¿QUÉ ES UN ESPACIO GEODÉSICO (G-ESPACIO)?

JHOANNA ALEXANDRA POSSU GARCIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2012

¿QUÉ ES UN ESPACIO GEODÉSICO (G-ESPACIO)?

JHOANNA ALEXANDRA POSSU GARCIA

alexandrapossu@hotmail.com

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director: Guillermo Restrepo Sierra,Ph.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

JOHANNA ALEXANDRA POSSU GARCIA,1989

¿QUÉ ES UN ESPACIO GEODÉSICO (G-ESPACIO)?

TEMAS Y PALABRAS CLAVES

Curva, Longitud de curva, Segmento, Métrica, Finitamente compacto, Isometría, Geodésica, M-convexo,G-espacio

Al Dios de los cielos, a quien todo se lo debo y de quien soy

A mi madre y hermano, por su paciencia y amor

A mi amado Carlos, por su fe incansable y todo su apoyo

A todos los que me brindaron tiempo, conocimiento y cariño.

NOTA DE APROBACIÓN

El trabajo de grado titulado "¿QUÉ ES UN ESPACIO GEODÉSICO(G-ESPACIO)?", presentado por la estudiante JHOANNA ALEXANDRA POSSU GARCIA, para optar por el título de Matemático, fue revisado por el jurado y calificado como:

Aprobado.

____

Guillermo Restrepo S.
Director

____

Jurado

Índice general

Introducción

M. Frechét introdujo en 1906 la teoría axiomática de los espacios métricos y poco después, Menger inició la teoría de los espacios métricos geodésicos. Una geodésica en un espacio métrico (X, d) es un camino cuya longitud es igual a la distancia entre sus extremos. Menger generaliza varios resultados de la geometría clásica e introduce nuevos métodos en los que utiliza solamente la noción de distancia y las desigualdades propias de los espacios métricos como la desigualdad triangular. Menger escribió varios artículos relacionados con la noción de geodésica y curvatura en los espacios métricos generales (ver [3, pág. 75-163]). Posteriormente, H. Busemann y P. Alexandrov en la década 1930-1940 continuaron y profundizaron los trabajos de Menger. Una síntesis de estos trabajos aparece en la monografía *The geometry of geodesics* (ver [1, capítulo 1]), en la cual se plantea un tratamiento axiomático de los espacios geodésicos. Su punto de vista es que las cuestiones de diferenciabilidad son a menudo innecesarias.

Nuestro propósito al escribir esta tesis es presentar de una manera detallada y simple el concepto de G- espacio (espacio geodésico) estudiado por Busemann en [1]. Su teoría se desarrolla en los espacios métricos completos que son **finitamente compactos**. Un espacio métrico (X, d) es finitamente compacto si todo subconjunto infinito y acotado posee un punto de acumulación, lo que es simplemente la condición de Bolzano- Weierstrass (BW) en $\mathbb{R}^n$. En los espacios de Banach de dimensión infinita la condición de BW no se satisface, lo que no impide demostrar que un espacio de Banach de dimensión infinita y estrictamente convexo es un G- espacio como lo demuestra A. Papadoupoulos en su libro *Metric Spaces, Convexity and non Positive Curvature.* Este tema rebasa los propósitos de esta tesis y por ello no será abordado.

Para alcanzar el propósito de esta tesis, definiremos previamente algunos conceptos fundamentales para el desarrollo de este trabajo tales como camino, longitud de camino, camino geodésico, segmento geodésico y geodésica, además de algunas condiciones que garanticen la existencia de los espacios geodésicos. Pero la existencia de geodésicas no se garantiza fácilmente, aún si X es finitamente compacto y es por esta razón que H.Busemann en [1] hace uso de un axioma llamado *axioma de prolongabilidad local*, que garantiza que si γ es un camino geodésico desde x hasta y y si $\acute{\gamma}$ es un camino geodésico que une y con z, entonces $\gamma \cup \acute{\gamma}$ es un camino geodésico desde x hasta z. Busemann también hace uso de un teorema sobre la existencia de segmentos geodésicos que enunciaremos en el último capítulo de este texto.

Finalmente definiremos un espacio geodésico o **G-Espacio** como un espacio métrico (X, d) en el que se satisfacen las siguientes condiciones: La condición sobre X de ser finitamente compacto, la propiedad sobre la existencia de geodésicas, el axioma de prolongabilidad local o de la existencia local de prolongación para caminos geodésicos y la condición de unicidad de las geodésicas.

Esta tesis consta de 3 capítulos que reseñaremos a continuación: El capítulo 1 trata sobre espacios métricos e isometrías, se definen los límites superior e inferior de conjuntos, la convergencia de isometrías y la métrica $d_p(u, v)$ definida entre isometrías X en X y donde $p \in X$ es un punto determinado. Se definen los espacios finitamente compactos y se analiza la convergencia de isometrías respecto a esta métrica. Se muestra también que en los espacios finitamente compactos, la convergencia de sucesiones de isometrías respecto a esta métrica, es equivalente a la convergencia puntual.

En el capítulo 2 se estudian los caminos o curvas; la longitud de un camino, los caminos rectificables y el parámetro longitud de arco. Si $\mathcal{C}([a, b], X)$ es la colección de todos los caminos que empiezan en a y terminan en b, entonces la función longitud $l : \mathcal{C}([a, b], X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es semicontinua inferiormente, considerando en $\mathcal{C}([a, b], X)$ la métrica d_p. Como corolario se obtiene que si $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de caminos que convergen uniformemente a $\gamma \in \mathcal{C}([a, b], X)$, entonces $l(\gamma) \leq \liminf_n l(\gamma_n)$.

El capítulo 3 es el capítulo central de esta tesis. Comprende el estudio de los G-**espacios** (espacios geodésicos). Antes de abordarlos se estudian los l-**espacios** (espacios longitudinales), aquellos espacios métricos (X, d) para los cuales $d(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$ donde el ínfimo se toma sobre todos los caminos que conectan los puntos x e y (ver [2, pág. 34]). La métrica de un l-espacio se llama l- **métrica** (métrica longitudinal). Definiremos un **camino minimizante** $\sigma \in \mathcal{C}([a, b], X)$, cuya longitud es la mínima entre las longitudes de las curvas en $\mathcal{C}([a, b], X)$, se demostrará la existencia de caminos minimizantes en espacios métricos finitamente compactos (ver [1, pág. 25]) y definiremos detalladamente los G-espacios, mostrando que en los G-espacios convexos en el sentido de Menger siempre existe un segmento geodésico que conecta dos puntos distintos $a, b \in X$. Veremos algunos resultados que surgen como consecuencia de las definiciones en ambos casos.

Capítulo 1

Espacios Métricos e Isometrías

Este capítulo presenta algunos conceptos preliminares para el estudio de los capítulos posteriores, si el lector se encuentra familiarizado con los conceptos que se presentan a continuación, puede ir directamente al siguiente capítulo. A continuación introducimos el concepto de espacio métrico (X, d), al cual llamaremos simplemente X cuando no halla lugar a confusión. Definiremos una sucesión en el espacio métrico X y los límites superior e inferior de una sucesión en dicho espacio. Más adelante, definiremos un espacio métrico finitamente compacto y demostraremos algunos resultados en torno a estos conceptos.

Se definen también las isometrías en un espacio métrico (X, d), como funciones que preservan la distancia. Definiremos una métrica para establecer la distancia entre isometrías y veremos cuando una sucesión de isometrías es convergente. Veremos algunos resultados sobre la convergencia de isometrías en espacios finitamente compactos y finalmente hablaremos sobre el grupo de isometrías de algunos espacios métricos.

1.1. Espacios Métricos y Sucesiones

Definición(1.1.1) Una métrica o distancia en un conjunto no vacío X es una función d de $X \times X$ en $\mathbb{R}$ tal que;

$(d1)$. $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

$(d2)$. $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$.

$(d3)$. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Definición(1.1.2) Un espacio métrico es una pareja (X,d) donde M es un conjunto no vacío y d es una métrica.

