



ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE UN SISTEMA DE STOKES NO HOMOGÉNEO PLANAR CON DENSIDAD Y VISCOSIDAD VARIABLES

Edward Duván González Betancourth

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
Julio 2024

ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE UN SISTEMA DE STOKES NO HOMOGÉNEO PLANAR CON DENSIDAD Y VISCOSIDAD VARIABLES

Edward Duván González Betancourth
Código estudiante 202109503

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar por el título de
Magister en ciencias matemáticas

Director:
Dr. Juan Carlos Muñoz Grajales

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
Julio 2024

A mi querida madre.

Agradecimientos

A mi querida madre por su infinita paciencia, a mi prima Liliana por apoyarme en todo el proceso y siempre escucharme y al profesor Juan Carlos por su sabiduría en el proceso de enseñanza e investigación.

Contenido

Agradecimientos	v
Resumen	ix
Introducción	xi
1 Preliminares	1
1.1 Definiciones y resultados básicos	1
1.2 Espacios de funciones	2
1.2.1 Espacios de funciones p-integrables	2
1.2.2 Espacios de Sobolev	3
1.2.3 Espacios de divergencia libre o espacios solenoidales	7
1.2.4 Espacio traza y el operador levante de traza	10
1.3 Resultados básicos de análisis	11
1.3.1 Teoremas de integración	11
1.3.2 Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional	12
1.3.3 Dominios de tipo Lipschitz	13
1.3.4 Convergencias débil y fuerte en espacios de Banach	14
1.3.5 Teoremas de punto fijo y teorema de Lax-Milgram	15
2 Formulación débil del sistema de Stokes no homogéneo con condiciones de frontera mixtas	17
2.1 Sistema de Stokes no homogéneo con condiciones de frontera mixta	17
2.1.1 Observaciones sobre las ecuaciones que conforman el sistema de Stokes	18
2.1.2 Condiciones de frontera	19
2.2 Formulación integral del problema de Stokes	21
2.2.1 Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional	22
2.2.2 Formulación débil	25

3	Existencia y unicidad del sistema de Stokes no homogéneo con condiciones de frontera mixtas	29
3.1	Existencia de soluciones débiles	29
3.2	Unicidad de soluciones débiles	36
4	Simulación numérica del sistema de Stokes con condiciones de frontera mixtas	39
4.1	Esquema numérico para el sistema de Stokes no homogéneo con densidad constante	39
4.2	Experimentos numéricos	41
5	Conclusiones	45
A	Apéndice	47
	Bibliografía	51

Resumen

En este trabajo de grado estudiamos el sistema de Stokes no homogéneo estacionario, bidimensional con densidad y viscosidad variables en un dominio planar $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ en forma de canal rectangular estudiado en [4], el cual describe el flujo de un fluido viscoso en un canal rectangular tomando en cuenta los efectos de fricción contra las paredes del canal. La estrategia es reformular el sistema diferencial original en una formulación integral escribiendo la densidad en términos de la función de corriente, para la cual se establece la existencia y unicidad de soluciones débiles con ayuda de los teoremas de punto fijo de Schauder. Además, se deduce otra formulación integral apropiada para el sistema de Stokes, para la cual se facilita la implementación de un esquema numérico basado en el método de los elementos finitos, utilizando la librería FeniCS sobre Python. Finalmente, se presentan los resultados de experimentos numéricos para algunos valores constantes de la densidad y viscosidad utilizando el esquema numérico propuesto.

Palabras claves: Sistema de Stokes, flujo de fluido viscoso, dominio planar, teorema de Lax Milgram, teorema del punto fijo de Schauder, formulación integral, simulaciones numéricas.

Introducción

En la vida cotidiana los canales de drenaje presentan sedimentos en su fondo que al transcurrir algún tiempo dan lugar a un fondo lodoso, por donde en temporadas de lluvias debe correr agua lodosa con residuos sólidos en muchas ocasiones, dando lugar al flujo de un fluido con viscosidad variable, en el cual existe una fricción entre el flujo y el fondo. Una de las primeras personas en estudiar este tipo de flujo fue Navier en [24] y más adelante este tipo de fenómeno fue justificado como un problema de capa límite en los trabajos realizados por Jäger-Mikelić [18] y [19] [23]. Este fenómeno puede ser modelado de manera simplificada mediante el llamado sistema de Stokes [4].

El análisis de las ecuaciones de Stokes bajo condiciones de fricción en la frontera está motivado físicamente, dado que estas condiciones tienen más sentido que las clásicas de tipo Dirichlet; además algunos fenómenos naturales parecen requerir condiciones límites que permitan el deslizamiento (ver Fujita [16] [15]), por ejemplo el flujo de sangre en la vena de un paciente que padece esclerosis arterial, el flujo de hierro saliendo de una fundición entre otros; una aplicación está dada en [26] y existen algunos trabajos interesantes de simulaciones de fenómenos ecológicos y ambientales realizados por Kawarada [3].

Los modelos de tipo Stokes con viscosidad constante y condiciones tipo Dirichlet ya han sido estudiados en algunos textos, por ejemplo en [5]. Sin embargo, en [4] los autores consideran un modelo Stokes donde la viscosidad y densidad pueden ser variables. Para establecer los resultados teóricos al respecto, se apoyan en la idea de Frolov [14], con la cual expresan la densidad del fluido en términos de función la corriente, que junto con la escogencia de espacios funcionales apropiados, permiten escribir una formulación integral para el sistema en términos solamente de la velocidad del fluido. Esta estrategia usando la función de corriente para el estudio de modelos del tipo Stokes ya fue considerada por ejemplo en [6].

En el presente trabajo de grado nuestros objetivos son dos: el primero es completar los detalles de las pruebas de existencia y unicidad de soluciones débiles del sistema de Stokes

no homogéneo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})] + \nabla \mathbf{p} = \rho \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

estudiado en [4], donde Ω es una región rectangular, y con condiciones de frontera tipo Dirichlet, de deslizamiento y de impermeabilidad. Esta constituye la primera contribución de esta investigación. El segundo objetivo es construir una formulación integral del sistema anterior más apropiada para la implementación numérica mediante la estrategia de elementos finitos [11], utilizando rutinas de la librería de FeniCS [21], [13] y [20] sobre Python. Es importante destacar que en la literatura disponible por el autor no se encontraron trabajos sobre la implementación numérica del problema (1) con condiciones de frontera con efectos de fricción incluidos. Por tal razón, consideramos que esto constituye una segunda contribución relevante del presente trabajo.

El resto de este manuscrito está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1, se presentan los conceptos fundamentales de Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales parciales (EDPs) que van hacer utilizados en la parte teórica del trabajo. En el capítulo 2, consideramos el sistema Stokes (1) estudiado en [4], y desarrollamos una formulación integral que se usará para establecer la buena colocación del problema de valor de frontera analizado. En el capítulo 3, establecemos la existencia y unicidad de soluciones débiles de la formulación integral propuesta para el problema. En el capítulo 4, presentamos una implementación numérica para aproximar las soluciones del sistema Stokes (1), junto con algunas simulaciones para diferentes valores de los parámetros, y finalmente en el capítulo 5 presentamos las conclusiones de la investigación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y algunas propiedades básicas concernientes a la teoría de espacios de Banach, Hilbert y de Sobolev que se emplearán en este trabajo de investigación. En general, esto está basado en las referencias [7], [9] y [12].

1.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 1.1.1. Si E es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbf{R}$, una norma es una función $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, \infty)$ que satisface

- (a) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- (b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in H$.
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo α en $\mathbf{R}$ y x en H .

Los siguientes son ejemplos clásicos de espacios de normados.

- Ejemplo 1.1.2.**
1. $C^l(\Omega)$ el cual es el espacio de todas las funciones l -veces diferenciables con derivadas continuas en Ω , con la norma $\|\cdot\|$ del supremo dada por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.
 2. $C_b^l(\Omega)$ el cual es un subespacio del espacio $C^l(\Omega)$, adicionando la condición que las funciones pertenecientes a este son acotadas y la norma $\|\cdot\|$ es la restricción de norma del supremo al conjunto.

1.2 Espacios de funciones

En esta sección definiremos los espacios con los cuales estaremos trabajando, en especial estamos interesado en definir espacios de divergencia libre.

1.2.1 Espacios de funciones p-integrables

Los espacios L^p son espacios funcionales que contienen funciones medibles en un conjunto dado, con una cierta propiedad de integrabilidad.

Definición 1.2.1. El espacio L^p se define como, el conjunto de funciones p-integrables

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

donde Ω es el dominio de definición de la función f y $p \geq 1$. Aquí, $|f(x)|^p$ representa el valor absoluto de $f(x)$ elevado a la potencia p -ésima.

Si $f = g$ en casi todas partes, entonces $\int_{\Omega} |f|^p dx = \int_{\Omega} |g|^p dx$ y por consiguiente

$$f \implies \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

es una función bien definida en $L^p(\Omega)$ con valores en $\mathbf{R}$, que es una norma en el espacio $L^p(\Omega)$.

Por otro lado, si $p = \infty$ el espacio se define de la siguiente manera:

Definición 1.2.2. El espacio $L^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones medibles en Ω , que están acotadas en casi todas partes

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\},$$

donde "ess sup" denota el supremo esencial de la función f , que es la menor cota superior que alcanza dicha función, excepto en un conjunto de medida cero. El conjunto $L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$f \implies \|f\|_\infty = \inf\{m \geq 0 : |f(x)| \leq m \text{ en casi todas partes}\}.$$

Los espacios $L^p(\Omega)$, con $p \geq 1$ son espacios de Banach (ver por ejemplo [27]).

Ejemplo 1.2.3. Consideremos el intervalo $\Omega = [0, 1]$ y la función $f(x) = x^2$. Para este ejemplo, veamos en qué espacios de L^p se encuentra $f(x)$.

- Para $p = 1$, calculamos la integral

$$\int_0^1 |f(x)|^1 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, $f \in L^1([0, 1])$.

- Para $p = \infty$, observamos que $|f(x)| = |x^2| = x^2 \leq 1$, para todo $x \in [0, 1]$. Por lo tanto, $f \in L^\infty([0, 1])$.

1.2.2 Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios funcionales que se utilizan en análisis matemático para estudiar funciones que pueden tener derivadas parciales de orden superior; estos espacios son fundamentales en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales.

Lo primero que realizaremos es ampliar el concepto de derivada clásica al de derivada débil, para esto tomemos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-índice de orden k , es decir, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$.

Definición 1.2.4. Sea u un función perteneciente al espacio de las funciones localmente integrables $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y α un multi-índice. Decimos que u tiene una derivada débil $D^\alpha u$ si existe una función $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que para toda función test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se cumple

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx.$$

En este caso, definimos $D^\alpha u = v$.

En la definición anterior, tenemos que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi.$$

Además $C_c^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en un dominio Ω . Un ejemplo que nos permite ver como se amplía el concepto de derivada es el siguiente:

Ejemplo 1.2.5. Considere la función $u(x) = |x|$ en $\Omega = (-1, 1)$. Para cualquier función test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, tenemos

$$\int_{\Omega} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\int_{-1}^0 (-x) \varphi'(x) dx = [-x\varphi(x)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi(x) dx = \varphi(-1) - 0 - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx.$$

Y

$$\int_0^1 x \varphi'(x) dx = [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) dx = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Sumando estas integrales, tenemos

$$\int_{\Omega} |x| \varphi'(x) dx = \varphi(1) - \varphi(-1) - \int_{-1}^1 \varphi(x) dx.$$

Por lo tanto, la derivada débil de $u(x) = |x|$ es $Du = -1$ para $x < 0$ y $Du = 1$ para $x > 0$. Esto puede ser escrito en términos de distribuciones como:

$$\int_{\Omega} |x| \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x) \varphi(x) dx,$$

donde $\operatorname{sgn}(x)$ es la función signo definida como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

De este modo, la derivada débil de $u(x)$ es $Du(x) = |x|$ es $\operatorname{sgn}(x)$.

Formalmente definimos los espacios de Sobolev de la siguiente manera.

