



Enseñanza y Aprendizaje de las Inecuaciones Lineales con una Incógnita Real: Un análisis a la propuesta de Enseñanza presentada en dos textos escolares de la Educación Colombiana

Diana Paola Balanta Gómez

Yesica Vanessa Garcés Carabalí

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santander de Quilichao, Agosto 2017



Enseñanza y Aprendizaje de las Inecuaciones Lineales con una Incógnita Real: Un análisis a la propuesta de Enseñanza presentada en dos textos escolares de la Educación Colombiana

Diana Paola Balanta Gómez

Código 1157743

Yesica Vanessa Garcés Carabalí

Código 201257083

Director

Mg. Cristian Andrés Hurtado Moreno

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santander de Quilichao, Agosto 2017

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar doy muchas gracias a Dios quien en su infinita misericordia me ha guiado en el transcurso de mi vida, ha sido mi amigo fiel y mi padre amoroso quien me permite terminar con éxito esta etapa de mi vida.

A mi madre Dora Gómez quien con su apoyo incondicional durante toda mi vida ha creído en mí y ayudado a realizar mis sueños.

A mi padre Temistocles Balanta quien con su amor me ha enseñado a ser una persona disciplinada y responsable.

A mi hermano Pablo Cesar Balanta por su amor, comprensión y apoyo en cada una de las etapas de mi vida.

A nuestro tutor Cristian Andrés Hurtado por su paciencia, compromiso y dedicación durante este proceso.

A toda mi familia y amigos que de una u otra forma contribuyeron en este proceso, muchas gracias.

Diana Paola Balanta Gómez

Primero quiero darles gracias a Dios por darme sabiduría durante todo este proceso académico y permitir culminar esta etapa de mi vida.

A mi madre Martha Cecilia Carabalí por todo el amor que me ha brindado y por su apoyo incondicional durante este proceso.

A mi Esposo Dair Idrobo Machado quien me enseñó a no desfallecer y a ser una mujer disciplina y entregada con mis estudios. A mi Hijo Miguel Ángel Idrobo Garcés quien fue mi mayor motivación para culminar mi hermosa carrera.

A mis hermanas Cinthia Lorena Caicedo y Yenifer Licet Garcés por su apoyo incondicional, además de ayudarme hacer más llevadera la hermosa labor de ser madre

Mis más sinceros agradecimientos a nuestro tutor Cristian Andrés Hurtado por su entrega y dedicación, porque a pesar de sus múltiples ocupaciones, supo guiarnos y ayudarnos a sacar adelante este trabajo de grado. A la docente Ligia Amparo torres y Ronal Grueso, quienes aceptaron ser los evaluadores y siempre realizaron aportes, los cuales nos ayudaron a mejorar y fortalecer nuestro trabajo.

A mi compañera Diana Paola Balanta, quien fue un apoyo incondicional durante todo este proceso.

Muchas gracias a todos mis familiares y amigos quienes aportaron de una u otra manera un granito de arena para poder culminar mis estudios.

Yesica Vanessa Garcés Carabalí

Tabla de contenido

Capítulo I: aspectos generales de la investigación.....	2
1.1 Presentación de la problemática.....	3
1.2 Objetivos.....	8
1.2.1 Objetivo general.....	8
1.2.2 Objetivos específicos	8
1.3 Justificación	9
1.4 Antecedentes.....	11
Capítulo II: referentes conceptuales.....	15
2.1 Perspectiva matemática.....	16
2.1.1 Relaciones binarias	16
2.1.2 Axiomas de orden en $\mathbb{R}$, el caso de las desigualdades	16
2.1.3 Desigualdades algebraicas: las inecuaciones	20
2.2 Perspectiva didáctica.....	23
2.2.1 El discurso en los textos escolares	24
2.2.2 Tratamiento pedagógico.....	26
2.2.3 Lenguaje movilizado.....	28
2.3 Perspectiva curricular.....	30
2.3.2 Procesos generales	31
2.3.1 Conocimientos básicos.....	34
2.3.3 El contexto	35
2.4 Rejilla de análisis según los referentes conceptuales.....	36
Capítulo III: inecuaciones lineales con una incógnita real en los textos escolares	39
3.1 Diseño metodológico	40

3.1.1 Fase uno: delimitación del trabajo	40
3.1.2 Fase dos: documentación teórica	40
3.1.3 Fase tres: selección y análisis de los libros de textos	41
3.1.4 Cuarta fase: conclusiones y reflexiones del trabajo	42
3.2 Selección de los libros de texto	42
3.3 Descripción de la estructura general de los dos libros de texto	47
3.3.1 Descripción de la estructura general del libro de texto <i>Hipertexto Matemáticas 11 y Nuevas Matemáticas 11</i>	47
3.3.2 Descripción de las unidades referentes a las inecuaciones lineales en el libro <i>Hipertexto Matemáticas 11</i> y el libro de textos <i>Nuevas Matemáticas 11</i>	54
3.4 Análisis de los dos libros de textos a la luz de la rejilla	57
3.4.1 Las inecuaciones lineales con una incógnita real, en el libro de texto <i>Hipertextos Matemáticas 11</i> a la luz de la rejilla	57
3.4.2 Las inecuaciones lineales con una incógnita real, en el libro de texto <i>Nuevas Matemáticas 11</i> a la luz de la rejilla	85
Capítulo IV: Conclusiones y recomendaciones	107
4.1 Conclusiones	107
4.2 Recomendaciones	109
Referencias bibliográfica	111
Anexos	113
ANEXO 1: <i>Encuesta realizada a los docentes</i>	113
ANEXO 2: <i>paginas correspondientes al estudio de las inecuaciones lineales en el libro de texto Nuevas Matemáticas 11</i>	115
ANEXO 3: <i>paginas correspondientes al estudio de las inecuaciones lineales en el libro de texto Hipertexto Matemáticas 11</i>	118

Índice de Figuras

Figura 1. Diagrama circular que representa los datos obtenidos en la sistematización de los diferentes municipios donde se implementaron las encuestas.....	43
Figura 2. Recuadro de dialogo	55
Figura 3. Recuadro de dialogo	56
Figura 4. Diagrama de conjuntos numéricos	59
Figura 5. Definición de números Reales	59
Figura 6. Representación grafica de intervalos	61
Figura 7 Propiedad de la tricotomía.	63
Figura 8. Propiedades en las desigualdades	64
Figura 9. Ejemplo inecuaciones cuadráticas	65
Figura 10. Recuadro lateral.....	66
Figura 11. Propiedades de las desigualdades	68
Figura 12. Definición página 28	69
Figura 13. Ejemplo página 28.....	69
Figura 14. Ejercicios página 30.....	70
Figura 15. Ejercicios paginas 30	71
Figura 16. Ejercicios página 35.....	71
Figura 17. Trabajo en software de geometría dinámica (Geogebra).....	73
Figura 18. Geogebra.....	74
Figura 19. Diagrama de conjuntos Numéricos.....	75
Figura 20. Taller Hipertexto Matemáticas	78
Figura 21. Pagina especial Hipertexto Matemáticas 11	80
Figura 22. Ejercicios página 30.....	81
Figura 23. Actividades página 33.....	82
Figura 24. Tomado del libro de texto Hipertexto Matemáticas 11	84
Figura 25. Representaciones de conjuntos	86
Figura 26. Determinación de conjuntos	87
Figura 27. Conjunto de Números $\mathbb{R}$	87
Figura 28. Representación de intervalos	89
Figura 29. Operaciones entre intervalos	89
Figura 30. Ejercicio resuelto de inecuación.....	91
Figura 31. Recuadro lateral	92
Figura 32. Recuadro lateral	93
Figura 33. Definición de intervalo página 29	94
Figura 34. Ejercicios resueltos	95
Figura 35. Ejercicios resueltos	95
Figura 36. Ejercicios página 33	97
Figura 37. Introducción página 28.....	99
Figura 38. Página solución de problemas Nuevas Matemáticas 11	102

<i>Figura 39. Tomada de Nuevas Matemáticas 11</i>	103
<i>Figura 40. Tomada de Nuevas Matemáticas 11</i>	105

Introducción

En el ámbito de la Educación Matemática son múltiples los aspectos objeto de investigación, entre ellos se encuentran los diversos problemas y dificultades presentes en los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, algunos de los cuales están asociados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, específicamente con el concepto de inecuación; es por ello que muchos autores como Garrote, Hidalgo y Blanco (2004), Heredia & Palacios (2004) intentan ofrecer respuestas y alternativas que permitan a los estudiantes alcanzar una comprensión adecuada de este concepto, haciendo notar la existencia de limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales, mostrando que en su estudio se presentan diversos errores y dificultades. Atendiendo a estas investigaciones, interesa realizar un análisis de textos que permita observar cómo está siendo abordado el concepto de inecuación lineal en los dos textos escolares objeto de estudio y así caracterizar las propuestas de enseñanza presentes en estos para establecer posibles contrastes.

En efecto, este trabajo toma como eje central analizar las propuestas de enseñanza presentadas en dos textos escolares referentes a la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales con una incógnita real, teniendo en cuenta que estos constituyen uno de los instrumentos más importantes en la acción pedagógica de la mayoría de docentes. Es así como se estudian, algunos referentes conceptuales de orden curricular, didáctico y matemático para tomarlos como elementos de análisis de los textos seleccionados alrededor del concepto en cuestión, tal estudio se realizara tomando en consideración una rejilla de análisis la cual fue elaborada a partir de los referentes ya mencionados

Capítulo I: aspectos generales de la investigación.

En este capítulo se abordan los aspectos generales que conforman este trabajo, inicialmente se presenta la problemática que gira en torno a los múltiples errores y dificultades presentes en los estudiantes al momento de trabajar las inecuaciones lineales y la importancia de los libros de textos como uno de los recursos más utilizados por los docentes. También se encuentran los objetivos de la investigación, tanto el general como los específicos, la justificación que pretende dar cuenta de la importancia de este trabajo en el campo de la Educación Matemática y la formación docente, el diseño metodológico con el cual se desarrolló este trabajo y por último los antecedentes que se consultaron.

1.1 Presentación de la problemática

La Educación Matemática como campo de investigación cada vez toma más fuerza, gracias a las múltiples investigaciones sobre sus propósitos de estudio y los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de igual manera ha sido necesario indagar sobre los recursos más utilizados por los docentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no se desconoce la diversidad de recursos utilizados, sin embargo este trabajo centra la atención en el libro de texto ya que es un recurso que influye en la metodología del trabajo docente, en el tipo de actividades que se realizan en el aula de clases, en la manera de planear y evaluar una sesión y en la manera como el contenido matemático es enseñado (Marmolejo & Gonzales, 2013)

Según algunas investigaciones como la realizada por Azcarate (2006) el texto escolar es visto como autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje, considerándose un valioso recurso educativo que ayuda a facilitar y a hacer más eficiente el trabajo del profesor y de los estudiantes, además de desempeñar un papel esencial en la articulación de las exigencias curriculares, no obstante en algunos casos la selección y uso del texto escolar puede generar problemas educativos de diferente orden.

En cuanto a su uso, se tiene la falta de preparación por parte de algunos docentes a la hora de seleccionar el texto escolar, según Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1999) muchas veces es el propio docente de matemáticas quien selecciona con qué texto escolar va a trabajar, siendo pocos los docentes que han sido preparados adecuadamente para hacer una seria y ponderada evaluación y selección de estos.

Además, estos autores plantean que para algunos docentes el texto escolar se convierte en el currículo a seguir, limitándose a trabajar al pie de la letra lo que en él está escrito, sin la

preocupación pertinente de referirse a otras fuentes de investigación para comparar la información o ampliarla, olvidando que el papel principal del libro de texto no es presentar información, si no apoyar la instrucción (Marmolejo & González, 2013). Aunque el libro de texto hace parte del currículo, este no es el único elemento que lo conforma, por tal motivo es equivoco limitarse únicamente a él para el trabajo en el aula de clases.

Por su parte (Arbeláez et al., 1999) presenta algunos criterios que permiten identificar que tan adecuado puede llegar a ser un libro de texto, mencionan que es adecuado si el proceso de transposición didáctica sobre los saberes matemáticos seleccionados para ser enseñados logra que efectivamente éstos contenidos sean aprehendidos por los estudiantes. Foray (2010) afirma:

Que un buen texto debe cumplir entre otras con las siguientes condiciones: debe presentar su contenido de tal forma que el estudiante acepte, comprenda la utilidad, el funcionamiento y las condiciones para el empleo de los diferentes objetos matemáticos en un determinado contexto de una situación problema siendo capaz de explicar lo que hace, es decir, no debe llevar al estudiante a enfrentarse a una situación problema utilizando los contenidos como simples herramientas matemáticas para la solución de determinada situación, sin poder explicar lo que hace o el porqué de la utilización de dichos contenidos. (p.11)

Por lo tanto cuando se usa un libro de texto para la implementación en la clase cada aspecto que lo compone debe propiciar en el estudiante la curiosidad por conocer y comprender dicho concepto lo que permitirá que el docente lleve al estudiante a que se enfrente a situaciones problemas las cuales le permitan explicar lo que hace.

De otro lado es preciso hablar de algunas investigaciones concernientes a los múltiples factores asociados a errores y dificultades presentes en el aprendizaje y enseñanza de las inecuaciones lineales con una incógnita real, autores como: Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) mencionan que se han identificado múltiples factores, asociados a la interpretación del concepto por parte de los estudiantes, ya que no asumen el conjunto de números reales como el conjunto de referencia, limitándose a trabajar solamente con el conjunto de los números enteros, lo que causa dificultad al momento de comprender el concepto de intervalo.¹

De acuerdo con lo anterior, la interpretación de una inecuación se perjudica en la medida que el universo numérico del estudiante y el conjunto de referencia sea limitado a un conjunto menor que $\mathbb{R}$ (Barbosa, 2003). Es decir, si el estudiante no es consciente que el conjunto que debe tomar como referencia al trabajar las inecuaciones es el conjunto $\mathbb{R}$, el trabajo con estas será limitado, es así como se incurrirá en el error de considerar que en el intervalo (3,5) habrá solamente un número, sin tener en cuenta la infinidad de números que hay en este por ser un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Otro factor que determina la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales es la falta de comprensión que tienen algunos estudiantes en el uso de los signos “ $<$ y $\leq$ ”, autores como Heredia & palacios, (2014) Maroto, (2013) argumentan que para algunos de ellos no es fácil identificar cuál de estos signos significa *mayor que* y cual significa *menor que*. También llaman la atención en que muchos consideran que los signos “ $<$ y $\leq$ ” es lo único que diferencia una inecuación de una ecuación.

Quizás las dificultades mencionadas suelen presentarse debido a que curricularmente el concepto de ecuación, es por lo general, presentado previo al estudio de las inecuaciones, esto

¹ Entiéndase como conjunto de referencia a aquel al cual pertenece la variable, en las inecuaciones este siempre va a ser $\mathbb{R}$ (Torres &, 2010)

puede conducir a que las reglas de procedimiento de las primeras se lleven a la segunda sin realizar la reflexión necesaria que implica el cambio de relación de una a otra.

Garrote (2004) sugiere que hay estudiantes que no han superado dificultades propias de la aritmética, como lo son la aplicación de las propiedades distributiva y uniforme del sistema de números reales y el uso de las reglas de signos, lo cual conduce a utilizarlas de manera inadecuada, tratando de adaptarlas a un caso en particular aunque no sean verdaderas en dicha situación. Por ejemplo; en la expresión $2(x + 1) - 3(x - 2) < x + 6$, los estudiantes tienden a aplicar la propiedad distributiva y de signos de la siguiente forma: $2x + 1 - 3x - 2 < x + 6$ aplicando la distribución solo entre los primeros términos, cuando la forma adecuada debería ser: $2x + 2 - 3x + 6 < x + 6$ para llegar a la solución adecuada $2x - 3x - x < 6 - 6 - 2 = -2x < -2$ donde $x > 1$.

por su parte autores como Socas, (1997) coinciden en que a algunos estudiantes les causa dificultad comprender que, expresiones como a no representan necesariamente un número mayor que 0 así como $-a$ no siempre representa un número menor que 0, es decir no logran asimilar el carácter variable que tiene el uso de las letras en álgebra, algunos estudiantes no comprenden el significado de la variable como intervalo, o en el caso de las dobles desigualdades como intervalos, aun cuando han realizado el tratamiento adecuado a la inecuación. Por ejemplo cuando al resolver una inecuación el estudiante obtiene el siguiente resultado $3 < x < 5$ tiende a pensar que x representa un valor específico, sin entender que es un subconjunto de los números reales, por lo tanto no representa un valor específico sino una infinidad de números (un intervalo).

De acuerdo con lo anterior, las investigaciones realizadas por Heredia & Palacios, (2004) Maroto, (2003) Socas, (1997) y Garrote, (2004) dejan ver un claro panorama en relación con la diversidad de errores y dificultades de diferentes índoles presentes en los estudiantes al trabajar las inecuaciones lineales con una incógnita real, lo que indica que el aprendizaje de dicho concepto no es una cuestión espontánea, sino un asunto de cuidado, ya que es una realidad que afecta a los estudiantes.

De acuerdo a la problemática planteada a lo largo de este escrito, se toman en consideración dos aspectos centrales para este trabajo, por un lado la relevancia que han tenido los textos escolares para la guía y planeación de las clases en los profesores de matemáticas, por otro lado el aprendizaje de las inecuaciones lineales con una incógnita real, el cual no es un asunto trivial sino que está sujeto a múltiples dificultades y errores que se presentan cuando este concepto matemático es trabajado en el aula de clases, es por ello que interesa dar respuesta al siguiente interrogante:

¿Qué reflexiones didácticas surgen de la caracterización de las propuestas de enseñanza que presentan dos textos escolares de la educación colombiana, en torno a las inecuaciones lineales con una incógnita real y que contrastes y similitudes es posible identificar entre ambas propuestas?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general.

Aportar algunas reflexiones didácticas a partir de la caracterización de las propuestas de enseñanza que presentan dos textos escolares de la educación colombiana en torno a las inecuaciones lineales con una incógnita real e identificar posibles contrastes y similitudes entre ambas propuestas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Documentar algunos referentes conceptuales de orden curricular, didáctico y matemático, para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales con una incógnita real.
- Articular los referentes conceptuales estudiados en una rejilla que permita el análisis de los dos textos escolares seleccionados.
- Analizar las propuestas de enseñanza que presentan los dos textos escolares seleccionados en torno a las inecuaciones lineales a partir de la rejilla de análisis diseñada.

Se entenderá como propuesta de enseñanza al conjunto de actividades, ejercicios y ejemplos que presentan los textos escolares para la comprensión de un determinado concepto, en este caso el concepto de inecuaciones lineales.

1.3 Justificación

En el presente trabajo se analizarán las propuestas de enseñanza presentadas por dos textos escolares de matemáticas para la enseñanza de las inecuaciones lineales con una incógnita real, a continuación se explicitan algunos elementos que justifican la pertinencia de este trabajo.

Tal como se ha indicado en apartados anteriores, múltiples investigaciones hacen explícito que el texto escolar es uno de los recursos más utilizados por los docentes en la clase de matemáticas, siendo un instrumento que sirve de guía y apoyo para el trabajo en el aula en cuanto a la organización de contenidos y selección de actividades, el texto escolar es uno de los principales referentes de los maestros pues trae consigo una visión específica y tratamiento escolar de un concepto Peña (citado por Arbeláez et al.,1999), es por ello, que la selección de estos requieren de una labor ardua por parte del docente para que el texto que se escoja sea pertinente y acorde en cuanto al tema que el docente desea desarrollar.

A pesar de las bondades que presenta el texto escolar, muchas veces es convertido en el currículo, es decir, se convierte en el único recurso al cual el docente recurre para su trabajo en el aula, como lo menciona Santos Trigo (1993) algunos profesores se vuelven dependientes del libro de texto, esto se da en la mayoría de los casos por la falta de formación de los docentes. Es así como se logra ver la importancia e influencia que tiene el libro de texto en la enseñanza de las matemáticas, en este caso en particular de las inecuaciones lineales.

Es pertinente resaltar la importancia de las inecuaciones lineales ya que tal como se mencionó en la problemática, alrededor de estas se presentan errores y dificultades de diferente índole, desde las que son propias de la aritmética hasta la propia interpretación del concepto, de esta

manera se hace necesario realizar un estudio sobre estas, ya que son necesarias para potenciar los diferentes pensamientos en los estudiantes ayudando al estudio del infinito y de los números reales permitiendo entender el concepto de intervalo, aunque su enseñanza no se hace explícita en las propuestas curriculares Colombianas como son: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.

Por ello, se realiza un análisis a las propuestas de enseñanza que presentan dos textos escolares al momento de abordar las inecuaciones lineales con una incógnita real, el cual permitirá caracterizar las propuestas presentadas por los textos escolares y a su vez establecer posibles contrastes, dando cuenta de las similitudes y diferencias en dichas propuestas de enseñanza. Permitiendo brindar algunas reflexiones a docentes en ejercicio y docentes en formación respecto a la selección de los textos escolares con los cuales desarrollan su práctica pedagógica.

En este trabajo se realiza un análisis relacionado con el tópico del álgebra que es pertinente y da pie para que se continúe investigando sobre el concepto de inecuaciones lineales con una incógnita real, dando pautas que contribuyan con el mejoramiento de las actividades propuestas por los textos escolares, la rejilla propuesta en este trabajo puede convertirse en un modelo para trabajar el álgebra asociada a diferentes conceptos. De esta manera toda la problemática expuesta en el apartado anterior, por sí misma justifica la pertinencia de este trabajo ya que deja ver la necesidad de seguir trabajando e investigando sobre el concepto de inecuación y el trabajo con los textos escolares.

De acuerdo con lo mencionado, este trabajo se hace necesario ya que aporta a dos aspectos importantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela, por un lado el

trabajo con las inecuaciones lineales con una incógnita real y, por otro, el trabajo con libros de textos.

1.4 Antecedentes

En este apartado se exponen algunas investigaciones que han aportado al análisis de texto y al objeto de estudio en este trabajo, las cuales han sido un insumo importante para el desarrollo de los objetivos aquí propuestos.

Diferentes autores se han encargado de realizar análisis de textos en diferentes conceptos matemáticos, cabe resaltar que respecto al concepto de inecuaciones lineales con una incógnita real no se encontraron investigaciones, es por ello, que los antecedentes se toman desde investigaciones concernientes al análisis de textos.

Entre las investigaciones en torno al análisis de texto se encuentran Salgado & Ospina (2011) quienes estudian las configuraciones epistémicas presentes en las propuestas de trabajo de los libros de textos, con ello caracterizaron el tipo de prácticas que se privilegian para la enseñanza de la multiplicación analizando el tratamiento escolar de la multiplicación, propuesto en dos textos escolares de grado tercero.

De la misma manera, Echeverry & Cumbal (2015) realizan un análisis discursivo a dos textos escolares de grado tercero específicamente en las estructuras multiplicativas, en el cual analizan los enunciados que matizan el concepto de multiplicación en dos textos escolares, teniendo en cuenta las estructuras multiplicativas dadas por Vernagnaud.

Grueso & Cumbal (2016) en su trabajo titulado el concepto de función como covariación en la escuela, desarrollan una propuesta para el estudio de la función a través de situaciones de covariación dentro de eventos dinámicos que tiene como marco teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales (MTL) propuestos por Filloy (1999). Para ello se diseñó una propuesta de aula, la cual se aplicó en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta. La propuesta intentó potencializar, a través de tareas de covariación, el desarrollo del pensamiento variacional propuesto por el MEN (2006)

Estas investigaciones cobran importancia en la realización de este trabajo en tanto que sirven como modelos en la descripción general de la estructura de los dos libros de textos, aspectos que lo componen y análisis realizado a los mismos, además de justificar y apoyar la pertinencia de realizar análisis de textos escolares en tanto a la importancia de estos en la planeación de los docentes.

Respecto al concepto de inecuaciones lineales objeto de análisis en los dos textos escolares se encontraron los siguientes antecedentes:

Diferentes autores se han encargado de evidenciar y estudiar los múltiples errores y dificultades que presentan los estudiantes al momento de abordar o trabajar las inecuaciones lineales, entre ellos se encuentran Heredia & Palacios (2014) quienes realizan el diseño de una prueba diagnóstica en la cual se articularon aspectos de orden curricular, didáctico y matemático, la implementación de dicha prueba se realizó en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Santa Isabel de Hungría sede Alfonso López en la ciudad de Santiago de Cali, estas autoras logran caracterizar las dificultades y errores más comunes en los estudiantes al momento de trabajar el concepto de inecuaciones lineales, al analizar los resultados arrojados

fueron evidentes las dificultades en la solución de las inecuaciones, esto permitió realizar algunas reflexiones para maestros en ejercicio y maestros en formación en la realización de posibles propuestas didácticas relacionadas a la enseñanza de las inecuaciones lineales.