Definición(1.1.3) Una sucesión en un espacio métrico (X,d) es una función $n \longmapsto f(n)$ de $\mathbb{N}$ en X. Escribiremos $x_n = f(n)$ y denotaremos por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión f. Una subsucesión de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $y_n = x_{k_n}$ y $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

Definición(1.1.4) Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X,d) es convergente si existe $x \in X$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq N_0$. Se dice que x es un límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se escribe $x_n \to x$ o $\lim_n x_n = x$. Es fácil ver que una sucesión en un espacio métrico tiene a los más un límite (ver [4, Teorema 4.2]).

Proposición(1.1.5) Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x si y sólo si toda subsucesión $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de esta sucesión converge a x.

Demostración. Ver [4, Teorema 4.5].

Definición(1.1.6) Sea (X,d) un espacio métrico, sean $x \in X$ y $r > 0$. La bola abierta $B(x,r)$ de centro x y radio r es el conjunto de los y tales que $d(x,y) < r$ y la bola cerrada $\overline{B(x,r)}$ es el conjunto de los $y \in X$ tales que $d(x,y) \leq r$.

Definición(1.1.7) La clausura de un subconjunto A de un espacio métrico X es el conjunto $\overline{A}$ de los $x \in X$ tales que $B(x,r) \cap A \neq \phi$ para todo $r > 0$.

Proposición(1.1.8) $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$.

Demostración. [Ver 4, Teorema 4.3].

Definición(1.1.9) Diremos que x es un valor límite (o punto de acumulación) de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto infinito $V \subset \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x,\epsilon)$ si $n \in V$. En terminos simples, x es un valor límite de esta sucesión si para todo $\epsilon > 0$ la bola $B(x,\epsilon)$ contiene infinitos terminos x_n.

Proposición(1.1.10) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X,d). x es un valor límite de esta sucesión si y sólo si existe una subsucesión $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{k_n} \to x$.

1.2. Límite Superior e Inferior de una Sucesión de Conjuntos

Definición(1.2.1) Sea E_n una sucesión de conjuntos de un espacio métrico (X,d). El **límite superior** de esta sucesión es el conjunto:

$$\overline{\text{lím}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\leq n} \overline{E_k},$$

y el **límite inferior** de esta sucesión es el conjunto:

$$\underline{\text{lím}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\leq n} \overline{E_k}.$$

Teorema(1.2.2) Sea (X,d) un espacio métrico y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X. Entonces los enunciados siguientes son equivalentes:

1. $x \in \overline{\text{lím}} E_n$.

2. Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in E_n$ que posee una subsucesión $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x.

3. Para todo $\epsilon > 0$ existe una sucesión creciente $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que $B(x,\epsilon) \cap E_{k_n} \neq \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En términos menos precisos, toda bola $B(x,\epsilon)$ intercepta a un número infinito de E-es.

Observación(1.2.3) No se debe confundir el límite superior e inferior de una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, estos límites se definen así:

$$\overline{\text{lím}} x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_n \text{ y } \underline{\text{lím}} x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k.$$

Es posible que estos límites sean iguales a $+\infty$ o a $-\infty$. Por ejemplo, si $x_n = -n$, entonces

$$\overline{\text{lím}} x_n = \underline{\text{lím}} x_n = -\infty.$$

Si consideramos $\mathbb{R}^* = \{\mathbb{R} \cup +\infty, -\infty\}$ entonces, en cualquier caso, estos límites superior e inferior siempre existen y,

$$\overline{\text{lím}} x_n \leq \underline{\text{lím}} x_n.$$

Además, si el límite inferior y el límite superior estan en $\mathbb{R}$, entonces $\underline{\text{lím}} x_n$ es el menor valor límite de la sucesión y $\overline{\text{lím}} x_n$ es el mayor valor límite de la sucesión.

Es claro que las consideraciones anteriores no tienen sentido en un espacio métrico arbitrario por carecer de una relación de orden.

Teorema(1.2.4) $\underline{\text{lím}} E_n \subseteq \overline{\text{lím}} E_n$.

Demostración. Sea $x \in \underline{\text{lím}} E_n$ y sea $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x,\epsilon) \cap E_k \neq \phi$ si $k \geq n_0$. Se definen ahora $k_1 = n_0$, $k_2 = n_0 + 1$, $k_3 = n_0 + 2, ..., k_n = n_0 + n - 1, ...$ Es claro que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de números naturales y por el teorema anterior $x \in \overline{\lim} E_n$.

Definición(1.2.5) Sea (M, d) un espacio métrico. Una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos en M es convergente con límite E si y solo si:

$$E = \overline{\lim} E_n = \underline{\lim} E_n,$$

en tal caso escribiremos $E = \lim_n E_n$.

Ejemplos (1.2.6) (Sobre límites de conjuntos).

1. Sea $(E_n)_{n\in N}$ la sucesión constante, esto es, $E_n = E$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces;

$$\overline{\lim} E_n = \overline{E} = \underline{\lim} E_n.$$

Comprobemos esta afirmación: Sabemos que $\underline{\lim} E_n \subseteq \overline{\lim} E_n$. Ahora consideremos $x \in \overline{\lim} E_n$ y sea $\epsilon > 0$. Existe una sucesión creciente $(k_n)_{n\in N}$ tal que $B(x, \epsilon) \cap E_{k_n} \neq \phi$. Luego $B(x, \epsilon) \cap E \neq \phi$ para todo n y por lo tanto $x \in \overline{E}$, así $\overline{\lim} E_n \subseteq \overline{E}$. Por otro lado si $x \in \overline{E}$ entonces toda bola $B(x, \epsilon)$ intercepta a E y como $E_n = E$ para todo n, se tiene de la definición de límite inferior, que $x \in \underline{\lim} E_n$.

2. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida así: $E_n = \begin{cases} A, & n \quad impar \\ B, & n \quad par \end{cases}$. Entonces,

$$\overline{\lim} E_n = \overline{A} \cap \overline{B},$$

y por consiguiente este límite superior es vacío si $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$. Demostremos este resultado: Supongamos que $\overline{\lim} E_n \neq \phi$ y sea $x \in \overline{\lim} E_n$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in E_n$ que posee una subsucesión $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x. Sea $y_n = x_{k_n}$ si k_n es impar y $z_n = x_{k_n}$ si k_n es par. Entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A que converge a x y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en B que converge a x. Luego $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Hemos demostrado que

$\overline{\text{lím}}E_n \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Sea ahora $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Entonces existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A y $(y_n)_{n\in N}$ en B tales que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow x$. La sucesión $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ...) = (z_n)_{n\in N}$ con $z_n = \begin{cases} y_k & si \quad n = 2k \\ x_{2k-1} & si \quad n = 2k-1 \end{cases}$ y $z_n \in E_n$ tienden a x como valor límite y por lo tanto $x \in \overline{\text{lím}}E_n$. Hemos demostrado el enunciado.

3. En $\mathbb{R}$ sea $E_n = \{x \in \mathbb{R} : x \geq n\}$. Entonces:

$$\overline{\text{lím}}E_n = \phi.$$

Para demostrar este enunciado, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \in E_n$. Ninguna subsucesión de esta sucesión es convergente. En efecto, sea $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión, entonces $x_{k_n} \geq k_n$ y por tanto esta sucesión no es acotada, lo que implica que no es convergente.

Teorema(1.2.7) Sea (X, d) un espacio métrico, en el cual el orden está dado por la inclusión $(\subseteq)$. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de subconjutos de este espacio, entonces esta sucesión es convergente y su límite es $\overline{E}$, donde $E = \bigcup_n E_n$. Es decir:

$$\lim_n E_n = \overline{\text{lím}}E_n = \underline{\text{lím}}E_n = \overline{E}.$$

Demostración. Si $x \in \overline{E}$ y $\epsilon > 0$, entonces $B(x, \epsilon) \cap E \neq \phi$ y por lo tanto $\{x\} \cap E_p \neq \phi$ para algún p. Como $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_n \subseteq ...$, entonces $B(x, \epsilon) \cap E_n \neq \phi$ si $n \geq p$. Luego $x \in \underline{\text{lím}}E_n$. Hemos demostrado que $\overline{E} \subseteq \underline{\text{lím}}E_n$. Por otro lado observe que $\bigcup_{k\leq n} E_k \subseteq E$, entonces $\overline{\bigcup_{k\geq n} E_k} \subseteq \overline{E}$ para todo n y por tanto $\overline{\text{lím}}E_n \subseteq \overline{E}$, teniendo en cuenta el teorema (1.2.4) tenemos que:

$$\overline{\text{lím}}E_n \subseteq \overline{E} \subseteq \underline{\text{lím}}E_n \subset \overline{\text{lím}}E_n,$$

de donde se obtiene la igualdad que se quiere probar.

