

El concepto de aproximación local: una propuesta metodológica a partir de la recta tangente

Pedro Vicente Esteban Duarte

Pedro Pérez Carreras

Resumen

El propósito de este artículo es exponer una metodología para enseñar el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto, a partir de la visualización que se obtiene del haz de secantes, entendiéndolo como el conjunto de rectas que pasan todas por un punto fijo de la curva y por otros sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado. El concepto de aproximación local es un tema central en el análisis matemático y, su enseñanza en una edad temprana ayudará a que los alumnos adquieran un avanzado nivel de razonamiento. La visualización que se propone, se obtiene con la ayuda del asistente matemático *DERIVE®* y no requiere de manipulaciones algebraicas que entorpezcan el razonamiento que los alumnos deben desarrollar y exhibir a lo largo del proceso. El material que se expone, está diseñado para ser cubierto en una clase, en la cual el profesor sirva de orientador, formulando preguntas y respondiendo inquietudes en el momento oportuno.

Palabras y frases claves: Haz de secantes, proceso de aproximación local, visualización, niveles de razonamiento, pendiente, derivada.

1 Introducción

El concepto de aproximación local es uno de los temas centrales del análisis matemático. Entre las manifestaciones importantes se encuentran la recta tangente a una curva plana en un punto, la derivada de una función en un punto, la integral de una función, las sucesiones, las series infinitas y todos los procesos que requieren del paso al límite. Todos estos conceptos forman parte de los programas de matemáticas de los últimos años de secundaria y de las carreras técnicas y científicas en los primeros años de universidad. En los textos escolares estos conceptos se comienzan a explicar a partir de su definición y luego se pasa directamente a la solución de ejercicios algebraicos. Es así como existe un total desconocimiento de los procesos de razonamiento por parte del profesor, lo cual no le permite al alumno acceder al concepto explicado en forma eficaz y correcta.

El concepto de tangente sólo se define en la escuela elemental con relación a la circunferencia. Luego se utiliza al finalizar el secundaria y en los primeros años de universidad, como una visualización del concepto

de derivada de una función en un punto. Al no tener una definición de tangente para curvas en general, se crea una asociación incorrecta entre tangente y derivada, pues la mayoría de alumnos asocian estos dos conceptos como equivalentes, llegando a trasladar la idea estática de tangente a una circunferencia al de derivada de una función en un punto, sin llegar a comprender el dinamismo, involucrado en el paso al límite, de los dos conceptos.

Utilizando el Asistente Matemático *DERIVE*® (versión 4.09 bajo Windows), proponemos una metodología para la enseñanza del concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos. Esto le permite al alumno, de los últimos años de bachillerato y primeros años de universidad, percibir una visualización del concepto de tangente y así lograr una definición verbal adecuada. La visualización propuesta se obtiene a partir de la construcción de un haz de secantes [1], que pasa por un punto fijo de una curva plana y por otros puntos sobre ella cada vez más cercanos al punto elegido; lo que permite, sin manipulaciones algebraicas, acceder al concepto mencionado. Además, de esta manera, pretendemos que el alumno involucrado en esta experiencia de aprendizaje comprenda con un alto significado matemático el concepto de derivada de una función en un punto. Pues, mediante el proceso de hallar el límite de las pendientes de la sucesión indefinida (infinita) del haz de secantes el alumno obtiene la derivada de la curva en ese punto.

2 Elementos básicos de estudio

Antes de iniciar la construcción del haz de secantes, se requiere que el alumno reconozca los objetos básicos de estudio: punto, recta y curva desde lo visual y geométrico [2]. Es decir, que el punto y la recta no tienen ningún grosor, que la línea recta solo tiene la dimensión de la longitud y que las curvas, unas pueden ser cerradas, otras abiertas y que la línea recta es un tipo especial de curva que se extiende indefinidamente en una sola dirección. Para ello, el profesor le preguntará al alumno por la idea intuitiva que tiene acerca de los objetos de estudio. Al alumno que piense que el punto y la recta tienen algún grosor, el profesor le dará la idea intuitiva correcta desde lo visual y geométrico; le ayudará a comprender que estos entes son sólo representaciones. Lo anterior es necesario para la implementación de esta propuesta metodológica.

3 Relaciones entre los elementos básicos de estudio

Resaltamos que en esta propuesta metodológica no se requiere que las gráficas se dibujen con cuadrículas o con ejes coordenados, para ello desactivamos estas opciones en la ventana gráfica de *DERIVE*®. Pues empleando esta metodología no es necesario enfatizar en la noción de distancia. Es importante tener en cuenta que una vez que el alumno haya finalizado un proceso debe borrar todas las gráficas realizadas antes de continuar con la experiencia.

