DIAGRAMAS Y PRÁCTICA MATEMÁTICA EN LA GEOMETRÍA CARTESIANA (1637-1750). CONTRIBUCIÓN DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA A LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Tesis para optar al título de Doctor en Educación

presentada por:

JHON HELVER BELLO CHÁVEZ

Código: 1504768

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN

Agosto de 2021

DIAGRAMAS Y PRÁCTICA MATEMÁTICA EN LA GEOMETRÍA CARTESIANA (1637-1750). CONTRIBUCIÓN DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA A LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Tesis para optar al título de Doctor en Educación

presentada por:

JHON HELVER BELLO CHÁVEZ

Código: 1504768

Director:

DR. LUIS CARLOS ARBOLEDA APARICIO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN

Agosto de 2021

Tabla de contenido

Resumen **1**

Introducción **2**

1. Planteamiento del Problema y Justificación **5**

1.1 Postura Sobre el Conocimiento Matemático del Profesor de Matemáticas 5

1.2 Postura Sobre la Práctica Matemática 6

1.2.1 Diagramas en la Práctica Matemática y en la Formación del Profesor 15

1.3 Sobre el Contexto Histórico de la Práctica Cartesiana 19

1.4. Diseño Metodológico 22

1.5 Objetivos 32

1.5.1 Objetivo general 32

1.5.2 Objetivos específicos 32

2. Marco de Referencia **33**

2.1 El Conocimiento de las Matemáticas Visto Desde las Prácticas..... 33

2.2 La Práctica Matemática Focalizada en la Construcción y Uso de Diagramas . 39

2.3 Historia de las Matemáticas en la Formación del Profesor de Matemáticas 46

2.4 El Conocimiento Matemático del Profesor 49

2.4.1 El caso del Horizon Content Knowledge 52

2.4.2 Una Propuesta de Interacción Entre el MKT y la Práctica Matemática 56

2.5 La Práctica en la Obra Matemática de Descartes 58

2.5.1 La Comunidad de Matemáticos 59

2.5.2 Programa de Investigación 61

2.5.3 Lenguaje Formal 67

2.5.4 Métodos de Prueba 72

2.5.5 Conceptos 75

2.5.6 Métodos Argumentativos 81

2.5.7 Estrategias de Prueba 85

2.6 Diagramas en la *Geometría* de Descartes de 1637 87

2.6.1 Construcciones de Operaciones 88

2.6.2 Solución de Problemas 90

2.6.3 Instrumentos y Construcción de Curvas 100

2.6.4 Solución de Ecuaciones 105

3. Segunda Versión en latín de la *Geómetríe* **108**

3.1 Notae breves por Florimondi de Beaune 112

3.1.2 Solución de Ecuaciones 114

3.1.3 Solución de Problemas 115

3.1.4 Instrumentos y Construcción de Curvas 118

3.2 Los Comentarios de van Schooten 121

3.2.1 Solución de Problemas 121

3.2.2 Instrumentos y Construcción de Curvas 149

3.2.3 Solución de Ecuaciones 162

3.3 *Appendix de Cubicarum Aequatonum Resolutione* 172

3.4 Epistola de *Transmutatione Curvarum Linearum in Rectas* 178

3.5 *Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesiane Géometríae Methodum Renati Descartes* 180

3.6 *Elementa Curvarum Lineaurum* 188

3.6.1 Liber Primus 188

3.6.2 Liber Secundus 197

3.7 *Tratactus de Concinnandis Demostrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico* 211

3.8 Cambios en la Práctica Cartesiana en la Segunda Edición de la *Geometría.* Reflexión para el Horizonte de Contenido 218

4. La Práctica Cartesiana en los Libros de Texto 225

4.1 Las Ediciones de la *Geometría* de Bernard Lamy 230

4.1.1 Análisis Sobre el Método. Primer Grupo 231

4.1.2 Análisis Sobre las Proporciones. Primer Grupo 238

4.2 Cambios en Relación con el Método. Segundo Grupo de Ediciones 241

4.2.1 Cambios en Relación con las Proporciones. Segundo Grupo de Ediciones 244

4.3 Cambios Respecto al Método. Tercer Grupo 247

4.3.1 Cambios en Relación con las Proporciones. Tercer Grupo 252

4.4 El Libro de Reyneau. Consolidación del Análisis en la Enseñanza 255

4.4.1 Las Técnicas Algebraicas Como Columna Vertebral de la Enseñanza 259

4.4.2 Los Diagramas en el Libro: Usage de L`analyse de Reyneau 267

4.5 La Práctica Matemática Cartesiana en Libros Para la Enseñanza. Reflexión Para el Horizonte de Contenido 282

5. Conclusiones **285**

Bibliografía **293**

Tabla de figuras **306**

Resumen

Esta tesis doctoral plantea una forma de entender y seleccionar asuntos de la historia de la matemática que pueden ser usados en la formación del horizonte del contenido matemático de los profesores. Para ello usa una estructura de la práctica matemática que permite organizar y entender el uso, y apropiación de la propuesta matemática que se encuentra en la *Geometría* de Descartes de 1637. Se centran esfuerzos en comprender la transformación del uso de diagramas en la apropiación del texto, a través del estudio de la segunda edición en el latín de la *Geometría*, comentada y editada por van Schooten. Este texto fue aumentado con manuscritos que versan sobre las matemáticas cartesianas, que fueron elaborados por algunos de los primeros interpretes y estudiosos del documento original. De igual manera, se analizan algunos libros escolares de la comunidad religiosa de los oratorianos, específicamente las ediciones de los textos de Bernald Lamy y Charles Reyneau, quienes declaran enseñar las matemáticas que se deducen a partir de la obra de Descartes.

En esta tesis se concluye que los asuntos que deberían diseñarse para la formación de profesores de matemáticas están asociados a las transformaciones de la practica en los procesos de divulgación y uso de las matemáticas cartesianas. En el análisis de los textos se evidencia que en estos procesos los usos del diagrama propuesto en la obra original se transformaron, dando paso a un tratamiento algebraico de los elementos de las matemáticas.

Palabras claves: Descartes, curva algebraica, horizonte de contenido, formación de profesores, diagramas, geometría, álgebra.

Introducción

Esta tesis doctoral plantea que la historia de las matemáticas vista desde la práctica matemática constituye un tipo de conocimiento fundamental para formar al profesor en esta área. Para concretar tal planteamiento, se realiza un análisis de la práctica matemática que desarrolló Descartes (1596-1650) en su *Geometría* (1637) y de las trasformaciones que esta práctica experimentó hasta 1750; tiempo de discusión y consolidación de la matemática cartesiana. En especial, se hace un seguimiento a la práctica que consiste en el uso de diagramas en la segunda edición en latín de la obra y en dos textos que se propusieron desarrollar las ideas cartesianas para la enseñanza.

En el libro *Geometría*, usando el método analítico, Descartes presentó la relación entre una curva que representa la solución de un problema geométrico y su expresión algebraica, y desarrolló una teoría de la construcción de ecuaciones basada en curvas formadas por la intersección de curvas de menor grado. Ello dio lugar al inicio de una nueva área de las matemáticas conocida hoy como Geometría Analítica.

Descartes introduce los diagramas en varios sentidos: para designar y relacionar las cantidades de magnitud conocidas y desconocidas en el primer momento del análisis, para realizar la construcción de curvas en la solución de ecuaciones e imágenes de instrumentos para trazar curvas. Los diagramas aparecen como parte del discurso cartesiano, como representación de objetos y como parte del método para resolver problemas.

Los diagramas han sido una forma de comunicación e invención de las matemáticas. Sin embargo, no hacen parte de sus sistemas de formalización. Desde hace pocos años, en diferentes campos de la ciencia cognitiva, la inteligencia artificial y los sistemas informáticos se empezó a estudiar su influencia como medio de inferencia y de razonamiento en la solución de problemas y en la prueba de proposiciones. Algunos

trabajos relacionados con la práctica matemática han analizado la importancia del diagrama en el razonamiento matemático, fundamentalmente, se han referido a los *Elementos* de Euclides (Manders, 2008, 2008a; Panza, 2012). Estos estudios han mostrado que existe una clase de cognición especial para los diagramas, un tipo de razonamiento diagramático que no solo permite la compresión de asuntos matemáticos, sino que, además, repercute en técnicas de inferencia y generalización. En otras palabras, estudiar los diagramas en la práctica es estudiar una forma de hacer o de producir matemáticas. Por lo tanto, analizar sus usos implica reconocer los diagramas como elementos discursivos, creativos y representacionales que se consolidaron o se omitieron en la evolución de las matemáticas.

Por otra parte, en los procesos de enseñanza los profesores usan heurísticas que se diferencian de las formas de enunciación lógica y de presentación axiomática de las teorías. Para ello necesitan comprender otros signos que les permitan significar los conceptos y establecer conexiones de un concepto con otros, y con la estructura propia de las matemáticas. Los docentes trabajan con medios de producción de las matemáticas (como son las imágenes, los diagramas y los símbolos), los cuales permiten organizar tanto las matemáticas escolares como el saber de los estudiantes.

En esta tesis doctoral se muestra que los medios de producción de las matemáticas y sus transformaciones son importantes para la formación del conocimiento matemático del profesor. Se argumenta que tal conocimiento puede organizarse desde la perspectiva de la práctica matemática. Desde este punto de vista de la formación del profesor de matemáticas, este tipo de análisis permite construir historias que evidencian el hacer de las matemáticas, perfeccionando el conocimiento matemático del cual dispone el profesor para la enseñanza. Como parte de su reflexión sobre la enseñanza, el profesor examina las herramientas que permitieron constituir la práctica, establecer y validar las ideas, relacionar

las matemáticas con otras ciencias y determinar un cuerpo de proposiciones matemáticas demostradas.

En síntesis, esta tesis doctoral estudia el impacto de la obra de Descartes en el periodo comprendido entre la publicación de la primera edición del texto en 1637 hasta 1750, intervalo de tiempo en que los historiadores consideran se desarrolló y consolidó el cartesianismo. En este periodo se publicó la segunda edición de la *Geometría* (Descartes, 1659 - 1661), que estudiaron Gottfried Leibniz e Isaac Newton, la cual incluyó comentarios de un grupo de matemáticos comprometidos en la adopción y divulgación de las ideas cartesianas. En primer lugar, Francisco van Schooten quien tradujo y editó la obra, e incluyó aportes adicionales de sus alumnos Florimond de Beaune, Johannes Hudde, Johan de Witt y Hendrik van Heuraet. En el trascurso del tiempo escogido para el análisis, surgieron libros de texto que interpretaron la propuesta matemática cartesiana para la enseñanza; entre los cuales, se destacan el de Antoine Arnauld, Bernard Lamy y el de Charles Reyneau. Estos dos últimos textos hacen parte del corpus documental objeto de estudio de esta tesis.

1. Planteamiento del Problema y Justificación

En este aparte se discuten dos componentes problémicas en el desarrollo de la tesis: la primera, una discusión sobre la relación entre la práctica y el campo conceptual de enseñanza de las matemáticas[1] y segundo, una contextualización histórica de los documentos en los que se concreta el análisis.

1.1 Postura Sobre el Conocimiento Matemático del Profesor de Matemáticas

En la actualidad, la comunidad que trabaja en la formación del profesor de matemáticas reconoce diferentes áreas y disciplinas que conforman los conocimientos y los saberes que se espera tenga un profesor. Una buena revisión de temas y desafíos a este respecto se encuentra en Hoover, Mosvold, Ball & Lai (2016). Este marco multidisciplinar incluye: pedagogía, didáctica, semiótica, antropología, psicología, entre otras. Los autores estudian la contribución de estos saberes en la formación del profesor, y la transposición del conocimiento matemático en el proceso de enseñanza: ¿Cómo disponer las matemáticas para que el profesor las aprenda? ¿Qué tipo de conocimiento matemático favorece la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje?

El *Mathematical Knowledge Teacher*[2] - *MKT*, Ball, Thames y Phelps (2008) proponen un acercamiento teórico en el que han trabajado durante más de una década diferentes investigadores en el mundo[3]. El *MKT* ha revelado la complejidad de la formación del profesor a partir de las siguientes preguntas: ¿Qué saber matemático favorece la labor

[1] Las consideraciones de este proyecto sobre la aplicación y el uso de la historia conciernen, en general, a la formación inicial o continua de docentes.

2 Se define como "…el conocimiento matemático utilizado para llevar a cabo la labor de enseñanza de las matemáticas". (Ball, et al., 2008, p. 399)

3 Investigadores como Jill Adler, Konrad Krainer, Himman Bass, Yi-An Cho, Fui-Due Tee, Heather Hill, Marck Hoover, Reidar Mosvold y Arden Jakobsen han trabajado en el desarrollo de las componentes del MKT.

de los profesores de matemáticas? ¿Qué saber sobre las matemáticas le posibilita al profesor entender las producciones de sus estudiantes? En esta tesis, esta problemática se aborda a partir de la siguiente hipótesis: el saber que debe circular en la formación del profesor de matemáticas es la práctica matemática[4]; esta subyace a todos los dominios del *MKT* estableciendo vínculos entre el conocimiento de la disciplina matemática y su enseñanza.

1.2 Postura Sobre la Práctica Matemática

Al orientar la formación docente en la práctica matemática se reconocen las matemáticas como producción que realizan los humanos en comunidades y culturas determinadas, compartiendo problemas y creencias de un momento histórico y sobre la base de capacidades biológicas y cognitivas (Löwe, 2016; Ferreiros, 2016). En este sentido, la matemática es un consenso de la comunidad científica sobre un producto construido en un sistema de producción de conocimiento, con las dificultades propias de una práctica social, que se establece y se modifica a través del tiempo y la cultura (Ferreiros, 2016). Las normas sociales que permiten la realización de un producto, en este caso un conocimiento, cambian a partir de artefactos culturales[5] que modifican las técnicas, los procesos o las habilidades en una comunidad (Azzouni, 2007). Se trata de analizar y reconocer que "existe una historia social de la razón, que es coextensiva a los microcosmos donde poco a poco se instituyen las condiciones sociales del desarrollo de la razón" (Bourdieu, 1997, p. 210).

[4] Los autores de las investigaciones sobre práctica matemática consultados en esta tesis fundamentalmente se asocian en el campo de la *Association for the Philosophy of Mathematical Practice* - *APMP*.

[5] Contrariamente a los enfoques que los consideran excluyentes (Holland y Cole, 2009) reconocen que los artefactos culturales pueden ser simultáneamente ideales y materiales. La cultura como artefacto ideal/material se basa y proporciona un puente entre la teoría del discurso con énfasis en los usos sociales de las formas culturales y la teoría de los esquemas que teoriza la memoria cultural como estructuras de conocimiento personal.

Es allí donde emerge la lucha entre los miembros de una comunidad por mejorar o mantener ciertas prácticas. El ejercicio social del conocimiento no puede analizarse solo en sus condiciones objetivas, se necesita considerar a los agentes de las prácticas en su proceso y en su sistema de producción. Se requiere "rescatar -la producción- no en cuanto individuo sino como agente socializado, es decir, de aprehenderlo a través de aquellos elementos objetivos que son producto de lo social" (Gutiérrez, 2005, p. 16). La producción se origina en un campo, esto es, en un espacio determinado por reglas, históricamente constituido por sujetos constreñidos por prácticas determinadas e intereses propios de la comunidad a la que pertenecen. El campo es un espacio de juego que incluye personas dispuestas a jugar con las reglas que históricamente se van determinando; según Bourdieu (2007):

> (…) el campo (es decir el espacio de juego, las reglas del juego, las apuestas, etc.) se ofrece claramente como lo que es: una construcción social arbitraria y artificial, un artefacto que se invoca como tal en todo lo que define su *autonomía*, reglas explícitas y específicas, espacio y tiempo estrictamente delimitados y extraordinarios, y la entrada en el juego adquiere la forma de un cuasi contrato que a veces es explícitamente evocado (juramento olímpico, llamado al *fair-play y*, sobre todo, presencia de un árbitro) o expresamente recordado a aquellos que "se meten en el juego" al punto de olvidar que se trata de un juego ("algo que no es más que un juego"). (p. 109)

Así pues, el análisis de la práctica es histórico, se propone rescatar la dialéctica de las condiciones de producción del agente social -el cual se desenvuelve de acuerdo con el grado de objetividad determinado por la comunidad-, y caracterizar la subjetividad que

resulta de tal práctica (Bourdieu, 1997, 2007). La subjetividad correspondiente a la participación del individuo en el campo específico, y determinada por sus respectivas reglas de juego, es el *habitus*:

> (…) que es el principio generador de respuestas más o menos adaptadas a las exigencias de un campo, es el producto de toda la historia individual pero también, a través de las experiencias formadoras de la primera infancia, de toda la historia colectiva de la familia y de la clase", (como se citó en Gutiérrez, 2005, p. 81).

Analizar la práctica de otros agentes en un mismo campo permite entender aspectos de la práctica propia, "los condicionamientos sociales que tienen nuestras miradas, nuestras perspectivas, nuestras herramientas" (Gutiérrez, 2005, p. 8); es una forma de reconocer en nuestras actividades la práctica, los sujetos, la comunidad y las instituciones como gestores históricos.

Es claro, entonces, que la práctica matemática a pesar de su aparente invariabilidad e universalidad conceptual, es una entidad histórica robusta con un capital acumulado de conocimiento específico. Sociológicamente, difiere de otras prácticas humanas; no solamente en cuanto a los niveles de simbolización, abstracción y generalización desplegados en el pensamiento matemático, sino que al final, en el producto, en la teoría, no siempre hay vestigio de la heurística del proceso de su constitución a través de la intuición, la experimentación y la formalización[6]; prevalece el carácter sistémico, axiomático y deductivo de la matemática compartido y decidido por la comunidad de

[6] En este sentido Schubring, (2011, p. 147) afirma: "… no existe objetividad, al menos no objetividad global. No solo en el aprendizaje, los significados de los conceptos están sujetos a procesos de negociación, de modo que las diferencias en los significados establecidos por varios grupos desaparecerán como resultado de las interacciones cuando estos grupos se comunican y logran significados compartidos…"

matemáticos. Una vez creado el conocimiento matemático, el producto asume un espacio de autonomía[7] y atemporalidad. (Glas, 2007)

La práctica es un proceso de conocimiento que transita desde la intuición, donde los objetos son dados, cognoscibles, hasta hacer parte de una estructura formal; como lo planteó Hilbert (1902):

> Geometry, like arithmetic, requires for its logical development only a small number of simple, fundamental principles. These fundamental principles are called the axioms of geometry. The choice of the axioms and the investigation of their relations to one another is a problem which, since the time of Euclid, has been discussed in numerous excellent memories to be found in the mathematical literature. This problem is tantamount to the logical analysis of our intuition of space[8] (p. 17).

La cita reflexiona sobre la importancia que tiene la formulación de los principios lógicos de una teoría y recuerda que para la elección de éstos se da un tránsito con la intuición que es mediado por el análisis lógico, Hilbert llama la atención al papel de análisis lógico en el refinamiento de principios lógicos a partir de la intuición. El epígrafe de esta misma obra ayuda a comprender esta relación que ha sido histórica entre intuición y formalismo. La práctica matemática adopta este tipo de problemáticas, pues lo que está en

[7] "Esa autonomía es la del pasado actuado y actuante que, al funcionar como capital acumulado, produce historia a partir de la historia y asegura así la permanencia en el cambio que hace al agente individual como mundo en el mundo" (Bourdieu, 2007, p. 93). La autonomía en el caso de las matemáticas se ocupa de los criterios de validez, validación y rigor de las matemáticas.

[8] La geometría, como la aritmética, requiere para su desarrollo lógico sólo un pequeño número de principios fundamentales simples. Estos principios fundamentales se denominan axiomas de la geometría. La elección de los axiomas y la investigación de sus relaciones entre sí es un problema que, desde la época de Euclides, se ha discutido en numerosas memorias excelentes que se encuentran en la literatura matemática. Este problema equivale al análisis lógico de nuestra intuición del espacio.

el horizonte de la práctica es la construcción de la matemática: “all human knowledge begins with intuitions thence passes to concepts and ends with ideas[9].” (Kant, como se citó en Hilbert, 1902 p. 17). El sistema de axiomas solo se establece como tal a través de esta mediación. Por lo tanto, existen diferentes momentos para la teoría, transformaciones del sistema de una práctica específica, resultado del paso entre intuición y formalización.