Definición(1.2.8) Un espacio métrico (X, d) es finitamente compacto si satisface el teorema de **Bolzano- Weierestrass**:

Todo conjunto infinito acotado posee un punto de acumulación

Si en particular nos referimos al espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ donde d es la norma euclidea, esta propiedad equivale a que toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

1.3. Isometrías

Definición(1.3.1) Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que la función $u : X \to X$ es una isometría si u preserva distancias, es decir, si $d(u(p), u(q)) = d(p, q)$.
Es claro que si u preserva la distancia entonces u es inyectiva y su inversa es también una isometría. Observe que si $d(p, q) > 0$ entonces $d(u(p), u(q)) > 0$ y por lo tanto $u(p) \neq u(q)$.

Definición(1.3.2) La distancia $d_p(u, v)$ entre las isometrías u, v se define así:

$$d_p(u,v) = \sup_{x\in X}(d(u(x), v(x)))e^{-d(x,p)}$$

donde p es un punto arbitrario.

Observe al ser u una isometría, su inversa u^{-1} lo es también y además $d(p, u(x)) = d(u^{-1}(p), x)$ así:

$$d(u(x), v(x)) \leq d(u(x), p) + d(p, v(x)) = d(x, u^{-1}(p)) + d(v^{-1}(p), x) \leq$$
$$2d(x,p) + d(p, u^{-1}(p)) + d(p, v^{-1}(p)).$$

Dado que $d(x, p)e^{-d(x,p)} < 1$ tenemos que:

$$d_p(u, v) \leq 2 + d(p, u^{-1}(p)) + d(p, v^{-1}(p))$$

por lo que concluimos que esta distancia es finita. Además $d(u, v)$ es acotada si X es acotado.

Teorema (1.3.3) La distancia definida en (1.3.2) posee las propiedades de una métrica:

1. $d_p(u,v) = d_p(v,u) \geq 0$ y $d_p(u,v) = 0$ si y solo si $d(v(x), u(x)) = 0$ para todo x, es decir $u = v$.

2. La desigualdad triangular

$$d_p(u,v) \leq d_p(u,w) + d_p(w,v)$$

Demostración de (2). Por la definición del supremo, para todo $\epsilon > 0$, existe z tal que

$$d_p(u,v) - \epsilon \leq d(u(z), v(z))e^{-d(p,z)} \leq (d(u(z), w(z)) + d(w(z), v(z)))e^{-d(p,z)} \leq d_p(u,w) + d_p(w,v).$$

Observación: la distancia no depende de p. En efecto, si deseamos definir la distancia para cualquier otro punto q, sea $d_q = \sup_{x \in X}(d(u(x), v(x)))e^{-d(x,q)} \leq \sup_{x \in X}(d(u(x), v(x)))e^{-d(x,p)}e^{d(p,q)} \leq d_p(u,v)e^{d(p,q)}$ esta última desigualdad es consecuencia de la desigualdad triangular pues $-d(x,q) \leq d(p,q) - d(x,p)$. De manera equivalente tenemos que $d_q(u,v) \geq d_p(u,v)e^{-d(p,q)}$ es decir:

$$d_p(u,v)e^{-d(p,q)} \leq d_q(u,v) \leq d_p(u,v)e^{-d(p,q)}$$

Ejemplos(1.3.3) (Sobre isometrías en espacios métricos con la métrica euclideana).

- Sea (E, ρ) un espacio euclideano sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $a \in E$ fijo. La función $x \mapsto a + x = \tau(x)$ es una traslación en la dirección a. Esta función es una isometría pues

$$\rho(\tau(x), \tau(y)) = \rho(x - a, y - a) = \|x - y\| = \rho(x, y)$$

- En $\mathbb{R}^2$ definimos la función $\varphi(x) = Ax$ donde $x \in \mathbb{R}^2$ y

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

  La función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llama rotación en el plano y constituye una isometría. En efecto, dados $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(Ax, Ay) = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| = \sqrt{(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(x, y)$.

Teorema(1.3.4) Sea X un espacio vectorial con producto interno. Denotemos por $\|.\|$ a la norma asociada con el productos interno y denotemos por d a la distancia asociada con esta norma. Si $u : X \to X$ una función lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. u es una isometría lineal.

2. u preserva la norma, es decir, $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

3. u preserva el producto interno, es decir, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$ para todo $x, y \in X$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Sea u una isometría lineal, entonces $\|u(x) - u(y)\| = d(u(x), u(y)) = d(x, y) = \|x - y\|$, en particular $\|u(x)\| = d(u(x), u(0_X)) = d(x, 0_X) = \|x\|$ para todo $x \in X$. Observe que $u(0_X) = 0_X$ pues u es lineal. En conclusión u preserva la norma.

2. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que u preserva la norma, vamos a probar que dados $x, y \in X$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$. Dado que:

$$(x|y) = \tfrac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \text{ y}$$
$$(u(x)|u(y)) = \tfrac{1}{2}(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) = \tfrac{1}{2}(\|u(x + y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2)$$

pues u es lineal. Dado que u preserva la norma obtenemos de lo anterior que $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.

3. $\Rightarrow$ 1. Sean $x, y \in X$. Entonces:

$$d(u(x), u(y))^2 = \|u(x - y)\|^2 = (u(x - y)|u(x - y)) = (x - y|x - y) = \|x - y\|^2 = d(x, y)^2.$$

Luego $d(u(x), u(y)) = d(x, y)$ es decir, u es una isometría.

Teorema(1.3.5) Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal. Entonces u es una isometría si y sólo si la imagen de una base ortonormal es una base ortonormal.

Demostración. Supongamos que u es una isometría y sea $b_1, b_2, ..., b_n$ una base ortonormal, es decir, para cada b_i, b_j elementos de la base, el producto escalar $(b_i|b_j) = 0$ si $i \neq j$ y $(b_i|b_j) =$

1 si $i = j$. Queremos probar que $u(b_1), u(b_2), ..., u(b_n)$ es una base ortonormal, pero esto es consecuencia inmediata del teorema anterior pues u preserva el producto interno. Asi dados $u(b_i), u(b_j)$ tenemos que:

$$(u(b_i)|u(b_j)) = (b_i|b_j) = \delta_{ij}. \text{ Donde } \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ y } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Ahora supongamos que la imagen de una base ortonormal es ortonormal. Sea $u(b_1), u(b_2), ..., u(b_n)$ una base ortogonal y $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\|x\|^2 = (x|x) = \left((\sum_{k=1}^{n} x_k b_k)|(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j) \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \text{ y}$$

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = \left((\sum_{k=1}^{n} x_k f(b)_k)|(\sum_{j=1}^{n} x_j u(b)_j) \right) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k x_j \, (u(b_j)|u(b_i)) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

por lo tanto $\|x\| = \|u(x)\|$ y por el teorema anterior u es una isometría.

Definicion(1.3.6) La **transpuesta** de una función lineal $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la función lineal u^* definida por:

$$(u^*(x)|y) = (x|u(y)).$$

Definición(1.3.7) Un operador $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es unitario si $u \circ u^* = e$, $(e(x) = x)$. Una matriz A es unitaria si:

$$A.A^* = A^*.A = I.$$

Donde A^* es la matriz transpuesta de la matriz A.

Para enunciar el siguiente teorema, sea A la matriz de la transformación u, A^* la matriz de la transformación u^* y B la matriz de la composición $u \circ u^*$.