3.1 Relación punto-recta

El alumno debe tener total claridad sobre el hecho de que por dos puntos del plano pasa una sola recta. Para mostrar esto, se escribe en el editor de ecuaciones de *DERIVE*® la expresión $[2, [-1, 2], [1, 2]]$ y al graficar, se obtiene en la pantalla la recta $y = 2$ y los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$ resaltados. En este momento, le preguntamos al alumno, ¿es posible trazar otra línea recta que sea distinta de la que está dibujada y que pase por esos mismos dos puntos? La respuesta esperada es: “no, por esos mismos dos puntos es imposible trazar otra recta distinta”. Aquellos alumnos que respondan afirmativamente, están indicando que tienen la idea de puntos y rectas gruesas. Antes de continuar, se hace necesario recalcar nuevamente sobre las propiedades geométricas de punto, recta y curva.

3.2 Relación punto-curva

Para una curva plana particular y un punto fijo sobre ella, el alumno debe percatarse de que existen puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste, bien sea desde la derecha o desde la izquierda. Esta visualización se puede obtener mediante las siguientes órdenes en el editor de ecuaciones de *DERIVE*®:

```
F(x):=
PUNTOS(h, n):= VECTOR([b, f(b)], b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m,
VECTOR(i, i, 0, n-1)))
a:= a0
[a, f(a)]
```

$F(x)$ es la curva que se quiere estudiar. La función de *DERIVE*® $PUNTOS(h,n)$ permite encontrar y graficar puntos sobre la curva $F(x)$. El parámetro h , cuando h es positivo, define el valor $x=a+h$ desde el cual se comienza el acercamiento al valor $x=a$ desde la derecha. El parámetro

n es el número de puntos $(b, f(b))$ que se quieren dibujar sobre la curva. El valor $a=a_0$ define el punto $(a_0, f(a_0))$, el cual es el punto fijo sobre la curva.

La función $F(x) := 0.3(x-1)(x+2)(x+3)$ y para valores de $x > -2.5$, la definimos en el editor de ecuaciones como sigue: $F(x) := \text{IF}(x > -2.5, 0.3(x-1)(x+2)(x+3))$.

Al tomar un valor particular para a , digamos 0.1, un h positivo igual a 1 y un n igual a 5 digitamos en el editor de *DERIVE*® las siguientes instrucciones:

```
\#1: F(x) :=
\#2: PUNTOS(h, n) := VECTOR([b, F(b)], b, VECTOR(a +
h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n - 1)))
\#3: a := 0.1
\#4: [a, f(a)]
\#5: F(x) := IF(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))
\#6: PUNTOS(1, 5)
```

Al graficar la ecuación #5 y el punto $(a, f(a))$ (#4), se obtiene la Fig.1.

Figura 1: Punto fijo sobre la curva

Al simplificar la expresión #6 y graficarla, se obtiene la Fig.2. En este momento, se le pregunta al alumno: ¿cuántos puntos más se podrán trazar sobre la curva, de tal forma que se acerquen cada vez más al punto fijo dado? Se le motiva para que él mismo, con la función $\text{PUNTOS}(h,n)$ grafique otros puntos sobre la curva, cada vez más cerca al punto fijo. Para ello, debe mantener la h fija en 1 y la n variando de acuerdo con el número de puntos que quiere dibujar. Por ejemplo: ejecutar las ordenes

Figura 2: Puntos cercanos al punto fijo

PUNTOS(1,10), PUNTOS(1,20), etc, simplificando y graficando en cada caso.

El profesor, después de que el alumno haya hecho algunos ensayos, debe de repetir la pregunta anterior. La respuesta esperada de los alumnos es: “se puede trazar un número indefinido (infinito) de puntos cada vez más cercanos al punto fijo dado”. Cabe anotar que si el alumno manifiesta que solamente se puede dibujar un número finito de puntos, éso indica que su razonamiento está guiado más por el aspecto visual que por la abstracción. Es necesario insistirle que dibuje un número de puntos cada vez mayor con el propósito de que perciba el aspecto indefinido subyacente en este proceso.

