrar un valor preciso en un determinado día donde posiblemente este podría generar discusiones sobre los resultados obtenidos del modelo una vez garantizara la validez de este.

Una vez analizadas las respuestas de Andrés y Stephanie se procedió a codificar los componentes priorizados por cada estudiante. Los resultados de esta codificación se presentan en la Tabla 3, esta tabla se diseñó para comprender la manera en la que los estudiantes priorizaron las componentes de las matemáticas en acción, pues es de recordar que estos componentes estarán priorizados según la manera en la que los estudiantes hagan uso de los modelos matemáticos.

Tabla 3. Codificación de componentes priorizados de cada estudiante

Estudiante	Componente priorizado	Estudiante	Componente priorizado
Stephanie	Imaginación tecnológica	**Andrés**	Razonamiento hipotético
	La legitimación o justificación		Imaginación tecnológica
	La realización		La legitimación o justificación
	La eliminación de responsabilidad		La eliminación de responsabilidad
	Razonamiento hipotético		La realización

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 3 deja en manifiesto la manera en la que cada estudiante priorizó las componentes de la matemática en acción, pues a lo largo de la entrevista se analizó la manera en la que estos revisaban el modelo y respondían a las preguntas. Se evidenció que estos estudiantes ponen en primer lugar componentes diferentes, pero llama la atención que la eliminación de responsabilidad la ubiquen en el mismo lugar.

4.2 Discusión

Esta investigación analizó las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas junto con los componentes priorizados de las matemáticas en acción al usar un modelo matemático con cuatro estudiantes de programas afines con las matemáticas. Para analizar estas discusiones, se usaron los diez elementos que caracterizan una actividad de modelación matemática desde la perspectiva sociocrítica y las cinco componentes de las matemáticas en acción tal y como se presentaron en el segundo capítulo de este documento.

El análisis de los datos permitió establecer resultados importantes que se describen a continuación:

Durante las discusiones matemáticas se evidencia el primer resultado, el cual deja en manifiesto los enfoques y perspectivas que tienen estos estudiantes al momento de estructurar e interpretar modelos matemáticos. Se observó que estos estudiantes estuvieron en la capacidad de construir modelos que les permitieran tratar de describir la problemática social. El análisis de las entrevistas permitió construir dos categorías que están asociadas a

la actividad matemática del modelo, las cuales están caracterizadas como: el uso de problemas no matemáticos de la realidad e interpretación de modelos matemáticos según la realidad. En los resultados obtenidos en el caso de Cristina, se evidenció que están presentes las dos categorías mencionadas anteriormente.

En el caso de Cristina, quien manifiesta que se pueden crear múltiples modelos lineales haciendo uso de otras variables de respuesta, se puede inferir que las aplicaciones de las matemáticas, para esta estudiante, están presentes en la sociedad y tienen implicaciones en la vida cotidiana; sea en la vida laboral, actividades científicas o tareas donde las matemáticas juegan un papel sutil. En esta misma línea, Cristina usa la modelación como un lenguaje para entender y comprender una situación problema presente en la sociedad (Orey y Rosa, 2007). Esta respuesta está categorizada en el uso de problemas no matemáticos de la realidad; debido a que Cristina busca estudiar situación problema de la realidad, relacionando inicialmente datos numéricos que le pudieran ayudar a comprender si es posible hacer uso de las matemáticas. Es decir, Cristina tiene una mirada *a priori* de los datos estadísticos presentados del estallido social, con el fin de usar las matemáticas (modelos matemáticos) para establecer un modelo que pudiera describir el estallido social.

En el caso de Carlos no se logró evidenciar momentos significativos que se pudieran categorizar en el uso de problemas no matemáticos de la realidad; este resultado, puede deber a la formación que tiene Carlos respecto para la elaboración de modelos matemáticos por medio de datos estadísticos.

La caracterización de interpretación de modelos matemáticos según la realidad, pues estuvo presente en ambos estudiantes, Carlos y Cristina. En el caso de Carlos, se pudo percibir que este usó el modelo para crear una interpretación propia de este mismo, donde no importó la validez que pudiera tener. La interpretación de Carlos se dio a partir de intervalos seleccionados por él en el modelo logístico para poder entender los días más críticos del estallido social. Es decir, usó un modelo matemático para entender la problemática social; ya que al hacer uso de la modelación logró comprender una forma diferente para resolver una problemática social de la realidad utilizando las matemáticas (Araújo, 2009).

En coherencia con lo anterior, Cristina tuvo una interpretación diferente, pues se percató de usar un modelo matemático que tuviera una validez y que a su vez resultara confiable para ella. Por esta razón, Cristina se dio a la tarea de construir un nuevo modelo (modelo lineal) para entender la realidad del estallido social de una manera adecuada. La interpretación dada por Cristina permite inferir que ella hace una reflexión de la realidad con el fin de representar la problemática social por medio de la función lineal, buscando reducir el grado de complejidad del estallido social para entender dicho fenómeno de una manera ajustada a la realidad (Orey y Rosa, 2007). Con lo anterior se observó que la formación académica de cada estudiante les permitió identificar usos, limitaciones y alcances de los modelos, sin embargo, no todos ellos estuvieron argumentados.

Otro resultado importante se evidencio en las discusiones tecnológicas dadas por Carlos y Cristina, pues, el resultado en conjunto deja en manifiesto la divergencia de recursos y usos de la tecnología (herramientas como las matemáticas, lenguajes de programación, etc.) en el trabajo matemático; así como la diversidad de herramientas matemáticas usadas para apoyar los resultados, los alcances del modelo y las discusiones reflexivas. El uso de herramientas tecnológicas para validar la función logística como las adecuada fue notorio en Cristina, pues esta hizo uso de lenguajes de programación como Python, R, Wólfram Alpha; además de esto, usó herramientas de paquete Office como Excel.

Cristina logró concatenar las matemáticas con las herramientas tecnológicas haciendo posible manejar modelos matemáticos complejos junto con cantidades alarmantes de datos. Es decir, Cristina logró ver la tecnología de la información como la matematización de las matemáticas (Skovsmose, 1999). Por otro lado, Carlos se limitó a usar el lenguaje de programación Python, esto da razón de los argumentos presentados por cada uno para validar el modelo; pues al hacer más uso de herramientas tecnológicas junto con las matemáticas es posible encontrar de una manera más eficiente un modelo que se ajuste mejor a la realidad.