Definición 1.2.6. Dado un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un entero positivo k , el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ está compuesto por las funciones u tales que todas las derivadas parciales de orden hasta k de u pertenecen al espacio $L^p(\Omega)$.

Formalmente, se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid D^{\alpha} u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \right\},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. En la definición anterior, $D^\alpha u$ denota la derivada α -débil de la función u .

En este trabajo, para un entero positivo m , usaremos esencialmente el espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$, el cual definiremos como

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Si el espacio es de funciones vectoriales utilizaremos negrita para denotarlos como sigue $\mathbf{H}^m(\Omega)$ y $\mathbf{L}^m(\Omega)$.

Definición 1.2.7. Una norma en el espacio de Sobolev $W^{k,\infty}(\Omega)$ se define como:

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^\infty(\Omega)},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. En el caso que $p \neq \infty$, definimos la norma en el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ como

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Las siguientes son algunas propiedades de los espacios de Sobolev que no demostraremos puesto que sus pruebas se encuentran por ejemplo en [12].

Proposición 1.2.8. *Los espacios de Sobolev tienen varias propiedades importantes, entre las cuales destacan las siguientes:*

- **Inclusión continua:** Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ son abiertos, entonces $W^{k,p}(\Omega_1) \subset W^{k,p}(\Omega_2)$ y esta inclusión es continua.
- Los espacios de Sobolev son espacios Banach.
- **Invariancia por cambio de coordenadas:** Los espacios de Sobolev son invariantes bajo cambios de coordenadas suaves.

Por último presentamos un ejemplo de una familia de funciones que pertenecen a un espacio de Sobolev $H^m = W^{m,2}$.

Ejemplo 1.2.9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, consideremos la función $u(x) = \sin^m(x_1)$, donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el vector de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y m es un número natural.

Esta función $u(x)$ pertenece al espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$, porque todas sus derivadas parciales de orden hasta m son cuadrado integrables en Ω . En este caso, las derivadas parciales de $u(x)$ son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= m \sin^{m-1}(x_1) \cos(x_1), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= m(m-1) \sin^{m-2}(x_1) \cos^2(x_1) - m \sin^{m-1}(x_1) \sin(x_1), \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} &= m(m-1)(m-2) \sin^{m-3}(x_1) \cos^3(x_1) - 3m(m-1) \sin^{m-2}(x_1) \cos(x_1) \sin^2(x_1), \\ &\dots \\ \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} &= m! \sin^{m-m}(x_1) \cos^m(x_1) = m! \cos^m(x_1).\end{aligned}$$

Todas estas derivadas parciales son funciones cuadrado integrables en Ω , lo que significa que $u(x)$ pertenece a $W^{m,2}(\Omega)$.

A continuación, enunciamos un resultado concerniente al encaje de los espacios de Sobolev en otros espacios el cual se usará más adelante.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $0 < \gamma \leq 1$ y $k \in \mathbb{N}$ definimos el espacio de Hölder de funciones continuas de la siguiente manera:

Definición 1.2.10. El espacio de Hölder

$$C^{k,\gamma}(\bar{U}),$$

es el conjunto de todas las funciones $u \in C^k(\bar{U})$ para la cual la norma

$$\|u\|_{C^k(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{\alpha=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})},$$

es finita. Donde el símbolo $[u]$ está dado por la fórmula

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = \sup_{x,y \in U} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$

Ahora enunciamos los teoremas de encajes que utilizaremos en la prueba de existencia de soluciones para el sistema de Stokes (1).

Teorema 1.2.11. (*Encaje de Sobolev*) Sea U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera de clase C^1 . Suponga que $u \in W^{k,p}(U)$.

1. Si

$$k < \frac{n}{p},$$

entonces $u \in L^q(U)$, cuándo

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Además se satisface el siguiente estimativo

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

la constante C depende únicamente de k, p, n y U .

2. Si

$$k > \frac{n}{p},$$

entonces $u \in C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \gamma}(\bar{U})$, donde

$$\gamma = \begin{cases} \lceil \frac{n}{p} \rceil + 1 - \frac{n}{p} & \text{si } \frac{n}{p} \text{ no es un entero,} \\ \text{cualquier número positivo } < 1 & \text{si } \frac{n}{p} \text{ es un entero positivo.} \end{cases} \quad (1.1)$$

En adición se satisface el siguiente estimativo

$$\|u\|_{C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

donde la constate C depende únicamente de k, p, n y U .

La demostración del teorema anterior se encuentra en [12] capítulo 5 páginas 284-286.

1.2.3 Espacios de divergencia libre o espacios solenoidales

Sean Ω un subconjunto acotado de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{n}$ su vector normal exterior.

Definición 1.2.12. El espacio $\mathbf{H}_\sigma$ se define como

$$\mathbf{H}_\sigma = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

junto con la norma y el producto escalar de $\mathbf{H}^1$, es decir si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_\sigma$, la norma se define como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_{\Omega} (\|\mathbf{u}\|^2 + \|D\mathbf{u}\|^2 dx)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

mientras que su producto interno es

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + D\mathbf{u} \cdot D\mathbf{v}) dx.$$

El anterior espacio se suele llamar libre de divergencia o divergencia libre.

Teorema 1.2.13. *El espacio $\mathbf{H}_{\sigma}$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy del espacio $\mathbf{H}_{\sigma}$, entonces $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $\mathbf{H}^1(\Omega)$ el cual es Banach, por lo que existe una función $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}$, es decir $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = 0$. Como el producto punto es una función continua y $\mathbf{n}$ es el vector normal fijo se satisface

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Por otra parte si $\mathbf{u}_m = (u_{1m}, u_{2m})$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, entonces por lo anterior $u_{1m} \rightarrow u_1$, para $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ fijo pero arbitrario se satisface que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} dA &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{1m} \frac{\partial \phi}{\partial x} dA \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\partial u_{1m}}{\partial x} \phi dA \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi dA, \end{aligned}$$

y de igual forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} dA &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{2m} \frac{\partial \phi}{\partial y} dA \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\partial u_{2m}}{\partial y} \phi dA \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial y} \phi dA. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{1m}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2m}}{\partial y} \right) \phi dA \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \phi dA \\ &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \phi dA. \end{aligned}$$

Puesto que ϕ es una función arbitraria, se concluye que $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$, es decir, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\sigma}$. □

El espacio de funciones de prueba que utilizaremos en el presente trabajo es un subconjunto del espacio anteriormente definido:

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto acotado y conexo con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, la cual se supone suave de clase C^1 como se representa en la figura,

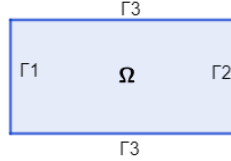


Figura 1.1. Domino Ω con frontera $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$.

Como se puede observar en la figura 1.1, la frontera Γ la dividiremos en tres conjuntos disjuntos tal que $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ y $\Gamma_3 = \Gamma - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ la parte lateral.

Definición 1.2.14. El espacio $\mathbf{V}_\sigma$ se define como el conjunto

$$\mathbf{V}_\sigma = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_\sigma : \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma - \Gamma_3\},$$

con el producto escalar para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v}))$, y la norma $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\sigma} = \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\| = \left(\int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Observe que $\mathbf{V}_\sigma$ es un espacio de Hilbert, dado que $\mathbf{H}_\sigma$ es completo, puesto que $\mathbf{V}_\sigma$ es cerrado. Solo queda demostrar que $\mathbf{V}_\sigma$ es cerrado.

Sea $\{\mathbf{v}_n\}$ una sucesión en $\mathbf{V}_\sigma$ tal que $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ en $\mathbf{H}_\sigma$. Esto significa que, en la norma de $\mathbf{H}_\sigma$,

$$\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Dado que $\mathbf{v}_n \in \mathbf{V}_\sigma$, por la definición de $\mathbf{V}_\sigma$ tenemos que:

$$\mathbf{v}_n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma - \Gamma_3.$$

Esto significa que cada función $\mathbf{v}_n$ satisface una condición de frontera homogénea en $\Gamma - \Gamma_3$. Queremos demostrar que el límite $\mathbf{v}$ de la sucesión $\{\mathbf{v}_n\}$ también pertenece a $\mathbf{V}_\sigma$, es decir, que $\mathbf{v} = 0$ sobre $\Gamma - \Gamma_3$.

Como $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ en $\mathbf{H}_\sigma$, y $\mathbf{H}_\sigma$ es un espacio de Hilbert (y por lo tanto completo), la convergencia en norma implica la convergencia en casi todos los puntos del dominio Ω . En particular, dado que cada $\mathbf{v}_n = 0$ sobre $\Gamma - \Gamma_3$, y el conjunto $\Gamma - \Gamma_3$ es cerrado, se deduce que el límite $\mathbf{v}$ también satisface $\mathbf{v} = 0$ sobre $\Gamma - \Gamma_3$. Dado que la función límite $\mathbf{v}$ satisface la misma condición de frontera que las funciones de la sucesión, es decir, $\mathbf{v} = 0$ sobre $\Gamma - \Gamma_3$, concluimos que $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma$.

Por lo tanto, $\mathbf{V}_\sigma$ es cerrado en $\mathbf{H}_\sigma$, lo que completa la demostración. Por otra parte, dado $t \in [0, 1]$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_\sigma$ se satisface que $t\mathbf{v}_1 + (1 - t)\mathbf{v}_2 = 0$ sobre $\Gamma \setminus \Gamma_3$, es decir, que

$t\mathbf{v}_1 + (1-t)\mathbf{v}_2$ es un elemento de $\mathbf{V}_\sigma$, y por lo tanto, $\mathbf{V}_\sigma$ es un conjunto convexo.

Espacio dual

Sea $\mathbf{H}$ un espacio de Hilbert o Banach. Si $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$, una función lineal continua definimos la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Definimos $\mathbf{H}' = \{f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ es lineal y acotada}\}$, como el dual del espacio $\mathbf{H}$ el cual es un espacio vectorial. En efecto, si $f, g \in \mathbf{H}'$ y $\alpha \in \mathbf{R}$, entonces

$$(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) \in \mathbf{H}'.$$

1.2.4 Espacio traza y el operador levante de traza

La prueba de los siguientes teoremas se pueden encontrar en [7], sección 2,5 páginas 153–157. Aquí solo los enunciaremos debido a que son muy importantes para definir nuestros espacios en la frontera del dominio Ω .

Teorema 1.2.15. *Sea Ω es un dominio tipo Lipschitz de $\mathbf{R}^d$ con frontera compacta y $1 \leq p < +\infty$. Existe $C > 0$, tal que para cualquier $\varphi \in D(\mathbf{R}^d)$ tenemos*

$$\|\varphi|_{\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p}}.$$

Como consecuencia, existe un único operador lineal continuo $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, tal que $\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega}$ para cualquier $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Este operador es llamado la traza del operador sobre el espacio $W^{1,p}(\Omega)$.

En este trabajo tomaremos $d = 2$ y $p = 2$ en el teorema anterior. Entonces para $v \in H^1(\Omega)$, se define la restricción de la función v a la frontera $\Gamma = \partial\Omega$ como $v|_\Gamma = \gamma_0 v$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ es la traza del operador. Además, definimos el espacio $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ como el rango del operador de traza γ_0 , es decir, $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$.

Para finalizar, enunciamos el siguiente teorema que permite definir el llamado operador levante de traza.

Teorema 1.2.16. *Sea Ω es un dominio de Lipschitz con frontera compacta. Existe un operador lineal continuo R_0 de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sobre $H^1(\Omega)$, el cual es un inverso a derecha del operador traza γ_0 , es decir, que satisface que*

$$\gamma_0 \circ R_0 = Id_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

donde Id denota el operador identidad.

Análogamente, el espacio de las trazas de las funciones vectoriales del espacio $\mathbf{H}^1(\Omega)$ está definido por

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Gamma) : \text{Existe } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tal que } \mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{h}\},$$

con la norma $\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{L}_{\Omega} \mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, donde $\mathbf{L}_{\Omega} : \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$ es el operador de levante tal que $\gamma \circ \mathbf{L}_{\Omega} = \text{Id}$.