Teorema(1.3.8) Una función lineal $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es unitaria si y sólo si su matriz A respecto a cualquier base ortonormal es unitaria.

Demostración. Sea $u:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal, sea $b_1, b_2, ..., b_n$ una base ortonormal. Es claro que si los elementos x_{ij} de A son reales, entonces $A.A^* = I$. Ahora si A es unitaria, $B = A(u)A(u^*) = A(u)A^*(u) = I$ lo cual implica que $u \circ u^* = e$. Para probar que $A(u^*) = A^*(u)$ recordemos que:

$$u(v_i) = u\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ji} b_j\right) \text{ y } u^*(v_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} b_i\right),$$

así que $(u(b_i)|b_j) = x_{ij} = (b_i|u^*(b_i)) = y_{ij}$.

Teorema(1.3.9) $u:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal es una isometría si y sólo si u es unitaria.

Demostración. Sea u una isometría, del teorema (2.1.3) tenemos que u preserva el producto interno, entonces dado x fijo $(u^* \circ u(x)|y) = (u(x)|u(y)) = (x|y)$ para todo y. Si $u^* \circ u(x) = z$ entonces $(x - z|y) = 0$ para todo y y en particular si $y = x - z$ tendriamos que $(x - z|x - z) = 0$ pero esto solo ocurre si $x = z$ por lo tanto $u^* \circ u(x) = e(x) = x$. Por otro lado si u es unitaria, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $d(u(x), u(y)) = \|u(x) - u(y)\|^2 = \|u(x - y)\|^2 = (u(x - y)|u(x - y)) = (x - y|u^* \circ u(x - y)) = (x - y|x - y) = \|x - y\|^2 = d(x, y)$. Así $d(u(x), u(y)) = d(x, y)$ y u es una isometría.

Corolario(1.3.10) Si A es unitaria, entonces $det(A) = \pm 1$.

Demostración. La demostración de este teorema esta inmersa en la demostración del teorema (1.3.8).

Los anteriores resultados quieren decir que las isometrías con la métrica en $\mathbb{R}^n$ inducida por el producto escalar, son generadas por el grupo unitario de las matrices A tales que $det(A) = \pm 1$ y el grupo de las traslaciones, es decir, las funciones de la forma $u(x) = x + b$, donde b es un vector fijo de $\mathbb{R}^n$.

Definición(1.3.11) Sea $(u_n)_n$ una sucesión de isometrías. Diremos que la sucesión converge a una isometría u si $\lim\limits_{n} u_n = u$.

1.4. El grupo $Is(X)$

Los siguientes resultados hablan acerca de los grupos de isometrías de algunos espacios métricos, los cuales consideramos, pueden ser de gran interés para el lector.

Teorema(1.4.1) Si G es un grupo de isometrías de un espacio métrico X entonces su clausura $\overline{G}$ es un grupo.

Demostración. Debemos probar que si $u, v \in \overline{G}$ entonces $u \circ v^{-1} \in \overline{G}$. Si $u \in \overline{G}$ es porque existe una sucesión de isometrías $u_n \in G$ con $d_p(u_n, u) \to 0$. De manera similar pasa con v. Entonces usando los resultado anteriores:

$d_p(u_n \circ v_n^{-1}, u \circ v_n^{-1}) = d_p(u_n, u \circ v^{-1} \circ v_n) \leq d_p(u_n, u) + d_p(u, u \circ v^{-1} \circ v_n) = d_p(u_n, u) + d_p(v_n, v).$

Así $d_p(u_n \circ v_n^{-1}, u \circ v^{-1}) \to 0$ y $u \circ v^{-1} \in G$.

Teorema(1.4.2) El conjunto de las isometrías de $\mathbb{R}^n$ es el grupo generado por las traslaciones y el grupo unitario $(det(A) = \pm 1)$. Es decir u es una isometría en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si es de la forma $f = \varsigma \circ \mu$ donde ς es una traslación y u unitaria.

Demostración. Ver [6, pág. 5].

Teorema(1.4.3) El grupo de todas las isometrías que posee un espacio finítamente compacto X forma un espacio finítamente compacto con la distancia definida en (1.3.2). Este grupo es compacto cuando el espacio es compacto.

Demostración. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ una sucesión acotada de isometrías, es decir que para algún $\alpha > 0$, $d(u_n(x), u_m(x)) < \alpha e^{-d(x,p)}$.

Como $u_n(x)$ es acotada para todo x, la función u_n es equicontinua, es decir dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ implica que:

$$d(u_n(x), u_n(y)) < \epsilon.$$

Como u_n está definida sobre un espacio finitamente compacto existe una subsucesión $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_n}(x)$ converge a un punto $u(x)$ para todo x y además:

$$d(u(x), u(y)) = \lim_n d(u_{k_n}(x), u_{k_n}(y)) = d(x, y).$$

entonces u es una isometría. Para cada punto $y \in X$ existe un $\tilde{y}$ tal que $u(\tilde{y}) = y$. Ahora, la sucesión $u_{k_n}^{-1}(y)$ es acotada y $d(u_{k_n}^{-1}(y), p) = d(y, u_{k_n}(p)) \to d(y, u(p))$, luego existe una subsucesión $u_{k_j}^{-1}$ de $u_{k_i}^{-1}$ que converge al punto $\tilde{y}$. Así:

$$d(y, u(\tilde{y})) = \lim d(y, u_{k_j}(\tilde{y})) = \lim d(u_{k_j}^{-1}(y), \tilde{y}) = 0.$$

Hemos probado que $u_{k_n}(x) \to u(x)$ para todo x y por el teorema (2.2.6) se tiene que $d_p(u_{k_n}, u) \to 0$. Si X es compacto entonces u_n es acotado.

Teorema(1.4.4) El grupo de isometrías en S^1 es el generado únicamente por las rotaciones.

Demostración. Ver [6, pág 5].

Capítulo 2

Curvas y Segmentos

Introducimos en este capítulo los conceptos de camino y longitud de camino. Más adelante relacionaremos a un camino $x(t)$ que une los puntos p y q, tal que su longitud es la menor entre las longitudes de todas las curvas que unen a p con q (definición (3.1.2)), con la noción de geodésica del siguiente capítulo. Demostraremos que para que la curva $x(t)$ satisfaga la condición mencionada anteriormente, es necesario que su longitud sea igual a las distancia d definida en (X, d), entre los puntos p y q.

2.1. Curvas y Longitud de Curva

Definición(2.1.1) Sea (X, d) un espacio métrico. Un camino iniciado en p y terminado en q es una función continua $t \mapsto x(t)$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y con valores en X tal que $x(a) = p$ y $x(b) = q$. Este camino es llamado tambien curva y puede tener autointersecciones, es decir, puede ocurrir que $t \mapsto x(t)$ no sea inyectiva.

Ejemplo. $x(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Si la curva $t \mapsto x(t)$ es inyectiva, la llamaremos un arco.

Definición(2.1.2) Una partición del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto finito,

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\},$$

tal que $t_0 = a$, $t_n = b$ y $t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$.

Definición(2.1.3) Sea P una partición del intervalo $[a, b]$. La suma:

$$l(x, P) = \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, x_k),$$

donde $x_{k-1} = x(t_{k-1})$ y $x_k = x(t_k)$, representa la suma de las distancias entre puntos consecutivos de la partición evaluados en la curva x.

Definición(2.1.4) Sea $P = \{t_k : 0 \leq k \leq n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. La longitud de una curva $x : [a, b] \to X$ es el extremo superior del conjunto $\{l(P) : P \in \wp([a, b])\}$ donde P varia en el conjunto $\wp$ de las particiones del intervalo $[a, b]$. Denotaremos la longitud de curva por $l(x)$.

Denotaremos por $l_{t_{k-1}}^{t_k}(x)$ la longitud de la curva $x(t)$, donde $t_{k-1} \leq t \leq t_k$.

Definición(2.1.5) Una curva $t \mapsto x(t)$ es rectificable si su longitud $l(x)$ es finita, es decir, si $l(x) < \infty$.