En las discusiones dadas durante toda la entrevista de Carlos y Cristina, se encontró evidencia de una forma de participación crítica y democrática frente a temas de la sociedad; pues ambos estudiantes discutieron y expusieron argumentos que estuvieran a favor o en contra del material brindado durante toda la entrevista. Es decir, Carlos y Cristina hicieron

de la entrevista un espacio que les permitió participar de una manera activa y crítica, transformando la entrevista en un espacio democrático.

Los argumentos presentados por los estudiantes, muestra que el pensamiento crítico se inicia a construir desde diferentes espacios donde se tiene en cuenta la participación que estos tengan. Es decir, se percibió un vínculo de "aula crítica" en la entrevista, ya que los entrevistados crearon múltiples posibilidades para la construcción del conocimiento por medio de investigaciones, consultas y de la misma crítica. Estas actitudes se encuentran encaminadas en la praxis social relacionada con el diálogo constante, el involucramiento y la comunicación (Jacobini y Wodewotzki, 2006).

Un tercer resultado importante, se presentó en l actividad reflexiva de los estudiantes, pues se evidenciaron cuatro categorías en diferentes momentos de las entrevistas; estas categorías están caracterizadas como: Desarrollo de acciones comunitarias, extensión al contexto social, la acción crítica en la sociedad, importancia de las matemáticas en la sociedad. Se pudo determinar que en Carlos hubo rasgos que permitieron identificar estas cuatro categorías; mientras que, en Cristina, se pudo determinar principalmente rasgos a una sola categoría. En la entrevista, Carlos atribuyó un tipo de aplicabilidad al modelo desde una perspectiva social; dónde sin importar la validez del modelo pretendía concientizar a agentes del ESMAD en formación por medio de la visualización de la función logística, para evitar el uso de la violencia como primer mecanismo para dispersar una protesta social. Esta discusión reflexiva de Carlos, se encuentra ubicada en la categoría de desarrollo de acciones

comunitarias; esto debido a que la participación de Carlos en este proyecto de modelización, permitió que pudiera explicitar discusiones políticas reflexionando sobre las consecuencias sociales y las acciones políticas (Araújo, 2009).

La idea de la aplicabilidad del modelo dejó en manifiesto el uso para propiciar la crítica con respecto al accionar del ESMAD, ya que Carlos logró evidenciar uno de los factores problemáticos en el estallido social, el cual fue el uso de la violencia en la protesta social como primer mecanismo para poder dispersar esta. En esta misma línea, Carlos planteó una solución a su comunidad por medio de la interpretación de fenómenos sociales haciendo uso de modelos matemáticos.

Estas discusiones dadas por Carlos, deja en evidencia que criticar un modelo también se considera como parte del aprendizaje, el cual tiene un lugar en el proceso del modelado. Esto permite cumplir con uno de los objetivos principales de la modelación desde un enfoque crítico, el cual pretende aportar a la formación de ciudadanos críticos y políticamente comprometidos (Barbosa, 2006). En ese sentido, se observa que Carlos posee un conocimiento reflexivo que está enfocado en la evaluación y debate de lo que podría identificar como un objetivo tecnológico (modelo), así como las implicaciones éticas y sociales de utilizar dicha herramienta seleccionada. (Skovsmose, 2023).

En el caso de Cristina, la estudiante intentó manifestar una posible aplicación, la cual no la hizo de una manera tan confiada como Carlos, pues los argumentos expuestos eran sucintos en relación con la respuesta que estaba dando. A partir de lo expuesto, se puede

inferir que Cristina prefirió no validar la aplicabilidad del modelo, debido a que necesitabas más tiempo y otro tipo de factores para determinar un modelo como válido. Por tal motivo, ella decidió argumentar que no es necesario mostrar la aplicabilidad de un modelo para que agentes del ESMAD hagan bien su trabajo; es decir que no hagan uso de la violencia como primera instancia. Esta respuesta dada por cristina deja en evidencia que las matemáticas para ella sirven como una herramienta para identificar y analizar características críticas en la sociedad, las cuales pueden ser globales y tienen que ver con el entorno local del sujeto al momento de ser aplicadas (Méndez, 2022). Por tanto, se evidenció la ausencia de la categoría de desarrollo de acciones comunitarias en el caso de Cristina.

En las entrevistas realizadas a Carlos y Cristina se logró evidenciar que está presente la categoría de extensión al contexto social en ambos estudiantes, debido a que ambos al hacer uso de modelos matemáticos lograron determinar la población más vulnerable del estallido social. En el caso de Cristina, se identificó que poseía conocimientos político-sociales de las problemáticas de la ciudad de Cali, pues realizó una comparación entre barrios de esta Ciudad; lo que permite colegir que no solo hizo uso de conocimientos matemáticos, sino, de conocimiento políticos y de problemáticas de la Ciudad para poder hacer un análisis diferente del modelo. Esto permite mostrar que Cristina algunas características de la sistematicidad de su pensamiento, donde hace un ejercicio como ciudadana al generar críticas fuera del aula donde las discusiones matemáticas dadas estarán sostenidas por la familiaridad que tenga con la problemática social (Barbosa, 2003).

Para el caso de Carlos, se evidenció que no solo posee conocimientos matemáticos y políticos sociales, ya que expresó el apoyo constante en diferentes partes del estallido social; lo que muestra que este desarrollaba múltiples procesos con la comunidad vulnerable y afectada de dicha problemática. Carlos, al hacer relación de los modelos matemáticos con el acercamiento de la problemática social, logró materializar el estallido social por medio de las matemáticas. Lo anterior le permitió generar discusiones para determinar la población más vulnerable, junto con todos los tipos de violencia e intervenciones de fuerzas especiales, donde solo las evidenció en el oriente de la ciudad de Cali.

Es decir, Carlos actuó como un sujeto formador, cuestionador y transformador pues por medio de un acto político (participación en el estallido social) logró materializar la praxis social fuera de un aula de clase. En otras palabras, Carlos demostró una preocupación por generar implicaciones hacia la comunidad afectada, compartiendo saberes resultantes de un proceso pedagógico que permite actuar en la misma comunidad como un sujeto formador, cuestionador y transformador (Jacobini y Wodewotzki, 2006). En consecuencia, se evidenció que Carlos y Cristina coincidieron en aspectos sobre las problemáticas sociales que se viven en el oriente de la ciudad de Cali, donde justifican el por qué consideran este sector de la ciudad como un barrio relegado de los demás barrios. Las ideas expuestas por estos estudiantes fueron comprendidas y discutidas de tal manera que les permitió analizar críticamente el contexto social. (Araújo, 2009).