El proceso anterior también puede ilustrarse partiendo desde la izquierda del punto fijo dado. Para ello le damos un valor negativo a h , digamos -1 , y si el número de puntos que queremos trazar es 10, ejecutamos la siguiente instrucción: PUNTOS(-1,10). Es importante hacerle notar a los alumnos que, para esta gráfica y para ese punto fijo, las conclusiones que se obtienen al efectuar el proceso de acercamiento por un lado o por el otro son las mismas. Luego, le pedimos que conjeture si sucede lo mismo para cualquier curva y cualquier punto sobre ella.

3.3 Relación recta-curva

La relación que interesa establecer entre las rectas y la curva es la de secante, para ello definimos la siguiente función de *DERIVE*®:

```
SECANTE(h, n) := VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b)(x-a) + F(a), b,
VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n -1)))
```

Los parámetros a , h , y n tienen el mismo sentido que los dados para la función $\text{PUNTOS}(h,n)$, sólo que en este caso, la n significa el número de secantes que se quieren trazar. Todas estas secantes pasan por el punto $(a, f(a))$ y por los puntos móviles $(b, f(b))$, que se acercan cada vez más al punto fijo $(a, f(a))$. El valor b depende de h y n .

Por ejemplo, si se quieren trazar 5 secantes que pasen todas por el punto fijo $(0.1, f(0.1))$ y por puntos $(b, f(b))$ cada vez más próximos al punto fijo, se da la orden $\text{SECANTE}(1,5)$, se simplifica y grafica, obteniendo la siguiente ilustración:

Figura 3: Construcción del haz de secantes

Aquí es importante resaltarle al alumno *el sentido de acercamiento*: todas las secantes pasan por el punto fijo dado y por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste. Se le propone que trace otras secantes sobre la misma gráfica: $\text{SECANTE}(1,20)$, $\text{SECANTE}(1,30)$ y se le pregunta: “si continuamos con este proceso, ¿cuántas rectas secantes más se podrán trazar, de tal forma que pasen por el punto fijo y por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él? La respuesta esperada es que: “de esta forma se pueden trazar un número indefinido (infinito) de secantes”. El alumno que responda que “sólo se puede trazar un número finito de secantes”, involucrará que su razonamiento está motivado únicamente por lo que ve y no hace ninguna abstracción. Todavía no ha logrado percibir las propiedades geométricas del punto y la recta, lo que le impide comprender el proceso indefinido que se está describiendo. Se le motiva a que grafique más secantes para conducirlo a razonar en el respectivo proceso infinito.

Con esta última ilustración en la pantalla del ordenador, se le formula la siguiente pregunta: ¿si se continúa con este proceso que le sucedería a las secantes? La respuesta esperada es que “al continuar con el proceso, las secantes se estabilizarán sobre una línea recta que no es sobrepasada por ninguna de las secantes”. Dada esta respuesta, se puede determinar si el alumno entiende que, aunque el proceso es infinito, éste tiene *fin* (proceso de acumulación del haz de secantes). Otros alumnos pueden dar respuestas equivalentes, entendiendo la estabilización como un “tope”, como “el final” de un proceso, o más importante aún, que la “tangente es el límite del haz de secantes”.

Hay que distinguir dos tipos de razonamiento en los alumnos. Algunos perciben que la estabilización se puede alcanzar, después de haber trazado un número finito de secantes, dando a entender claramente que su razonamiento está influenciado por lo que están viendo en la pantalla del ordenador. Otros, que esta estabilización se alcanza al final de un proceso indefinido (infinito), exhibiendo un razonamiento más avanzado.

Cabe resaltar que el alumno puede obtener las mismas conclusiones trazando secantes desde la izquierda del punto fijo. Se recomienda cambiar el color de las secantes, para poder estudiar la zona en la cual los dos haces *parecen* juntarse. El alumno debe inferir que la *supuesta* recta de estabilización (tangente) separa los haces de secantes.

4 Concepto imagen de tangente

Es importante explorar lo que el alumno piensa acerca de la tangente y en qué situaciones visualmente la identifica [3]. Comenzamos esta exploración graficando las siguientes ecuaciones:

$$G(x) := \text{IF}(x < -0.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 0.5x - 2$$

Luego, se hace la pregunta: ¿qué relación existe entre la curva y la recta? La respuesta esperada es: “la recta corta a la curva”, o alguna otra expresión equivalente. Algunos alumnos responderán: “la recta es tangente a la curva”, y al pedirles explicación, darán como respuesta: “la recta y la curva tienen un solo punto de contacto”. El profesor debe continuar la exposición, sin hacer ningún comentario al respecto, pues el objetivo que se persigue es que los alumnos, por sí mismos, encuentren una manera de justificar sus respuestas.