El espacio dual de $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ es denotado por $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, y el respectivo producto dual es denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$.

Para un subconjunto S de Γ , se define el subespacio $\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(S)$ como sigue:

$$\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \mathbf{L}^2(S) : \text{Existe } \mathbf{w} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tal que } \mathbf{w}|_S = \varphi \text{ y } \mathbf{w}|_{\Gamma \setminus S} = 0\}.$$

Note que la aplicación $\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(S) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(S)$ es continua, esto es, existe una constante positiva C la cual depende únicamente de Ω tal que $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(S)} \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(S)}$.

1.3 Resultados básicos de análisis

Esta sección se basa en la teoría establecida en los textos de ecuaciones diferenciales parciales [7], [12] y en los de análisis [2], [9]. Los resultados enunciados abajo están en forma general en $\mathbf{R}^n$, aunque en la práctica solo los utilizaremos en $\mathbf{R}^2$. Estos teoremas juegan un papel fundamental en el desarrollo de este trabajo.

1.3.1 Teoremas de integración

Las siguientes son las identidades de integración que se utilizan más frecuentemente al escribir formulaciones débiles de EDPs asociadas a problemas de valor de frontera.

Teorema 1.3.1. (*Teorema de la divergencia*) Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto, acotado, abierto y con frontera de clase C^1 . Entonces para cada campo vectorial $\mathbf{u} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbf{R}^n)$, se satisface que

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}) dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde la primera integral es de volumen y la segunda es de superficie. También tenemos la llamada identidad de Green

$$-\int_{\Omega} D(u) \cdot D(v) dx = -\int_{\Omega} u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

La demostración de los anteriores teoremas se pueden encontrar en los libros de cálculo multivariable, por ejemplo en [1].

Veamos un ejemplo donde se ilustra la utilidad del teorema de la divergencia en el momento de realizar cálculos.

Ejemplo 1.3.2. Supongamos que $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y que el campo vectorial $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y)) = (x - y, x + y)$, entonces

$$\int_{\partial([0,1] \times [0,1])} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{[0,1] \times [0,1]} \text{div}(\mathbf{u}) dA.$$

En este caso, la integral más sencilla de resolver es la de volumen dado que

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \text{div}(\mathbf{u}) dA = \int_{[0,1] \times [0,1]} 2 dA = 2 \int_{[0,1] \times [0,1]} 1 dA = 2,$$

mientras que en la superficie se deben considerar cuatro vectores normales diferentes y la correspondiente parametrización de los bordes. Abajo colocamos el diagrama del campo vectorial $\mathbf{u}$ realizado mediante el software Matlab.

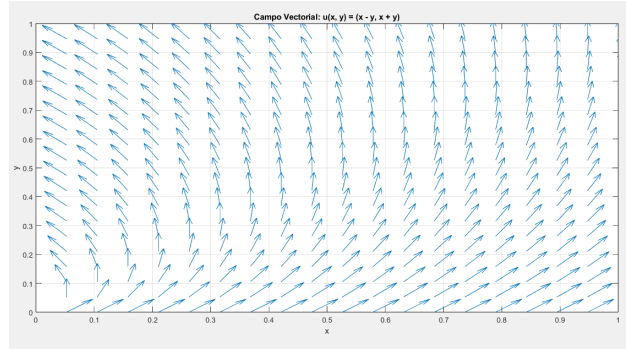


Figura 1.2. Diagrama campo vectorial.

1.3.2 Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional

En hidrodinámica es muy común reconstruir el campo de velocidades a partir de un potencial, en el caso 2D y para flujo irrotacionales se puede reconstruir a partir del rotacional de la corriente; el siguiente teorema valida este hecho.

Dado un campo vectorial $\mathbf{u}$ es normal preguntarse si existe otro campo vectorial $\mathbf{v}$ tal que $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}(x, y, z) = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1, v_2, v_3)$.

Si $\text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, entonces

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = u_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} = u_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = u_3.$$

No siempre es posible resolver el sistema anterior lo que necesitamos es que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0,$$

es decir que el campo $\mathbf{u}$ tenga divergencia cero.

Teorema 1.3.3. *Si $\mathbf{u}$ es derivable con continuidad en un subconjunto abierto Ω de $\mathbf{R}^3$, entonces existe un campo vectorial $\mathbf{v}$ tal que $\text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ si y solo si $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ en todo Ω .*

La demostración del teorema está dado en [1].

Ejemplo: Si $\mathbf{v}(x, y) = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_3)$, es un campo solenoidal pues la divergencia de un rotacional siempre da cero, además note que $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Si la frontera considerada $\partial\Omega$ fuese la unión de componentes conexas, entonces en cada una la integral anterior sería cero.

1.3.3 Dominios de tipo Lipschitz

Un tipo de dominio muy comúnmente utilizado en la teoría de EDPs, son los que tienen frontera tipo Lipschitz, como los que se muestran en la figura 1.3.

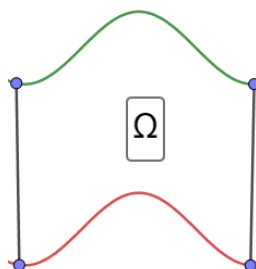


Figura 1.3. Dominio tipo Lipschitz

Los dominios tipo Lipschitz son regiones del espacio con fronteras suficientemente regulares, en el sentido de que pueden considerarse localmente como la gráfica de una función de tipo Lipschitz.

Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un **dominio tipo Lipschitz** si su frontera $\partial\Omega$ puede ser descrita localmente por una función que es Lipschitz continua. Más precisamente:

Definición 1.3.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio tipo Lipschitz si para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$, existe una transformación de coordenadas local en torno a x_0 tal que la frontera puede ser representada como el gráfico de una función Lipschitz continua.

Formalmente, esto significa que existe una función $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la frontera $\partial\Omega$ en torno a x_0 se puede describir como

$$\partial\Omega \cap \{x_n = 0\} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_n = h(x')\},$$

donde $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$, y la función h es Lipschitz continua en $\mathbb{R}^{n-1}$. Es decir, para cada par de puntos x'_1 y x'_2 en $\mathbb{R}^{n-1}$, existe una constante $L > 0$ tal que

$$|h(x'_1) - h(x'_2)| \leq L\|x'_1 - x'_2\|.$$

Esto implica que la frontera de Ω no puede ser demasiado irregular y permite aplicar diversos resultados en teoría de ecuaciones en derivadas parciales que requieren cierta regularidad de la frontera.

La demostración del siguiente lema se puede encontrar en texto de Galdin [17] capítulo 16, página 610. Aquí solo enunciaremos el resultado y lo utilizaremos en un lema posterior del capítulo 3.

Lema 1.3.5. *Sea Ω es un dominio acotado localmente Lipschitz en $\mathbf{R}^n$, con $n = 2, 3$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ la cual satisface que*

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0.$$

Entonces, para cualquier $\eta > 0$, existe $\epsilon = \epsilon(\eta, \mathbf{v}, n, \Omega) > 0$ y un campo vectorial solenoidal $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\epsilon)$ (es decir $\text{div } \mathbf{V} = 0$), tal que

$$\mathbf{V} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ con } \mathbf{V} = \mathbf{v} \text{ en } \partial\Omega,$$

además si $\mathbf{v}$ pertenece a una bola de $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, es decir $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq M$, para algún $M > 0$, entonces existe una constante $C = C(\eta, n, \Omega, M) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{V}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Observación: El lema anterior es una versión simplificada del que se encuentra en Galdin [17]; aquí solo se tomaron los resultados que se van a utilizar sin modificar las hipótesis.

1.3.4 Convergencias débil y fuerte en espacios de Banach

Otra forma de decir que un operador es compacto es revisando la convergencia de sucesiones de su dominio de definición. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y E' es su dual, diremos que

1. Una sucesión $(u_n)_n$ de elementos de E converge débilmente hacia $u \in E$, si para cualquier $f \in E'$ satisface que

$$f(u_n) = \langle f, u_n \rangle_{E', E} \longrightarrow \langle f, u \rangle_{E', E} = f(u) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

2. Si $(u_n)_n$ es una sucesión de elementos de E la cual satisface que $\|u - u_n\| \longrightarrow 0$, diremos que la sucesión converge fuertemente.

Una forma de relacionar las convergencia y los operadores de tipo compacto está dada en el siguiente resultado.

1.3.5 Teoremas de punto fijo y teorema de Lax-Milgram

El siguiente es uno de los resultados teóricos más importantes utilizados en este trabajo; en general es una estrategia muy estudiada y aplicada en general en el estudio de un modelo general de la hidrodinámica conocido como ecuaciones de Navier- Stokes. Antes de enunciar el teorema definiremos el concepto de operador compacto.

Definición 1.3.6. Sean E y F dos espacios de Banach. Diremos que un operador lineal $T : E \longrightarrow F$ es compacto si para cualquier subconjunto acotado C de E se satisface que $T(C)$ es relativamente compacto en F . Un operador lineal $T : E \longrightarrow F$ acotado que transforma sucesiones débilmente convergentes en E en sucesiones fuertemente convergentes en F se llama completamente continuo. Observe que un operador compacto es un operador completamente continuo, pero el recíproco no es cierto. Sin embargo, en el caso de que el espacio de Banach E sea reflexivo, se tiene que los conceptos de operador compacto y operador completamente continuo coinciden [8].

Teorema 1.3.7. (Schauder) (ver [25]) Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y C un conjunto cerrado, convexo, acotado y no vacío de E . Entonces cualquier operador lineal compacto $T : C \longrightarrow C$ tiene por lo menos un punto fijo en C .

Ejemplo 1.3.8. (Las hipótesis no se pueden debilitar) Supongamos que $E = \mathbb{C}$, entonces note que:

1. Sean $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ y $T : C \rightarrow C$ una rotación alrededor del origen. Se sabe que una rotación propia no posee puntos fijos. En este caso, C es compacto, no vacío, pero no es convexo.
2. Sean $C = \mathbb{C}$ y $T : C \longrightarrow C$ es definido como $T(z) = z + 1$. Entonces T es continuo, C es convexo, no vacío, pero no es compacto. Observe que T no tiene puntos fijos.

Teorema 1.3.9. Sean $(u_n)_n$ una sucesión de puntos de E la cual converge débilmente hacia $u \in E$, y $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal compacto. Entonces la sucesión $(T(u_n))_n$ converge fuertemente hacia $T(u) \in F$.

La demostración se puede encontrar en [7], capítulo 2, página 80.

El siguiente resultado se utilizará más adelante en la prueba del resultado de existencia y unicidad para el modelo de Stokes considerado. Sean H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)$ con norma asociada $\|\cdot\|$, y denotaremos como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el par de H con su espacio dual.

Teorema 1.3.10. (*Lax-Milgram*) Suponga que

$$B : H \times H \longrightarrow \mathbf{R},$$

es una función bilineal, para la cual existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que

1. $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ $u, v \in H$ y
2. $\beta \|u\|^2 \leq B[u, u]$ $u \in H$.

Finalmente, sea $f : H \longrightarrow \mathbf{R}$ un funcional lineal acotado sobre H .

Entonces existe un único $u \in H$ tal que

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle,$$

para todo $v \in H$.

La demostración del anterior resultado la puede encontrar en Evans [12], capítulo 6, página 316.

Capítulo 2

Formulación débil del sistema de Stokes no homogéneo con condiciones de frontera mixtas

El objetivo de este capítulo es construir la formulación débil del sistema de Stokes no homogéneo con condiciones de fronteras mixtas. Para cumplir el anterior objetivo, dividiremos en dos secciones este capítulo; la primera es la presentación del sistema y sus condiciones de frontera, la segunda es la escritura del sistema en su forma integral utilizando la función de corriente y las condiciones de deslizamiento e impermeabilidad de Stokes.

2.1 Sistema de Stokes no homogéneo con condiciones de frontera mixta

Lo que presentamos a continuación es el estudio y las demostraciones con todos los detalles del sistema presentado en [4].

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto acotado y conexo con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, la cual se supone suave de clase C^1 como se muestra en la figura 2.1.