Por tanto, las dos últimas categorías que se caracterizan como la acción crítica en la sociedad y la importancia de las matemáticas en la sociedad, solo se lograron evidenciar en Carlos, mientras que en Cristina no fue posible observar aspectos que dieran cuenta de la presencia de estas dos últimas categorías. La acción crítica en la sociedad estuvo presente en las respuestas de Carlos, ya que manifestaba que los resultados dados por el modelo logístico no solo eran números que determinaban uno o más días críticos del estallido social; pues expresaba que para él representaba muchas cosas como: vidas, personas, un hijo, una madre, un padre, etc.

Este tipo de interpretación permite analizar que Carlos pretende optimizar ciertas condiciones para comprender el fenómeno del estallido social donde sea capaz de actuar sobre la problemática para transformarlo así de acuerdo con las necesidades de la comunidad (Orey y Rosa, 2007). En esta misma línea Carlos discutió la problemática del estallido social utilizando las matemáticas como un instrumento de interpretación y argumentación; ello deja en evidencia características de la última categoría la cual es la importancia de las matemáticas en la sociedad. Esto último permite concluir que para Carlos las matemáticas jugaran un papel decisivo en la estructuración de debates políticos, explican así la dimensión política que tiene en la sociedad (Araújo, 2009). En coherencia con lo anterior, en la actividad reflexiva se evidenció una divergencia en los dos casos, aunque ambos coincidieron sobre la población más vulnerada y olvidada por el estado en el estallido social; también se destaca que Carlos no se limitó a realizar reflexiones sociales sobre el modelo

establecido y priorizó la “confianza” en el modelo para cuestionar abandono del estado, y otros factores sociales.

De manera colectiva, el análisis de los casos reportados en este estudio permitió categorizar cada respuesta de los participantes con el fin de determinar la correspondencia de cada categoría a un determinado tipo de discusiones, permitiendo cumplir con el primer objetivo del trabajo, es decir, reconocer el tipo de discusiones que tiene un docente en formación matemática y un estudiante de estadística en la creación de modelos matemáticos que describan problemáticas sociales. A partir de ello, se obtuvieron algunas evidencias que se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. *Codificación de las categorías de dos estudiantes*

TIPO DE DISCUSIONES	CATEGORIA	CARLOS	CRISTINA
Discusiones Matemáticas	Uso de problemas no matemáticos de la realidad	No se encuentra evidencia de esta categoría	La entrevistada expresa mucho interés por la modelación realizada y propone un nuevo modelo. Esta busca modelar de una manera muy precisa el fenómeno social
	Interpretación de modelos matemáticos según la realidad	El entrevistado propuso descomponer la función por fragmentos para darle una interpretación en cada fragmento y así analizar lo que ocurre después de n días	La entrevistada propone analizar las gráficas por medio de una pendiente de inclinación, donde la pendiente con mayor inclinación representa un crecimiento drástico, lo implica para ella un día critico de la problemática social
Discusiones Tecnológicas	Participación crítica y democrática en las clases	Esta categoría se vio reflejada en ambos entrevistados, debido a que durante toda la entrevista expusieron sus argumentos participando activamente, haciendo así de la entrevista un espacio critico	
	Desarrollo de acciones comunitarias	El entrevistado propuso una solución a la problemática social por medio del modelo sin importar la validez de este, buscaba crear reflexiones hacia los agentes del SMAD por medio del modelo	No se encuentra evidencia de esta categoría
		El entrevistado explica los resultados al usar el modelo, donde manifiesta que este no solo interpreto los resultados desde la postura de un	La entrevistada manifiesta que la parte más afecta y olvidada de la ciudad es el oriente de Cali, por tal razón tuvo un mayor impacto del

Actividad Reflexiva	Extensión al Contexto Social	estudiante si no, desde la postura de un ciudadano que tuvo acercamiento al estallido social, explicando que la problemática fue una lucha de clases. Además de esto, concluye que la parte más vulnerada fue el orienta de la ciudad mientras que en el sector de ciudad jardín de la ciudad fue la menos afectada	estallido social. Además de esto, hace un paralelo de los privilegios que tiene el sector de ciudad jardín en la ciudad, mientras que en sectores como el oriente no se ve reflejado dichos privilegios
	La acción crítica en la sociedad	El entrevistador manifiesta que los números representan más que un valor numérico; representan personas, un hijo, una madre, etc. Por tal razón, considera que a pesar de que la gráfica muestra un día critico él es consciente que hubo más días críticos	No se encuentra evidencia de esta categoría
	Importancia de las Matemáticas en la sociedad.	El entrevistado, explico que los valores obtenidos con el modelo representan cualquier tipo de abuso de autoridad y no una solo en especifica. Además, considero importante comparar los resultados obtenidos en la gráfica con los valores reales de cada abuso de autoridad para así obtener diferentes conclusiones	No se encuentra evidencia de esta categoría

Fuente: Elaboración propia

En relación con el segundo objetivo de este estudio, es decir, identificar los componentes priorizados de las matemáticas en acción por los estudiantes para validar y usar un modelo matemático. Los análisis realizados para los casos de Andrés y Stephanie ofrecen evidencia sobre el uso de los modelos matemáticos y su orientación hacia la caracterización de los componentes de las matemáticas.

Se percibió que para Stephanie los modelos matemáticos pueden ser usados de una manera coherente para realizar críticas de una problemática social, ya que las competencias matemáticas democrática de esta estudiante no solo se limita a tener conocimientos matemáticos para un mercado, si no, poder involucrar el uso de tales conocimientos para poder cuestionar las autoridades y accionar político. Esto implica que la competencia matemática democrática no solo involucra el dominio de las matemáticas, sino también el empoderamiento para desafiar situaciones injustas. (Valero, Andrade-Molina, & Montecino, 2015). Lo anterior se vio percibido en la manera en la que Stephanie hizo uso de la modelación, pues usó esta como una ‘lente’ que le permitiera percibir el mundo de las aplicaciones de una manera diferente, observando la realidad desde una manera que le permitiera críticas a una problemática social a través de modelos matemáticos (Villa-Ochoa et al., 2009).

