

MODELACIÓN DE LOS RETORNOS LOGARÍTMICOS DE LA ACCIÓN CORPORATIVA DE APPLE INC.

Liner Cano Jaramillo
Jennifer López Ramos

Director(a): Msc. Luis Gabriel Arroyo

Codirector(a) PhD. Cesar Andrés Ojeda

Trabajo de grado para optar al título de Estadístico

Escuela de Estadística

Facultad de Ingeniería



Santiago de Cali, Febrero 2024

Tabla de contenido

	Pag.
TABLA DE CONTENIDO	I
Lista de figuras	IV
Lista de tablas	V
Resumen	I
Abstract	II
Agradecimientos	III
1. Introducción.....	1
1.1 Planteamiento del Problema	2
1.2 Pregunta de investigación:	3
1.3 Justificación	3
1.4 Objetivo General.....	5
1.4.1 Objetivo general.	5
1.4.2 Objetivos específicos.	5
2. Antecedentes	7
3. Marco teórico	11
3.0.1 Contextual.....	11
3.0.1.1 Corporación Apple.	11
3.0.2 Conceptual.	11
3.0.2.1 Mercado bursátil	11
3.0.2.2 Inversionista.	12
3.0.2.3 Acción.	12
3.0.2.4 Riesgo y Rendimiento.	13
3.0.2.5 Modelo financiero.....	14
3.0.2.6 Volatilidad.	14
3.0.2.7 Volatilidad agrupada.	14
3.0.3 Estadístico.....	15
3.0.3.1 Proceso estocástico.	15
3.0.3.2 Serie de tiempo.	15

3.0.3.3	Ruido Blanco.	15
3.0.3.4	Caminata Aleatoria.	16
3.0.3.5	Autocorrelación simple (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) de la serie.	16
3.0.3.6	ACF y PACF (identificación modelo)	17
3.0.3.7	Transformación de Box-Cox.	18
3.0.3.8	Prueba Dickey - Fuller aumentada (ADF).	18
3.0.3.9	Metodología Box y Jenkins.	19
3.0.3.10	ARIMA (p, d, q).	19
3.0.3.11	Modelo como caminata aleatoria.	20
3.0.3.12	Estimación de los parámetros ARIMA (método de máxima verosimilitud).	20
3.0.3.13	Estimación de los parámetros ARIMA (método de mínimos cuadrados).	20
3.0.3.14	Función auto.arima	21
3.0.3.15	Función de autocorrelación extendida (EACF).	21
3.0.3.16	Residuos del modelo.	22
3.0.3.17	Prueba de normalidad.	22
3.0.3.18	Prueba de media cero.	23
3.0.3.19	Prueba varianza constante.	23
3.0.3.20	Prueba correlación serial.	24
3.0.3.21	Prueba de efectos ARCH.	25
3.0.3.22	ARCH(p)	25
3.0.3.23	Características del modelo ARCH.	26
3.0.3.24	Relación entre un modelo ARIMA y un ARCH	27
3.0.3.25	ARCH generalizado GARCH.	27
3.0.3.26	Estimación de los parámetros GARCH.	28
3.0.3.27	Criterio de información de Akaike(AIC).	29
4.	Metodología	31
4.0.1	Obtención y preparación de los datos.	31
4.0.2	Análisis exploratorio de los datos.	31
4.0.3	Metodología Box-Jenkins	32
4.0.3.1	Identificación del modelo.	32
4.0.3.2	Estimación del modelo.	33
4.0.3.3	Examen diagnóstico.	33
4.0.3.4	Prueba de efectos ARCH.	33
4.0.4	Modelo ARCH	34
4.0.4.1	Examen diagnóstico.	34
4.0.5	Modelo GARCH	35
4.0.5.1	Examen diagnóstico.	35
4.0.6	Pronóstico y comparación con valores reales.	35

5. Resultados y Análisis	38
5.0.1 Análisis exploratorio de la serie de precios de Apple Inc.....	38
5.0.2 Análisis exploratorio de los rendimientos de Apple Inc.	39
5.1 Aplicación de metodología Box - Jenkins	41
5.1.1 Identificación del modelo de la serie de los rendimientos de Apple Inc.	41
5.1.1.1 Estabilización de varianza y estacionariedad.	42
5.1.1.2 Identificación	42
5.1.2 Estimación del modelo ARIMA (p, d, q)	43
5.1.3 Examen diagnóstico	43
5.1.3.1 Estacionariedad e invertibilidad.	43
5.1.3.2 Análisis de los residuos del modelo.....	44
5.1.4 Evaluación de efectos ARCH en el modelo.....	44
5.2 Ajuste de modelos ARCH y GARCH con media móvil.	45
5.2.1 Modelo GARCH (1,1) con media móvil.	46
5.2.2 Interpretación de los estimadores del modelo GARCH (1,1) con MA(1).	47
5.2.3 Esperanza condicional de la serie a partir de los modelos MA(1) y GARCH(1,1)-MA(1).....	48
5.2.3.1 Modelo MA(1).....	48
5.2.3.2 Modelo GARCH(1,1)-MA(1).	49
5.2.4 Varianza condicional a partir del modelo GARCH(1,1)-MA(1). ...	49
5.3 Examen Diagnóstico	49
5.3.0.1 Verificación de los supuestos del modelo.....	50
5.4 Desviación de retornos de los retornos de Apple pronosticada a 10 días con el GARCH(1,1)-MA(1).....	51
6. Conclusiones y recomendaciones	54
6.1 Conclusiones	54
6.2 Recomendaciones	55
7. Anexos	56
Referencias	57

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA		Pag.
3.1	Matriz EACF de $\text{ARMA}(1, 2)$	22
5.1	Cotización Apple Inc. junio 2012 - mayo 2022.	38
5.2	Precios Apple Inc. junio 2012 - mayo 2022.	39
5.3	Rendimientos Apple Inc.	40
5.4	Rendimientos Apple Inc.	42
5.5	Visualización heterocedasticidad de residuales del modelo $\text{ARIMA}(0, 0, 1)$	45
5.6	Análisis de residuales del modelo $\text{GARCH}(1,1)\text{-MA}(1)$	50

ÍNDICE DE CUADROS

TABLA	Pag.
3.1 Resumen para identificar el modelo	18
5.1 Resultados de Prueba Dickey-Fuller y de transformación Box-Cox	42
5.2 Ajuste de modelo ARIMA.....	43
5.3 Prueba de raíces unitarias del primer modelo	44
5.4 Resultados de Pruebas Estadísticas	44
5.5 MRL de los residuales del primer modelo ARIMA.	45
5.6 Prueba efectos ARCH en retornos de Apple Inc.....	45
5.7 Parámetros del modelo y criterios de evaluación	46
5.8 Ajuste de modelo GARCH (1,1) con MA (1).	47
5.9 Resultados de Pruebas Estadísticas del modelo GARCH(1,1)-MA(1)	50
5.10 Desviación de retornos esperada vs desviación real.....	51
7.1 ESACF rendimientos de Apple Inc.	56

Resumen

El propósito de esta investigación es modelar la serie temporal de los retornos de la acción de Apple Inc, abarcando el período desde junio de 2012 hasta mayo de 2022. La importancia de este estudio radica en comprender y prever el comportamiento de los precios de las acciones de una empresa líder en el mercado como Apple. Esto es crucial para los inversores que buscan tomar decisiones informadas en el mercado de valores. El problema que se aborda se centra en la necesidad de desarrollar un modelo efectivo para estimar la esperanza condicional y la varianza condicional de los retornos continuos de la acción de Apple, lo que permitiría a los inversores evaluar y gestionar el riesgo asociado a sus inversiones.

Inicialmente, se detecta que la serie es estacionaria y se ajusta un modelo $ARIMA(0,0,1)$ para estimar la media condicional. Sin embargo, los residuos de este modelo no cumplen con los supuestos de normalidad y muestran heterocedasticidad, lo que motiva la búsqueda de un modelo más adecuado. Se implementa un modelo $ARCH(1)$ para explicar la volatilidad de la serie, pero los resultados sugieren que no es capaz de capturar completamente esta volatilidad. Posteriormente, se exploran varios modelos GARCH, y se selecciona el $GARCH(1,1)$ como el más apropiado.

El análisis de los supuestos de los residuos revela que, aunque persisten desafíos en cuanto a la normalidad y la heterocedasticidad, el modelo $GARCH(1,1)$ logra una mejor adaptación para explicar la volatilidad en comparación con el modelo $ARIMA(0,0,1)$ y el $ARCH(1)$. Sin embargo, se concluye que ninguno de los modelos estimados parece ser adecuado para prever de manera efectiva la media condicional y la varianza condicional de los retornos de Apple, posiblemente debido a la naturaleza compleja y no lineal de este tipo de series temporales.

Palabras clave— Series temporales financieras, Apple Inc, análisis de datos, modelos $ARIMA$, modelos $GARCH$, modelos $ARCH$, volatilidad, estacionariedad, bolsa de valores, rendimientos financieros, modelos no lineales, heterocedasticidad.

Abstract

The purpose of this research is to model the time series of returns of Apple Inc.'s stock, covering the period from June 2012 to May 2022. The importance of this study lies in understanding and forecasting the behavior of stock prices of a market leader such as Apple. This is crucial for investors seeking to make informed decisions in the stock market. The problem addressed focuses on the need to develop an effective model to estimate the conditional mean and conditional variance of Apple's stock returns continuously, which would allow investors to assess and manage the risk associated with their investments.

Initially, it is detected that the series is stationary, and an ARIMA(0,0,1) model is fitted to estimate the conditional mean. However, the residuals of this model do not meet the assumptions of normality and exhibit heteroscedasticity, prompting the search for a more suitable model. An ARCH(1) model is implemented to explain the volatility of the series, but the results suggest that it is not able to fully capture this volatility. Subsequently, various GARCH models are explored, and the GARCH(1,1) is selected as the most appropriate one.

The analysis of the assumptions of the residuals reveals that, although challenges persist regarding normality and heteroscedasticity, the GARCH(1,1) model achieves a better fit to explain the volatility compared to the ARIMA(0,0,1) and ARCH(1) models. However, it is concluded that none of the estimated models seem to be adequate for effectively forecasting the conditional mean and conditional variance of Apple's returns, possibly due to the complex and nonlinear nature of such time series.

Palabras clave— Financial time series, Apple Inc., data analysis, ARIMA models, GARCH models, ARCH models, volatility, stationarity, stock market, financial returns, non-linear models, heteroscedasticity.

Agradecimientos

Agradecemos profundamente a familiares por su apoyo invaluable, a los profesores Msc Luis Gabriel y PhD Cesar Ojeda por la guía y conocimiento brindado durante la realización de este proyecto.

¡Gracias por ser parte fundamental de este significativo viaje académico!

1. Introducción

La inversión en acciones corporativas ha sido siempre un área de interés para inversores y analistas financieros debido a su potencial para generar retornos significativos. En este sentido, comprender y prever el comportamiento de los precios de las acciones de empresas líderes en el mercado, como Apple Inc., es fundamental para tomar decisiones de inversión informadas y gestionar el riesgo asociado.

El propósito de este estudio es modelar la serie temporal de los retornos de la acción de Apple Inc. durante el período comprendido entre junio de 2012 y mayo de 2022. Esta elección se basa en la importancia estratégica que Apple tiene en el mercado financiero global, siendo una de las empresas con mayor capitalización bursátil y un referente clave en la industria tecnológica[42]. Además [28] concluyó en su trabajo que las acciones de Apple son mas eficientes a comparación de ciertas empresas tecnológicas.

En el presente estudio se pretende hacer uso de técnicas no lineales de series temporales, orientado a la estimación de la esperanza condicional y varianza condicional de los rendimientos de la acción de la compañía estadounidense Apple. Los modelos más ampliamente utilizados para estimar parámetros en series financieras pertenecen a la familia de modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH), propuestos inicialmente por [23]. Posteriormente, como una extensión de estos modelos, se presentaron los modelos de heteroscedasticidad condicional autoregresiva generalizada (GARCH) por [9]. Los modelos GARCH introdujeron una nueva clase de procesos que permitían una estructura de rezagos más generalizada. Esta estrategia se diseñó con el objetivo de ofrecer una explicación más completa y precisa de la incertidumbre presente en la serie temporal de rendimientos. La efectividad de este enfoque se evaluará mediante la medición del error de los pronósticos, brindando así una evaluación cuantitativa del nivel de ajuste del modelo a los datos observados.

La estructura del documento se organiza de la siguiente manera: en la Sección 1 se presenta la introducción, donde se aborda la problemática y los objetivos de la investigación, en la Sección 2, se lleva a cabo una revisión exhaustiva de la literatura

pertinente, centrándose en la modelización de series temporales financieras y la aplicación de modelos de media móvil integrada autorregresiva (ARIMA) y GARCH. Posteriormente, en la Sección 3, se detallan los conceptos utilizados para comprender el desarrollo del documento, mientras que en la Sección 4 se describe en detalle la metodología empleada en el estudio, desde la recopilación de datos hasta la implementación de los modelos propuestos. Luego, en la Sección 5, se presentan y analizan los resultados obtenidos a partir de la metodología descrita. Por último, en la Sección 6, se ofrecen conclusiones que resumen las contribuciones principales del estudio, junto con recomendaciones para investigaciones futuras.

1.1 Planteamiento del Problema

Definición del problema para el inversionista.

Los datos de precios y retornos de acciones corporativas a menudo muestran ráfagas repentinas de variación en la cotización, que pueden experimentar valores extremos. Esto sugiere que los precios de las acciones no siguen un proceso aleatorio simple, sino que exhiben patrones consistentes con la presencia de ráfagas de volatilidad y períodos breves de tiempo estables [26]. Dado este escenario, se genera un ambiente de incertidumbre para los agentes en los mercados bursátiles que se enfrentan a la difícil tarea de determinar cuándo comprar y/o vender acciones para obtener beneficios.