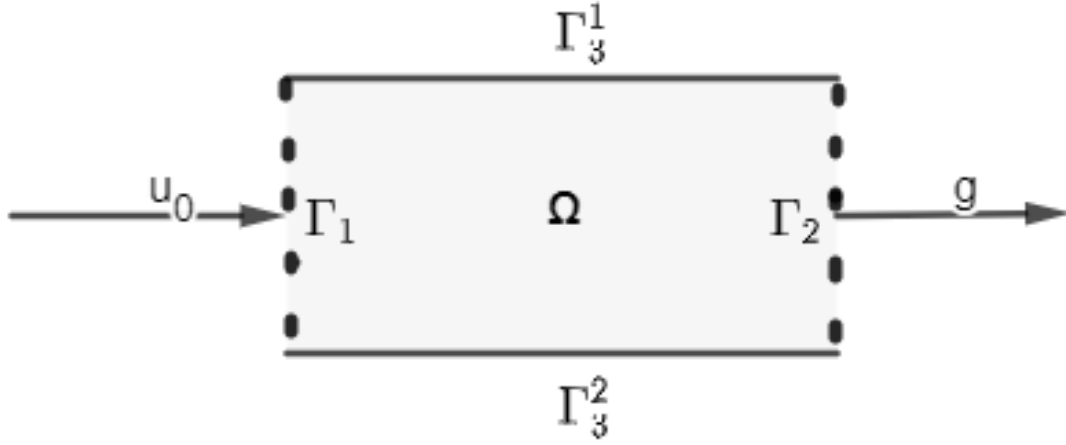


Figura 2.1. Dominio Ω con frontera $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$

Como se puede observar en la figura 2.1, la frontera Γ la dividiremos en tres conjuntos disjuntos tal que $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, donde si se supone que Ω es un canal, entonces Γ_1 sería la entrada del canal, Γ_2 la salida del mismo y $\Gamma_3 = \Gamma - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ la parte lateral, es decir las paredes.

Consideramos las siguientes condiciones sobre la frontera Γ_1 :

$$\Gamma_1 \text{ es un conjunto arco conexo y cerrado sobre } \Gamma, \text{ con longitud } |\Gamma_1| > 0. \quad (2.1)$$

Sobre el dominio anterior vamos a considerar el llamado sistema de Stokes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})] + \nabla \mathbf{p} = \rho \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde las funciones desconocidas son el campo de velocidades $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$, la presión hidrostática $\mathbf{p} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ y la densidad $\rho : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$ para un fluido no homogéneo que fluye a través de Ω . Las funciones conocidas son la función vectorial $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ la cual representa una fuerza externa actuando sobre el fluido, la función $\mu : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$ que describe la viscosidad dinámica del fluido. Además, $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ denota la parte simétrica del gradiente de velocidad, es decir, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$.

2.1.1 Observaciones sobre las ecuaciones que conforman el sistema de Stokes

- Si $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ en Ω , esto es equivalente a decir que el flujo es incomprensible, es decir, que su densidad no cambia bajo la presión. Por lo general son líquidos como el agua, aceites, y la sangre entre otros.

- En cuanto a la ecuación $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$, ésta se desprende para un flujo incompresible de la conservación de la masa en el sistema, en su forma completa es $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$. Recordar aquí que debido a que el flujo es estacionario, se tiene que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.
- La primera ecuación de nuestro sistema es debida al balance del momentum teniendo en cuenta que $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$, es decir, se trata de la segunda ley de Newton aplicada a líquidos. Note también que $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ es un operador simétrico asociado al operador $\nabla(\mathbf{u})$. En particular, si $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))$, se tiene

$$\nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{1y} \\ u_{2x} & u_{2y} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u}(x, y) + (\nabla \mathbf{u}(x, y))^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_{1x} & u_{1y} + u_{2x} \\ u_{2x} + u_{1y} & 2u_{2y} \end{pmatrix}.$$

Si por un momento se supone que la viscosidad es constante se tendría que la divergencia se operaría por filas, quedando al final un vector formado por dos filas y una columna en la forma

$$\text{div}(\mu(\mathbf{D}(\mathbf{u}))) = \mu \text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_{1xx} + u_{1yy} + u_{2xy} \\ u_{2xx} + u_{1yx} + 2u_{2yy} \end{pmatrix}.$$

Puesto que en nuestro problema la viscosidad es en general no constante, tendríamos que

$$\begin{aligned} \text{div}(\mu(\mathbf{D}(\mathbf{u}))) &= \text{div} \mu(x, y) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_{1x} & u_{1y} + u_{2x} \\ u_{2x} + u_{1y} & 2u_{2y} \end{pmatrix} \\ &= \text{div} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\mu u_{1x} & \mu u_{1y} + u_{2x} \\ \mu u_{2x} + u_{1y} & 2\mu u_{2y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\mu u_{1xx} + 2\mu_x u_{1x} + \mu u_{1yy} + \mu_y u_{1y} + \mu u_{2xy} + \mu_y u_{2x} \\ \mu u_{2xx} + \mu_x u_{2x} + \mu u_{1yx} + \mu_y u_{1y} + 2\mu u_{2yy} + 2\mu_y u_{2y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.2 Condiciones de frontera

Para finalizar la presentación de nuestro sistema de Stokes dado en (2.2), vamos a describir las condiciones de frontera para el campo de velocidades y la función de densidad en la entrada del dominio Γ_1 y salida del mismo Γ_2 de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g = \begin{cases} \mathbf{u}_0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\rho = \rho_0 > 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \quad (2.4)$$

Adicionalmente, suponemos que

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} > 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \text{ flujo salida o,}$$

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \text{ flujo entrante.}$$

En lo anterior $\mathbf{n}$ denota el vector normal unitario exterior a la curva Γ . Para las paredes, es decir, sobre la frontera Γ_3 imponemos condiciones de impermeabilidad y de deslizamiento tipo Navier de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ y } [\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}]_{tang} = 0, \text{ sobre } \Gamma_3, \quad (2.5)$$

donde $[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}]_{tang}$, es la componente tangencial de el vector $\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}$, la cual se define por

$$[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}]_{tang} = \mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u} - [(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}.$$

Gráficamente este tipo de condiciones de frontera se puede interpretar como se muestra en la figura 2.2.

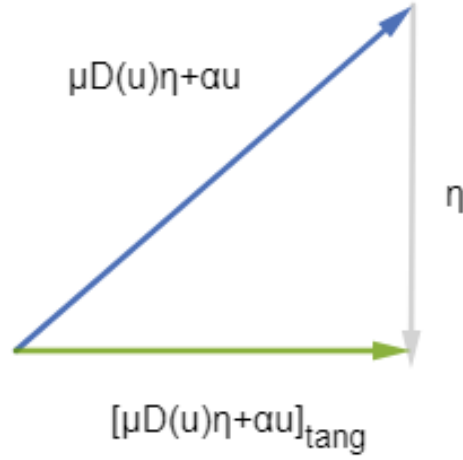


Figura 2.2. Descomposición del vector $\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}$

En la expresión anterior para la componente tangencial del vector se adicionó el término α , el cual es un número real tal que $\alpha \geq 0$ y es conocido como el coeficiente de fricción, el cual mide la tendencia del fluido a deslizarse por la pared Γ_3 . Si $\alpha = 0$ nuestra frontera sería totalmente lisa y para valores de α grandes tendiendo a infinito se puede pensar que la fricción es tan intensa que nuestro fluido estaría en reposo en la frontera [10].

Las condiciones de deslizamiento propuestas por C.L. Navier (1822) se basan en el equilibrio

entre la velocidad del fluido tangencial a la superficie y la tasa de deformación de la frontera, es decir, la componente tangencial de la tensión viscosa en la frontera es proporcional a la velocidad tangencial y en sentido opuesto $\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} = -\alpha \mathbf{u}$ donde la constante de proporcionalidad es el coeficiente de fricción α .

El término $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ el cual es la componente normal de la velocidad se supone cero ya que estamos considerando que el fluido no puede penetrar la superficie sólida e impermeable de nuestra pared Γ_3 . Desde el punto de vista físico, las anteriores condiciones fueron justificadas al estudiar problemas de capa límite en flujos de Couette (vea [19] y [18]).

2.2 Formulación integral del problema de Stokes

Para poder escribir el sistema de forma integral se supone que los datos es decir las funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2), \mu \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } \rho_0 \in C^0(\Gamma_1).$$

Dado que la viscosidad μ es continua en un compacto, entonces existen constantes μ_* y μ^* tales que

$$0 < \mu_* \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \mu^* \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Por otra parte, note que si $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$, entonces por el teorema de la divergencia tendríamos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

Por la condición de impermeabilidad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ en Γ_3 , así que

$$\int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

además $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ en Γ_1 y $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ en Γ_2 , en consecuencia

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Para definir el concepto de solución débil del sistema de Stokes, expresaremos la densidad del fluido en terminos de la función de corriente siguiendo la idea de Frolov [14], la cual consiste en reconstruir un campo a partir de su rotacional.

2.2.1 Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional

La idea es escribir la densidad como función de corriente es muy común en hidrodinámica aquí nosotros vamos a seguir un poco de las ideas de Frolov [14].

Note que $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ en Ω y que este es un conjunto conexo, así que por el teorema 1.3.3 existe un campo vectorial $\mathbf{G} = \psi \mathbf{e}_3$ tal que $\nabla \times \psi \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}$, donde $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Por un lado, se tiene que

$$\nabla \times \psi \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \psi \end{pmatrix} = (\psi_y, -\psi_x),$$

con lo que

$$\psi_y = u_1 \text{ y } -\psi_x = u_2 \text{ en } \Omega.$$

Ahora para solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales anteriores, tomemos (x_0, y_0) en Ω . Entonces integrando con respecto a x la ecuación $\psi_x = -u_2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \psi_x(s, y) ds &= \int_{x_0}^x -u_2(s, y) ds \\ \psi(x, y) &= \int_{x_0}^x -u_2(s, y) ds + \psi(x_0, y). \end{aligned}$$

Ahora derivando con respecto a y

$$\psi_y(x, y) = \int_{x_0}^x -u_{2y}(s, y) ds + \psi_y(x_0, y).$$

Ahora como $u_{1x} + u_{2y} = 0$, sustituyendo se tendría que

$$\begin{aligned} \psi_y(x, y) &= \int_{x_0}^x u_{1x}(s, y) ds + \psi_y(x_0, y) \\ &= u_1(x, y) - u_1(x_0, y) + \psi_y(x_0, y). \end{aligned}$$

Pero de la segunda ecuación se sabe que $\psi_y = u_1$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} u_1(x, y) - u_1(x_0, y) + \psi_y(x_0, y) &= u_1(x, y) \\ \psi_y(x_0, y) &= u_1(x_0, y). \end{aligned}$$

Integrando con respecto a y , se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \psi_y(x_0, s) ds &= \int_{y_0}^y u_1(x_0, s) ds \\ \psi(x_0, y) &= \int_{y_0}^y u_1(x_0, s) ds + \psi(x_0, y_0), \end{aligned}$$

Es decir, que el campo escalar ψ depende del punto inicial (x_0, y_0) . Ahora sustituyendo $\psi(x_0, y)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \int_{x_0}^x -u_2(s, y)ds + \psi(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^x -u_2(s, y)ds + \int_{y_0}^y u_1(x_0, s)ds + \psi(x_0, y_0).\end{aligned}$$

La integral anterior es una integral de línea del campo vectorial $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ escrita por componentes. Así si $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma_1$, se tiene que

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \forall \mathbf{x} = (x, y) \in \Gamma_1,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior de Ω y la función ψ , se le llama la función de corriente (o simplemente "corriente") correspondiente al campo de velocidades $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ y $\Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ es una porción de Γ_1 .