Para el caso de Andrés, se evidenció que este usa las matemáticas y estadística para construir modelos determinísticos para la situación estudiada. Es decir, los modelos para Andrés tienen un papel importante en la sociedad si logra determinar la validez y la

construcción del modelo. En este sentido Andrés se limitó a responder las preguntas como: ¿Cuál de las dos graficas representa un mejor ajuste a este fenómeno social?, ¿Qué ocurre en los primeros 20 días en cada grafica?, ¿Es mejor el ajuste logístico que hace la computadora que el ajuste que se hace haciendo uso de las ecuaciones diferenciales? ¿Por qué?,¿Como podrías argumentar los días más críticos de este fenómeno social a partir de sus soluciones graficas dadas?, las cuales que estaban relacionadas con el modelo.

Andrés manifestó que la razón para no brindar respuesta a estas preguntas es debido al tiempo y al análisis detallada que se le debe hacer a las variables presentadas junto con los supuestos realizados, ya que no era suficiente con verificar si los tipos de violencia presentaban algún tipo de correlación; además de esto, también expresó que se deberían de tener en cuenta las estratificaciones sociales y la manera de la recolección de los datos para construir el modelo, lo cual no iba a resultar tan fácil realizarlo en el tiempo de la entrevista.

Por lo anterior Andrés decidió enfocarse en elaborar sus argumentos mediante gráficas para explicar por qué no válida o inválida las funciones logísticas presentadas. Estas acciones de Andrés están orientadas en la formación propia de un estadístico, pues la estadística es un conocimiento práctico que se desarrolló para describir la riqueza y el poder de un estado, proporcionando una herramienta para tratar con la incertidumbre. Este conocimiento impulsó la adopción y expansión de valores como la racionalidad, el objetivismo, el control, la normalización y la abstracción, reforzados por la ciencia como un

tipo de conocimiento legítimo que permite tomar decisiones "correctas" (Vithal y Valero, 2012).

El análisis colectivo de estos casos, dejo en manifiesto la manera en la que cada esta estudiante expresaba sus ideas respecto al modelo, defendiendo estas ideas en voz alta mediante argumentos matemáticos y tecnológicos. Desde la matemática en acción, se destaca la presencia de cuatro características principales planteadas Skovsmose (2020b), las cuales usaron y priorizaron de la siguiente manera:

Para el caso de Stephanie l*a imaginación tecnológica*, estuvo presente en los argumentos matemáticos presentados para analizar y crear las funciones logísticas, además esto, también se destaca uso de las herramientas computacionales que Stephanie uso para entender las matemáticas mediante un lenguaje diferente a la lengua natural. Para esta estudiante no fue necesario corroborar los supuestos matemáticas ya que se observó que esta estudiante buscaba generar reflexiones por medio del modelo, *la legitimación o justificación,* esta característica se percibió en la estudiante en la manera en la que ella aprueba el modelo mediante la verificación de los datos al usar un valor en x = número de días; *La realización* estuvo presente debido a que Stephanie legitimo el modelo como valido para cobrar un sentido en un entorno real; *La eliminación de responsabilidad*, estuvo dada debido a que esta uso herramientas tecnológicas para evidenciar gráficas, donde la responsabilidad recae en la máquina y no en la interpretación de la estudiante. Por último, el *razonamiento hipotético* estuvo presente de una manera implícita, ya que la estudiante en

la entrevista hizo mención de que los resultados podrían depender de los supuestos iniciales, pero no hizo énfasis en esta parte.

Lo anterior puede estar dado debido al énfasis realizado en la formación de Stephanie respecto al uso de modelos, esta orientación es realizada con el fin de que esta futura profesora comprenda la naturaleza de su labor en el aula. Es decir, se enfatiza que su trabajo no se limita a ser simplemente un empleo o una profesión, sino que se considera una misión social e histórica. Esta misión implica la formación y transformación de los individuos, guiándolos hacia la ciudadanía solidaria, crítica y reflexiva. (Radford, 2014, p.34).

En esta misma perspectiva, la manera en la que Stephanie priorizó los componentes de las matemáticas en acciones estuvo dadas por el enfoque crítico y competente que está a desarrollado en el trayecto de su carrera profesional, pues la caracterización que realizó estuvo enfocada en una dimensión social. Lo anterior es debido a que la dimensión social usada por esta estudiante en las matemáticas está asociada a los conceptos y teorías matemáticas que reflejan las estructuras sociales, donde se aborda el impacto de lo social en las matemáticas. Así mismos, esta dimensión desafía la afirmación de que las matemáticas tratan con entidades ahistóricas y destaca que el desarrollo de las matemáticas es sensible a las prioridades económicas, políticas, religiosas y culturales. (Skosvmose,2020b).

Por otro lado, Stephanie identifica la injusticia social presentada en Colombia, a pesar de no haber experimentado directamente consecuencias del estallido social. Es decir,

Stephanie comprende que tal problemática la podría a ver afectado a ella, pues como lo menciona Skosvmose (2023) para identificar una injusticia social, no es necesario ser parte de tal injusticia; solo basta con comprender que la injusticia social es para todo un grupo de personas. Es por esto, que otra de las razones de la manera en la que esta estudiante caracterizo los componentes de las matemáticas en acción estuvieron orientadas por la dimensión ética de las matemáticas, pues estas se hacen visibles cuando se considera el impacto de las matemáticas en la sociedad; es decir, utilizar las matemáticas con fines aplicativos y no con fines orientados en las matemáticas teóricas y puras (Skosvmose,2020b).