Definición(2.1.6) La norma de una partición P es el número:

$$\|P\| = \text{máx}\{d(t_{k-1}, t_k) : 1 \leq k \leq n\}.$$

Teorema(2.1.7) Una curva $x : [a, b] \to X$ es rectificable con longitud $l(x)$ si y solo si,

$$\text{lím}_{\|P\| \to 0} l(x, P) = l(x).$$

El límite anterior debe entenderse asi: Para $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$l(x) - l(x, P) < \epsilon \text{ siempre que } \|P\| < \delta.$$

Demostración. Supongamos que x es rectificable y sea $\epsilon > 0$, entonces existe una partición $Q = \{s_0, s_1, ..., s_m\}$ tal que:

$$0 < l(x) - l(x, Q) < \epsilon.$$

Sea $\delta = \|Q\|$ y $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ tal que $\|P\| < \delta$.
Ahora sea $A_i = \{t_k : s_{i-1} \leq t_k \leq s_i\}$ para todo $i \in 1, 2, ..., n$, es claro que para todo i, $A_i \neq \phi$ entonces la longitud

$$l(x, Q) = d(x_{s_0}, x_{s_1}) + d(x_{s_1}, x_{s_2}) + ... + d(x_{s_{n-1}}, x_{s_n}) \leq l(x, A_1) + l(x, A_2) + ... + l(x, A_n) = l(x, P)$$

entonces $l(x) - l(x, P) \leq l(x) - l(x, Q) < \epsilon$.
Ahora supongamos que $\lim_{\|P\| \to 0} l(x, P) = l(x)$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$l(x) < \epsilon + l(x, P) \text{ si } \|P\| < \delta.$$

Como P es una partición finita, la suma $l(x, P) < \infty$, así x es rectificable por definición.

Corolario(2.1.8) Sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de particiones tal que $\|P_n\| \to 0$. Entonces se tiene que $l(x, P_n) \to l(x)$

Demostración. Supongamos que la curva x es rectificable. Por hipótesis $\|P_n\| \to 0$ y del teorema anterior tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ y un $\delta > 0$ tales que si $n > N_0$, $\|P_n\| < \delta$ y $|l(x, P_n) - l(x)| < \epsilon$ $(\delta = \delta(N_0, \epsilon))$.

Corolario(2.1.9) (Sobre la aditividad de la longitud) Sea $x : [a, b] \to X$ rectificable entonces

$$l(x) = l_a^{t_1}(x) + l_{t_1}^{t_2}(x) + ... + l_{t_{n-1}}^{b}(x),$$

donde $a \leq t_k \leq b$.

Demostración. Ver [4, Teorema 6.18].

Definición(2.1.10) La función $r \to \sigma(r)$, de $[a, b]$ en $[0, l(x)]$ se llama longitud de arco y se define por $\sigma(r) = l_a^r(x)$, donde x_a^r es la curva $x_a^r(t) = x(t), a \leq t \leq r$.

Teorema (2.1.11) La función longitud de arco es continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Debemos probar que existe un $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ implica $|\sigma(r+h) - \sigma(r)| < \epsilon$. Podemos suponer $h > 0$, entonces $|\sigma(r+h) - \sigma(r)| = \sigma(r+h) - \sigma(r)$ representa la longitud de $x(t)$ cuando $r \leq t \leq r+h$.

Por la continuidad de la distancia existe un δ_1 tal que $d(x(r), x(r+h)) < \frac{\epsilon}{2}$ si $h < \delta_1$ y por la definición de longitud de curva $l(x)$, existe un δ_2 tal que:

$$l(x) - l(x, P) < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ si } \|P\| < \delta_2.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces simultaneamente:

$$d(x_r, x_{r+h}) < \tfrac{\epsilon}{2},$$
$$l(x) - l(x, P) < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ si } \|P\| < \delta.$$

Tomemos P tal que $r = x_j \in P$, luego existiran P_1 y P_2 particiones de $[a, r]$ y $[r+h, b]$ respectivamente tales que:

$$\sum_{k=1}^{r} d(x_{k-1}, x_k) + d(x_r, x_{r+h}) + \sum_{k=r+h}^{n} d(x_{k-1}, x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, x_k) = l(x, P) \geq$$
$$l(x) - \tfrac{\epsilon}{2} = \sigma(r) + l_r^{r+h}(x) + l_{r+h}^{b}(x) - \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Cuando $\|P\|, \|P_1\|, \|P_2\| \to 0$ se tiene que $\frac{\epsilon}{2} > d(x_r, x_{r+h}) \geq l_r^{r+h} - \frac{\epsilon}{2}$, asi $l_r^{r+h} < \epsilon$.

El siguiente teorema afirma que la longitud es semicontinua inferiormente.

Teorema(2.1.12) Sean $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de curvas en el espacio métrico (X,d). Si x es una curva y $x_n(t)\to x(t)$ para cada $a\leq t\leq b$, entonces

$$l(x)\leq \lim_n l(x_n)$$

Observación. Denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ al conjunto de todas las curvas que van de A hasta B, siendo $A=x(a)$ y $B=x(b)$. El teorema anterior nos expresa que la función $l:\mathcal{C}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\to\mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua considerando en $\mathcal{C}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ la convergencia puntual.

Definición(2.1.13) Una curva $\hat{x}:\mathcal{C}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\to\mathbb{R}$ es minimizante si:

$$l(\hat{x})\leq l(x),$$

para toda curva $x\in\mathcal{C}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

Teorema(2.1.14) Si H es un conjunto finitamente compacto y los puntos a y b pueden unirse por una curva rectificable, entonces la curva de mínima longitud o minimizante de a y b existe en H.

Demostración. Sea l_α el ínfimo de las longitudes (finitas) de todas curvas que unen a a con b, entonces existe una sucesión de caminos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que su longitud tiende a l_α. Por el teorema anterior dicha sucesión posee una subsucesión $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a una cierta curva $x(t)$ que une a a con b y satisface $l(x)\leq \underline{\lim} l(x_n)=l_\alpha$, pero $l(x)\geq l_\alpha$, por lo tanto $l(x)=l_\alpha$.

Teorema(2.1.15) Toda curva de mínima longitud rectificable $x(t)$ que una dos puntos a y b es un arco.

Demostración. Supongamos que esto no es cierto, luego la curva $x(t)$ posee al menos una autointersección, es decir, existen $t_1\neq t_2$ tales que $x_1=x_2$. Definamos la curva:

$$s(t)=\begin{cases} x(t), & si \quad t\notin(t_1,t_2)\\ x(t_1), & si \quad t\in[t_1,t_2]\,, \end{cases}$$

luego $l(s) = l_a^{t_1}(x) + l_{t_1}^{t_2}(s) + l_{t_2}^b = l(x) + l_{t_1}^{t_2}(s) < l(x)$. Lo cual contradice el hecho de que $x(t)$ sea la curva de longitud mínima, por lo tanto $x(t)$ es un arco.

2.2. Segmentos

Definición(2.2.1) Un camino $x : [a, b] \to X$ es un segmento que une los puntos p con q en X si $l(x) = d(p, q)$.

Teorema(2.2.2) Todo subarco de un segmento es un segmento.

Ejemplos(2.2.3)

1. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica:

$$d(x, y) = ((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

   El camino $x(t) = p + t(q - p)$, $0 \leq t \leq 1$ es un segmento pues $l(x) = d(p, q)$. Este camino se llama camino afín.

2. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & si \quad x \neq y \\ 0, & si \quad x = y. \end{cases}$$

   Cualquier camino $x(t)$ que conecte a p con q, $p \neq q$ no es un segmento. En efecto dada cualquier partición $P = t_0 = p, t_1, ..., t_n = q$, la sumas

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} d(x(t_{i-1}, t_i)) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

   entonces,

$$\sup(l, P) = \infty \text{ es decir, } l(x) = \infty \neq 1 = d(p, q)$$

Este último ejemplo nos muestra que es posible que no existan segmentos que conecten los puntos p y q.