También Carreño, Pantoja & Pineda (2011) realizan un conjunto de secuencias didácticas desde la perspectiva semiótico cognitiva de Duval, las cuales se aplicaron a estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Nuestra Señora de los Andes en la ciudad de Santiago de Cali, con el objetivo de identificar y poner en correspondencia las variables visuales y simbólicas pertinentes para tratar el problema de la operación cognitiva de conversión, observando como la conversión de un registro de representación semiótico a otro ayuda a la solución de las inecuaciones lineales con valor absoluto, algunas de las conclusiones obtenidas por estos autores fueron: la existencia de dificultades y fortalezas que se presentan en el tratamiento algebraico de las operaciones básicas del valor absoluto, encontrando además la existente necesidad de conjugar diferentes registros de representación en el estudio de las inecuaciones lineales con valor absoluto y sus transformaciones.

Por su parte Velasco (2011) estudia la problemática de las unidades cognitivas pertinentes en el aprendizaje de las inecuaciones con valor absoluto, desde la perspectiva semiótica cognitiva de Duval teniendo en cuenta una propuesta plurirregistro. Esta problemática surge al observar el porcentaje tan alto de reprobaciones que existe en los primeros cursos de matemáticas a nivel universitario en la región del Valle del Cauca, en situaciones, las cuales tuvieron como propósito la identificación y puesta en correspondencia de las variables visuales y las variables simbólicas.

A partir de este estudio algunas de las conclusiones más sobresalientes a las cuales la investigadora logra llegar, fueron que:

- La manera como están diseñados los cursos de matemática en los primeros semestres para estudiantes universitarios no dan la oportunidad al estudiantes de conceptualizar la noción de variable, por medio de la noción de función, esto ocurre, porque existe la creencia que los estudiantes van a la universidad a estudiar o repasar los temas vistos a lo largo de su escolaridad, cuando en muchos casos es en la universidad donde los estudiantes ven los temas por primera vez. La preocupación por abarcar gran cantidad de contenido matemático, no permite desarrollar en los estudiantes, capacidades necesarias para enfrentarse con éxito a una matemática avanzada.
- Los estudiantes no logran dar significado a las expresiones algebraicas, sino que dada una expresión la simplifican, efectuando las operaciones indicadas, esto se da porque en la mayoría de los casos no se presentan los diferentes registros de representación semióticos con la finalidad de hacer comprender a los estudiantes desde los registros numéricos de escritura algebraica, el lenguaje natural y gráfico, el énfasis usualmente se da en la operativa de procedimientos, es decir en la operación cognitiva de tratamiento.

Capítulo II: referentes conceptuales

En este apartado se presentan los referentes conceptuales que se asumen como elementos fundamentales para el análisis de los dos libros de textos seleccionados y se concretizan en la rejilla de análisis. Para el desarrollo este trabajo se abordan tres referentes, a saber; el referente matemático, el cual se divide en dos categorías de análisis, categoría conceptual y procedimental; en el segundo referente se tienen en cuenta aspectos de orden didáctico que se consideran importantes al momento de realizar un análisis de texto, los cuales han sido reportados por autores como: Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1999), tal referente se compone por tres categorías de análisis: discurso que se presenta, tratamiento pedagógico y lenguaje movilizado; Finalmente en el tercer referente se tienen en cuenta los documentos emanados por el Ministerio de Educación Nacional, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

2.1 Perspectiva matemática

Para establecer la interpretación del objeto matemático se presentaran definiciones, propiedades y axiomas que fundamentan las inecuaciones lineales con una incógnita real tomadas de la investigación realizada por Velasco, (2011) el libro de Apóstol, (1988) entre otros.

2.1.1 Relaciones binarias

En matemáticas se abordan las ecuaciones e inecuaciones, siendo ambas un tipo especial de relación de diferente índole, las primeras están relacionadas con la relación de equivalencia mientras que las segundas con la relación de orden, cada una de ellas definidas sobre expresiones algebraicas.

La característica que diferencia los dos tipos de relaciones mencionadas anteriormente, tiene que ver con el hecho de que las ecuaciones son relaciones binarias simétricas, mientras que las inecuaciones son relaciones binarias antisimétricas. Esta distinción tiene repercusiones en términos de los procedimientos, que se deben llevar a cabo en la solución de las ecuaciones y de las inecuaciones.

En este trabajo se hablará de las inecuaciones lineales con una incógnita real, por ello se priorizará la relación de orden.

2.1.2 Axiomas de orden en $\mathbb{R}$, el caso de las desigualdades

Este grupo de axiomas se refiere a un concepto por el que se establece una ordenación entre los números reales. Según esta ordenación se puede decir si un número real es mayor o menor

que otro. Se introducen aquí las propiedades de orden como un conjunto de axiomas referentes al concepto de número positivo para definir los conceptos de *mayor que* y *menor que*.

Existe un subconjunto de $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ llamado conjunto de números positivos, que satisfacen los tres axiomas de orden siguiente:

Axioma 1: si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre a $x + y$ y xy .

Axioma 2: para todo real $x \neq 0$, o $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos

Axioma 3: $0 \notin \mathbb{R}^+$

Ahora se pueden definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ llamados respectivamente menor que, mayor que, igual o menor que e igual o mayor que, de la manera siguiente:

- $x < y$ Significa que $y - x$ es positivo.
- $y > x$ significa que $x < y$
- $x \leq y$ significa que o $x < y$ o $x = y$
- $y \geq x$ significa que $x \leq y$

Por lo tanto, se tiene $x > 0$ si y solo si x es positivo. Si $x < 0$ se dice que x es negativo; si $x \geq 0$ se dice que x es no negativo. El par de desigualdades simultáneas $x < y$, $y < z$ se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$; interpretaciones análogas se dan a las desigualdades compuestas.

- $x \leq y < z$
- $x < y \leq z$
- $x \leq y \leq z$

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades, las más importantes se dan a continuación como teoremas:

Teorema 1: propiedad de la tricotomía. Para a y b números reales cualesquiera se verifica una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$.

- **Demostración**

Se $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$ y por virtud del axioma 3 no puede ser ni $a > b$ ni $b > a$. Si $x \neq 0$, el axioma 4 afirma que o $x > 0$ o $x < 0$, pero no ambos; por consiguiente, o es $a < b$ o $b < a$, pero no ambos. Por tanto se verifica una y solo una de las tres relaciones $a = b$, $a < b$, $b < a$.

Teorema 2: propiedad transitiva. Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$

- **Demostración**

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$.

En virtud del axioma 1 se puede sumar obteniéndose $(b - a) + (c - b) > 0$.

Es decir, $c - a > 0$ y por tanto, $a < c$.

Teorema 3: propiedad de la adición. Si $a < b$ entonces es $a + c < b + c$

- **Demostración**

Sea $x = a + c$, $y = b + c$. Entonces $y - x = b - a$ pero $b - a > 0$, por tanto, $a < b$. De donde $y - x > 0$, lo que significa $x < y$

Teorema 4: si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ (si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$)

- **Demostración**

Si $a < b$ entonces $b - a > 0$ y $c > 0$ en virtud del axioma 1, se cumple que se puede multiplicar c por $(b - a)$ obteniéndose $(b - a)c > 0$ luego $(b - a)c = bc - ac$, por tanto, $bc - ac > 0$ y eso significa que $bc > ac$ como se quería demostrar.

Ahora también.

Si $a < b$ entonces $b - a > 0$ y $c < 0 = -c > 0$ en virtud del axioma 1, se cumple que se puede multiplicar $-c$ por $(b - a)$ obteniéndose $(b - a)(-c) > 0$ luego $(b - a)(-c) = ac - bc$, por tanto, $ac - bc > 0$ y eso significa que $bc < ac$.

Teorema 5: si $a \neq 0$ es $a^2 > 0$

- **Demostración**

Si $a > 0$, en virtud del axioma 3 $a \cdot a > 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y, por tanto, $(-a) \cdot (-a) > 0$ en virtud del axioma 1.

En ambos casos se tiene que $a^2 > 0$.

Teorema 6: $1 > 0$

- **Demostración**

Aplicando el teorema 5 al caso $a = 1$

Los axiomas de orden expuestos anteriormente permiten establecer una ordenación en el conjunto de los números reales, la cual se conoce como desigualdad, esta relación de orden permite comparar expresiones algebraicas, lo que se conoce como inecuaciones (Carreño, Pantoja & Pineda, 2011)

2.1.3 Desigualdades algebraicas: las inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad cuyos miembros se componen de números y letras, a estos últimos se les denomina incógnitas de la inecuación. Resolver la inecuación es hallar los valores de la incógnita que hacen cierta la desigualdad, es decir cualquier número que al sustituir por la incógnita hace que el enunciado sea verdadero. Estos valores están en el conjunto solución de la inecuación. Dado que el conjunto solución de una inecuación, es un subconjunto del dominio (en este caso el dominio de la variable es $\mathbb{R}$), la solución de las inecuaciones puede ser descrita en un intervalo o en la unión de intervalos de $\mathbb{R}$.

Ahora bien, una inecuación lineal es aquella que puede escribirse de la forma $mx + b < 0$ en donde el signo que representa la relación de orden $<$ puede ser cualquiera de los siguientes $\geq, >, \leq$ con $m \neq 0 \wedge m, x \in \mathbb{R}$.

Un intervalo es un conjunto infinito de $\mathbb{R}$ correspondientes al conjunto solución de una inecuación. A continuación se presenta la definición de cada uno de los intervalos que pueden ser solución en una inecuación. Se asume que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$

- **Intervalo abierto.** El intervalo abierto de extremos a y b se define como:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ Cuya representación gráfica es:



- **Intervalo cerrado.** El intervalo cerrado de extremos a y b se define como:

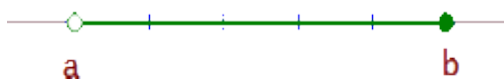
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ Cuya representación gráfica es:



- **Intervalos semiabiertos: pueden presentarse de varias formas**

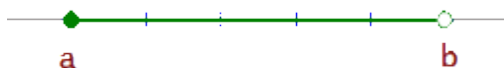
a) El intervalo semiabierto (semicerrado) de extremos a y b es.

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ Cuya representación gráfica es:



b) El intervalo semiabierto (semicerrado de extremos) a y b es:

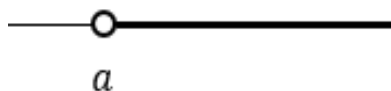
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ Cuya representación gráfica es:



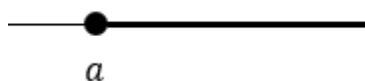
Intervalos infinitos: pueden presentarse de varias formas, a saber:

Intervalos infinitos

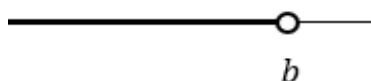
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ Cuya representación gráfica es:



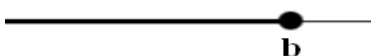
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ cuya representación gráfica es:



$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ Cuya representación gráfica es:



$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ Cuya representación gráfica es:



Los elementos de orden matemático, expuestos en este apartado son de suma importancia en el análisis de los textos escolares, en tanto que dan claridad sobre la forma en cómo desde una perspectiva matemática se presentan los conceptos, definiciones, propiedades y relaciones con otros conceptos que el libro moviliza, permitiendo así caracterizar los libros de textos seleccionados.

De acuerdo con los aspectos de orden matemático presentados en esta perspectiva, cada uno de estos se recoge en dos grandes categorías las cuales a su vez permiten especificar criterios de análisis que se tendrán en cuenta para el análisis de los dos libros de textos seleccionados, cada una de estas categorías se presentan a continuación:

- **Categoría conceptual:** los criterios o unidades de análisis en esta categoría permitirán tener en cuenta los conceptos que se deben movilizar para el estudio de las inecuaciones en los dos textos escolares, además, de la relación entre los conceptos con el concepto de inecuación y los pre requisitos que se presentan en la unidad antes de trabajar las inecuaciones lineales con una incógnita real. De acuerdo al referente matemático presentado estos conceptos son: inecuación, desigualdad, intervalo, intervalo abierto,

cerrado, intervalos semiabiertos, intervalos infinitos cada uno con su respectiva representación gráfica.

- **Categoría procedimental:** en esta categoría los criterios o unidades permitirán el análisis de la presentación de las propiedades y teoremas las cuales brindan reglas sintácticas para resolver en el registro simbólico algebraico las inecuaciones lineales, es decir, la presentación de propiedades, teoremas y reglas de procedimiento que permiten trabajar cada una de las expresiones como son: axioma 1, axioma 2, axioma 3, teorema 1, teorema 2, teorema 3, teorema 4, teorema 5, teorema 6

2.2 Perspectiva didáctica

Para comprender un contenido matemático en el aula de clases es importante partir de la didáctica de las matemáticas, ya que esta es fundamental para identificar aspectos relacionados a la enseñanza y aprendizaje de las mismas, es así como desde esta perspectiva se toma como referencia el trabajo realizado por (Arbeláez et al., 1999) para lograr entender la propuesta de enseñanza presentada por los dos textos escolares seleccionados.

Según Arbeláez et al. (1999) el libro de texto es concebido como un instrumento asociado a la comunicación de saberes, siendo el recurso más utilizados por los docentes para decidir qué temas enseñar y como enseñarlos, así como para determinar cuáles ejercicios y problemas solucionar. Esta posición privilegiada del texto, conduce indudablemente al reconocimiento de la necesidad de convertirlo en objeto de estudio didáctico, y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico.

Por tal motivo la pertinencia de esta perspectiva en el trabajo, ya que es importante tener en cuenta los diferentes aspectos que componen el libro de texto; “aspectos tan generales como el papel que el texto escolar de matemáticas juega al interior de un currículo, o, aspectos tan particulares como la cantidad y variedad de representaciones de un mismo concepto, todo esto con el fin de lograr que los docentes puedan hacer un uso eficaz y eficiente del libro de texto.” (Arbeláez et al, 1999, p 106)

A continuación se presentan aspectos fundamentales de orden didáctico que se tendrán en cuenta para el análisis de los dos textos escolares, como se mencionó en líneas anteriores todos estos aspectos son tomados según lo planteado por (Arbeláez et al., 1999).

2.2.1 El discurso en los textos escolares

Los discursos en los textos escolares pueden ser expositivos o heurísticos o combinaciones de ellos, a continuación se presenta alguna característica que se puede evidenciar en los libros de textos.

“Los textos escolares de matemáticas son prescriptivos, es decir, sus autores tienen como propósito central la intención de enseñar, para lo cual introducen recomendaciones, valoraciones, observaciones, ayudas y comentarios tendientes a facilitar un camino que deben seguir los alumnos.

De esta manera los textos escolares de matemáticas están cargados de ejemplificaciones y ejercitaciones, que se manejan con las herramientas conceptuales que le preceden en el orden y secuencia estipulados, en su escritura, por el autor, es decir, las ejemplificaciones y las ejercitaciones están ubicadas en contexto.

Sin embargo los textos matemáticos, son entendidos contemporáneamente como el producto del desarrollo de un sistema axiomático. Los términos no definidos de la teoría, los axiomas, y las reglas de juego de carácter deductivo se erigen como los elementos centrales del texto matemático. Al poner en acción el sistema axiomático se logran consolidar los teoremas, los corolarios y, más ampliamente, el marco de las generalizaciones de la teoría”. (Arbeláez et al, 1999, p 105-106) Los textos matemáticos carecen de marcos de ejemplificación y ejercitación.

El discurso en los libros de texto suele ser expositivo, “cuando a muy poco tiempo de iniciar la lectura del texto se puede encontrar un axioma, un postulado, una definición, un lema, un teorema, o un corolario. Este se caracteriza por introducir rápidamente nomenclatura, lo cual le exige al lector tener conocimientos previos de los conceptos involucrados; o heurístico, si en muy poco tiempo de haber iniciado la lectura, se introduce un caso particular de la teoría que se abarcará.” (Arbeláez et al, 1999, p 107)

A continuación se presentaran las características y elementos que intervienen en la formulación de los discursos que los autores utilizan en el diseño de los textos escolares de matemáticas.

2.2.1.1 Marco definicional

Es el marco en el que se encuentran todas las definiciones presentadas que introduce el autor en la formulación del texto. Estas se clasifican “en: nominales, cuando se define un término que designa un concepto; definición con estructura si p entonces q , que son las definiciones construidas por vía condición suficiente; definición con estructura p sólo si q , cuando hay un término de condición necesaria; definición con estructura p si y sólo si q , que incorporan términos de condiciones suficientes y necesarias; y las definiciones de la forma T es un U tal que

C1, C2, Cn, las cuales se caracterizan por tener un término T y un conjunto universal U con condiciones matemáticas C1, C2, Cn que implican U, e intentan definir algo con más condiciones matemáticas apoyándose en objetos más abstractos.” (Arbeláez et al, 1999, p 109)

2.2.1.2 Marco de ejemplificación

En este marco se exhiben objetos que cumplen con las características de cada tipo de definición, por ello está estrechamente ligado con el marco definicional. El marco de ejemplificación aparece en contexto y está conformado por ejemplos, no ejemplos, y contraejemplos.

2.2.3.3 Marco de ejercitación

En este marco se incluyen los tipos de actividades que el interlocutor debe realizar. Los ejercicios se instalan en un contexto expuesto o creado bajo la heurística y algunos son diseñados bajo el criterio de seriación (secuencia graduada de ejercicios aumentando el nivel de dificultad). En este marco se tomará como ejercicios a los siguientes: ejercicios de aplicación, situaciones problemas de las matemáticas, de otras ciencias y de la vida cotidiana, y las preguntas de investigación.

2.2.2 Tratamiento pedagógico

El texto escolar como recurso pedagógico es una herramienta de trabajo, donde se asume una conducción del estudiante en su proceso de aprendizaje. Un texto posee calidad en esta perspectiva cuando: evitando que se convierta en un espectador pasivo o en un repetidor de la información ofrecida; incluye actividades suficientes y variadas, para realizar dentro y fuera del aula, individualmente y en grupo; estimula procesos de análisis, creatividad y toma de posición

razonada; - fomenta la aplicación de criterios de autoevaluación y autocontrol; invita al alumno a buscar información, a investigar; informa al estudiante lo que se espera que aprenda y lo evalúa con base en los resultados que debía obtener, presenta ayudas para el aprendizaje, tales como ejercicios, sugerencias, instrucciones, preguntas, problemas, talleres, resúmenes y evaluaciones.

2.2.2.1 Sistema para-textual

Se entienden el sistema para-textual como todas las ayudas didácticas que acompañan al libro de texto, tales como: folletos, materiales audiovisuales, material manipulativos, CD, guía de apoyo tanto para el docente como para los estudiantes, recursos tecnológicos.

2.2.2.2 Valoración de actividades “introdutorias” a un tema o concepto

Las actividades o formas introductorias, se refieren al tipo de actividades que se proponen para encontrar elementos relacionados con la teoría que posteriormente se tratará. Estas pueden ser problemas matemáticos, de la vida real o de otras ciencias; elementos de la historia del concepto a trabajar o preguntas, es decir en muchos casos cuando introducen el tema matemático suelen hacer un recuento histórico, anecdótico, historiográfico, entre otros, para señalar la importancia del concepto objeto de estudio, o para describir aspectos “no matemáticos”.

2.2.2.3 Valores que transmite

La enseñanza, y el texto como instrumento de ella, no son ni puede ser un proceso axiológicamente neutro. Queriéndolo o a pesar nuestro, los textos transmiten valores. Conscientes de este hecho, los autores y editores de textos cooperan en la calidad de los textos escolares cuando deliberadamente propician valores positivos tales como: el trabajo en equipo y la solidaridad; el diálogo y la convivencia; el respeto por los derechos de los demás, entre otros.

2.2.3 Lenguaje movilizado

En cualquier libro de texto se puede evidenciar el uso del lenguaje, ya sea escrito, gráfico o simbólico.

2.2.3.1 El lenguaje escrito

El lenguaje escrito puede ser entendido como el lenguaje natural, se rige por las normas gramaticales del idioma en que se encuentra redactado. A nivel del texto escrito, los siguientes indicadores pueden servir para determinar el grado de calidad de la existencia del lenguaje verbal como propiedad inherente al texto escolar: sintaxis ajustada a su nivel lector; corrección idiomática del discurso; estilo claro, sencillo y preciso, que permita que el discurso resulte ameno y significativo; extensión y complejidad o densidad de las oraciones y párrafos, que faciliten la lectura y contribuyan al crecimiento y maduración lectores; uso dosificado de la terminología técnica de cada asignatura.

2.2.3.2 Lenguaje gráfico

El lenguaje gráfico puede ser entendido como las figuras, tablas, esquemas, iconos, fotografías, diagramas, y dibujos. A nivel de la calidad gráfica, indicadores como los siguientes pueden servir como pautas para evaluar dicha calidad en el texto: las ilustraciones complementan los textos escritos, creando un balance adecuado entre palabras e imágenes, tanto para el grado escolar como para la naturaleza de la asignatura; las ilustraciones combinan lo didáctico con lo artístico; las ilustraciones son comprensibles, suficientes y de tamaño y forma adecuadas para el propósito al que sirven; las ilustraciones aportan elementos informativos, motivadores y de relación con la realidad; la diagramación distribuye adecuadamente los elementos de la página (textos, figuras y áreas en blanco); el uso del color cumple propósitos pedagógicos y estéticos.

2.2.3.3 *El lenguaje simbólico*

Es una forma de representación de los objetos, como su nombre lo indica está compuesto por símbolos que se encuentran definidos de manera precisa en una teoría, por medio de los cuales se materializa un concepto.

Es importante aclarar que en esta perspectiva cada uno de los elementos que se ha presentado se tomaron de la investigación realizada por: Arbeláez, Guacaneme, Arce, & Sánchez, (1999). Ya que ellos presentan de una manera clara los elementos que hay que tener en cuenta cuando se va a trabajar con los libros de textos escolares.

De acuerdo a los aspectos de orden didáctico presentados en esta perspectiva estos se recogen en tres grandes categorías, cada una de ellas proporciona una serie de criterios o unidades de análisis las cuales se explican a continuación:

- **Categoría de discurso que se presenta:** en esta categoría se tendrán como criterio o unidades de análisis el tipo de discurso utilizado por los dos libros de textos seleccionados, heurístico o expositivo, además, del tipo de ejemplos, definiciones y ejercicios planteados por los dos libros de texto.
- **Categoría de tratamiento pedagógico:** en esta categoría se tendrá como criterio o unidades de análisis, el tipo de valores que los dos libros de textos transmiten a los estudiantes al momento de abordar el concepto de inequación, también se tendrán como criterio o unidades de análisis las actividades introductorias que los libros realizan al iniciar con el tema de las inequaciones y los diferentes recursos pedagógicos o ayudas adicionales que acompañan los dos libros.

- **Categoría de lenguaje movilizado:** las unidades o criterios de análisis dentro de esta categoría están conformado con los diferentes sistemas de representación que se utilizan en los dos textos escolares, entre estos se consideran, el lenguaje escrito, simbólico algebraico, grafico.

2.3 Perspectiva curricular

En esta perspectiva se toman en consideración algunos aspectos planteados por los referentes curriculares de matemáticas colombianos como son: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (MEN, 2006), los cuales deben ser el punto de referencia para la planeación curricular de todas las instituciones educativas colombianas, es decir todas las planeaciones realizadas se deben sustentar sobre estos referentes curriculares que orientan, guían y proporcionan recomendaciones para la elaboración de los planes de estudio que se deben tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas, con el objetivo de propiciar aprendizajes significativos y duraderos.

Los Lineamientos Curriculares plantean el desarrollo del pensamiento matemático el cual debe ser potenciado en los estudiantes a lo largo de su educación preescolar básica y media, se fundamenta en tres ejes centrales para la estructuración del currículo los cuales permiten la organización de este en un todo coherente, estos son: conocimientos básicos, procesos generales y contexto. Cada uno de estos ejes es indispensable en el aprendizaje, aportando para la construcción del mismo.

2.3.2 Procesos generales

Estos procesos están relacionados con el aprendizaje de las matemáticas y todo lo que lo conforma, estos son: la resolución y planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, comparación y ejercitación de procedimientos, a continuación se explica cada uno de ellos.