En vista de lo anterior, definamos $\psi_0 : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente fórmula:

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Note que $\psi_0 \in C^0(\Gamma_1)$ por ser una integral, y además es estrictamente monótona sobre la curva Γ_1 debido a que $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} > 0$ o $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} < 0$, de aquí que por el teorema de la función inversa existe la función $\psi_0^{-1} \in C^0(I)$, donde $I = \{\psi_0(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Gamma_1\}$, lo cual se cumple cuando $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ y $\rho_0 \in C^0(\Gamma_1)$ mayor que cero. Entonces existe una función $\eta \in C_b^0(\mathbb{R})$ tal que

$$\eta(s) > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad y \quad \eta(s) = \rho_0(\psi_0^{-1}(s)), \quad \forall s \in I.$$

Esta función η se mantendrá fija en adelante; en general podemos definir el operador lineal $N : \mathbf{H}_\sigma \longrightarrow H^2(\Omega)$, definido para un campo de velocidad $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$, como $N(\mathbf{u}) = \psi$, donde ψ es la función de corriente correspondiente. Así que en términos de η y la aplicación N , podemos escribir la densidad $\rho(\mathbf{x})$ del fluido en la forma

$$\rho(\mathbf{x}) = \eta(\psi(\mathbf{x})) = \eta(N(\mathbf{u}))(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Veamos que la función de densidad definida de esta manera satisface la condición de frontera $\rho = \rho_0$ en Γ_1 . En efecto, tomando $\mathbf{x} \in \Gamma_1$, entonces por la definición de densidad se tendría

que

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x}) &= \eta(N\mathbf{u})(\mathbf{x}) \\
&= \eta\left(\int_{\Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS\right) \\
&= \eta\left(\int_{\Gamma_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS\right) \\
&= \eta(s) \\
&= \rho_0(\psi_0^{-1}(s)) \\
&= \rho_0(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

siempre que $\mathbf{x} \in \Gamma_1$ y para cualquier $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_\sigma$, tal que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ en Γ_1 . Aquí recuerde la notación que se está usando $\psi(\mathbf{x}) = s$.

Por último, la densidad debe ser diferenciable puesto que por hipótesis se tiene que $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$, entonces es necesario que $\rho \in C^0(\Omega, \mathbf{R})$, satisfaga también que $\rho \in C^1(\Omega, \mathbf{R})$. Además, ρ toma valores en el conjunto acotado Ω , así que la densidad es un campo escalar acotado lo cual implica que $\eta \in C_b^1(\mathbf{R})$, para que $\rho(\mathbf{x}) = \eta(\psi(\mathbf{x}))$. Probemos ahora que la densidad en función de la función de corriente satisface la ecuación $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$. Recordando que $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades, lo anterior es una aplicación directa de la regla de la cadena, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \eta'(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \begin{cases} -\eta'(\psi) u_2 & \text{si } i = 1, \\ \eta'(\psi) u_1 & \text{si } i = 2, \end{cases}$$

donde η' denota la primera derivada de η , por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \nabla \rho &= u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \\
&= -u_1 \eta'(\psi) u_2 + u_2 \eta'(\psi) u_1 \\
&= 0, \text{ en } \Omega.
\end{aligned}$$

Por último, si $\eta \in C_b^0(\mathbf{R})$, la condición $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ se puede reescribir en su forma integral, para lo cual tomando una función de prueba $\omega \in H^1(\Omega)$ con $\omega = 0$ en Γ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \omega dx &= \int_{\Omega} (u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2}) \omega dx \\
&= \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \omega dx + \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \omega dx \\
&= \int_{\Omega} \omega \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rho + u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \rho dx + \int_{\Omega} \omega \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rho + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \rho dx \\
&= \int_{\Omega} \omega \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega) \rho dx \\
&= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega) \rho dx = 0.
\end{aligned}$$

2.2.2 Formulación débil

En la sección anterior, se escribió la densidad en función de la corriente por medio del operador N el cual toma cada función $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ y la envía en la función ψ por medio del proceso dado en la primera parte de esta sección, la cual en Γ_1 , es invertible por ser una aplicación creciente o decreciente y continua. Esto permite definir la función η y de esta forma iniciar la formulación débil del sistema. Para completar la escritura en su forma integral, tomamos el producto escalar en L^2 y una función de prueba $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma$, la cual satisface que $(\nabla \mathbf{p}, \mathbf{v}) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 (\nabla \mathbf{p}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dx \\
 &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} v_i dx \\
 &= - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \mathbf{p} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx + \int_{\partial \Omega} \mathbf{p} v_i \cdot \mathbf{n}^i dS \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{p} \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Los términos en la frontera se anulan puesto que $\mathbf{v} = 0$ en todo Γ por pertenecer a $\mathbf{V}_\sigma$ y la divergencia de $\mathbf{v}$ es cero por estar en $\mathbf{H}_\sigma$. Continuando con nuestra escritura del sistema en su forma integral enunciamos y probamos el siguiente resultado pilar fundamental de la formulación débil. Este teorema y su demostración se puede encontrar en [4].

Teorema 2.2.1. *Suponga que una función vectorial $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ satisface las condiciones de frontera de impermeabilidad y deslizamiento de Stokes, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ y $[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}]_{\text{tang}} = 0$, sobre Γ_3 . Para toda función vectorial $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ que satisface la condición $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ en Γ y $\mu \in C^1(\bar{\Omega})$. Entonces, se cumple que*

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dx + \alpha \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS,$$

donde el símbolo $:$ denota el producto de matrices por filas.

Demostración. En la siguiente demostración dividiremos los términos de la integral en dos partes por medio de la integración por partes; para esto recordemos primero que

$$\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mu \begin{pmatrix} 2u_{1x} & u_{1y} + u_{2x} \\ u_{2x} + u_{1y} & 2u_{2y} \end{pmatrix},$$

con lo que su divergencia resulta ser

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2\mu u_{1x})_x + ((u_{1y} + u_{2x})\mu)_y \\ ((u_{2x} + u_{1y})\mu)_x + (2u_{2y}\mu)_y \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, el producto escalar contra $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \{ (2\mu u_{1x})_x v_1 + ((u_{1y} + u_{2x})\mu)_y v_1 + ((u_{2x} + u_{1y})\mu)_x v_2 + (2u_{2y}\mu)_y v_2 \},$$

con lo cual se llega a

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ (2\mu u_{1x})_x v_1 + ((u_{1y} + u_{2x})\mu)_y v_1 + ((u_{2x} + u_{1y})\mu)_x v_2 + (2u_{2y}\mu)_y v_2 \} dx.$$

Realizando integración por partes, sin escribir de forma explícita el término de frontera, se obtiene

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ (2\mu u_{1x}) v_{1x} + ((u_{1y} + u_{2x})\mu) v_{1y} + ((u_{2x} + u_{1y})\mu) v_{2x} + (2u_{2y}\mu) v_{2y} \} dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \text{término de frontera } dS. \end{aligned}$$

La escritura del término de frontera en la integral anterior solo es por conveniencia. Además, note que la primera integral del lado derecho de la igualdad anterior se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \begin{pmatrix} 2u_{1x} & u_{1y} + u_{2x} \\ u_{2x} + u_{1y} & 2u_{2y} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} \\ v_{2x} & v_{2y} \end{pmatrix} dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \text{término de frontera } dS, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dx - \int_{\partial\Omega} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Por hipótesis, la función $\mathbf{u}$ satisface las condición de deslizamiento de Stokes es decir $\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, así que sustituyendo en la integral anterior y recordando que $\mathbf{v} = 0$ en $\Gamma - \Gamma_3$, obtenemos el resultado deseado

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dx + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS.$$

□

Ahora utilizaremos el teorema anterior para definir una formulación débil del sistema de Stokes. Para esto debemos notar que la condición de incomprensibilidad $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$, queda

conservada en los espacios $\mathbf{H}_\sigma$ y $\mathbf{V}_\sigma$ y que la condición de continuidad $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$, la cambiamos por condiciones de frontera que debe satisfacer $\rho(\mathbf{x}) = \eta(N(\mathbf{u}))$ en Γ_1 . Para esto, sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma$ y multiplicamos e integramos la primera ecuación del sistema para obtener

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \nabla \mathbf{p} &= \rho \mathbf{f} \\ \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\ \int_{\Omega} \mu (\mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})) dx + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{\Gamma_3} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\ (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS &= \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma. \end{aligned}$$

Con lo anterior, podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.2.2. Diremos que el par $(\mathbf{u}, \rho)$ es una solución débil del problema NS-MBC si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$, $\rho = \eta(N\mathbf{u})$ y se cumple que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma, \\ \eta(N\mathbf{u}) = \rho_0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma \setminus \Gamma_3, \end{array} \right.$$

donde el operador $\mathbf{F} : \mathbf{H}_\sigma \longrightarrow \mathbf{V}'_\sigma$ está definido por $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \eta(N\mathbf{u})\mathbf{f}$.

Capítulo 3

Existencia y unicidad del sistema de Stokes no homogéneo con condiciones de frontera mixtas

El objetivo central de este capítulo es demostrar la existencia y unicidad de solución de la formulación débil del sistema de Stokes presentada en la sección anterior. Para lograr el anterior objetivo, usaremos el teorema del punto de Schauder, el teorema de Lax-Milgram y el espacio de funciones con divergencia 0.

3.1 Existencia de soluciones débiles

El siguiente lema es un resultado conocido en el texto de Galdi [17], el cual nos dice que bajo ciertas condiciones sobre un dominio acotado y de las funciones definidas en él, cuya integral en la frontera da cero, podemos encontrar un campo vectorial que sea una extensión del que tenemos, además el campo se encuentre acotado por la norma de los datos de frontera para la velocidad. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1.1. *(Mallea-Zepeda) [22] Supongamos que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ y $0 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS$, entonces existe un campo vectorial $\mathbf{u}^e \in \mathbf{H}_\sigma$ tal que $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_0$ en Γ_1 y $\mathbf{u}^e = \mathbf{g}$ en Γ_2 y $\mathbf{u}^e = 0$ en Γ_3 y satisface el siguiente estimativo*

$$\|\mathbf{u}^e\|_{\mathbf{H}_\sigma} \leq C \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)'}$$

donde la constante C depende únicamente de Ω .

Demostración. Si $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, entonces existen $\hat{\mathbf{g}} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y $\hat{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tal que $\hat{\mathbf{u}}_0|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_0$ y $\hat{\mathbf{u}}_0|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = 0$. De igual forma, existe $\hat{\mathbf{g}}|_{\Gamma_2} = \mathbf{g}$ y $\hat{\mathbf{g}}|_{\Gamma \setminus \Gamma_2} = 0$, esto es, $\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{g}}_1 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; además como $0 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS$, por el lema 1.3.8, existe $\mathbf{u}^e \in \mathbf{H}_\sigma$ con $\mathbf{u}^e = \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{g}}$ en Γ . En particular, tenemos que $\mathbf{u}_{\Gamma_1}^e = \mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_{\Gamma_2}^e = \mathbf{g}$; por último este satisface que

$$\|\mathbf{u}^e\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)},$$

donde C es una constante que depende de Ω . □

Por el lema anterior, la función vectorial $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ la podemos escribir de la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \hat{\mathbf{u}}$, donde $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_\sigma$ es una función desconocida, así que la ecuación dada en la definición de la forma integral de nuestro sistema la podemos reescribir como

$$(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma,$$

la cual es equivalente a

$$(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e + \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} (\mathbf{u}^e + \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}^e + \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma,$$

con lo que

$$(\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}^e + \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma} - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v})), \quad (3.1)$$

dado que $\mathbf{u}^e = 0$ en Γ_3 . Ahora definamos el operador $\mathbf{T} : \mathbf{V}_\sigma \longrightarrow \mathbf{V}_\sigma$ por $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{u}}$, donde la función vectorial $\hat{\mathbf{u}}$ satisface la siguiente relación

$$(\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma} - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma.$$

Observe en primer lugar que el operador $\mathbf{T}$ es lineal. Ahora la idea es probar que el operador $\mathbf{T}$ tiene un punto fijo, para lo cual utilizaremos el teorema del punto fijo de Schauder. Este punto fijo del operador $\mathbf{T}$ sería una solución de la ecuación (3.1).