Cabe decir que los segmentos no existen necesariamente en cualquier espacio métrico salvo casos triviales donde los segmentos consisten en un sólo punto. En $\mathbb{R}^n$, con la métrica euclidea es sencillo encontrar segmentos, pero observemos un caso más interesante. Consideremos los puntos en la esfera S^2 en un espacio ordinario. Entonces, si la distancia se mide a lo largo de los círculos maximales tenemos un espacio en el que dos puntos pueden estar conectados por un segmento, con nuestra definición.

Capítulo 3

Espacios Geodésicos

Este es el capítulo central de nuestro trabajo. Definiremos primero un espacio longitudinal, estos espacios hacen parte de este estudio dado que la métrica definida en este espacio exige que dados dos puntos p y q en X, la distancia entre estos puntos sea el ínfimo de las longitudes de todas las curvas γ que unen a dichos puntos. Más adelante veremos que cuando el infimo de estas curvas, además de existir, es también una curva $\acute{\gamma}$, este espacio se llama espacio geodésico (en el sentido de Papadopoulos).

Definiremos lo caminos geodésicos como aquellos que unen dos puntos siendo su longitud mínima entre el conjunto de todos los caminos que unen dichos puntos. Entre los caminos geodésicos se descatan los segmentos geodésicos, los rayos y las lineas geodésicas, demostraremos que todas estos caminos están parametrizados por longitud de arco (omitiremos hacer uso del parametro longitud de arco). Finalmente definiremos los espacios geodésicos segun A. Papadopoulos y según H. Busemann. El lector notará que Papadopuolos omite algunos conceptos usados por Busemann, esto trae algunas consecuencias que discutiremos a continuación.

3.1. Espacios Longitudinales y la Métrica Longitudinal

Definición(3.1.1) Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que X se conecta por curvas rectificables si para todo x y y existe una camino rectificable $\gamma : [a, b] \to X$ tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$.

Definición(3.1.2) (**Espacios Longitudinales**). Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que X es un espacio longitudinal ((l-espacio) si para todo x e y en X se cumple que:

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma),$$

donde el ínfimo es tomado sobre el conjunto $\mathcal{C}([a, b], X)$ de todos los caminos que une a los puntos a con b en X. La métrica de un espacio longitudinal se llama **métrica longitudinal**.

En particular, los puntos de un espacio longitudinal se conectan a través de caminos rectificables.

Ejemplos(3.1.3) (Sobre espacios longitudinales)

1. **Espacios Euclideanos**. Para todo $n \geq 1$. Sea $\mathbb{E}^n$ un espacio euclideano n dimensional, es decir, $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea, nosotros sabemos de la geometría clásica que $\mathbb{E}^n$ es un espacio longitudinal: la distancia entre dos puntos es igual a la longitud una curva afín (ver item 1 del ejemplo 2.2.3) que los une. De igual manera, un subconjunto convexo de $\mathbb{E}^n$ (es decir, un subconjunto donde cada segmento afín que une dos puntos x con y está contenido en el un subconjunto de $\mathbb{E}^n$) equipado con una métrica inducida por la de $\mathbb{E}^n$ es un espacio longitudinal.

   Si $n \geq 2$ el espacio $\mathbb{E}^n$ con una cantidad finita de puntos removidos es también un espacio longitudinal. Por el contrario, si al espacio $\mathbb{E}^n$ se le remueve una bola abierta B de radio $r > 0$, entonces dicho espacio resultante no será un espacio longitudinal.

2. **Espacios vectoriales normados**. Los espacios vectoriales normados ofrecen una amplia variedad de ejemplos de espacios longitudinales. La longitud de una curva afín en dicho espacio es igual a la distancia entre los dos puntos. Dicho de manera más general, cualquier subconjunto convexo afín en un espacio vectorial normado equipado con la métrica inducida es un espacio longitudinal.

3. **Esferas**. Para $n \geq 3$, sea $S = S^{n-1}$ la esfera unitaria en el espacio euclidano $\mathbb{E}^n$ y sea d la métrica inducida en S por la métrica de $\mathbb{E}^n$. Es posible probar que (S, d) no es un espacio longitudinal. Sabemos de la geometría elemental que para cada par de puntos x y y en S, se tiene que $d(x, y) = 2\sin(\frac{\alpha}{2})$, donde α es un ángulo con valores en el intervalo $[0, \pi]$, formado por dos rayos que van desde el origen y pasan por x e y. En otras palabras, la longitud $l(\gamma)$ de cualquier curva $\gamma : [a, b] \to S$ que una los puntos x con y está acotada inferiormente por un pequeño arco del círculo S (esto es, un círculo euclideano máximal cuyo diametro está contenido en la esfera) que une x con y, esto es, por α. Entonces se tiene que $l(\gamma) = \alpha > 2\sin(\frac{\alpha}{2})$ asi $l(\gamma) > d(x, y)$, lo que preuba que (S, d) no es un espacio longitudinal.

Proposición(3.1.4) Sea (X, d) un espacio métrico y sea:

$$d_l(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma),$$

entonces d_l es una métrica longitudinal asociada a d y,

$$d_l(x, y) \geq d(x, y).$$

Demostración. Las propiedades para verificar que d_l es una métrica se garantizan por la definición y propiedades de la longitud de un camino $l(\gamma)$.

Veamos que $d_l(x,y) \geq d(x,y)$. Por definición de $l(\gamma)$ y tomando una partición P del intervalo $[a,b]$, tenemos que $l(\gamma) \geq d(x,y)$ para todo camino γ, por lo tanto $d(x,y) \leq \inf\limits_{\gamma} l(\gamma) = d_l(x,y)$.

Proposición(3.1.5) Sea X un espacio longitudinal y sean x e y dos puntos en X. Sean α y β dos números reales no negativos que satisfacen $\alpha + \beta \ \geq d(x,y)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un punto $z \in X$ tal que $d(x,z) \leq \alpha$ y $d(z,y) \leq \beta + \epsilon$.

Demostración. Ver [2, pág. 44].

Proposición(3.1.6) Sea (X,d) un espacio métrico que se conecta por caminos rectificables (definición (3.1.1)). Entonces la función idéntica $J : (X, d_l) \to (X,d)$ es continua.

Demostración. Dados $x, y \in X$ por la proposición (3.1.4) $d_l(x,y) < \epsilon$ implica que $d(x,y) < \epsilon$.

Proposición(3.1.7) Sea $\gamma : [a,b] \to (X,d)$ un camino. Entonces $\gamma : [a,b] \to (X,d_l)$ es también un camino.

Demostración. Para todo t_0 y t en $[a,b]$ tenemos por la aditividad de la longitud que

$$d(\gamma(t_0), \gamma(t)) \leq l(\gamma_{[t_0,t]}) = \left| l(\gamma_{[a,t]}) - l(\gamma_{[a,t_0]}) \right|$$

luego, dado que la longitud es creciente y continua, tenemos que $d(\gamma(t_0), \gamma(t)) \to 0$ cuando $t \to t_0$.

Proposición(3.1.8) Sea (X,d) un espacio métrico que se conecta por caminos rectificables. Entonces (X,d) es un espacio longitudinal si y sólo si $d_l = d$.

Demostración. Por definición, (X,d) es un espacio longitudinal si y sólo si para todo x e y en X, se tiene que $d(x,y) = \inf\limits_{\gamma} l(\gamma)$, donde el ínfimo es tomado entre todos los caminos que conectan a x con y, esto es, si y sólo si $d(x,y) = d_l(x,y)$.

Proposición(3.1.9) Sea (X, d) un espacio métrico, sea d_l la métrica longitudinal asociada y sea $\gamma : [a, b] \to X$ un camino en (X, d_l). Entonces γ es también una camino en (X, d) y se tiene que $l_d(\gamma) = l_{d_l}(\gamma)$.