Una de las caracterizaciones más significativas de práctica matemática se encuentra en el método de descubrimiento de las matemáticas que se expone en *Proof and Refutations* (Lakatos, 1976). En este texto el autor narra el proceso de formalización de un teorema a través de ir aceptando o rechazando diferentes argumentos para validar y probar un enunciado y su justificación. La práctica del matemático al crear y formalizar la matemática. Un paso siguiente se encuentra en la obra *The Nature of Mathematical Knowledge,* (Kitcher, 1984), en donde el autor, inspirado en una visión evolucionista de las matemáticas, aporta una explicación sobre cómo se desarrollan las matemáticas (van Bendegem, 2014). Kitcher[10] propuso un modelo para describir la actividad matemática como práctica matemática, el cual consiste en la siguiente quíntupla[11]:

> As a convenient notation, I shall use the expression <L, M, Q, R, S> as a symbol for an arbitrary mathematical practice (where L is the language of the practice, M the set of metamathematical views, Q the set of accepted questions, R the set of accepted reasonings, and S the set of accepted statements). (Kitcher, 1984, p. 164)

[9] Todo conocimiento humano comienza con intuiciones, luego pasa a conceptos y termina con ideas.
[10] Estas ideas se retoman en la sección 2.1.
[11] Como notación conveniente, usaré la expresión <L, M, Q, R, S> como símbolo de una práctica matemática arbitraria (donde L es el lenguaje de la práctica, M el conjunto de puntos de vista metamatemáticos, Q el conjunto de preguntas aceptadas, R el conjunto de razonamientos aceptados y S el conjunto de declaraciones aceptadas.

Para Mancosu (2016) el objetivo de Kitcher era dar cuenta de la racionalidad del desarrollo del crecimiento de las matemáticas en términos de transiciones entre prácticas matemáticas. Para organizar y tratar los patrones de cambio Kitcher trató los procesos generalización, rigorización y sistematización. Esta definición enfatiza la noción de cambio a través del estudio de la historia; alrededor de ella, se identifican las transformaciones de práctica matemática.

La práctica que caracteriza un estado *P* de conocimiento se entiende como una estructura[12], sus componentes son variables en un sistema[13] de relaciones que interactúa para caracterizar el hacer en matemáticas. Haciendo un símil con los planteamientos de Lakatos (1976), en una práctica existen actividades que modifican el sistema de práctica y su estructura, en este caso se tiene un cambio de práctica. También existen trasformaciones más pequeñas de la práctica que cambian el sistema de relaciones de las componentes, sin cambiar la estructura; se establecen unos énfasis, lo cual implica una adaptación del sistema y de la práctica misma para volver a buscar el equilibrio del sistema.

Esta visión del conocimiento matemático dota al saber matemático del profesor de elementos fundamentales para la comprensión tanto de los procesos de su producción, como de la naturaleza del producto. Estudiar esta dialéctica entre ser y saber[14] sitúa el estudio en un contexto determinado, donde el sujeto desarrolla una práctica y asume para sí una posición sobre ella. Estos cambios implican comprender, en el sujeto y en las comunidades, las transformaciones de P en P', el cambio en las relaciones del sistema de

[12] Estructura: disposición o modo de estar relacionadas las distintas partes de un conjunto (RAE, 2018). Para la ciencia, desde un punto de vista histórico, plantea la importancia del cambio de la estructura para definir nuevos periodos de desarrollo.
[13] Conjunto de reglas o principios sobre una materia racionalmente enlazados entre sí. (RAE, 2018)
[14] Esta perspectiva como práctica cultural, histórica, implica que "desde el punto de vista ontológico, el ser y el saber están interrelacionados de una manera profunda en la que uno no ocurre sin el otro" (Radford, 2014 p. 136).

componentes. Desde esta perspectiva, la historia de las matemáticas ofrece al profesor recursos para reflexionar sobre la actividad en el aula como pueden ser los patrones de actividad en la práctica.

Un refinamiento de la idea de práctica de Kitcher se planteó como un modelo de investigación multidisciplinar que se ejecuta a través de la construcción de historias localizadas en la variación de una o más componentes. Con este propósito, la estructura de la práctica se conformó por los siguientes siete elementos[15]:

> $Mathprac = \langle M, P, F, PM, C, AM, PS \rangle$ (as a reminder: M = community of mathematicians, P = research program, F =formal language, PM = proof methods, C = concepts, AM = argumentative methods, PS = proof strategies). (Bendegem & Kerkhove, 2004, p. 11)

En efecto, esta investigación adopta esta estructura de práctica matemática y la propone como medio para caracterizar una historia de las matemáticas para el profesor de matemáticas. Específicamente, se estudia la variación de la estructura respecto a las ediciones de un libro en la comunidad de matemáticos: la *Geometría* de Descartes y la vinculación, a través del texto, de algunas ideas primigenias propuestas en esta obra con los procesos de enseñanza.

Históricamente, los matemáticos reconocen los diagramas como parte de los modelos de su práctica relativos a la creación de las matemáticas. No ocurre lo mismo si se piensa en la posibilidad de usar estos recursos en modelos de demostración puesto que los

[15] $Mathprac = \langle M, P, F, PM, C, AM, PS \rangle$ (M: comunidad de matemáticos; P: programa de investigación; F: lenguaje formal, PM: métodos de prueba, C: conceptos, AM: métodos argumentativos, PS: estrategias de prueba).

sistemas axiomáticos formales no aceptan signos diagramáticos. Según Alshwaikh (2011), entre los siglos XVII y XVIII, los diagramas pasaron de un estado privilegiado en los libros de matemáticas a una posición casi de desaprobación. En estos años, su uso empezó a desaparecer y las consideraciones sobre el conocimiento matemático se centraron exclusivamente en lo simbólico. Los modelos formales de argumentación rechazan cualquier tipo de injerencia de representaciones que no pertenezcan al sistema gramatical propio de las matemáticas. Se argumenta que estos modelos figurales no son estables respecto a la verdad, que abren la posibilidad de hacer inferencias falsas, que no son abstractos y, en la mayoría de los casos, no permiten la generalidad del modelo.

Sin embargo, en los últimos años[16] estos argumentos han sido revaluados a partir de trabajos que intentan dar cuenta de la comprensión y de las maneras de explicar el conocimiento matemático en los cuales se estudia el papel de otras formas de organización del conocimiento; en especial lo relacionado con el uso representacional y sus posibilidades inferenciales en la formación de pensamiento matemático.

El diagrama es un tipo especial de signo que permite construir o inferir las relaciones del objeto representado; es un ícono de un conjunto de objetos racionalmente

[16] En la obra colectiva Diagrammatic Representation and Inference (2002-2010) se pueden revisar varios artículos que analizan el pensamiento matemático respecto a las representaciones. Los más significativos para la presente tesis son: Winterstein, D. Bundy, A. Gurr, C & Jamnik M. (2002). Using Animation in Diagrammatic Theorem Proving; Miller, N. (2002). CDEG: Computerized Diagrammatic Euclidean Geometry; Suwa, M. Tversky B. (2002). External Representations Contribute to the Dynamic Construction of Ideas; Hegarty, M. (2004). Diagrams in the Mind and in the World: Relations between Internal and External Visualizations; Norman, J. (2004). Can Diagrams Have Epistemic Value? The Case of Euclid; Murata, T. (2004). Roles of Diagrammatic Information for the Discovery of Geometrical Theorems; Rood, R. (2006). The Logic of Geometric Proof; Mumma, J. (2008). Ensuring Generality in Euclid's Diagrammatic Arguments; Stieff, M. Hegarty, M. & Dixon B (2010). Alternative Strategies for Spatial Reasoning with Diagrams; Jackel, B. (2014). Towards a General Diagrammatic Literacy: An Approach to Thinking Critically about Diagrams; Legris, J. & Terra, C. (2018). Peirce on Diagrammatic Reasoning and Semeiotic; Eckes, C. & Giardino V. (2018). The Classificatory Function of Diagrams: Two Examples from Mathematics; Sochański, M. (2018). Interpreting Diagrammatic Reasoning – Between Empiricism and Realism; Carter, J. (2018). The Role of Diagrams in Contemporary Mathematics: Tools for Discovery?

relacionados que permite inferir relaciones diferentes a las que se obtienen por medio de la experiencia. (Stjernfelt, 2007, pp 89-116)

En los estudios sobre los *Elementos* de Euclides se afirman que la organización de los diagramas permite, por ejemplo, inferir una propiedad para todos los objetos que se representan en una imagen. De la imagen de un triángulo interpretada como diagrama se infieren todas las propiedades de los triángulos (Manders, 2008, 2008a). La importancia de los diagramas en la obra de Euclides se interpreta en dos sentidos: algunas condiciones de identidad de los objetos son proporcionadas por el diagrama que representa dicho objeto y, segundo, los objetos heredan propiedades y relaciones que dependen de la existencia del diagrama (Panza, 2012).

Este asunto de los diagramas en matemáticas no está suficientemente estudiado, como lo afirma Young (citado por Alshwaikh, 2011, p. 38) la historia completa de los diagramas, sus usos e importancia en la generación de teorías, está lejos de ser escrita.

En la práctica de la geometría cartesiana se superaron algunas limitaciones de los diagramas euclidianos, en especial se amplía la idea de construcción geométrica al admitir otro tipo de instrumentos, se usan líneas auxiliares para suponer la solución de problemas y puntos en movimiento para describir curvas. Por ejemplo, en el proceso analítico se permite representar los datos conocidos y desconocidos por líneas de la misma naturaleza, lo que permite establecer relaciones entre ellas, que luego son representadas a través de símbolos. esta innovación en el estilo de escritura se establece en la construcción del diagrama producto del problema a solucionar, como se evidencia en el problema de Pappus. (Arboleda, 2012)

Así pues, esta investigación analiza los diagramas de la geometría cartesiana y las primeras interpretaciones de esta práctica en algunos libros de texto; es decir, se ocupa de

caracterizar la función y el uso de los diagramas en la constitución de la geometría post cartesiana y en su enseñanza. Para ello se toman como apoyo las consideraciones antes mencionadas de la noción de diagrama, pero situándolas en relación con la práctica matemática instalada en el momento histórico.

1.2.1 Diagramas en la Práctica Matemática y en la Formación del Profesor

En la perspectiva pierciana los diagramas son herramientas dispuestas en prácticas específicas que permiten externalizar la información en un espacio situado y promueven la inferencia porque pueden ser interpretados, experimentados y manipulados de varias maneras, según los criterios compartidos de la práctica que sea del caso. (Giardino, 2013)

Un diagrama debe permitirle a su intérprete o usuario, la posibilidad de experimentación para comprender las relaciones que lo significan –cuando un ícono se convierte en diagrama– y que significa –la iconicidad del diagrama. El intérprete, a partir de una manipulación física o mental del diagrama, descubre algo sobre las relaciones que se hacen visibles en una práctica matemática conocida.

En la mayoría de los casos, el diagrama está acompañado y conectado a través de un discurso que sitúa aspectos relevantes de la práctica matemática compartida por la comunidad de usuarios. No es posible separar la imagen del discurso que le corresponde. Las preguntas sobre la práctica matemática deben abordarse mediante la comprensión del conocimiento matemático como un ámbito de sentido históricamente situado, por lo tanto, los signos que se producen pertenecen al discurso propio de esa práctica y es en ella en donde es posible interpretarlos, analizarlos y usarlos.

En el marco de las anteriores consideraciones sobre la función de los diagramas en la práctica matemática, esta tesis se propone mostrar que este dispositivo, aplicado a los

casos de uso de las ideas cartesianas, ofrece un material valioso para el desarrollo del conocimiento matemático del profesor de matemáticas.

En educación matemática existe una tradición de estudios de diversa índole sobre la relación entre Historia de las matemáticas y Educación matemática[17], particularmente en la escuela francesa. La teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1998), por ejemplo, con su estudio del paso del saber sabio al saber enseñado, fundó un programa de investigación que permitió comprender la articulación entre el análisis epistemológico y el análisis didáctico. En esta concepción se le plantea al didacta, en tanto historiador, el reto de reemplazar la génesis ficticia de los sistemas formales por el conocimiento de la heurística de los procesos de su constitución. (Arboleda, 2011)[18]

Este proceso que se realiza en la práctica permite que algunas subjetividades que se ponen en juego en las comunidades se desarrollen de tal manera, que se incorporen en la objetividad que se produce en el campo, es este proceso de constitución de la matemática lo que nos interesa historiar; es lo que interpretamos como necesario en el uso de la epistemología en la didáctica:

> (…) historiar prácticas es diferente a historiar ideas o mentalidades. Las prácticas exigen relacionar lo discursivo con lo no discursivo, vale decir que colocan al investigador en la encrucijada de establecer múltiples relaciones. El discurso se asume como práctica. Por eso hablamos de práctica discursiva en el sentido de

[17] Para un análisis riguroso de esta relación, ver: Guacaneme (2016, Capítulo II).
[18] Ver conferencia del Doctor: Luis Carlos Arboleda “La Epistemología como mediación entre Historia y Didáctica”, disponible en: https://bit.ly/3bPF9f7.

> proceso objetivado que se convierte en objeto y es solo esto lo que se procede a historiar. (Arboleda & Castrillón, 2012, pág. 14)

Se trata de procurar una historia de la cultura matemática que posibilite la comprensión de las herramientas que permitieron transitar y consolidar una práctica en las comunidades científicas y educativas en su momento.

Se define así la segunda hipótesis que se desarrolla en este proyecto: el conocimiento de la práctica de la matemática constituye una perspectiva propicia para que el profesor de matemáticas construya su subjetividad en la conformación del saber matemático.

La historia de la matemática nutre el conocimiento matemático del profesor al ampliar las posibilidades de análisis de las matemáticas con respecto a su práctica profesional. El estudio de la práctica revela acontecimientos fundadores de objetividad; ofrece un repertorio de ejemplos sobre consensos de comunidades en interpretaciones, preguntas, solución de problemas, formulación de teorías que se constituyeron en parte de la cultura. La objetividad del conocimiento matemático es un horizonte en la formación de los profesores. No incluye solo la técnica de formalización; también se refiere a instrumentos, métodos y problemas que fueron aceptados o rechazados por las comunidades.

El conocimiento matemático que le interesa al profesor de matemáticas, aquel que moviliza en su actividad profesional, está más relacionado con las prácticas de producción situadas su contexto histórico y cultural. La formación debe estar centrada en unas matemáticas que le permitan pasar, trasponer, adecuar el acervo matemático a las matemáticas escolares; este propósito supera la organización axiomática formal. Los

formadores de profesores tienen que determinar cuáles son las matemáticas con las que se deben formar los futuros profesores, cómo se disponen en la formación y de qué manera podrían aportar en la actividad profesional del maestro.

Aunque la perspectiva de la práctica matemática permea todo el conocimiento del profesor, pues es una forma de concebir las matemáticas, en esta investigación se aborda un solo dominio de los propuestos en el *MKT*, el *Horizon Content Knowledge – HCK*; la siguiente cita es un acercamiento a su definición[19]:

> Horizon Content Knowledge (HCK) is an orientation to and familiarity with the discipline (or disciplines) that contribute to the teaching of the school subject at hand, providing teachers with a sense for how the content being taught is situated in and connected to the broader disciplinary territory. HCK includes explicit knowledge of the ways of and tools for knowing in the discipline, the kinds of knowledge and their warrants, and where ideas come from and how "truth" or validity is established. HCK also includes awareness of core disciplinary orientations and values, and of major structures of the discipline. HCK enables teachers to "hear" students, to make judgments about the importance of particular ideas or questions, and to treat the discipline with integrity, all resources for

[19] Horizon Content Knowledge (HCK) es una orientación y familiaridad con la disciplina (o disciplinas) que contribuyen a la enseñanza de la materia escolar en cuestión, brindando a los maestros una idea de cómo el contenido que se enseña se ubica y se conecta con un territorio disciplinario más amplio. HCK incluye el conocimiento explícito de las formas de conocimiento y las herramientas para la disciplina, los tipos de conocimiento y sus garantías, y de dónde provienen las ideas y cómo se establece la "verdad" o validez. HCK también incluye el conocimiento de las orientaciones y valores centrales de la disciplina, y de las principales estructuras de la disciplina. HCK permite a los maestros "escuchar" a los estudiantes, emitir juicios sobre la importancia de ideas o preguntas particulares y tratar la disciplina con integridad, todos recursos para equilibrar la tarea fundamental de conectar a los estudiantes con un campo vasto y altamente desarrollado.

> balancing the fundamental task of connecting learners to a vast and highly developed field. (…) (Jakobsen, Ribeiro, Delaney, 2012, p. 4642)

En este dominio del conocimiento del profesor se despliega la importancia del estudio de la práctica matemática, pues se evidencia su transformación en conocimiento matemático escolar. El estudio de la práctica permite adecuar la formación del conocimiento matemático de los profesores a asuntos respecto a la verdad, la validez y la validación de las matemáticas; se explicitó en páginas anteriores que ese es el sentido a historiar, la objetividad. En este proceso de conocimiento de las matemáticas se conocen las herramientas, representaciones, heurísticas, modelos de razonamiento y asuntos de la subjetividad. Una disposición para la formación del profesor de esta dialéctica es lo que se investiga.

1.3 Sobre el Contexto Histórico de la Práctica Cartesiana

El primer acercamiento al momento histórico consistió en el estudio de algunos textos de circulación internacional sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra[20] que se usan en el contexto educativo nacional para formar profesores de matemáticas; en especial, en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas[21].

[20] Este análisis se encuentra en un documento presentado y publicado en el CIAEM XV (Bello, 2019). Los textos se ubican en una etapa de consolidación de la investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra, desde 1996 hasta 2004. En el primero, Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching, se estudia la Parte I: Historical Perspectives in the Development of Algebra (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). En el segundo texto, se profundiza en el capítulo 8: Working Group on Algebra History in Mathematics Education del estudio 12th ICMI (Stacey, Chick, & Kendal, 2004). Este capítulo tiene como propósito analizar estudios en historia del álgebra que en el futuro puedan examinarse para la enseñanza y el aprendizaje. El tercer texto es Perspectives on School Algebra (Sutherland, Rojano, Bell, & Lins, 2002).

21 La experiencia en los cursos de Didáctica del Álgebra y Problemas del Álgebra Geométrica de la licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas se encuentra reportada en Bello y Forero (2016).

En este estudio se revisaron ciertos asuntos de la enseñanza del álgebra con base en la interpretación histórica de la obra de Descartes, en especial el método de resolución de problemas.

La idea de método que prevalece en los textos referidos privilegia la operatividad algebraica. Se considera que el uso competente del método de solución de problemas geométricos consiste, primero, en efectuar una lectura analítica de la resolución del problema; segundo, en elegir una cantidad que se representa bajo una letra o varias cantidades con letras diferentes; y, tercero, en representar otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen su relación (aritmética) con otras cantidades representadas por una letra o una expresión algebraica (Puig & Rojano, 2004, p. 192).

Esta idea del método se asocia a la manipulación de un sistema de símbolos matemáticos[22] y técnicas algebraicas, y se dejan de lado tres asuntos centrales en el libro de *Geometría* de 1637: la construcción de la noción de curva a partir del movimiento de un punto que cumple ciertas relaciones, la resolución geométrica de ecuaciones y el planteamiento de problemas geométricos a partir de un diagrama que contiene la solución del problema. En particular, no hay ninguna consideración sobre la importancia de los diagramas en el desarrollo del método de solución de problemas. Desde el punto de vista de esta tesis llama la atención la reducción de la obra de Descartes a sus aspectos exclusivamente simbólicos y operatorios, lo cual no coincide con la visión compleja de la práctica cartesiana que se encuentra en los trabajos de comentaristas modernos como Bos (1981, 1984, 1986, 1998, 2001); Graukroger (1980, 1989, 2005); Clarke (1982, 2005); y Macbeth (2004, 2014).

[22] En estos textos el método es asociado a la construcción del Sistema de Símbolos Matemáticos -SSM-

El momento histórico que se presenta en esta tesis corresponde a la transformación de la práctica matemática representada en la *Geometría* Descartes (1637). Específicamente alrededor de los diagramas que aparecen en el texto y en algunos textos posteriores de geometría.