Lema 3.1.2. *El operador $\mathbf{T} : \mathbf{V}_\sigma \longrightarrow \mathbf{V}_\sigma$ está bien definido y es compacto y además satisface el estimativo*

$$\|\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}_\sigma} \leq C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)}), \quad \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_\sigma, \quad (3.2)$$

donde $C > 0$ es una constante, la cual depende únicamente del dominio Ω y las constantes μ_* y μ^* .

Demostración. La idea de esta prueba es primero demostrar que, en efecto, el operador $\mathbf{T}$ está bien definido, en donde usaremos el teorema de Lax-Milgram 1.3.10. Definamos entonces la forma bilineal simétrica $a : \mathbf{V}_\sigma \times \mathbf{V}_\sigma \longrightarrow \mathbf{R}$, y el funcional lineal $L : \mathbf{V}_\sigma \longrightarrow \mathbf{R}$, dados por

$$a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mu(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v}))) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma, \quad (3.3)$$

$$L\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma} - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma. \quad (3.4)$$

Que son la parte derecha e izquierda de la fórmula (3.1). Utilizando las dos definiciones anteriores se reescribe el problema (3.1) de la siguiente manera, para $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_\sigma$ se satisface que

$$a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = L\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma.$$

Veamos que el operador a es bilineal y simétrico. Para que el operador a sea bilineal debe ser lineal en cada componente. En efecto, sean $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma$. Entonces

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2, \mathbf{v}) &= (\mu(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2), \mathbf{D}(\mathbf{v}_1))) + \alpha \int_{\Gamma_3} (\hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2) \cdot \mathbf{v} \\ &= (\mu(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}_1) + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}_2)), \mathbf{D}(\mathbf{v}_1))) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{v} \\ &= (\mu(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}_1), \mathbf{D}(\mathbf{v}_1))) + (\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}_2), \mathbf{D}(\mathbf{v}_1))) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} dS + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{v} \\ &= a(\hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v}) + a(\hat{\mathbf{u}}_2, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

es decir, que el operador a es lineal en la primera componente, y de igual forma se prueba que a es lineal en la segunda componente. Por otra parte, la aplicación $a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ es simétrica debido a que el producto interno es conmutativo. En efecto,

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &= (\mu(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v}))) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dS, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma \\ &= \int_{\Omega} \mu(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dS \\ &= \int_{\Omega} \mu(\mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS \\ &= (\mu(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}))) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS \\ &= a(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

Además, la forma bilineal $a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ es continua en $\mathbf{V}_\sigma \times \mathbf{V}_\sigma$, dado que

$$\begin{aligned}
 |a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| &= |(\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dS| \\
 &\leq \mu \left| \int_{\Omega} \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dx \right| + \alpha \left| \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dS \right| \\
 &\leq \mu \int_{\Omega} \|\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}})\| \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\| dx + \alpha \int_{\Gamma_3} \|\hat{\mathbf{u}}\| \|\mathbf{v}\| dS \\
 &\leq C_1 \mu \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\sigma} + C_2 \alpha \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\sigma} \\
 &\leq C (\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\sigma}).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, para $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_\sigma$, se satisface que

$$\begin{aligned}
 a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) &= (\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS \\
 &= (\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 dS \\
 &\geq (\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}})) \\
 &= \mu \|\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}})\|^2 \\
 &\geq \mu_* \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2.
 \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos demostrado que la aplicación bilineal $a(\cdot, \cdot)$ satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram. Ahora analicemos el operador L . Primero, para ver que L es lineal, sean $c \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_\sigma$. Entonces

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{v} + c\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} + c\mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}_\sigma'} - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v} + c\mathbf{w})) \\
 &= \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_\sigma'} + c \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}_\sigma'} - c(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{w})) - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v})) \\
 &= L\mathbf{v} + cL\mathbf{w},
 \end{aligned}$$

en consecuencia L es lineal. Veamos que el operador L es acotado. En efecto,

$$\begin{aligned}
 |L\hat{\mathbf{u}}| &= |\langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_\sigma'} - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v}))| \\
 &\leq |\langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_\sigma'}| + |(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v}))| \\
 &\leq \|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| \|\hat{\mathbf{u}}\| + \mu^* \|\mathbf{D}(\mathbf{u}^e)\| \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma} \\
 &\leq \|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| \|\hat{\mathbf{u}}\| + \mu^* \tilde{\mathbf{C}} \|\nabla(\mathbf{u}^e)\| \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma} \\
 &\leq C (\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}^e\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma}.
 \end{aligned}$$

Aquí la constante $\tilde{\mathbf{C}}$ satisface la desigualdad $\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| \leq \tilde{\mathbf{C}} \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|$, para todo $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_\sigma$. De aquí se deduce que el funcional lineal L es acotado y por lo tanto es continuo.

Por el teorema de Lax-Milgram 1.3.10 existe un único $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_\sigma$ que satisface $a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = L\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma$ y por lo tanto el operador $\mathbf{T}$ está bien definido. Ahora demostraremos que el operador $\mathbf{T}$

satisface el estimativo enunciado, para lo cual note que

$$\begin{aligned}\mu_* \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2 &\leq a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) \\ &\leq |a(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}})| \\ &\leq |L\hat{\mathbf{u}}| \\ &\leq C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}^e\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma}.\end{aligned}$$

Utilizando el lema 3.1.1, se obtiene

$$\begin{aligned}\mu_* \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma} &\leq C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}^e\|_{\mathbf{H}_\sigma}) \\ &\leq C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)}).\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la definición de nuestro operador $\mathbf{T}$, se llega a

$$\|\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}_\sigma} = \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{V}_\sigma} \leq C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)}),$$

para todo $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_\sigma$ como se quería. Observe que la desigualdad anterior implica que el operador lineal $T : \mathbf{V}_\sigma \rightarrow \mathbf{V}_\sigma$ es acotado.

Finalmente, vamos a demostrar que el operador $\mathbf{T}$ es compacto en el espacio de Hilbert $\mathbf{V}_\sigma$. Para esto tomemos una sucesión $\{\tilde{\mathbf{u}}^m\}_{m \geq 1} \subset \mathbf{V}_\sigma$ y un elemento $\tilde{\mathbf{u}}$ perteneciente a $\mathbf{V}_\sigma$ tal que

$$\tilde{\mathbf{u}}^m \longrightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ débilmente en } \mathbf{V}_\sigma, \text{ cuando } m \longrightarrow +\infty.$$

Veamos ahora que las imágenes, es decir, la sucesión $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}^m)$ converge de forma fuerte (es decir, en la norma del espacio $\mathbf{V}_\sigma$) a $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}})$. Primero note que el espacio $H^2(\Omega)$ está incluido en el espacio $C^0(\bar{\Omega})$ de forma compacta (por el teorema 1.2.11 con $k = p = n = 2$), y dado que el operador $N : \mathbf{H}_\sigma \longrightarrow H^2(\Omega)$ definido en el capítulo anterior, como $N(\mathbf{u}) = \psi$ es continuo, entonces existe una subsucesión de $\{\tilde{\mathbf{u}}^m\}_{m \geq 1}$, la cual denotaremos sin pérdida de la generalidad igual a la sucesión anterior, es decir, $\{\tilde{\mathbf{u}}^m\}_{m \geq 1}$, la cual satisface por el teorema 1.3.9 que

$$N(\tilde{\mathbf{u}}^m) \longrightarrow N(\tilde{\mathbf{u}}) \text{ fuertemente en } C^0(\bar{\Omega}) \text{ cuando } m \longrightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Además, teniendo en cuenta que $\eta \in C_b^0(\mathbf{R})$ y que la composición de operadores continuos en continua, obtenemos que

$$\eta(N(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^e)) \longrightarrow \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e)) \text{ fuertemente en } C^0(\bar{\Omega}) \text{ cuando } m \longrightarrow +\infty. \quad (3.6)$$

Ahora, debido que, por definición, $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}^m) = \hat{\mathbf{u}}^m$, tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}(\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} &= \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_\sigma'} - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma \\ (\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}}^m \cdot \mathbf{v} &= \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}_\sigma'} - (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}^e), \mathbf{D}(\mathbf{v})).\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando la diferencias entre las dos igualdades anteriores, se llega a

$$(\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^e) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}.$$

Dado que la anterior igualdad es válida para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma$, y en especial cuando $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}$, la igualdad anterior la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$(\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})) + \alpha \int_{\Gamma_3} (\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) \cdot (\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) dS = \langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^e) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), (\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}.$$

Note que el lado derecho de la igualdad satisface que

$$\begin{aligned} & (\mu \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})) + \alpha \int_{\Gamma_3} (\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) \cdot (\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) dS \\ &= \mu \|\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})\|^2 + \alpha \int_{\Gamma_3} \|(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})\|^2 dS \\ &\geq \mu_* \|\mathbf{D}(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})\|^2 \\ &\geq \mu_* \|(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, el lado izquierdo de la igualdad anterior satisface que

$$\begin{aligned} & |\langle \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^e) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e), (\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}| \\ &\leq \|\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^m + \mathbf{u}^e) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e)\| \|(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})\| \\ &\leq \|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e))\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| \|(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}_\sigma}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de lo anterior, se llega a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}^m) - \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}_\sigma} &= \|(\hat{\mathbf{u}}^m - \hat{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}_\sigma} \\ &\leq C(\|\eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e)) - \eta(N(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e))\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\|), \end{aligned}$$

y por lo tanto, cuando $m \rightarrow +\infty$, y teniendo en cuenta la convergencia establecida en (3.5), obtenemos

$$\|\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}^m) - \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{V}_\sigma} \rightarrow 0 \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

Lo anterior significa que $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}^m) \rightarrow \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}})$ fuertemente en el espacio $\mathbf{V}_\sigma$, es decir, que el operador $\mathbf{T}$ es completamente continuo y acotado. Entonces el operador $\mathbf{T}$ también compacto, pues $\mathbf{V}_\sigma$ es un espacio de Hilbert y por lo tanto, es reflexivo.

□

Gracias al lema anterior, se puede demostrar la existencia y unicidad de soluciones débiles de nuestro sistema de Stokes que son los siguientes dos teoremas que vamos a enunciar.

Teorema 3.1.3. (*Existencia*) Supongamos que se satisface las siguientes condiciones;

Γ_1 es un conjunto conjunto conexo y cerrado sobre Γ , con longitud $|\Gamma_1| > 0$,

además se cumplen los datos del problema es decir

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2), \mu \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } \rho_0 \in C^0(\Gamma_1) \text{ } \eta \in C_b^0(\mathbf{R}),$$

y las condiciones de frontera de deslizamiento y de impermeabilidad de Stokes,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ y } [\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}]_{\text{tang}} = 0, \text{ sobre } \Gamma_3. \quad (3.7)$$

Entonces nuestro sistema de Stokes

$$\begin{cases} -\text{div}[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})] + \nabla \mathbf{p} = \rho \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ en } \Omega, \\ \text{div} \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

Tiene por lo menos una solución débil en el sentido de la definición 2.2.2. Si un par $(\mathbf{u}, \rho)$ es una solución débil, el campo $\mathbf{u}$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \leq C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)}), \quad (3.9)$$

donde C es una constante positiva, la cual depende únicamente del dominio Ω y de las constantes μ_* y μ^* .

Demostración. En primer lugar, en el lema anterior ya se estableció que $\mathbf{T}$ definido en 3.1, es un operador compacto en el espacio de Hilbert $\mathbf{V}_\sigma$. Observe ahora que de la desigualdad (3.2), se tiene que $T(\bar{B}_R(0)) \subset \bar{B}_R(0)$, donde $R := C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)})$, y la bola cerrada $\bar{B}_R(0)$ es un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado en $\mathbf{V}_\sigma$. En consecuencia, por el teorema de Schauder 1.3.7 existe al menos un $\hat{\mathbf{u}} \in \bar{B}_R(0) \subset \mathbf{V}_\sigma$ tal que $\mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}$, la cual corresponde a una solución del sistema 3.1. Note que entonces $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_e \in \mathbf{H}_\sigma$, y por lo tanto es una solución débil y satisface la definición 2.2.2. Por otra parte, veamos que $\mathbf{u}$ satisface la desigualdad planteada (3.9), para lo cual note que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma} &= \|\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^e\| \\ &\leq \|\hat{\mathbf{u}}\| + \|\mathbf{u}^e\| \\ &\leq \|\mathbf{u}^e\|_{\mathbf{H}_\sigma} + C(\|\eta\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}_g\|_{\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma \setminus \Gamma_3)}). \end{aligned}$$

□

3.2 Unicidad de soluciones débiles

Para finalizar este capítulo demostraremos que en realidad solo existe una solución débil del sistema de Stokes considerado en este trabajo bajo los supuestos dados.