Presentamos la siguiente gráfica:

$$G(x) := \text{IF}(-3.8 < x < 1.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 0.5x - 2.5$$

Y nuevamente se pregunta: ¿qué relación existe entre la curva y la recta?

La respuesta esperada es: “entre la curva y la recta no existe ninguna relación, pero si la curva se prolonga, podrían cortarse en algún punto”. Algunos alumnos dirán que la curva y la recta no tienen ninguna relación y, se negarán a admitir que la curva se pueda prolongar. A estos alumnos se les sugiere que grafiquen el polinomio en un intervalo más amplio y se aseguren de esa posibilidad. Se les sugiere el intervalo $(-5, 5)$.

Ahora, se le pide que grafique las siguientes ecuaciones:

$$G(x) := 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$F(x) := 25x/82 - 73/41$$

Luego, se procede con la siguiente pregunta: ¿crees que la recta es tangente a la curva? La respuesta esperada es: “en una parte de la curva seguro que no y en la otra puede que sea tangente”. Pero, la mayoría de los alumnos responderán que la recta es tangente a la curva en la parte derecha. Al pedirles una explicación, dirán: “que la recta *toca* a la curva en un solo punto” [3], por lo tanto, están respondiendo desde su concepto imagen de tangente a una circunferencia. Estos alumnos todavía no perciben que la relación de tangencia es una propiedad local. Pero es necesario que comprendan esta propiedad y logren reformular su concepto imagen. Por lo tanto, se les pide que dibujen la curva por trozos, con las siguientes instrucciones:

$$G(x) := \text{IF}(-5 < x < -1, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 25x/82 - 73/41$$

$$G(x) := \text{IF}(-1 < x < 5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 25x/82 - 73/41$$

Y para cada caso se pregunta: ¿es la recta tangente a la curva? La respuesta generalizada es: “la recta corta la curva en la primera situación y es tangente en la segunda”. Es necesario señalarles que en cada caso, se están viendo trozos de la misma curva y la misma recta. Luego, el profesor preguntará: ¿si la *recta fuera tangente* a la curva en alguno de sus puntos, se podría dar el caso que a la vez fuera tangente en algunos puntos y en otros secante? Se finaliza la exploración del concepto imagen con la siguiente pregunta: ¿cómo podríamos estar siempre seguros de que una recta es tangente a una curva? El propósito de las preguntas anteriores es que el alumno comprenda el aspecto de la *localidad* de la tangencia.

5 Relación haz de secantes – tangente

Los objetivos que el alumno debe lograr son:

- a. Percibir que el concepto de recta tangente a una curva es más amplio que el de tangente a una circunferencia.
- b. Entender la necesidad del *proceso de aproximación* para asegurarse cuándo una recta es o no tangente a una curva en un punto dado.
- c. Verbalizar una definición adecuada de tangente, partiendo del mecanismo del haz de secantes.

Para que el alumno comience a reevaluar el concepto imagen de tangente a una circunferencia se usa la Figura 4, que se obtiene con la instrucción $[x^3, 0, 0]$. Luego, el profesor hace el siguiente comentario: “se observa una curva y una recta que tienen solamente un punto de corte”.

Figura 4: Tangente que corta la curva

Y formula la siguiente pregunta: ¿crees que la recta es tangente a la curva en el punto de corte? La respuesta esperada es que “sí”. Al ver la gráfica, el alumno que razona desde la parte visual argumentará que la

curva y la recta “coinciden en un segmento”, y por lo tanto, tienen más de un punto en común y la recta no puede ser tangente. Otros alumnos ven la curva dividida en dos partes, una por debajo de la recta y la otra por encima, manifestando que la recta es tangente a cada una de estas dos partes por separado, pero no a la curva en el punto señalado. Aquí, el profesor escucha los comentarios sin emitir ningún juicio. Antes de presentar la próxima gráfica, se le pregunta al alumno si puede describir un método que permita *determinar* si una recta dada es o no tangente a una curva en un punto dado.