La experiencia ha demostrado que los modelos lineales pueden ser útiles para aproximar el comportamiento de las series financieras en un rango limitado, pero no son capaces de capturar la complejidad y los cambios dinámicos que caracterizan a estas series [32]. Por ende, para los inversionistas, resulta de suma importancia contar con un modelo útil en la estimación de parámetros como la esperanza y varianza condicional de los rendimientos a partir de la información que suministran los datos del pasado, ya que la volatilidad o la varianza tienden a agruparse, siendo así útil para los inversores, los cuales pueden considerar el riesgo de mantener un activo durante diferentes períodos de tiempo. Por esta razón los analistas de series financieras utilizan los modelos GARCH, para modelar el riesgo de este tipo de activos durante los periodos de tendencia.

En este sentido se pretende estimar mediante modelos GARCH, la esperanza condicional y varianza condicional de los rendimientos de Apple a partir de los precios que presentó la compañía entre el 01 de junio de 2012 hasta el 31 de mayo de 2022.

1.2 Pregunta de investigación:

¿Son los modelos ARCH y GARCH apropiados para estimar la esperanza y la volatilidad condicional de los rendimientos continuos de las acciones de Apple Inc.?

1.3 Justificación

Las decisiones de inversión en acciones corporativas en el mercado de valores de Estados Unidos, reconocido como uno de los más sólidos a nivel mundial, son atractivas para los agentes comerciales. Se destaca por ser el mercado financiero más profundo del mundo, con una capitalización de mercado de más de 50 billones de dólares como señala [27]. Sin embargo, este mercado se caracteriza por ser un proceso estocástico, lo que genera incertidumbre entre aquellos que buscan obtener rendimientos a largo plazo mediante transacciones de compra y venta de estos activos financieros. Esta incertidumbre se origina en los constantes cambios en los precios de las acciones.

De acuerdo al índice Fortune Global 500 [42], la corporación Apple ya sobresalía como una de las compañías con mayor capitalización bursátil en el año 2015 y de acuerdo a la misma fuente, Apple ocupó el primer lugar en el ranking de las empresas más rentables del mundo en el 2018. Además, en el año 2022, la corporación cruzó el umbral de los tres billones de dólares sin capitalización en el mercado de valores [55]. Situar en el ranking de las 500 compañías más grandes, rentables o de mayor capitalización bursátil es de suma relevancia para las corporaciones que cotizan en mercado de valores, como es el caso del ente objeto de estudio, Apple, Inc., que cotiza con el símbolo AAPL en la bolsa automatizada NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotation), debido a que los inversionistas, depositan mayor confianza en este tipo de compañías.

Al considerar dos perfiles de inversionistas en el mercado de renta variable, a saber,

el especulador que toma decisiones basado en tendencias de los precios históricos de corto plazo (esto es, no mayor a un año), que lo motiva a ser altamente tolerantes al riesgo en procesos de inversión y el coberturista que pretende proteger sus inversiones mediante inversión en portafolio diversificado, por lo que el análisis descriptivo basado en datos históricos de largo plazo cobra relevancia, que lo convierte en un inversionista conservador con poca tolerancia al riesgo.

En procesos de inversión solo puede esperarse dos tendencias de resultados de los precios de los activos financieros de renta variable, o la alcista o la bajista, por lo que un modelo de serie de tiempo para predecir estos dos tipos de comportamiento de los precios cobra relevancia en el proceso decisorio de compra de las acciones corporativas en los mercados de valores.

Realizar una descripción estadística de activos financieros sin la aplicación de técnicas estructurales resulta insuficiente. En el análisis financiero, es esencial emplear técnicas de series temporales formales para comprender, predecir y tomar decisiones de inversión bien fundamentadas. Además la oferta y la demanda no son los únicos factores que influyen en la variación de los precios en cierto país, si no otros factores macroeconómicos externos como el caso de Wall Street, el cual repercute en las bolsas a nivel global, dado que Estados Unidos es la mayor economía en el mundo [45]. Por lo tanto es de gran relevancia en finanzas el estudio y predicción de los precios.

Según [23] los modelos ARCH y GARCH están ganando popularidad en el análisis financiero. Estos modelos econométricos son altamente valorados debido a su capacidad para capturar eventos extremos y el cambio en el tiempo de la varianza condicional del proceso. De acuerdo con la investigación realizada por este autor, existe una relación común entre el rendimiento medio de los activos financieros y la varianza condicional. Esto significa que los inversores y analistas financieros pueden analizar la información proporcionada por la estimación de estos parámetros en sus procesos de toma de decisiones. En general se puede decir que estos modelos ofrecen un ajuste más preciso a los datos reales, que los modelos lineales [31].

Considerando la información presentada y fundamentándonos en el análisis de los precios históricos de las acciones de Apple recopilados desde el 1 de junio de 2012 hasta el 31 de mayo de 2022, el objetivo principal es abordar la estimación de los

parámetros relacionados con los rendimientos continuos de la compañía. Esta iniciativa busca proporcionar una aplicación práctica de metodologías estadísticas alternativas que vayan más allá de las desarrolladas hasta el momento.

El propósito fundamental es contribuir a una comprensión más profunda para explicar la elevada volatilidad implícita en el comportamiento de las acciones corporativas, con un enfoque específico en el caso de Apple. Para alcanzar este objetivo, se propone el ajuste de un modelo que describa el comportamiento del rendimiento de la acción objeto de estudio. Este modelo no se limitará únicamente al uso de rezagos temporales, sino que también incorporará la volatilidad de eventos pasados como información adicional. El objetivo de esta estrategia, busca proporcionar una explicación más completa y precisa de la incertidumbre presente en la serie temporal de rendimientos. La efectividad de este enfoque se evaluará mediante la medición del error de los pronósticos, brindando así una evaluación cuantitativa del nivel de ajuste del modelo a los datos observados.

Este enfoque enriquece el panorama de las metodologías estadísticas aplicadas a los mercados financieros, proporcionando herramientas más efectivas para comprender y anticipar el comportamiento de las acciones corporativas.

1.4 Objetivo General

1.4.1 Objetivo general.

Proponer un modelo para la estimación de la esperanza condicional y volatilidad condicional de los rendimientos continuos de la acción de Apple Inc.

1.4.2 Objetivos específicos.

- Describir estadísticamente los retornos históricos de la compañía Apple.
- Identificar los patrones o componentes de la serie de tiempo del rendimiento de la acción de Apple a saber, su tendencia, comportamientos recurrentes o cíclicos, valores atípicos, las variaciones estacionales y finalmente el componente irregular

o de ruido blanco.

- Desarrollar un modelo no lineal que se ajuste a la serie temporal de los rendimientos continuos de la acción corporativa de Apple.
- Estimar la esperanza condicional y la volatilidad condicional de los rendimientos continuos de la acción de Apple.

2. Antecedentes

El análisis de activos financieros en los mercados nacionales e internacionales a través de series temporales involucra un enfoque estadístico integral que comprende la descripción de precios y rendimientos de acciones corporativas. Dichos rendimientos se consideran procesos estocásticos, lo que conduce a la evaluación de la presencia de tendencias cíclicas, la determinación de la estacionariedad de la serie, su invertibilidad o ambas características, basándose en criterios predefinidos. Además, se examina detenidamente la volatilidad y se recurre a técnicas de modelación no lineal. Todo esto subraya la importancia de explorar investigaciones que apliquen estas técnicas al análisis de los rendimientos continuos de la compañía Apple Inc.

Uno de los estudios clave en este campo fue realizado por [28], quien comparó el desempeño de tres grandes empresas tecnológicas en el mercado bursátil: Apple, Alphabet y Microsoft. Su análisis se basó en las series de precios de estas empresas desde su inicio de capitalización en la bolsa de valores automatizada (NASDAQ), desde el 12 de diciembre de 1980 para Apple, 20 de agosto de 2004 para Alphabet, 14 de marzo de 1986 para Microsoft, hasta el 22 de abril de 2016. El enfoque principal fue evaluar la eficiencia de cada acción utilizando el análisis de fluctuación sin tendencia (DFA). Este método es importante porque revela si los activos financieros son eficientes o no, lo que tiene implicaciones para la capacidad de los inversores para predecir su comportamiento. El estudio concluyó que Apple y Alphabet mostraron eficiencia, mientras que Microsoft presentó desviaciones en la eficiencia, lo que sugiere la influencia de crisis en los patrones de eficiencia. Por ende, se recomiendan factores adicionales para evaluar la eficiencia de las acciones, como la liquidez, la volatilidad, el tamaño del mercado y el sector. Los inversores pueden utilizar análisis fundamental, análisis técnico y análisis cuantitativo para evaluar estas acciones de manera más completa.

[7] también contribuyó al campo, comparando modelos univariados y multivariados en la predicción de los precios de apertura de las acciones de Apple Inc. Se utilizaron modelos como media móvil integrada autorregresiva (ARIMA), heteroscedasticidad condicional autoregresiva generalizada (GARCH), y suavización exponencial, así como

técnicas multivariadas como el modelo de autorregresión vectorial (VAR) y regresión lineal clásica con residuos ARIMA, a partir de los precios de apertura de la acción de Apple para el primer día de cada mes, desde enero de 1990 hasta septiembre de 2016. Procedió luego del ajuste de los modelos a realizar el pronóstico de prueba para los precios de la acción de Apple para 12 meses por fuera de la muestra desde octubre de 2016 hasta septiembre de 2017. Posteriormente evaluó el rendimiento de los precios pronosticados de acuerdo con el error medio cuadrático (RSME). Los resultados mostraron que un pronóstico promedio que combinaba los pronósticos de ambos tipos de modelos tenía el menor error cuadrático medio (RMSE), conocido como pronóstico de consenso presentó el RSME más bajo en el conjunto de datos de prueba. Esto sugiere que utilizar el promedio de varios pronósticos puede ser una estrategia efectiva para obtener un buen resultado predictivo.

[3] mostró a partir del conjunto de cinco series financieras entre las cuales incluyó la serie de Apple, el comportamiento de las acciones y su correspondiente cartera equiponderada, realizando la modelación de la media con modelos lineales ARMA y tras haber comprobado la dinámica cambiante de la volatilidad llevó a cabo la modelación con modelos GARCH buscando estimarla la volatilidad actual y predecir la futura, concluyendo que los modelos EGARCH, por tener en cuenta efectos asimétricos, son los más apropiados para la construcción de la cartera de mínima varianza global con dicha volatilidad estimada.

Un estudio con el objetivo de realizar la predicción del los precios de las acciones de diversas empresas nigerianas, incluyendo a Apple Inc, fue realizado por [6], los cuales usaron el modelo ARIMA, a partir de la serie temporal compuesta por cuatrocientos setenta y un (471) precios mensuales de la acción en la bolsa de valores de Nueva York, desde el 01 de enero de 2010 hasta el 01 de noviembre de 2019. La estimación de los parámetros del modelo se realizó con el programa de uso libre R, basándose en los criterios de Akaike (AIC) y Akaike corregido. La metodología incluyó la especificación del modelo (identificación), el ajuste del modelo (o estimación de los parámetros), diagnóstico del modelo y pronóstico o predicción. El estudio evidenció con una alta precisión predictiva del modelo ARIMA, para un horizonte de pronóstico de 10 días. Aunque la precisión disminuyó gradualmente en períodos posteriores, se mantuvo significativa.

Por otro lado, [15] encontró útil la aplicación de la técnica de Machine Learning XGBOOST con parámetros tuneados mediante Cross Validation y el modelo de Regresión Lineal múltiple para realizar la predicción del precio de la acción APPLE a partir de sus precios históricos entre el 01 de enero del 2019 y el 30 de junio del 2021 y a su vez medir el nivel de predicción teniendo como target los precios del día siguiente, al día 15 y al día 30. En este estudio el autor utilizó los indicadores de ajuste Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE) y del Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE).

Finalmente, [33] desarrollaron un estudio con el objetivo de aplicar los métodos de series temporales, en el análisis y evaluación del desarrollo de precios de la acción de la corporación Apple, con una base de datos de los precios diarios de la acción desde el 2000 hasta el 2020. El estudio se enfocó a responder tres interrogantes a saber, ¿Qué factores influyeron en los precios de la acción de Apple entre 2000 y 2020? ¿Cómo afectó la pandemia de COVID-19 el precio de las acciones corporativas de Apple? ¿Cuál fue el desarrollo de los precios de la acción corporativa de Apple durante la crisis económica de 2007-2009? En la metodología de análisis de la serie temporal, se usaron técnicas de estadística descriptiva como las medidas de tendencia central, también las medidas de dispersión, las cuales fueron calculadas en el software Excel para cada uno de los segmentos de interés. Los datos fueron graficados y evaluados de manera cuantitativa y cualitativa, lo cual suministró información del ritmo y fluctuación en los precios de las acciones, también sus causas. El estudio identificó que el factor que más influyó en el aumento de los precios de la acción de Apple es el lanzamiento de un nuevo producto o servicio en el mercado global. Además que los factores que más influyen en la disminución del precio de la acción corresponden a la insatisfacción del cliente, el exceso de la demanda sobre suministro y la situación política. También se identificó que la crisis económica no afectó significativamente el precio de las acciones y que durante el periodo de pandemia el precio de la acción de Apple evidenció un aumento constante.

En los estudios previamente mencionados, se aplicaron diversas técnicas de análisis de series temporales para examinar el comportamiento de los precios de las acciones de Apple Inc. Estas técnicas incluyeron la utilización de análisis de fluctuación sin tendencia para evaluar la eficiencia de las acciones, la implementación del modelo ARIMA, la combinación de múltiples modelos clásicos, tanto univariados como multivariados, con el objetivo de minimizar el RSME en las predicciones. Además, se emplearon técnicas estadísticas descriptivas para complementar el análisis cualitativo

y discernir los factores que impactan en el aumento o disminución de los precios de las acciones.

3. Marco teórico

3.0.1 Contextual.

3.0.1.1 *Corporación Apple.*

Apple, es una corporación estadounidense que manufactura y comercializa productos electrónicos con los respectivos programas informáticos y licencias a nivel multinacional [25]. Con sede en Cupertino, California, la compañía Apple cotiza en el mercado de valores NASDAQ con el símbolo bursátil (o simplemente “ticker”) AAPL.