2.3.2.1 Resolución y planteamiento de problemas

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático. En diferentes propuestas curriculares se afirma que la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deber á permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos. En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel. Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar de matemáticas aspectos como los siguientes:

- Formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas.
- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
- Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.

- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.
- Adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas NCTM (citado por MEN, 1998)

2.3.2.2 El razonamiento

En el razonamiento matemático es necesario tener en cuenta de una parte, la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo y, de otra, que cada logro alcanzado en un conjunto de grados se retoma y amplía en los conjuntos de grados siguientes. Así mismo, se debe partir de los niveles informales del razonamiento en los conjuntos de grados inferiores, hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento, en los conjuntos de grados superiores. Además, conviene enfatizar que el razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas.

Razonar en matemáticas tiene que ver con: dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones. Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas. Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.

Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

2.3.2.3 La comunicación

Es una necesidad común que tienen todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas y profesiones, es así como en los últimos años se ha incrementado el interés de los

investigadores por estudiar cómo comunican ideas matemáticas los alumnos y qué factores facilitan o impiden el desarrollo de habilidades comunicativas, la comunicación es una de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas.

2.3.2.4 La modelación

La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación. Según los estándares básicos de competencias en matemáticas MEN (2006) la modelación se puede considerar como una referencia o representación que se realiza por medio de un artefacto o material que dé cuenta del concepto que se trata de comprender, permitiendo así un acercamiento a dicho concepto y poder operar transformaciones o procedimientos para apoyar la formulación de conjeturas y razonamiento. La modelación puede hacerse de diferentes formas ya sea: mental, gestual, grafica o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos.

2.3.2.5 La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Es el hacer cálculos correctamente, que se siga instrucciones, que se utilice de manera correcta la calculadora para efectuar operaciones, que se transforme expresiones algebraicas desde una forma hasta otras es decir que se ejecuten tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar en la vida diaria. El aprendizaje de procedimientos o “modos de saber hacer” es muy importante en el currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

Desde estos procesos generales es objeto de análisis la forma en cómo los textos escolares potencian cada uno de estos, por medio de las diferentes actividades que en él se proponen, ya

que desde lo planteado por las propuestas curriculares, estos aspectos deben ser favorecidos en los estudiantes.

2.3.1 Conocimientos básicos

Los conocimientos básicos se consideran como aquellos conceptos teóricos que componen el contenido matemático en la escuela y que están estrechamente relacionados con el desarrollo de los procedimientos lógicos de las matemáticas, estos procedimientos tienen que ver con el desarrollo de los siguientes pensamientos: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistema de medidas, aleatorio y sistemas de datos, variacional y sistemas algebraicos y analíticos, el trabajo de cada uno de los sistemas es permitir el desarrollo de los pensamientos sin limitarse a alguno específicamente.

Teniendo en cuenta el objeto matemático de interés en este trabajo (inecuaciones lineales con una incógnita real) este hace parte de los sistemas algebraicos y analíticos que se presenta desde la propuesta del MEN, las inecuaciones lineales deben aportar al desarrollo del pensamiento variacional. El pensamiento variacional permite pensar en fenómenos de variación y cambio identificando estos en diferentes contextos por medio de sistemas de representaciones como: enunciados verbales, representaciones tabulares, formulas y expresiones analíticas. Según Vasco (2006) el pensamiento variacional puede describirse como una manera de pensar dinámicamente ayudando a los estudiantes a identificar lo que cambia y lo que permanece constante, además de aportar en núcleos conceptuales como: el continuo numérico, los números reales, procesos infinitos y el álgebra en su sentido simbólico. En el desarrollo de este pensamiento se encuentran inmersos diversos contenidos algebraicos que permiten potenciar el trabajo con las igualdades haciendo referencia a las ecuaciones y las desigualdades en este caso las inecuaciones lineales. Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) este pensamiento

puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas por medio de situaciones problemas cuyos escenarios sean referidos a fenómenos de variación y cambio de la vida cotidiana.

También aporta al desarrollo del pensamiento numérico permitiendo la comprensión de la relación entre los números, sus diferentes representaciones y el conjunto de referencia en este caso $\mathbb{R}$. El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida que los estudiantes tienen la posibilidad de trabajar los números en contextos significativos los cuales les permitan comprenderlos y comprender las operaciones que ellos permiten realizar, este no se relacionan únicamente con las operaciones o cálculos sino también con las diferentes habilidades y destrezas numéricas que puede desarrollar el estudiante.

2.3.3 El contexto

El contexto se relaciona con los diferentes ambientes los cuales rodean al estudiante y dan sentido a las matemáticas que aprende. Según los estándares básicos de competencia en matemáticas (MEN, 2006) el contexto es el lugar de aprendizaje de las matemáticas, este lugar no es solo físico sino también sociocultural y debe ser enriquecido a partir de situaciones problemas las cuales potencien el aprendizaje de los estudiantes. El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. Existen tres tipos de contextos diferentes, el contexto inmediato, el contexto escolar y el contexto extraescolar en este sentido se analizara que tipo de contexto se potencia en los textos escolares analizados y cómo las situaciones problemáticas planteadas favorecen dicho contexto.

En síntesis, la revisión de esta perspectiva, brinda criterios de análisis que se tienen en cuenta dentro de la siguiente categoría.

Categoría curricular: la cual permite analizar si los libros de textos seleccionados, toman en consideración la propuesta curricular presentada por los documentos de políticas públicas, es decir, si se movilizan situaciones problemáticas en diferentes contextos, si promueven procesos generales de aprendizaje, y si se abordan aspectos del pensamiento variacional y numérico.

2.4 Rejilla de análisis según los referentes conceptuales

A partir del estudio de los referentes, matemático didáctico y curricular que se han sido expuestos en líneas anteriores y a cada una de las categorías con sus respectivas unidades de análisis, a continuación se presenta la rejilla que va a ser usada para el análisis de los dos textos escolares.

REJILLA DE ANÁLISIS

REFERENTE	CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	UNIDAD O CRITERIO DE ANÁLISIS	DESCRIPCIÓN SINTÉTICA DE LOS CRITERIOS O UNIDADES DE ANÁLISIS
Matemático	Conceptual	• Pre requisitos presentados antes del concepto de inecuaciones lineales • Conceptos movilizados • Relación entre los conceptos	En estas unidades de análisis se tendrán en cuenta los conceptos que presentan los libros de textos antes de presentar el concepto de inecuaciones lineales, además, de los conceptos movilizados para que los estudiantes entiendan todo lo relacionados con las inecuaciones lineales y la relación entre los conceptos y el concepto de inecuación.
	Procedimental	• Presentación de propiedades y teoremas • Reglas para trabajar las expresiones	Estas unidades permiten el análisis de las propiedades y teoremas que brindan reglas sintácticas para resolver las inecuaciones lineales en el registro simbólico algebraico.
Didáctico	Discurso que se presenta	• Tipo de discurso: heurístico, expositivo • Marcos: definición, ejemplificación y ejercitación	Estas unidades permiten identificar y analizar el tipo de discurso expositivo o heurístico que se utiliza o predomina en los dos textos escolares, además de permitir el análisis de los diferentes marcos, es decir, como están siendo presentados las definiciones, ejercicios y ejemplos, sí se presentan.
	Tratamiento pedagógico	• Valores que transmite • Sistema para textual • Introducción al tema	Estas unidades de análisis permiten identificar si los libros de textos promueven diferentes valores en los estudiantes entre ellos trabajo en equipo y dialogo, además si vienen acompañados de algún material o ayuda adicional para profundizar en el tema a trabajar y por medio de que actividades se introduce a dicho tema.
	Lenguaje movilizado	• Tipo de representación: escrito, simbólico algebraico, grafico	Estas unidades permiten el análisis del tipo de representación utilizado por los libros de textos, la representación simbólico algebraico la representación gráfica la cual en las inecuaciones se ve en el conjunto solución de la inecuación
Curricular	Propuesta curricular	• Situaciones problemáticas- contextos • Promueve procesos generales de aprendizaje • Aborda aspectos del pensamiento variaciones y numérico	Estas unidades permiten analizar el libro de texto a la luz de lo planteado en los documentos de políticas públicas. Abordando el estudio de las inecuaciones por medio de situaciones problemas en diferentes contextos, teniendo en cuenta aspectos del pensamiento numérico y variacional, además, de promover procesos generales de aprendizaje.

Tabla 1. Rejilla de análisis teniendo en cuenta los referentes conceptuales.

De acuerdo a la rejilla de análisis presentada, cabe resaltar que cada una de las categorías de análisis guardan una articulación entre sí, es decir al momento de realizar la caracterización de las propuestas de enseñanza habrán ciertos criterios o unidades de análisis que conllevan a otros o guardan una relación, por ejemplo en la categoría conceptual se presentan algunas unidades de análisis, entre ellas se encuentran los diferentes conceptos que se movilizan para el estudio de la inecuaciones lineales, es así cómo este criterio de análisis se relaciona con la categoría procedimental, cuando se definen ciertos conceptos y pre requisitos que se presentan se alude a las diferentes propiedades que el estudiante maneje y domine, poniendo en juego las reglas para trabajar las expresiones algebraicas, a su vez en la categoría tratamiento pedagógico se evidencia que una articulación con la categoría de análisis conceptual, es decir la manera como se introducen los temas da pie para la comprensión de algunos conceptos y a su vez las diferentes actividades que se proponen deben de estar enmarcadas por los lineamientos curriculares de matemáticas y las diferentes actividades que se promuevan deben de ayudar a promover procesos de razonamiento y comunicación en los estudiantes, esto se debe hacer utilizando un tipo de representación ya sea escrito, simbólico algebraico o grafico los cuales son unidades de análisis de la categoría lenguaje movilizado.

De esta manera se evidencia que la rejilla de análisis guarda una articulación entre los tres referentes conceptuales y sus respectivas categorías de análisis, es decir el tipo de lenguaje tiene relación con el tipo de discursos que se presenta y a su vez tiene relación con los conceptos matemáticos que se utilizan y a su vez cada una de las actividades deben estar enmarcadas por los lineamientos curriculares de matemáticas y los estándares básicos de competencias en matemáticas.

Capítulo III: inecuaciones lineales con una incógnita real en los textos escolares

En este capítulo se realiza la presentación y análisis general de los dos textos escolares *Hipertexto matemáticas 11*, editorial Santillana (2010) y *Nuevas matemáticas 11*, editorial Santillana (2007) los cuales son objeto de estudio en este trabajo, estos textos fueron seleccionados mediante una encuesta presentada a docentes en ejercicio pertenecientes a diferentes instituciones educativas de la Educación Colombiana. Y para esto el capítulo se ha estructurado en tres secciones: en la primera de estas se explican todos los aspectos relacionados con la selección de los dos textos escolares, luego se realiza la presentación y descripción de la estructura general de dichos textos y por último se realiza el análisis puntual de los capítulos en torno a las inecuaciones lineales, a la luz de la rejilla de análisis presentada en el capítulo anterior.

3.1 Diseño metodológico

Considerando el propósito de este trabajo este se enmarca en la investigación cualitativa de tipo evaluativo ya que este tipo de investigación es importante para la toma de decisiones y está orientada a determinar la eficiencia de organizaciones y programas educativos (PAZ, 2003). Dentro de la investigación evaluativa se establecen cuatro perspectivas fundamentales las cuales permiten estructurar los diferentes métodos de evaluación (perspectiva positivista, perspectiva pragmática, perspectiva interpretativa y perspectiva crítica), sin embargo, en el desarrollo de este trabajo se asumió la perspectiva interpretativa, pues este enfoque metodológico permitió realizar la interpretación de la propuesta de enseñanza presentada en los dos textos escolares objetos de análisis, logrando realizar la caracterización dichas propuestas a la luz de la rejilla de análisis elaborada.

Para dar cuenta de los objetivos propuestos en este trabajo se han estructurado cuatro fases que permitieron visualizar la manera como fue pensado y desarrollado el trabajo de investigación. A continuación se describen cada una ellas:

3.1.1 Fase uno: delimitación del trabajo

Esta fase se delimitan los aspectos centrales que vertebran el trabajo de investigación, para lo cual se dejó claro la problemática de estudio en la cual se ubica el trabajo, los objetivos que orienta la investigación, así como la justificación del mismo.

3.1.2 Fase dos: documentación teórica

En esta fase se estudiaron algunos referentes conceptuales de orden matemático, curricular y didáctico, los cuales permitieron hacer un acercamiento al concepto de inecuación lineal con una incógnita real, este estudio se realizó con el propósito de tener referentes puntuales para comprender cómo desde lo matemático se definen los conceptos, definiciones y teoremas; desde lo curricular, observar si el libro de texto tiene en cuenta la propuesta curricular que presentan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Ministerio de Educación Nacional² y Estándares Básico de Competencias en Matemáticas y, como desde lo didáctico se emerge a los tipos de discurso y algunas cuestiones de forma en relación al texto escolar, siendo estos elementos fundamentales para la construcción de la rejilla la cual permitirá realizar el análisis de los dos textos escolares.

3.1.3 Fase tres: selección y análisis de los libros de textos

Esta fase estuvo encaminada a la selección de los textos escolares objetos de estudio y a sus respectivos análisis, para la selección de los textos escolares se realizó una encuesta la cual fue aplicada a 20 maestros del sector público y privado con el fin de consultar cuál es el libro de texto más utilizado por ellos en la enseñanza de la inecuaciones lineales, una vez analizados los resultados arrojados en la encuesta se pasó a escoger los dos libros de mayor uso, los cuales fueron objetos de análisis a la luz de la rejilla diseñada en la fase anterior, producto de la documentación conceptual, logrando caracterizar las dos propuestas de enseñanza presentadas en los dos textos escolares.

² En adelante entiéndase como MEN

3.1.4 Cuarta fase: conclusiones y reflexiones del trabajo

En esta fase se realizó el contraste de cada una de las propuestas de enseñanza de los dos textos escolares analizados y se generaron las conclusiones pertinentes de acuerdo a lo arrojado en los contraste y a cada uno de los objetivos trazados, a su vez generaron algunas reflexiones para los maestros en ejercicio y en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales con una incógnita real.

3.2 Selección de los libros de texto

La selección de los dos textos escolares se hizo a partir de los resultados arrojados por una encuesta (ver anexo 1). La cual fue puesta en consideración a un grupo de 20 docentes en ejercicio de la educación Colombiana, pertenecientes a instituciones educativas de carácter público y privado de la zona rural y urbana de diferentes municipios del departamento del Cauca y del Valle del Cauca.

La encuesta puso en consideración diferentes libros de textos que circulan en grado 11 para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales, aunque este concepto matemático no es explícito en los estándares básicos de competencias, la experiencia y los libros de textos muestra que es en este grado donde se presenta y se aborda tal concepto.

Como se ha dado a saber, el propósito principal de la encuesta realizada fue identificar los dos libros de textos de mayor uso para la enseñanza de las inecuaciones lineales con una incógnita real en grado 11. A continuación se presenta algunas de las preguntas planteadas en la encuesta y las respuestas dadas por los docentes.

Inicialmente, la encuesta indaga acerca de carácter de las instituciones educativas donde los docentes desarrollan su práctica, en esta primera pregunta se analiza que las instituciones educativas a las que pertenecen los docentes encuestados, son de carácter público y privado, mostrando que la mayoría de los docentes pertenecen a instituciones educativas del sector público con un porcentaje del 65% y la otra parte de los docentes pertenecen a instituciones educativas del sector privado con un porcentaje del 35%

Seguidamente, la encuesta indagaba acerca de los municipios al que pertenecen las instituciones educativas donde el docente desarrolla su práctica, en la Figura 1 se observa los diferentes municipios a los que pertenecen tales instituciones.

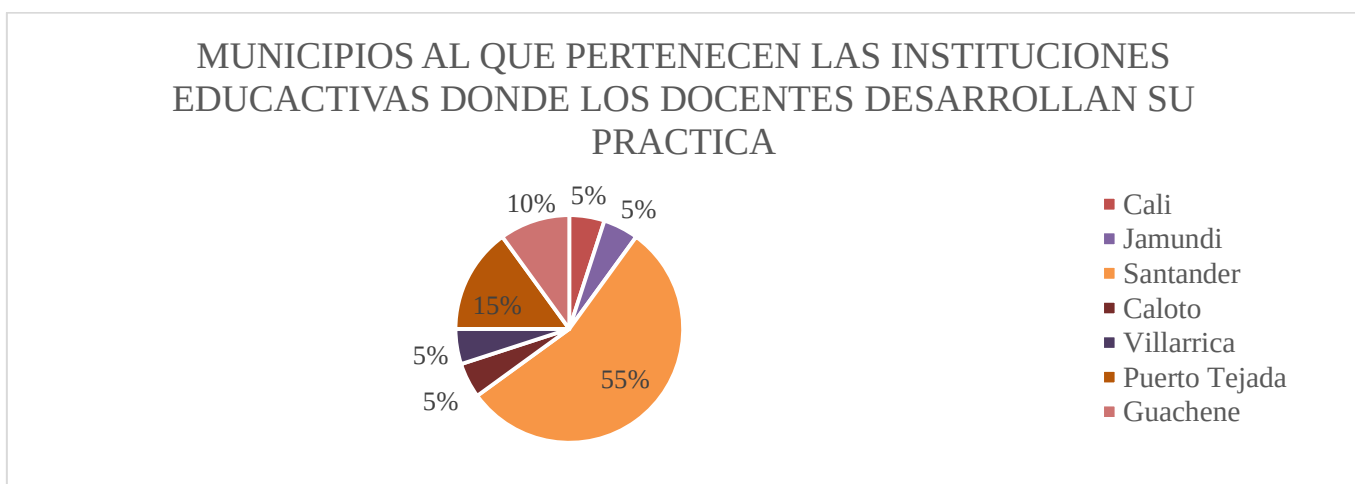


Figura 1. Diagrama circular que representa los datos obtenidos en la sistematización de los diferentes municipios donde se implementaron las encuestas.

Es así como en la Figura 1 se puede evidenciar que la encuesta se implementó en diferentes municipios, en particular al norte del Cauca y al sur del Valle del Cauca, se tienen que la mayor participación de los docentes encuestados fueron de instituciones educativas del departamento del Cauca, específicamente en el municipio de Santander de Quilichao con un porcentaje del

55% de los encuestados de este municipio, le sigue el municipio de Puerto Tejada con un porcentaje del 15% de los encuestados, luego el municipio de Guachené con un porcentaje del 10% de los encuestados y por último los municipios de Calolo, Villarrica, Jamundí y Cali con un porcentaje del 5% de los encuestados.

A continuación se presenta en la Tabla 2 la información detallada de los resultados arrojados en la encuesta en relación con los diferentes libros de textos que usan los docentes encuestados, con sus respectivas editoriales y la cantidad de profesores que seleccionaron el mismo.

Nombre del libro	Editorial	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
<i>Hipertexto matemáticas 11</i>	Santillana	8	19%
<i>Nuevas matemáticas 11</i>	Santillana	6	14.2%
<i>Conexiones matemáticas 11</i>	Norma	2	4.7%
<i>Alfa</i>	Norma	2	4.7%
<i>Los caminos del saber</i>	Santillana	2	4.7%
<i>Matemática progresiva</i>	Norma	2	4.7%
<i>Matemáticas practicas</i>	Reverté	2	4.7%
<i>Matemáticas 11</i>	Santillana	2	4.7%
<i>Zona Activa</i>	Voluntad	2	4.7%
<i>Introducción al calculo</i>	Santillana	2	4.7%
<i>Zoom a las matemáticas</i>	Norma	1	2.3%

<i>Rutas matemáticas</i>	Santillana	1	2.3%
<i>Matemática moderna estructurada</i>	Norma	1	2.3%
<i>Estrategia matemáticas</i>	Libros y libros	1	2.3%
<i>Pensamiento matemático</i>	Avante	1	2.3%
<i>Aciertos matemáticos</i>	Educación	1	2.3%
<i>Calculo 1</i>	Mcgraw-hill	1	2.3%
<i>Biblia de las matemáticas</i>	Lexus	1	2.3%
<i>Delta 11</i>	Seleer	1	2.3%
<i>Algebra de Baldor</i>	Patria	1	2.3%
<i>Pre-calculo</i>	Thomson	1	2.3%
<i>Algebra y trigonometría</i>	Denis Zill	1	2.3%

Tabla 2. Información general de los dos libros de textos *Hipertexto Matemáticas 11*, *Nuevas Matemáticas 11*

De acuerdo con la Tabla 2 se observa que los dos libros de textos de mayor uso en la enseñanza de las inecuaciones lineales con una incógnita real en grado 11 son: *Hipertexto matemáticas 11* de la editorial Santillana con una frecuencia relativa del 19% y *Nuevas Matemáticas 11* de la editorial Santillana con una frecuencia relativa de 14.2%, notándose que los dos libros de textos muestra una gran diferencia respecto a los otros libros de textos menos utilizados. Así mismo se evidencia que la editorial de mayor tendencia es Santilla.

Así mismo, la encuesta indaga acerca de que otros recursos aparte del libro de texto el docente utiliza para la enseñanza del concepto matemático central de esta investigación como se muestra en la Tabla 3. Es importante aclarar que esta pregunta es abierta, por lo tanto los docentes encuestados tenían la posibilidad de dar más de una respuesta, es así como hubo docentes que no dieron respuestas a esta pregunta, hubo otros que por el contrario dieron más de una opción en su respuesta, es por ello que no coincide la cantidad de respuestas obtenidas con la cantidad de maestros encuestados.

Recursos alternos al libro de textos usados por los docentes	Número de docentes que postularon los recursos
Recursos electrónicos: Portales educativos, internet, redes sociales , tutoriales, videos y paginas educativas, presentación en power point, REAS	16
Documentos: PDF, hojas de cálculos, notas de clases, guías, material estilo icfes y módulos.	4
Recursos manipulativos: Juegos didácticos y graficas en hojas de papel milimetrado	5

Tabla 3. *Utilización de recursos alternos al libro de texto por docentes encuestados*

De acuerdo con la Tabla 3 se puede decir que los docentes utilizan otros recursos aparte del libro de texto para la enseñanza de las inecuaciones lineales con una incógnita real, donde es posible observar que la mayoría de los docentes recurren a recursos electrónicos de distintas naturaleza como lo son; portales educativos, tutoriales, páginas educativas entre otros, para el

desarrollo de sus clases, sin embargo es importante aclarar que el libro de texto es el recurso más utilizados por los docentes para la enseñanza de las inecuaciones. .

De acuerdo con los resultados presentados en este apartado, a continuación se presenta la descripción de la estructura general de los dos libros de textos objeto de análisis.

3.3 Descripción de la estructura general de los dos libros de texto

La descripción general de los dos libros de textos se encuentra dividida en dos momentos, un primer momento donde se describen los aspectos generales del libro de texto y un segundo momento donde se realiza la descripción de la unidad referente a las inecuaciones lineales en el libro.