Teorema 3.2.1. *(Unicidad) Suponga las mismas hipótesis del teorema de existencia 3.1.3, adicionando el supuesto que la función $\eta \in C_b^1(\mathbf{R})$ y que la constante μ_* es suficientemente grande tal que*

$$\mu_* > \bar{C} \|\eta'\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\|, \quad (3.10)$$

donde $\bar{C}$ es una constante fija positiva. Entonces, la solución $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\sigma$ del sistema (2.2.2) es única.

Demostración. Demostraremos la anterior proposición por contradicción. Para esto, supongamos que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son dos soluciones débiles de nuestra formulación integral (2.2.2) pertenecientes al espacio $\mathbf{H}_\sigma$ es decir son dos pares $(\mathbf{u}_1, \rho)$ y $(\mathbf{u}_2, \rho)$, restando obtenemos entonces que $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}_\sigma$ la cual denotaremos como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Note que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ satisfacen que

$$\begin{aligned} (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_1), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} &= \langle \eta(N(\mathbf{u}_1)) \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma \\ (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}_2), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} &= \langle \eta(N(\mathbf{u}_2)) \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma \end{aligned}$$

Restando y utilizando la linealidad del producto interior y la integrales de línea obtenemos

$$(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle (\eta(N(\mathbf{u}_1)) - \eta(N(\mathbf{u}_2))) \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma.$$

Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $N\mathbf{u}_1 < N\mathbf{u}_2$. Entonces, tomando en cuenta que $\eta \in C_b^1(\mathbf{R})$, por el teorema del valor medio, existe $\xi \in (N\mathbf{u}_1, N\mathbf{u}_2)$ tal que

$$\eta(N\mathbf{u}_1) - \eta(N\mathbf{u}_2) = \eta'(\xi) N\mathbf{u}.$$

Ahora si tomamos $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, obtenemos

$$(\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \alpha \int_{\Gamma_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \langle (\eta(N(\mathbf{u}_1)) - \eta(N(\mathbf{u}_2))) \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}.$$

de la demostración anterior sabemos que $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \mu_* \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2$ que es la parte izquierda de la igualdad superior, por lo que utilizando la igualdad del teorema valor medio podemos escribir

$$\mu_* \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2 \leq |\langle (\eta'(\xi)) (N(\mathbf{u}) \mathbf{f}), \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{V}'_\sigma}|$$

Por otra parte note que debido a la inclusión $H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ y a que el operador $N : \mathbf{V}_\sigma \longrightarrow H^2(\Omega)$ es continuo, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 |\langle (\eta'(\xi)(N(\mathbf{u})\mathbf{f}, \mathbf{u}))_{\mathbf{V}_\sigma} | &= \left| \int_{\Omega} \eta'(\xi) N\mathbf{u}\mathbf{f}\mathbf{u} dx \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\eta'(\xi)| |N\mathbf{u}\mathbf{f}\mathbf{u}| dx \\
 &\leq C \|\eta'(\xi)\|_{L^\infty} \|N\mathbf{u}\| \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}\| \\
 &\leq C \|\eta'\| \|N\mathbf{u}\|_{H^2} \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\sigma} \\
 &\leq \bar{C} \|\eta'\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2.
 \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\mu_* \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2 \leq \bar{C} \|\eta'\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2.$$

Por la hipótesis (3.10), se obtiene que

$$(\mu^* - \bar{C} \|\eta'\|_{L^\infty} \|\mathbf{f}\|) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2 \leq 0,$$

es decir, $0 \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma}^2 \leq 0$, por lo tanto $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_\sigma} = 0$, de lo cual $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, como se quería demostrar. $\square$

Capítulo 4

Simulación numérica del sistema de Stokes con condiciones de frontera mixtas

El objetivo central de este capítulo es presentar algunas simulaciones numéricas donde se aproximan soluciones del problema de valor de frontera considerado para sistema de Stokes estudiado en los capítulos previos, en algunos casos particulares donde la densidad y la viscosidad son constantes. Para esto, en la primera sección deducimos una formulación integral o débil apropiada, que puede ser implementada en Python utilizando librerías del proyecto FeniCS.

4.1 Esquema numérico para el sistema de Stokes no homogéneo con densidad constante

Consideramos el sistema Stokes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})] + \nabla \mathbf{p} = \rho \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde las funciones desconocidas son el campo de velocidades $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ y la presión hidrostática $\mathbf{p} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. Por otro lado, son dadas la densidad $\rho : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$, la fuerza externa $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ y la función $\mu : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$ que describe la viscosidad dinámica del fluido es también una función dada.

El dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ es un rectángulo cuyas fronteras están etiquetadas como se muestra en la figura 4.1.

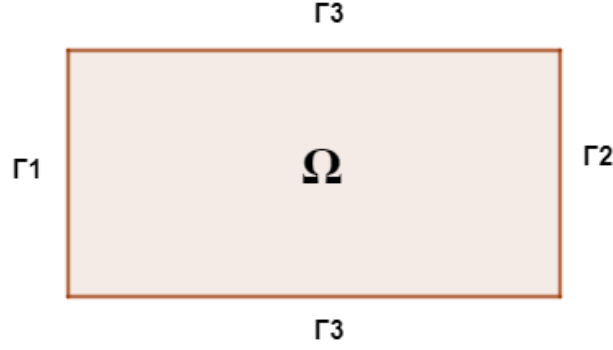


Figura 4.1. Dominio Ω con los segmentos de frontera etiquetados.

Sobre el dominio anterior se anexan al sistema de Stokes considerado las condiciones de frontera

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g = \begin{cases} \mathbf{u}_0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (4.2)$$

y

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ y } [\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u}]_{tang} = 0, \text{ sobre } \Gamma_3, \quad (4.3)$$

donde los datos satisfacen que

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \quad \mathbf{g} \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2), \quad \mu \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } \rho_0 \in C^0(\Gamma_1).$$

Tomando una función de prueba arbitraria $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, tal que $\mathbf{v} = 0$ en Γ_1 y Γ_2 , y multiplicando la primera ecuación del sistema (4.1) por $\mathbf{v}$, se obtiene

$$-div[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Por lo tanto, integrando sobre el dominio Ω , se obtiene

$$\int_{\Omega} (-div[\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx,$$

y utilizando las identidades de Green obtenemos

$$\int_{\Omega} (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})) dx - \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\Omega} \mathbf{p} div(\mathbf{v}) dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx.$$

Operando sobre el término $\int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS$ por separado y utilizando las condiciones de frontera, se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{\Gamma_3} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS \\ &= \int_{\Gamma_3} (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}) dS \\ &= \int_{\Gamma_3} (-\alpha \mathbf{u} + (((\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} + \alpha \mathbf{u})\mathbf{n})\mathbf{n})) \mathbf{v} dS. \end{aligned}$$

Por la condición de impermeabilidad $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, se satisface que

$$\int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS = \int_{\Gamma_3} (-\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (((\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})) dS.$$

Por lo tanto se llega a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})) dx + \int_{\Gamma_3} (\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{\Gamma_3} (((\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_3} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\ = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

Ahora multiplicando la segunda ecuación en el sistema (4.1) por una función de prueba $q \in H^1(\Omega)$, e integrando sobre el dominio Ω , se obtiene

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q dx = 0.$$

Sumando las dos formulaciones integrales anteriores, se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})) dx + \int_{\Gamma_3} (\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{\Gamma_3} (((\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_3} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\ = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q dx, \end{aligned}$$

la cual se usará para la implementación de un esquema numérico en elementos finitos que aproxime soluciones del sistema de Stokes (4.1), sujeto a las condiciones de frontera (4.2), (4.3), en el caso en que la densidad ρ del fluido es constante, y la viscosidad μ puede ser variable.

4.2 Experimentos numéricos

Para nuestro primer experimento numérico el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo de dimensiones $\Omega = [0, 30] \times [0, 10]$. Además establecemos que la densidad, viscosidad, el coeficiente de fricción y la fuerza externa son constantes y tienen los siguientes valores: $\rho = 1$, $\alpha = 1$, $\mu = 1$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, con velocidad en la entrada $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$ y velocidad en la salida $\mathbf{u}_g = (1, 0)$.

El campo de velocidad resultante de esta simulación numérica se presenta en las figuras 4.2, 4.3, utilizando el software gráfico Paraview.

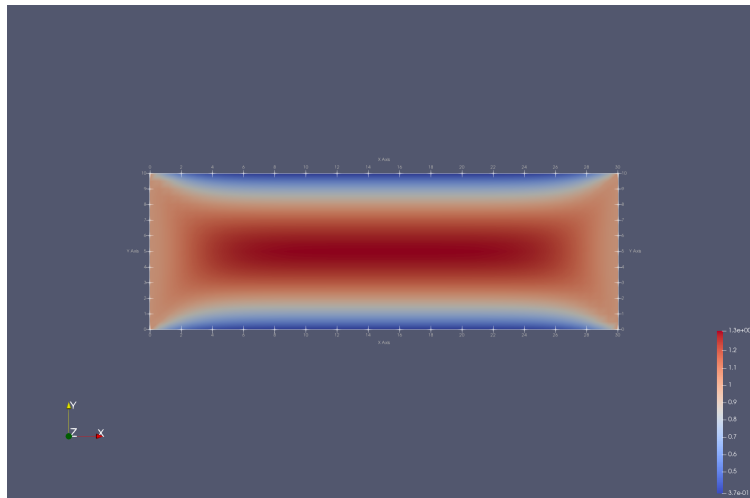


Figura 4.2. Comportamiento de la solución del sistemas de Stokes con coeficientes constantes con fricción $\alpha = 1$.

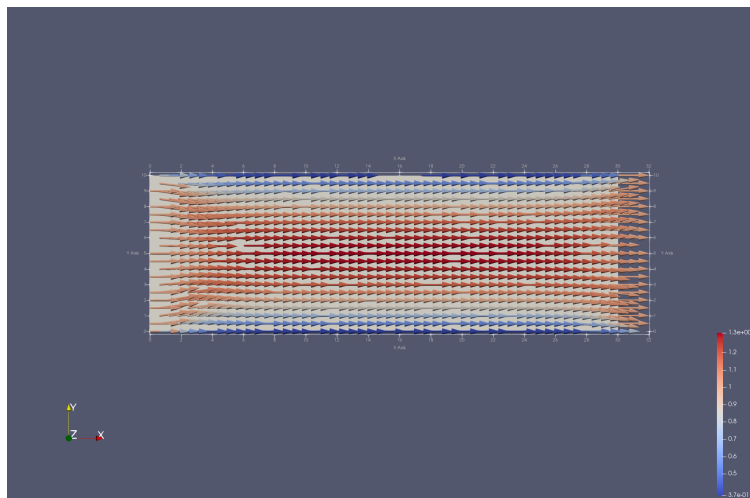


Figura 4.3. Comportamiento de la solución del sistemas de Stokes con coeficientes constantes y fricción $\alpha = 1$.

De los resultados presentados en las figuras 4.2 y 4.3, se observa un buen ajuste entre la solución numérica obtenida y el comportamiento esperado del flujo, con un aumento de la fricción cerca a las paredes del canal, lo cual es evidente por la disminución gradual de la magnitud de la velocidad a medida que se aproxima a las paredes. Por otro lado, la magnitud de la velocidad tiene un valor cerca de 1.0 en el centro del canal, lo cual evidencia que el esquema numérico permite obtener simulaciones numéricas que presentan un comportamiento acorde con las condiciones de frontera impuestas sobre el flujo.