Actualmente la corporación Apple, es una de las empresas más grandes del planeta, siendo la primera compañía en alcanzar el valor de mercado por 3 billones de USD el 04 de enero de 2022 [55]. Al 30 de junio de 2022 con un precio de cierre por acción de 136,72 USD, se ha convertido en una de las inversiones más atractivas en los mercados de bolsa.

3.0.2 Conceptual.

3.0.2.1 *Mercado bursátil*

El mercado bursátil o mercado de valores, según [29], es un componente esencial del sistema financiero de un país. En este mercado, se lleva a cabo la compra y venta de valores financieros, que pueden ser de distintos tipos, como acciones, bonos y otros instrumentos de renta variable y renta fija, están definidos como:

- Mercados de renta variable: Se negocian acciones, que son títulos que otorgan a su titular un derecho de propiedad sobre una empresa.
- Mercados de renta fija: Se negocian bonos, que son títulos que otorgan a su titular un derecho de cobro de un importe determinado a una fecha futura.

- Mercados de derivados: Se negocian derivados, que son instrumentos financieros que no tienen valor intrínseco, sino que derivan su valor de otro activo.

El foco del presente trabajo está en el mercado de renta variable, pues allí es donde se negocian las acciones corporativas, también llamado mercado bursátil.

3.0.2.2 Inversionista.

Es una persona o entidad que destina su capital con el objetivo de obtener un rendimiento o ganancia financiera a cambio. Los inversores pueden optar por una variedad de activos en los que invertir, dependiendo de sus objetivos financieros, tolerancia al riesgo y horizonte de inversión. Tales como acciones, bonos, bienes inmuebles, materias primas y fondos de inversión [29].

3.0.2.3 Acción.

Son certificados que representan la propiedad del emisor. Según [36] Algunas empresas emiten valores de capital accionario como una alternativa para obtener fondos. En el medio financiero, se conoce como acción a un título emitido por una sociedad determinada, y que equivale al valor monetario de una de las partes iguales en que se fragmenta el capital social de la empresa. Generalmente se distinguen 2 tipos:

- Acciones comunes: tienen derecho de voto y no cuentan con preferencia de pago.
- Acciones preferenciales: no tienen derecho de voto y cuentan con preferencia de pago.

Para poder invertir, es necesario que todos tengan la misma información y por ende las mismas posibilidades de obtener ganancias o pérdidas. En un mercado eficiente el precio de los activos fluctúan aleatoriamente en torno a su valor intrínseco como señalan [12, 47, 8].

3.0.2.4 Riesgo y Rendimiento.

El riesgo es una medida de la incertidumbre en torno al rendimiento que ganará una inversión. Es decir, las inversiones cuyos rendimientos son más inciertos se consideran más riesgosas [44]. Respecto al rendimiento o retorno de inversión en una acción corporativa, en el trabajo de [48] se distingue entre rendimiento por dividendo y ganancia de capital, definiendo esta última como el cambio de precio de la acción entre el precio inicial.

Este tipo de cálculo del rendimiento de una inversión corresponde a la tasa de rendimiento periódica, sin embargo, para la modelación de los rendimientos que genera de manera continua una acción corporativa, se aplica el concepto de rendimiento continuo, el cual corresponde a la razón logaritmo natural del precio de la acción en el tiempo actual esto es, t , y el precio con el cual cerró la acción corporativa en el tiempo inmediatamente anterior, $t - 1$.

Denotando el precio de la acción en el tiempo t como P_t , los rendimientos compuestos de forma continua de la acción r_t se calculan a partir de: El rendimiento de la ganancia de capital el cual se define como:

$$\text{Rendimiento de la ganancia de capital} = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}$$

y el análisis de retorno es igual a:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (3.1)$$

Donde,

r_t : es el rendimiento de la acción de Apple en el día t .

P_t : precio de la acción de Apple en el día t .

Con lo anterior se puede usar las notaciones de la serie de los rendimientos como:

$Z_t = r_t$ o bien como $X_t = r_t$

3.0.2.5 *Modelo financiero.*

Un modelo financiero es una abstracción a una situación económica y financiera de una empresa u organización que sirve como herramienta de gestión y permite proyectar los resultados futuros de las decisiones que se planean tomar en el presente [44]. Se evidencia en el trabajo de [43], el análisis de la rentabilidad y del riesgo de activos financieros, requieren modelos de series de tipo GARCH, debido a la alta volatilidad que presentan las acciones corporativas.

3.0.2.6 *Volatilidad.*

La volatilidad es una medida de lo impredecible que es una serie de tiempo. Si la volatilidad es alta, significa que los valores de la serie pueden variar mucho de un período a otro. Si la volatilidad es baja, significa que los valores de la serie son más predecibles [24].

3.0.2.7 *Volatilidad agrupada.*

La volatilidad de estas series temporales suele formar grupos. Después de grandes (pequeños) cambios, ya sean positivos como negativos, suelen producirse cambios grandes (pequeños). A este efecto se le llama volatilidad agrupada. A partir de esta propiedad, existe una correlación positiva entre los cuadrados de los rendimientos. Así, como estos están heterocedásticamente condicionados.

$$Var(R_{t+1}|F_t) \neq Var(R_{t+1})$$

$Var(R_{t+1})$: La varianza incondicional del rendimiento en el tiempo $t+1$.

F_t : Información disponible hasta el tiempo t .

Es decir, la variabilidad de los rendimientos depende de sus recientes cambios, como lo señalo [4].

3.0.3 Estadístico.

3.0.3.1 Proceso estocástico.

Un proceso estocástico, es una familia de variables aleatorias indexadas en el tiempo $Z(\omega, t)$, donde ω pertenece a un espacio muestral y t pertenece a un conjunto de índices. Para un t fijo, $Z(\omega, t)$ es una variable aleatoria. Para una ω , $Z(\omega, t)$ como función de t , ω se denomina función de muestra o realización. Así que, para [54], una serie de tiempo es una realización o función muestral de un cierto proceso estocástico. La función de distribución $n - dimensional$ se encuentra definida por:

$$F_{Z_t, \dots, Z_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = P(\omega : Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n)$$

En donde,

$Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}$: corresponde a un conjunto finito de variables aleatorias de un proceso estocástico, $\{Z(\omega, t) : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y x_i , para $i = 1, \dots, n$ son cualesquiera números reales.

3.0.3.2 Serie de tiempo.

[54] señaló que una serie de tiempo es una realización o muestra de una función de un cierto proceso estocástico. Un modelo de series de tiempo para un conjunto de observaciones Z_t es una especificación de las distribuciones conjuntas (o posiblemente sólo de las medias y covarianzas) de una sucesión de variables aleatorias Z_t , de las cuales Z_t se postula a ser una realización. Por lo que una serie de tiempo es una secuencia ordenada de observaciones, que puede entenderse como una realización o función muestral de un proceso estocástico particular.

3.0.3.3 Ruido Blanco.

Si una serie de tiempo consiste en observaciones no correlacionadas y tiene varianza constante, se dice que es ruido blanco. Si adicionalmente las observaciones en la serie de

tiempo se encuentran distribuidas normalmente, la serie de tiempo es un ruido blanco Gaussiano [40]. Por definición un proceso a_t es llamado proceso ruido blanco si es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas de una distribución fija con media constante $E(a_t) = 0$, varianza constante, $Var(a_t) = \sigma_a^2$ y función de covarianza:

$$\gamma_k = Cov(a_t, a_{(t-k)}) = 0 \text{ para todo } k \neq 0 \text{ [54].}$$

3.0.3.4 *Caminata Aleatoria.*

De acuerdo con [18], la caminata aleatoria es un modelo estocástico en el que una variable sigue un patrón determinado en parte por un proceso de selección aleatoria, clasificadas en tres tipos:

El tipo 1. Esta caminata aleatoria es un proceso estocástico en el que los cambios incrementales en cada periodo son independientes e idénticamente distribuidos (IID). Implica que las variaciones de precios son impredecibles y siguen una distribución de probabilidad simétrica alrededor de cero.

Tipo 2. Donde las variables aleatorias asociadas con los cambios incrementales no son idénticamente distribuidas. Esto puede incluir la presencia de heterocedasticidad en los cambios incrementales, lo que indica una variabilidad no constante en el tiempo.

Tipo 3. Este caminata aleatoria permite que las variables aleatorias asociadas con los cambios incrementales no estén correlacionadas. Esto implica que la covarianza entre los cambios incrementales en diferentes períodos es cero, pero aún pueden depender entre sí de manera no lineal.

3.0.3.5 *Autocorrelación simple (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) de la serie.*

Las funciones de autocovarianza y de autocorrelación simple (ACF por sus siglas en inglés) entre Z_t y Z_{t+k} , separadas únicamente por k rezagos de tiempo de acuerdo a

[54] se definen como:

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)$$

$$\rho_k = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{Var(Z_t)}\sqrt{Var(Z_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Donde, $Var(Z_t) = Var(Z_{t+1}) = \gamma_0$

La PACF de la serie, según notación de [54] se define como:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_{2..} & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_{1..} & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ . & & . & . & . \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3..} & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_{2..} & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_{1..} & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ . & & . & . & . \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3..} & \rho_1 & \rho_1 \end{vmatrix}}$$

Este procedimiento permite observar algunas características propias de los procesos estacionarios, a saber, $\gamma_0 = Var(Z_t)$, $\rho_0 = 1$, $|\gamma_k| \leq \gamma_0$, $|\rho_k| \leq 1$, entre otras y determinar si el proceso estocástico corresponde a un proceso ruido blanco.

3.0.3.6 ACF y PACF (identificación modelo)

El análisis de la ACF y PACF es fundamental para establecer un orden tentativo para el modelo. La observación de los correlogramas proporciona información valiosa sobre la presencia de autocorrelación y ayuda a identificar posibles estructuras autorregresivas y de media móvil en los datos. El cuadro 3.1 presenta un resumen de las características físicas de los procesos al examinar sus correlogramas [5].

Proceso	ACF	PACF
AR(p)	Decrece exponencialmente y/o con ondas sinusoidales	Se anula despues del rezago p
MA(q)	Se anula después del rezago q	Decrece exponencialmente y/o con ondas sinusoidales
ARMA(p,q)	Decrece exponencialmente y/o con ondas sinusoidales después del rezago (q-p)	Decrece exponencialmente y/o con ondas sinusoidales después del rezago (p-q)

Cuadro 3.1: Resumen para identificar el modelo

3.0.3.7 Transformación de Box-Cox.

La transformación de Box-Cox se puede utilizar para abordar una variedad de problemas en el análisis de series temporales, incluyendo la no linealidad, la heterocedasticidad y la distribución sesgada de los errores. Si $\lambda=0$, entonces la transformación de Box-Cox es logaritmo natural, si $\lambda=0.5$, entonces la transformación corresponde a raíz cuadrada y si $\lambda=1$, no debe realizarse transformación (identidad). En caso de que $\lambda>1$, entonces la transformación de Box-Cox es una transformación no lineal más fuerte [10].

3.0.3.8 Prueba Dickey - Fuller aumentada (ADF).

La prueba Dickey-Fuller Aumentada (ADF) es una prueba estadística utilizada para determinar si una serie temporal presenta tendencia estocástica en el tiempo, las hipótesis nula y alternativa que se plantean para la prueba corresponden a:

$$H_0 : \phi = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \phi < 0$$

Donde, ϕ es el coeficiente de la tendencia lineal en el modelo de regresión lineal utilizado para la prueba ADF.

El estadístico de prueba se calcula como:

$$\tau = \frac{\phi}{\sigma_\phi}$$

Cuando el valor estadístico de la prueba ADF $(\tau) <$ al valor crítico de la tabla Dickey–Fuller, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que R_t no tiene presente una raíz unitaria [21].

3.0.3.9 Metodología Box y Jenkins.

Se conoce como la metodología de Box-Jenkins, a la aplicación de un marco sistemático para el análisis y modelado de series temporales, como modelos autorregresivos de media móvil ARMA, así como modelos autorregresivos integrados de media móvil (ARIMA), implicando un ciclo iterativo que comprende los siguientes pasos: identificación del modelo, estimación del modelo, examen diagnóstico y pronóstico [11].

3.0.3.10 ARIMA (p, d, q) .

Los modelos de promedio móvil integrado autorregresivo, pueden ser vistos como una generalización de los ARMA, los cuales son útiles para describir varias series de tiempos homogéneas no estacionarias [53].

El Modelo ARIMA (p, d, q) se define como :

$$\phi_p(B)(1 - B)^d Z_t = \theta_0 + \theta_q(B)a_t \quad (3.2)$$

Donde,

ϕ_p : coeficientes autorregresivos.

θ_q : coeficientes de medias móviles.

p : orden de un polinomio autorregresivo, indica cuántos valores pasados de la serie temporal se utilizarán para predecir el valor actual.

B : operador de retardo, es decir que retrasa a Z_t en un período.

d : orden de la diferencia, es decir el número de veces que la serie debe diferenciarse para hacerse estacionaria

q : orden de un polinomio de medias móviles, representa la cantidad de términos de error de medias móviles que se utilizan en el modelo.

Es importante verificar los supuestos del modelo antes de utilizarlo, además aplicar

transformaciones o modelos más robustos si los supuestos no se cumplen.

3.0.3.11 *Modelo como caminata aleatoria.*

De acuerdo con [46], el modelo ampliamente usado para describir el comportamiento que presentan los precios de las acciones corporativas en los mercados bursátiles corresponde a una representación mediante ARIMA (p, d, q) con $p = 0, d = 1, q = 0$, una constante $\vartheta_0 \neq 0$ y la variable de choque aleatorio a_t , resultando el ARIMA(0,1,0):

$$Z_t = Z_{t-1} + \vartheta_0 + a_t \quad (3.3)$$

Este modelo Z_t , conocido también como caminata aleatoria con deriva $\vartheta_0 \neq 0$, dados $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots$, tiene media en el tiempo t , correspondiente a $\mu_t = Z_{t-1} + \vartheta_0$.