3.3.1 Descripción de la estructura general del libro de texto *Hipertexto Matemáticas 11* y *Nuevas Matemáticas 11*

El libro *Hipertexto matemáticas 11* y el libro *Nuevas Matemáticas 11* son dos libros de la editorial. A continuación en la tabla 4 se presenta los aspectos generales que caracterizan a los dos libros de textos

Descripción general de los dos libros de textos *Hipertexto Matemáticas 11* y el libro *Nuevas Matemáticas 11*

Título del libro	Autores	Distribuidores	Director de la editorial	Directores académicos
<i>Hipertexto Matemáticas 11</i>	Mirian del Carmen Morales, Víctor Helman Rodríguez Cárdenas, Wilson Gómez Bello, Anneris del Rocío Joya Vega, Mercedes Gómez Bello.	<i>Editorial Santillana S.A</i>	<i>Diana Constanza Salgado Ramírez, Isabel Hernández Ayala</i>	<i>Ana Julia Mora Torres</i>
<i>Nuevas Matemáticas 11</i>	<i>Alexander Díaz Campos, Diana Constanza Salgado Ramírez, Juan de Jesús Romero Roa, Wilson Enrique Torres Sánchez.</i>	Alexander Díaz Campos, Diana Constanza Salgado Ramírez, Juan de Jesús Romero Roa, Wilson Enrique Torres Sánchez.	<i>Andrea Constanza Perdomo Pedraza.</i>	<i>Martha Esperanza Rangel García</i>

Tabla 4. Descripción general de los dos libros de texto

Título del libro	ISBN	Ciudad	Año	Edición	Área	Materias
<i>Hipertexto Matemáticas 11</i>	978-958-24-1471-9	Bogotá D.C	2010	<i>primera edición</i>	Matemáticas	Álgebra y estadística
<i>Nuevas Matemáticas 11</i>	978-958-24-1056-6	Bogotá D.C	2007	<i>primera edición</i>	Matemáticas	Cálculo y estadística

Tabla 5. Descripción general de los dos libros de textos

Título del libro	Grado	Impresión de páginas inferiores	<i>Tipo de encuadernación</i>	Tipo de cubierta	Páginas	Papel
<i>Hipertexto Matemáticas 11</i>	<i>11</i>	<i>Color</i>	<i>Pegado</i>	semi-dura a color	320	Semi esmaltado
<i>Nuevas Matemáticas 11</i>	<i>11</i>	<i>Color</i>	<i>Pegado</i>	semi-dura a color	352	Semi esmaltado

Tabla 6. Descripciones generales de los dos libros de texto

El libro de texto *Hipertexto Matemáticas 11* está dividido en ocho unidades las cuales se presentan de la siguiente forma: la primera atiende a elementos de lógica, conjuntos y números reales, la segunda aborda las funciones, la unidad tres límites y continuidad, la unidad cuatro derivación, la quinta unidad, reglas de derivación, la sexta unidad aplicaciones de las derivadas, la séptima unidad integración y la octava unidad estadística y probabilidad. En las tres primeras páginas del libro se explican cada una de las características que componen sus unidades, las cuales se describen a continuación en el mismo orden en que se presentan en el texto y con las mismas etiquetas:

- **Presentación de la unidad:** el libro de texto realiza la presentación de la unidad en dos páginas, en la primera se presenta el número de la unidad y los temas que en ella se abordan, en la segunda, una actividad de motivación, una breve reseña histórica y un ejercicio de preparación para el estudio de los contenidos que se presentaran.
- **Desarrollo de temáticas:** se presenta el desarrollo de las temáticas con ejemplos resueltos, definiciones encerradas, cuadros breves con explicaciones y cortas biografías de personajes matemáticos.
- **Actividades:** dentro de estas actividades se presentan ejercicios para que los estudiantes razonen, ejerciten, modelen, comuniquen, interpreten y reflexionen mediante los procesos matemáticos.
- **Taller:** este se presentan al cierre de cada unidad, en él se proponen una serie actividades que recogen todo lo trabajado en la unidad, y permiten a los estudiantes reforzar sus conocimientos y prepararse para las evaluaciones.
- **Síntesis:** al final de cada unidad se realiza una breve descripción de los principales conceptos que se trabajaron en ella.

- **Páginas especiales: y esto aprendí. ¿para qué me sirve?** En este apartado del libro se explica la relación de los conceptos trabajados a lo largo de la unidad con su aplicación en la vida cotidiana y su transversalidad con otras áreas del conocimiento, este apartado se encuentra al final de cada unidad.

Los siguientes ítems a diferencia de los presentados anteriormente se encuentran solo en algunas de las unidades del libro *hipertexto matemáticas 11*

- **Competencias laborales:** informa a los estudiantes las carreras universitarias en las que se requiere de las matemáticas, y la manera en cómo influyen en la sociedad.
- **Laboratorio con Cabri:** se proponen actividades para que los estudiantes desarrollen con el uso del programa Cabri con la finalidad de implementar la tecnología como herramienta para mejorar el análisis matemático.
- **Bicentenario en datos:** trata el tema de la independencia de Colombia por medio de lecturas de la época de la independencia y propone actividades relacionadas con el pensamiento aleatorio.

Finalmente al interior del libro de texto se presentan a los estudiantes herramientas como iconos representados por dibujos caricaturizados, los cuales indican hipervínculos que permiten consultas en la página de Santillana (www.santillana.com.co/hipertextos) con el objetivo de profundizar en los conocimientos que se abordan en esa parte del libro, permitiendo a los estudiantes realizar exploraciones y resolver dudas.

En libro de texto *Nuevas Matemáticas 11* está dividido en diez unidades a saber: la primera unidad atiende al título de lógica y conjunto de números reales donde se puede observar que tiene que ver con los números reales y su representación, además de las diferentes proposiciones lógicas, la segunda unidad atiende al título de funciones, donde se presentan las diferentes

funciones y sus relaciones, la tercera unidad límites y continuidad, la cuarta unidad derivadas, donde se explican las reglas de derivación, la quinta unidad aplicaciones de derivadas, valores máximos y mínimos, la sexta unidad otras aplicaciones de las derivadas, donde se presentan problemas de razón de cambio y movimiento rectilíneo, la unidad siete integrales donde se explican los métodos de integración, la octava unidad fractales, generación y presentación de fractales y dimensión fractal, la novena unidad estadística y la décima y última unidad probabilidad. Cada una de estas unidades comparte las mismas características para dar inicio los diferentes temas que se abordan en cada una de ellas, a continuación se describen y se presentan dichas características:

- **Al inicio de la unidad:** al iniciar cada unidad el libro de texto presenta los temas que se desarrolla dentro de la unidad y propone una actividad introductoria la cual debe de desarrollar el estudiante, a su vez relaciona las matemáticas con otras ciencias.
- **Desarrollo de los contenidos:** en el desarrollo de los contenidos se presentan ejercicios resueltos, cuadros breves con preguntas para resolver, explicaciones y datos de personajes matemáticos.
- **Actividades:** se encuentran ejercicios para desarrollar procesos matemáticos que ejercitan, modelan entre otros, cada uno de los temas trabajados en la unidad.
- **Solución de problemas:** se le presentan a los estudiantes una serie de problemas en los cuales deben; razonar, interpretar y argumentar lo que en ellos se plantea, dependiendo de la unidad puede variar el número de problemas presentados.

- **Páginas especiales:** la matemática como herramienta para otras ciencias. Al final de cada unidad se presenta la utilidad de las matemáticas en la vida diaria y su transversalidad con otras áreas del conocimiento..

3.3.2 Descripción de las unidades referentes a las inecuaciones lineales en el libro *Hipertexto Matemáticas 11* y el libro de textos *Nuevas Matemáticas 11*

La propuesta de enseñanza en torno a las inecuaciones lineales con una incógnita real que presenta el libro de texto *Hipertexto matemáticas 11* se realiza en la unidad uno, esta unidad se encuentra comprendida por 30 páginas y se encuentra dividida en tres grandes temáticas, a saber; proposiciones, conjuntos y números reales, donde cada uno se encuentra dividido por subtemas, en particular lo que refiere al objeto matemático de interés en esta investigación se ubica en la tercera de estas temáticas la cual se presenta desde la página 27 hasta la 37, además se presentan otros subtemas entre ellos; inecuaciones cuadráticas, valor absoluto, inecuaciones con valor absoluto.

Al inicio de la unidad se presentan datos históricos de las matemáticas, el cual es presentado a través de un relato. También se presenta un recuadro titulado *prepárate para analizar* en el cual se plantea una serie de preguntas las cuales el estudiante debe responder de acuerdo a sus conocimientos previos.

Se presentan las temáticas en subtítulos a un tamaño de letra mayor al del desarrollo del mismo, cada una de estos temas se divide en subtemas y se presentan algunas definiciones relacionadas con el concepto de inecuación, estas son remarcadas con negrilla y en la parte superior derecha de cada página se especifica el pensamiento el cual se quiere potenciar de acuerdo al tema explicado y cada una de las actividades que en este se realizan, en este caso las inecuaciones lineales.

En las parte laterales de *Hipertexto matemáticas 11* se abren pequeños recuadros de diálogos como el que se observa en la Figura 2, para resaltar aspectos importantes los cuales los estudiantes deben tener en cuenta para comprender la teoría que se les presenta y abordar las actividades que se proponen.

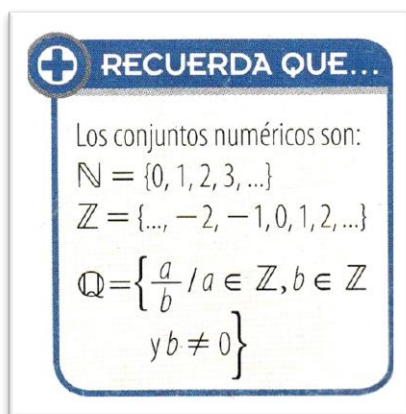


Figura 2. Recuadro de dialogo

La propuesta de enseñanza en torno a las inecuaciones lineales con una incógnita real que presenta el libro de texto *Nuevas matemáticas 11*, se realiza en la unidad uno la cual está comprendida por 32 paginas, dividida en tres temáticas; proposiciones, conjuntos y números reales, centrando la atención en la tercera temática correspondiente al concepto de inecuaciones lineales.

Al inicio de la unidad uno se alude a escritos cortos como datos históricos de las matemáticas, se realizan preguntas relacionadas con el tema, las cuales deben de ser desarrolladas por los estudiantes haciendo uso de sus conocimientos previos.

Se realiza la presentación de las temáticas en subtítulos a un tamaño de letra mayor, cada una de estas se divide en subtemas y estos a su vez en el acercamiento a las nociones o definiciones que emergen acerca del concepto de inecuaciones lineales los cuales se remarcan con negrilla, en

la parte superior se presenta de acuerdo a los estándares el pensamiento a potenciar según las actividades.

En las partes laterales del libro de texto *Nuevas Matemáticas 11* se presentan pequeños recuadros de diálogos, como se muestra en la Figura 3.

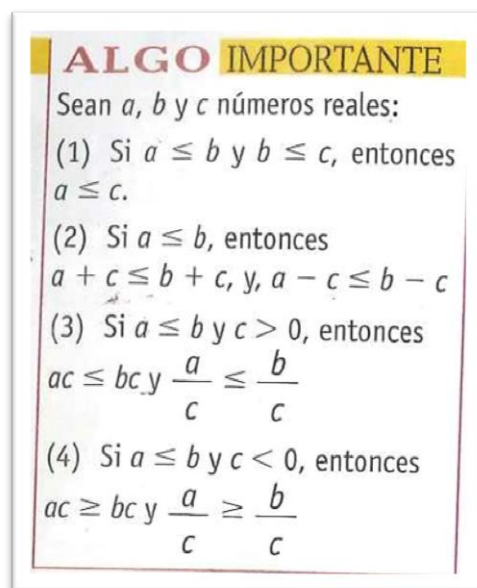


Figura 3. Recuadro de dialogo

Estos recuadros se usan para aludir a definiciones, teorema, axiomas y preguntas que se les realizan a los estudiantes, es así como en la Figura 3 el recuadro presenta las siguientes propiedades; propiedad transitiva, propiedad de la adición, propiedad de la tricotomía y el teorema cuatro que se presenta en la perspectiva matemática,

A su vez el libro de texto propone en algunas de sus páginas actividades y ejercicios que los estudiantes deben de resolver con el propósito de que ellos puedan desarrollar procesos

matemáticos y diferentes habilidades por medio de la ejercitación, modelación, comunicación y resolución de problemas

También, se observa que en cada presentación de los temas sigue un modelo tradicional en el que se ejemplifica y se ejercita y a partir de lo expuesto a nivel teórico se proponen actividades donde el estudiante de una u otra manera debe reproducir lo que se ha trabajado en páginas anteriores.

3.4 Análisis de los dos libros de textos a la luz de la rejilla

Los análisis que se realizan en este capítulo corresponden a los dos libros de textos que en líneas anteriores se han caracterizado, haciendo referencia al marco conceptual de este trabajo y la rejilla de análisis presentada en el capítulo anterior, dicho análisis está dividido en tres referentes a saber: matemático, didáctico y curricular los cuales están compuestos por sus respectivas categorías de análisis.

3.4.1 Las inecuaciones lineales con una incógnita real, en el libro de texto *Hipertextos Matemáticas 11* a la luz de la rejilla

A continuación se realiza el análisis del libro de texto *Hipertexto matemáticas 11* a la luz de los tres referentes presentados en el capítulo anterior, para lo cual se toman en consideración las categorías de análisis presentadas en la Tabla 2.

3.4.1.1 Referente matemático

- ***Categoría de análisis: conceptual***

El libro de texto *Hipertexto Matemáticas 11* presenta como pre requisito antes de abordar el concepto de inecuaciones lineales el concepto de conjuntos, este se encuentra dividido en el

estudio de conceptos y relaciones las cuales se explican a continuación: determinación de un conjunto, el cual se puede determinar de dos formas, por comprensión cuando se determina una característica en común de todos los elementos, y por extensión cuando se nombra cada uno de los elementos del conjunto; la relación de pertenencia, la cual indica que un elemento pertenece a un conjunto si cumple con las características que determinan al conjunto; la relación de inclusión que indica que un conjunto A está contenido en un conjunto B si todos los elementos de A pertenecen a B; y relación de igualdad, la cual muestra que dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos. Además de ello presenta las operaciones entre conjuntos tales como: la intersección, unión, diferencia, complemento y la diferencia simétrica, también presentan las propiedades que cumple la unión de conjuntos y la intersección, estas son; la propiedad asociativa, conmutativa, distributiva, absorción y modulativa.

Llama la atención que los conceptos, relaciones y operaciones ya mencionadas se presentan además mediante la representación gráfica por medio de diagramas de venn.

Hasta aquí se han presentado los conceptos previos a las desigualdades e inecuaciones en el libro de texto, ahora bien, para el estudio de estos conceptos se inicia primero con la presentación del concepto de números reales, donde se toma en consideración presentar los conjuntos numérico a partir de la relación de inclusión entre conjuntos y de pertenecía entre elementos y conjuntos, tal como se evidencia en la Figura 4.

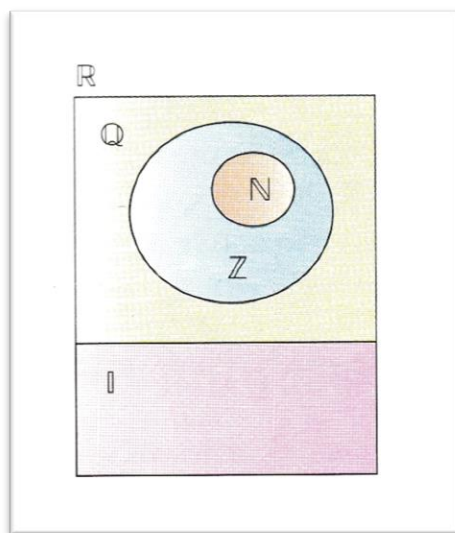


Figura 4. Diagrama de conjuntos numéricos

Obsérvese como en la Figura 4 se alude a los números reales teniendo en cuenta la presentación previa del concepto de inclusión entre conjuntos y pertenencia entre elementos y conjunto, de esta manera se presenta los números irracionales, racionales, enteros y naturales como subconjuntos de los números reales, pero a la vez se presenta la relación de unión entre los números racionales y los irracionales.

Tal como se logra evidenciar en la Figura 5.

La unión entre el conjunto de los racionales y el conjunto de los irracionales es el **conjunto de los números reales**, que se simboliza $\mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Figura 5. Definición de números Reales

En el primer caso la relación de pertenencia se presenta para definir el dominio de algunas expresiones en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ y en el segundo caso la unión entre conjuntos para definir los números reales.

Posterior a la caracterización que realiza en libro de texto de los conjuntos se presenta el concepto de desigualdad definida como aquella que permite establecer un orden en $\mathbb{R}$, mediante tres relaciones: $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

Llama la atención que aunque en el libro de texto no se definen las dobles desigualdades ni se explica cómo resolver estas, se presentan en los ejercicios que se proponen a los estudiantes esto puede llevar al estudiante a pensar que los ejercicios sintácticamente están mal escritos.

Ahora bien una vez detallado el tipo de conceptos que se presenta antes del concepto de desigualdad, se pasa a realizar la presentación de otros conceptos que moviliza el libro de texto para el estudio de las inecuaciones.

Es así, como se presenta el concepto de intervalo definiendo este como la forma de representar una desigualdad entre números reales, denotándolo por comprensión y con su respectiva representación gráfica, tal como se evidencia en la Figura 6.

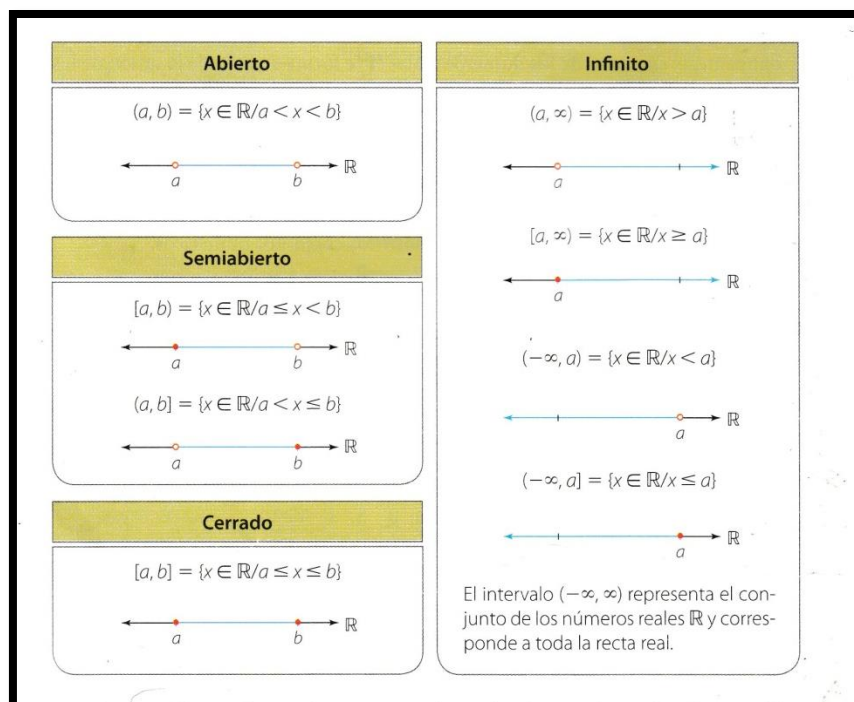


Figura 6. Representación gráfica de intervalos

Nótese que en la Figura 6 se da cuenta de la clasificación de estos intervalos a saber: intervalo abierto, semiabierto, cerrado e infinito los cuales fueron contemplado a la luz de la rejilla de análisis.

Otro de los concepto que moviliza en el libro de texto en el estudio de las desigualdades es el de inecuación, el cual se define como una desigualdad en la que intervienen una o más variables, pero también llama la atención que se define la inecuación como una desigualdad en la que hay una o más incógnitas, recurriendo en un caso a las letras como incógnitas y en el otro a las letras como variables, en el libro de texto pareciera no haber una postura conceptual clara que distinga las variables de las incógnitas o posiblemente se asumen como conceptos iguales.

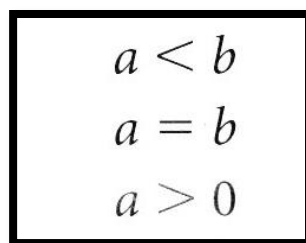
Una vez presentado el concepto de inecuación se presenta el conjunto solución el cual se asume en el libro de texto como el conjunto de todos los valores que verifican la desigualdad una vez la inecuación ha sido resuelta.

Bajo esta presentación se debe centrar la atención para que los estudiantes puedan comprender que todas las inecuaciones tienen un conjunto de solución y que uno de esos conjuntos de solución es el conjunto vacío.

Ahora bien en relación con la tercera unidad de análisis dentro de esta categoría conceptual relativa a las relaciones que se presentan entre los conceptos para el estudio de las desigualdades e inecuaciones en el libro de texto, es posible decir que se presenta coherencia entre los conceptos que se van construyendo, es decir, el libro de texto sigue una secuencia lógica en la presentación de los conceptos que permite relacionarlos con los nuevos que se van exhibiendo en el libro de texto, se puede evidenciar esto en la presentación de los conjuntos ya que luego de ser presentados se retoman en la presentación de los números reales y los números reales para dar paso a las desigualdades.

- ***Categoría de análisis: Procedimental***

En esta categoría se analiza las diferentes propiedades, procedimientos y teoremas que aborda el libro de texto para el trabajo con las desigualdades. El libro de texto antes de definir el concepto de desigualdad, define a $\mathbb{R}$ como un conjunto ordenado, donde se cumple alguna de las siguientes relaciones: $a < b$, $a = b$ y $a > 0$ como se muestra en la Figura 7.



$$a < b$$

$$a = b$$

$$a > 0$$

Figura 7 Propiedad de la tricotomía.

En la Figura 7 se puede ver que el libro de texto presenta la propiedad de la tricotomía, pero presenta un error ya que la propiedad dice que $a > b$ y no que $a > 0$, es decir que la propiedad lo que dice es que, Para a y b números reales cualesquiera se verifica una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$, considerando este como un error de edición, de la misma manera se observa que el libro de texto define el concepto de desigualdad como: “Una desigualdad entre dos números reales a y b es una expresión de la forma $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ ”, sin embargo al momento de definir el concepto de desigualdad como una relación de orden se observa que puede omitir la expresión $a \leq b$ y $a \geq b$ por la expresión $a = b$, pues ya había definido para un $a < b$, y $a > b$

En la Figura 8 se presenta las propiedades que se deben de tener en cuenta para la resolución de una desigualdad.

En las desigualdades se cumplen las siguientes propiedades:

- Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
- Si se suma o resta un mismo número en los dos miembros de la desigualdad el sentido de la desigualdad se conserva. Es decir, si $a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad por un número positivo el sentido de la desigualdad se conserva. Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad por un número negativo el sentido de la desigualdad se invierte. Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.

Figura 8. Propiedades en las desigualdades

En la Figura 8 se logra observar que el libro de texto retoma la propiedad transitiva, la propiedad de la adicción y el teorema 4, la cuales fueron expuestas en la perspectiva matemática de este trabajo, considerándose fundamentales para la resolución de las desigualdades, sin embargo el libro de texto no exponen ejemplos que permita sustentar el uso de tales propiedades y por ende no deja ver su importancia, pues se queda solo en la indicación de que son propiedades y nada más.

Continuando con el análisis se observar que el libro de texto no presenta ejemplo de inecuaciones lineales con una incógnita real, incluso como se dijo en la categoría de análisis procedimental no define que se entiende por tal concepto, es así como llama la atención analizar un ejemplo de inecuación cuadrática, se aclara que no es el objeto de estudio de este trabajo, pero resulta importante ver como el libro de texto presenta un ejemplo donde pudo haber mostrado la intervención o uso de una de las propiedades que él mismo presenta y sin embargo no lo hace, dado que solo expone la solución del ejercicio sin mostrar la propiedades que se utilizó, quedándose solo en la indicación de que se aplicó algunas de las propiedades de las desigualdades, como se muestra en la Figura 9.

✖ Ejemplos

① Resolver la inecuación $x^2 - 8 < 2x$.

$$x^2 - 8 < 2x$$

Se aplican propiedades de las desigualdades.

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

Se factoriza.

$$(x - 4)(x + 2) < 0$$

Luego, se determinan dos casos:

- $x - 4 < 0$ y $x + 2 > 0$
 $(-\infty, 4) \cap (-2, \infty) = (-2, 4)$
- $x - 4 > 0$ y $x + 2 < 0$
 $(4, \infty) \cap (-\infty, -2) = \emptyset$
 $(-2, 4) \cup \emptyset = (-2, 4)$

Se aplica la propiedad $a, b < 0$ si $a < 0 \wedge b > 0$.

Luego, la solución de la inecuación $x^2 - 8 < 2x$ es el intervalo $(-2, 4)$.

Figura 9. Ejemplo inecuaciones cuadráticas

En la Figura 9, se puede observar que en la expresión $x^2 - 8 < 2x$, el libro de texto pasa de una a la expresión $x^2 - 2x - 8 < 0$ sin mostrarle al lector que la propiedad que se utilizó fue la propiedad de la adicción, la cual dice que, si se suma o resta un mismo número en los dos miembros de la desigualdad, el sentido de la desigualdad se conserva, por lo tanto el paso que seguiría sería: restar a ambos lados de la desigualdad el número $-2x$ mostrando que la expresión que seguía según la propiedad de la adicción es $-2x + x^2 - 8 < 2x - 2x$ y finalmente se obtiene la expresión: $x^2 - 2x - 8 < 0$

El libro de texto retoma la propiedad transitiva, la propiedad de la adicción y el teorema 4, sin embargo como se muestra en la Figura 10, se presenta al lector las propiedades como algo importante que deben de recordar, sin mostrar la importancia que tienen cada una de estas para la resolución de las inecuaciones.