En las respuestas brindadas por Andrés se identifican que las componentes de las matemáticas en acción priorizadas, fueron usadas de la siguiente manera: *El razonamiento hipotético* se encontró presente en la primera parte de la entrevista, donde Andrés se propuso establecer una relación en el uso de cada variable para determinar las hipótesis del modelo; *la imaginación tecnológica,* fue priorizada por Andrés mediante un lenguaje de programación como lo es Rstudio para realizar el análisis de los supuestos, junto con las comparaciones realizadas sobre el posible uso de otros modelos matemáticos; *la legitimación o justificación,* se encontró presente en los momentos en los que el estudiante manifestaba en voz alta sus argumentos matemáticos que no validaba ni invalidaban los modelos presentados. *La eliminación de responsabilidad* estuvo presente en los diversos lenguajes de programación que usó, donde la responsabilidad de lo que se mostraba en

pantalla estaba dada por la máquina (computador) y no por el estudiante pues, como lo menciona Skosvmose (2023), la responsabilidad queda suprimida del estudiante debido a que este automatizó un proceso mediante la interpretación de datos en Rstudio. Por último, *la realización* no fue priorizada por Andrés debido a que este manifestaba de que no era posible modelar el fenómeno sin antes realizar otros análisis.

En concordancia con lo anterior, la manera en la que Andrés priorizó las componentes de las matemáticas en acción estuvo orientada por su formación como estadístico y por la importancia que este le asigna a los modelos determinísticos, probabilísticos y descriptivos. A demás de esto, la priorización de Andrés estuvo enfocada en la dimensión ontológica de las matemáticas, ya que esta dimensión hace alusión al uso de las matemáticas; es decir, se debe reconocer hacia se está dirigiendo el uso de estas mismas para fines determinísticos (Skosvmose, 2020b).

Llama la atención las acciones realizadas por Andrés al usar lenguajes de programación, para comprender los procesos abstractos de la modelación por medio de la visualización de gráficas. Lo anterior deja en evidencia el uso del conocimiento tecnológico de este estudiante, ya que este conocimiento es necesario para desarrollar y usar la tecnología como lo hizo Andrés. En otras palabras, el conocimiento tecnológico que este dado por medio de la digitalización y es considerado como un acto basado en las matemáticas, incluye el conocimiento explícito y verbalizado, así como las habilidades prácticas necesarias para realizar acciones específicas. Estas transformaciones digitales tienen implicaciones

significativas para nuestra vida social e individual, pues proporcionan reconfiguraciones en nuestras vidas, generando cambios en la forma en que interactuamos y tomamos decisiones (Skosvmose, 2023).

Para el caso de Stephanie se resalta parte de la actividad reflexiva donde uso los modelos como una herramienta que le permitiera entender la problemática social. El conocimiento reflexivo de esta estudiante se refiere a la habilidad de tomar una posición justificada en discusiones sobre temas tecnológicos. Esta competencia resulta esencial en ella para actuar como ciudadana crítica en la sociedad; es decir, el conocimiento reflexivo le brinda la capacidad de reflexionar sobre cuestiones tecnológicas para tomar acciones frente a problemáticas sociales (Skovsmose, 1999). Finalmente, en conjunto para los casos de Stepanie y Andrés se observaron presencias y ausencias de las principales características de la matemática en acción de maneras diferentes. Estos resultados permitieron analizar la manera en la que los estudiantes interactuaban en el escenario de investigación, donde el entrevistador invita a los estudiantes a formular preguntas y buscar explicaciones utilizando expresiones como "¿qué sucede si...?". Los estudiantes aceptaron la invitación diciendo "¡sí!" y formulando preguntas como "¿qué puede suceder si...?". Esto lleva a los estudiantes a buscar explicaciones donde se creó un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes estuvieron al mando (Skosvmose,2012).

4.3 Conclusiones

En esta investigación se analizó el uso de los modelos matemáticos que describen el estallido social en Colombia desde un enfoque sociocrítico. Los datos presentados muestran que los estudiantes hacen un uso crítico de los modelos matemáticos según el uso que estos le asignen a cada uno. El estudio dejó en evidencia que el interés de los estudiantes en licenciatura en matemáticas esta dado hacia la actividad reflexiva, ya que éstos contaron una participación activa en la sociedad haciendo uso de modelos para describir problemáticas sociales. Los estudiantes de Estadística cuentan con esta actividad reflexiva desde un enfoque diferente, ya que lograron identificar con los modelos establecidos por ellos la población afectada y más vulnerada.

Por medio de la codificación definida con base en las unidades del significado establecidas por Silva y Kato(2012) junto con las componentes de las matemáticas en acción establecidas por Skovsmose (2020b), se caracterizó las discusiones. Llama la atención que las discusiones reflexivas de los estudiantes de estadísticas fueron más sucintas debido a las limitaciones de los alcances que evidenciaron en los modelos. Esto puede interpretarse como que, la principal preocupación Andrés y Cristina estuvo enfocada en la validez del modelo y poco, en sus alcances y usos para generar algún tipo de discusión. El análisis conjunto de estos cuatro casos permitió dar cuenta de que la actividad matemática, tecnológica y reflexiva en este fenómeno social están en correspondencia con la formación de cada profesional y no son parte de una cultura o alfabetización matemática generalizada.

De otro modo, en este estudio también se identificó que para los futuros profesores de matemáticas, los modelos pueden cumplir funciones descriptivas y predictivas, explicando que se puede hacer uso del modelo sin necesidad de que este logre ser preciso; mientras que para los futuros estadísticos los modelos solo pueden cumplir funciones descriptivas con respecto a la situación estudiada, esto debido a que el modelo logístico solo fue analizado centrado en los fundamentos matemáticos para establecer su validez. La no validez del modelo logístico y la reformulación de un nuevo modelo lineal deja en evidencia la importancia de los argumentos matemáticos en la construcción de modelos, lo cual sustenta evidencia de sus discusiones matemáticas y tecnológicas.

En consecuencia con lo anterior, la priorización de las componentes de las matemáticas en acción estuvieron dadas por la necesidad que cada estudiante le asigne al uso de los modelos matemáticos, el tipo de discusiones generadas por cada grupo estudiantes permitió comprender la manera en la que estos usan los modelos; ya que como se mencionó anteriormente, los estudiantes de estudiantes de estadísticas usaron el modelo de una manera determinística, por tal razón, la principal componente caracterizada de las matemáticas en acción fue el razonamiento hipotético, el cual les permitió realizar los supuestos para el análisis y construcción de un nuevo modelo.

En el caso de los estudiantes de licenciatura en Matemáticas (estudiantes para profesor), al usar el modelo proporcionado como un lente que les permitiera comprender la realidad de la problemática desde una manera reflexiva, se vio priorizada la componente de

la imaginación tecnológica. Esto se debe a que los estudiantes usaron el modelo para identificar aquellas problemáticas del estallido social, junto con las posibles acciones que se podrían haber tomado para evitar la propagación de la violencia en dicho fenómeno.