3.0.3.12 *Estimación de los parámetros ARIMA (método de máxima verosimilitud).*

El método de máxima verosimilitud (MLE) es un enfoque estadístico ampliamente utilizado para estimar los parámetros desconocidos de un modelo ARIMA o cualquier otro modelo estadístico. Este método se encarga de maximizar la función de verosimilitud, que representa la probabilidad conjunta de observar los datos dados los parámetros del modelo [2].

3.0.3.13 *Estimación de los parámetros ARIMA (método de mínimos cuadrados).*

Como se trata de un proceso ARMA, se necesita usar un método de estimación de mínimos cuadrados no lineales.

$$\begin{aligned} Z_t &= E(Z_t | X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tp}) + \varepsilon_t \\ Z_t &= \alpha_1 X_{t1}, \alpha_2 X_{t2}, \dots, \alpha_p X_{tp} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde, $t = 1, 2, \dots, n$, las ε_t son iid $\sim N(0, \sigma_a^2)$ y las X_{tj} son independientes [38].

Este método busca minimizar la suma de los cuadrados de los residuos ε_t en el modelo de regresión lineal. La suma de cuadrados se define como:

$$\text{Min} = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \quad (3.5)$$

Una rutina de mínimos cuadrados no lineales inicia con un conjunto de valores iniciales para los parámetros. A continuación, monitorea estos valores en la dirección de la suma de cuadrados más pequeña y actualiza los valores iniciales. Las iteraciones continúan hasta que se alcance algún criterio de convergencia. Para obtener una convergencia rápida, se han desarrollado algunos algoritmos como señala [38].

3.0.3.14 *Función auto.arima*

La función `auto.arima` desarrollada por [35], es una herramienta sistemática y automatizada para la selección, estimación y diagnóstico de modelos ARIMA, lo que facilita el análisis de series temporales. Utiliza una familia de distribuciones t-Student, para modelar los errores del modelo ARIMA, lo que permite una mayor flexibilidad en la modelación de los errores que no se ajusta a una distribución normal [14].

3.0.3.15 *Función de autocorrelación extendida (EACF).*

La función de autocorrelación de muestra extendida (EACF) para identificar el orden tentativo de un proceso ARMA estacionario o no estacionario en función de las estimaciones iteradas de mínimos cuadrados de los parámetros autorregresivos. En la figura 3.1 se observa la matriz EACF, basada en normalidad asintótica de la función de autocorrelación donde, X representa los términos significativos, el 0 representa los términos no significativos y el asterisco (*) indica sin patrón. Para identificar el modelo tentativo se observa el vértice del triángulo de ceros [52].

	MA							
AR	0	1	2	3	4	5	6	7
0	*	X	X	X	X	X	X	X
1	*	X	0	0	0	0	0	0
2	*	X	X	0	0	0	0	0
3	*	X	X	X	0	0	0	0
4	*	X	X	X	X	0	0	0

Figura 3.1: Matriz EACF de ARMA(1, 2)

El estadístico de prueba sigue aproximadamente una distribución t de Student bajo la hipótesis nula de que el coeficiente de autocorrelación es cero. Se observa si el valor absoluto del estadístico de prueba es mayor que el valor crítico, entonces el término de autocorrelación se considera significativo [21].

3.0.3.16 Residuos del modelo.

Los residuos se definen como la diferencia entre los valores reales de la serie y los valores predichos por un modelo. En otras palabras, los residuos representan la parte de la serie que no puede ser explicada por el modelo [11].

Los residuos están definidos como:

$$e_t = Z_t - Z_t^p \quad (3.6)$$

Donde,

e_t : es el error en el tiempo t.

Z_t : es el valor real de la serie de tiempo en el tiempo t.

Z_t^p : es el valor predicho por el modelo ARIMA en el tiempo t.

3.0.3.17 Prueba de normalidad.

Según [49], la prueba de normalidad a los residuos de Shapiro-Wilk es una prueba no paramétrica que se utiliza para evaluar si los residuos de un modelo estadístico siguen

una distribución normal, con las siguientes hipótesis :

$$H_0 : e_i \in N(0, \sigma^2) \quad V s \quad H_1 : e_i \notin N(0, \sigma^2)$$

El estadístico de prueba se calcula como:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Donde $x_{(i)}$ representa el i-ésimo valor ordenado, $\bar{x}$ es la media de la muestra y a_i son los coeficientes de peso de la distribución normal ajustada.

Decisión: Si el valor de la prueba es menor que un nivel de significancia 0,05, entonces se rechaza la hipótesis nula de que los residuos siguen una distribución normal.

3.0.3.18 Prueba de media cero.

La prueba de media cero es una prueba de hipótesis estadística que se utiliza para determinar si la media de los residuos oscilan cerca al cero [41], con las siguientes hipótesis:

$$H_0 : E(e_t) = 0 \quad V s \quad H_1 : E(e_t) \neq 0$$

Para realizar la prueba se utiliza el estadístico t student.

Decisión. Si el valor de la prueba es menor que un nivel de significancia 0,05, se rechaza la hipótesis nula con nivel de confianza del 95 %.

3.0.3.19 Prueba varianza constante.

La prueba de varianza constante es una prueba estadística que se utiliza para determinar si la varianza de los errores de un modelo de regresión lineal es constante [41], con la hipótesis nula y alternativa, H_0 : la varianza de los residuos es constante

contra H_1 : la varianza de los residuos no es constante.

La prueba de [13] a partir de un modelo de regresión lineal con variable de respuesta correspondiente al cuadrado de los residuales y variables explicatorias las covariables del modelo original, usa el estadístico de prueba:

$$\hat{e}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k + u$$

La prueba procede a rechazar la hipótesis nula la hipótesis nula $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0$ (homocedástico), si las variables explicativas adicionales explican demasiado de la varianza. El estadístico se define como nR^2 , donde R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión de e^2 y el estadístico se distribuye χ_k^2 , chí-cuadrado con k grados de libertad.

Decisión: Si el valor p de la prueba es menor que el nivel de significancia, se rechaza H_0 .

3.0.3.20 Prueba correlación serial.

La prueba de correlación serial es una prueba estadística que se utiliza para determinar si existe correlación entre los errores [41], con las siguientes hipótesis :

$$H_0 : \rho_1(a) = \rho_1(a) = \dots = \rho_M(a) = 0$$

$$H_1 : \rho_k \text{ sea no nulo, } k = 1, \dots, M$$

El estadístico de prueba, se calcula como:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

Si el valor de la prueba es mayor que un nivel de significancia 0.05, entonces no se rechaza la hipótesis nula y se puede concluir que no existe correlación entre los errores.

3.0.3.21 Prueba de efectos ARCH.

El efecto ARCH indica la presencia de heterocedasticidad condicional en una serie temporal. Para determinar la presencia de estos efectos, se suelen seguir los siguientes pasos:

- 1) Se realiza la estimación de un modelo de regresión lineal para los residuos del modelo ARIMA, utilizando los datos de los residuos al cuadrado rezagados. Si los coeficientes son significativos, la serie de los residuos presenta heterocedasticidad.
- 2) Se calcula y se gráfica el comportamiento del cuadrado de los residuos e^2 , del modelo estimado, para evaluar visualmente si la serie presenta heterocedasticidad.
- 3) Se realiza la prueba de efectos ARCH de Lagrange es una prueba estadística que se utiliza para determinar si la varianza de los errores de un modelo de regresión lineal es constante o varía en el tiempo.

$$H_0: X_t \text{ no presenta efectos ARCH} \quad \text{vs} \quad H_1: X_t \text{ presenta efectos ARCH.}$$

Si el valor p es mayor o igual que el nivel de significancia, entonces no se rechaza la hipótesis nula. [23].

3.0.3.22 ARCH(p)

Modelo de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH), permite capturar y modelar adecuadamente la volatilidad cambiante en los datos. Es una herramienta importante en el análisis de series temporales financieras ya que a menudo se viola el supuesto de varianza constante de los errores, tanto condicional como incondicional [4]. [19] mencionan que esta falta de constancia en la varianza conlleva a que los modelos tradicionales de series de tiempo, que asumen homocedasticidad, no sean adecuados para modelar series temporales financieras.

3.0.3.23 Características del modelo ARCH.

[56] describen, si se considera una secuencia de n retornos financieros $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ denotando con X_t el retorno en el tiempo t , el cual es una realización del proceso estocástico $\{X_t\}_{-\infty}^{\infty}$, el cual satisface:

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t \quad -\infty < t < \infty \quad (3.7)$$

En el cual, $\{\epsilon_t\}_{-\infty}^{\infty}$ son *v.a.i.i.d.*, $E[\epsilon_t] = 0$, $Var(\epsilon_t) = 1$, llamadas innovaciones.

El modelo ARCH(p) de [23] especifica que la varianza condicional σ_t^2 , llamada volatilidad depende de algunos parámetros del modelo $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,p})^T$, por lo que como la presenta y denota [56] la varianza condicional del modelo ARCH corresponde a:

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{0,k} X_{t-k}^2, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.8)$$

Con $\alpha_{0,k} > 0$, $k = 1, \dots, p$, para garantizar que la varianza sea positiva. Además, se requiere que $\sum_{k=1}^p \alpha_{0,k} < 1$ para que el proceso σ_t^2 sea estacionario.

Siguiendo con la descripción del modelo según [46], bajo el supuesto de que existe una solución estacionaria y causal del modelo ARCH, esto implica que los valores pasados de los errores condicionales pueden utilizarse para predecir los valores futuros de la serie temporal (X_t es una función de $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$) y que existen todos los momentos necesarios, el ARCH presenta las siguientes características:

- i) Valor esperado: $E(X_t) = 0$
- ii) Varianza condicional: $Var(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}) = \sigma_t^2$
- iii) La función de autocovarianza, sin pérdida de generalidad y asumiendo que $k > 0$, corresponde a: $cov[X_t, X_{t+k}] = \gamma_{t,t+k} = 0$

- iv) El proceso ARCH tiene colas gruesas, lo que implica que hay una mayor probabilidad de que ocurran valores extremos o extremadamente grandes (mayor volatilidad).

3.0.3.24 *Relación entre un modelo ARIMA y un ARCH*

El modelo ARIMA se obtiene a partir de la combinación del proceso autorregresivo (AR) y el proceso de media móvil (MA). El primero explica la serie a partir de sus datos pasados, el segundo hace lo mismo solo que con los residuales. Obteniendo así un modelo ARMA o un modelo ARIMA, por la primera diferencia para ser estacionaria.

El modelo ARCH se diferencia del ARIMA en que su componente (CH), modela los residuos cuadrados anteriores en cada punto anterior en el tiempo, lo que implica que predice un residual cuadrado futuro [34]. En contraste, el modelo ARIMA modela la esperanza condicional con una varianza constante de la serie, mientras que el modelo ARCH modela la varianza condicional.

Según [26], es ampliamente aceptado que las series financieras no exhiben homocedasticidad, lo que implica la presencia de clusters de volatilidad que contradicen el supuesto de varianza constante en el modelo ARIMA. En otras palabras, asumen que la varianza no es constante en el tiempo. El modelo ARCH aborda esta necesidad al intentar explicar los rendimientos financieros a partir de la volatilidad pasada. Esto es una ventaja porque al capturar la información pasada de una variable y su volatilidad, sus factores explican su comportamiento presente y, por tanto, pueden ser extrapolados al futuro, lo que permite realizar estimaciones con mayor precisión [22].

3.0.3.25 *ARCH generalizado GARCH*

El modelo ARCH es formalmente un modelo de regresión con la volatilidad condicional como variable de respuesta y los retrasos pasados del retorno al cuadrado como las covariables [20], siendo el modelo GARCH una extensión del ARCH.

Como anteriormente se mencionó, en el modelo ARCH(1) tiene como predictor el tiempo $t + 1$, es decir que la varianza depende solo del último valor de σ_t . Pero esto en algunos contextos no es suficiente, ya que se desea mayor precisión en la predicción, eso se logra al incluir todos los valores pasados σ_t con menor peso para volatilidades más distantes. Una propuesta para este problema la desarrolló [9], donde introducen p retrasos de la varianza condicional al modelo y que hace referencia al orden del modelo GARCH. Es decir que en este modelo la varianza condicional no solo depende de los cuadrados de las perturbaciones, como en el modelo ARCH de Engle, sino que además también depende de las varianzas condicionales de periodos anteriores, es decir, de σ_t^2 pasados [4].

Una serie $\{X_t\}$ sigue un modelo GARCH(p, q) si:

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad y \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j X_{t-j}^2 \quad (3.9)$$

En donde, ϵ_t corresponde a un proceso ruido blanco. Para α_j y β_i se deben cumplir que:

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$$

En donde la varianza condicionada σ_t^2 varía en el tiempo. Entonces en los modelos lineales, la varianza de X_t condicionada a las observaciones anteriores $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ permanece constante, criterio que no se cumple en series reales como es el caso de las series usadas para describir fenómenos en economía y en finanzas.

3.0.3.26 Estimación de los parámetros GARCH.

El método de mínimos cuadrados (LSE).

El método de mínimos cuadrados, es descrito por [56], los cuales con la propuesta de un modelo de volatilidad variable en el tiempo Y_n , que satisface:

$$Y_n = g\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}} X_t, \quad 1 \leq t \leq n$$

donde, $g(\cdot)$ es una función positiva no conocida sobre $[0,1]$ y $g(\frac{\cdot}{n})$ corresponde a un factor de escala cambiando desde el tiempo t hasta $t+1$ en una magnitud infinitesimal $O(\frac{1}{n})$, por lo que la variación neta en escala es despreciable desde el tiempo n hasta el tiempo $n+k$ para un entero finito $k > 0$.