El periodo en el cual la *Geometría* ejerció su influencia estuvo marcado por la emergencia de desarrollos matemáticos fecundos: la introducción de los métodos infinitesimales, el paso de la construcción de curvas a la teoría de ecuaciones que interpretan curvas, el desarrollo del álgebra a partir del estilo analítico en la solución de problemas, la implementación de técnicas algebraicas y la extensión de los métodos matemáticos a la solución de problemas de la física, la astronomía y otras ciencias. Esta época se desplegó hasta los alrededores de 1750. (Bos, 2001; Maronne, 2007)

Así, la tesis va a contribuir en la caracterización de la cultura matemática que se estableció alrededor de la obra de Descartes en este periodo inicial de su apropiación y uso; específicamente, se abordan las siguientes preguntas: ¿cómo los diagramas hicieron parte de la reforma a las matemáticas que se gestó en esa época?, ¿cómo se fue reconociendo esta nueva forma de pensar en la comunidad académica? y ¿cómo esta herencia cartesiana se divulgó a través de textos?

Para abordar estas preguntas, se analizan los diagramas que aparecen en dos ediciones del texto de la *Geometría*; la primera edición en francés (Descartes, 1637) y la segunda, en latín revisada y comentada por van Schooten (Descartes, 1659 - 1661). Este último texto incluyó documentos de Johann Hudde, Heuraut, Debeune y el que para algunos historiadores es considerado como el primer tratado de Geometría analítica de Jan de Witt. Esta edición fue la de mayor distribución en la época. Se sabe que Newton la estudió en sus investigaciones sobre el método de las fluxiones. (Maronne, 2007)

El contenido de la segunda edición en latín se difundió rápidamente; los matemáticos, y los autores de textos tomaron partido por los nuevos modelos propuestos y escribieron las primeras obras de enseñanza que se ocuparon de las matemáticas cartesianas. Algunos se atrevieron a enseñar el método analítico con asuntos de filosofía cartesiana; aunque durante parte de esta época estuviera prohibido hacerlo. En Francia e Italia hubo una gran producción de libros de texto[23], algunos tienen relevancia histórica por sus propuestas novedosas y por haberse realizado desde el discurso cartesiano; estos libros fueron los de Lamy, Reyneau y Arnauld (Kokomoor, 1928). En esta investigación se estudiaron los libros de texto *Élémens de Géométrie* (Lamy, 1685) y *Analyse Démontrée ou la Méthode* (Reyneau, 1708).

Partiendo de la hipótesis de que el conocimiento de la práctica matemática permea todos los dominios del conocimiento matemático del profesor, la tesis doctoral sustenta su exploración en la siguiente pregunta: ¿Qué asuntos disponer de la historia de la práctica focalizada en los diagramas relativos a la Geometría de Descartes (1637-1750) de manera que impacten significativamente la formación del profesor?

1.4 Diseño Metodológico

Los métodos de trabajo en historia de la matemática vistos desde la historiografía tradicional son superados desde la perspectiva de la práctica matemática, pues se necesita una correlación de ellos, que interpreten e indaguen los hechos en relación con el momento histórico en que sucedieron, permitiendo determinar el impacto y las trasformaciones que se fueron dando en los significados de los asuntos de las matemáticas que se quieren estudiar. Por lo tanto, para esta tesis necesitamos la construcción de una hermenéutica que

[23] Un análisis global de los libros de texto de geometría se puede consultar en (Kokomoor, 1928; Stamper, 1909).

permita indagar la práctica a través de los diagramas que se presentan en los libros y sus relaciones con el sistema, para luego determinar los asuntos que proponemos movilizar para constituir esta parte de la historia en la formación del profesor, en especial al horizonte interno y externo descritos.

Las visiones internalistas del proceso de indagación histórica no son suficientes en la construcción de esta hermenéutica que trasforma los documentos del pasado en representantes de un sistema de relaciones y prácticas sociales que se producen en un tiempo y espacio determinado. Parte de la tarea está en reinterpretar para la práctica matemática la frase de Bachelard (2000), "El historiador de la ciencia debe tomar las ideas como hechos. El epistemólogo debe tomar los hechos como ideas, insertándolas en un sistema de pensamientos" (p. 20). En esta investigación los hechos plasmados en los textos contienen las ideas que se alojan en las prácticas matemáticas de la época. Vamos a centrar el foco en el uso que se hace de los diagramas y cómo el uso de estas organizaciones figurales permite caracterizar diferentes cosmovisiones de los planteamientos realizados en *Geometría.*

El problema que queremos trabajar está centrado en una discontinuidad[24], pues los diagramas son una frontera dentro del proceso de constitución, validez, transformación y uso de la geometría cartesiana. Estos símbolos hacen parte de la hermenéutica que se estudia a través de la práctica de constitución de la curva algebraica y del método analítico de resolución de problemas. Algunos de estos aspectos son seleccionados, descritos y

[24] Foucault (2010), plantea que las formas de historiar que superan la historiografía permiten más el estudio de discontinuidades que de continuidades. En este sentido, se estudian las rupturas en la historia de las ideas, los límites, la génesis de las trasformaciones, que permiten los cambios en las ideas fundantes.

utilizados en los textos, como parte de los dispositivos que se ponen en juego al planear la enseñanza. Esto análisis implica ver los documentos en el siguiente sentido

> El documento no es, pues, ya para la historia esa materia inerte a través de la cual trata ésta de reconstruir lo que los hombres han hecho o dicho, lo que ha pasado de lo cual sólo resta el surco: trata de definir en el propio tejido documental unidades, conjuntos series, relaciones (Foucault, 2010, p. 16)

Para el diseño metodológico de esta tesis los documentos se analizan desde cada una de las componentes a priori de la práctica matemática, de tal manera, que se construye la práctica de constitución de la geometría cartesiana focalizada en el tratamiento que se hace de los diagramas. Se definen tres fases correlacionadas para identificar los cambios dentro del sistema de componentes de la práctica. La primera, interpreta y organiza la estructura en el texto de 1637 e identifica a partir de los usos el papel que tienen los diagramas dentro de la obra original, lo que permite la definición de la práctica P. La segunda, indaga posibles cambios en las componentes del sistema a través del estudio del uso de los diagramas en la segunda edición en latín de la *Geometría* de Descartes. Se exploran estados de práctica P' en donde las relaciones entre las componentes y el uso de diagramas podría mantenerse, especificarse o cambiarse. La estructura de la práctica matemática cartesiana se mantiene, se buscan modificaciones de las componentes que permitan reorganizar la misma práctica. En este sentido, se posibilita que los usos de los diagramas se trasformen o se mantengan en la segunda edición de la obra.

La tercera fase estudia dos textos que usó la comunidad de oratorianos en la enseñanza de la matemática, el texto de Lamy que fue usado por casi 100 años y el texto de Reyneau que fue elaborado como respuesta a las discusiones sobre el cartesianismo y el

nacimiento de los métodos infinitesimales. Ambos textos se realizaron bajo la supervisión de un reconocido cartesiano, Nicolas Malebranche. Los textos muestran la interpretación de la comunidad del método cartesiano y la relación que establecieron entre geometría y álgebra.

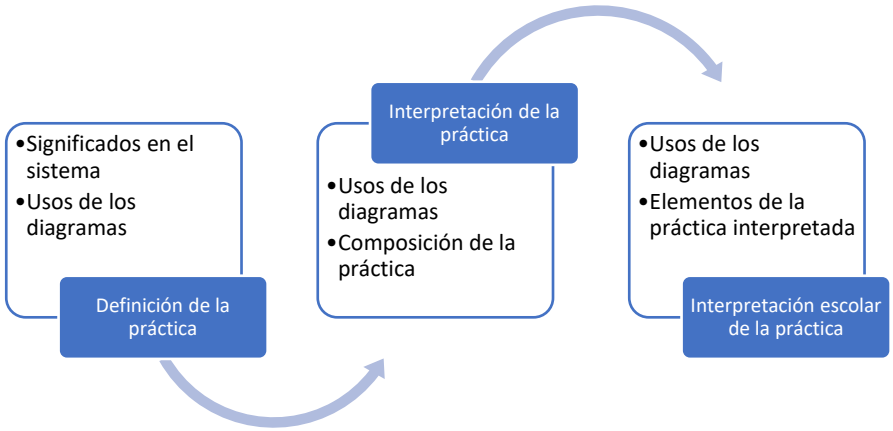


Figura 1. Fases del diseño metodológico. Elaboración propia.

Para cada fase se elabora un diseño metódico de acuerdo con los significados y usos que se presentan en la fase anterior, así podemos ir determinando la orientación que los autores dan del discurso de Descartes. Profundizar en los énfasis que dan en cada componente del sistema de práctica.

En el capítulo dos se desarrolla la aplicación de las componentes de la práctica en la obra de 1637, la cual generó una revolución en las matemáticas de la época, interpretando a Khun (1971) esta obra posibilitó un periodo de cambios en las maneras como se entendía la matemática, un periodo de inestabilidad de la práctica. Esa es la práctica P que vamos a indagar en los otros documentos y como estructura define el discurso que vamos a estudiar. Esta aplicación de la idea de práctica en el contexto comunicacional de la *Geometría* refleja los significados de las séptupla que escogimos para la práctica.

El inicio de este análisis crítico del discurso permite interpretar en el contexto de la obra las componentes, las cuales generan una estructura de elementos matemáticos y filosóficos que están alrededor de la compresión de la obra y que posteriormente van a ser contrastados con las interpretaciones que aparecen en la segunda edición en latín de la *Geometría* y con dos textos de enseñanza de la época. Esto es un estudio de la pragmática discursiva que se presenta en los textos a partir de los significados del sistema de práctica. Compartimos con Dijk citado por Wodak y Meyer (2003) que el análisis histórico del discurso implica una dimensión explicativa del lenguaje a través de los contextos en donde fueron producidos, lo que establece significados en las unidades lingüísticas. En este caso las componentes de la práctica que son acordes con la época los acontecimientos y las teorías. Como lo afirma Foucault (2010, p.40)

> Tal vez sea tiempo de estudiar los discursos ya no solamente en su valor expresivo o sus transformaciones formales, sino en las modalidades de su existencia: los modos de circulación, de valoración, de atribución, de apropiación de los discursos varían con cada cultura y se modifican en el interior de cada una; la manera en que se articulan sobre relaciones sociales me parece que se descifra de modo más directo en el juego de la función-autor y en sus modificaciones antes que en los temas o los conceptos que ponen en práctica.

En este tipo de indagación no se revisa el discurso desde la morfología del lenguaje, sino que éste se entiende como parte de una práctica social, un proceso comunicacional de las ideas que es interdisciplinar, en nuestro caso confluye el desarrollo de la filosofía cartesiana. Esta primera etapa de la investigación implica una recomposición de la práctica matemática en el discurso cartesiano a través del sistema de práctica propuesto. Este tipo de

análisis permite significar cada componente, son estos significados los que se recomponen en las siguientes dos fases.

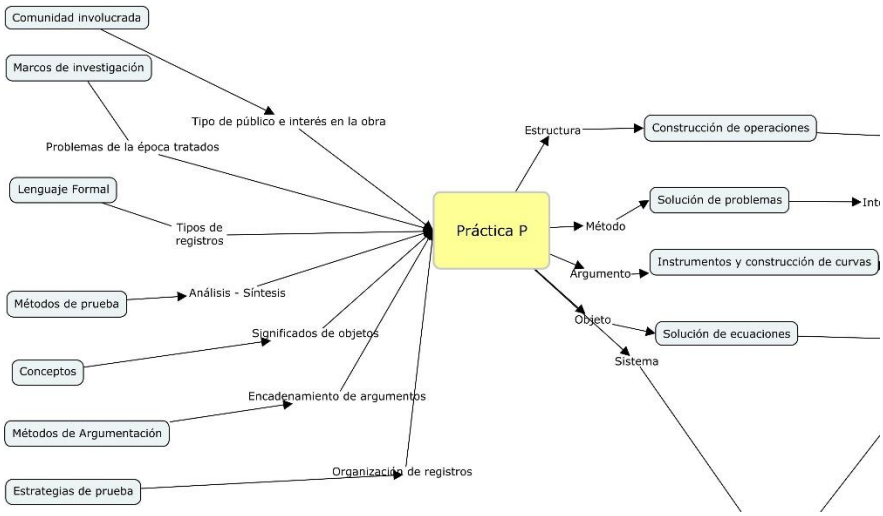


Figura 2. Etapa de definición de la práctica. Elaboración propia.

En la figura 2 se evidencia un elemento destacado para cada una de las componentes de la práctica P; el significado de cada uno se desarrolla en el segundo capítulo de este documento. En esta primera fase de análisis se focaliza en los usos de los diagramas los cuales se encontraron asociados a: la estructura matemática que propone el autor cuando define las operaciones, al método al resolver problemas, como argumento para justificar la existencia de curvas y en la solución de ecuaciones. En el texto de 1637 el diagrama aparece como elemento discursivo, modelo de representación de los objetos y como parte de la imaginación creadora en la resolución de problemas.

En la segunda fase se revisan los comentarios que hace van Schooten a la edición de 1637 y los otros documentos que aparecen en la obra, este proceso de interdiscursividad permite comprender la práctica cartesiana en relación con los énfasis interpretativos de los postcartesianos. En este sentido, seguimos las ideas de Foucault (2010, p.21)

> Finamente el nombre de autor funciona para caracterizar un determinado modo de ser del discurso: para un discurso, el hecho de tener un nombre de autor, el hecho de que se pueda decir «esto ha sido escrito por tal» o «tal es su autor», indica que ese discurso no es una palabra cotidiana, indiferente, una palabra que se va, que flota y pasa, una palabra inmediatamente consumible, sino que se trata de una palabra que debe ser recibida de cierto modo y que en una cultura dada debe recibir un estatuto determinado.

Para el caso de la segunda edición de la *Geometría* se utilizan los usos encontrados en la obra original como categorías para analizar las interpretaciones que se realizan de la práctica cartesiana. En el capítulo tres se muestra que producto de este análisis en el cual se configura otro uso del diagrama asociado a la prueba de propiedades de la curva y en donde la curva es un elemento dado. Este análisis restructura la práctica matemática a partir de la interpretación del sistema de práctica que se devela en el texto y que nos permite describir el desarrollo de algunos énfasis en la práctica.

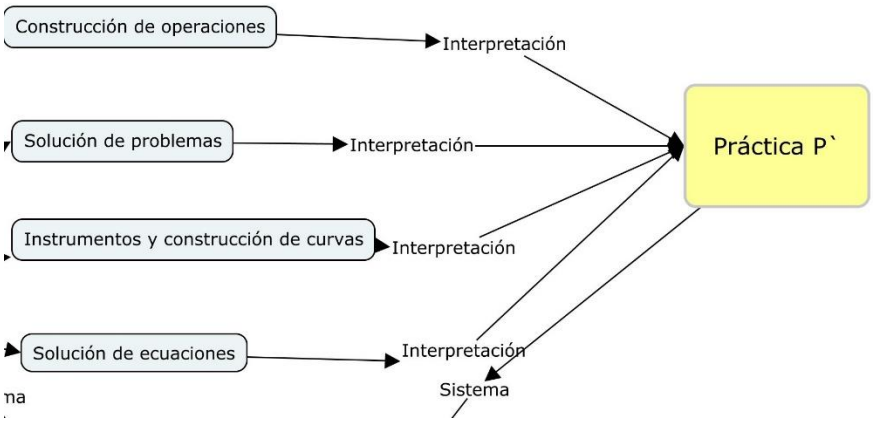


Figura 3. Interpretación de la práctica cartesiana. Elaboración propia.

Los problemas matemáticos que se plantean, el uso del método de solución de problemas y el tipo de inferencias que se realizan a través del diagrama, son temas

abordados para determinar las componentes de la práctica que se enfatizaron dentro del sistema y que no modifican la estructura inicial de la práctica cartesiana. El acentuar en la operatividad algebraica, el poco uso de diagramas para encontrar las raíces de una ecuación y la bidireccionalidad de la relación diagrama símbolo, se establecen como asuntos que se destaca en esta edición del texto y que permiten identificar los énfasis dentro del sistema de práctica, a los cuales llamamos postcartesianos.

Estos asuntos que se agudizan en las componentes y que nos van definiendo el sistema asociado a la práctica inicial se trabajan en el tercer capítulo. Los procesos algebraicos y el método analítico de resolución de problemas son dos cuestiones que se puntualizan durante la obra y que en términos de los aspectos internos y externos del horizonte de contenido permitirían ir constituyendo una historia sobre el cartesianismo focalizada en el uso de diagramas para la formación del profesor de matemáticas; pues permiten ver la recomposición de la heurística que plantea Descartes para la constitución de las curvas algebraicas y del método analítico de resolución de problemas, en donde los diagramas son elementos discursivos, creativos y representacionales, como se muestra en el capítulo tres de esta tesis.

La tercera fase de este estudio reflexiona sobre la interpretación discursiva de la práctica cartesiana en dos textos que afirman desarrollar para la enseñanza las ideas de que se desprenden de la *Geometría* de Descartes. Este análisis permite ejemplificar el sistema de práctica que se estableció en el paso del saber sabio al saber a enseñar, usando los términos de Chevellard (1991). La reflexión de los profesores de matemáticas de la comunidad de oratorianos, liderados por Malebranche, en relación con una cultura matemática que se había originado, que estaba constituida y que generó una nueva reconfiguración de los elementos de las matemáticas. Una selección de los énfasis de las

componentes del sistema de práctica que conforma los aspectos a enseñar y comunicar a través del texto, que nos muestra el énfasis de las problemáticas que se enseñaron a nombre del cartesianismo. De igual manera, nos permite comprender que aspectos de la práctica que desarrolló Descartes en la *Geometría* no fueron considerados en el ámbito de la enseñanza.

En la actualidad varios de estos elementos siguen estando en la reflexión didáctica que se dispone para el álgebra escolar, la resolución de problemas y los recursos semióticos que se ponen a disposición a través de la práctica específica. Esta historia aporta al profesor de matemáticas en la reflexión que él puede hacer de su propia práctica, en relación con la importancia de los diagramas en la iniciación del álgebra y en el trabajo del método analítico de resolución de problemas.

Para el desarrollo metodológico de esta fase los libros que escogimos son los ediciones del libro de Lamy y Reyneau; en el caso del libro de Lamy fue usado por casi cien años dentro de la comunidad, tuvo varias impresiones las cuales dan cuenta de los cambios que se fueron originando en la práctica. El libro de Reyneau fue construido como parte de las discusiones que el grupo de Malebranche tenía con la comunidad científica de la época, especificamente en relación con el uso de la matemática cartesiana en los nuevos elementos que se generaron con las ideas del cálculo diferencial e integral. Estos documentos se estudian con las consideraciones sobre la práctica P y P' que están descritas en los capítulos dos y tres. El foco del análisis se realiza sobre el diagrama en su posibilidad creativa y creadora al resolver problemas, y como forma de representación y para la representación de objetos matemáticos. Siguiendo las idea planteadas en Schubring (1987) se definen tres dimensiones para este análisis:

- Estudio de los cambios de la unidad de análisis en la diferentes ediciones de los textos. Se toman siete ediciones del libro de Lamy y los dos tomos del libro de Reyneau.
- Cambios en los libros de texto relacionados con la práctica matemática. Se analiza el énfasis del sistema de prácticas para la enseñanza en cada autor.
- Análisis de la relación entre los libros y los cambios en el contexto. Se revisa en contexto en que se desarrollan estos textos, especialmente su relación con las ideas de Malebranche respecto a su negativa en el uso de diagramas en la solución de problema y en la presentación de las ideas cartesianas.

La interelación entre las fases a través de los sistemas de práctica permitirá definir los asuntos que son relevantes para comprender esta parte de la historia. A posteriori, se define la configuración que se movilizará para el trabajo con los estudiantes para profesor. Los aspectos que son propuestos para el desarrollo del horizonte interno y externo de las matemáticas cartesianas se corresponden con los énfasis que fueron surgiendo en el sistema de práctica, estos muestran las componentes que se desarrollaron y, por lo tanto, la trasformación de la práctica en las reflexiones de los matemáticos y de los maestros de matemáticas de la época. Son estos cambios los que creemos deben estar en la formación del profesor de matemáticas, como se presenta en el apartado 2.4.1.