Finalmente, los estudiantes del programa de estadística priorizan en algunas ocasiones la componente del razonamiento hipotético para la construcción de modelos matemáticos, mientras que, para el programa de licenciatura en matemáticas, los estudiantes estarán en la mayoría de los casos dispuestos a generar discusiones sobre un determinado modelo usado, priorizando así la componente de la imaginación tecnológica. Lo anterior sugiere la necesidad de reconocer las fortalezas de cada profesión y abogar por el trabajo colaborativo en el estudio de fenómenos sociales; es decir, en el trabajo conjunto con diferentes profesionales, se (re)construyen y validan modelos, se reconocen sus alcances y, en función de ello, se generan las interpretaciones y posibles decisiones sobre el actuar en la sociedad. La investigación futura podría facilitar la enseñan y aprendizaje de los modelos matemáticos desde diferentes perspectivas, formando ciudadanos críticos para la sociedad.

5. Referencias

Agostinho, A., & Reis, P. (2021). Contributos educativos de exposições interativas on-line sobre imunidade como prática de ativismo coletivo em contexto de pandemia. *Uni-Pluriversidad*, 21(2), 1–22. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.346064

Alsina, C. (2007). Less Chalk, Less Words, Less Symbols ... More Objects, More Context, More Actions. In: Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, HW., Niss, M. (eds) Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_2

Barbosa, J. C. (2003). Modelación matemática y la perspectiva sociocrítica. En Seminario Internacional de Investigación en Educación Matemática, 2., Santos, SP, Anais (pp. 1-13). Santos, SP: SBM.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM - Mathematics Education*, 38(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, *1*.

Borromeo Ferri, R., Mena Lorca, J. J. F., y Mena Lorca, A. (2021). Fomento de la Educación-STEM y la Modelización Matemática para profesores.

Braun, V., Clarke, V., Hayfield, N., & Terry, G. (2019). Thematic Analysis. In *Handbook of Research Methods in Health Social Sciences* (pp. 843–860). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5251-4_103

Camelo, D. V. (2018). Revista latinoamericana de Etnomatemática. Colombia: Universidad de Nariño.

Camelo, F., Mancera, G., Zambrano, J., y Romero, J. (2013). Reflexiones sobre las potencialidades y dificultades en la iniciación de prácticas sociocríticas de modelación matemática. *Procesos de inclusión/exclusión. Subjetividades en educación matemática*, 119-145.

Cárdenas Sierra, Y. R., y Muñoz Restrepo, D. A. (2014). *Educación matemática crítica y análisis didáctico: una propuesta de construcción de saberes matemáticos en contextos de conflicto social en la Institución* (Master's thesis, Universidad de Medellín).

Christiansen, I. (1999). Reflexiones críticas sobre modelos matemáticos en la clase: ¿sueño o realidad? *Revista EMA, 5(1), 29–50.*

Christiansen, I. (2001). Critical Evaluation of Models in Relation to the Modelling Process. In J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education* (pp. 391–400). Horwood Publishing.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technocracy: A trivium for today. Mathematical thinking and learning, 1(2), 131-153

de Loiola Araújo, J. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria: Revista de educação em ciência e tecnologia*, *2*(2), 55-68.

Freire, P. (2005). Pedagogía del Oprimido. Acrónimo xxi.

Haadi, A. R. (2014). Modeling domestic violence and predicting its growth using differential equations. a case study of women and children in Tamale. *International journal of sciences*, 3(7), 51-63.

Hein, N., y Biembengut, M. S. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, *16*(2), 105-125.

Hernádez Sampieri, R., Fernádez Collado, C., & Baptista Lucio, M. D. (2014). Metodología de la Investigación (Sexta edición ed.). *Mexico: Ill Interamericana de Mexico SA.*

Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2020). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Mcgraw-hill.

Islam, K. N., & Biswas, M. H. A.(2020) Mathematical Assessment for the Dynamical Model of Sexual Violence of Women in Bangladesh.

Jablonka, E. (2020). Critical thinking in mathematics education. Encyclopedia of mathematics education, 159-163.

JACOBINI, O; WODEWOTZKI, MLL Una reflexión sobre la Modelación Matemática en el contexto de la Educación Matemática Crítica. Bolema , Río Claro, v. 19, núm. 25, pág. 71-88, 2006.

Kaiser, G. (2017). The Teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267–291). NCTM.

Mancera, G. (2020). Conocer reflexivo en contextos de modelación matemática, desde una perspectiva socio crítica. Brasil: Universidad federal de Minas Gerais.

Méndez, A., & Aguilar, M. S. (2022). 4. *Bringing the Debate over Marijuana Legalisation into the Mathematics Classroom*. Landscapes Of Investigation, 57.

Montoya Carvajal, J. F. (2022). Reflexión desde la Entropía: un análisis de la realidad según la violencia en la sociedad. *Revista Lasallista de Investigación*, *19*(1).

Moreno, M. M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones

diferenciales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 265-280.

Niss, M. (2015). Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: Stillman, G., Blum, W., Salett Biembengut, M. (eds) Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_5

Orey, DC; Rosa, M. La dimensión crítica de la modelación matemática: la enseñanza para la eficiencia sociocrítica. Horizontes , Braganza Paulista, v. 25, núm. 2, pág. 197-206, julio/diciembre. 2007.

Ortiz, G. M., y Camelo, F. J. (2023). Decantando posibilidades de la modelación matemática desde nuestras prácticas pedagógicas e investigativas. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, *18*(1).

Pais, A. (2012). A Critical Approach to Equity. In: Skovsmose, O., Skovsmose, O., Greer, B. (eds) *Opening the Cage. New Directions in Mathematics and Science Education, vol 23*. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-808-7_3

Parra-Zapata, M. M., Parra-Zapata, J. N., Ocampo-Arenas, M. C., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). El Índice de Masa Corporal. Una experiencia de modelación y

uso de modelos matemáticos para el aula de clase. Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas, 92, 21–33.

Pérez Andrés, C. (2002). Sobre la metodología cualitativa. Revista española de salud pública, 76, 373-380.

Plaza-Galvez, L. F. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. Revista científica, 25(2), 176-187.