Ya que el proceso ARCH $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, es estandarizado (esto es $E(X_t^2) \equiv 1$), se define un proceso estocástico auxiliar $\{Z_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ como:

$$Z_t = X_t^2 - 1 = g\left(\frac{t}{n}\right)^{-1} Y_{t,n}^2 - 1$$

el cual satisface:

$$Z_t = \sigma_t^2(\boldsymbol{\alpha}_0) \epsilon_t^2 - 1 = \sum_{k=1}^p \alpha_{0,k} Z_{t-k} + \xi_t \quad \text{donde} \quad \xi_t = \sigma_t^2(\boldsymbol{\alpha}_0) (\epsilon_t^2 - 1)$$

A partir de que el estimador por mínimos cuadrados $\hat{\alpha}_{LSE}$ depende de valores no observables de X y entonces es inviable y que la muestra análoga $\{\hat{Z}_t\}_{t=1}^n$ de $\{Z_t\}_{t=1}^n$ está definida por:

$$\hat{Z}_t = \hat{X}_t^2 - 1 \quad \text{con} \quad \hat{X}_t = \hat{g}\left(\frac{t}{n}\right)^{-1/2} Y_{t,n}$$

Donde: con un apropiado estimador no paramétrico $\hat{g}$ de g . [56], definen como un apropiado estimador no paramétrico por mínimos cuadrados como:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{LSE} = \underset{t=p+1}{\operatorname{argmin}} \sum^n (\hat{X}_t - \sum_{k=1}^p \alpha_k \hat{X}_{t-k})^2 \quad (3.10)$$

Donde $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{LSE}$ corresponde al vector :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{LSE} = (\hat{\alpha}_{1,LSE}, \dots, \hat{\alpha}_{p,LSE})^T$$

Para una mayor comprensión del anterior estimador ver [56].

3.0.3.27 Criterio de información de Akaike(AIC).

El criterio de información de Akaike (AIC) es una medida de la bondad de ajuste de un modelo estadístico. Se basa en la máxima verosimilitud del modelo, que es una

medida de la probabilidad de los datos observados bajo el modelo. Un modelo con un AIC más bajo se considera un mejor modelo, ya que tiene una menor diferencia esperada entre la distribución de datos real y la distribución del modelo [1].

4. Metodología

Para cumplir con los objetivos del presente trabajo de grado se consideran pertinentes los siguientes pasos: obtención y preparación de los datos, análisis exploratorio de los datos, metodología Box-Jenkins, estimación de modelos ARCH/GARCH, finalmente el pronóstico.

4.0.1 Obtención y preparación de los datos.

Los datos para realizar este estudio fueron descargados de la página electrónica en línea Yahoo Finance, que suministra servicios de información financiera gratuita, incluyendo la cotización de precios de activos financieros de renta fija y renta variable.

Se descargaron un total de dos mil quinientos dieciséis (2516) datos diarios del precio de cierre de la acción de Apple, obtenidos al cierre de la bolsa de valores de New York, desde el 01 de junio de 2012 hasta el 31 de mayo de 2022. Estos datos fueron analizados y modelados utilizando el software R.

4.0.2 Análisis exploratorio de los datos.

Se realizó un análisis estadístico descriptivo de los rendimientos compuestos en tiempo continuo de los precios. Donde se desea conocer el comportamiento que han tenido los precios en el pasado, mediante la estimación de estadísticos de tendencia central y de dispersión.

Sin embargo, bajo la premisa de que se requiere de un modelo pertinente para la estimación de la esperanza y volatilidad de los rendimientos continuos de la acción de Apple, se debe realizar el análisis estadístico descriptivo de los rendimientos de este activo financiero, hallando la serie de rendimientos logarítmicos con r_{t+1} (ver ecuación 3.1), y definir la serie de los rendimientos como: $Z_t = r_{t+1}$.

En el análisis se utilizan los rendimientos (o retornos) de la acción de Apple en

lugar de los precios. Esto se debe a que, en el ámbito de la economía financiera, los rendimientos son comparables con otras series, sin importar las diferencias en las tasas de cambio u otros factores, ya que se trabaja en una escala uniforme. Además, los rendimientos poseen propiedades estadísticas deseables, como la estacionariedad y la ergodicidad.

Por ende, este estudio se centra en el análisis de los rendimientos r_t de la acción de Apple, en lugar de los precios. Esto nos permite obtener un resumen completo y coherente de las oportunidades de inversión, siguiendo la recomendación de [18]. Luego se acude a la metodología clásica de series de tiempo para ajustar un modelo como lo sugiere la metodología Box-Jenkins.

4.0.3 Metodología Box-Jenkins

La metodología de Box-Jenkins (apartado 3.0.3.9) consiste en un ciclo iterativo de los siguientes pasos:

4.0.3.1 *Identificación del modelo.*

Se inicia con una evaluación visual para identificar cualquier tendencia, componentes estacionales, outliers u otros fenómenos en la serie. Además, se utilizan las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) (apartado 3.0.3.5), para observar si existe asociación lineal entre los rendimientos de diferentes periodos para evaluar si las observaciones del pasado influían en las más recientes, si la serie Z_t requiere estabilización de varianza y, en caso afirmativo, se aplica algún método de transformación, como el de Box-Cox (apartado 3.0.3.7). Posteriormente, con pruebas formales como la Prueba Dickey - Fuller aumentada (apartado 3.0.3.8), se evalúa la estacionariedad de la serie. En caso de que no sea estacionaria se diferencia.

Una vez confirmada la estacionariedad y estabilidad de varianza en la serie de los retornos logarítmicos Z_t , se procede a la identificación del posible orden del modelo. Este paso se realiza observando el comportamiento en la (ACF) y (PACF) (Ver

cuadro 3.1). En caso de que la identificación del orden no resulta clara, es posible recurrir a herramientas adicionales, como la matriz de autocorrelación extendida (EACF) (apartado 3.0.3.15). En última instancia, se puede emplear la función autoarima para comparar y verificar la hipótesis relacionada con el orden del modelo.

4.0.3.2 *Estimación del modelo*

Modelo ARIMA (p, d, q) . Para el modelo ARIMA (p, d, q) , se procede a estimar los parámetros desconocidos por el método de mínimos cuadrados (ver apartado 3.0.3.13).

4.0.3.3 *Examen diagnóstico.*

Se procede a evaluar los modelos estimados a los datos, para saber si cumple con los supuestos teóricos.[30].

Por lo que se verifica en primer lugar, si las estimaciones de los coeficientes del modelo son significativos a partir de los p-values, si los residuos del modelo estimado e_t son normales y si estos replican el comportamiento generado por un proceso de ruido blanco de media cero, varianza constante y no correlación serial, es decir, que corresponde a un proceso puramente aleatorio. En este contexto, los errores deberían ser independientes entre sí, esto es, sin correlación con el pasado (pruebas relacionadas en los apartados 3.0.3.17 - 3.0.3.20).

4.0.3.4 *Prueba de efectos ARCH.*

[23] señala que por lo general las series de tiempo financieras no tienen varianza constante, es decir que el supuesto de homogeneidad puede no cumplirse, lo que significa que el modelo puede explicar la esperanza de Z_t pero no captura de manera efectiva la dinámica de la varianza. Esta discrepancia puede dar lugar a problemas graves de estimación, por lo que se deben someter los residuales a pruebas de efectos ARCH (ver apartado 3.0.3.21).

En caso de detectar la presencia de heterocedasticidad condicional, se debe proceder

a estimar los modelos ARCH y GARCH y examinar cual presenta el mejor ajuste a los datos de la serie.

4.0.4 Modelo ARCH

El modelo ARCH se enfoca exclusivamente en los rezagos de los residuos al cuadrado para modelar la varianza condicional. Los parámetros de este modelo se estiman mediante el método de mínimos cuadrados, con la correspondiente interpretación teórica de los parámetros.

El μ indica la media condicional del modelo en el largo plazo a partir de los datos de la serie, el ω indica la varianza que presenta en el largo plazo de la serie de los datos y el α_1 representa el impacto que tiene el cuadrado de la varianza rezagada de la serie, para este caso de los retornos de Apple.

Posteriormente se procede a estimar varios modelos de tipo ARCH con media móvil y diversas especificaciones. Se evalúa cuál de estos modelos ofrece el mejor ajuste utilizando el Criterio de Información de Akaike (apartado 3.0.3.27). [16] enfatizan que el AIC no depende de la suposición de que las estimaciones se hayan obtenido mediante máxima verosimilitud.

4.0.4.1 Examen diagnóstico.

Si al modelo escogido como el mejor se le verifican los supuestos del modelo ARCH y se confirma que cumple con la normalidad, media cero, varianza constante y ausencia de correlación serial en los residuos, entonces, por principio de parsimonia, no sería necesario proponer otro modelo y se procede a realizar los pronósticos.

En caso de que no se cumplan estos supuestos, indicando que el modelo ARCH podría ser insuficiente para detectar la presencia de heterocedasticidad condicional, se toma la medida de estimar un modelo GARCH. Este enfoque es más apropiado para modelar y capturar la variabilidad condicional en los datos, especialmente cuando la heterocedasticidad es más compleja o no está completamente capturada por el modelo

ARCH.

4.0.5 Modelo GARCH

El modelo GARCH va más allá al estimar la volatilidad no solo con los rezagos de los residuos, sino también con las volatilidades estimadas en periodos anteriores. La estimación de los parámetros de este modelo se describe en el apartado 3.0.3.26. Con la siguiente interpretación teórica de los parámetros.

El μ indica la media condicional del modelo o promedio de la serie en el largo plazo, el ω indica la varianza en el largo plazo de la serie de datos, el α_1 va más allá e indica el impacto que tiene el cuadrado de la varianza rezagada de la serie y el β_1 corresponde a la predicción que se realiza de la varianza a partir del último dato.

Se procede a estimar varios modelos de tipo GARCH con media móvil y diversas especificaciones. Se elige el modelo que presenta el mejor ajuste.

4.0.5.1 Examen diagnóstico.

Se lleva a cabo la validación de los residuos del modelo. Posteriormente, se realiza una conclusión sobre la capacidad del modelo para capturar la variabilidad condicional en los datos, considerando la calidad de ajuste y la validez de los supuestos. Finalmente, se procede a realizar el pronóstico correspondiente. Este paso implica utilizar el modelo para prever valores futuros.

4.0.6 Pronóstico y comparación con valores reales.

A partir de la estimación obtenida con los modelos ARIMA, ARCH y GARCH, se procede finalmente a realizar el pronóstico

- **Modelo ARIMA.** El modelo ARIMA presenta tres componentes principales: AR (Autoregresivo), I (Integrado) y MA (Promedio móvil). El pronóstico de un modelo ARIMA (p, d, q) se presenta en la siguiente fórmula.

$$\hat{Y}_{t+h} = \mu + \phi_1 Z_{t+h-1} + \phi_2 Z_{t+h-2} + \dots + \phi_p Z_{t+h-p} - \theta_1 e_{t+h-1} - \theta_2 e_{t+h-2} - \dots - \theta_q e_{t+h-q}$$

Donde:

$\hat{Y}_{t+h}$ es el pronóstico en el período $t + h$.

μ es la media constante del proceso.

ϕ_p son los coeficientes autoregresivos.

Z_{t+h-p} son los valores pasados en el período $t + h$.

θ_q son los coeficientes de media móvil.

e_{t+h-q} son los errores pasados en el período $t + h$.

- **Modelo ARCH.** En un modelo ARCH, el pronóstico del valor condicional de la varianza, corresponde a:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \omega + \alpha_1 e_t^2 + \alpha_2 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q e_{t-q}^2$$

Donde:

$\hat{\sigma}_{t+1}^2$ es la varianza condicional pronosticada en el período $t + 1$.

ω es un término constante.

α_q son los coeficientes de autorregresión condicional en la varianza.

e_{t-q}^2 son los valores pasados de los errores cuadrados.

- **Modelo GARCH.** En un modelo GARCH, el pronóstico del valor condicional de la varianza es una extensión del modelo ARCH y es explicado mediante la siguiente fórmula:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \omega + \alpha_1 e_t^2 + \beta_1 \hat{\sigma}_t^2 + \beta_2 e_{t-1}^2 + \beta_3 \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \dots + \beta_q e_{t-q}^2 + \beta_{q+1} \hat{\sigma}_{t-q}^2$$

Donde:

$\hat{\sigma}_{t+1}^2$ es la varianza condicional pronosticada en el período $t + 1$.

ω es un término constante. β_{q+1} son los coeficientes de autorregresión condicional y autorregresión condicional en la varianza.

e_{t-q}^2 son los valores pasados de los errores cuadrados.

$\hat{\sigma}_{t-q}^2$ son los valores pasados de la varianza condicional pronosticada.

En la parte final, se procede a comparar los pronósticos con los valores reales para evaluar la eficacia del modelo ajustado a los datos.

5. Resultados y Análisis

5.0.1 Análisis exploratorio de la serie de precios de Apple Inc.

La estadística descriptiva de la serie de precios de las acciones de Apple Inc. en USD, durante el período del 1 de junio de 2012 al 31 de mayo de 2022, se resume de la siguiente manera:

- Los precios de la acción oscilaron entre \$12.03 como mínimo y \$180.43 como máximo.
- En el primer cuartil se ubicaron los precios en \$22.26, en la mediana en \$34.42, y en el tercer cuartil en \$63.29.
- El valor medio aritmético fue de \$52.88.
- La desviación estándar de la serie de precios de la acción fue de 44.7467.

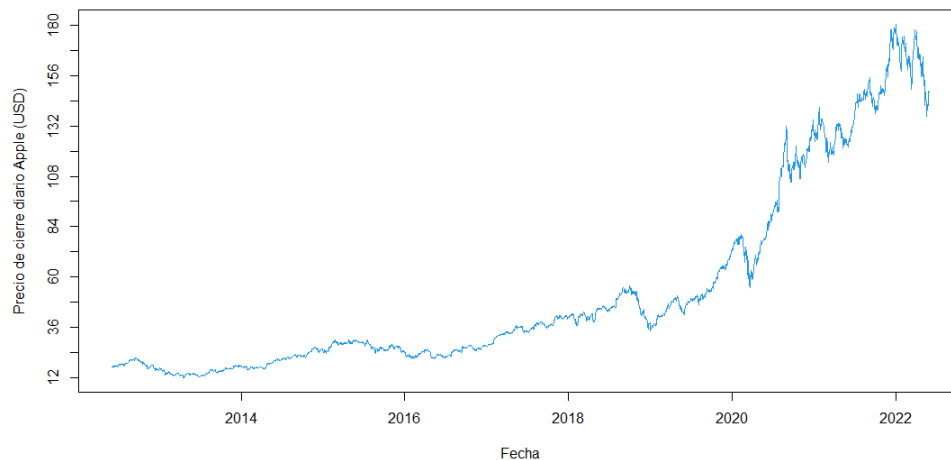


Figura 5.1: Cotización Apple Inc. junio 2012 - mayo 2022.