1.5 Objetivos

En general, el trabajo pretende relacionar la Historia de la Matemática con la formación de conocimiento matemático en el profesor de matemáticas a partir de la idea de práctica matemática. Puntualmente se trabaja con diagramas en la época post - cartesiana para la formación del Horizonte de Contenido Matemático.

1.5.1 Objetivo general

Constituir una historia de la práctica matemática focalizada en el uso de diagramas entre el momento de la publicación de la *Geometría* de Descartes y 1750, en la perspectiva del dominio del Conocimiento de Horizonte de Contenido propuesto para la formación del profesor de matemáticas.

1.5.2 Objetivos específicos

- Determinar los estados del sistema de práctica que se relacionan con el uso de diagramas en la segunda edición de la *Geometría* de Descartes.
- Establecer conexiones entre el cambio de las componentes de la práctica matemática del momento histórico que se estudia y las caracterizaciones del Conocimiento de Horizonte de Contenido - *MKT* del profesor de matemáticas.
- Identificar las interpretaciones y las transformaciones que tuvo el sistema de prácticas de las ideas cartesianas al orientarlo a la enseñanza en el periodo comprendido entre 1637 y 1750.

2. Marco de Referencia

En este apartado se plantean las relaciones que se encuentran entre teorías que han sido desarrolladas de manera independiente, como lo son el *MKT* y la idea de práctica matemática. Se argumentan las relaciones que permiten pensar que a través de la perspectiva de la práctica matemática se canaliza una historia de la matemática útil para pensar la enseñanza por parte del profesor de matemáticas. Finalmente, se organiza y se analiza, a través de las componentes de la práctica, el trabajo que presentó Descartes en su *Geometría* (1637), y se estudia la posibilidad de que las imágenes que aparecen en ese texto cumplan con las características de lo que es un diagrama.

2.1 El Conocimiento de las Matemáticas Visto Desde las Prácticas

En el desarrollo de esta tesis, se asume que las matemáticas son una práctica socialmente construida mediante sistemas de producción cambiantes, informales y subjetivos; con la posibilidad de lograr autonomía teórica, tener modelos de validación y rigor que no tiene otra práctica humana. Es precisamente el modelo de teorización lo que le permite constituir una comunidad única para pensar, formular y resolver sus propios problemas (Glas, 2007). De esta manera, dada una comunidad –que elabora conocimiento matemático–, esta desarrolla el saber matemático[25] en cada momento en que entre sus integrantes alguien resuelve cierta situación por medio de conocimientos culturales allegados a lo que se conoce como las matemáticas. En este sentido, en diferentes campos y desde puntos de vista distintos, se produce saber matemático.

[25] En esta tesis, el saber matemático es el resultado de las prácticas matemáticas adelantadas por comunidades en diversos sistemas de producción. El conocimiento es saber institucionalizado y objetivado por la comunidad de matemáticos.

Las comunidades de ingenieros, contadores, físicos, administradores, etc., disponen este saber. Cada comunidad de práctica (Wenger, 2001) construye una relación entre su campo y las matemáticas. Desde esta perspectiva de la práctica el saber está caracterizado por las actividades y herramientas que se ponen en juego en la comunidad, alrededor de esta construcción social se nutre y se conforma. El conocimiento hace referencia al saber institucionalizado, único, depurado en la comunidad de práctica conformada por los matemáticos y sus instituciones.

Esta última comunidad administra el problema de la objetividad del conocimiento matemático, el canon de formalización que no se modifica por la práctica social del descubrimiento; en esa actividad, la comunidad goza de autonomía[26] y autorregulación. Es el horizonte de verdad construido y constituido lo que hace que la práctica matemática sea diferente a otras prácticas humanas (Azzouni, 2007). Es en las comunidades donde se produce las matemáticas como producto social consideradas no solo como teorización sino, también, sus ámbitos de uso y de diversidad de producción cultural. Pero esta producción no siempre cumple los cánones de formalización que requiere la comunidad matemática.

Entonces, las matemáticas no son únicamente abstracción atemporal y espacial; sus objetos no son el producto del puro pensamiento, desarrollan una huella material identificada por diferentes medios de producción, tanto semánticos como sintácticos y prácticos. Este conocimiento implica una historia que es posible estudiar desde diferentes focos del hacer. Los medios de producción van causando significados, diferentes interpretaciones de los objetos, los instrumentos, las hipótesis, las pruebas y la teoría. La

[26] La autonomía a la que se refiere este texto es la que posibilita que los matemáticos organicen en su comunidad sus propios medios de validación de lo que consideran matemáticas. (Popper como se citó en Glas, 2007. pp. 25-28).

práctica matemática es lo que hacen las comunidades cuando emplean instrumentos materiales o cognitivos para resolver problemas, valorar teorías y elaborar nuevos productos. (Ferreiros, 2016, pp. 28-34)

Con estas consideraciones, la práctica guarda los vestigios de una forma de pensar, de los medios de producción (anotaciones, dibujos, diagramas, modelos, etc.), por eso es histórica. Para estudiarla, es necesario conocer los medios que nos permiten identificarla en un periodo de tiempo y que estuvieron en la dirección de la futura abstracción. (Bachelard, 2000)

Del estudio de la práctica matemática resulta un ejercicio multidisciplinar e interdisciplinar, cultural, situado:

> (…) la teoría del conocimiento matemático necesita ser extendida más allá de sus confines actuales para abordar temas gnoseológicos que tienen que ver con fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales respecto del problema del acceso a «objetos abstractos». (Mancosu, 2016. p. 132)

Analizar el conocimiento matemático es un horizonte para la práctica matemática, es el reconocimiento a la dimensión cultural que conlleva la producción matemática y, en general, en las ciencias. Fundamentalmente, estas consideraciones se hacen desde la epistemología, pero no solo desde ella, permitiendo ver la posibilidad de acceder a esta cultura, entenderla y explicarla.

Estas posiciones se asocian a la visión "Maverick"[27] de análisis del conocimiento matemático; posición filosófica fundamentalmente antifundacionalista, centrada en la historia y en los patrones de cambio de la práctica matemática (Ferreiros, 2016; Mancosu, 2016). En esta perspectiva, se identifica el modelo de práctica matemática de Kitcher (1984), al que se hizo referencia en las páginas 9-11, como una propuesta que permite el análisis del crecimiento de las matemáticas; "I propose to adopt an analogous thesis about mathematical change. I suggest that we focus on the development of *mathematical practice*"[28]. (Kitcher, 1984, p.163)

Como se indicó en la página 9 la quíntupla $< L, M, S, R, Q >$ estructura la práctica matemática para un periodo histórico. Una de las dificultades que Ferreiros (2016) encuentra para esta definición de práctica, por su herencia en los trabajos de Kuhn, es que establece periodos de normalización y eso no permite diferenciar entre comunidades y estados de práctica que pueden ser diferentes en un mismo tiempo:

> Kitcher's work on patterns of change in the development of mathematics was based on two ideas: first, the history of mathematics shows periods in which work, and research is dominated by a given framework second, the transition from a given framework to another is a response to innovations that cause instabilities or tensions among the elements of the quintuple <L, M, S, R, Q>, and such "interpractice"

[27] El grupo de filósofos "Maverick" surge como crítica a uno de los enfoques filosóficos que surgieron en el siglo XX en el análisis de la filosofía de las matemáticas. (Ferreiros, 2016; Azzouni, 2007; Mancosu, 2016). Se opusieron a que la filosofía de la matemática se concibiera como un fundamento de la matemática. Lo que pedían era un análisis de la matemática que fuera más fiel a su desarrollo histórico. Las preguntas que les interesaban eran entre otras: ¿cómo se desarrolla la matemática?, ¿cómo se relacionan los razonamientos informales con los razonamientos formales?, ¿cómo funciona la heurística en la matemática?, ¿hay un límite preciso entre el método de descubrimiento y el método de justificación? (Mancosu, 2016, p. 134)

[28] Propongo adoptar una tesis análoga sobre el cambio matemático. Sugiero que nos centremos en el desarrollo de la práctica matemática

> transitions can be seen to be rational. As already remarked, this approach was influenced by work on models of scientific change (Kuhn, Lakatos), and indeed there is a very Kuhnian element in it, namely the assumption that the growth of mathematics passes through "normal" periods (reminiscent of Kuhn's "normal science" within a scientific discipline) when a given framework dominates the work. In my view, this Kuhnian element of Kitcher's analysis is misguided, and even makes it impossible for his approach to address the key epistemological issues[29] (Ferreiros, 2016, 35)

Un análisis de una práctica matemática debe incluir las relaciones de la obra, el matemático o grupo de matemáticos, con las comunidades de producción y divulgación. Esto implica reconocer posibles variaciones en la práctica hasta en el mismo momento de consolidación. También permite reconocer los grupos humanos que pertenecen al campo, pero que se enfatizan o que consideran solo una parte de la nueva práctica. El sistema se va afinando en las comunidades, de tal forma, que algunos elementos de las componentes se van modificando, reestructurando o finalmente son anulados sin modificar la estructura. Este cambio en el sistema es fructífero en el análisis epistemológico de la práctica.

En este sentido, los análisis de la práctica son más minuciosos; se sitúan no solo en la época sino en diferentes comunidades e intenciones. Para este trabajo, interesa la

[29] El trabajo de Kitcher sobre los patrones de cambio en el desarrollo de las matemáticas se basó en dos ideas: primero, la historia de las matemáticas muestra períodos en los que el trabajo y la investigación están dominados por un marco dado. En segundo lugar, la transición de un marco dado a otro es una respuesta a las innovaciones que causan inestabilidades o tensiones entre los elementos del quíntuple <L, M, S, R, Q> y tales transiciones de "interpráctica" pueden ser visto como racional. Como ya se señaló, este enfoque fue influenciado por el trabajo sobre modelos de cambio científico (Kuhn, Lakatos), y de hecho hay un elemento muy kuhniano en él, a saber, la suposición de que el crecimiento de las matemáticas pasa por períodos "normales" (que recuerda a los de Kuhn "Ciencia normal" dentro de una disciplina científica) cuando un marco dado domina el trabajo. En mi opinión, este elemento kuhniano del análisis de Kitcher está equivocado e incluso hace imposible que su enfoque aborde los problemas epistemológicos clave

comunidad de producción del conocimiento –objeto de estudio de la historia de la matemática– y la comunidad de educadores de las matemáticas –objeto de investigación de la historia de la educación matemática–; dos comunidades complementarias cuyas prácticas no son iguales, pero están relacionadas.

Dada la importancia del papel de las comunidades y sus consecuencias en la práctica matemática en esta tesis se utilizará la séptupla $\langle \mathrm{M}, \mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{PM}, \mathrm{C}, \mathrm{AM}, \mathrm{PS} \rangle$, propuesta por van Kerkhove y Bendegem (2004), en la cual la componente M se refiere a las relaciones y los problemas de la comunidad de matemáticos o de los individuos involucrados con el trabajo en matemáticas. En la presente investigación se trata de la comunidad de práctica que asumió el compromiso de estudiar, comentar, enseñar y divulgar la *Geometría* de Descartes en los Países Bajos a través de su segunda edición en latín y, luego, en los textos de Lamy y Reyneau. Por su parte, P relaciona el marco de la investigación dentro de un grupo de problemas específicos $p_{1,}\ p_{2,}\ \ldots,\ p_{n.,}$ los cuales hacen parte de los problemas que abordó Descartes con su disertación. La componente F designa un lenguaje formal que incluye axiomas, definiciones y pruebas como respuesta a las problemáticas propuestas en P. A su vez, PM se refiere al conjunto de métodos de prueba (reducción al absurdo, prueba por descenso infinito, inducción; con instrumentos, etc.). Luego, C designa los conceptos, que se movilizan en la práctica; AM se refiere a los métodos de argumentación que usa la comunidad para el desarrollo de la práctica (pruebas informales, por analogía, con elementos intuitivos, etc.); y, por último, PS es el conjunto de estrategias de prueba que incluyen formas de abordar la complejidad de los problemas (ignorar variables, rastrear un concepto, análisis comparativos, etc.). (Kerkhove y Bendegem, 2004)

Esta estructura de la práctica abre la posibilidad de que un mismo saber matemático esté de diferentes maneras en el sistema de consolidación de su práctica. Siendo así, es posible considerar en la componente M comunidades en una misma época que adoptan prácticas matemáticas diferentes o que mantienen resistencia a un cambio de la práctica. Por ejemplo, los jesuitas no consideraron los trabajos matemáticos de Descartes para la enseñanza en la primera mitad del siglo XVIII, pero la comunidad de oratorianos participó en la consolidación de estas ideas en la enseñanza.

De igual manera, una comunidad podría tener dos sistemas de prácticas diferentes debido a un cambio en la componente P; por ejemplo, en el segundo tomo del texto de de Witt las ecuaciones de segundo grado son representadas por medio de su simbólica. Por lo tanto, este autor plantea y soluciona el problema de hacer uso de mostrar que cierta simbología se corresponde con una de las cónicas.

2.2 La Práctica Matemática Focalizada en la Construcción y Uso de Diagramas

Las consideraciones de los apartados anteriores sobre la producción del saber matemático y la práctica muestran que una forma de estudiarla es por medio de los diagramas construidos durante la consolidación y el desarrollo de una teoría. Sea como herramienta para la solución de problemas o para la prueba de proposiciones; los diagramas, pertenecen al conjunto de los medios producción de las matemáticas. En este sentido, la práctica puede caracterizarse y conocerse a partir de ellos.

Los diagramas son medios para inferir, probar y representar situaciones en una práctica matemática bien determinada. En tanto sistema de representaciones este tipo de signos están inmersos en la época en los cuales se construyeron y cumplen las reglas de las teorías establecidas que representan; en este sentido, no son autónomos.

Los diagramas son un tipo de herramienta que permite comprender las relaciones que dan origen a una práctica; en este sentido, quien usa un diagrama debe conocer la semántica y la sintaxis que componen la imagen. De esta manera, un diagrama no lo es en sí mismo; necesita una referencia que se encuentra en la práctica a la pertenece. (Kadunz, 2016)

Probablemente, el primero en hacer un análisis de los sistemas de representación fue Charles Sanders Pierce con su trabajo sobre la organización de los signos y las imágenes a partir de su función en el discurso y de su relación con el objeto que representa. Pierce reconoció tres tipos de signos (Stjernfelt, 2007):

- Símbolos: signos que refieren al objeto por virtud de una convención. La presentación formal de las matemáticas recurre principalmente a este tipo de signos. Por ejemplo, el enunciado "la función f tiende hacia el límite l en a" se simboliza:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \ \forall x \ si \ 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

- Índices: signos que denotan una cosa al centrar la atención en ella; le dan existencia al objeto que representan. En geometría, las frases mediante las cuales se nombran los objetos geométricos podrían considerarse como los índices más usados. Por ejemplo, expresiones como el "segmento AB", el "ángulo α" o el "cuadrilátero $ABCD$".
- Íconos: signos determinados por la semejanza con el objeto representado. Los objetos de la geometría euclidiana son íconos. Por ejemplo, la proposición 1 del libro I es un triángulo equilátero; el signo de este objeto se convierte en un ícono de la figura que conserva las propiedades geométricas. La construcción del triángulo equilátero es un diagrama en el sentido pierceano; es un signo que representa las relaciones que permiten determinar la imagen que se convierte en ícono.

El diagrama es un tipo especial de ícono que permite construir o inferir las relaciones del objeto que representa, dado que es construido a partir de las reglas de la práctica a la que pertenece. Es un ícono de un conjunto de objetos racionalmente relacionados que permite inferir relaciones diferentes a las que se obtienen por medio de la experiencia (Stjernfelt, 2007), un medio cognitivo para realizar argumentaciones sobre un suceso determinado. De esta manera, un diagrama es una herramienta para generar conocimiento[30] (Hoffmann, 2007).

> Given the operational icon criterion, we are now able to appreciate the central role played by diagrams in the icon category as such. As soon as an icon is contemplated as a whole consisting of interrelated parts whose relations are subject to experimental change, we are operating on a diagram. (Stjernfelt, 2007, p. 92)

La relación del diagrama con el concepto de ícono se establece a partir de su construcción dentro de un sistema de representación determinado, el cual se mantiene durante la experimentación a través de las condiciones que mantiene la imagen; está normado dentro de una práctica. Su función de iconicidad se produce en la generalización de las relaciones que permiten la existencia del diagrama. Cuando la imagen se convierte en la representación del objeto, guarda su significado para una cantidad de relaciones a partir de la imagen de uno de ellos[31].

[30] Dado el criterio de icono operativo, ahora podemos apreciar el papel central que juegan los diagramas en la categoría de icono como tal. Tan pronto como se contempla un icono como un todo que consta de partes interrelacionadas cuyas relaciones están sujetas a cambios experimentales, estamos operando en un diagrama.
[31] Las reglas y convenciones de inferencia a las que se somete el matemático al actuar sobre los diagramas definen los límites de las posibles transformaciones y definen las restricciones que determinan, - a veces dentro de un rango de posibilidades- el resultado de los experimentos.

> The inference rules and conventions the mathematician submits to in acting on diagrams define the *limits* of possible transformations, and they define *constraints* that determine –sometimes within a range of possibilities– the outcome of experiments. (Hoffmann, 2005, p. 47)

En la perspectiva de Hoffmann, entonces, las imágenes que se usan en matemáticas son diagramas en los cuales también intervienen índices y símbolos. Estos signos ayudan a mantener el razonamiento y la experimentación dentro de la práctica. Cumplen las dos hipótesis de Pierce sobre la importancia de los diagramas: a) que el pensamiento se puede modelar con representaciones esquemáticas y, de esta manera, los diagramas se pueden utilizar como herramientas para imaginar los procesos del pensamiento; y b) que estudiar y comprender la naturaleza de los diagramas puede ser decisivo para comprender la naturaleza de las representaciones mentales (Kozak, 2020).

Así las cosas, los diagramas son signos que usan, diseñan y limitan el espacio de representación, ofrecen una ventaja cognitiva,[32] muestran las relaciones entre los objetos representados, son una forma de escritura, y pueden estar sujetos a experimentación y generalización. Además, son culturales ya que existen actividades en el campo que pautan la forma en que el espacio debe ser interpretado (Giardino, 2016).

Los diagramas no se reducen a imágenes de objetos abstractos, son instrumentos, herramientas que permiten trabajar dentro de un contexto. Pertenecen al género de representación en el sentido de que pueden estar en lugar de la cosa que representan y cuando logran esto, se convierten en íconos. Son un bosquejo esquelético de un objeto en

[32] Giardino (2016) se refiere a ventajas cognitivas como buenos atajos inferenciales en la resolución de problemas; característica fundamental de los diagramas ya que en ellos se externaliza la información en un espacio determinado, lo que reduce la búsqueda de la información relevante para resolver la tarea.

términos de relaciones entre sus partes, lo que los hace aptos para razonar, experimentar e inferir.