Radford, L., Moura, M. O., & Moretti, V. (2014). Entrevista con Luis Radford sobre la teoría de la objetivación. *Ruta maestra*, 9, 33-37.

Rodríguez, M., Pochulu, M. D., Barreiro, P., Bressan, A., Camós, C., Carnelli, G., ... y Zolkower, B. (2015). Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. *Educación Nro. 6*.

Rodríguez, R., Quiroz, S., y Illanes, L. (2013). Competencias de modelación y uso de tecnología en ecuaciones diferenciales.

Sánchez Useche, J. M. (2021). Conocer reflexivo construido por estudiantes de ingeniería en un proceso de investigación formativa basado en la modelación matemática.

Sánchez, L. B. (2022) Comunidad de docentes investigadores que le apuestan a una educación matemática para el desarrollo de ciudadanos críticos, participativos y éticos. *Pensamiento lógico y matemático*, 11.

Schukajlow, S., Kaiser, G. & Stillman, G. Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM Mathematics Education* **50**, 5–18 (2018). https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/s11858-018-0933-5

Sepúlveda, E., González-Gómez, D., & Villa-Ochoa, J. A. (2020). Analysis of a Mathematical Model. Opportunities for the Training of Food Engineering Students. *Mathematics*, *8*(8), 1339. https://doi.org/10.3390/math8081339

Sepúlveda, E., González-Gómez, D., & Villa-Ochoa, J. A. (2020). Analysis of a Mathematical Model. Opportunities for the Training of Food Engineering Students. *Mathematics*, 8(8), 1339.

Silva, C. da, & Kato, L. A. (2012). Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica? *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(43), 817–838.

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Una empresa docente.

Skovsmose, O. (2005). *Travelling Through Education: Uncertainty, Mathematics, Responsibility*. Sense Publishers

Skovsmose, O. (2020a). Educación Matemática Crítica. En: Lerman, S. (eds) Enciclopedia de Educación Matemática. Springer, Cham. https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/978-3-030-15789-0_34

Skovsmose, O. (2023). Crisis and Critique. In: Critical Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26242-5_6

Skovsmose, O. Banality of mathematical expertise. *ZDM Mathematics Education* **52**, 1187–1197 (2020b). https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/s11858-020-01168-4

Skovsmose, O. Mathematics and crises. *Educ Stud Math* 108, 369–383 (2021). https://doi.org/10.1007/s10649-021-10037-0

Skovsmose, O., Skovsmose, O., Greer, B. (2012). Opening The Cage? Critical Agency in The Face of Uncertainty. In: Skovsmose, O., Skovsmose, O., Greer, B. (eds) *Opening the Cage. New Directions in Mathematics and Science Education, vol 23*. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-808-7_19

Skovsmose, Ole (2012). *Escenarios de investigación.* En Valero, Paola; Skovsmose, Ole (Eds.), Educación matemática crítica. Una visión

sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 109-130). Bogotá: una empresa docente.

Stake, R. (2013). Estudios de casos cualitativos. N. Denzin e Y. Lincoln (coords.), Las estrategias de investigación cualitativa (154-197). Barcelona: Gedisa.

Stillman, G. A. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education. Lines of Inquiry. In G. Stillman & J. Brown (Eds). Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education (pp. 1-20). https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-14931-4_1.

Suela, K., & Cyril, J. (2023). Values in preservice mathematics teachers' discussions of the Body Mass Index-A critical perspective.

Temblores, O. N. G. (2021). Informe de Temblores ONG e Indepaz a la CIDH sobre la violación sistemática de la Convención Americana y los alcances jurisprudenciales de la Corte IDH con respecto al uso de la fuerza pública contra la sociedad civil en Colombia en el marco de las protestas. Temblores e Indepaz. https://www.indepaz.org.co/wp-content/uploads/2021/05/INFORME-CIDH-VIOLENCIA-POLICIAL-PROTESTA-SOCIAL.pdf

Valdés, Juan E. Ñapóles. "La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico." *Revista Educación y Pedagogía* 35 (2003): 163-181.

Valero, P. y Skosvmose, O. (2012). Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Valero, P., Andrade-Molina, M., & Montecino, A. (2015). Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(3), 7-20.

Vasco, C. E. (2006). Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnología. In C. E. Vasco (Ed.), *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pp. 134–148). Universidad Pedagógica Nacional.

Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta & L. Diaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109–138). Gedisa.

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2009). El procesbo de modelación matemática. Una mirada a la práctica del docente. Educación Matemática, *Acta Latinomaericana de Matemática educativa*, *21*(2), 19-43

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, *18*(36), 219-251.

Villa-Ochoa, J., Sánchez-Cardona, J., y Parra-Zapata, M. M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática.

Vithal, R., & Valero, P. (2012). La investigación en educación matemática en situaciones de conflicto social y político. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(43), 1307-1325

Zaldívar Rojas, J. D., Quiroz Rivera, S. A., y Medina Ramírez, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *8*(15), 87-110.

6. Anexos

A. Anexo: Código de Python para graficar el modelo logístico

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import e
a=0
b=float(input("ingrese el numero de dias a analizar la poblacion: "))
def logistica(x):
```

```
return ((4687)/(1+24.47*e**(-1.05*x)))
R=logistica(b)
A=R-(R*0.04)
B=R+(R*0.04)
v=[b,b]
r=[b,b]
o=[R,R]
x=np.arange(a,b,0.01)
u=[A,B]
i=0
if b<=58:
  print("la cantidad de lesionados en este dia es ",R)
  fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,8))  # definimos el tamaño de la figura
  ax.plot(x, logistica(x), label='Función logistica')
  ax.axvline(x=90, color='purple',linestyle='--', label="dia final del paro")
  ax.set_xlabel('Días')
  ax.set_ylabel('Población')
  ax.set_title('Gráfico de la población en función de los días')
  fig.subplots_adjust(right=0.8)
```