En la Figura 5.1 se puede observar el comportamiento de la serie de precios de las acciones de Apple Inc. se aprecia una tendencia creciente moderada hasta finales de

mayo de 2019, pero a partir de ese punto, la tendencia creciente parece volverse más pronunciada.

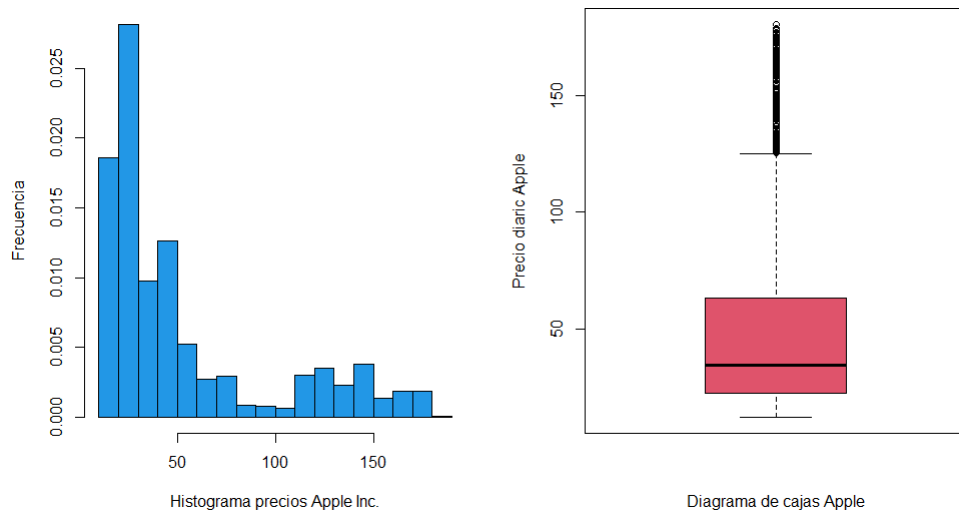


Figura 5.2: Precios Apple Inc. junio 2012 - mayo 2022.

En la Figura 5.2 se presenta un histograma que ilustra la distribución de los precios de las acciones de Apple Inc. Se observa que la mayor concentración de precios se sitúa entre 12 y 55 dólares aproximadamente, con una frecuencia notablemente alta en esa gama. Sin embargo, a medida que los precios aumentan por encima de los 50 dólares, es decir, cuando las acciones se vuelven más costosas, la frecuencia de ocurrencia disminuye significativamente.

El diagrama de cajas, por su parte, respalda este análisis previo, ya que muestra que la mayoría de los precios se sitúan por debajo de los 60 dólares aproximadamente. Esto confirma la tendencia observada en el histograma, donde los precios más altos están menos representados en la distribución de los datos.

5.0.2 Análisis exploratorio de los rendimientos de Apple Inc.

Dado que el análisis de los precios de las acciones corporativas presenta dificultades en términos de interpretación y comparabilidad con otros activos financieros en el mercado, los inversionistas suelen tener poco interés en este enfoque.

Por ello es común recurrir al análisis de los retornos y evaluar la rentabilidad obtenida durante un período de inversión.

La estadística descriptiva de la serie de retornos logarítmicos expresados porcentualmente de la acción de Apple, se resume de la siguiente manera:

- Los valores mínimos y máximos de los retornos diarios fueron de -13.77% y 11.32% , respectivamente.
- En el primer cuartil, se observa un valor negativo de -0.729% ,
- La mediana se sitúa en 0.089% .
- La media aritmética de los retornos diarios es de 0.086% .
- El tercer cuartil se encuentra en 1.027% .
- La desviación estándar de los retornos diarios fue de 1.803% .

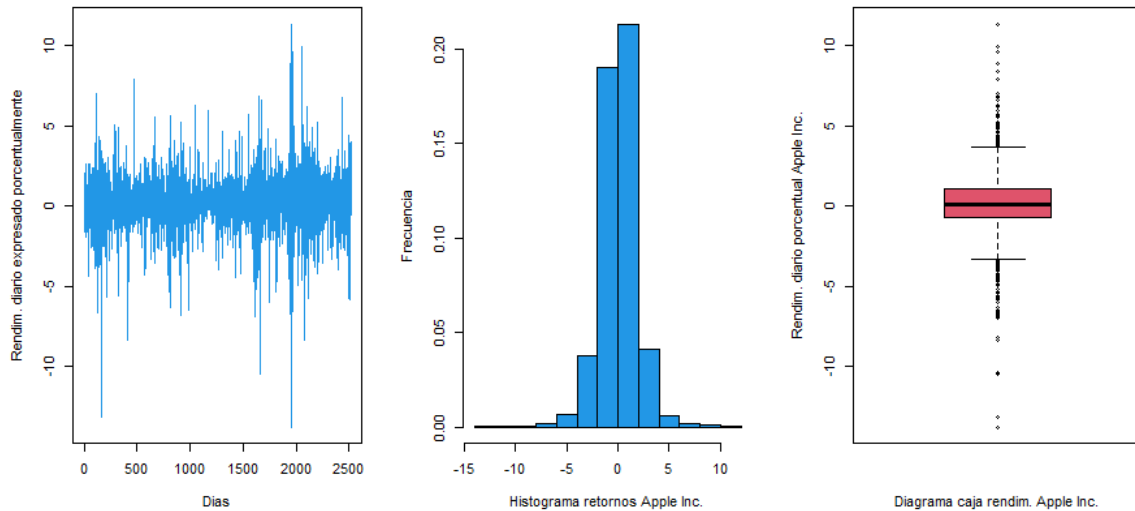


Figura 5.3: Rendimientos Apple Inc.

La figura 5.3 muestra el histograma y el diagrama de cajas de la serie de retornos diarios de Apple Inc. Se observa que los retornos se concentran principalmente alrededor de -5% y 5% . Aunque la distribución tiene una forma que se asemeja a una campana, es

importante destacar que es leptocúrtica, lo que significa que tiene colas más pesadas que una distribución normal estándar. Esto se refleja en una curtosis de 6.4313, indicando una alta concentración de datos alrededor de la media y un mayor número de valores extremos en comparación con la distribución normal. Además, el coeficiente de asimetría es -0.4033, lo que sugiere una ligera asimetría negativa en la distribución de los retornos.

Los valores atípicos se observan más allá de -10% y cerca del 10% para los retornos negativos y positivos, respectivamente. Esto implica que hay eventos inusuales que pueden afectar significativamente los retornos diarios de Apple Inc., tanto en términos positivos como negativos, más allá de los movimientos típicos observados en la distribución de retornos.

5.1 Aplicación de metodología Box - Jenkins

5.1.1 Identificación del modelo de la serie de los rendimientos de Apple Inc.

Funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los rendimientos de Apple Inc.

En la Figura 5.4, se observa en la función de autocorrelación (ACF) y en la función de autocorrelación parcial (PACF) que algunas líneas sobresalen de las bandas en el eje x, donde “lag” representa los rezagos. Esto sugiere una posible relación en el tiempo entre las variables analizadas, lo que podría indicar la presencia de ciertos patrones de comportamiento, como fluctuaciones o tendencias en los datos.

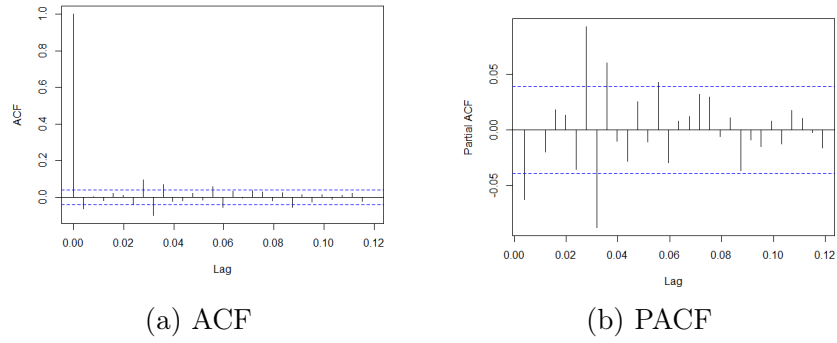


Figura 5.4: Rendimientos Apple Inc.

5.1.1.1 Estabilización de varianza y estacionariedad.

Tras evaluar si la serie requería transformación, se obtuvo un valor de λ de 1.4. Según lo explicado en el apartado 3.0.3.7, este valor indica que la serie de rendimientos no requiere transformación, lo que sugiere que ya es estable en términos de varianza. Con esta confirmación, se procedió a evaluar la estacionariedad de la serie. Se aplicó la Prueba Dickey-Fuller, y se obtuvo un valor p de 0.01. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula para el nivel de significancia de 0.05, lo que indica que la serie de los retornos es estacionaria. Los resultados se presentan en el Cuadro 5.1.

Resultado de la Prueba Dickey-Fuller	P-Value: 0.01
Transformación de Box-Cox	$\lambda = 1.4$
Resultado	No necesita transformación ni diferenciación

Cuadro 5.1: Resultados de Prueba Dickey-Fuller y de transformación Box-Cox

5.1.1.2 Identificación

En las figura 5.4, que muestra las funciones de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b), se destaca que en la ACF, la anulación parece ocurrir después del primer rezago. Por otro lado, en la PACF, se observan diversas oscilaciones sinusoidales alternantes en valores positivos y negativos. Este comportamiento podría sugerir la presencia de un modelo de media móvil (MA), posiblemente con un rezago. Se ha realizado una estimación de la función de autocorrelación extendida (EACF), que sugiere un modelo ARIMA(0,0,1) como adecuado para la serie de datos (ver anexo 1). Sin embargo, es crucial tener en cuenta

que la fiabilidad de esta herramienta depende del supuesto de normalidad de los datos. Dado que este supuesto no se cumple, se busca confirmar el modelo ARIMA(0,0,1) utilizando la función `auto.arima`, la cual no requiere que los datos sigan una distribución específica. es decir que el modelo de mejor ajuste a Z_t es un ARIMA(0,0,1) o de medias móviles de orden uno, MA(1).

5.1.2 Estimación del modelo ARIMA (p, d, q)

Se estimó un primer modelo de ajuste a la serie de los rendimientos de Apple Inc, usando la función `auto.arima` del paquete `forecast` en el programa R. El cuadro 5.2 resume el resultado para el ARIMA(0,0,1).

Serie: retornos de Apple Inc.		
ARIMA(0,0,1)		
Coefficients:	ma1	intercept
estimated value	-0.0624	0.0860
s.e.	0.0199	0.0336

Cuadro 5.2: Ajuste de modelo ARIMA.

La ecuación que representa el modelo es $\dot{Z}_t = (1 - \theta_1 B)a_t = (1 + 0.0624B)a_t$, donde a_t es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza constante σ_a^2 . Se debe tener en cuenta un modelo de medias móviles siempre es estacionario.

5.1.3 Examen diagnostico

5.1.3.1 Estacionariedad e invertibilidad.

Prueba de raíces unitarias del modelo: Se sabe que el modelo de media móvil (MA) es estacionario. Ahora procedemos a realizar la prueba de raíces unitarias para el modelo MA(1) con el fin de evaluar su invertibilidad.

Como se muestra en el cuadro 5.3 las raíces del MA(1) que se ajusta a la serie, resultan ser reales y yacen por fuera del círculo unitario con valor real de -16.0189, por lo que se corrobora el resultado de la Dickey - Fuller y la serie resulta ser estacionaria

Test de raíces unitarias		
real	complex	outside
-16.0189	0	True

Cuadro 5.3: Prueba de raíces unitarias del primer modelo

e invertible.

5.1.3.2 Análisis de los residuos del modelo.

Se analizó el cumplimiento de supuestos de normalidad, media cero, homocedasticidad e independencia de los errores para el modelo ARIMA como se muestra en el cuadro 5.4.

Prueba	Valor p	Cumple Criterio
Normalidad	$2.2e - 16$	No
Media Cero	0.9998	Sí
Homogeneidad	$2.839e - 050$	No
Independencia	$1.894e - 08$	No

Cuadro 5.4: Resultados de Pruebas Estadísticas

Se puede concluir que el único supuesto que no es rechazado es el de media cero, mientras que los supuestos de normalidad, de independencia y de homogeneidad de varianza no se cumplen, evidenciando que el modelo no se ajusta de manera adecuada a los datos.

5.1.4 Evaluación de efectos ARCH en el modelo.

Se procedió a evaluar la presencia de efectos ARCH en la serie mediante los pasos:

- 1) En el cuadro 5.5 donde se presenta el Modelo de Regresión Lineal (MLR) de los residuales del primer modelo ARIMA, se observa que tanto el intercepto como la pendiente tienen valores p cercanos a cero. Esto sugiere que la estimación del modelo de regresión que se ajusta a los residuales al cuadrado es significativa. En

términos prácticos, esto indica que la serie presenta efectos ARCH, lo que implica que la varianza de los residuales no es constante a lo largo del tiempo y muestra una estructura de autocorrelación condicional.

Coefficientes	Estim.	Error estand.	t	P-value)
Intercepto	2.53724	0.18992	13.36	2×10^{-16} * **
L(EC)	0.21572	0.01948	11.07	2×10^{-16} * **

Cuadro 5.5: MRL de los residuales del primer modelo ARIMA.

- 2) La figura 5.5, muestra que la serie de los residuos del primer modelo no presentan varianza constaste.

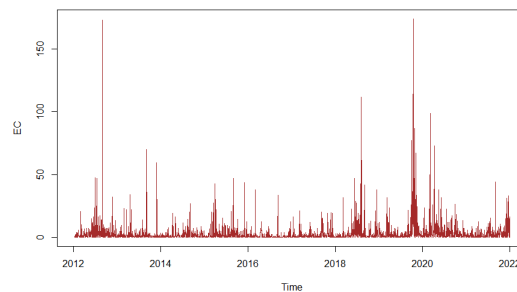


Figura 5.5: Visualización heterocedasticidad de residuales del modelo ARIMA(0,0,1).