Este tipo de signo está ligado a una forma de razonar que ha sido estudiada desde la cognición:[33]

> (…) all deductive reasoning, even simple syllogism, involves an element of observation; namely, deduction consists in constructing an icon or diagram the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning, of experimenting upon this image in the imagination, and of observing the result so as to discover unnoticed and hidden relations among the parts. (…). (Pierce, como se citó en Stjernfelt, 2007, p. 108)

El proceso de construcción de un diagrama –de acuerdo con los preceptos que permiten observar relaciones para realizar acciones sobre el diagrama, experimentos que permiten hacer inferencias– es lo que se entiende por razonamiento diagramático. (Hoffmann, 2007)

El razonamiento diagramático y el uso de diagramas consisten en una constante elaboración de inferencias a partir del estudio de las relaciones del diagrama. Dado un problema o una premisa, se realiza una construcción que pone en juego relaciones de la situación; luego, se observa, se manipula y se experimenta, se vuelve a observar y se concluye. Así, se infiere a partir del diagrama. Este proceso va consolidando las relaciones que lo conforman y las que este genera. En general, el diagrama es un modelo estático de

[33] Todo razonamiento deductivo, incluso el simple silogismo, implica un elemento de observación; es decir, la deducción consiste en construir un icono o diagrama cuyas relaciones presentarán una completa analogía con las de las partes del objeto de razonamiento, de experimentar con esta imagen en la imaginación y de observar el resultado para descubrir inadvertidos y relaciones ocultas entre las partes.

las relaciones entre los objetos que lo conforman; su experimentación a través del movimiento permite inferir, generalizar y condicionar los objetos matemáticos que se producen. La figura 1 muestra un esquema del proceso que se realiza para razonar con diagramas:

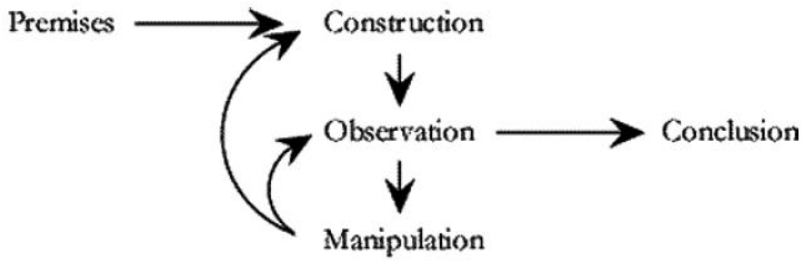


Figura 4. El proceso de razonamiento diagramático. (Stjernfelt, 2007, p. 104)

El razonamiento está determinado por la comprensión de las relaciones que permiten la existencia del diagrama y las inferencias a partir de su experimentación. Pensar con este tipo de signos implica poder ver más allá de las relaciones evidentes, de los objetos que permiten las relaciones. El diagrama se refiere a objetos que no siempre aparecen en la imagen, estos pueden ser producto de las relaciones entre las partes de la imagen. Por ejemplo, los instrumentos que plantea Descartes en su *Geometría* se refieren a la construcción de una curva algebraica, la cual es producto de las relaciones de los brazos del instrumento. El uso de los diagramas implica reconocerlos como herramientas útiles en la prueba de proposiciones matemáticas y en la resolución de problemas. De acuerdo con Arboleda (2017), el diagrama cumple dos condiciones relativas a la objetivad durante la prueba:

1. Existe una cierta invarianza entre los razonamientos producto de la experimentación sobre la figura y los argumentos formales.

2. Existe una estrecha relación entre el principio de identidad de las representaciones en el diagrama y el principio de identidad de los objetos representados.

También cumple, en la resolución de problemas, las mismas funciones que en la prueba por visualización:

Diagrama como síntesis figurativa: red compacta de razonamientos sobre los conceptos.

Diagrama como memoria de anticipación: acuerdos entre medios y fines para la prueba o la resolución.

Diagrama como dispositivo de imaginación creadora: moviliza las operaciones en la práctica matemática de demostración de un teorema o de resolución de un problema.

Analizar diagramas implica interpretar y comprender las condiciones que permitieron las relaciones que conforman una deducción, según los criterios y procedimientos de uso corriente en la comunidad de práctica. Estudiar diagramas posibilita identificar las relaciones primigenias de una inferencia matemática, permite establecer un modelo que da cuenta de la constitución de ideas matemáticas.

En relación con la clasificación de los diagramas y sus usos, y a partir de la idea de que toda deducción requiere un diagrama, según Kadunz (2016, p. 119) Pierce planteó dos tipos de deducciones. La primera plantea que, si todas las premisas que determinan al diagrama son verdaderas, entonces el diagrama representa una conclusión verdadera; a esta deducción la llamó *corolario*. Por ejemplo, la semejanza entre triángulos que se genera al trazar la altura de un triángulo isósceles. La otra forma de deducción se refiere a premisas que no son consecuencia directa del diagrama, a esta forma la llamó *teoremas*. Por ejemplo, al trazar una curva con un instrumento las propiedades que cumple la curva no son consecuencia directa del diagrama, por lo tanto, podrían conforman un teorema.

2.3 Historia de las Matemáticas en la Formación del Profesor de Matemáticas

Hemos visto la estrecha relación entre los diagramas y las formas del quehacer de la matemática, en especial con la práctica que realizan los matemáticos al solucionar problemas y al formalizar aspectos de la matemática. La constitución y construcción de objetos matemáticos implica comprender procesos de su producción y en este sentido, es que creemos que el profesor de matemáticas debe conocer la historia de las matemáticas, desde la perspectiva que se plantea en el primer apartado de este capítulo. Esta problemática sobre la necesidad de conocimiento histórico en la disciplina en la formación del quien enseña matemáticas, es un campo de investigación con tradición dentro de la comunidad de profesores.

Desde inicios de la *International Commission on Mathematical Instruction – ICMI,* [34] los investigadores en Educación Matemática han trabajado en formación de profesores usando la relación Historia de las Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas. Su primer presidente, Felix Klein, creía que la ausencia de un método científico de enseñanza tenía como obstáculo la falta de formación de los profesores en Historia de las Matemáticas (Schubring, 2011).

La hipótesis en la cual Klein soportó la relación entre Historia de la Matemáticas y enseñanza fue la ley biogenética sobre el desarrollo de los seres humanos como una reproducción de la historia evolutiva. La visión de aprendizaje matemático se relacionó así

[34]Asociado a esta organización se encuentra *The International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics – HPM*. Algunas líneas de investigación de este grupo son: a) Marcos teóricos o conceptuales para integrar historia en educación matemática, b) Historia y epistemología en estudiantes y profesores de educación matemática, c) El uso de obras originales en el aula y sus efectos educativos, d) Las matemáticas y su relación con la ciencia, la tecnología y las artes, e) Culturas y matemáticas, y f) Historia de la educación matemática. Tomado de: https://cutt.ly/sxofpjA.

con un principio genético que legitima la relación natural entre "la evolución histórica de las matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas" (Schubring, 2011, p. 129).

Toeplitz por su parte, plantea un contraste metodológico entre dos maneras de usar la historia de las matemáticas en la práctica docente de las matemáticas. En la primera, llamada *directa*, la historia de las matemáticas presenta hechos cronológicos relacionados con su desarrollo. La segunda, llamada *indirecta*, consiste en un análisis histórico que responde al significado de los conceptos matemáticos, y podría favorecer la reflexión sobre su enseñanza. La metodología indirecta toma distancia del principio genético y le otorga al docente la responsabilidad de organizar la enseñanza a través de las consideraciones que realice en el análisis histórico (Schubring, 2011).

En la emergencia de la disciplina Didáctica de la Matemática, la mirada de una historia cronológica de eventos, historiografía o visión tradicional[35] fue reemplaza por la historia epistémica de las matemáticas, la cual compartimos con Arboleda (1983) cuando indica que;

> Para nuestra concepción del trabajo histórico, el restablecimiento de la constitución de las ideas matemáticas debe comportar un estudio complejo del proceso integral que las originó. Por consiguiente, habrá que dar cuenta de la intervención que, en el campo del pensamiento, ejercieron tanto las condiciones económicas, sociales y culturales de la época, como el estado de desarrollo de las técnicas, las necesidades de, otras ciencias (en el caso de las matemáticas: la física y la mecánica) y, muy

[35] La visión tradicional considera que la ciencia es una actividad que genera conocimiento de hechos que se sistematizan en teorías. Si bien las teorías pueden ir cambiando, un rasgo crucial de esta manera tradicional de ver la ciencia es que se considera que tiene una estructura formal (lógica o matemática) que nos permite pensar en ella como una empresa unificada por un método epistémicamente privilegiado". (Martinez & Huang, 2015, p. 23)

> especialmente, la incidencia que ciertas ideologías filosóficas ejercieron (por oposición o como portadores de cambio) en la emergencia de nuevas nociones. (p.249)

Por otra parte, desde la configuración de la didáctica de la matemática como disciplina se reconoce la historia como una de las disciplinas[36] que se interrelacionan en la definición del campo y sobre la cual existe un vasto desarrollo en investigación. De esta manera, tanto los formadores de profesores como quienes inician su formación pertenecen a la comunidad en Didáctica de la Matemática y requieren formación en Historia de las Matemáticas. En el caso de los formadores de profesores de matemáticas estos deben planificar el énfasis de esta formación.

Un completo estado del arte sobre el conocimiento del porqué, el para qué, el qué y el cómo usar la historia en la formación de profesores de matemáticas se encuentra en Guacaneme (2016). En este estado del arte se evidencian diferentes metodologías de abordaje, intereses pedagógicos en historia y tratamientos de los recursos históricos en la educación del profesor de matemáticas.

En Mosvold, Jakobsen & Jankvist (2014) se toma como marco teórico para la formación de profesores el *MKT* y se construyen argumentos para mostrar que sus dominios se pueden fortalecer por medio del estudio de la Historia de las Matemáticas; para ello, toman como ejemplos trabajos de investigación que usan historia en la enseñanza de las matemáticas. Este estudio concluye que existe la necesidad de investigar la relación de la Historia de las Matemáticas con los diferentes aspectos que aparecen en los dominios

[36] Estas disciplinas que interactúan en el campo emergente de la Didáctica de la Matemática están definidas en el octágono didáctico propuesto por Vasco (1997).

planteados para el *MKT* (ver sección 2.4). En este sentido, los autores mencionados prevén dos tipos de futuras investigaciones, una sobre las propias fronteras de los dominios y otra sobre cómo favorece la historia de las matemáticas a cada uno de tales dominios. En los siguientes apartes de esta tesis se examina la relación de la Historia de las Matemáticas con uno de estos dominios, el *Horizon Knowledge Content*.

2.4 El Conocimiento Matemático del Profesor

Casi en general, la comunidad de formadores de profesores reconoce el trabajo de Lee Shulman como inicio de la reflexión en varias problemáticas de este campo de investigación (Adler & Venkat, 2014); este autor planteó un mínimo de siete tipos de conocimiento para la formación del profesor: de contenido, pedagógico general, del currículo, pedagógico del contenido, conocimiento de los aprendices y sus características, conocimiento del contexto educativo y conocimiento de los fines educativos (Shulman, 1987). Desde entonces, el modelo ha sido estudiado y reformulado por la investigación, generando nuevas categorías y un campo de trabajo sobre la formación del profesor.

Dos categorías llamaron la atención en las comunidades de formación de profesores: el *Subject Matter Knowledge – SMK* y el *Pedagogical Content Knowledge – PCK* . El primero hace referencia al contenido de la materia específico para el profesor; en nuestro caso, se indaga en unas matemáticas reflexionadas que permitan la organización curricular, un conocimiento profesional sobre las matemáticas que sea movilizable para el aprendizaje y la enseñanza. El segundo se refiere a un conocimiento único para el profesor:[37]

[37] Representa la combinación de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo se organizan, representan y adaptan temas, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y habilidades de los alumnos, y se presentan para la instrucción. El conocimiento de contenido pedagógico es la categoría que probablemente distinga más la comprensión del especialista en contenido de la del pedagogo.

> It represents the blending of content and pedagogy into an understanding of how particular topics, problems or issues are organized, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction. Pedagogical content knowledge is the category most likely to distinguish the understanding of the content specialist from that of the pedagogue. (Shulman, 1987, p. 8).

En el caso de las matemáticas, las inquietudes sobre este conocimiento fueron acogidas alrededor del campo de la Didáctica de la Matemática en donde hasta hoy se desarrolla, se investiga el cómo, el por qué y el para qué un tipo de conocimiento hace parte de la formación inicial o continua del profesor de matemáticas (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005).

El *MKT* es una adaptación del modelo de Shulman centrado en el estudio detallado del hacer de los docentes, su conocimiento y el logro de sus estudiantes. Inicialmente, se usan las categorías *SMK*, con la especificación del contenido matemático y *PCK* propuesto por Shulman.

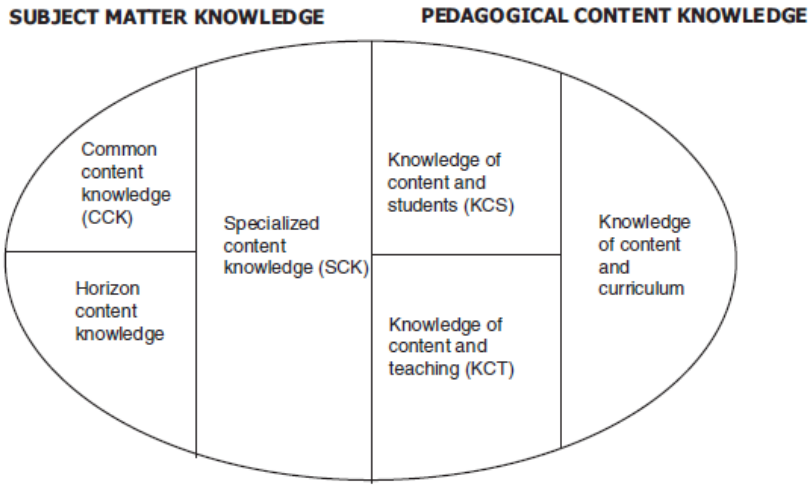


Figura 5. Dominios del conocimiento matemático del profesor. (Ball, et al., 2008, p. 403)

Los dominios del *SMK* son definidos de la siguiente manera:

a. *Common Content Knowledge – CCK*: se trata de conocimientos y habilidades matemáticas que son propias de cualquier persona al nivel de enseñanza que se esté analizando. No hace referencia a un dominio de conocimiento exclusivo del profesor de matemáticas.

b. *Specialized Content Knowledge – SCK*: es el conocimiento matemático propio del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es el principal dominio de profesionalización del profesor de matemáticas. Incluye saber por qué se procede de cierta manera; desde allí, el profesor puede analizar las producciones matemáticas de sus estudiantes.

c. *Horizon Content Knowledge – HCK*: se comprende como el sentido curricular del tratamiento de un asunto de las matemáticas. Contiene las trayectorias de un conocimiento matemático en diferentes etapas educativas, sus conexiones posteriores con otros conocimientos y sus relaciones intra y extra-matemáticas (Escudero, Flores, y Carrillo, 2012).

Respecto al *PCK* se plantean tres categorías:

a. *Knowledge of Content and Student – KCS*: comprende el conocimiento de los estudiantes a través del contenido matemático.

b. *Knowledge of Content and Teaching – KCT*: refiere a los desarrollos que se plantean en la enseñanza de un contenido. Combina el conocimiento sobre la enseñanza y las matemáticas.

c. *Knowledge of Content and Curriculum – KCC*: se refiere a la organización curricular alrededor de un contenido, los materiales educativos propuestos, las indicaciones y las caracterizaciones de los programas educativos sobre los

contenidos (Escudero, Flores, y Carrillo, 2012).

En la actualidad, la investigación alrededor del *MKT* se desarrolla en la práctica diaria de los maestros a través de cada dominio de conocimiento, desde allí se realizan aproximaciones para seguir configurando la propuesta teórica[38]. En esta investigación, el *MKT* se nutre del conocimiento matemático a partir de la práctica matemática. Se incorpora como modelo de formación del conocimiento matemático del profesor de matemáticas. Desde esta posición sobre el conocimiento, se pretende situar aspectos de la práctica cartesiana, específicamente del uso de diagramas, que permitan que el saber que es movilizado a la formación de profesores se ajuste a las pretensiones de la formación. Desde esta perspectiva, lo que se moviliza para la formación del profesor es un estado de la práctica P, un sistema de componentes interactuando - $\langle \mathrm{M}, \mathrm{P}, \mathrm{F}, \mathrm{PM}, \mathrm{C}, \mathrm{AM}, \mathrm{PS} \rangle$-.

2.4.1 El caso del Horizon Content Knowledge

Los trabajos iniciales del grupo de investigación de la Universidad de Michigan liderado por la profesora Deborah Ball iniciaron la investigación sobre el *HCK* a partir de las organizaciones curriculares y las dificultades que tienen los profesores para ubicar la importancia de un contenido en la escuela (Ball, 1993). La evolución del término en los últimos casi treinta años permite configurar elementos fundamentales para su investigación, su relación con el análisis del currículo, las concepciones de los profesores sobre las matemáticas, su utilidad, sus relaciones internas y con otras disciplinas.

[38] Las ideas sobre las relaciones entre el MKT y la práctica matemática que se definen en esta tesis fueron presentadas en II CEMACYC en la comunicación: La perspectiva de la práctica matemática en la formación del conocimiento matemático del profesor de matemáticas. (Bello, 2017).

Algunas caracterizaciones del HCK retoman elementos más filosóficos que puntuales; por ejemplo, se describe como[39] "is an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum" (Ball, et al., 2008, p. 403). También se entiende como un saber que le permite a los profesores pensar hacia adelante y hacia atrás, un puente entre conocimiento elemental y avanzado de las matemáticas (Cho & Tee, 2018).

El trabajo de Jakobsen, Ribeiro & Delaney (2012, p. 7) muestra algunos asuntos puntuales desde la labor del maestro que relaciona el *HCK* con herramientas para conocer la disciplina, los tipos de conocimiento y la validez de las matemáticas. Se proponen usos potenciales en la práctica del profesor, como análisis de preguntas relacionadas con las matemáticas escolares y la integralidad de las matemáticas, y se estudian algunos recursos para la enseñanza.

Al revisar la naturaleza de la idea que subyace al *HCK* se encuentra que parte de la inspiración se dio en el trabajo de Felix Klein; puntualmente, en la mirada de las matemáticas elementales desde un punto de vista más elevado[40] (Ball & Bass, 2009). Esta idea hace referencia a hacer visible la concepción fundamental de un concepto u objeto, los elementos que se visualizan desde una perspectiva más elevada, en la que no existe separación entre matemáticas elementales y académicas; son un mismo conocimiento, una sola matemática. (Klein, 2016. p. vi)

[39] Es una conciencia de cómo se relacionan los temas matemáticos en el ámbito de las matemáticas incluidas en el currículo.

[40] Es tradicional escribir desde un punto de vista superior. En esta tesis acogemos la explicación de Schubring en el prefacio de la traducción del texto *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* de que Klein se refiere a lo elemental como los conceptos fundamentales que se relacionan con el conjunto de la matemática de acuerdo con su arquitectura y su estructur.

Al igual que para el desarrollo de este texto, las matemáticas para profesor que propuso Klein tienen un fuerte énfasis histórico. Sin embargo, la idea de práctica matemática permite indagaciones históricas más puntuales, en espacios de tiempo más pequeños y para diferentes comunidades; también visualiza las subjetividades que permitieron la creación y su estructuración en la práctica matemática. Esta forma de historiar se basa en el análisis de acontecimientos, las transformaciones en la práctica, las correspondientes motivaciones e intenciones y la intervención de diversas comunidades de práctica.

En la tradición de Klein y tomando distancia de las definiciones iniciales de *HCK* ligadas a la conciencia y al currículo, se relaciona el conocimiento del horizonte de los profesores con su conocimiento matemático avanzado[41] "knowledge of the subject matter acquired during undergraduate studies at colleges or universities". Zazkis & Leikin (como se citó en Zazkis & Mamolo, 2011, p. 9). Este conocimiento le permite al profesor tener un primer acercamiento al horizonte del conocimiento matemático.

Siendo así, el conocimiento de la materia y su instrucción en la formación del profesor son el insumo para el *HCK*. Nutrirlo a partir subjetividades desde las prácticas, pero en el horizonte de la objetividad de la matemática, permite pensar en una forma de caracterizar las ideas de horizonte interno y externo de Hussel (1859 -1938) tal y como las utilizan Zazkis & Mamolo (2011). El horizonte interno corresponde a los aspectos que están alrededor de la definición de un objeto; lo que existe en este horizonte depende de las características que se elijan foco para el objeto de estudio. El horizonte externo de un objeto incluye los aspectos del mundo en que existe el objeto, sus relaciones, el mundo de

[41] Conocimiento del tema adquirido durante los estudios de pregrado en colegios o universidades.

conexiones que lo hacen pertenecer a una estructura. (Zazkis & Mamolo, 2011; Foster, 2011)

Aunque en el campo no existe consenso sobre la amplitud y los límites del *HCK*, dos aspectos se establecen para configurarlo (Wasserman, Stockton, & Wasserman, 2013):

a. El horizonte matemático del currículo, es decir, el contenido de las matemáticas escolares más allá del nivel en donde trabaje el maestro. Fundamentalmente, se trata de un horizonte interno del objeto matemático a través de diferentes focos del currículo.

b. Un horizonte matemático avanzado que se relaciona con las matemáticas avanzadas. Principalmente, un horizonte externo de conocimiento matemático para la enseñanza exclusivo del profesor de matemáticas.