```
  ax.legend(bbox_to_anchor=(1.3,0.9), loc='center right')
  plt.grid()
  plt.show()
  input()
else:
  print ("La cantidad de afectados en este dia es de:",R,"personas lesionadas")
  fig, ax = plt.subplots(figsize=(9,8))
  ax.plot(x, logistica(x), label='Función logistica')
  ax.axvline(x=90, color='purple',linestyle='--', label="dia final del paro")
  ax.set_xlabel('Días')
  ax.set_ylabel('Población')
  ax.set_title('Gráfico de la población en función de los días')
  fig.subplots_adjust(right=0.8)
  ax.legend(bbox_to_anchor=(1.3,0.9), loc='center right')
  plt.grid()
  plt.show()
  input()
```

El anterior Código, es el corpus del programa presentado a los estudiantes para poder analizar la gráfica de la función logística que describe el estallido social. Esta elaboración es propia

B. Anexo: Código de Python para graficar el análisis del estudiante Carlos

```
import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

from math import e

print("Este programa fue creado para analizar la función logística por intervalo de días. Debes generar seis intervalos de días que quieras analizar, por ejemplo: [4,5],[6,15]... puedes escoger los días que quieras ")

A=int(input("Valor inicial del primer intervalo "))

B=int(input("Valor final del primer  intervalo "))

C=int(input("Valor inicial del segundo intervalo "))

D=int(input("Valor final del segundo intervalo "))

E=int(input("Valor inicial del tercer intervalo "))

F=int(input("Valor final del tercer intervalo "))

G=int(input("Valor inicial del cuarto intervalo "))

H=int(input("Valor final del cuarto intervalo "))

I=int(input("Valor inicial del quinto intervalo "))
```

```
J=int(input("Valor final del quinto intervalo "))
K=int(input("Valor inicial del sexto intervalo "))
L=int(input("Valor final del sexto intervalo "))


R= np.array([A,B])
S=np.array([C,D])
T=np.array([E,F])
U=np.array([G,H])
V=np.array([I,J])
W=np.array([K,L])
print("Los intervalos que usaste fueron :",R,S,T,U,V,W,"A continuación observaras el comportamiento de la función logística según los intervalos que usaste. ")
# Crear diferentes valores de x para cada función
x1 = np.linspace(A, B, 200)
x2 = np.linspace(C, D, 200)
x3 = np.linspace(E,F, 200)
x4 = np.linspace(G, H, 200)
x5 = np.linspace(I, J, 200)
x6 = np.linspace(K, L, 200)
```

```
# Evaluar las funciones en los diferentes valores de x
y1 = (4687)/(1+24.47*e**(-0.1*x1))
y2 = (4687)/(1+24.47*e**(-0.1*x2))
y3 = (4687)/(1+24.47*e**(-0.1*x3))
y4 = (4687)/(1+24.47*e**(-0.1*x4))
y5= (4687)/(1+24.47*e**(-0.1*x5))
y6= (4687)/(1+24.47*e**(-0.1*x6))
# Crear los marcos para los gráficos
fig, axs = plt.subplots(2, 2)
# Graficar la primera función en el primer marco
axs[0, 0].plot(x1, y1)
axs[0, 0].set_title('Primer Intervalo ')
# Graficar la segunda función en el segundo marco
axs[0, 1].plot(x2, y2)
axs[0, 1].set_title('Segundo intervalo  ')
# Graficar la tercera función en el tercer marco
axs[1, 0].plot(x3, y3)
axs[1, 0].set_title('Tercer intervalo  ')
axs[1, 1].plot(x4, y4)
```

```
axs[1, 1].set_title('Cuarto intervalo ')
# Graficar la cuarta función en el cuarto marco
# Ajustar los márgenes entre los marcos
plt.subplots_adjust(hspace=0.5, wspace=0.5)
# Mostrar los gráficos
plt.show()
```

El anterior Código se realizó en Python para poder graficar la interpretación de la función logística dada por el estudiante Carlos. La elaboración de este Código es propia

C. Anexo: Código en C++ para analizar la función logística

```
#-------------------------------------------------------------------------#
#          Modelo lineal simple Casos de violencia x día

#-------------------------------------------------------------------------#
#                          Leer datos                    ####
library(readxl)
Mod_paro_2021 <- read_excel("C:/Users/C/Downloads/Mod-paro 2021.xlsx")
x11()
plot(N_casosViolencia~Dias,data=Mod_paro_2021,pch=20,xlab="Dias",
```

```
    ylab='N° de casos de violencia ')
mod = lm(N_casosViolencia~Dias, data=Mod_paro_2021)
mod
summary(mod)
abline(mod,lwd=2)
#                    Evaluacion de suspuestos                    ####
#   Normalidad
x11()
car::qqPlot(mod)
shapiro.test(mod$residuals)
#Hocedasticidad
res.stud<-studres(mod)
mod.fit<-mod$fitted.values
x11()
par(mfrow=c(1,2))
plot(mod.fit,res.stud,ylab="Residuos estudentizados",xlab="Valores ajustados")
abline(h=0,lty=2)
lines(lowess(res.stud~mod.fit), col = 2)
plot(mod.fit,abs(res.stud),ylab="|Residuos estudentizados|",xlab="Valores ajustados")
```

```
lines(lowess(abs(res.stud)~mod.fit), col = 2)
#si hay homocedasticidad
bptest(mod)   #si hay homocedasticidad
```

El código anterior fue realzado por la estudiante cristina para poder realizar el análisis del modelo matemático presentado

D. Anexo: Código en Wólfram Alpha de funciones las logísticas

```
Plot[{(4687)/(1 + 24.47 E^(-0.15 x)), (4770.68)/(1 +
    4.2522 E^(-0.0915 x))}, {x, -40, 70},
PlotRangePadding -> 0.06,
 PlotLegends -> "Expressions", Frame -> True,
 FrameLabel -> {"Días de la protesta social ",   "Cantidad de lesionados"}]
```

La elaboración de este código es propia, el código se les proporciono al estudiante para que lo pudieran modificar y realizar comparaciones

E. Anexo: Código en Wólfram Alpha de funciones las logísticas

```
Plot[{(172036335 E^(3 x/20))/(100 E^(3 x/20) + 2447)^2, 464039630721
 E^(183 x/2000)/(10 ((5000 E^(183 x/2000) + 21261)^2))}, {x, -70,
70}, PlotRangePadding -> 0.06, PlotRange -> Full,
```

```
 PlotLegends -> "Expressions", Frame -> True,
FrameLabel -> {"dp/dt ", " P(t)"}]
```

El Código anterior es una adaptación del Código presentado en el anexo D, donde la estudiante Stephanie lo realizo para analizar el comportamiento de las derivadas de la función logística