- 3) En el cuadro 5.6, se evidencia el rechazo de la hipótesis nula, es decir que la serie presenta efectos ARCH.

ARCH LM-test			
Null hypothesis: no ARCH effects			
Chi-squared	= 141.93	df = 1	p-value < 2.2e-16

Cuadro 5.6: Prueba efectos ARCH en retornos de Apple Inc.

5.2 Ajuste de modelos ARCH y GARCH con media móvil.

Se procedió a estimar varios modelos de tipo ARCH y GARCH pero con diversas especificaciones para evaluar cuál de estos presentaba el mejor ajuste. Para ello, se ha empleado el AIC. Los resultados de esta evaluación se presentan en el cuadro 5.7, en el

cual se resaltan los parámetros estimados y los valores de AIC correspondientes a cada modelo propuesto, donde aquellos con valores más bajos indican un mejor ajuste del modelo.

Modelo	μ	MA(1)	ω	α_1	α_2	β_1	β_2	AIC
ARCH (1)	0.1151	-0.0177	2.5345	0.2262	-	-	-	3.9558
ARCH (2)	0.1240	0.0164	2.0349	0.1818	0.2095	-	-	3.9109
GARCH (1,1)	0.1559	0.0018	0.1661	0.1149	-	0.8359	-	3.8355
GARCH (1,2)	0.1557	0.0019	0.1661	0.1148	-	0.8359	0.0000	3.8365
GARCH (2,1)	0.1557	0.0021	0.1691	0.1089	0.0077	0.8330	-	3.8365
GARCH (2,2)	0.1558	0.0020	0.2155	0.1108	0.0380	0.5474	0.2399	3.8372

Cuadro 5.7: Parámetros del modelo y criterios de evaluación

Al analizar los resultados presentados, se destaca que entre los modelos ARCH, el que presenta el mejor ajuste es ARCH (2), ya que exhibe valores inferiores en el AIC. Del mismo modo, la especificación GARCH (1,1) muestra valores más bajos en comparación con otras configuraciones GARCH. En términos generales, los criterios de evaluación sugieren que el modelo GARCH (1,1) con media móvil.

5.2.1 Modelo GARCH (1,1) con media móvil.

El cuadro 5.8, muestra los resultados de la estimación del modelo GARCH (1,1) basado en un modelo MA(1), que de acuerdo a la evaluación anterior, es el modelo que presenta el mejor ajuste. Se realizó 2 estimaciones para los parámetros μ , $MA(1)$, ω , α y β . La primera estimación de los parámetros corresponde a los valores óptimos, mientras que la segunda estimación se realiza utilizando errores estándar robustos. Este último enfoque es más útil, dado que los supuestos de normalidad y homocedasticidad se violan [17].

En ambas estimaciones los coeficientes con sus respectivos valores $\mu = 0.155871$, $\omega = 0.166059$, $\alpha_1 = 0.114931$ y $\beta_1 = 0.835902$, resultan ser significativos excepto la estimación del parámetro media móvil con su respectivo valor $MA(1) = 0.001837$.

GARCH Model FIT(0,0,1)				
Optimal Parameters				
Coefficients:	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
Mu (μ)	0.155871	0.03028	5.14691	0.00000
MA(1)	0.001837	0.022542	0.08151	0.93504
Omega (ω)	0.166059	0.029080	5.71052	0.00000
Alpha1 (α_1)	0.114931	0.016511	6.96104	0.00000
Beta1 (β_1)	0.835902	0.020632	40.51449	0.00000
Robust Standard Errors:				
Coefficients:	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
Mu (μ)	0.155871	0.032540	4.790106	0.000002
MA(1)	0.001837	0.021663	0.084818	0.932406
Omega (ω)	0.166059	0.043228	3.841443	0.000122
Alpha1 (α_1)	0.114931	0.023589	4.872264	0.000001
Beta1 (β_1)	0.835902	0.028650	29.175953	0.00000

Cuadro 5.8: Ajuste de modelo GARCH (1,1) con MA (1).

5.2.2 Interpretación de los estimadores del modelo GARCH (1,1) con MA(1).

Para la interpretación de cada uno de los parámetros del modelo GARCH, es pertinente recordar que la serie de rendimientos de Apple presenta los rendimientos en términos porcentuales. Por lo que cada uno de los resultados que arroja el modelo corresponden a valores porcentuales. El $\mu = 0.155871$, corresponde a la media condicional del modelo, esto es, el rendimiento promedio diario en el largo plazo de la serie de rendimientos de Apple Inc. Según el modelo, Apple Inc., tiene tendencia en el largo plazo a presentar un rendimiento diario del 0,1558%, el p-value de 0.000002 indica que la estimación resulta ser significativo para el nivel de confianza del 5%.

El $MA(1) = 0.001837$, corresponde al componente de medias móvil que complementa la media condicional del modelo estimado en 0.001837% pero con un p-value de 0.932406 resulta ser poco significativo, lo que sugiere que la estimación de este parámetro no es significativa para la explicación del modelo de la serie de rendimientos de Apple Inc., cuando se ajusta el modelo de la serie con GARCH. El $\omega = 0.166059$, representa la varianza en el largo plazo de la serie, es decir que la volatilidad de los rendimientos corresponde al 0.166059%. Lo que indica una

volatilidad bastante alta, si se considera que el retorno estimado diario en el largo plazo es del 0.155871 %. Ahora, el p-value de la estimación fue de 0.000122 el cual resulta muy significativo por ser menor al nivel de significancia del 5 %.

El $\alpha_1 = 0.114931$, corresponde al impacto que tiene el cuadrado de la varianza rezagada con respecto al rendimiento que presenta el precio de hoy Apple Inc. Esto indica que el rendimiento diario de hoy se puede explicar en un 0,114931 % por la volatilidad del día inmediatamente anterior. Con un p-value de 0.000001 la estimación de este parámetro resulta ser muy significativa por ser muy inferior al nivel de significancia del 5 %, y finalmente el $\beta_1 = 0.835902$: que corresponde a la predicción de la varianza en el último periodo histórico del cual se tiene dato, en este caso indica el impacto que tiene el cuadrado de los residuales rezagados sobre el rendimiento que de acuerdo a la estimación corresponde a 0,835902 %, con un p-value de 0.000000 resulta muy significativo.

5.2.3 Esperanza condicional de la serie a partir de los modelos MA(1) y GARCH(1,1)-MA(1).

En los siguientes apartados se presenta la esperanza condicional estimada, primero utilizando el modelo MA(1) inicial y luego utilizando el modelo GARCH(1,1)-MA(1).

5.2.3.1 Modelo MA(1).

En los procesos de media móvil de orden q , esto es MA(q), cada observación Z_t , es generada por una media ponderada de las perturbaciones con rezagos de q periodos, por lo que el modelo MA(1) se representa:

$$\hat{Z}_t = \delta + \epsilon_t + \epsilon_t \theta_{t-1} \quad (5.1)$$

donde el valor esperado y varianza corresponden a:

$$E(Z_t) = \delta$$

$$\text{Var}(Z_t) = \text{Var}(\epsilon_t) + \theta_1^2 \text{Var}(\epsilon_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2(1 + \theta_1^2) = \gamma_0$$

Por lo que el resultado observado en el cuadro 5.2 de la estimación para la esperanza condicional con el modelo MA(1) corresponde al intercepto $\delta = 0.0860$ con un error estándar del s.e.=0.0336. Esto indica que el valor esperado para los retornos de Apple en el largo plazo de 0.086 % diario.

5.2.3.2 Modelo GARCH(1,1)-MA(1).

La estimación de la esperanza condicional de los retornos de Apple Inc. mediante el modelo GARCH(1,1)-MA(1), corresponde al valor obtenido en la estimación del parámetro μ , que ya ha sido explicado en el apartado 5.2.2. Este parámetro corresponde a la media condicional del modelo, es decir, el rendimiento promedio diario a largo plazo en la serie de rendimientos de Apple Inc. Según el modelo, Apple Inc. tiende a presentar un rendimiento diario de 0,1558 % en el largo plazo.

5.2.4 Varianza condicional a partir del modelo GARCH(1,1)-MA(1).

La varianza condicional del modelo GARCH(1,1)-MA(1), se representa matemáticamente:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 = 0.166059 + 0.114931 \epsilon_{t-1}^2 + 0.835902 \sigma_{t-1}^2 \quad (5.2)$$

La interpretación de los estimadores de los parámetros de la fórmula de la varianza condicional del modelo GARCH(1,1)-MA(1), que ya fueron explicados que ya fueron explicados en el apartado 5.2.2.

5.3 Examen Diagnóstico

Se analizó el cumplimiento de supuestos de normalidad, media cero, homocedasticidad e independencia de los residuos para el modelo GARCH(1,1)-MA(1).

Prueba	Valor p	Cumple Criterio
Normalidad	$2.2e - 16$	No
Media Cero	0.05231	Sí
Homogeneidad	0.02515	No
Independencia	$5.838e - 13$	No

Cuadro 5.9: Resultados de Pruebas Estadísticas del modelo GARCH(1,1)-MA(1)

Se puede concluir que el único supuesto que no es rechazado es el de media cero. Tanto el supuesto de normalidad, el de independencia, como el de homogeneidad de varianza no son satisfechos, evidenciando que el modelo no se ajusta de manera adecuada a los datos.

5.3.0.1 Verificación de los supuestos del modelo.

Se examinaron los residuos del modelo GARCH(1,1)-MA(1). Este análisis gráfico adicional tiene como objetivo descartar sospechas de que estos resultados puedan estar influenciados por el tamaño de la muestra, es decir, que el número de observaciones pueda afectar la capacidad para evaluar los supuestos del modelo.

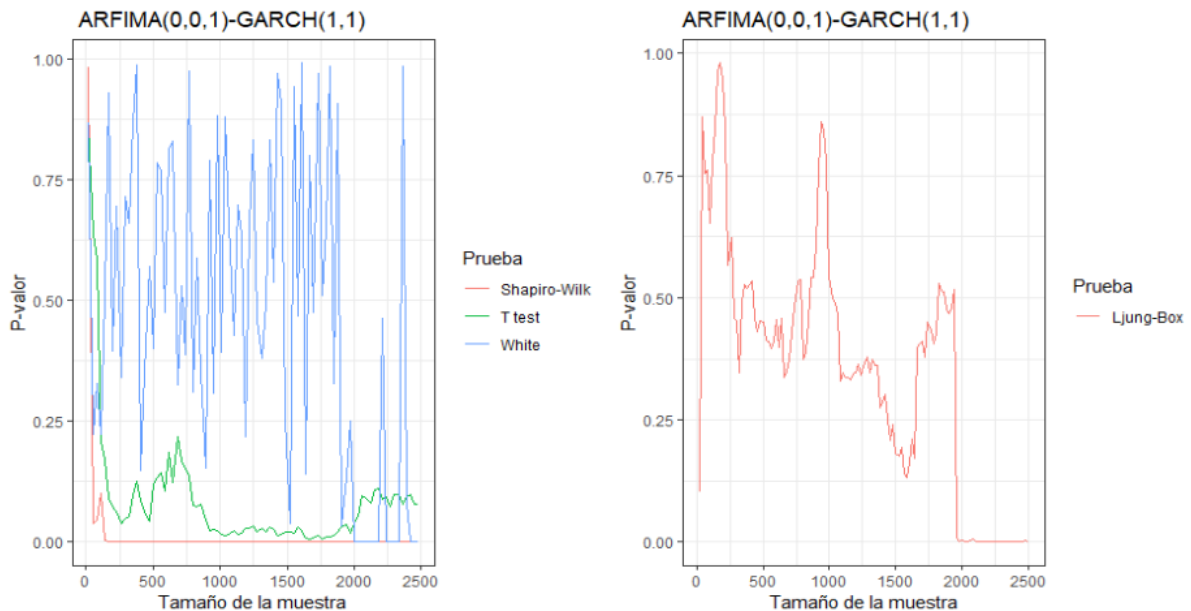


Figura 5.6: Análisis de residuales del modelo GARCH(1,1)-MA(1).

En la Figura 5.6, se destaca que la condición de media cero se cumple en la mayoría de los casos; sin embargo, persiste la falta de normalidad en los residuos. El caso de la homogeneidad de los residuos es muy intermitente, pero tiende a rechazarse. El supuesto de independencia se cumple en la mayoría de los casos, siendo el único en el que el tamaño de la muestra parece afectar los resultados. Finalmente, se puede concluir que en el modelo seleccionado como el mejor, GARCH(1,1)-MA(1), es evidente que persisten incumplimientos de supuestos clave independientemente del tamaño de la muestra. Estos hallazgos sugieren que el modelo no es capaz de capturar de manera efectiva la heterocedasticidad característica en este tipo de series temporales, es decir que no se ajusta adecuadamente a Z_t . Como consecuencia de estos hallazgos, se realizaron pronósticos con el fin de resaltar las deficiencias significativas del modelo en su habilidad para prever valores futuros.

5.4 Desviación de retornos de los retornos de Apple pronosticada a 10 días con el GARCH(1,1)-MA(1).

Día	Ret. est.	Ret. Real	Sigma est.	Sigma prom.	Dif. Sigma
t+1	0.1546	-3.9318623	2.494	2.6091	0.1151
t+2	0.1559	0.5214074	2.466	2.6091	0.1431
t+3	0.1559	1.7433138	2.439	2.6091	0.1701
t+4	0.1559	-0.5056221	2.413	2.6091	0.1961
t+5	0.1559	-3.6618076	2.388	2.6091	0.2211
t+6	0.1559	-3.9394460	2.364	2.6091	0.2451
t+7	0.1559	-3.9036834	2.341	2.6091	0.2681
t+8	0.1559	0.6650253	2.319	2.6091	0.2901
t+9	0.1559	1.9911878	2.297	2.6091	0.3121
t+10	0.1559	-4.0458682	2.277	2.6091	0.3321

Cuadro 5.10: Desviación de retornos esperada vs desviación real.