Ambos aspectos enfocan el conocimiento del profesor en la materia, en cuanto sus posibilidades escolares y disciplinares. El horizonte interno y externo del objeto se relaciona con la focalización del objeto para la enseñanza y la continuidad del conocimiento matemático dentro de la disciplina.

La propuesta de la práctica como perspectiva de conocimiento de las matemáticas en la formación del profesor de matemáticas conlleva a que el horizonte interno y externo del objeto de estudio, en este caso los diagramas de la práctica cartesiana queden especificados a partir del estudio de la conformación del campo, de las relaciones conceptuales que permitieron la práctica en el sujeto de conocimiento y la estructuración de la misma en la comunidad de práctica. Este análisis permite comprender los condicionamientos sociales para la permanencia o el cambio de signos, modelos de resolución de problemas, técnicas de solución de ecuaciones, etc. Entonces, el horizonte interno y externo no quedan determinados para un objeto sino para un momento de la práctica; es decir, para la

composición de un estado de conocimiento *P* en cada una de las componentes de la práctica.

2.4.2 Una Propuesta de Interacción Entre el MKT y la Práctica Matemática

Hasta este punto de las consideraciones teóricas, la idea de práctica matemática se posiciona como un medio para historiar las matemáticas. Esta perspectiva implica el reconocimiento del saber histórico como fundamental en el estudio del conocimiento matemático y su producción. Esta forma de pensar las matemáticas otorga una visión cognitiva de conformación del conocimiento, de sus instrumentos, de sus posibilidades y de sus dificultades.

Por otro lado, en Didáctica de la Matemática, se tiene tradición en la relación entre formación de profesores e Historia de la Matemática. Específicamente, el estudio de la relación permite evidenciar múltiples formas, intereses, metodologías, razones e historias que contribuyen a la formación.

El enfoque que se propone en la tesis se enfatiza en convertir el estudio de la práctica matemática en un regulador del tipo de análisis histórico que beneficia en desarrollo del *MKT*. De esta manera, el conocimiento matemático en el profesor de matemáticas está determinado por el conocimiento de la práctica matemática. Las virtudes que vemos en este enfoque son:

a. El conocimiento matemático del profesor se determina a partir de una manera de pensar las matemáticas, considerando sus formas de producción. Los productos son consecuencia de las normas del campo, la objetividad de las subjetividades que permiten transitar una comunidad de práctica a la comprensión de la presentación axiomático formal de la matemática.

b. Muestra el desarrollo cognitivo de las matemáticas en diferentes comunidades y con diferentes instrumentos, medios y problemas. Dada una práctica P, el sistema permite determinar las trasformaciones a una práctica $P^{´}$.
c. El análisis histórico se puntualiza en asuntos que se reconocen importantes para los procesos de enseñanza y de aprendizaje; representaciones, diagramas, semiótica, culturización a través del conocimiento matemático, resolución de problemas, etc. Aspectos deseables para la formación del profesor de matemáticas.
d. La perspectiva de conocimiento matemático a partir de la idea de práctica matemática implica conocimiento histórico que se vuelve trasversal a las componentes de formación del profesor. Dado un análisis de la práctica en un momento histórico, este puede nutrir varios aspectos del *MKT*, dependiendo de la comunidad que se analice.
e. Para las comunidades de formación de profesores de matemáticas, la práctica matemática se convierte en un medio de indagación y organización del conocimiento matemático del profesor de matemáticas.

El estudio de las posibles relaciones entre el *MKT* y las componentes de la práctica constituye un programa de investigación fundamental en el campo de formación de profesores de matemáticas. Esta investigación doctoral se ha propuesto contribuir a este programa vinculando el *HCK* con los sistemas de práctica que estructuraron los diagramas en la práctica cartesiana. En el siguiente apartado se consolidan las características de cada componente del sistema para la práctica propuesta por Descartes en la *Geometría.*

2.5 La Práctica en la Obra Matemática de Descartes

Los historiadores de la obra de Descartes (Alvarez, 2000; Bos, 1981, 1984, 1986, 1998, 2001; Chikara, 2003; Clarke, 1982, 2005; Dennis, 1997; D´hombres, 2000; Gaukroger, 1989, 2005; Hacking, 1980; Jones, 2006; Macbeth, 2004, 2014; Maronne, 2007; Mancosu, 1996, 2016; Montesinos, 1995; Rabouin, 2015, 2016, 2017) han realizado dos tipos de lecturas del papel de la geometría y el álgebra: la lectura tradicional y la lectura progresista (Liu, 2017).

La primera se caracteriza por dar más prioridad a la herencia euclidiana, en especial al papel de la construcción geométrica; en esta perspectiva se proporciona una mayor importancia epistemológica a la geometría que al álgebra. Lo simbólico se comprende como una herramienta que posibilita la solución de problemas geométricos.

La lectura progresista reconoce en la obra de Descartes mayor contribución al desarrollo de una concepción de matemática más cercana a la actual. Otorga menos valor al trabajo geométrico –sin desconocerlo– y enfatiza la estructuración del álgebra, el análisis y la organización de entidades abstractas que luego contribuyeron al desarrollo de las matemáticas. Este tipo de lectura entiende que Descartes liberó la magnitud y el número de intuiciones espaciales.

Para esta tesis, el marco referencial se construyó en la práctica que relaciona la geometría y las técnicas algebraicas; idea que se reconoce desde las dos lecturas del texto y que es crucial en la compresión de los significados y los usos de estas dos áreas en el siglo XVII.

Se analiza la práctica matemática de Descartes en la *Geometría* a través de las siete componentes propuestas en su definición. Se toman asuntos expuestos en la obra o en obras anteriores, o interpretaciones de historiadores que representan cada componente. Los

asuntos no son exclusivos para cada componente; estas no son disyuntas. A continuación, se configura lo que se va a entender en esta tesis como la práctica *P* de Descartes; posteriormente, se analizan los usos de los diagramas dentro de este sistema.

2.5.1 La Comunidad de Matemáticos

Descartes contribuyó al pensamiento humano con la formulación de los principales principios de la filosofía moderna, en donde las matemáticas tienen un papel relevante.[42] Para Descartes esta es la única ciencia que permite despojar al pensamiento de cualquier distracción, emoción o intuición con que no se pueda obtener la verdad. El texto que describe explícitamente el desarrollo matemático y el uso del método es *la Géométrie* (Descartes, 1637) en esta tesis vamos a usar la traducción al inglés realizada por David Eugene Smith y Marcia L. Latham en 1954, al igual que *Rules for the Direction of the Mind* (Descartes, 1952) en este último texto, plantea generalidades sobre el papel de lo simbólico, del método y de la relación entre cantidades de magnitud.

Existen indicios de que *Reglas* fue escrito entre diciembre de 1636 y enero de 1637 como parte del proyecto filosófico que había iniciado el autor alrededor de 1619 (Clarke, 1982). Por lo menos fueron cinco los asuntos sobre los que versó: a) un método científico universal, b) un nuevo método –y su instrumento– para encontrar medias proporcionales, c) métodos para la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, d) una clasificación y su método para la clasificación de curvas, y e) un método para solucionar problemas geométricos (Shea, 1993).

Geometría fue escrito para los científicos y filósofos de la época como uno de los apéndices del *Discurso del Método* junto con *La Dióptrica* y *Los Meteoros* (Descartes,

[42] Algunos Análisis de esta relación se pueden estudiar en (Jones, 2006; Schuster, 1980; Clarke, 2005).

1637). La divulgación de la obra inicialmente fue restringida por estar escrita en francés, ya que los documentos científicos se escribían en latín. Sin embargo, se divulgó en los Países Bajos y, en especial, en la Universidad de Leiden. Las versiones en latín fueron revisadas, editadas y aumentadas por Francisco van Schooten. A partir de 1649 las versiones en latín de la *Geometría* aparecen separadas del *Discurso del Método* y aumentadas con documentos que reflexionan sobre las matemáticas cartesianas; la segunda edición en latín en dos tomos (1659-1661) fue la que tuvo mayor distribución en Europa.

La comunidad que se relacionó con esta edición la conformaron los personajes más influyentes de la época, como por ejemplo Newton, Leibniz y Pascal. Con Descartes inicia una época de construcción del álgebra y de principios de rigor diferentes a los establecidos en la antigüedad; la práctica matemática tuvo un tiempo de cambio que inicia con Descartes y se consolida con los inicios del cálculo de Newton y Leibniz. (O'Halloran, 2005)

En el campo educativo, la comunidad religiosa de los oratorianos estudió la obra cartesiana; Lamy y Reyneau, miembros de esta colectividad, pero además integrantes del grupo de Malebranche escribieron libros de texto de geometría con el enfoque de Descartes. En especial, estos dos textos dedicaron capítulos a la enseñanza del método.

Los textos de Arnauld y Prestet también reflexionaron sobre la cantidad en general, introdujeron el método de resolución de problemas y elaboraron un discurso que criticó los métodos de los antiguos; tomaron posición sobre la relación geometría – álgebra con nuevos elementos para una aritmética de las magnitudes. Operar con símbolos y hacer uso del método analítico eran las bases de esta nueva práctica. (Schubring, 2005; Barbin, 2009, 2010)

Estos textos serán analizados en los capítulos tres y cuatro en tanto representantes de los sistemas de divulgación de la obra cartesiana y de las comunidades en las que se fue

desarrollando la práctica cartesiana. En cuanto a la comunidad de científicos, los dos tomos de la segunda edición en latín y, en cuanto a la comunidad educativa, las ediciones del texto de Lamy y Reyneau, que reflejan la posición de la congregación de los oratorianos sobre el cartesianismo.

2.5.2 Programa de Investigación

Descartes abordó las preguntas que circulaban entre las personas de ciencia del siglo XVII, esencialmente en dos textos: *Rules for the Direction of the Mind* (Descartes, 1952) y *Discourse on the Method of Rightly Conducting the Reason* (Descartes, 1952). Estos cuestionamientos Mancosu (1996, pp. 8-15) los formula de la siguiente manera:

a. ¿Las verdades matemáticas pueden argumentarse solamente desde estructuras lógicas?
b. ¿La mejor definición de la matemática como ciencia es la que se basa en el uso de los criterios aristotélicos?
c. ¿Cuál es el papel de las técnicas y los algoritmos que solucionan problemas de la época con las consideraciones que se hacen de la matemática?

En ambas obras, Descartes propuso un método para llegar a las verdades que reúne las ventajas del análisis de los antiguos y el álgebra de su época. Las reglas de este método consistían en lo siguiente: a) no admitir como verdadero algo de lo cual se tuviera alguna duda, b) dividir cada dificultad para examinar de ella tantas cosas simples como fuere posible; c) iniciar las reflexiones por los objetos más simples y fáciles de conocer para avanzar poco a poco a relaciones más complejas; y, finalmente, d) realizar revisiones tan amplias como para determinar que no se omite nada. (Montesinos, 1995)

Esta novedosa metafísica revolucionó, en su época, la forma de hacer matemáticas. La base fundamental de la propuesta estuvo en dejar a un lado la perspectiva de los objetos y enfocarse en las relaciones (Macbeth, 2004, 2014). El interés del estudio en las matemáticas cambió de objetos geométricos como líneas, círculos y polígonos a relaciones entre segmentos de línea, las cuales se entienden como representantes de cantidades arbitrarias y se pueden representar por medio de una nueva instancia semiótica para las matemáticas: las expresiones simbólicas.

Esta nueva mirada de los objetos permeó los modos de representación de los siglos XVII y XVIII; las figuras humanas comenzaron a desaparecer al igual que los contextos físicos de los problemas, las imágenes estaban compuestas por relaciones geométricas. Algunas de ellas mostraban lo que se quería analizar mediante diagramas en el espacio y el tiempo. Las imágenes mostraban uno o varios momentos en el movimiento; se pasó de una imagen estática a una con movimiento continuo. (Alshwaikh, 2011; O'Halloran, 2005)

Una de las características de la filosofía de Descartes es la descomposición de los problemas en sus partes más simples. En matemáticas esto se plasmó en la representación de objetos por medio de relaciones entre líneas a través del uso del teorema de Tales (Alvarez, 2000). El programa de investigación cartesiano implicó el uso de las razones y las proporciones entre segmentos, que ya se había planteado en los trabajos de Viète, como base fundamental de cualquier conocimiento. Este es el nuevo tratamiento para las magnitudes: todas pueden representarse a partir de segmentos, los cuales pueden relacionarse a partir de su cantidad de magnitud; y estas relaciones pueden expresarse mediante símbolos con los que se pueden operar para reescribir las cantidades de magnitud desconocidas a partir de las cantidades conocidas.

En *Geometría*, la práctica matemática estuvo orientada a investigar lo siguiente:

a. El método de solución de problemas geométricos; procedimiento que recuperó el análisis problémico propuesto por Pappus y excluyó el análisis teórico, es decir, promulgó su uso como método de solución de problemas. (Graukroger, 1989, 2005)
b. El análisis de las limitaciones de la deducción aristotélica. Descartes encaminó su búsqueda en una empresa que se caracterizó por la formulación de generalidades a través de la resolución de problemas, el uso de instrumentos mentales o físicos y del álgebra de la época, esencialmente las reflexiones de Viète. El silogismo propuesto por Aristóteles y practicado por Euclides fue criticado por Descartes, por no ser un método para crear matemáticas, cualidad que encontró en el método de análisis.
c. Aceptó instrumentos diferentes a la regla y el compás que le permitieron estudiar nuevos criterios para determinar el carácter geométrico de las curvas.

Esta práctica se caracteriza por una separación del objeto físico y su representación, para construir, a partir de determinadas relaciones, nuevas representaciones mentales. (Macbeth, 2004, 2014). El intelecto puro no se enfocó en objetos dados a los sentidos o al pensamiento sino en relaciones y patrones con los cuales podemos definir y clasificar objetos matemáticos.

La práctica que inició Descartes modificó la idea euclidiana de construcción. El primer paso fue comparar los instrumentos tradicionales (la regla y el compás) con compases articulados, para concluir que no existe diferencia en razonar con uno u otro tipo. La concepción euclídea de rigor consiste en dos asuntos (Detlefsen, 2005): a) considerar la prueba y el conocimiento a partir de un modelo genético que implica que algo se conoce mejor a través de sus causas; en el caso de las matemáticas, esto se traduce en exhibir los

principios básicos de la construcción; el otro asunto se refiere a: b) la construcción del objeto en la prueba a partir de sus propiedades formuladas previamente:[43]

> *Generally speaking, a theorem concerning a given type of object was taken to be properly proved or demonstrated by showing how to construct objects of its type as objects having the property asserted of them in the theorem. This allowed one to witness the formation of the objects from their rudiments, and this exhibition of the formation of objects became an important part of the traditional standard for rigor*. (Detlefsen, 2005, p. 237)

Esta idea de garantizar la existencia del objeto mediante su construcción será sustituida en el siglo siguiente por la primacía de los métodos algebraicos en los trabajos de Euler y Lagrange. La construcción de los objetos en los textos antiguos se refiere a la función de la imaginación como un ejercicio cognitivo en el que participan imágenes que pueden considerarse como diagramas en el sentido pierceano, porque a partir de estas imágenes se hacen inferencias y se relacionan objetos geométricos. La construcción es una entidad semiótica con características diagramáticas, pues en ella se configuran propiedades y características del objeto.

Esto puede comprenderse como lo afirmaba Proclo (citado por Arana 2016, p. 465):[44] "it is in the imagination that the constructions, sectioning, positions, comparisons,

[43] En términos generales, se consideró que un teorema relativo a un tipo de objeto dado estaba debidamente probado o demostrado mostrando cómo construir objetos de su tipo, como objetos que tienen la propiedad que afirma el teorema. Esto permitió presenciar la formación de los objetos a partir de sus rudimentos, y esta exhibición de la formación de objetos se convirtió en una parte importante del estándar tradicional de rigor.
[44] Es en la imaginación donde tienen lugar las construcciones, secciones, posiciones, comparaciones, adiciones y sustracciones, mientras que los contenidos de nuestro entendimiento permanecen fijos, sin ninguna generación o cambio.

additions, and subtractions take place, whereas the contents of our understanding all stand fixed, without any generation or change".

Proclo medió las ideas entre la imaginación aristotélica y el entendimiento platónico, para la geometría, a partir de la siguiente idea; "the understanding contains the ideas but, being unable to see them when they are wrapped up, unfolds and exposes them and presents them to the imagination sitting in the vestibule.[45] (Proclo citado por Arana 2016, p. 465)

En otra práctica, con otros principios, la idea de Descartes extendió la idea de construcción[46] a partir del uso de instrumentos articulados para el trazado de curvas expandiendo la idea de imaginación propuesta en Proclo, estos artefactos podrían ser mentales o dibujados:[47]

> *the legitimacy of a method of construction was determinable by whether that method could be carried out in the imagination with adequate clarity and distinctness. Thus Descartes held that constructions meeting his "single motion" criterion of geometric legitimacy were as legitimate in geometry as the classical constructions using just ruler and compasses, because all such constructions required the imagination to control only one motion at a time*. (Arana, 2016, p. 467)

[45] El entendimiento contiene las ideas, pero, al no poder verlas cuando están envueltas, las desdobla y expone y las presenta a la imaginación sentada en el vestíbulo.
[46] La idea de construcción planteada por Descartes implica considerar: nuevos instrumentos, el movimiento continuo y líneas tomadas como referencia de las relaciones entre segmentos. Un estudio completo de la idea de construcción en Descartes se encuentra en Bos (2001).
[47] La legitimidad de un método de construcción se determinaba en función de si ese método podía llevarse a cabo en la imaginación con la claridad y la distinción adecuadas. Así, Descartes sostuvo que las construcciones que cumplían con su criterio de "movimiento único" de legitimidad geométrica eran tan legítimas en geometría como las construcciones clásicas que usaban solo regla y compás, porque todas esas construcciones requerían que la imaginación controlara solo un movimiento a la vez.

De esta manera, la imaginación aparece como fundante en el racionalismo moderno, mucho antes de la simbolización, en la regla XII y parte de la XIII, Descartes desarrolla el uso de las figuras para resolver problemas y en escritos anteriores describe el proceso imaginativo a partir de la construcción de figuras;

> Descartes's suggested technique abandons arbitrary single images in favor of multiple images interconnected by proportions. The proportional, thus mathematically expressible, relations could be actively generated from one another according to a rule governed physical model the proportions, or ratios, provide a governing principle of rationality[48](Sepper, 2016, p.29)

El uso del método de análisis, que provoca toda la economía de pensamiento, se encuentra en una nueva práctica imaginativa, la solución de problemas se expresa mediante figuras. En el caso de las curvas algebraicas, obedece a la generación de movimiento mediante relaciones geométricas, la cual tuvo su expresión física en el dibujo de algunos instrumentos:[49] "*This type of "mathematization" is a byproduct of imagination's regulated use. Descartes does not mathematize thought so much as make it rigorously imaginative*". (Sepper, 2016, p. 32)

En este sentido, la geometría es el ejemplo del uso de la imaginación en la interpretación bidimensional del mundo. Es a partir de ésta que es posible comprender la solución del problema de Pappus o comprender el compás para trazar medias

[48] La técnica sugerida por Descartes abandona imágenes individuales arbitrarias en favor de imágenes múltiples interconectadas por proporciones. Las relaciones proporcionales, por lo tanto, matemáticamente expresables, podrían generarse activamente entre sí de acuerdo con un modelo físico gobernado por reglas. Las proporciones, o razones, proporcionan un principio rector de racionalidad.

[49] Este tipo de "matematización" es un subproducto del uso regulado de la imaginación. Descartes no matematiza el pensamiento tanto como lo hace rigurosamente imaginativo.

proporcionales. La revisión de esta obra permite comprender que las representaciones algebraicas son producto del estudio de relaciones a través de imágenes. *Geometría* es un puente en el cambio de la práctica matemática, mantiene algunos asuntos de la tradición y define algunos de los inicios de lo que serán las prácticas de Leibniz y Newton.