Demostración. El hecho de que γ sea un camino con la métrica d se sigue de la continuidad de la función identidad $(X, d_l) \to (X, d)$ (proposición 3.1.6). Para probar la igualdad de las dos longitudes sea $P = (t_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ una partición del intervalo $[a, b]$. De la desigualdad $d \leq d_l$ (proposición 3.1.4), tenemos que $l_d(\gamma, P) \leq l_{d_l}(\gamma, P)$ y tomando el supremo tenemos que $l_d(\gamma) \leq l_{d_l(\gamma)}$. Por otro lado:

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_l \left|\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} l_d \left(\gamma| \left[t_i, t_{i+1}\right]\right) = l_d(\gamma).$$

Lo que quiere decir que $l_{d_l}(\gamma) \leq l_d(\gamma)$, con lo que concluimos que $l_{d_l}(\gamma) = l_d(\gamma)$.

Teorema(3.1.10) Sea (X, d) un espacio métrico que se conecta por caminos rectificables. Entonces (X, d_l) es un espacio longitudinal.

Demostración. Para todo x e y en X tenemos que por definición:

$$d_l(x, y) = \inf_{\gamma} l_d(\gamma),$$

donde el ínfimo es tomado sobre el conjunto de todas los caminos γ (con la métrica d) que unen a x con y. Sin perdida de generalidad, podemos restringir este conjunto a los caminos rectificables. Por la proposición (3.1.8), cada camino es también una camino con la métrica d_l.

Ahora si γ es una camino rectificable para en la métrica d_l, entonces por la proposición (3.1.9) γ es también una camino con la métrica d y $l_{d_l}(\gamma) = l_d(\gamma)$. Luego:

$$d_l(x, y) = \inf_{\gamma} l_{d_l}(\gamma),$$

donde el ínfimo es tomado bajo el conjunto de los caminos γ que conectan a x con y, continuos y rectificables con la métrica d_l.

3.2. Caminos Geodésicos

Definición(3.2.1) Sea (X, d) un espacio métrico. Un camino geodésico γ (o simplemente geodésica) de extremos p y q es un camino tal que:

$$l(\gamma) = d(p, q).$$

Definición(3.2.2) Un segmento geodésico es la imagen de un camino geodésico. Denotaremos un segmento geodésico que une los puntos p con q por $[p, q]$.

Definición(3.2.3) Un rayo geodésico es una función $\gamma : [a, b] \to X$ que preserva la distancia, esto es, $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = d(t_1, t_2)$ para todos t_1 y t_2 en X.

Definición(3.2.4) Una línea geodésica es una función $\gamma : \mathbb{R} \to X$ tal que preserva la distancia.

Definición(3.2.5) La longitud de un segmento geodésico $[x, y]$ en un espacio métrico X es la longitud de un camino geodésico arbitrario en X, cuya imagen es $[x, y]$.

Proposición(3.2.6) Sea X un espacio métrico y $\gamma : [a, b] \to X$ un camino geodésico. Entonces γ está parametrizado por longitud de arco.

Demostración. Sean u y v dos números reales que satisfacen $a \leq u < v \leq b$. Para alguna partición $P = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ de $[u, v]$, tenemos que la suma:

$$l(\gamma|_{[u,v]}, P) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = v - u.$$

Entonces,

$$L(\gamma|_{[u,v]}) = \sup_P l(\gamma, P) = v - u.$$

Con estos probamos que γ es parametrizado por longitud de arco.

Proposición(3.2.7) Sea X un espacio métrico y sea $\gamma : [a,b] \to X$ un camino parametrizado por longitud de arco. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) γ es una geodésica.

(ii) Para todos u y v números reales que satisfacen $a \leq u \leq v \leq b$, se tiene que

$$d(\gamma(a), \gamma(v)) = d(\gamma(a), \gamma(u)) + d(\gamma(u), \gamma(v));$$

(iii) $l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$.

Demostración. $(i) \to (ii)$. Si γ es una geodésica, entonces, para todo u y v que satisfacen $a \leq u \leq v \leq b$, se tiene que

$$d(\gamma(a), \gamma(v)) = v - a = v - u + u - a = d(\gamma(u), (v)) + d(\gamma(a), \gamma(u)).$$

Ahora probemos que $(ii) \to (iii)$, Sea $P = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ una partición de $[a,b]$. Aplicando $(n-2)$ veces la condición (ii) se tiene que:

$$l(\gamma, P) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = d(\gamma(a), \gamma(b))$$

Tomando el supremo de todas las particiones $P \in \wp$, se tiene que $l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Finalmente, debemos probar que $(iii) \to (i)$. Para todos $a \leq u \leq v \leq b$.

$$l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b)) \leq d(\gamma(a), \gamma(u)) + d(\gamma(u), \gamma(v)) + d(\gamma(v), \gamma(b)) \leq$$
$$l(\gamma|_{[a,u]}) + l(\gamma|_{[u,v]}) + l(\gamma|_{[v,b]}) = l(\gamma)$$

por lo tanto, todas las desigualdades anteriores resultan ser igualdades. Por otro lado, tenemos por hipótesis que para todo u y v en $[a,b]$, $d(\gamma(u), \gamma(v)) = l(\gamma|_{[u,v]})$ y ya que γ es parametrizada por longitud de arco, tenemos que $d(\gamma(u), \gamma(v)) = d(u, v)$. Con esto probamos que γ es una geodésica.

Proposición(3.2.8) Sea X un espacio métrico y sea $[x, y]$ y $[y, z]$ dos segmentos geodésicos en X (con al menos un punto en común). Entonces la unión $[x, y] \cup [y, z]$ es un segmento geodésico si y sólo si $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Demostración. Sea γ_1 y γ_2 dos curvas geodésicas en X cuyas respetivas imagenes son $[x, y]$ y $[y, z]$, y sea $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ una concatenación. Si $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$, entonces $l(\gamma) = d(x, z)$, con lo que se demuestra que γ es una geodésica. Entonces la unión $[x, y] \cup [y, z]$ cuya imagen es γ, es un segmento geodésico en X.

Reciprocamente, sea $[x, y] \cup [y, z]$ es un segmento geodésico, este segmento es la imagen continua de un intervalo cerrado, con lo que probamos que la intersección de dos segmentos $[x, y]$ y $[y, z]$ se reduce al punto y. Esto implica que la unión $[x, y] \cup [y, z]$, es la imagen de una curva geodésica γ que es la unión de dos caminos geodésicos γ_1 y γ_2, quienes tienen por imagen a $[x, y]$ y $[y, z]$. entonces, tenemos que $d(x, y) = l(\gamma_1)$, $d(y, z) = l(\gamma_2)$ y

$$d(x, y) + d(y, z) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2) = l(\gamma) = d(x, z)$$

lo que completa la prueba.

Definición(3.2.9) Sean x, y, z tres puntos distintos en un espacio métrico (X, d). Decimos que y yace entre x y z si cumplen la siguiente condición:

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z).$$

Los resultados que mostramos a continuación, garantizarán la existencia de geodésicas en un espacio métrico (X, d). Para la prueba del lema (4.2.11) haremos uso del teorema de Ascoli cuyo enunciado y demostración reseñamos a continuación.

Definición(3.2.10) Una sucesión de caminos $\gamma_n(t)$ es equicontinua si dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$d(\gamma_n(p), \gamma_n(q)) < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y para cualquier } p \text{ y } q \text{ en } X \text{ tales que } d(p,q) < \delta.$$

Lema(3.2.11) Sea $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de caminos que unen a p con q. Entonces existe una subsucesión $(\gamma_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a un camino γ que une a p con q y:

$$l(\gamma) \leq \overline{\lim_n}\, l(\gamma_{k_n}).$$

Demostración. Consideremos la curva γ parametrizada con longitud de arco, luego tenemos que la distancia $d(\gamma(\sigma(p)), \gamma(\sigma(q))) \leq d(p,q) < \epsilon$ si $d(p,q) < \delta$, por lo tanto $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua. Por el teorema de Ascoli (ver [1, teorema 2.17]), existe una subsucesión (γ_{k_n}) que converge uniformemente a una función γ que es continua y $l(\gamma) \leq \overline{\lim_n} l(\gamma_{k_n})$.

Teorema(3.2.12) (Sobre la existencia de segmentos geodésicos). Sea (X,d) un espacio métrico finitamente compacto. Entonces dados dos puntos p y q, existe un arco geodésico que los une.