Las siguientes graficas tienen como objetivo hacer que el alumno comience a relacionar el mecanismo del haz de secantes con la tangente. Se le pide que grafique las siguientes ecuaciones:

$$F(x) := \text{IF}(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$T(x) := (F(0.1) - F(0.25))/(0.1 - 0.25)(x - 0.1) + F(0.1)$$

El profesor hace la siguiente afirmación: “*la recta pasa por un punto de la curva*”. En lo que respecta con el cambio del concepto de definición [3], esta afirmación es importante, lo cual se comprobará cuando se dibujen haces de secantes que pasen por ese punto. El hecho de que una recta pase por un punto de una curva y tenga la “apariencia” de ser tangente, no garantiza la tangencia. Con estas gráficas en la pantalla del ordenador, se pregunta al alumno: ¿crees que la recta es tangente a la curva? ¿por qué? La respuesta esperada es que “partiendo solamente de lo que se ve en la gráfica no es posible determinarlo”. La mayoría de los alumnos responden que “sí” y dan como argumento que la recta pasa por un punto de la curva. Independiente de las respuestas que se obtengan, se les pide que ejecuten las siguientes ordenes: **SECANTE(1,5)**, **SECANTE(1,10)**, **SECANTE(1,30)**, etc. Para una mejor distinción entre la curva, la recta dada y las secantes, se utiliza el comando *Opciones* en la ventana gráfica que permite fijarle un color distinto a las secantes.

El hecho de dibujar los haces de secantes de forma progresiva le ayudará al alumno a entender que el proceso es indefinido y secuencial. Al ejecutar la última orden dada, se le pide que describa lo que observa. Luego se le pregunta: ¿qué significa el hecho de que la primera recta trazada esté *dentro* del haz de secantes? Es importante que al alumno le quede la *sensación* de que no se puede fiar de lo que ve, y que para poder emitir un juicio al respecto debe acudir al proceso del haz de secantes.

Con las siguientes expresiones, se obtiene la misma curva y dos rectas distintas que pasan por el mismo punto de ella.

$$F(x) := \text{IF}(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$T(x) := ((F(0.1) - F(0.18))/(0.1 - 0.18)(x - 0.1) + F(0.1))$$

$$N(x) := 9(305x - 1007)/5000$$

Luego se hacen las siguientes preguntas: ¿es posible que las dos rectas sean tangentes a la curva en el punto en cuestión? ¿es posible que ninguna lo sea? En todo caso, ¿cómo se podrá salir de dudas?

Después de las anteriores preguntas muchos alumnos manifestarán que la forma de saber si las rectas son o no tangentes, es trazando un haz de secantes que pase por el punto en cuestión y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado. Se les sugiere dar la orden `SECANTE(1,20)` y que describan lo que ven en la pantalla. Las secantes dibujadas con esta orden superan la primera recta, pero no la segunda. Con esta ilustración, y a partir de la experiencia anterior, dirán que la primera recta es secante. Se les pregunta: ¿cómo será posible salir de dudas acerca de la tangencia, o no, de la segunda recta? Se les sugiere que ejecuten las siguientes ordenes: `SECANTE(1,30)`, `SECANTE(1,50)`, `SECANTE(1,100)`, entre otras.

Para cada caso, se le solicita al alumno que describa el proceso que está haciendo y se le pregunta: ¿qué le sugiere el hecho que el haz de secantes *parece estabilizarse* sobre la segunda recta? En este momento, el alumno debe comprender que lo que realmente garantiza que una recta sea tangente a una curva en un punto es, además de tocar o cortar, ser el *final* —el límite— del proceso indefinido (infinito) del haz de secantes.

Es importante señalar que se pueden diferenciar dos tipos de razonamientos relacionados con la estabilización del haz de secantes: los alumnos que razonan desde la parte visual afirmarán que ese *final* se obtiene después de trazar un número finito de secantes, mientras que otros alumnos con un razonamiento más avanzado comprenderán el *final* (la tangente) como la *estabilización* de un proceso indefinido (infinito).

La siguiente pregunta explora el progreso del lenguaje en el alumno a lo largo de la experiencia: ¿es posible que en algún caso *especial* la tangente corte a la curva en el punto de tangencia? La respuesta esperada es “sí”. Además, algunos alumnos darán como ejemplo la gráfica $[x^3, 0, 0]$, estudiada anteriormente. Para confirmar este caso especial, se definen las siguientes fórmulas en el editor de *DERIVE*®:

$$a := 0$$

$$F(x) := x^3$$

$$G(x) := 0$$

Y se comienza a efectuar el proceso de aproximación con las siguientes ordenes: `SECANTE(1,5)`, `SECANTE(1,20)`, `SECANTE(1,50)`, entre otras.