El otro aspecto que desarrolla Descartes en su programa de investigación es la *mathesis Universalis*. Existe una discusión abierta respecto a su significado y su alcance;[50] en general, no queda claro si la *mathesis* es el mismo método o es una ciencia independiente, que podría ser lo que hoy llamamos álgebra. En esta tesis, teniendo en cuenta sobre todo la segunda edición de la *Geometría* en latín, se diferencia *mathesis* de método en el siguiente sentido: el método hace parte de la *mathesis Universalis* la cual se aplica para todas las ciencias, como lo afirma Descartes en la regla IV (Arenas, 1996). La *mathesis* permite usar la razón en cualquier ciencia y, en este sentido, necesita de un método para construir la verdad. La *mathesis* es una ciencia general que explica todo lo que podemos buscar en orden y medida (Rabouin, 2016). La *mathesis* tiene que ver con el proyecto filosófico de Descartes sobre la verdad; proyecto que incluye la matemática, pero se desarrolla para cualquier conocimiento.

2.5.3 Lenguaje Formal

En *Geometría* se utilizan diferentes registros para los objetos geométricos y las relaciones que se establecen entre ellos, por una parte, se organizan en construcciones y por otra, se representan algebraicamente. Sin embargo, estos registros no se establecen de manera independiente en la obra, el registro algebraico siempre está interpretado a partir de

[50] Una revisión de los planteamientos realizados por los comentaristas de Descartes respecto a la *mathesis Universalis* se encuentra en Rabouin (2016).

la geometría. De esta manera, el lenguaje simbólico usado por Descartes es de naturaleza geométrica. (Macbeth, 2004)

Con Descartes, se inicia un cambio en la naturaleza semiótica de los problemas de la ciencia. En *Geometría* los modelos relacionales se concretaron a través de diagramas que permiten interpretar las relaciones geométricas de los objetos, este tipo de enfoque permite la representación de objetos que no son visibles en el diagrama sino por medio de movimiento, como por ejemplo una curva de segundo grado. (Alshwaikh, 2011)

No es el lenguaje simbólico del álgebra lo que marca el surgimiento de la matemática moderna; sino, la reorientación que permitió un lenguaje que expresa relaciones entre segmentos de líneas, que representan cantidades arbitrarias y que permiten signar una relación matemática a partir de su representación simbólica. (Rabouin, 2017)

En general, terminando el siglo XVIII, la figura que permite la solución de un problema no es absolutamente necesaria, para estos momentos, un problema puede ser resuelto usando únicamente símbolos. Las relaciones geométricas ya no se registran exclusivamente en la figura, ahora, las técnicas algebraicas y la representación analítica -ecuación- de los objetos, permite el tratamiento simbólico. Las imágenes en Descartes por su carácter relacional son inferenciales; en este sentido cumplen con las características de diagrama expuestas en el apartado 2.2.

La dependencia que se establece entre el símbolo y el objeto geométrico que representa, se origina en el proceso de ordenar y relacionar los objetos en la figura, al nombrar lo conocido y desconocido y relacionarlo usando proporciones. Luego, en la consecución del principio analítico, el tratamiento de los símbolos cambia de función y se establecen a partir de las operaciones y técnicas algebraicas. Obtenida la ecuación que representa el problema, los símbolos vuelven a ser interpretados en su naturaleza

geométrica. Esta doble función del símbolo en el proceso de análisis es lo que permite deducir el principio analítico que representa una situación.

En este sentido, comenta O'Halloran (2005) que Descartes descubrió que las curvas podían describirse y representarse por medio de símbolos matemáticos; es más, la originalidad cartesiana consiste en haber demostrado que existía una expresión algebraica que representaba una familia de curvas. Pero, lo reciproco no le interesó porque el símbolo como entidad lingüística no era estable;

> The underlying reason for Descartes' claim that the linguistic descriptions cause 'confusion in our thinking' is that the linguistic version means something quite different to what is generally considered to be the symbolic equivalent. As explained in the discussion of language and photographs in Chapter 1, different semiotic resources have the potential to mean different things. In Descartes' example, the linguistic term 'the cube' is semantically a fixed entity through its grammatical instantiation as a noun. It is an object, a thing, a participant or entity. On the other hand, the symbolic ax^3 is not a fixed object, rather it is a complex of interactive participants which combine through the process of multiplication as seen in the expanded form $a \times x \times x \times x$. The symbolic expression is not a stable fixed entity like the linguistic nominal group, rather it is a dynamic complex which may be reconfigured in different ways. This type of symbolic expression offers countless alternatives to describe different curves; for example, $x^3, 2x^3, 3x^3$ and so forth.

> Given that Descartes' aim is to construct and differentiate between curves, it is not surprising that the symbolic descriptions are preferred.[51] (O'Halloran, 2005, p. 54)

En *Geometría* no se desarrolló un lenguaje simbólico como el que se conoce hoy; Descartes describía patrones geométricos expresados en términos de proporciones. Los símbolos que propuso están construidos para trabajar en un campo semántico particular, que se puede describir mediante segmentos, círculos y curvas geométricas. A este respecto es interesante la siguiente cita[52] de (O'Halloran, 2005):

> *The famous Cartesian mind and body duality was attached to the semiotic forms which were used to represent each realm. Symbolic and specialized mathematical forms of visual semiosis were located in the realm of the mind which was, according to Descartes, the proper site for securing knowledge. Language belonged to the realm of the everyday and to the body and its sensory apparatus. This remarkable shift in emphasis resulted in a sharp dichotomy between the different forms of*

[51] La razón subyacente de la afirmación de Descartes de que las descripciones lingüísticas causan "confusión en nuestro pensamiento" es que la versión lingüística significa algo bastante diferente de lo que generalmente se considera el equivalente simbólico. Como se explicó en la discusión sobre el lenguaje y las fotografías en el Capítulo 1, diferentes recursos semióticos tienen el potencial de significar cosas diferentes. En el ejemplo de Descartes, el término lingüístico "el cubo" es semánticamente una entidad fija a través de su ejemplificación gramatical como sustantivo. Es un objeto, una cosa, un participante o una entidad. Por otro lado, el ax^3simbólico no es un objeto fijo, sino un complejo de participantes interactivos que se combinan a través del proceso de multiplicación como se ve en la forma expandida $a \times x \times x \times x$. La expresión simbólica no es una entidad fija estable como el grupo nominal lingüístico, más bien es un complejo dinámico que puede reconfigurarse de diferentes formas. Este tipo de expresión simbólica ofrece innumerables alternativas para describir diferentes curvas; por ejemplo, $x^3, 2x^3, 3x^3$ y así sucesivamente. Dado que el objetivo de Descartes es construir y diferenciar entre curvas, no es sorprendente que se prefieran las descripciones simbólicas.

[52] La famosa dualidad cartesiana de la mente y el cuerpo se adjuntó a las formas semióticas que se utilizaron para representar cada ámbito. Las formas matemáticas simbólicas y especializadas de semiosis visual estaban ubicadas en el reino de la mente que era, según Descartes, el sitio apropiado para asegurar el conocimiento. El lenguaje pertenecía al ámbito de lo cotidiano y al cuerpo y su aparato sensorial. Este notable cambio en el énfasis resultó en una marcada dicotomía entre las diferentes formas de semiosis, y esto incluyó una diferencia en los valores asignados a cada uno.

> *semiosis, and this included a difference in the values attached to each*. (O'Halloran, 2005, p.55)

Siendo así, el paso de los diagramas a los cálculos algebraicos en contexto geométrico proporcionó un discurso miltisemiótico[53] para la curva; una familia de curvas puede expresarse mediante una ecuación, una igualdad o una proporción, pero también puede presentarse con un movimiento de un compás o con la intersección de dos curvas.

Esta visión multisemiótica permitió la búsqueda de ecuaciones equivalentes para poder obtener la simplificación de ecuaciones y contribuir con el requisito de resolver problemas trabajando con la ecuación de menor grado posible. Se usó el símbolo como parámetro que expresaba la operación entre varias relaciones y que permitió simplificar una expresión.

Respecto a su presentación hay que recordar que la *Geometría* no está organizada a partir de postulados, definiciones y pruebas, sino que es un texto basado en la solución de problemas. Cada libro empieza afirmando las hipótesis que hacen posible el desarrollo conceptual que realiza. En el libro primero, que todos los problemas puedan ser reducidos a conocer la longitud de algunas líneas. El libro segundo, las condiciones que permiten comprender instrumentos diferentes a la regla y el compás en la Geometría. El tercer libro, las condiciones para considerar el estudio y la clasificación de curvas. Se parte de estos criterios y se desarrolla la solución a las problemáticas planteadas partiendo siempre desde lo más simple.

[53] Se comparte con O'Halloran (2005) que las matemáticas son multisemióticas, es decir, discursos formados a través de elecciones de los sistemas de signos funcionales del lenguaje, el simbolismo matemático y el despliegue visual.

2.5.4 Métodos de Prueba

Para Descartes verdad y prueba son diferentes. Puesto que su idea de verdad depende de su noción de Dios,[54] la prueba era un asunto irrelevante para la verdad (Hacking, 1980). Dios dio al hombre lo necesario para el entendimiento y la razón, la prueba se relaciona con cultivar el pensamiento para no tener duda de que algo es cierto, es una subjetividad, porque Dios tiene la verdad de lo que creo.

Descartes se opuso a la silogística de razonamiento llevada a cabo por los escolásticos, en especial en el *discurso del método* y en *reglas de la dirección del espíritu* crítica el papel de la silogística por probar cosas que se conocen, y en consecuencia a la utilidad para solucionar problemas, por lo tanto, con estos argumentos mostró la necesidad de encontrar un método que sirva para la creación. (Graukroger, 1989).

El método para descubrir las verdades que plantea Descartes se encuentra de manera general en varias de los planteamientos que realiza en *Reglas*, específicamente en las reglas IV, V, VI. En el caso de la *Geometría* quedaron consignadas de la siguiente manera:[55]

> If, then, we wish to solve any problem, we first suppose the solution already effected and give names to all the lines that seem needful for its construction, to those that are unknown as well as to those that are known. The, making no distinction between known and unknown lines, we must unravel the difficulty in any way that show most naturally the relations between these lines, until we find it

[54] Este asunto es tratado a fondo en el capítulo 7 y 8 de Gaukroger (1980).
[55] Si, entonces, queremos resolver algún problema, primero suponemos la solución ya efectuada y damos nombre a todas las líneas que parezcan necesarias para su construcción, tanto a las que se desconocen como a las que se conocen. Luego, sin hacer distinción entre líneas conocidas y desconocidas, debemos desentrañar la dificultad de cualquier manera que muestre más naturalmente las relaciones entre estas líneas, hasta que encontremos posible expresar una cantidad única de dos maneras. Esto constituirá una ecuación, ya que los términos de una de estas dos expresiones son juntos iguales a los términos de la otra.

> possible to express and single quantity in two ways. This will constitute and equation since the terms of one of these two expression are together equal to the terms of the other. (Descartes, 1954, p.p. 8-9)

Este método recuperó el análisis problémico de Pappus y excluyó el análisis teórico, es decir, dejó a un lado las posibilidades deductivas y encaminó su búsqueda en una empresa que se caracteriza por la formulación de generalidades a través de la resolución de problemas.

La nueva metafísica, lleva a pensar los objetos geométricos a partir de relaciones permitiendo el afloramiento de una técnica de solución de problemas geométricos. El punto concluyente de esta relación se origina cuando con la simbología del álgebra en contextos geométricos se logra interpretar la solución de un problema a partir de una ecuación, este principio analítico, ahora contiene la solución del problema y representa las relaciones geométricas que originaron la ecuación.

Los métodos que usa para resolver problemas y probar que sus hipótesis eran ciertas fueron el análisis y la síntesis, distinguiéndolos entre el método de descubrimiento -análisis- y el método de presentación -síntesis-. Descartes usa el análisis para mostrar metódicamente cómo se descubre la solución a un problema. En la resolución de un problema el análisis permite encontrar algo que es desconocido, por ahora, no la verdad de una proposición.

> En el análisis, al suponerse que lo que se busca ya ha sido obtenido, examinamos aquello de donde procede y de nuevo las premisas de donde esto procede, hasta que remontamos de esta manera a algo ya conocido o que cumple la función de principio.

> A la inversa, en la síntesis se supone ya obtenido lo que en el análisis se busca como último término. Colocando en el orden natural (deductivo) los antecedentes del análisis en lugar de consecuentes, y relacionando unos y otros, llegamos a la meta que es la construcción del objeto buscado. (Arboleda, 2012, p. 2).

El proceso de análisis implica la representación del problema por medio de un diagrama, en donde se supone la solución por medio de la construcción de las relaciones geométricas, fue a partir de estas imágenes que realiza el análisis que devela la solución.

De igual manera, el análisis involucra la construcción de ecuaciones bajo la práctica geométrica propuesta. Este fue un medio que permitió otra forma de argumentación para las magnitudes y el carácter numérico de las cantidades desconocidas respecto a la tradición griega, pero siguió soportado en razones y proporciones. En la *Geometría* se construyeron diagramas que muestran las relaciones entre objetos geométricos y permiten especificar a partir de ecuaciones lo que se considera dado;

> "En adelante se podían incluir en el razonamiento todos los elementos que estaban implicados, como si todos fueran dados, sin que esta unificación de tratamientos y procedimientos implicaran en ningún momento el menor riesgo de confusión en cuanto al estatuto exacto de cada uno de ellos" (*Gardies como se citó en Arboleda, 2012, p.3)*

Esta visión escritural de lo conocido y lo desconocido en la forma de solucionar problemas, herencia de los trabajos de Viète, permite que lo desconocido tenga el mismo estatus de lo conocido, y se pueda operar con estas cantidades de magnitud. La metodología

de solución de problemas propuesta por Descartes implicó una nueva forma de asumir los problemas geométricos.

En el análisis de la práctica matemática cartesiana el método es un foco de indagación, nos interesa construir las transformaciones en la relación entre los diagramas y la metodología de solución de problemas, identificar cómo se interpretó el método y la contribución de los diagramas como recurso en la presentación de esta heurística.

2.5.5 Conceptos

El entramado conceptual de la *Geometría* se desarrolla en el discurso que acompaña la soluciones y por medio de éstas, en tanto relaciones entre cantidades de magnitud representadas por medio de segmentos. Los conceptos de razón y proporción son fundamentales para entender el proceso de unificación de la aritmética y la geometría por medio de técnicas algebraicas. Como Descarte señala a la princesa Isabel en carta del 17 de noviembre de 1643:[56]

> In considering a problem in geometry, I always make it so that the lines which I use to find the solution to the problem are parallel or intersect at right angles as much as is possible, and I do not consider any other theorems but that the sides of similar triangles have a similar proportion between them, and that in right triangles, the square of the base is equal to the sum of the squares of the sides. (Rabouin, 2017, p.16)

[56] Al considerar un problema de geometría, siempre hago que las líneas que uso para encontrar la solución al problema sean paralelas o se crucen en ángulos rectos tanto como sea posible, y no considero ningún otro teorema que los lados de triángulos similares tienen una proporción similar entre ellos, y que en triángulos rectángulos, el cuadrado de la base es igual a la suma de los cuadrados de los lados (a Elisabeth, 17 de noviembre de 1643)

Descartes hace referencia a sus dos grandes herramientas de trabajo: el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales de Mileto. En el *Discurso del método* Descartes afirmó que las matemáticas tienen un núcleo universal dado por razones y proporciones. Este núcleo es el medio para adelantar uno de los pasos del método consistente en descomponer el problema en sus relaciones más simples. Sin embargo, el uso de las razones y proporciones no es el mismo que el de la perspectiva euclideana:

> (…) una vez liberada de la limitante expuesta por la condición de homogeneidad entre las magnitudes involucradas en una razón, una proporción se convierte en una operación entre cantidades que pueden traducir la construcción, o el postulado, de la cuarta proporcional en un algoritmo que define una ecuación. (Alvarez, 2000, p. 66)

Veamos como procede Descartes a este respecto. El primer problema conceptual que se aborda en la *Geometría* es la definición de las operaciones de suma, resta, adición, multiplicación y raíz cuadrada en el contexto geométrico de los segmentos de línea, que como hemos indicado anteriormente representan magnitudes abstractas. Desde las primeras páginas, Descartes plantea su separación de formas tradicionales de operatividad euclidiana:[57]

> *Just as arithmetic consists of only four or five operations, namely, addition, subtraction, multiplication, division and the extraction of roots, which may be considered a kind of division, on in geometry, to find required lines it is merely*

[57] Así como la aritmética consta de sólo cuatro o cinco operaciones, a saber, suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces, que puede considerarse una especie de división, en geometría, para encontrar las líneas requeridas, simplemente es necesario sumar o restar otras líneas; o bien tomando una línea que llamaré unidad para relacionarla lo más estrechamente posible con los números.

> *necessary to add or subtract other lines; or else taking one line which I shall call unity in order relate it as closely as possible to numbers.* (Descartes, 1954, p. 2)

Este fragmento introduce un elemento fundamental en el desarrollo de la teoría cartesiana: la unidad; una cantidad geométrica arbitraria con la cual es posible operar y medir en multiplicidad, pues la razón de una cantidad a la unidad permite el surgimiento de una medida absoluta de tal cantidad. También le permite definir las operaciones básicas a partir de las relaciones expresadas algebraicamente entre segmentos de línea (Macbeth, 2004). Esta misma noción le permitió linealizar el espacio; fundamentalmente, en el problema de Pappus, se usan dos líneas como principales y todas las demás se representan a partir de ellas. La unidad es primordial en la idea de espacio que crea Descartes a partir de líneas de referencia y puntos posicionados a partir de ellas.

Se aritmetiza el tratamiento de la magnitud al ser representadas por medio de su cantidad, y éstas por medio del álgebra. La teoría algebraica usada es cerrada para las operaciones de suma, multiplicación y extracción de raíces. Se dio existencia a un segmento que es el producto de dos segmentos dados o la raíz de un segmento que es otro segmento, asunto que cambió la condición de homogeneidad de la geometría euclídea.

Descartes utiliza este concepto de unidad y el teorema de Tales sobre triángulos semejantes (Euclides VI.4), para definir la multiplicación de la siguiente manera[58]:

> *For example, let AB be taken as unity, and let itbe required to multiply BD by BC. I have only to join the poins A and C, and draw DE parallel to CA; then BE is the*

[58] Por ejemplo, supongamos que AB se toma como unidad y se requiere multiplicar BD por BC. Solo tengo que unir los puntos A y C, y dibujar DE paralelo a CA; entonces BE es el producto de BD y BC. Si se requiere dividir BE por BD, uno E y D, y dibujo AC paralelo a DE; entonces BC es el resultado de la división.

product of BD and BC. If it be required to divide BE by BD, I join E and D, and draw AC parallel to DE; then BC is the result of the division. (Descartes, 1954, p. 5)

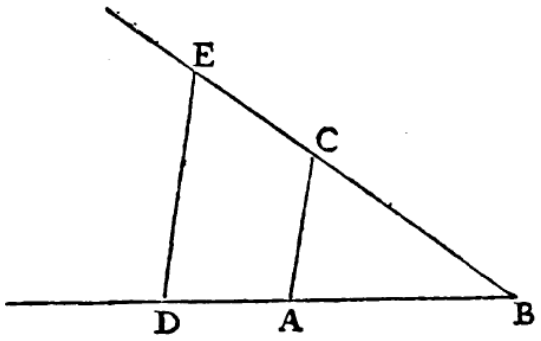


Figura 6. Diagrama de la multiplicación. (Descartes, 1954, p. 5)

Haciendo uso del mismo diagrama, definió la división como:[59] "If it be required to divide BE by BD, I join E and D, and draw AC parallel to DE; then BC is the result of the division." (Descartes, 1954, p. 5)

Para definir la operación de extracción de raíz cuadrada,[60] usó el teorema de la altura (Euclides, VI.8), dejando al lector la representación de dos ideas importantes: a) que el triángulo FIH es rectángulo en el punto I. b) que la altura IG al lado FH determina triángulos semejantes a partir de los cuales se obtienen relaciones proporcionales. Veamos la definición:

If the square root of GH is desired, I add, along the same straight line, FG equal to unity; then, bisecting FH at K, I describe the circle FIH about K as a center and

[59] Si se requiere dividir BE por BD, uno E y D, y dibujo AC paralelo a DE; entonces BC es el resultado de la división.