Si conservamos los datos y lo único que realizamos es eliminar la fricción del sistema, es decir, tomando $\alpha = 0$, obtenemos el campo de velocidad mostrado en las figuras 4.4 y 4.5, en las cuales se observa que la magnitud de la velocidad del flujo es casi 1.0 en todo el dominio

y no se evidencia presencia de fricción en las paredes. En todo caso, el campo de velocidad numérico respeta la condición de frontera $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, sobre la frontera Γ_3 .

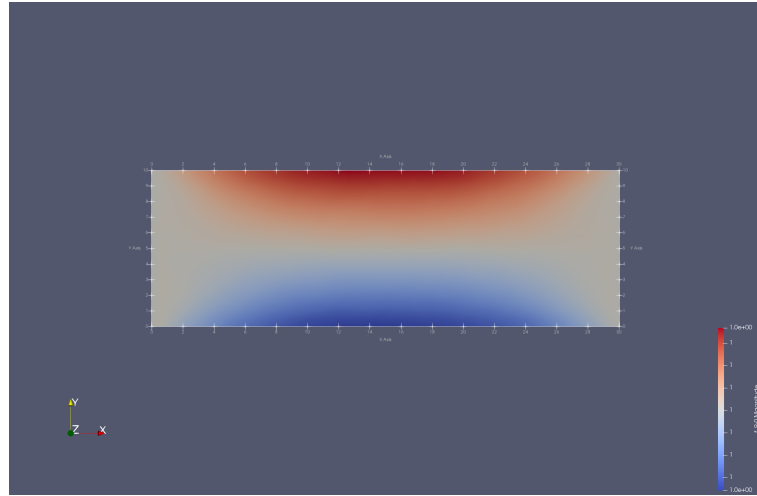


Figura 4.4. Comportamiento de la solución de sistema de Stokes con coeficientes constantes y coeficiente de fricción sobre las paredes nulo, es decir, $\alpha = 0$.

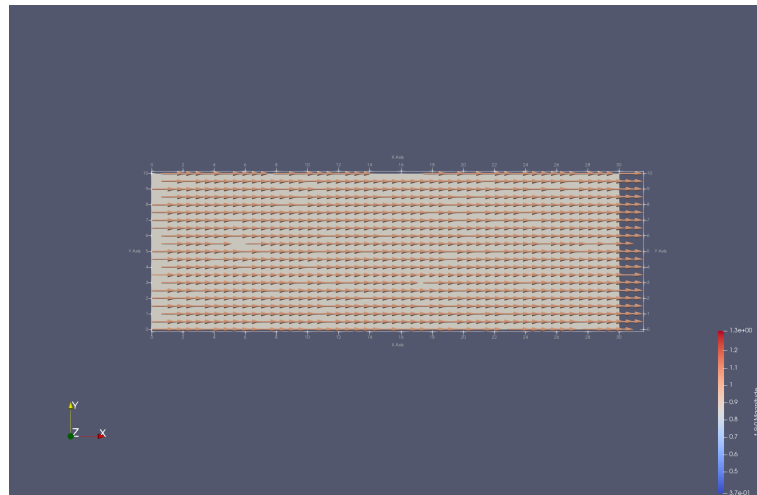


Figura 4.5. Comportamiento de la solución de sistema de Stokes con coeficientes constantes y coeficiente de fricción sobre las paredes nulo, es decir $\alpha = 0$.

Por último en la figura 4.6, presentamos la triangulación del dominio Ω realizado en el método de los elementos finitos usado en los experimentos numéricos.

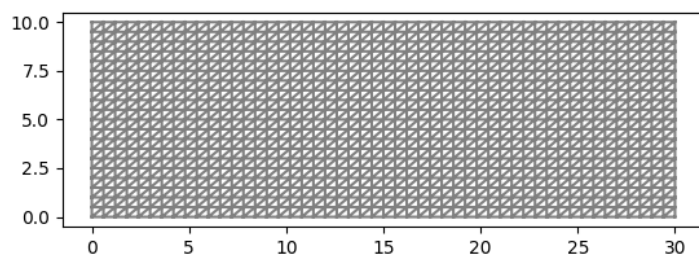


Figura 4.6. Triangulación del dominio Ω utilizado en la discretización por elementos finitos del sistema Stokes (4.1).

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudió la existencia y unicidad de soluciones débiles de un sistema Stokes no homogéneo en 2D, con condiciones de frontera de deslizamiento e impermeabilidad en una región rectangular acotada del espacio $\mathbf{R}^2$. Con este fin se realizó la demostración de todos los teoremas más importantes presentados en [22], completando los detalles faltantes de las pruebas.

Se verificó la eficiencia de los teoremas del Análisis Funcional y en especial el del punto fijo Schauder y el de Lax-Milgram, utilizados aquí para demostrar la existencia de soluciones débiles del sistema de Stokes (4.1), sujeto a condiciones de frontera mixtas que no es la clásica condición sobre la velocidad del fluido $\mathbf{u} = 0$ sobre todas las paredes sólidas, considerada en numerosos trabajos sobre este sistema.

Finalmente, construimos una formulación integral apropiada para el sistema de Stokes (4.1) con las condiciones de frontera consideradas, la cual se consiguió aproximar mediante la técnica de elementos finitos, utilizando rutinas de la librería FeniCS sobre Python. Utilizando el esquema implementado se desarrollaron experimentos en algunos casos particulares donde la densidad, viscosidad y coeficiente de fricción a fin de verificar que la solución numérica obtenida respeta las condiciones de frontera mixtas consideradas en el sistema de Stokes estudiado.

Capítulo A

Apéndice

A continuación presentamos el código realizado en Python utilizando la librería de elementos finitos FeniCS, el cual fue utilizado para realizar las simulaciones numéricas presentadas en el capítulo 4.

```
from dolfin import *

# Resuelve el problema de Stokes, con densidad constante

mu = Constant(1)                # Viscosity
alpha = Constant(0)             # Friction
rho = Constant(1)               # Density

N = 200
delta = 1.5 # The aspect ratio of the domain, epsilon high and \delta wide
epsilon = 1 # height of the rectangle

mesh = RectangleMesh(MPI.comm_world, Point(0.0, 0.0), Point(delta, epsilon), N, N)
n = FacetNormal(mesh)
facet_marker = MeshFunction('size_t', mesh, mesh.topology().dim()-1)

U_h = VectorElement('P', triangle, 2) # Velocity space
P_h = FiniteElement('P', triangle, 1) # Pressure space

W = FunctionSpace(mesh, MixedElement([U_h, P_h]))
```

```

# Mark upper boundary facets as subdomain 1
class UpperNeumannBoundary(SubDomain):
    def inside(self, x, on_boundary):
        tol = 1E-14
        return on_boundary and abs(x[1] - epsilon) < tol

Gamma_31 = UpperNeumannBoundary()
Gamma_31.mark(facet_marker, 1)

# Mark lower boundary facets as subdomain 0
class LowerNeumannBoundary(SubDomain):
    def inside(self, x, on_boundary):
        tol = 1E-14
        return on_boundary and abs(x[1]) < tol

Gamma_32 = LowerNeumannBoundary()
Gamma_32.mark(facet_marker, 0)

ds = Measure('ds', subdomain_data=facet_marker)

def forward():
    w = Function(W)
    u, p = split(w)
    v, q = TestFunctions(W)

    f = Constant( (0, 0) )

    F = mu*inner(grad(u), grad(v)) * dx + alpha * inner(u, v) * ds(0)
        + alpha * inner(u, v) * ds(1)
        - inner(p, div(v) ) * dx + p*inner( v, n)*ds(0)
        + p*inner( v, n)*ds(1)
        - mu*inner(dot(grad(u), n), n)*inner(n,v)*ds(0) -
        mu*inner(dot(grad(u), n), n)*inner(n,v)*ds(1)
        + inner(div(u), q) * dx - rho*inner(f, v)*dx

    u_inflow = Expression(('1', '0'), degree=1)
    u_outflow = Expression(('1', '0'), degree=1)

    bc1 = DirichletBC( W.sub(0).sub(1), 0 , 'on_boundary && (x[1] > 0.9 || x[1] < 0.1)')
    inflow = DirichletBC(W.sub(0), u_inflow, 'on_boundary && x[0] < 0.1' )
    outflow = DirichletBC(W.sub(0), u_outflow, 'on_boundary && x[0] > 1.4 ')

```

```
bc = [bc1, inflow, outflow ]
J = derivative(F, w)
solve(F == 0, w, bcs=bc , J = J, solver_parameters={"newton_solver":
{"relative_tolerance": 1e-8,
"absolute_tolerance": 1e-8, "maximum_iterations": 100}})

return w

w = forward()
u, p = w.split()

vtkffile_u = File('Stokesvelocidad/velocidad.pvd')
vtkfile_p = File('Stokespresion/presion.pvd')

vtkffile_u << u
vtkfile_p << p
```


Bibliografía

- [1] T. M. Apóstol. Cálculo, volumen 2, 1991.
- [2] T. M. Apostol. *Análisis matemático*. Reverté, 2020.
- [3] I. Babuska, P. G. Ciarlet, and T. Miyoshi. *Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics: Proceedings of the International Symposium on Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics, September 29–October 3, 2000 Yamaguchi, Japan*, volume 19. Springer Science & Business Media, 2001.
- [4] E. S. Baranovskii, E. Lenes, E. Mallea-Zepeda, J. Rodríguez, and L. Vásquez. Control problem related to 2d stokes equations with variable density and viscosity. *Symmetry*, 13(11):2050, 2021.
- [5] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. Dynamics of polymeric liquids. vol. 1: Fluid mechanics. 1987.
- [6] J. L. Boldrini, E. Mallea-Zepeda, and M. A. Rojas-Medar. Optimal boundary control for the stationary boussinesq equations with variable density. *Communications in Contemporary Mathematics*, 22(05):1950031, 2020.
- [7] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] J. B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96. Springer, 2019.
- [9] J. B. Conway et al. A course in functional analysis [electronic resource].
- [10] J.-M. Coron. On the controllability of the 2-d incompressible navier-stokes equations with the navier slip boundary conditions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1:35–75, 1996.

- [11] G. Dhatt, E. Lefrançois, and G. Touzot. *Finite element method*. John Wiley & Sons, 2012.
- [12] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [13] J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 2002.
- [14] N. Frolov. Solvability of a boundary problem of motion of an inhomogeneous fluid. *Mathematical Notes*, 53(6):650–656, 1993.
- [15] H. Fujita. A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions (mathematical fluid mechanics and modeling). *Proceedings of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 888:199–216, 1994.
- [16] H. Fujita. A coherent analysis of stokes flows under boundary conditions of friction type. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 149(1):57–69, 2002.
- [17] G. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [18] W. Jäger and A. Mikelić. On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow. *Journal of Differential Equations*, 170(1):96–122, 2001.
- [19] W. Jäger and A. Mikelić. Couette flows over a rough boundary and drag reduction. *Communications in Mathematical Physics*, 232(3):429–455, 2003.
- [20] H. P. Langtangen and A. Logg. *Solving PDEs in python: the FEniCS tutorial I*. Springer Nature, 2017.
- [21] A. Logg, K.-A. Mardal, and G. Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, and É. J. Villamizar-Roa. An optimal control problem for the steady nonhomogeneous asymmetric fluids. *Applied Mathematics & Optimization*, 80:299–329, 2019.
- [23] A. Mikelić and W. Jäger. On the interface boundary condition of beavers, joseph, and saffman. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(4):1111–1127, 2000.
- [24] C. Navier. Memoria sobre las leyes del movimiento de fluidos, 1822.
- [25] J. Schauder. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Mathematica*, 2(1):171–180, 1930.
- [26] A. Shafiq, G. Rasool, and C. M. Khalique. Significance of thermal slip and convective boundary conditions in three dimensional rotating darcy-forchheimer nanofluid flow. *Symmetry*, 12(5):741, 2020.
- [27] G. R. Sierra. *Introducción al análisis funcional*. Universidad del Valle, 2010.