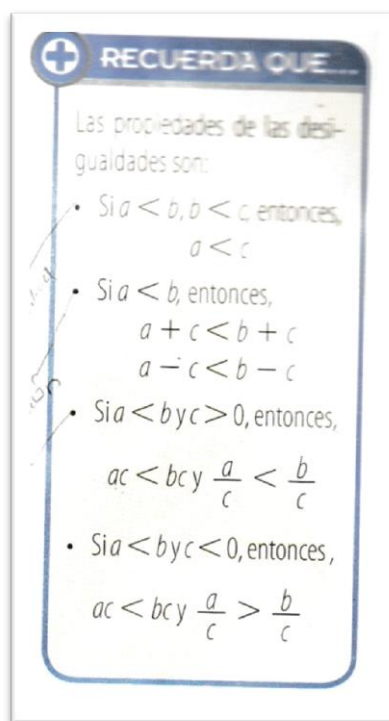


Figura 10. Recuadro lateral

Así mismo se logra ver en la Figura 10 que el libro de texto cuando presenta las propiedades no le indica al lector como se llama cada una, es decir indicar cuál es la propiedad transitiva, cual es la propiedad de la adición y cuál es el teorema 4. De igual manera se observó que al presentar cada una de las alguna de las propiedades el libro de texto no asume c como un número real por ejemplo en el caso de la propiedad de la adición el libro de texto la muestra de la siguiente manera: *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$* , asumiendo que c es positivo y $-c$ es negativo sin tener en cuenta que c es cualquier número real, esto paso porque se asume que la ausencia del

signo indica que la letra es positiva, por lo tanto basta con escribir la expresión de la siguiente manera: *si $a < b$, entonces $a + c < b + c$* , pues se sabe que c pertenece a los $\mathbb{R}$ y se siguen cumpliendo la desigualdad. En el teorema 4 se observó que presenta un error cuando presenta la propiedad del teorema 4 en el caso dos pues no se cambia el sentido de la desigualdad para *si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $ac < bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$* , ya que si se suman o se dividen los dos miembros de la desigualdad por un número negativo el sentido de la desigualdad se invierte, y en la propiedad el sentido de la desigualdad no cambio en la multiplicación.

3.4.1.2 Referente didáctico

De acuerdo a la rejilla de análisis presentada en el capítulo II en este referente se analizan tres categorías de análisis a saber: discurso que se presenta, tratamiento pedagógico y lenguaje movilizado a continuación se presentan cada una de ellas con sus respectivos criterios de análisis.

- ***Categoría de análisis: Tipos de discurso que se presenta***

Dentro de esta categoría se analizan dos criterios, el primer hace referencia al discurso que moviliza el libro texto y el segundo hace referencia a los elementos que constituyen el discurso (marcos). En relación al primer criterio es posible afirmar que de acuerdo al análisis realizado al libro *Hipertexto matemáticas 11* el discurso empleado es expositivo, ya que al muy poco tiempo de iniciar presenta definiciones de los conceptos matemáticos movilizados, también al poco tiempo presenta propiedades del concepto objeto de estudio, lo que es una característica esencial en este tipo de discurso como se evidencia a modo de ejemplo en la Figura 11

Desigualdades en $\mathbb{R}$

Una **desigualdad** entre dos números reales a y b es una expresión de la forma $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

En las desigualdades se cumplen las siguientes propiedades:

- Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
- Si se suma o resta un mismo número en los dos miembros de la desigualdad el sentido de la desigualdad se conserva. Es decir, si $a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad por un número positivo el sentido de la desigualdad se conserva. Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad por un número negativo el sentido de la desigualdad se invierte. Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.

Una desigualdad entre números reales se puede representar con un intervalo.

Un **intervalo** es un subconjunto (no vacío) de números reales. Las clases de intervalos se muestran a continuación:

Figura 11. Propiedades de las desigualdades

Nótese como una vez el libro inicia presentando el concepto de desigualdades, se va a su definición y las propiedades que en estas se cumplen.

A continuación se presenta las características de los elementos que intervienen en la estructura del discurso del libro de texto, tales elementos se clasifican en diferentes marcos; definicional, ejemplificación y ejercitación. Con respecto al primer marco es posible observar que las definiciones presentadas son de tipo nominal, puesto que se define un término designador del concepto para presentarlo, como se logra apreciar en la Figura 12.

Una desigualdad en la que hay una o más incógnitas se denomina **inecuación**. Resolver una inequación consiste en hallar los valores de la incógnita que hacen verdadera la desigualdad. Al conjunto de dichos valores se le llama **conjunto solución**.

Figura 12. Definición página 28

Obsérvese en la Figura 12 que el termino designador del concepto en esta definición es el de desigualdad ya que el concepto de inequación se define en termino de él.

En relación con el marco ejemplificación en el libro de texto se evidencia que los ejemplos son escasos, estos no se brindan para todos los conceptos que se presentan son específicamente en la solución de inequaciones y en estos que no se hace hincapié en cómo se solucionaron y las propiedades que permitieron su resolución, por el contrario solo llaman la atención para hacer referencia sobre otras cuestiones como: en el conjunto solución y la manera como se puede representar un una solución de una inequación ya sea por extensión o por medio de intervalo. Se consideran importantes cada uno de estos aspectos, aunque el libro de texto debe enfatizar en cómo operan las diferentes propiedades utilizadas. Como se observa en la Figura 13 a modo de ejemplo.

Resolver una inequación consiste en hallar los valores que hacen verdadera la desigualdad. Al conjunto de valores se le llama **conjunto solución**.

Por ejemplo, la desigualdad $x + 5 < 2$ es una inequación, al realizar operaciones y resolver se obtiene que $x < -3$, esto se puede expresar en forma de conjunto como $S = \{x \in \mathbb{R} / x < -3\}$, en forma de intervalo se escribe $(-\infty, -3)$ y en forma gráfica es:



Figura 13. Ejemplo página 28

En la Figura 13 se observa que no es claro el uso de las propiedades para llegar a la solución.

En cuanto al marco de ejercitación este es presentado en el libro de texto en dos momentos, en el primero llamado *actividades* ubicado después de la presentación de las inecuaciones el estudiante debe ubicar intervalos en la recta real, estos se le dan numéricamente se evidencia un nivel de complejidad en los ejercicios ya que los números con que se presentan los intervalos son de diversa naturaleza en unos casos son números enteros y en otros son racionales no enteros los cuales se presentan en forma de fracciones y números decimales, además se plantea determinar el conjunto solución de inecuaciones con única desigualdad, en el segundo momento llamado *taller* presentado a modo de cierre al finalizar el capítulo los ejercicios propuestos a los estudiantes son de solución de inecuaciones estos van aumentando su nivel de complejidad ya que al iniciar se plantean inecuaciones con una desigualdad y posteriormente se presentan inecuaciones con dobles desigualdades, es importante recordar que el libro propone a los estudiantes abordar inecuaciones con dobles desigualdades cuando no se ha hecho un tratamiento de estas en su presentación. Estos ejercicios son presentados en su mayoría de manera tradicional haciendo énfasis en la ejercitación de procedimientos. En la Figura 14 en la Figura 15 y en la Figura 16 se observan los ejercicios presentados en los dos momentos del marco de ejercitación.

2 Ubica los siguientes intervalos en la recta real.

- | | |
|---------------|--|
| a. $(1, 8)$ | f. $(-5, -2)$ |
| b. $(-7, -1]$ | g. $(0,5; 6,3]$ |
| c. $[-8, 8)$ | h. $[4, \infty)$ |
| d. $(-9, 0]$ | i. $(-\infty, 3]$ |
| e. $[-6, -1]$ | j. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right]$ |

Figura 14. Ejercicios página 30

4 Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a. $x + 20 < 10$	i. $x - 8 > -3$
b. $4x \leq 3$	j. $-2x \geq -1$
c. $\frac{x}{3} + 1 < 0$	k. $\frac{x}{-2} - 5 > -7$
d. $4x + 3 \leq 7$	l. $-3x - 1 \geq -5$
e. $\frac{x}{3} + 1 < 4$	m. $\frac{x}{2} \leq 1$
f. $\frac{x}{-3} \geq -5$	n. $\frac{x}{-2} - 5 \leq -10$
g. $\frac{2}{3}x > 5$	o. $-\frac{2}{5}x + 1 < 4$
h. $\frac{4x + 1}{3} < 7$	p. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$

Figura 15. Ejercicios paginas 30



Inecuaciones

14 Determina el conjunto solución de cada inecuación y realiza la respectiva prueba.

a. $-7 < 2x + 4 < 8$	f. $-3 < \frac{x}{4} + 1 < 10$
b. $-7 < 2x + 1 < 10$	g. $-5 < \frac{x}{3} - 2 \leq 4$
c. $0 < x - 4 < 7$	h. $-3 < x + 5 < 10$
d. $4x + 1 < 2x - 3$	i. $5x - 1 > 3x + 1$
e. $-2x - 3 \leq 5x - 3$	j. $4 - 2x \geq 3x + 1$

Figura 16. Ejercicios página 35

- ***Categoría de análisis: Tratamiento pedagógico***

Esta categoría se encuentra dividida en tres criterios: valores que transmite el libro de texto, el sistema para-textual e introducción al tema. Cada uno de estos criterios son presentados a continuación.

De acuerdo al análisis realizado se puede decir que el libro de texto no transmite ningún valor, pues los autores no proponen actividades en las que los estudiantes pueda realizar un trabajo en conjunto con sus pares, es decir no propicia diferentes actividades para ser desarrollar en grupos, ya que es a través de la interacción con los demás como se pone en juego valores como el trabajo en equipo, el dialogo, el respeto hacia los demás y la buena convivencia, entre otros. El libro de texto promueve un trabajo de tipo individual ya que se encuentran palabras como: determina, realiza, lee, observa, sin involucrar al estudiante con otras personas.

Por su parte el libro de texto viene acompañado del sistema para textual ya que adicionalmente remite a los estudiantes al uso de páginas web a las cuales ellos pueden acceder para ampliar o profundizar lo trabajado en el libro de texto, además de ello plantea laboratorios con el software de geometría Cabri geometri donde se propone a los estudiantes una serie de actividades que pueden desarrollar. Cabe aclarar que este sistema para-textual es referido en el libro de texto para otros conceptos matemáticos y no particularmente para el de inecuaciones lineales como es evidenciado en la Figura 17 y la Figura 18.

LABORATORIO CON CABRÍ

Objetivo:

- Familiarizar a los estudiantes con el uso del programa Cabri.
- Comprender el concepto de derivada de una función en un punto.

Dibujar la función cuadrática $f(x) = 2x^2$ y determinar la pendiente de la recta tangente en el punto $A(1, 2)$.

Pasos

- Activa la opción **mostrar ejes** y desplaza el ratón hacia la zona de trabajo. Entonces, aparecerán los ejes de coordenadas cartesianas. Luego, activa la opción **segmento** y construye un segmento de recta sobre el eje X (con los puntos de este segmento se dibuja la función).
- Activa la opción **punto sobre objeto** y marca un punto sobre el segmento que se dibujó anteriormente. Luego, activa la herramienta **medidas** y selecciona la opción **ecuación y coordenadas**, y halla las coordenadas del punto que marcaste sobre el segmento.
- Activa la opción **calculadora** para determinar la imagen en Y del punto encontrado en el paso anterior. Desplaza este resultado a la zona de trabajo. Luego, con la opción **transferencia de medidas**, señala el resultado y el eje y para marcar el valor en el eje y .

The figure consists of four screenshots of the Cabri II Plus software interface, arranged in a 2x2 grid. Each screenshot shows a coordinate plane with a grid. The top-left screenshot shows the initial state with the x and y axes. The top-right screenshot shows a line segment drawn on the x-axis. The bottom-left screenshot shows a point marked on the segment, and the coordinates (0.37, 0.00) are displayed. The bottom-right screenshot shows the same point, but now the y-coordinate is updated to 1.22, representing the value of the function at x = 0.37.

Figura 17. Trabajo en software de geometría dinámica (Geogebra)

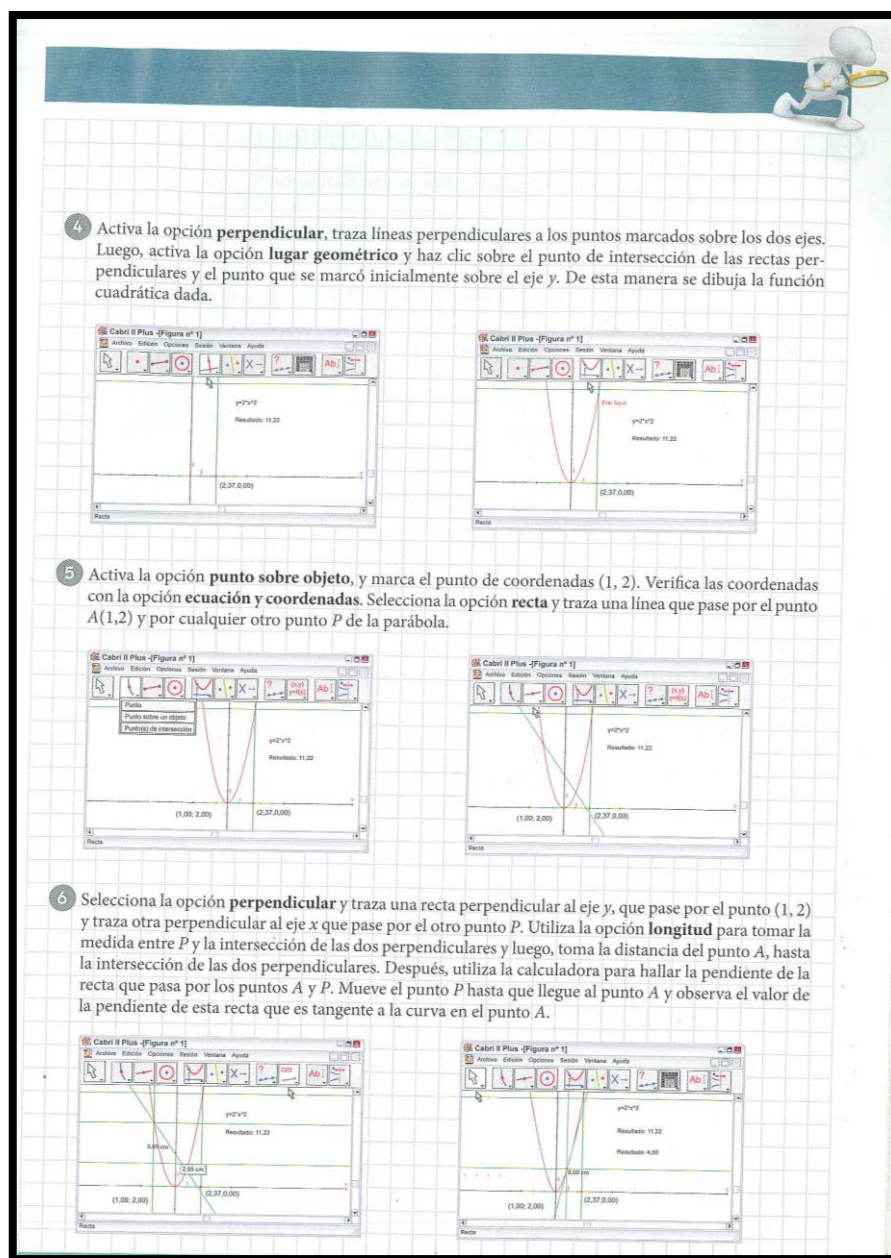


Figura 18. Geogebra

Finalmente la introducción al tema de las inecuaciones lineales inicia con la presentación de los conjuntos numéricos para llegar de este modo a $\mathbb{R}$, se explica a los estudiantes como se simboliza este conjunto y los conjuntos numéricos que lo conforman, esto se complementa con un diagrama en cual se muestra la relación graficas entre ellos. La presentación de $\mathbb{R}$ da paso al

concepto de desigualdad y esta a su vez en el concepto de inecuaciones lineales. Como se evidencia en la Figura 19.

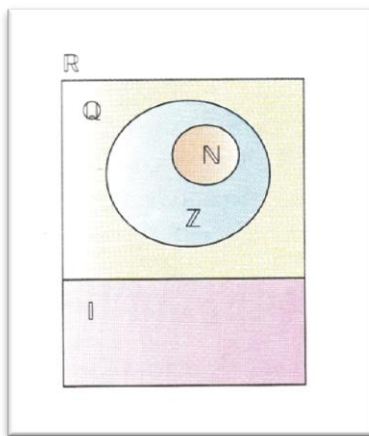


Figura 19. Diagrama de conjuntos Numéricos

- ***Categoría de análisis: Lenguaje movilizado***

La tercera y última categoría dentro de este referente es el lenguaje movilizado, está compuesta por un criterio de análisis el cual es tipo de representación y se explica a continuación.

Representación escrita

En el libro de texto se hace uso de representación tanto escrita como de tipo simbólico algebraica y gráfica cada una de ellas en diferente medida, la más utilizada a lo largo del capítulo es la escrita.

Se puede analizar que la representación simbólica algebraica es presentada cuando se brindan algunas definiciones y se enuncian las diferentes propiedades, además, de ser evidenciada en los diferentes ejercicios, ejemplos, actividades y sus respectivas soluciones que son propuestos a

los estudiantes en su mayoría mediante un lenguaje natural. Además el texto emplea la representación gráfica, en particular cuando presenta la notación de los intervalos en la recta real (abierto, simiabierto, cerrado, semicerrado, infinito) pero en cuanto al conjunto solución de las inecuaciones lineales no cuenta con ninguna representación gráfica. En particular cuando presenta la representación de los intervalos en la recta real

3.4.1.3 Referente curricular

- ***Categoría de análisis: Propuesta curricular***

Esta es la tercera y última categoría que se tiene en cuenta para el análisis del libro de texto *Hipertexto matemáticas 11*, la cual se encuentra dividida en tres criterios que se analizan de acuerdo a los documentos de políticas públicas emanados por el MEN específicamente los Lineamientos curriculares de Matemáticas, estos criterios permiten analizar lo siguiente: la presencia de situaciones problemáticas y en caso de haberlas en que contextos se presentan o determinan dichas situaciones, si el texto promueve procesos generales de aprendizaje y si se aborda aspectos del pensamiento variacional y numérico para el estudio de las inecuaciones lineales con una incógnita real.

Teniendo en cuenta las situaciones problemáticas, en el análisis realizado al libro de texto se pudo evidenciar que se presentan muy pocas relacionadas con las inecuaciones lineales con una incógnita real, como se especificó en el marco de ejercitación presentado en líneas anteriores, en su gran mayoría se proponen procesos de ejercitación por medio de actividades donde el estudiante debe poner en práctica las propiedades presentadas en el libro con anterioridad para llevar a cabo la solución de estas, la propuesta de actividades por medio de situaciones problemáticas es casi nula ya que se presenta una situación de resolución de inecuaciones donde se trata de hallar el conjunto solución de la inecuación a

partir de tratamientos sintácticos, en el cual se favorece el contexto de la vida diaria en estudiantes, como se evidencia en la Figura 20, ejercicio 18.

Números reales

- 10 Completa la siguiente tabla utilizando los símbolos $\in$ y $\notin$.

Número	N	Z	Q	I	R
-5					
$\frac{3}{4}$					
$\sqrt{2}$					
π					
0,333...					

Intervalos

- 11 Ubica los siguientes intervalos en una recta real.

- a. $\left(\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right)$ f. $\left(0,5; \frac{11}{2}\right)$
 b. $\left(-\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$ g. $(-7,5; -0,5)$
 c. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ h. $(-1, 6]$
 d. $(-2, 8)$ i. $\left[\frac{17}{2}, \infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$
 e. $[-4, 7) - (1, 3)$ j. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right] \cup [3, 5)$

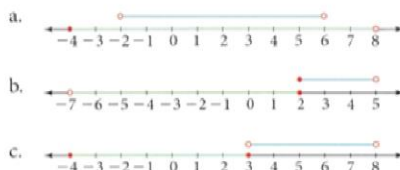
- 12 Dados los siguientes intervalos, represéntalos en la recta. Halla el intervalo que corresponde a cada operación.

$$A = (-\infty, -7) \quad B = [-10, -9) \quad D = [-7, 2)$$

$$C = [-8, -5] \quad E = (-7, -4) \quad F = [-5, \infty)$$

- a. $A \cup B$ e. $A \cap E$ i. $A - C$
 b. $A - B$ f. $A \cup F$ j. $A \cap D$
 c. $A \cap C$ g. $A - F$ k. $A \cup E$
 d. $A \cup D$ h. $A \cap B$ l. $A - E$

- 13 En cada una de las siguientes rectas se encuentran representados dos intervalos. Halla: unión " $\cup$ ", intersección " $\cap$ ", y diferencia "-".



Inecuaciones

- 14 Determina el conjunto solución de cada inecuación y realiza la respectiva prueba.

- a. $-7 < 2x + 4 < 8$ f. $-3 < \frac{x}{4} + 1 < 10$
 b. $-7 < 2x + 1 < 10$ g. $-5 < \frac{x}{3} - 2 \leq 4$
 c. $0 < x - 4 < 7$ h. $-3 < x + 5 < 10$
 d. $4x + 1 < 2x - 3$ i. $5x - 1 > 3x + 1$
 e. $-2x - 3 \leq 5x - 3$ j. $4 - 2x \geq 3x + 1$

- 15 Halla el conjunto solución y realiza la respectiva prueba para cada inecuación cuadrática.

- a. $3x^2 + 11x + 6 > 0$ f. $x^2 + 7x + 10 < 0$
 b. $x^2 - 100 > 0$ g. $y^2 - 12y + 35 < 0$
 c. $t^2 - 2t - 48 > 0$ h. $y^2 - 2y + 1 < 0$
 d. $t^2 - t - 42 > 0$ i. $x^2 + 11x + 18 < 0$
 e. $z^2 + 22z + 120 > 0$ j. $x^2 - 22x + 121 < 0$

- 16 Observa las inecuaciones y los intervalos y asocia cada inecuación con su respectivo intervalo solución.

- a. $|x| \leq 3$ 1. $(-\infty, -6] \cup [6, \infty)$
 b. $|2x| < 5$ 2. $(-2, 5; 2, 5)$
 c. $\left|\frac{x}{2}\right| \geq 3$ 3. $(-\infty, -18) \cup (6, \infty)$
 d. $|x + 6| > 12$ 4. $[-3, 3]$

- 17 La distancia recorrida por un móvil a través del tiempo está dada por " $T^2 - 1 > 0$ ", donde T representa el tiempo en segundos.

- a. ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que es posible determinar la distancia recorrida por el móvil?
 b. ¿Cuál es el intervalo en que no se puede calcular la distancia en esta situación?

- 18 Una fábrica tiene establecido que sus ganancias están dadas por: $3x + 5.000.000 > 14.000.000$, donde x representa las ventas.

- a. ¿Cuál es el intervalo de ventas para que la fábrica obtenga ganancias?
 b. ¿A partir de qué valor en las ventas se comienza a obtener ganancias?



Figura 20. Taller Hipertexto Matemáticas

Nótese en la Figura 20 que en el bloque de ejercicios que se plantean, se propone solamente una situación problema sobre inecuaciones lineales. Al haber una falta de situaciones problemáticas no se puede afirmar que en el libro se movilen diferentes contextos dado que las situaciones problemáticas se encuentran ligadas a los contextos.

Sin embargo es importante resaltar que al finalizar el capítulo correspondiente a las inecuaciones lineales se plantea una situación problemática en una de las llamadas página especiales, lo que hace pensar que las situaciones problemáticas van por fuera del aprendizaje de las inecuaciones ya que a lo largo del capítulo no se planteó un trabajo por medio de estas, aunque la situación que se plantea se considera apropiada también se considera que el lugar donde es presentada no es el adecuado y va en contraposición a la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas que plantean la enseñanza de los conceptos matemáticos a través de situaciones problemáticas y no estas como última opción en donde los estudiantes tienen que poner en juego los conocimientos que se supone ha aprendido, como es planteado en el libro de texto. En la Figura 20 es evidencia la página especial donde se presenta la situación.

**Y esto que aprendí,
¿PARA QUÉ ME SIRVE?**
Para entender los costos del servicio de telefonía.

Las inecuaciones en las líneas telefónicas

La línea telefónica es considerada como el principal medio de comunicación, ya que permite realizar llamadas a cualquier ciudad del país y del mundo, además es el soporte de otros productos de última tecnología como Internet banda ancha y de servicios adicionales como llamada en espera, transferencia de llamadas, despertador automático, contestador virtual, entre otros.