Al finalizar cada orden se pregunta: ¿cuál será la dirección de la recta en la cual se estabilizarán las secantes? El alumno que comprenda que la tangente es una recta de estabilización, aceptará sin mayor dificultad que ésta puede cortar a una curva en el punto de tangencia. Aquí es necesario que el profesor haga un aporte de información confirmándole al alumno que la recta señalada es tangente a la curva en el punto dado. Es posible que la mayoría de alumnos, en este momento, pueda encontrar la dirección de la tangente, cuando ésta exista, a una curva cualquiera en uno de sus puntos. Para confirmar esto, se propone que grafiquen la siguiente función: $F(x) := x^2$

Y luego, se hace la siguiente pregunta: distinguiendo entre vertical, horizontal u oblicua, ¿cuál será la dirección de la tangente a la curva en el punto más bajo? La mayoría de los alumnos dirá que es horizontal. Luego, se les solicita justificación a su respuesta. Si han entendido el proceso, responderán: “porque al ubicarnos en el punto más bajo, tomar otro punto sobre la curva y efectuar el proceso del haz de secantes por puntos cada vez más próximos al punto elegido, el proceso indefinido (infinito) del haz de secantes se estabilizará en una recta horizontal”. El alumno que no ha entendido el proceso y razona desde lo visual dirá: “que la tangente en el punto más bajo es horizontal, puesto que por ese punto es *fácil* trazar una recta que toque la curva en ese punto”. Esto significa que el alumno no ha superado el concepto imagen de tangente a una circunferencia. Y más aún, no ha comprendido que el mecanismo del haz de secantes es el proceso que permite saber con *certeza* (en este caso) la dirección de la tangente a la curva en el punto señalado.

La orden: $F(x) := \text{If}(x < 0, -(-x)^{(1/3)}, x^{(1/3)})$, se acompaña con la pregunta: ¿existe la recta tangente en el punto *central* de la curva? Si la respuesta es afirmativa, el alumno debe determinar si la dirección es vertical, horizontal u oblicua. En todos los casos el alumno puede verificar su respuesta, ejecutando las ordenes: **SECANTE(1,5)**, **SECANTE(1,20)**, **SECANTE(1,50)**, etc. Esto permitirá que el alumno considere nuevamente la tangente como el proceso de estabilización del haz de secantes. Esta es otra situación especial en la cual la tangente corta a la curva y su dirección es vertical. El alumno que continúe razonando desde su concepto imagen de tangente a una circunferencia manifiesta que la curva no tiene tangente en ese punto, argumentando que cualquier recta que pase por ese punto cortará la curva.

6 Definición de tangente

El lenguaje empleado por un alumno para referirse a un concepto matemático específico es uno de los indicadores del nivel de razonamiento en el cual se encuentra respecto del concepto estudiado. Es por ello que la siguiente pregunta la formulamos sin referencia a ninguna gráfica en particular: supongamos que disponemos de un instrumento adecuado para trazar sucesivas secantes que pasen por un punto de una curva y *por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste*, ¿cuál será un método adecuado para trazar la tangente a la curva en ese punto? A continuación comentamos algunos tipos de respuestas de los alumnos.

6.1 Respuestas adecuadas

“Trazar secantes que pasen por el punto dado y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él. La tangente es aquella recta a la cual se aproximan las secantes cuando se estabilizan”. Con esta respuesta, u otras equivalentes, el alumno manifiesta claramente que hace un uso riguroso del lenguaje matemático y entiende que la tangente a una curva en un punto es el *final* de un proceso de aproximación indefinido (infinito); está manifestando que su razonamiento es avanzado respecto del concepto de tangente a una curva en un punto. El alumno ha hecho una cadena de elaboraciones mentales que le permite percibir este concepto como un proceso dinámico (paso al límite). Por lo tanto, es posible asegurar que el alumno comprenderá la formalización del concepto en el momento que se exponga a esa nueva situación. Es importante resaltar, que el lenguaje utilizado en la respuesta es una manifestación de la integración del concepto imagen y el concepto definición de tangente [1].

6.2 Respuestas de alumnos que no han superado el concepto imagen de tangente a una circunferencia

- a. “Dibujar una recta por el punto dado y luego trazar secantes para ver si se estabilizan en la recta inicialmente dibujada”. Esta respuesta no es adecuada porque el alumno no ha entendido que la tangente es el final del proceso de estabilización del haz de secantes. Sin embargo, sí ha entendido que el proceso del haz de secantes sirve como un mecanismo para confirmar si una recta dibujada es ó no tangente a una curva en un punto.
- b. “Trazar secantes hasta que una de ellas toque la curva en el punto dado”. Los alumnos que responden de esta manera no comprenden

que el proceso del haz de secantes se efectúa partiendo del punto fijo dado y por otros sobre la curva cada vez más cercanos a este. Tampoco comprenden que el mecanismo del haz de secantes es un proceso de aproximación y continúan razonando desde su concepto imagen de tangente a una circunferencia. Es decir, no perciben la noción de límite subyacente e inherente al concepto de tangente.