Demostración. Existe una sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de curvas que unen a p con q tales que:

$$l(\gamma_n) \to \inf \{l(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C},\} = \beta$$

Por el lema (3.2.11) existe una subsucesión $(\gamma_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a una curva $\gamma \in \mathcal{C}$, y $l(\gamma) \leq \overline{\lim_n} l(\gamma_{k_n})$.

Demostremos ahora que $l(\gamma) = \beta$. Por un lado $l(\gamma) \geq \beta$. Por otro lado $l(\gamma) \leq \overline{\lim_n} l(\gamma_{k_n}) \leq \beta$, luego $l(\gamma) = \beta$.

Ejemplos(3.2.11) (Sobre caminos y segmentos geodésicos)

1. Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach. El camino afín $\gamma(t) = p + t(p - q)$, $0 \leq t \leq 1$ que une los puntos p con q satisface que $l(\gamma) = \|p - q\|$ y por lo tanto es un camino geodésico. Para ver lo anterior sean u y v tales que $0 \leq u < v \leq 1$. Entonces:

$$\|\gamma(v)-\gamma(u)\| = \|p+v(p-q)-p+u(p-q)\| = (v-u)\,\|p-q\|\,.$$

Si $\{t_k : 0 \leq k \leq n\}$ es una partición de $[0,1]$ entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \|\gamma_k - \gamma_{k-1}\| = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})\,\|q-p\| = \|q-p\|,$$

y por consiguiente el supremo de estas sumas considerando todas las particiones de intervalo $[0,1]$ es $l(\gamma) = \|q-p\|$.

2. Consideremos ahora $(\mathbb{R}^2, \delta)$ donde δ es la métrica discreta $\delta(p,q) = \begin{cases} 1 & si \quad p \neq q, \\ 0 & si \quad p = q \end{cases}$ y γ es el camino afín definido anteriormente. Si $\{t_k : 0 \leq k \leq n\}$ es una partición de $[0,1]$ entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta(\gamma_k, \gamma_{k-1}) = n,$$

y por consiguiente $l(\gamma) = \infty$. Más aún, si γ es cualquier camino que va desde p hasta q, entonces $l(\gamma) = \infty$. Es decir, en $(\mathbb{R}^2, \delta)$ no existen caminos geodésicos.

3. Sea $\mathbb{R}^2$ con la norma euclideana $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, donde $x = (x_1, x_2)$. La métrica que corresponde es $d_e(x,y) = \|y-x\|$. En este caso el único camino geodésico que une a p con q es el camino afín $\gamma(t) = p + t(q-p), 0 \leq t \leq 1$.

4. Sea $\mathbb{R}^2$ con la norma del supremo $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$. En este caso existen infinitos caminos geodésicos que conectan a p con q.

5. Consideremos la esfera unitaria S^2. Si $p = (0,0,1)$ y $q = (0,0,-1)$, existen infinitos segmentos geodésicos que unen estos dos puntos.

6. El último ejemplo se trata del círculo unitario S^1 en el cual los puntos p y $q = -p$ solamente puede unirse por dos segmentos geodésicos.

3.3. Espacios Geodésicos (G-Espacios)

En la siguiente sección, definiremos el concepto de espacio geodésico. Primero, definiremos un espacio geodésico según el profesor A. Papadopoulos y posteriormente la definición de nuestro mayor interés; el G-espacio ó espacio geodésico según H. Busemann. La razón por la cual se realizan estas dos definiciones se basa en el hecho de que Papadopoulos realiza una definición de dicho espacio, basandose en el libro del profesor Busemann y omitiendo los conceptos de espacio finitamente compacto o M-convexo. En este trabajo dichos conceptos no serán omitidos y esta definición será introducida con el lenguaje actual que hemos usado en los capítulos previos. Veremos algunos resultados relacionados con estas definiciones, que dejan ver en qué sentido la omisión de estos conceptos afectan dichos resultados.

Espacio Geodésico (En el sentido de A. Papadopoulos)

Definición(3.3.1) Un espacio métrico (X, d) es una espacio geodésico si dos puntos arbitrarios se pueden unir por un camino geodésico.

Ejemplos(3.3.2) (Sobre espacios geodésicos)

1. El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ con la métrica es $d(x, y) = (\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}}$, la cual es inducida por el producto escalar $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k.y_k$.

2. $S^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{k=1}^{3} x_k^2 = 1 \right\}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}^3$ sobre la esfera. Observe que dados dos puntos sobre la esfera, el segmento geodésico que los une es un subconjunto de un circulo máximo o gran círculo, sobre tal circulo la longitud es mínima (ver [6, pág. 246]).

3. Todo subconjunto convexo de un espacio de Banach con la métrica inducida por la norma es un G-Espacio (considerando por supuesto a los caminos afínes como caminos geodésicas).

4. $\mathbb{R}^2 - \{a\}$ es un espacio longitudinal. Si x e y son dos puntos tales que a no pertenece al segmento afín, entonces no existen segmentos geodésicos que unan a x con y.

Para definir un espacio geodésico o G-espacio, Busemann hace uso de algunas condiciones sobre el espacio métrico (X, d) que mencionaremos a continuación.

Definición(3.3.3) Un espacio métrico (X, d) es covexo en el sentido de Menger (M-convexo) ([Ver 1, pág. 29] y [2,pág. 69]), si para toda pareja de puntos $x, y \in X$ existe un punto z entre ellos, es decir:

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

Axioma(3.3.4) (De prolongabilidad local de geodésicas). Para todo $p \in X$ existe un $r > 0$ (que depende de p) tal que si $x, y \in B(p, r)$, existe un punto z tal que:

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z).$$

Este axioma garantiza que si γ es un camino geodésico desde x hasta y y que si $\acute{\gamma}$ es un camino geodésico que une y con z, entonces $\gamma \cup \acute{\gamma}$ es un camino geodésico desde x hasta z.

Ahora podemos definir un G-espacio en el sentido de Busemann:

G-Espacio (Espacio Geodésico en el Sentido de Buseman) ([Ver 2, pág 77])
Definición (3.3.5) Un espacio métrico (X, d), finitamente compacto y M-convexo, en el cual se satisface el axioma de prolongabilidad local, es llamado un espacio geodésico o G- espacio.

Sólo el profesor Busemann hace uso del termino G-espacio. Papadopulos explica que la condición sobre un espacio métrico (X, d) de ser finitamente compacto es equivalente a la condición de ser un espacio métrico própio, es decir, la clausura de todo conjuto acotado en X es un conjunto compacto (ver [2, pág. 77]) y completo. Un resultado interesante son los teoremas que se enuncian a continuación.

Teorema(3.3.6) Todo espacio geodésico, es un espacio longitudinal.

Demostración. [Ver 2, Proposición 2.4.2].

Esta implicación es valida en ambas definiciones, ahora bien, el reciproco no es cierto en el sentido de Papadopoulos, razón por la cual es necesario agregar la condición de Busemann al siguiente teorema:

Teorema(3.3.7) Todo espacio longitudinal própio es un espacio geodésico.

Demostración. [Ver 2, Teorema 2.4.6].

Concluimos entonces que la condición sobre X de ser finitamente compacto no se puede remover de la definición, por otro lado Busemann garantiza la existencia local de prolongación de geodésicas y la unicidad, mientras Papadopuolos no logra con su definición garantizar que las geodésicas sean únicas.

Bibliografía

[1] BUSEMANN, Herbert. *The Geometry of Geodesics*. Academic Press Inc., Publishers, 1955.

[2] PAPADOPOULOS, Athanase. *Metrics Spaces, Convexity and non Positive Curvature*. European Mathematical Society, 2005.

[3] MENGER, Karl. *Untersuchchungen über allgemeine Metrik I, II, III* Math. Ann. 100, 1928.

[4] APOSTOL, Tom. *Análisis Matemático*. California Institute of Technology, 1976.

[5] RESTREPO, Guillermo. *Introducción al Algebra Lineal*. Centro editorial Universidad del Valle, 1995.

[6] PETERSON, Peter. *Riemannian Geometry*. Springer, 1991.

[7] MUNKRES, James. *Topología*. Pearson Edication, 2001.