Durante el año 2009, la Empresa de Teléfonos de Bogotá (ETB), ofreció los siguientes planes para personas u hogares que consumen prácticamente los mismos minutos todos los meses. Estos planes tienen una tarifa básica mensual, y en caso de pasarse del cupo que se adquiere, la empresa cobra los minutos adicionales a un valor determinado, de acuerdo con el plan y con el estrato donde se encuentra la línea telefónica. El cliente puede consultar los minutos locales consumidos llamando a la empresa gratuitamente.

Por ejemplo, para calcular cuántos minutos adicionales como máximo, pueden consumir al mes en un hogar de estrato 1 con plan 220, si solo cuentan con \$12.000 para pagar el servicio de telefonía, se puede plantear la inecuación:

$$10.900 + 88,68 M \leq 12.000$$

donde M es la cantidad de minutos adicionales.

$$88,68 M \leq 12.000 - 10.900$$

$$M \leq 12,4$$

Por lo que se deduce que en este hogar deben consumir como máximo 12 minutos adicionales.

Estratos	Plan	Tarifa básica	Minutos incluidos	Valor minuto adicional
1	220	\$10.900	220	\$88,68
2	220	\$12.700	220	\$88,68
3 y 4	220	\$21.634	220	\$109,63
3 y 4	370	\$32.422	370	\$98,09
5 y 6	220	\$25.364	220	\$128,53
5 y 6	370	\$38.012	370	\$115,01

Recupera información

- 1 Consulta cuáles empresas de telefonía prestan servicio en tu ciudad.
- 2 Explica qué representa M en la inecuación del ejemplo.
- 3 Plantea una expresión para calcular el valor que se debe pagar en el plan 220 para estrato 2 con minutos adicionales.

Plantea y actúa

- 4 Calcula cuántos minutos adicionales como máximo, pueden consumir en un hogar de estrato 4 con plan 370, si quieren pagar a lo más \$44.000 por el servicio de telefonía.
- 5 Calcula cuántos minutos adicionales como mínimo y cuántos como máximo, consumen en un hogar de estrato 5 con plan 370, que suelen pagar entre \$50.000 y \$ 60.000 mensuales.

Responde: ¿cuánto deben pagar en el estrato 3 en este caso?

Figura 21. Pagina especial Hipertexto Matemáticas 11

En relación con el segundo criterio de análisis concerniente a sí el libro de texto promueve procesos generales de aprendizaje. Se analizó que en el capítulo concerniente al objeto de estudio en este trabajo que no se realiza el planteamiento de problemas para que los estudiantes desarrollen, dando énfasis como ya se ha mencionado en repetidas ocasiones a la ejercitación de procedimiento donde los estudiantes no necesariamente debe hacer un proceso de razonamiento para dar solución a cada uno, más bien se presentan actividades mecánicas con el objetivo de

reproducir una manipulación simbólica, de orden sintáctico y apropiación de propiedades como se evidencia a modo de ejemplo en la Figura 22.

Ejercita: 1-2 **Razona: 3-4-5**

4 Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a. $x + 20 < 10$	i. $x - 8 > -3$
b. $4x \leq 3$	j. $-2x \geq -1$
c. $\frac{x}{3} + 1 < 0$	k. $\frac{x}{-2} - 5 > -7$
d. $4x + 3 \leq 7$	l. $-3x - 1 \geq -5$
e. $\frac{x}{3} + 1 < 4$	m. $\frac{x}{2} \leq 1$
f. $\frac{x}{-3} \geq -5$	n. $\frac{x}{-2} - 5 \leq -10$
g. $\frac{2}{3}x > 5$	o. $-\frac{2}{5}x + 1 < 4$
h. $\frac{4x + 1}{3} < 7$	p. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$

Figura 22. Ejercicios página 30

Nótese en la Figura 22 como los ejercicios piden determinar el conjunto solución de las inecuaciones lo cual se reduce a un proceso algorítmico donde los estudiantes no necesariamente van a dar cuenta de los procesos que siguieron en dicha resolución y así poder justificar las estrategias y procedimientos puestos en práctica. Al texto no hacer énfasis en la resolución de problemas no permite la modelación por parte de los estudiantes ya que estos dos procesos están articulado, la modelación se puede considerar como una referencia o representación que se realiza por medio de un artefacto o material que dé cuenta del concepto que se trata de comprender, permitiendo así un acercamiento a dicho concepto y poder operar transformaciones o procedimientos para apoyar la formulación de conjeturas

y razonamiento estos no se evidencia en el capítulo concerniente a las inecuaciones. En este sentido es posible afirmar que el proceso de comunicación no se privilegia en el libro de texto.

Aunque son mencionados algunos de los procesos generales en los ejercicios propuestos no se plantean situaciones que permitan desarrollar y evidenciar dichos procesos, como se observa a modo de ejemplo en la Figura 23.

Actividades

1 Representa cada número en la recta numérica:

a. $\frac{1}{2}$ e. $-\sqrt{2}$ i. $\frac{3}{2}$
b. 0,125 f. $-\frac{2}{3}$ j. 0,375
c. $-\frac{5}{2}$ g. -0,625 k. $\sqrt{3}$
d. -0,25 h. π l. $-\pi$

2 Ubica los siguientes intervalos en la recta real.

a. (1, 8) f. (-5, -2)
b. (-7, -1] g. (0,5; 6,3]
c. [-8, 8) h. [4, ∞)
d. (-9, 0] i. $(-\infty, 3]$
e. [-6, -1] j. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right]$

3 Escribe en forma de intervalos cada uno de los siguientes conjuntos.

a. $G = \{x/x \in \mathbb{R}, x > -3\}$
b. $H = \{x/x \in \mathbb{R}, -4 < x \leq 3\}$
c. $I = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq -5\}$
d. $J = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \vee x \geq 3\}$
e. $K = \{x/x \in \mathbb{R}, x > -2 \wedge x < 0\}$
f. $M = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 8\}$
g. $N = \{x/x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 5\}$
h. $O = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

4 Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a. $x + 20 < 10$ i. $x - 8 > -3$
b. $4x \leq 3$ j. $-2x \geq -1$
c. $\frac{x}{3} + 1 < 0$ k. $\frac{x}{-2} - 5 > -7$
d. $4x + 3 \leq 7$ l. $-3x - 1 \geq -5$
e. $\frac{x}{3} + 1 < 4$ m. $\frac{x}{2} \leq 1$
f. $\frac{x}{-3} \geq -5$ n. $\frac{x}{-2} - 5 \leq -10$
g. $\frac{2}{3}x > 5$ o. $-\frac{2}{5}x + 1 < 4$
h. $\frac{4x+1}{3} < 7$ p. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$

5 Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a. $x(3x + 5) > 0$
b. $4x(x - 3) < -9$
c. $x^2 + 8x \geq -7$
d. $x^2 \leq 1$
e. $121 - 22x + x^2 > 0$
f. $x^2 - 7x + 12 < 0$
g. $4x^2 - 10x + 6 \geq 0$
h. $9x^2 - 4 \leq 0$
i. $2x^2 + 7x < 3$

Figura 23. Actividades página 33

Como se puede evidenciar en la parte superior de la Figura 23 es presentado el proceso general que según el libro de texto se promueve en los estudiantes al desarrollar las actividades

propuestas, pero al analizar las actividades se evidencia que estas no permiten el desarrollo de los procesos generales que el libro indica ya que se centra en los procesos algorítmicos.

De esta manera se puede observar que el libro *Hipertexto Matemáticas 11* en el capítulo uno se queda corto en promover procesos generales de aprendizaje en los estudiantes a excepción de la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos centrando su atención en este y descuidando los demás procesos generales desvirtuando así su importancia.

Sin embargo en la página especial en la cual se presenta la situación problemática al final del capítulo correspondiente al objeto de estudio en este trabajo se evidencia la puesta en acto de los procesos generales de aprendizaje (ver Figura 23). A partir de la situación, se realiza una corta actividad que consta de cinco preguntas. En la pregunta número uno se propone a los estudiantes realizar una investigación teniendo en cuenta lo planteado en el problema, en la pregunta número dos se propone a los estudiantes explicar lo que representa M en la inecuación dada, lo que supone en ellos un proceso de razonamiento y comunicación que indica utilizar argumentos para exponer sus ideas, en la pregunta número tres se propone a los estudiantes plantear una expresión para calcular el valor que se debe pagar lo cual supone un proceso de modelación ya que los estudiantes deben realizar una representación por medio de símbolos algebraicos y así poder operar, por último en las preguntas cuatro y cinco se propone a los estudiantes una elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos ya que se deben realizar cálculos para determinar el valor a pagar de acuerdo al plan de minutos propuesto en la situación problema.

En relación con el tercer y último criterio de análisis a partir del cual se analiza, si el libro de texto aborda aspectos del pensamiento variacional y numérico, se logra evidenciar que no se presentan realmente situaciones donde intervienen fenómenos de variación y cambio en

diferentes contextos el cual pueda ser representado por medio de las inecuaciones lineales, no se presentan situaciones que permitan al estudiante pensar dinámicamente y utilizar diferentes sistemas de representación que permitan dar cuenta de la variación y el cambio, no aportando el libro de texto en el desarrollo del pensamiento variacional, tampoco ayuda a desarrollar el pensamiento numérico en los estudiantes ya que no permite el desarrollo de habilidades y destrezas numéricas y aunque se trabaja el concepto de los $\mathbb{R}$ no se presentan actividades que permitan al estudiante trabajar los números en diferentes contextos.

En este sentido el libro de texto carece de situaciones que permitan el desarrollo del pensamiento variacional y numérico con los cuales se aporte al aprendizaje del objeto matemático centro de atención en esta investigación. A manera de encabezado en cada una de las páginas impares aparece el pensamiento el cual es desarrollado a lo largo del capítulo, pero se confunden los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas con los pensamientos que se estipulan dentro de los Lineamientos Curriculares. Tal como se evidencia a modo de ejemplo en la Figura 24.

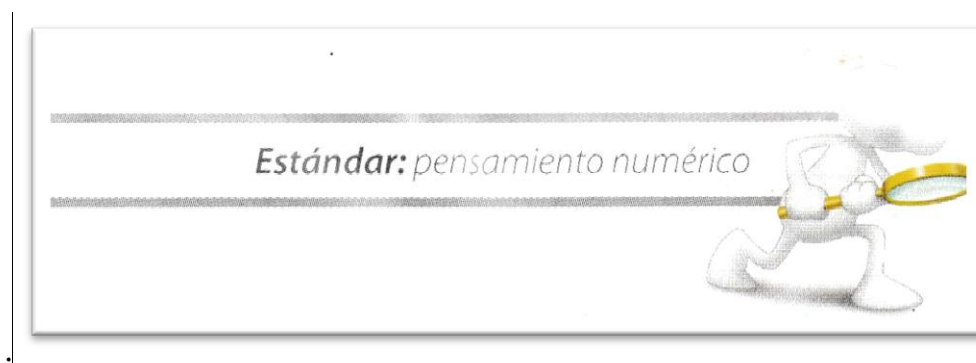


Figura 24. Tomado del libro de texto Hipertexto Matemáticas 11

Nótese en la Figura 24 que en el libro se llama estándar al tipo de pensamiento que se considera es desarrollado con las actividades propuestas, dejándose ver que no hay una claridad

conceptual frente a lo que son los estándares y los distintos tipos de pensamientos matemáticos, confundiéndose así unos con otros.

3.4.2 Las inecuaciones lineales con una incógnita real, en el libro de texto *Nuevas Matemáticas 11* a la luz de la rejilla

3.4.2.1 Referente matemático

- ***Categoría de análisis: conceptual***

El libro de texto *Nuevas Matemáticas 11* presenta como pre requisito antes de abordar el concepto de inecuaciones lineales, el concepto de conjuntos este se encuentra dividido en el estudio de conceptos y relaciones las cuales se explican a continuación: determinación de un conjunto, el cual se puede determinar de dos formas, por extensión cuando se nombra cada elemento que lo integra y por comprensión cuando se recurre a la propiedad que lo caracteriza; la relación de pertenencia que indica que un elemento pertenece a un conjunto si cumple con las características que define el conjunto; relación de contención dice que un conjunto A está contenido en un conjunto B si y solo si todo elemento de A es también elemento de B; la relación de igualdad determina que dos conjuntos A y B son iguales si tienen exactamente los mismos elementos. A la par se presentan las operaciones entre conjuntos como son: intersección, unión, diferencia, complemento y diferencia simétrica; las propiedades de la intersección entre conjuntos, asociativa, conmutativa y distributiva. La presentación de estas relaciones y operaciones no solamente se hacen por medio de definiciones sino por medio de representaciones gráficas mediante diagramas de Venn.

Ahora bien el libro exhibe tres formas de representar un conjunto, mediante diagramas de venn entre llaves y por medio de representación geométrica, se resalta el hecho de que esta última no se encuentra enunciada en el libro de texto y no se encuentra representada por comprensión ni por extensión como se evidencia en la Figura 25.

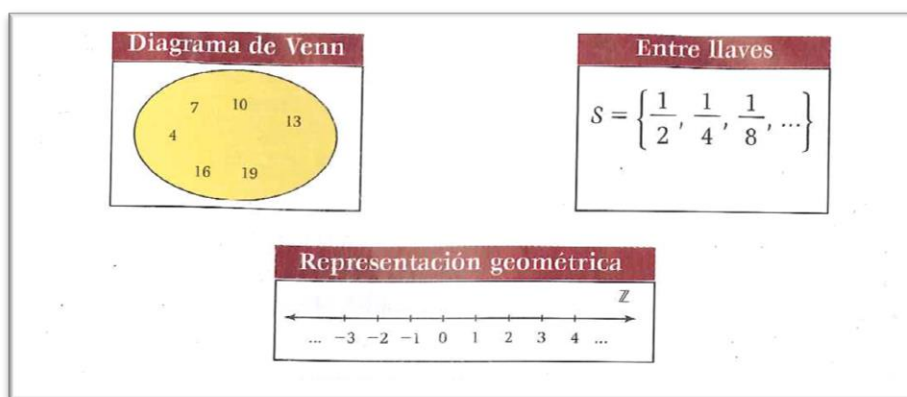


Figura 25. Representaciones de conjuntos

Como se puede observar en la Figura 25 se presentan diferentes conjuntos numéricos haciendo uso de las tres representaciones antes anotadas pero la representación geométrica no es enunciada dentro del libro, aparece sin ser enunciada.

Llama la atención que al presentarse las dos formas de determinación de un conjunto el ejemplo que se ofrece para ilustrar un conjunto por extensión no se corresponde con la forma en cómo se define, tal como se evidencia en la siguiente Figura 26.

2.1. Determinación de conjuntos

Los conjuntos se pueden determinar por extensión y por comprensión.

Un conjunto se determina por extensión cuando se nombra cada elemento que lo integra.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales impares mayores que 5 se determina así:

$$M = \{7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$$

Figura 26. Determinación de conjuntos

Nótese en la Figura 26 que no hay una correspondencia en la forma en cómo se define y la forma de representar un conjunto por extensión ya que no se están nombrando cada elemento que integra al conjunto de números naturales impares mayores que cinco.

Hasta aquí se han presentado los conceptos que aparecen previos al estudio de las desigualdades e inecuaciones en el libro de texto, ahora bien, para el estudio de estos conceptos se inicia primero con el concepto de conjuntos numéricos donde se exhiben los conjuntos de números $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ por medio de llaves los cuales son subconjunto de los números racionales, luego se define el conjunto de números reales por medio de la unión entre el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales, tal como se logra evidenciar en la Figura 27.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se forma a partir de la unión de los números racionales $\mathbb{Q}$ y los irracionales $\mathbb{I}$. Simbólicamente: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Figura 27. Conjunto de Números $\mathbb{R}$

Una propiedad que se exalta del conjunto $\mathbb{R}$ previamente definido en el libro es que este es un conjunto ordenado, lo cual se define a partir de que dado dos números reales a y b se cumple tres relaciones $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Posterior a la caracterización que realiza en libro de texto de los conjuntos se presenta el concepto de desigualdad en $\mathbb{R}$, definida como una expresión de la forma $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ en la que a y b son números reales. Llama la atención que en la presentación del concepto de desigualdad se usan cuatro símbolos distintos para marcar la relación de orden a saber: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ esto puede crear la idea que hay un símbolo particular para la relación *menor que* y que necesariamente es distinto al símbolo para indicar la relación *mayor que* cuando un mismo símbolo permite marcar cualquiera de estas dos relaciones dependiendo desde donde se realice la lectura, es decir, ante la expresión $a < b$ se puede leer simultáneamente *a menor que b* o *b mayor que a*.

Después de la presentación del concepto de desigualdad se expone la presentación de otros conceptos movilizados por el libro de texto, entre estos se encuentra el concepto de intervalo definido como un subconjunto no vacío de los números reales, denotándolo por comprensión y su respectiva representación gráfica tal y como puede evidenciarse en la Figura 28.

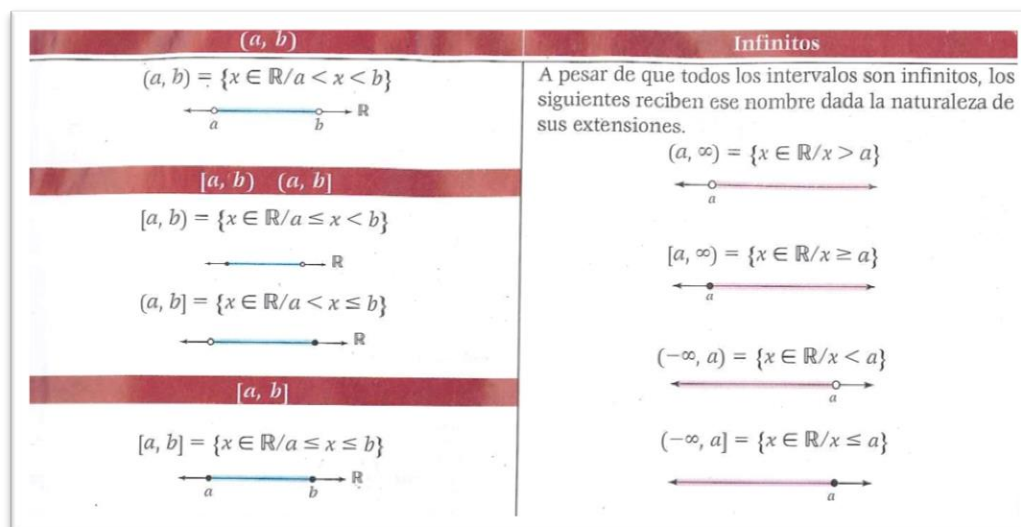


Figura 28. Representación de intervalos

Nótese que en la Figura 28 se da cuenta de la clasificación de estos intervalos a saber: intervalo abierto, semiabierto, cerrado e infinito.

Después de la presentación del concepto de intervalo se presenta en el libro de texto las operaciones entre ellos, es decir, se ponen en consideración las operaciones entre conjuntos como son: intersección, unión, deferencia, complemento y diferencia simétrica para ser realizadas entre intervalos tal y como se logra evidenciar en la Figura 29.

3.1.2. Operaciones entre intervalos

Dados dos intervalos A y B es posible considerar las operaciones $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \triangle B$ y A' . El conjunto universal será el conjunto de los números reales.

Figura 29. Operaciones entre intervalos

Nótese en la Figura 29 que se toman en consideración las operaciones que se habían presentado como previas al estudio de las desigualdades e inecuaciones, pero esta vez explícitas sobre intervalos en tanto que estos son considerados en el libro como conjuntos.

Otro de los conceptos fundamentales que se moviliza en el libro de texto en el estudio de las desigualdades es el de inecuación, el cual se define como: “una desigualdad en la que intervienen una o más variables”. Después de la presentación de este concepto se presenta el de conjunto solución al cual el libro de texto hace referencia como el conjunto de valores que hacen verdadera la desigualdad. Llama la atención como en la presentación del concepto de inecuación se asume el papel de la letra en la expresión como variable y no como una incógnita o una indeterminada. En el referente matemático presentado en el capítulo II deja en claro que el papel de la letra en este objeto matemático es de indeterminada o incógnita ya que en ellos se trata de encontrar el valor que hace verdadera la desigualdad.

Posterior a la presentación del concepto de inecuación y conjunto solución se presentan algunos ejemplos de la solución de inecuaciones tanto lineales, cuadráticas y racionales, este último aspecto no se tendrá en cuenta dado al carácter del trabajo sin embargo llama la atención que el libro de texto no realiza ningún tipo de clasificación de las inecuaciones, se proponen los ejemplos sin distinción alguna ni explicar la naturaleza de las inecuaciones tal y como se evidencia en la Figura 30.

1. Hallar el conjunto solución de la inecuación $3x - 4 < x + 2$

SOLUCIÓN

Usando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$3x - x \leq 4 + 2$, es decir, $2x \leq 6$; luego $x \leq 3$. El conjunto solución es:
 $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$. Es decir, la solución son todos los valores en $(-\infty, 3]$

2. Hallar el conjunto solución de cada inecuación.

a. $2x^2 - 5x - 3 < 0$

b. $\frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$

SOLUCIÓN

a. Se contemplarán dos métodos: el analítico y el gráfico.

Figura 30. Ejercicio resuelto de inecuación

Igualmente llama la atención que en el libro se presenta el concepto raíz de un polinomio el cual no tiene incidencia ni implícita ni explícita dentro de la propuesta de enseñanza que realiza el libro para las inecuaciones ya que no se muestra como para el tratamiento de las inecuaciones el libro se apoya en dicho concepto.

Por su parte llama la atención que en el libro de texto no se alude al concepto de inecuación lineal o de primer grado como si en los estudiantes es espontánea la construcción de este concepto matemático.

Ahora bien en relación con la tercera unidad de análisis dentro de esta categoría conceptual relativa a las relaciones que se presentan entre los conceptos para el estudio de las desigualdades e inecuaciones en el libro de texto, es posible afirmar que se presenta coherencia entre los conceptos que se van construyendo, es decir, el libro de texto sigue una secuencia lógica en la

presentación de los conceptos que permite relacionarlos con los nuevos que se van exhibiendo en el libro de texto.

- **Categoría de análisis: Procedimental**

En esta categoría se analizan las diferentes propiedades, procedimientos y teoremas que aborda el libro de texto para el trabajo con las desigualdades. Es así como al momento de realizar el análisis de texto de dicha categoría se observa que el libro inicia explicando lo que tiene que ver con los diferentes conjuntos numéricos conformados a lo largo del tiempo ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) para luego dar paso a la conceptualización de los numero reales denotada con la letra $\mathbb{R}$. En la misma página donde presenta lo concerniente a los conjuntos numérico en la parte lateral de la página presenta un recuadro la propiedad de la tricotomía, sin embargo no le indica al lector que esta es una propiedad, como se muestra en la Figura 31.

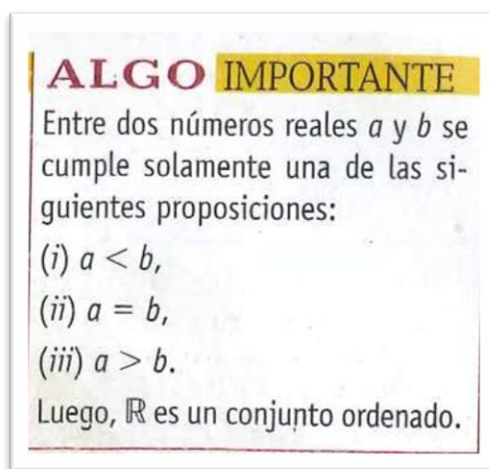


Figura 31. Recuadro lateral

Obsérvese en la Figura 31 que se presenta la propiedad como algo importante pero no se le indica al lector que es una propiedad y que nombre recibe esta.

Otra de las propiedades que recurre el libro de texto es la propiedad transitiva, la propiedad de la adición y el teorema 4, sin embargo se repite lo mismo que en la propiedad tricotomía, se presentan en un recuadro en la parte lateral del libro de texto pero no se exhibe el nombre de las propiedades indicadas.