Se ha procedido a estimar el pronóstico de los retornos de las cotizaciones de los precios de Apple, utilizando el modelo GARCH(1,1)-MA(1), comenzando desde el último dato disponible en la serie. Los 10 retornos se calcularon utilizando los precios cotizados entre el 2 de junio y el 17 de junio de 2022.

Se realizó un pronóstico de 30 retornos para el activo financiero. Sin embargo, en el Cuadro 5.10 se muestra solo un período de 2 semanas, equivalente a los primeros 10 días hábiles de operación en el mercado. Es importante destacar que la precisión de los pronósticos tiende a disminuir a medida que se extiende el horizonte de tiempo [39]. En otras palabras, es más conveniente proporcionar un pronóstico con un horizonte de tiempo corto, ya que este tipo de anticipación podría brindar la información necesaria para la toma de decisiones. De esta manera, se pueden evaluar estrategias de compra o venta de acuerdo con los objetivos financieros y las necesidades específicas de cada individuo.

El Cuadro 5.10 presenta una serie de datos relevantes para el análisis. En la primera columna se muestra el día correspondiente, seguido por el valor estimado de la esperanza condicional en la segunda columna, que inicialmente es de 0.1546 para el primer día pronosticado y permanece constante para los días siguientes. Este patrón se debe a la naturaleza del modelo MA(1), donde la estructura del modelo y la estabilidad en los errores pasados conducen a una predicción constante en los futuros períodos. La tercera columna muestra los retornos de los datos reales, los cuales exhiben una media negativa de -1.506736 % durante los 10 días considerados.

La cuarta columna proporciona la estimación de la desviación estándar de los retornos, la cual disminuye gradualmente a medida que se extiende el horizonte de tiempo. Mientras tanto, la quinta columna muestra el promedio de la desviación estándar, que se mantiene constante en 2.6091. La última columna muestra las diferencias entre estas estimaciones de desviación, lo que representa la discrepancia entre la volatilidad estimada y la volatilidad promedio.

Se observa que estas diferencias aumentan ligeramente con el tiempo, lo que sugiere que los pronósticos de volatilidad pueden ser menos precisos a medida que se extiende el horizonte de pronóstico. Esta menor precisión podría atribuirse a la mayor incertidumbre asociada con la predicción de la volatilidad a largo plazo.

Al calcular la media de las desviaciones estándar estimadas, se obtiene un valor de 2.3798, con una diferencia en valor absoluto de 0.2293 en comparación con la volatilidad promedio. Estos resultados indican que, aunque el modelo proporciona una indicación de la desviación estándar de los retornos de Apple, no alcanza la precisión esperada, lo

que sugiere limitaciones en su capacidad predictiva.

Los modelos ARCH Y GARCH estimados en este proyecto de grado no parecen ser adecuados para pronosticar la media condicional y la varianza condicional de los retornos de Apple durante el período comprendido entre el 2 de junio y el 17 de junio de 2022.

Es crucial reconocer que estos modelos, al depender de datos pasados, no logran abordar el componente de error inherente a las series financieras. Este hallazgo resalta la complejidad inherente de las dinámicas del mercado financiero, que se ven influenciadas por una multitud de factores, tanto conocidos como desconocidos [37]. La complejidad observada en estos resultados se asemeja a una caminata aleatoria débil, influenciada por las expectativas del mercado, la psicología de los inversores, la especulación y otros factores no racionales [50]. Esta complejidad dificulta la modelación efectiva con las técnicas aplicadas en este estudio.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

El análisis de la serie temporal de Apple Inc. ha revelado una serie de desafíos significativos en cuanto a la modelización y pronóstico de sus retornos. Al identificar el orden del modelo, se encontró que es $MA(1)$, el cual viola los supuestos de normalidad, independencia y homocedasticidad. Además, se ha observado la presencia de valores atípicos y fluctuaciones, lo que confirma el comportamiento volátil de este tipo de series, es decir la presencia de efectos ARCH.

Aunque el modelo hallado $GARCH(1,1)$ muestra una mejor capacidad para explicar la volatilidad en comparación con los otros modelos estimados, $ARIMA(0,0,1)$ y $ARCH(1)$, aún enfrenta desafíos significativos. Los supuestos de normalidad y heterocedasticidad persisten en los residuos, lo que cuestiona la efectividad de estos modelos en la predicción de la media y varianza condicional de los retornos de Apple. Sin embargo, a pesar de estos desafíos, se ha realizado un pronóstico. Es importante destacar que el horizonte de tiempo se seleccionó estratégicamente para este pronóstico, considerando que a medida que el horizonte de tiempo aumenta, la precisión tiende a disminuir. Por lo tanto, se optó por un horizonte de tiempo más corto para proporcionar información relevante que pueda ser útil en la toma de decisiones a corto plazo en el mercado.

Finalmente, se comprende que los modelos ARCH y GARCH estimados, presentados en este proyecto de grado, no parecen ser apropiados para prever de manera efectiva la media condicional y la varianza condicional de los retornos de Apple durante el período comprendido entre el 2 de junio y el 17 de junio de 2022.

Este resultado puede atribuirse a la naturaleza peculiar de este tipo de series, que a menudo exhiben comportamientos de caminata aleatoria. La imprevisibilidad en estas series se deriva de su dependencia de las expectativas del mercado, así como de eventos macroeconómicos, noticias corporativas, cambios en la política regulatoria,

entre otros factores. Los modelos GARCH, al basarse en datos pasados, no logran explicar completamente el componente de error de estas series. Este comportamiento peculiar sugiere que otros factores más allá de los considerados en los modelos GARCH pueden estar influyendo en el comportamiento del mercado.

Este estudio destaca la necesidad de modelos más robustos y flexibles para comprender y predecir el comportamiento del mercado de valores. Los enfoques estadísticos tradicionales pueden no ser adecuados para capturar la complejidad de las dinámicas del mercado, especialmente en un entorno tan impredecible como el financiero. Además se espera que este trabajo sirva como referente para investigaciones futuras que exploren nuevas metodologías y consideren la complejidad de las fuerzas que impactan la volatilidad y los retornos de las acciones.

6.2 Recomendaciones

- Realizar una validación externa implica recopilar datos adicionales que no se hayan utilizado en el ajuste del modelo original y luego aplicar el modelo a estos datos para evaluar su desempeño. Si los modelos no lograron ajustarse bien a los datos originales, esta validación externa proporcionaría una oportunidad para identificar posibles deficiencias en el modelo y mejorar su capacidad predictiva.
- Realizar el análisis de sensibilidad como parte del proceso de evaluación del modelo. Este análisis permitirá comprender cómo el desempeño del modelo puede variar en respuesta a diferentes condiciones o escenarios, como cambios en el tamaño de la muestra, fluctuaciones en la dinámica del mercado o ajustes en los parámetros del modelo.
- Explorar alternativas más robustas y flexibles con una mayor capacidad predictiva y la habilidad para capturar la dinámica del mercado es esencial. Uno de estos modelos es el movimiento browniano geométrico, también conocido como modelo de caminata aleatoria. Esta herramienta permite simular las trayectorias de los precios de un activo financiero a partir de datos históricos y calcular los retornos. Luego, se pueden comparar estos retornos generados por la simulación con los retornos reales del activo a lo largo del tiempo para evaluar su precisión y utilidad en la predicción del comportamiento del mercado [51].

7. Anexos

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x	o	o	o	o	o	x	x	x	o
1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	x
2	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	o	x	o	o	o	o	o	o
5	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o
6	x	o	x	x	x	x	o	o	o	o
7	x	x	x	x	x	x	o	o	o	o

Cuadro 7.1: ESACF rendimientos de Apple Inc.

Referencias

- [1] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723.
- [2] Aldrich, J. and John, P. (1997). R.a. fisher and the making of maximum likelihood 1912–1922. *Statistical Science*, 12(3):162–176.
- [3] Alemañ Ledesma, L. (2019). Estudio y predicción de la volatilidad asociada a la rentabilidad en acciones. Master’s thesis, Universidad de Alicante. Departamento de Fundamentos del Análisis Económico.
- [4] Amate Vicente, K. (2018). Modelos arch y garch: aplicación a series financieras.
- [5] Arroyo, L. G. (2022). Notas clase número 7. Curso de Series de Tiempo, Universidad del Valle.
- [6] Awajionyi, C. and Ledisi, O. (2019). Forecasting the prices of apple inc. stocks using arima model. *International Journal of Financial Research*, 10(2):171–182.
- [7] Berninger, J. (2018). Forecasting the time series of apple inc.’s stock price. Master’s thesis, UCLA.
- [8] Bodie, Z., Kane, A., and Marcus, A. (2004). *Title of the Book*. Publisher Name.
- [9] Bollerslev, T. (1986). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, volume 31.
- [10] Box, G. E. P. and Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 26(2):211–252.
- [11] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1973). Some comments on a paper by chatfield and prothero and on a review by kendall. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 136(3):337–352.
- [12] Brealey, R. and Myers, S. (1995). *Title of the Book*. Publisher Name.
- [13] Breusch, T. S. and Pagan, A. R. (1979). A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica*, 47(5):1287–1294.

- [14] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer New York Inc., USA, second edition.
- [15] Broncano, R. E. (2022). Aplicación de técnicas de machine learning para la predicción de los precios de la acción de apple. *Revista de Investigación de Sistemas e Informática*, 15(1):13–22.
- [16] Burnham, K. P. and Anderson, D. R. (2002). *Model selection and multimodel inference: A practical information-theoretic approach*. Springer Science & Business Media.
- [17] Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (2005). *Microeconometrics: methods and applications*. Cambridge University Press.
- [18] Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C., and Whitelaw, R. F. (1998). *The Econometrics of Financial Markets*, volume 2. Macroeconomic Dynamics.
- [19] Casas, M. and Cepeda, E. (2008). Arch, garch and egarch models: applications to financial series. *Cuadernos de Economía*, XXVII(48):287–319.
- [20] Cryer, J. and Chan, K. (2008). *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, Iowa, USA, 2a edition.
- [21] Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366):427–431.
- [22] Dip, J. and Romero, P. (2015). Una comparación de redes neuronales y modelos arch-garch para predecir variaciones en el precio de acciones. aplicación a un caso de acciones de telefonía. *Revista de Investigación en Modelos Financieros*, page 6.
- [23] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007.
- [24] Engle, Robert F y Bollerslev, T. (1986). Modeling the persistence of conditional variances. *Econometrica*, 54(1):251–276.
- [25] Equipo editorial, Etecé (2022). Apple. <https://humanidades.com/apple/>.
- [26] Fama, E. F. (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, 38(1):34–105.

- [27] Federación Mundial de Bolsas de Valores (2022). Estadísticas anuales 2021. Comunicado de prensa.
- [28] Ferreira, P. (2016). Apple, alphabet, or microsoft: Which is the most efficient share? *Econometric Research in Finance - Vol. 1*, pages 67–79.
- [29] García Ruiz, J. L. and García-Ruiz Moreno, (2023). *Economía Financiera*. McGraw-Hill.
- [30] González Casimiro, M. P. (2009). *Análisis de Series Temporales: Modelos ARIMA*.
- [31] Gujarati, D. and Porter, D. (2010). *Econometría*. McGraw Hill.
- [32] Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- [33] Horák, J. and Kaisler, D. (2022). Evaluation of development of apple inc. stock price time series. *Journal Name*.
- [34] Hume, A. (2020). Diferencia entre los modelos arima y arch para el análisis de series temporales.
- [35] Hyndman, R. J. and Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts.
- [36] Madura, J. (2008). *International Financial Management*. Pearson Education, New York, NY, 7th edition.
- [37] Mankiw, N. G. (2020). *Principles of Economics*. Cengage Learning.
- [38] Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441.
- [39] Mendez Giraldo, G. A. (2003). *Gerencia de manufactura: Función de planeación*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, primera edición edition.
- [40] Montgomery, D. C., Jennings, C. L., and Kulahci, M. (2015). *Time Series Analysis and Forecasting*. John Wiley & Sons.
- [41] Moore, D. S. and McCabe, G. P. (2019). *Introduction to the Practice of Statistics*. W. H. Freeman and Company.

- [42] Murray, A. (2018). Fortune global 500 companies 2018. <https://fortune.com/2018/05/21/fortune-500-companies-2018/>.
- [43] Peña, A. R. and Sánchez, A. R. (2011). Análisis de la rentabilidad y del riesgo de activos financieros: aplicación de modelos garch. *Boletín económico de ICE, Información Comercial Española*, pages 39–48.
- [44] Pérez, P. R. (2019). *Modelación financiera: conceptos y aplicaciones*. Universidad Piloto de Colombia, Bogotá.
- [45] Ramos, J. A. Escamilla, E. and Peña, M. A. y Olmos, J. L. (2019). *Economía mundial: fundamentos y aplicaciones*. Pearson Educación, Ciudad de México, México, 2nd edition.
- [46] Rao, S. (2022). *A Course in Time Series Analysis*. https://web.stat.tamu.edu/~suhasini/teaching673/time_series.pdf.
- [47] Ross, S. (1995). *Title of the Book*. Publisher Name.
- [48] Ross, S. A., Westerfield, R. W., and Jaffe, J. F. (2009). *Finanzas Corporativas*. McGraw-Hill Interamericana Editores, Mexico, 8th edition.
- [49] Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3-4):591–611.
- [50] Shiller, R. J. (2005). *Irrational Exuberance*. Princeton University Press.
- [51] Suganthi, K. and Jayalalitha, G. (2019). Geometric brownian motion in stock prices. *Journal of Physics: Conference Series*, 1377:012016.
- [52] Tsay, R. S. and Tiao, G. C. (1984). Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary arma models. *Journal of the American Statistical Association*, 79(384):84–96.
- [53] Wei, W. (2014). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Pearson Education Inc., México.
- [54] Wei, W. W. S. (2006). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Pearson, United States, 2nd edition.

- [55] Zachary, M. (2022). Apple alcanza los 3 billones de dólares de capitalización de mercado.
- [56] Zhang, Y., Liu, Y., and Li, Y. (2020). Comparison of estimation methods for arch models. *Journal of Financial Research*, 43(2):225–244.