7 Ejercicios de confrontación

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo detectar si los alumnos aplican la definición dada por ellos mismos. También, *forzarlos* para que exhiban su capacidad de razonamiento en el momento de determinar la existencia ó no de la tangente en algunos puntos particulares de curvas especiales.

Inicialmente se considera la siguiente curva $F(x) := 2|x|^{1/2}$ que se obtiene con la orden $F(x) := 2\text{SQRT}(\text{ABS}(X))$. Luego se formula la pregunta: ¿cuál es la dirección de la recta tangente en el punto más bajo? La respuesta esperada es: “la dirección es vertical”. Se le pide que confirme sus respuestas dando alternadamente las ordenes $\text{SECANTE}(1,n)$, $\text{SECANTE}(-1,n)$, sugiriendo valores grandes de n (dependiendo de la capacidad del ordenador).

El siguiente caso a considerar es la tangente a la curva $F(x) := x$ en uno de sus puntos. Aquí se presenta una enorme dificultad, pues la mayoría de las veces el alumno no comprende que *la recta es tangente así misma en cada uno de sus puntos*. Cuando confirma este hecho, su actitud es de total desconcierto, mostrándose incrédulo. Es importante señalar algunas dificultades que el alumno hace evidentes: no considera una línea recta como un caso especial de una curva; al aplicar el mecanismo del haz de secantes aparece en su razonamiento una gran confusión; otra reside en el nivel de abstracción que debe de hacer para comprender esta nueva situación bien particular de tangencia; se resiste a considerar este caso, entre otras situaciones.

Con el propósito de insistir en la implementación del proceso del haz de secantes, se le solicita que grafique la línea recta $y=x$. Luego, con la orden $\text{SECANTE}(1,n)$, para varios valores de n , comience a trazar haces de secantes. Además, se le pide que explique lo que observan en la pantalla para distintos valores de n , con el propósito de que explicite con sus propias palabras este hecho.

Ahora se considera el vértice de la función valor absoluto que se obtiene con la orden $F(x) := \text{abs}(x)$. Y se hace la siguiente pregunta: si existe la tangente en el punto más bajo, ¿cuál será su dirección? Los

alumnos que continúen razonando desde el concepto imagen de tangente a una circunferencia, responden: “es cualquier recta que pase por ese punto”. Quienes hayan comprendido el proceso manifiestan: “hay dos tangentes, una para cada lado de la curva y que como no se obtiene una única recta de estabilización no hay tangente en dicho punto”. Para confirmar o corregir las repuestas dadas se les sugiere que den, alternadamente, las ordenes `SECANTE(1,n)` y `SECANTE(-1,n)` y que expliquen lo que están observando en la pantalla del ordenador.

La facilidad con la cual el alumno encuentra la dirección de la tangente a las gráficas propuestas anteriormente, la precisión en el lenguaje utilizado al dar sus repuestas; son indicadores de sí ha adquirido o no un nivel avanzado de razonamiento con respecto al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos.

Para terminar esta sección se hace una pregunta resumen, con el propósito de detectar si el alumno percibe o no las limitaciones del método del haz de secantes: ¿imaginas o recuerdas alguna curva en la cual el proceso del haz de secantes no se puede aplicar para encontrar la tangente sobre un punto de ella? Aquí lo importante es escuchar los comentarios que el alumno manifiesta, dándole prioridad al lenguaje empleado. Se le motiva a que grafique las funciones que propone y que exprese las dificultades que observa.

8 Limitaciones del método

Estudiar las limitaciones del mecanismo del haz de secantes es importante porque a partir de ellas, se evidencia la necesidad de una definición rigurosa del concepto de tangente a una curva. Esto posibilitará que el alumno pueda comprender y formalizar el concepto de derivada de una función en este punto.

En la siguiente función el aspecto visual del proceso del haz de secantes no es de gran ayuda, pues es bastante *engañoso* ya que al dibujar haces de secantes cerca al origen, éstos *parecen* tener varias zonas de estabilización. Aquí se define la constante $a:=0.1$ y la función $F(x):=x^2\sin(20/(x^2))$.