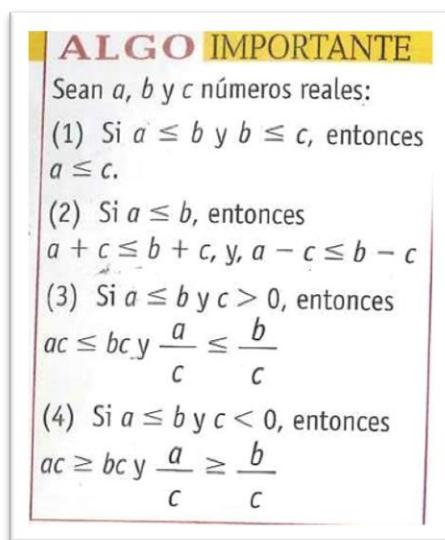


Figura 32. Recuadro lateral

3.4.2.2 Referente didáctico

Nuevamente se retoman las tres categorías que se tuvieron en cuenta para el análisis del libro anterior desde este referente.

- **Categoría de análisis: Tipos de discurso que se presenta**

De acuerdo al análisis realizado en el libro de texto *Nuevas Matemáticas 11* el discurso utilizado es expositivo dado que al poco tiempo de iniciar la lectura del texto se presentan definiciones y propiedades para lo cual se hace uso de los nomencladores, una característica esencial de este tipo de discurso, ahora bien, en relación con los marcos que se exhiben los

cuales son definicional, de ejemplificación y ejercitación, en el primer marco es posible afirmar que las definiciones que se presentan en el libro de texto son definiciones nominales puesto que se define un término designador del concepto, como se evidencia a manera de ejemplo en la Figura 33.

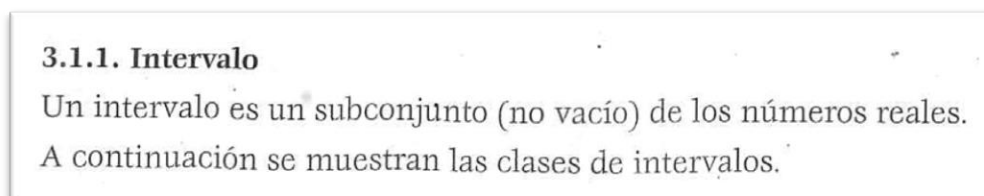


Figura 33. Definición de intervalo página 29

Obsérvese en la Figura 33 que el termino designador l concepto en esta definición es el de subconjunto ya que el concepto de intervalo se define en termino de él.

En relación con el marco de ejemplificación en el libro de texto no se evidencian ejemplos para los conceptos que se presentan en él, es decir, no se muestran casos particulares que cumplan con las características de las definiciones y las propiedades dadas solamente se definen tales conceptos, sin embargo si evidencian ejemplos al resolver algunas inecuaciones, particularmente una de tipo Cuadrático y otra de tipo Racional como se evidencia en las Figura 34 y la Figura 35.

1. Hallar el conjunto solución de la inecuación $3x - 4 < x + 2$

SOLUCIÓN

Usando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$3x - x \leq 4 + 2$, es decir, $2x \leq 6$; luego $x \leq 3$. El conjunto solución es:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$. Es decir, la solución son todos los valores en $(-\infty, 3]$

Figura 34. Ejercicios resueltos

2. Hallar el conjunto solución de cada inecuación.

a. $2x^2 - 5x - 3 < 0$

b. $\frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$

SOLUCIÓN

i. Se contemplarán dos métodos: el analítico y el gráfico.

Método analítico:

$x^2 - 5x - 3 < 0$, se tiene que: $(2x + 1) \cdot (x - 3) < 0$ (factorizando la expresión).

Al ser $(2x + 1) \cdot (x - 3) < 0$ se consideran dos casos:

Caso 1: $2x + 1 > 0 \wedge x - 3 < 0$

Luego, $2x > -1 \wedge x < 3$

$x > \frac{-1}{2} \wedge x < 3$

$\left(\frac{-1}{2}, \infty\right) \cap (-\infty, 3)$

Solución: $\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$

Caso 2: $2x + 1 < 0 \wedge x - 3 > 0$

Luego: $2x < -1 \wedge x > 3$

$x < \frac{-1}{2} \wedge x > 3$

$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cap (3, \infty)$

$\cup$ Solución: $\{\}$

Uniendo las soluciones de ambos casos el conjunto solución es $\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$.

Figura 35. Ejercicios resueltos

En las Figuras número 34 y la Figura número 35 se puede observar que al resolverse las inecuaciones no es claro el uso de las propiedades para llegar a la solución, es decir no se hace uso explícito de las propiedades que el mismo libro presenta.

Por su parte el marco de ejercitación se presenta al finalizar el capítulo con el título de actividad, en la cual se plantea una serie de ejercicios los cuales los estudiantes deben resolver, los ejercicios son presentados de manera tradicional haciendo énfasis en la ejercitación de procedimientos, no se favorecen ejercicios en donde la resolución de problemas en distintos contextos tenga presencia, los ejercicios son presentados con un grado de complejidad se inician presentando inecuaciones con una sola ocurrencia en la incógnita cuyo dominio son los números enteros , luego se avanza a inecuaciones con una doble ocurrencia en la incógnita cuyo dominio son números racionales no enteros lo que de acuerdo a la investigación realizada supone una dificultad a los estudiantes, a continuación en la Figura 36 se muestran los ejercicios planteados en el libro de texto *Nueva Matemáticas 11*.

ACTIVIDADES 5

1 EJERCITACIÓN. Representar en la recta real cada uno de los siguientes intervalos.

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| 1. $[-5, 8)$ | 2. $(2, 6)$ | 3. $(-4, 8)$ |
| 4. $[14, 20]$ | 5. $(-7, 0]$ | 6. $[0, \infty)$ |
| 7. $(-\infty, 7]$ | 8. $[16, 18]$ | 9. $[5, 6] \cup (8, 9)$ |
| 10. $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ | 11. $[-9, 12] \cup (13, \infty)$ | |
| 12. $(-\infty, 1] \cup (4, \infty)$ | | |

2 EJERCITACIÓN. Expresar como conjunto los siguientes intervalos.

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| 13. $(-3, 3)$ | 14. $[4, 6]$ | 15. $[-7, 6)$ |
| 16. $(4, \infty)$ | 17. $(-\infty, 6)$ | 18. $(6, 13) \cup (13, 19)$ |
| 19. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ | 20. $(-\infty, 7) \cup (8, 16)$ | |
| 21. $(-\infty, \infty)$ | | |

3 EJERCITACIÓN. Escribir como intervalo cada conjunto.

22. $N = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 8\}$
 23. $M = \{x/x \in \mathbb{R}, -6 \leq x \leq 12\}$
 24. $P = \{x/x \in \mathbb{R}, 16 \leq x\}$

Teniendo en cuenta los conjuntos anteriores, realizar las operaciones indicadas entre ellos y escribir los intervalos resultantes.

- | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|
| 25. $M \cup N$ | 26. $M \cap N$ | 27. M' |
| 28. N' | 29. $(M \cup N)'$ | 30. $(M \cap N)'$ |
| 31. $M \cup N'$ | 32. $M \cap N'$ | 33. $M' \cup N$ |
| 34. $M' \cap N$ | 35. $M - N$ | 36. $P - N$ |
| 37. P' | 38. $(M \cap P)'$ | 39. $(P \cup N)'$ |

4 MODELACIÓN. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 40. $x + 4 < 5$ | 41. $x + 2 \geq 3$ |
| 42. $x - 5 \leq 6$ | 43. $x - 7 \geq 8$ |

COMPETENCIAS: 1 INTERPRETATIVA 2 ARGUMENTATIVA 3 PROPOSITIVA

- | | |
|---|---|
| 44. $3x + 9 > 5$ | 45. $5x + 2 \geq 3$ |
| 46. $3x + 6 < 5$ | 47. $5 - 3x > 8$ |
| 48. $9 > 7 - 8x$ | 49. $12 \leq 6 - 2x$ |
| 50. $2x + \frac{1}{2} > 7$ | 51. $9x + \frac{8}{5} \leq \frac{1}{4}$ |
| 52. $\frac{1}{5}x + \frac{9}{4} \geq 8$ | 53. $\frac{1}{3}x + 6 \leq -1$ |
| 54. $7 - \frac{3}{4}x > 1$ | 55. $-\frac{8}{5}x - 14 \leq -2$ |
| 56. $\frac{9}{5}x + 2 < 5x + 3$ | 57. $\frac{8}{3}x + 9 \leq -12x + 6$ |

5 RAZONAMIENTO. Relacionar cada inecuación con su solución.

- | | |
|---|----------------------------------|
| 58. $-2x + 4 \leq 3x + 8$ | a. $(-\infty, 2]$ ✓ |
| 59. $3x + 4 \leq 2x + 6$ | b. $[-\frac{1}{7}, \infty)$ ✓ |
| 60. $\frac{9}{5}x + 6 \leq \frac{1}{4}x + 3$ | c. $[\frac{12}{11}, \infty)$ ✗ |
| 61. $12x + 9 \geq 5x + 8$ | d. $(-\infty, \frac{15}{2}]$ ✓ |
| 62. $\frac{7}{6}x + 4 \leq 3x + 2$ | e. $[-\frac{4}{5}, \infty)$ ✗ |
| 63. $-\frac{4}{5}x + 2 \leq 5 - \frac{6}{5}x$ | f. $(-\infty, -\frac{60}{31}]$ ✓ |

6 RAZONAMIENTO. Marcar con ✓ el conjunto solución correspondiente a cada inecuación cuadrática.

- | | | | |
|---------------------------------|--|---|--|
| 64. $x^2 - x - 6 < 0$ | ☐ $(-2, 3)$ | ☐ $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ | ☐ $[-2, 3]$ |
| 65. $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ | ☐ $(-3, 8)$ | ☐ $(-\infty, 3] \cup [8, \infty)$ | ☐ $[-3, 8]$ |
| 66. $18x - 3x^2 > 0$ | ☐ $(0, 6)$ | ☐ $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ | ☐ $[0, 6]$ |
| 67. $(x + 3)(x^2 - 6x + 8) < 0$ | ☐ $(-3, 2)$ | ☐ $(-\infty, -3) \cup (2, 4)$ | ☐ $[3, 2]$ |
| 68. $6x^2 - 7x - 3 > 0$ | ☐ $(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ | ☐ $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$ | ☐ $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$ |

* PARA PENSAR. Resolver las siguientes inecuaciones.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 69. $\frac{6}{x-1} - \frac{5}{x-2} > 0$ | 70. $\frac{9}{x+3} - \frac{4}{x-5} \leq 0$ | 71. $\frac{5}{x+4} \leq \frac{3}{x+2}$ | 72. $\frac{7}{x+8} \geq \frac{16}{x+6}$ |
| 73. $\frac{x-1}{x^2+2} < 0$ | 74. $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x+1}{(x-1)^2} < 0$ | 75. $\frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{x-x^2} < 0$ | |

Figura 36. Ejercicios página 33

Nótese como en los ejercicios tal y como ya se indicó el nivel de complejidad aumenta de acuerdo con el campo numérico que movilizan las inecuaciones, esto es de los $\mathbb{Z}$ a los $\mathbb{Q}$ además todos los ejercicios manejan una única igualdad lo que de alguna forma es coherente con la presentación que realiza el libro sobre inecuaciones en tanto que en esta no se exponen el tratamiento de inecuaciones con dobles desigualdades.

- ***Categoría de análisis: Tratamiento pedagógico***

Esta categoría se encuentra dividida en tres criterios de análisis a saber: valores que transmite el libro de texto, sistema para-textual e introducción al tema los cuales serán explicados a continuación en su respectivo orden.

valores que transmite, el libro de texto no trasmite ningún valor pues en los diferentes tipos de actividades que propone no tienen en cuenta el trabajo en grupo, lo cual promueve el trabajo individual del estudiante encontrándose palabras como: halla, realiza, resuelve y representa lo cual indica que el estudiantes debe enfrentarse de forma individual a los ejercicios que se plantean en el libro de texto, además el texto carece de un sistema para textual, es decir, no cuenta con ayudas didácticas adicionales como CD páginas de internet adicionales a las cuales el estudiante pueda recurrir para ampliar lo trabajado.

Por su parte la introducción al tema de las inecuaciones lineales, se realiza por medio de la historia de las civilizaciones griegas, se enuncia como estas no consideraban el uso de los números negativos, a raíz de esta historia se explica el primer conjunto numérico el cual se generó por la necesidad de realizar un conteo, luego se explica como la evolución del pensamiento humano permitió concebir otros conjuntos números lo cual da paso al conjunto

$\mathbb{R}$. A continuación se presenta la Figura 37 donde se relata la historia de las civilizaciones griegas.

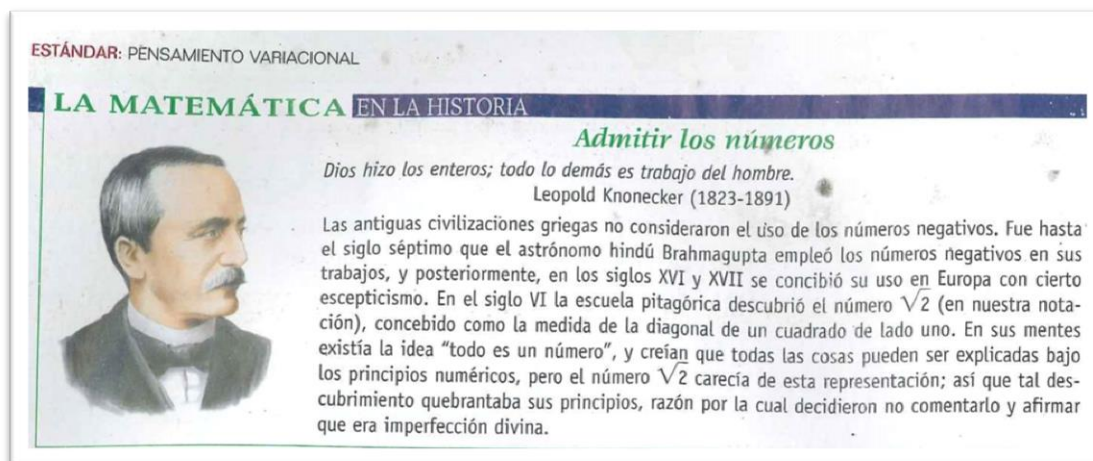


Figura 37. Introducción página 28

Nótese como en el libro de texto se decide iniciar por medio de una historieta para la presentación de los conjuntos, lo que permite que luego se presente de manera formal los conjuntos numéricos para poder hablar de $\mathbb{R}$ y posteriormente de las desigualdades en $\mathbb{R}$.

Es importante anotar que se está haciendo uso de un pasaje histórico para introducir el tema, pero no se está realizando para analizar el concepto, se realiza simplemente a manera de información.

- **Categoría de análisis: lenguaje movilizado**

La tercera categoría dentro de este referente tiene que ver con el lenguaje movilizado en el libro de texto este puede ser lenguaje escrito, gráfico y simbólico.

En el libro de texto predomina el lenguaje escrito, de este se puede decir que cumple con el nivel de sintaxis pues se ajusta al nivel del lector, el discurso que maneja es claro, sencillo y ameno pues sus párrafos no son extensos.

Se puede analizar que en el libro de texto la representación simbólica algebraica es da cuando se enuncian las diferentes propiedades también en la presentación de un concepto en particular el cual es desigualdades en $\mathbb{R}$, además, de ser evidenciada en los diferentes ejercicios, ejemplos, actividades y sus respectivas soluciones que se proponen a lo largo del capítulo.

El libro de texto cuenta con la representación gráfica en particular cuando se presentan los tipos de intervalos (abierto, simiabierto, cerrado, semicerrado, infinito) además, se presenta la representación gráfica en cuento al conjunto solución de las inecuaciones que se proponen como ejercicios resueltos.

3.4.2.3 Referente curricular

- **Categoría de análisis: Propuesta curricular**

En esta última categoría al igual que en el libro de texto analizado con anterioridad se tienen en cuenta tres criterios que permiten analizar en el libro de texto lo siguiente: la presencia de situaciones problemáticas y en caso de haberlas los diferente contextos en que se presentan o determinan dichas situaciones, si el texto promueve procesos generales de aprendizaje y si se abordan aspectos del pensamiento variacional y numérico para el estudio de las inecuaciones lineales con una incógnita real.

Respecto a la presencia de situaciones problemáticas en la unidad concerniente al objeto de estudio de este trabajo, se evidencia que no se presentan dichas situaciones se plantean

actividades que conducen a los estudiantes a un proceso de ejercitación de procedimientos pero ninguna actividad por medio de situaciones problemáticas en un contexto determinado, al libro carecer de situaciones problemáticas se afirma que no moviliza diferentes contextos, como se mencionó anteriormente las situaciones problemáticas y los contextos se encuentran ligados.

Sin embargo al finalizar el capítulo se presenta una página llamada solución de problemas, la cual consta de 20 ejercicios y 2 situaciones problemáticas en un contexto de la vida diaria del estudiante, se considera que además de estas dos situaciones ser escasas para abordar el concepto de inecuaciones lineales, se encuentran ubicadas en un lugar poco apropiado de acuerdo a lo planteado por el MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, en cuanto a la enseñanza de los conceptos matemáticos por medio de situaciones problemáticas y no estas presentarse al final para evidenciar una comprensión de dichos conceptos en los estudiantes como se propone en el libro de texto, en la Figura 38 se presenta la página llamada solución de problemas.

ESTÁNDAR: PENSAMIENTO VARIACIONAL

Solución DE PROBLEMAS

ELEGIR DATOS QUE CUMPLAN UNA CONDICIÓN DADA

Escribir intervalos M y N tales que el resultado de realizar la operación indicada entre ellos, sea el intervalo que se muestra en la gráfica.

- $M \cup N$
- $M \cap N$
- $M - N$
- $N - M$
- $(N \cap M)'$
- $M' \cup N'$

ENCONTRAR EL ERROR

Subrayar el error o los errores que se cometieron al resolver cada inecuación.

- $5x + 9 < 4$
 $5x < 4 - 9$
 $5x < -5$
 $x < \frac{5}{5}$
 $x < 1$
Solución $(-\infty, 1)$
- $-2x + 6 \geq 8$
 $-2x \geq 8 - 6$
 $-2x \geq 2$
 $x \geq \frac{2}{-2}$
 $x \geq -1$
Solución $[-1, \infty)$
- $-1 < 3x - 8 < 6$
 $-1 + 8 < 3x < 6 + 8$
 $7 < 3x < 14$
 $\frac{7}{3} < x < \frac{14}{3}$
 $\frac{7}{3} < x < 2$
Solución $(\frac{7}{3}, 2)$
- $x - 7 < \frac{1}{3}x + 6$
 $x - \frac{1}{3}x < 6 + 7$
 $\frac{2}{3}x < 13$
 $x < \frac{39}{2}$
Solución $(\frac{39}{2}, \infty)$

VERIFICAR AFIRMACIONES

Si $m < n$ y $m \in \mathbb{Z}^-$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- $m + 3 < n + 3$
- $9 - m < 9 - n$
- $3m < 3n$
- $-m < -n$
- $\frac{1}{4}m < \frac{1}{4}n$
- $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

Demstrar

- Si $a < b$, entonces, $a < \frac{a+b}{2} < b$
- Si $0 < a < b$, entonces, $a^2 < b^2$
- Si $0 < a < b$, entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

EXTRAER DATOS DE UNA GRÁFICA

20. A partir del siguiente rectángulo, determinar qué valores puede tomar a si el área varía entre 50 y 60. Es decir, $50 \leq A \leq 60$.

$10 < b < 12$

EXTRAER DATOS DE UN TEXTO

21. El costo C de funcionamiento de una flota de camiones está dado por $C = 0,27m + 3.500$
 C = dólares m = millas

Si la compañía quiere que el costo por camión sea menor que 10.000 dólares, ¿cuál debe ser el tope por camión?

22. El precio unitario P de venta de un producto está dado por $P = 1.500 - 0,5x$ pesos, donde x es la cantidad de productos vendidos.

¿Cuántas unidades deben ser vendidas para que el ingreso por la venta de este producto sea mayor que \$300.000?

34

Figura 38. Página solución de problemas Nuevas Matemáticas 11

Se evidente en la Figura 38 que en el bloque de ejercicios propuestos en la página solución problemas se presentan únicamente dos situaciones, de cada una se desprende una pregunta la cual permite al estudiante realizar un proceso de razonamiento en cuanto a buscar estrategias para la solución de la situación planteada y poder realizar un proceso de comunicación al explicar el procedimiento realizado.

Respecto al segundo criterio que permite determinar si el libro favorece los procesos generales de aprendizaje en los estudiantes de acuerdo al capítulo concerniente al objeto de estudio en este trabajo se logró analizar que no se favorecen estos procesos ya que el libro centra su atención en uno solo de estos el cual es elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos dejando de lado los demás procesos como si estos no fuesen importantes.

En los ejercicios que propone el libro aparecen en la parte superior algunos de los procesos generales que según él se potencia en los estudiantes al realizarlos, sin embargo se logra evidenciar que los ejercicios propuestos se quedan cortos en promover los procesos que indican ya que se enfocan en un proceso de ejercitación que no permiten al estudiante justificar las estrategias utilizadas comunicando y modelando estas. Como se evidencia a modo de ejemplo en la Figura 39.

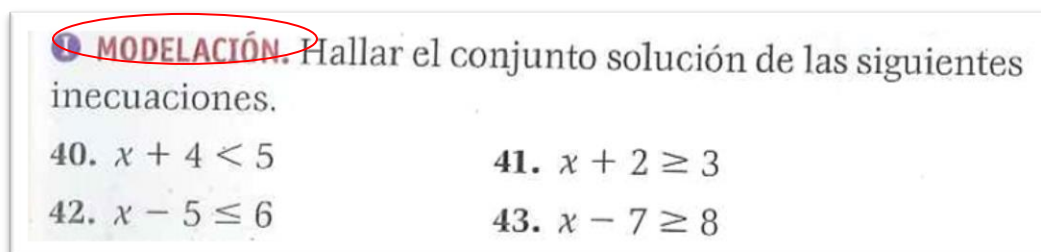


Figura 39. Tomada de Nuevas Matemáticas 11

La modelación se encuentra estrechamente ligada a la resolución de problemas, en este sentido en el ejercicio propuesto no se plantea ningún tipo de problema a resolver por ende no se está potenciando el proceso de modelación.

De esta manera el libro de texto *Nuevas matemáticas 11* en el capítulo concerniente a las inecuaciones carece de promover procesos generales de aprendizaje en los estudiantes, aunque

son mencionados algunos de los procesos generales los ejercicios propuestos no dan cuenta de diferentes tipos de actividades que permitan el desarrollo de dichos procesos generales, por el contrario en la página llamada solución de problemas planteada al final del capítulo se evidencia en algunos de los ejercicios que los estudiantes deben realizar un proceso de razonamiento y comunicación ya que deben encontrar el error presentado en algunos de los ejercicios y para ello deben argumentar y justificar dicho error después de realizar las operaciones pertinentes, para luego comunicarlo.

Respecto al tercer y último criterio de análisis, concerniente así el libro de texto promueve el desarrollo del pensamiento variacional y numérico se logra evidenciar que no se presentan realmente situaciones de variación y cambio para el estudio de las inecuaciones que permitan a los estudiantes pensar dinámicamente, no aportando el libro de texto en el desarrollo del pensamiento variacional, también se queda corto en el desarrollo del pensamiento numérico en los estudiantes, no permite el desarrollo de habilidades y destrezas numéricas y aunque se trabaja el concepto de los $\mathbb{R}$, no se presentan actividades que permitan al estudiante trabajar los números en diferentes contextos. A manera de encabezado en cada una de las páginas impares aparece el pensamiento el cual es desarrollado a lo largo del capítulo, pero se confunden los estándares básicos con los pensamientos que se estipulan dentro de los Lineamientos Curriculares. Tal como se evidencia en la Figura 40.

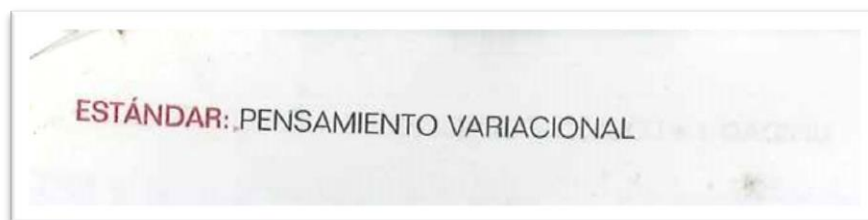


Figura 40. Tomada de Nuevas Matemáticas 11

Es así como se evidencia una confusión en el libro de texto en cuanto a llamar Estándar a los diferentes pensamientos estipulados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Gracias al análisis realizado a los dos textos escolares *Hipertexto Matemáticas 11* y *nuevas Matemáticas 11*, se lograron caracterizar las propuestas de enseñanza de los dos libros de textos.