Dado lo anterior, se le indica que realice en forma consecutiva las ordenes `SECANTE(1,20)`, `SECANTE(1,30)`, `SECANTE(1,50)`, `SECANTE(1,75)`, `SECANTE(1,100)` y en cada caso se pregunta: ¿la curva tiene tangente en el punto dado? ¿cuál será su dirección? El hecho de que visualmente parezca que existan varias zonas de estabilización motiva a algunos alumnos a dudar de la unicidad de la tangente, por lo que manifiestan “que la

curva, en el punto estudiado, tiene varias tangentes”. Los estudiantes que tienen un nivel avanzado de razonamiento manifiestan: “se han trazado muy pocas secantes, y que debido a las oscilaciones alrededor del punto, las secantes cambian constantemente de dirección y para determinar la dirección de la tangente se tendrían que trazar un número indefinido (infinito) de secantes”. Para salir de dudas insistirán en trazar más secantes, pero en este caso no es posible obtener visualmente la respuesta.

El propósito de la pregunta es propiciar en el alumno una situación de incomodidad y conducirlo a evocar la necesidad de hallar un método que le permita determinar la tangente a una curva en un punto dado. Es decir, se pone en evidencia que el mecanismo del haz de secantes no es suficiente para conjeturar este hecho en curvas como la anterior. Es así, como se hace necesario plantear un nuevo proceso que tiene que ver con el cálculo computacional, se deben hacer aproximaciones sucesivas del valor de las pendientes de las rectas secantes obtenidas con las instrucciones dadas anteriormente. Esto es posible hacerlo fácilmente con *DERIVE*®, el cual permite obtener un listado del valor de las pendientes de las rectas secantes que pasan por un punto fijo $(a, f(a))$ y por otros puntos $(b, f(b))$ sobre la curva cada vez más cercanos a él. Para ello se digita la orden:

```
PENDIENTE(h, n) := VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b), b,
VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n-1)))
```

9 Conclusiones

Para la asimilación de un concepto matemático se deben de tener en cuenta dos fases. Una, la visualización, que es la verdadera fase creativa y en la que los alumnos tienen un primer acercamiento al concepto sin manipulaciones algebraicas. La otra fase es la formalización del concepto, en la cual la docencia tradicional centra todos sus esfuerzos. La enseñanza centrada en esta segunda fase, no permite que los alumnos progresen en su razonamiento, como también, no logren integrar y desarrollar relaciones con los demás conceptos estudiados.

La presente propuesta metodológica está dirigida a la primera fase, pues la visualización que se obtiene a partir del mecanismo del haz de secantes, para el concepto de tangente a una curva plana en un punto de ella, permite que los alumnos tengan un primer acercamiento desde la parte geométrica, sin manipulaciones algebraicas que entorpezcan el razonamiento que involucra su construcción.

Otro logro que se alcanza es dejar a los alumnos a las puertas de entender otra manifestación de la aproximación local, como es el concepto

de derivada de una función en un punto, siendo a su vez el haz de secantes una adecuada visualización para profundizar en la comprensión de este concepto.

Un alto porcentaje de los alumnos matriculados en el primer curso de análisis de los programas de ingeniería y ciencias administrativas en la Universidad Eafit no comprende la diferencia existente entre los conceptos de derivada y recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos. Pues confunden el aspecto geométrico de la recta tangente a la curva con la formalización del concepto de derivada. En respuesta a esta situación, surgió la presente propuesta metodológica, la cual ha sido eficaz en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos en mención.

El 90% de los alumnos sometidos al proceso descrito puede verbalizar una definición correcta de recta tangente a una curva en uno de sus puntos partiendo del haz de secantes, y sólo el 5% de los alumnos que siguen el curso de análisis con la metodología tradicional da una definición de tangente a una curva en un punto a partir del concepto de derivada.

Referencias

- [1] P. V. Esteban, *Estudio Comparativo del Concepto de Aproximación Local Vía el modelo de van Hiele*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- [2] J. L. Llorens, P. Pérez Carreras, An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 28, No. 5, pág 713-726, 1997.
- [3] S. Vinner, The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Ac. Pub, Cap. 5, pág 65-81, 1991.

Dirección de los autores: Pedro Vicente Esteban Duarte Universidad EAFIT, Colombia. pesteban@eafit.edu.co — Pedro Pérez Carreras Universidad Politécnica de Valencia, España. pperezc@mat.upv.es