Los dos libros de textos se caracterizan por tener coherencia y articulación al momento de presentar los conceptos, encontrándose así relación entre los conceptos presentados con anterioridad a la unidad donde se expone el objeto central de este trabajo y los nuevos conceptos que se presentan en esta unidad, en tanto que para comprender unos se hace necesario tener un conocimiento previo que en el mismo libro de texto se proporciona a los estudiantes. A su vez los libro de texto presentan las propiedades fundamentales para el estudio de las inecuaciones lineales pero no hace explícito el papel que cumplen las propiedades al momento de hacer uso de ellas para la solución de inecuaciones lineales.

Por otro lado al momento que los dos libros de textos presentar los conceptos, definiciones y ejemplos el tipo de lenguaje que privilegia es el expositivo, ya que solo se queda en las exposiciones de los conceptos y la introducción que se le hace a los temas es de tipo nominal sin proponer a los estudiantes situaciones problemáticas en un contexto determinado, enfocándose

en la ejercitación de procedimientos, dejando de lado los demás procesos generales como el razonamiento, la resolución de problemas, la modelación y la comunicación.

Otro de los aspectos que caracteriza las propuestas de enseñanzas de los libros de texto es que sus marcos de ejercitación es amplio centrado de esta manera su atención en los ejercicios que se propone, pero se descuida el marco de ejemplificación ya que los ejemplos presentados son escasos, encontrándose de esta manera un desequilibrio entre ambos marcos.

Ambas propuestas de enseñanza presentaron articulación con los conceptos planteados con anterioridad y los nuevos conceptos, sin embargo la presencia de situaciones problemas para el estudio de las inecuaciones lineales con una incógnita real es escaso, y el uso explícito de algunas propiedades al momento de presentar los ejemplos no se hace.

Capítulo IV: Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones relacionadas con el desarrollo de este trabajo, el cual ha centrado su atención en caracterizar las dos propuestas de enseñanza de los dos libros de texto objetos de análisis, en torno al concepto de inecuación lineal con una incógnita real. Así mismo se presentan algunas recomendaciones, la cuales pueden ser puestas en consideración con el fin de mejorar dichas propuestas, ya que parte de los análisis realizados

4.1 Conclusiones

El objetivo general de este trabajo es aportar algunas reflexiones didácticas a partir de la caracterización de las propuestas de enseñanza que presentan dos textos escolares de la educación colombiana en torno a las inecuaciones lineales con una incógnita real e identificar posibles contrastes y similitudes entre ambas propuestas, tomando en consideración los aspectos fundamentales de los referentes expuestos en el capítulo II y los resultados del análisis realizado en el capítulo III, es importante aclarar que las conclusiones están dadas en concordancia con el objetivo general y cómo consecuencia del análisis realizado, se detallaron algunos aspectos relevantes del trabajo para ello se presentan las conclusiones en consideración de cada objetivo específico.

En esta dirección fue necesario la documentación de unos referentes conceptuales de orden matemático, didáctico y curricular, logrando establecer unos parámetros para la caracterización de las propuestas de enseñanzas de los dos textos escolares en torno a las inecuaciones lineales

con una incógnita real, a través de la elaboración de una rejilla de análisis donde se articularon cada uno de los referentes ya mencionados.

Es así como a partir de los análisis realizados a los dos textos escolares se logró observar que las propuestas de enseñanzas abordadas en los textos escolares se caracterizan por tener coherencia y articulación al momento de presentar los conceptos, encontrándose así una relación entre los conceptos presentados con anterioridad a la unidad donde se expone el objeto central de este trabajo y los nuevos conceptos que se presentan en esta unidad, en tanto que para comprender unos se hace necesario tener un conocimiento previo de los otros conceptos que en el mismo libro de texto le proporciona a los estudiantes. Sin embargo los dos textos escolares presenta de manera rápida el trabajo con las inecuaciones lineales, solo presentan la definición de inecuaciones lineales y al finalizar la unidad se proponen una serie de ejercicios para que el estudiante los realice.

Así mismo, se logró evidenciar el usos de las propiedades, sin embargo los dos libros de texto se quedan en la presentación de estas propiedades sin hacer usos explícito del papel que cumplen estas en la solución de las inecuaciones lineales, es por ello que el papel que desempeña el docente no se puede ver limitado solo a lo que presenta los libros de textos sino que por el contrario debe de ser articulado con otros tipos de recursos que permitan hacer más enriquecedora su práctica pedagógica.

La propuesta de los libros de texto en cuanto a situaciones problemáticas en un contexto determinado es escasa, enfocándose en la ejercitación de procedimientos dejando de lado los demás procesos generales como el razonamiento, resolución de problemas, modelación y comunicación, además potencia muy poco el pensamiento numérico y variacional, en tanto que

el estudio de fenómenos de variación es escaso al igual que el desarrollo del pensamiento numérico. De esta misma manera, se puede ver como los dos libros textos objeto de análisis centra su atención en el marco de ejercitación, descuidando el marco de ejemplificación ya que los ejemplos presentados son escasos, encontrándose de esta manera un desequilibrio entre ambos marcos y es así como la falta de ejemplos que promueven los dos libros de textos dejan de lado los diferentes procesos generales,

A partir de los tres referentes y de todo lo expuesto durante el trabajo se puede decir que los libros de textos son un apoyo para los docentes sin desconocer los diferentes recursos a los que también alude para el desarrollo de sus clases.

4.2 Recomendaciones

Partiendo de la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y considerando que la resolución de problemas de ha sido vista como un proceso central de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática, es necesario que los docentes no se limiten a lo planteado en los textos escolares ya que en el análisis realizado se evidencio que los textos no incorporan en un todo coherente lo planteado en las propuesta curriculares del MEN.

No todos los libros de textos vienen acompañados un sistema para textual que sirva de apoyo para el docente y el estudiante, es aquí donde cobra importancia la autonomía y criterio de los docentes en cuanto al tipo de recurso que utiliza tanto para la planeación cómo ejecución de sus clases, se recomienda a los docentes no dejar de lado un recurso fundamental y que ha cobrado importancia en la educación colombiana como lo es el uso de las TIC, es importante que los

docentes complementen el trabajo con este ya que permite crear ambientes de aprendizaje enriquecidos desarrollando competencias en los estudiantes.

Referencias bibliográfica

- Apóstol, T. (1988). *Calculus*. (14-20) Bogotá: reverté editores.
- Arbeláez, G., Guacaneme, E., Arce, J., & Sánchez, G. (1999). *Análisis de Textos Escolares*.
- Azcarate, P. (2006). Tendencias didácticas en libros de textos de matemáticas para la ESO. *Revista de educación* (340), 341-378.
- Carreño, J, Pantoja M, & Pineda D. (2011). Variación de la representación gráfica y su incidencia en la solución de inecuaciones lineales con valor absoluto (tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Cortés, R. V. (2006). La Transposición Didáctica: Un Modelo Teórico para investigar los estatus de los objetos matemáticos. Recuperado de <http://biblioteca.uahurtado.cl/ujah/Reduc/pdf/pdf/mfn313.pdf>
- Cumbal, A. & Echeverry, M. (2015). Análisis discursivo de dos libros de textos de matemáticas del grado tercero de primaria en torno al campo conceptual multiplicativo (tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Esteban, M. P. S. (2003). Investigación cualitativa en educación. *Fundamentos y tradiciones*. Madrid: Mc Graw and Hill Interamericana.
- Fory, O. (2010). Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares (Tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Garrote, M. Hidalgo, M. J. & Blanco, L. J (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma* 46. 37 – 44
- Heredia, M. & Palacios, M. (2014). Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje (Tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.

- Maroto, A. P. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación*, 37(2), 1-16.
- Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN, Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciencias Ciudadanas. Santa Fe de Bogotá Colombia.
- Ospina, M. & Salgado, J. (2011). Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, entorno al campo conceptual multiplicativo (tesis de pregrado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Santos, L. M. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. *Mathesis*, 9(4), 419-432.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Martin, L. Puig, M.
- Sierra & M. M. Socas (S.f), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice – Horsori.
- Velasco, M. (2011). Aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva pluriregistro (tesis de maestría). Universidad del valle, Cali, Colombia.

Anexos

ANEXO 1: *Encuesta realizada a los docentes*



UNIVERSIDAD DEL VALLE- SEDE NORTE DEL CAUCA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

PROGRAMA: LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS



Apreciado maestro, comedidamente solicitamos su colaboración para el desarrollo de la siguiente encuesta, la cual tiene como objetivo identificar cuáles son los libros de textos más utilizados por los docentes para la enseñanza de las inecuaciones lineales con una incógnita real. Esta encuesta será insumo importante para la realización del trabajo de grado *Enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales con una incógnita real; un análisis a la propuesta didáctica presentada en algunos textos escolares de la educación colombiana*, desarrollado por Diana Paola Balanta Gómez (código de estudiante 1157743) y Yesica Vanessa Garcés carabalí (código 1257083), de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas Universidad del Valle -Sede norte del cauca.

A continuación se procede con el cuestionario, por favor desarróllelo de acuerdo a su práctica docente.

Nombre: _____

Institución educativa donde desarrolla su práctica docente:

Indique si es de carácter ¿público o privado? _____

Indique el municipio al cual pertenece la institución educativa donde desarrolla su práctica docente.

1. ¿Tiene en cuenta la editorial del libro de texto que selecciona para la actividad de aula en el área de matemáticas? _____

¿Porque?

2. Indique ¿cuáles son los libros de textos más usados por usted para la enseñanza de las inecuaciones lineales con los estudiantes de grado 11°?

3. ¿Qué otro recurso diferente al libro de texto utiliza para la enseñanza de las inecuaciones lineales con los estudiantes?

ANEXO 2: paginas correspondientes al estudio de las inecuaciones lineales en el libro de texto Nuevas Matemáticas 11

ESTÁNDAR: PENSAMIENTO VARIACIONAL

LA MATEMÁTICA EN LA HISTORIA



Admitir los números

Dios hizo los enteros; todo lo demás es trabajo del hombre.

Leopold Knonecker (1823-1891)

Las antiguas civilizaciones griegas no consideraron el uso de los números negativos. Fue hasta el siglo séptimo que el astrónomo hindú Brahmagupta empleó los números negativos en sus trabajos, y posteriormente, en los siglos XVI y XVII se concibió su uso en Europa con cierto escepticismo. En el siglo VI la escuela pitagórica descubrió el número $\sqrt{2}$ (en nuestra notación), concebido como la medida de la diagonal de un cuadrado de lado uno. En sus mentes existía la idea "todo es un número", y creían que todas las cosas pueden ser explicadas bajo los principios numéricos, pero el número $\sqrt{2}$ carecía de esta representación; así que tal descubrimiento quebrantaba sus principios, razón por la cual decidieron no comentarlo y afirmar que era imperfección divina.

TEMA 3

LOS NÚMEROS REALES

PENSAMIENTO NUMÉRICO



Diagrama 12

PARA RESPONDER

¿A qué es igual: $\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$, $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{I}^-$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}^+$?

ALGO IMPORTANTE

Entre dos números reales a y b se cumple solamente una de las siguientes proposiciones:

- (i) $a < b$,
- (ii) $a = b$,
- (iii) $a > b$.

Luego, $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado.

Los conjuntos numéricos son los elementos iniciales con los cuales a lo largo de la historia se ha hecho matemáticas.

El primer conjunto numérico generado, a partir de la necesidad de hacer conteo, fue N_0 (en su notación actual) $N_0 = N \cup \{0\}$.

A medida que evolucionó el pensamiento humano, se fueron concibiendo otros conjuntos numéricos como los siguientes:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Una característica común de los elementos de los conjuntos anteriores es que para cada uno de ellos se puede encontrar una expresión decimal (diagrama 12).

Esta es precisamente la característica que determinó en la historia la construcción de un nuevo conjunto numérico: los irracionales.

A partir de la solución de la ecuación $a^2 - 2 = 0$ se encuentran los valores $a = \pm\sqrt{2}$, para los cuales no existe un cociente de números enteros de la forma $\frac{a}{b}$. Así, se dice que, entre otros, para $\sqrt{2}$ no se encuentra una expresión decimal

finita o infinita periódica.

Los números que poseen una expansión decimal infinita no periódica conforman el conjunto de los números irracionales, denotado con la letra $\mathbb{I}$. Algunos números irracionales son: $\sqrt{2} = 1,414213\dots$, $\pi = 3,1415\dots$, $e = 2,7182\dots$, $\sqrt[3]{2} = 1,2599\dots$, entre otros.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se forma a partir de la unión de los números racionales $\mathbb{Q}$ y los irracionales $\mathbb{I}$. Simbólicamente: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Algunas características de los números reales son:

- A cada punto sobre la recta le corresponde un número real y viceversa (correspondencia biunívoca).
- Entre dos números reales siempre es posible encontrar otro número real (densidad).
- $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado.

ALGO IMPORTANTE

El intervalo $(-\infty, \infty)$ es equivalente al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

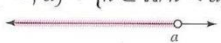
3.1. Desigualdades en $\mathbb{R}$

Una desigualdad es una expresión de la forma $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ en la que a y b son números reales.

3.1.1. Intervalo

Un intervalo es un subconjunto (no vacío) de los números reales.

A continuación se muestran las clases de intervalos.

(a, b)	Infinitos
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ 	A pesar de que todos los intervalos son infinitos, los siguientes reciben ese nombre dada la naturaleza de sus extensiones. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ 
$[a, b) \quad (a, b]$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$ 	$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ 
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ 	$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ 
$[a, b]$ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ 	$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ 

3.1.2. Operaciones entre intervalos

Dados dos intervalos A y B es posible considerar las operaciones $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \Delta B$ y A' . El conjunto universal será el conjunto de los números reales.

Ejercicio resuelto**PARA RESPONDER**

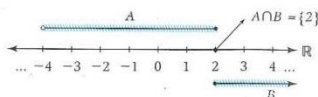
¿Al operar los intervalos se obtiene un nuevo intervalo?

Dados los intervalos $A = (-4, 2]$, $B = [2, \infty)$, $C = (-1, 3)$ hallar:

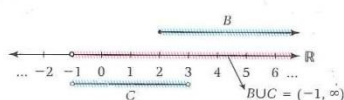
- a. $A \cap B$ b. $B \cup C$ c. B' d. $B - C$

SOLUCIÓN

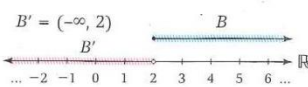
a.



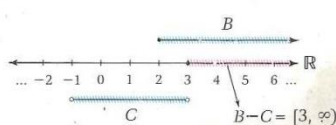
b.



c.



d.



3.2. Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad en la cual intervienen una o más variables.

Resolver una inecuación es hallar los valores de las variables que hacen verdadera la desigualdad. Al conjunto de dichos valores se le llama **conjunto solución**.

Ejercicio resuelto

ALGO IMPORTANTE

Sean a, b y c números reales:

(1) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

(2) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$, y, $a - c \leq b - c$.

(3) Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $ac \leq bc$ y $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

(4) Si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$ y $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Raíz de un polinomio

La raíz de un polinomio $P(x)$ es el valor (o los valores) de x para el cual (los cuales) $P(x) = 0$.

Ejemplo: sea $P(x) = x^2 + x - 6$

$P(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 0$

$P(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$, luego:

$x = -3$ y $x = 2$ son raíces del polinomio $P(x) = x^2 + x - 6$.

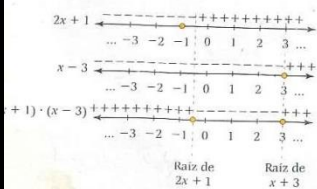


Figura 1

1. Hallar el conjunto solución de la inecuación $3x - 4 < x + 2$

SOLUCIÓN

Usando las propiedades de las desigualdades se tiene que:

$3x - x \leq 4 + 2$, es decir, $2x \leq 6$; luego $x \leq 3$. El conjunto solución es:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$. Es decir, la solución son todos los valores en $(-\infty, 3]$

2. Hallar el conjunto solución de cada inecuación.

a. $2x^2 - 5x - 3 < 0$

b. $\frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$

SOLUCIÓN

a. Se contemplarán dos métodos: el analítico y el gráfico.

Método analítico:

$2x^2 - 5x - 3 < 0$, se tiene que: $(2x + 1) \cdot (x - 3) < 0$ (factorizando la expresión).

Al ser $(2x + 1) \cdot (x - 3) < 0$ se consideran dos casos:

Caso 1: $2x + 1 > 0 \wedge x - 3 < 0$

Luego, $2x > -1 \wedge x < 3$

$x > -\frac{1}{2} \wedge x < 3$

$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \cap (-\infty, 3)$

Solución: $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

Caso 2: $2x + 1 < 0 \wedge x - 3 > 0$

Luego: $2x < -1 \wedge x > 3$

$x < -\frac{1}{2} \wedge x > 3$

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cap (3, \infty)$

$\cup$ Solución: $\{\}$

Uniendo las soluciones de ambos casos el conjunto solución es $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

Método gráfico:

Se hallan las raíces de los factores de la expresión factorizada y se ubican en la recta real así:

Antes de cada una de sus raíces las expresiones $2x + 1$ y $x - 3$ son negativas. Después, son positivas.

Al multiplicar los signos correspondientes a cada factor, teniendo en cuenta las raíces, se requiere que $(2x + 1) \cdot (x - 3) < 0$, lo cual sucede en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

Luego, la solución son todos los valores en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

ANEXO 3: paginas correspondientes al estudio de las inecuaciones lineales en el libro de texto Hipertexto Matemáticas 11

Estándar: pensamiento numérico



Números reales

Los **conjuntos numéricos** fueron contruidos debido a diferentes necesidades humanas y matemáticas.

El primer conjunto conocido es el de los naturales ($\mathbb{N}$) el cual surgió principalmente de la necesidad de contar objetos.

Luego, surgió el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) como solución de ecuaciones de la forma $x + n = m$ donde $n, m \in \mathbb{N}$. Posteriormente aparecieron los números racionales ($\mathbb{Q}$) como solución de ecuaciones de la forma $px = q$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.

Una característica común a los elementos de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ es que para cada uno de ellos existe una expresión decimal finita o infinita periódica. Sin embargo, al tratar de resolver ecuaciones de la forma $x^2 = p$, donde p es primo, por ejemplo $x^2 = 2$, surgen expresiones decimales infinitas no periódicas.

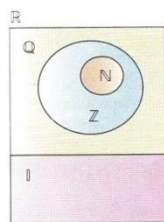
El conjunto formado por los números con expresiones decimales infinitas no periódicas recibe el nombre de **conjunto de los irracionales** y se simboliza con la letra $\mathbb{I}$.

Algunos ejemplos de números irracionales son: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , e ...

Finalmente, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se forma a partir de la unión de los racionales y los irracionales.

La unión entre el conjunto de los racionales y el conjunto de los irracionales es el **conjunto de los números reales**, que se simboliza $\mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

El siguiente diagrama muestra la relación entre los conjuntos numéricos.



```

graph TD
    Decimales --> Finitos
    Decimales --> Infinitos
    Infinitos --> Periodicos
    Infinitos --> NoPeriodicos
    Periodicos --> Puros
    Periodicos --> Mixtos
    
```

Algunas características del conjunto de los números reales son:

- Al representar el conjunto de los números reales en una recta se tiene que a cada punto de la recta le corresponde un único número real, y viceversa, a cada número real le corresponde un único punto de la recta.
- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es ordenado. Entre dos números reales a y b se cumple solo una de las siguientes relaciones:

$$a < b$$

$$a = b$$

$$a > b$$
- Entre dos números reales siempre es posible encontrar otro número real.

Por ejemplo, entre 1 y 2 está 1,5; entre 1 y 1,5 está 1,12; entre 1 y 1,12 está 1,001; entre 1 y 1,001 está 1,0001.

RECUERDA QUE...

Los conjuntos numéricos son:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

© Santillana | 27



Desigualdades en $\mathbb{R}$

Una **desigualdad** entre dos números reales a y b es una expresión de la forma $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

En las desigualdades se cumplen las siguientes propiedades:

- Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
- Si se suma o resta un mismo número en los dos miembros de la desigualdad el sentido de la desigualdad se conserva. Es decir, si $a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad por un número positivo el sentido de la desigualdad se conserva. Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad por un número negativo el sentido de la desigualdad se invierte. Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.

Una desigualdad entre números reales se puede representar con un intervalo.

Un **intervalo** es un subconjunto (no vacío) de números reales. Las clases de intervalos se muestran a continuación:

Abierto	Infinito
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ 	$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ 
Semiabierto	$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ 
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$ 	$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ 
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ 	$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ 
Cerrado	El intervalo $(-\infty, \infty)$ representa el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y corresponde a toda la recta real.
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ 	

Una desigualdad en la que hay una o más incógnitas se denomina **inecuación**. Resolver una inecuación consiste en hallar los valores de la incógnita que hacen verdadera la desigualdad. Al conjunto de dichos valores se le llama **conjunto solución**.

Normalmente, el conjunto solución de una inecuación es un intervalo o unión de intervalos. Así por ejemplo, $x - 5 > -7$ es una inecuación y su solución es el intervalo $(-2, \infty)$, pues si se reemplaza x por cualquier valor mayor que -2 , la desigualdad es verdadera.

Inecuaciones

Una desigualdad en la que intervienen una o más variables se denomina **inecuación**.

Resolver una inecuación consiste en hallar los valores que hacen verdadera la desigualdad. Al conjunto de valores se le llama **conjunto solución**.

Por ejemplo, la desigualdad $x + 5 < 2$ es una inecuación, al realizar operaciones y resolver se obtiene que $x < -3$, esto se puede expresar en forma de conjunto como $S = \{x \in \mathbb{R} / x < -3\}$, en forma de intervalo se escribe $(-\infty, -3)$ y en forma gráfica es:



Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ o $ax^2 + bx + c \leq 0$, con $a \neq 0$, recibe el nombre de **inecuación cuadrática**.

Por ejemplo, la inecuación $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ es cuadrática porque el mayor exponente de x es 2.

Para resolver una inecuación cuadrática se aplican las propiedades de las desigualdades hasta obtener una expresión algebraica en un miembro de la inecuación y cero en el otro miembro. Luego, se factoriza la expresión si es posible y se aplican las propiedades de las desigualdades para hallar el conjunto solución.

Cuando la expresión algebraica no se puede factorizar se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se expresa la inecuación obtenida como una ecuación.
- Segundo, se halla la solución de la ecuación utilizando la fórmula cuadrática.
- Tercero, se ubican las soluciones en una recta y se toman valores en cada intervalo para comprobar si son solución de la inecuación. Si un valor es solución, el intervalo al que pertenece es solución de la inecuación.

Ejemplos

① Resolver la inecuación $x^2 - 8 < 2x$.

$$x^2 - 8 < 2x \quad \text{Se aplican propiedades de las desigualdades.}$$

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$(x - 4)(x + 2) < 0 \quad \text{Se factoriza.}$$

Luego, se determinan dos casos:

$$x - 4 < 0 \text{ y } x + 2 > 0$$

$$(-\infty, 4) \cap (-2, \infty) = (-2, 4)$$

$$x - 4 > 0 \text{ y } x + 2 < 0$$

$$(4, \infty) \cap (-\infty, -2) = \emptyset \quad \text{Se aplica la propiedad } a, b < 0 \text{ si } a < 0 \wedge b > 0.$$

$$(-2, 4) \cup \emptyset = (-2, 4)$$

Luego, la solución de la inecuación $x^2 - 8 < 2x$ es el intervalo $(-2, 4)$.

② Hallar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - x - 3 \geq 0$.

Primero, se convierte la inecuación en ecuación de modo que $x^2 - x - 3 = 0$ y se resuelve así:

$$x \approx -1,3 \text{ y } x \approx 2,3$$

Segundo, las soluciones encontradas dividen la recta en tres intervalos, entonces, se toma un valor en cada intervalo y se determina qué intervalos cumplen la desigualdad. Así, se tiene por ejemplo, que para $x = -2$ y para $x = 3$ la inecuación se cumple. En cambio, para $x = 0$ la inecuación no se cumple. Por tanto, el conjunto solución es:

$$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

RECUERDA QUE

Las propiedades de las desigualdades son:

- Si $a < b$, $b < c$ entonces, $a < c$

- Si $a < b$, entonces, $a + c < b + c$
 $a - c < b - c$

- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces, $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

$$ax^2 > 0$$

$$x^2 < 1$$