[60] Si se desea la raíz cuadrada de GH, agrego, a lo largo de la misma línea recta, FG igual a la unidad; luego, biseccionando FH en K, describo el círculo FIH alrededor de K como un centro, y dibujo de G una perpendicular y la extiendo hasta I, y GI es la raíz requerida. No hablo aquí de raíz cúbica, de otras raíces, ya que hablaré más convenientemente de ellas más adelante.

draw from G a perpendicular and extend it to I, and GI is the required root. I do not speak here of cube root, a other roots, since I shall speak more conveniently of them later. (Descartes, 1954, p. 5)

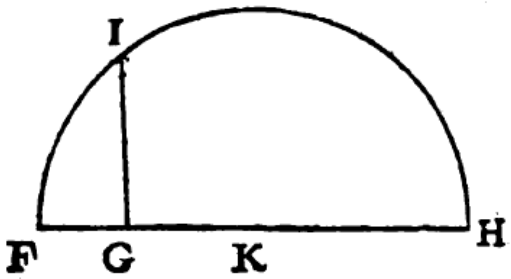


Figura 7. Diagrama de la raíz cuadrada. (Descartes, 1954, p. 6)

Definidas las operaciones, Descartes procede a la solución del problema de Pappus al cual ya nos hemos referido, y luego al desarrollo de una teoría de curvas algebraicas. En su presentación de la *Geometría* desarrolla tres tipos de construcciones para las curvas (Bos, 2001):

a. La curva es producto de un movimiento continuo subordinado y regulado. Ejemplos de este tipo son las curvas elaboradas por medio de instrumentos.

b. La curva está conformada por puntos, los cuales cumplen las relaciones del problema a resolver; es decir, la curva es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen las condiciones del problema. Un ejemplo de esta relación está dado por las cónicas como lugar geométrico de la solución del problema Pappus para cuatro líneas.

c. Un conjunto de puntos pertenece a una curva, la cual es producida por los puntos que interceptan otras curvas. Este tipo de interpretación puede verse en la solución del problema de Pappus para cinco rectas.

Aunque el análisis cartesiano apunta a determinar la expresión algebraica del lugar geométrico que soluciona el problema, la posteridad privilegió ante todo la curva en tanto representación visual; el momento sintético del método adquirió más jerarquía que el analítico; a la ontología geométrica se le asignó un valor epistemológico más fuerte que a la ecuación o expresión analítica del principio constitutivo de la "curva algebraica".

En su innovadora forma de ver los nuevos objetos geométricos (*curvas algebraicas*), Descartes conectó la aceptabilidad de una curva en geometría directamente con los objetos matemáticos o con los instrumentos con los que puede ser construida; aceptó la intersección de curvas cuyo movimiento controlado puede producir nuevas curvas.

Alrededor de la aceptabilidad de curvas, Descartes mantuvo los siguientes criterios y procedimientos (Bos,1984):

a. Las curvas que son aceptadas pueden representarse a partir de ecuaciones algebraicas.

b. Las curvas aceptadas pueden ser representadas por medio de un par de líneas principales, que se interceptan. Este es el marco de referencia para registrar y ordenar las relaciones que generan la curva.

c. Si la curva tiene expresión algebraica debe ser posible trazarla mediante una cantidad de movimientos controlados y esto es un medio aceptable de construcción geométrica.

d. Una construcción geométrica debe realizarse siempre con las curvas más simples, las cuales son del menor grado posible.

Estos criterios permiten entender una transformación crucial en la práctica matemática que introduce Descartes: la construcción de la ecuación tiene una posición

decisiva en la teoría y en la práctica cartesiana; establece un puente entre el uso del álgebra como herramienta y el conocimiento de relaciones a partir de la geometría. (Bos, 2001)

De esta manera, Descartes fue elaborando un enfoque unificado de técnicas algebraicas, en donde los problemas que son susceptibles de construcción podrían reducirse a un grupo de problemas estándares, los cuales podrían ser representados por las relaciones de una construcción conocida.

Como consecuencia de este modelo de generación de curvas algebraicas y del método de solución de problemas, la práctica de Descartes caracterizó un nuevo espacio geométrico dotado de las operaciones anteriormente definidas, elaboró procedimientos constructivos de curvas en ese espacio, introdujo en éste líneas referenciales o sistema de coordenadas para relacionar los objetos mediante posiciones geométricas permitiendo la representación espacial que luego se transformó en escritura algebraica.

2.5.6 Métodos Argumentativos

Parte del trabajo de la *Geometría* consiste en eliminar la restricción de lo geométrico a lo construido con regla y compás, y aceptar que algunas curvas denominadas por los antiguos como mecánicas tengan un nuevo estatuto de curvas geométricas.

Al inicio del libro II de la *Geometría* se presenta la clasificación de curvas conocida hasta ese momento; se reconoce la clasificación realizada por Pappus entre problemas planos, sólidos y lineales; se cuestiona el rechazo de curvas que se trazan con instrumentos diferentes a la regla y el compás en geometría euclídea; se afirma que la construcción de por medio de objetos mecánicos alcanza igual precisión que los construidos por regla y compás. Estos aspectos permiten mostrar que el método permite solucionar los problemas antiguos de manera más eficaz y que algunos problemas que no tenían solución por los

métodos antiguos, se les puede dar respuesta. Sin embargo, Descartes aclara que la geometría busca en cualquier caso exactitud en el razonamiento.

Descartes usa argumentos por analogía para justificar por qué es posible considerar otro tipo de instrumentos para trazar curvas que también fueran geométricas[61]:

> *If we say that are called mechanical because some sort of instrument has to be used to describe them, then we must, to be consistent reject circles and straight lines, since these cannot be described on paper without the use of compasses and ruler, which may also be termed instruments. It is not because the other instrument, being more complicated than the ruler and compasses, and therefore less accurate, for it this were so they would have to be excluded from mechanics, in which accuracy of construction is even more important that in geometry. In the latter exactness of reasoning alone is sought, and this can surely be as thorough with reference to such line as to simpler ones. I cannot believe, either, that it was because they did not wish to make more than two postulates, namely, (1) a straight line can be drawn between any two points, and (2) about a given center a circle can be described passing through a give point.* (Descartes,1954, p. 43)

Con este discurso incluye el tratamiento de curvas por medio instrumentos mecánicos que permiten trabajar sobre ideas primarias en matemáticas. Al parecer

[61] Si decimos que se llaman mecánicos porque se tiene que usar algún tipo de instrumento para describirlos, entonces debemos, para ser consistentes, rechazar círculos y líneas rectas, ya que estos no se pueden describir en papel sin el uso de compás y regla, que se pueden también denominar instrumentos. No es porque el otro instrumento, al ser más complicado que la regla y el compás, y por lo tanto menos preciso, si así fuera, habría que excluirlos de la mecánica, en la que la precisión de construcción es aún más importante que en la geometría. En el último caso, la exactitud del razonamiento es la única razón, y esto seguramente puede ser tan completo con referencia a tal línea como a otras más simples. Tampoco puedo creer que se deba a que no deseaba hacer más de dos postulados, a saber, (1) se puede trazar una línea recta entre dos puntos cualesquiera, y (2) alrededor de un centro dado se puede describir un círculo. pasando por un punto dado.

Descartes abordó desde sus primeros años de producción de *Geometría* los tres problemas clásicos y por lo tanto la resolución de ecuaciones de tercer grado. Esto lo lleva a abordar el problema general de las medias proporcionales, asunto que desde Hipócrates de Quios se sabía solucionaba el problema clásico de la duplicación del cubo; al hallar dos medias proporcionales entre la longitud del cubo original y dos veces esa longitud, es decir:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Componiendo las razones, se obtiene:

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \times \frac{x}{y} \times \frac{y}{2a}$$

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{2a}$$

$$x^3 = 2a^3$$

Este cálculo conocido por Descartes no implica saber cuáles son las proporciones, es decir, el valor para *x* y *y*, la solución se encuentra al resolver una ecuación de tercer grado. Para abordar este problema construye el siguiente instrumento:[62]

> *For example, there is, I believe, no easier method of finding any number of mean proportional, nor one whose demonstration is clearer, that the one which employs the curves described by the instrument XYZ, previously explained. Thus, if two mean proportional between YA and YE be required (…)*. (Descartes, 1954, p. 155)

[62] Por ejemplo, creo que no hay un método más fácil para encontrar cualquier número de proporcionales medias, ni uno cuya demostración sea más clara, que el que emplea las curvas descritas por el instrumento XYZ, explicado anteriormente. Por lo tanto, si se requieren dos proporcionales medios entre YA y YE

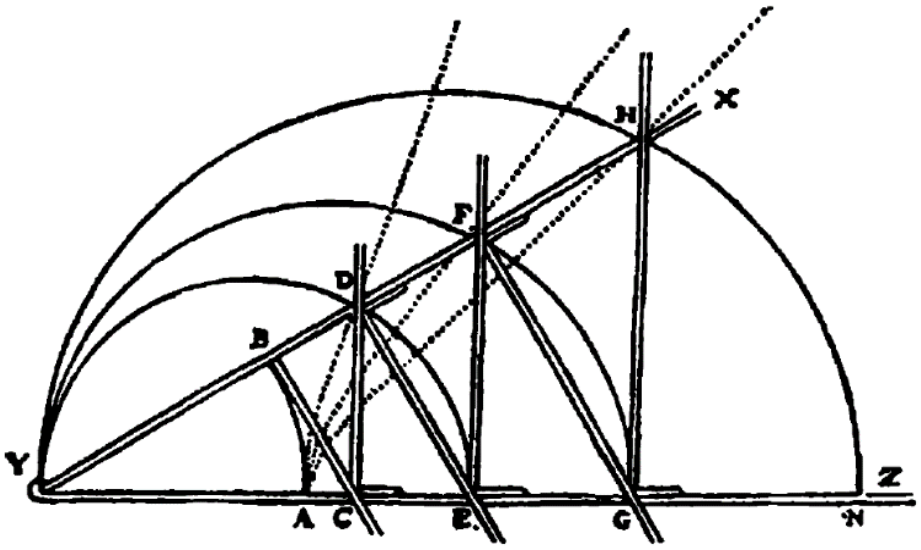


Figura 8. Compás para trazar medias proporcionales. (Descartes, 1954 p. 154)

En interpretación moderna, las relaciones que permiten el funcionamiento del instrumento son los triángulos $CBY, DYC, EYD, FYE, GYF, HYG$; que son semejantes y rectángulos para cualquier abertura del compás. De esta manera, se obtienen las siguientes proporciones:

$$\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG} = \frac{YG}{YH}$$

El desarrollo de la media proporcional es un ejemplo del papel que Descartes le confiere a la instrumentalización como medio de la inteligibilidad.[63] El proceder con el instrumento mecánico permite conocer las líneas que solucionan el problema, las cuales cumplen la relación proporcional para cualquier apertura del instrumento. Las curvas que resultan del movimiento del aparato contienen todos los puntos posibles que solucionan el problema. Entonces, los argumentos sobre la solución pasan al estudio de la curva que se

[63] La integibilidad se entiende como la adquisición de un conocimiento verdadero y la posibilidad de asegurar la verdad de ese conocimiento. (Paty, 1997, p.135).

conforman; en ese momento, ella misma se convierte en objeto de investigación. Este asunto se desarrolló en el libro III de *Geometría*.

El recuento de este fragmento muestra su forma de proceder, la argumentación se desarrolló a partir de las hipótesis que plantea respecto a las medias proporcionales, para luego ir haciendo uso del método e ir acopiando argumentos que le permitan ir generalizando el asunto que quiere tratar. El método implicaba descomponer el problema en sus partes más elementales; estos son los argumentos más simples para solucionar el problema de las medias proporcionales, a partir de la interacción de ellos se elaboran los argumentos que permitían justificar el instrumento y encontrar la ecuación solución.

2.5.7 Estrategias de Prueba

En los inicios del siglo XVII una de las emergencias que se originó fue un número de problemas no planos que eran útiles en la práctica de otras comunidades como las de dibujantes y artesanos y de otras ciencias como la Astronomía y la Balística. Para realizar estas manufacturas se usaban curvas mecánicas y construcciones por puntos que no pertenecían al canon de lo que se consideraba curva geométrica, pero con las cuales se resolvían problemas cuyos contextos son geométricos. Como se ha indicado en las otras componentes, Descartes consideró cambio en los recursos válidos para realizar la construcción geométrica que le permiten establecer una nueva clasificación para las curvas.[64] Esta técnica de estudio que incluye instrumentos y la heurística de generación de curvas por medio de la intersección de curvas de menor grado tuvo su desarrollo entre 1637 y 1750. Después de estos años, se impuso la visión del método analítico a partir de técnicas algebraicas y cuya principal característica es la manipulación de fórmulas. (Bos, 1984)

[64] El texto de Bos (2001) se dedica a analiza los cambios en el concepto de construcción y exactitud.

Descartes plantea una forma para clasificar curvas a partir de la posibilidad de construcción[65]:

> *I think the best way to group together all such curves and then classify them in order is by recognizing the fact that all points of those curves which we may call "geometric", that is, those which admit of precise and exact measurement, must bear a definite relation to all points of a straight line, and that this relation must be expressed by means of a single equation.* (Descartes, 1954, p.48)

La estrategia de comprobación para la solución de problemas que luego se extiende a las proposiciones matemáticas se completa al clasificar las curvas a partir de su posibilidad de construcción y de ser representadas por medio de una expresión algebraica. Descartes relaciona los instrumentos que hacen posible trazar una curva, la construcción geométrica de ella, su representación simbólica y la solución de esta ecuación, con expresiones algebraicas estandarizadas y generales, por ejemplo, todas las ecuaciones de segundo grado. Si un problema es representado por una ecuación cuadrática, su solución es construible por regla y compás, a continuación, identifica un ejemplo que le permita mostrar la relación geometría con el álgebra; para concluir que cualquier problema geométrico construible con regla y compás conduce a la resolución de una ecuación cuadrática.

[65] Creo que la mejor manera de agrupar todas esas curvas y luego clasificarlas en orden es reconociendo el hecho de que todos los puntos de esas curvas que podemos llamar "geométricos", es decir, aquellos que admiten una medición precisa y exacta, deben llevar una relación definida con todos los puntos de una línea recta, y que esta relación debe expresarse mediante una sola ecuación

El trabajo que se exhibe en *Geometría* conduce a una organización por clases de expresiones algebraicas y al reconocimiento de generalidades que se sintetizan a través de una forma algebraica:[66]

> Construction in geometry should be performed by the intersection of curves. The curves had to be geometrically acceptable and simplest possible for the problem at hand. Geometrically acceptable curves were precisely the algebraic ones; their simplicity was to be determined by their degrees." (Bos, 2001, p. 374).

Descartes acepta la continuidad de las curvas siempre que sea posible saber cómo se genera cada uno de sus puntos.

Descartes no diseña un camino hacia la prueba y la demostración matemática; en su *Geometría* puede verse una estrategia, un camino para cumplir con el programa propuesto. La habilidad consistió en poder organizar otra forma de estudio, la cual cumplía con las características relacionales de su metafísica y con la idea de descomponer en los elementos más simples, como lo propuso en su método.

2.6 Diagramas en la *Geometría* de Descartes de 1637

En este apartado, se aborda la naturaleza y el uso de las imágenes en la *Geometría*, su relación con el método de resolución de problemas y su importancia en el establecimiento del vínculo entre relaciones geométricas y expresión algebraica en el contexto geométrico.

[66] La construcción en geometría debe realizarse mediante la intersección de curvas. Las curvas tenían que ser geométricamente aceptables y lo más simples posible para el problema en cuestión. Las curvas geométricamente aceptables eran precisamente las algebraicas; su sencillez debía ser determinada por sus grados.

Según O'Halloran (2005), en los siglos XVII y XVIII hubo un cambio en los modelos de representación en el arte y la ciencia, se pasa del detalle de la figura humana y de la representación icónica a diagramas que analizan la funcionalidad de los objetos o del cuerpo. Este fue el caso de la óptica, la mecánica y la física. Pero, es Descartes quien inicia en matemáticas un proceso que va a desencadenar en un paulatino desuso de este signo. (Alshwaikh, 2011)

Al revisar la *Geometría* se encuentran 28 imágenes que están asociadas a cuatro tipos de problemáticas que está abordando el autor: construcción de operaciones, solución de problemas, instrumentos y construcción de curvas, y solución de ecuaciones. Estas actividades en las que aparece el diagrama se van a usar como categorías para realizar la presentación de este texto. En el documento, algunas imágenes se repiten y no siempre tienen un uso directo o se les puede asociar un texto; este caso se evidencia en el desarrollo de la solución del problema de Pappus para cuatro rectas, por lo tanto, en este documento se describe la imagen cuando se asocia a un texto específico.

Al usar las características de diagrama propuestas en el marco de referencia se examina la necesidad y la posibilidad que tiene un intérprete de usar estas imágenes como diagramas. De igual manera, se determina qué tipo de uso tiene el diagrama en la obra.

2.6.1 Construcciones de Operaciones

Al inicio de *Geometría* se encuentran las primeras imágenes que hacen referencia a las construcciones de las cuatro operaciones básicas y la raíz cuadrada. El uso que se hace de estos diagramas permite una relación directa entre la imagen y los argumentos que se construyen para definir la operación, y que han sido interpretados en la posteridad en términos de ecuaciones, pero que Descartes deja escritos en una proporción.

En el caso del producto, tomó una de las magnitudes conocidas como unidad y, por medio de argumentos geométricos, triángulos semejantes, construyó la operatividad que define un segmento como el producto de dos de ellos.

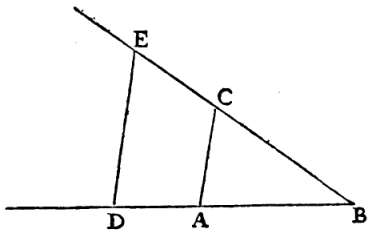
IMAGEN	TEXTO
	For example, let AB be taken as unity, and let it be required to multiply BD by BC. I have only to join the points A and C and draw DE parallel to CA; then BE is the product of BD and BC[67]. (Descartes, 1954, p. 5)

Figura 9. Diagrama del producto con texto. (Descartes, 1954, p. 5)

Descartes describe un algoritmo para multiplicar dos segmentos usando las ideas de unidad y producto planteadas en el Libro VII de *Elementos*, (Euclides, 2007). Así, ahora podemos interpretar una definición de multiplicación relacional a partir de la proporción entre segmentos, la cual no está en el texto original:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE} \; con \; AB \; unidad, \qquad BE = BC * BD$$

La interpretación del diagrama dejó ver algunas implicaciones para la operación en términos del papel de la unidad. Por ejemplo, la reflexión de Beaune en la segunda edición en latín de la *Geometría* en donde comenta que: el producto de dos segmentos puede ser representado por un segmento de menor longitud, si $AB > BD$ sería posible construir $a^2 < a$. Siendo así, Descartes a partir de esta construcción, le imprimió a su geometría relatividad por medio de la unidad. Estos diagramas, que se basan en las relaciones que se

[67] Por ejemplo, supongamos que AB se toma como unidad y se requiere multiplicar BD por BC. Solo tengo que unir los puntos A y C, y dibujar DE paralelo a CA; entonces BE es el producto de BD y BC.

establecen entre triángulos rectángulos representan los asuntos más sencillos que se pueden estudiar con el método. (Groshloz, 2007, pp. 169-171)

Este primer grupo de diagramas le ofrece al lector definiciones relacionales de las operaciones básicas con segmentos y se convierte, como lo fue para Debuaune, en la segunda edición en latín de la *Geometría*, en un campo de estudio de las propiedades algebraicas a partir de diferentes unidades (Maronne, 2007). Por lo tanto, comprender las operaciones que subyacen a la interpretación propuesta por Descartes implica estudiar la operación a través de las posibilidades del diagrama.

La naturaleza de la definición de producto es geométrica, dota a las magnitudes abstractas de operaciones. En este punto del texto Descartes todavía no usa cantidades de magnitud, la definición se establece como una magnitud que se expresa como el producto de dos magnitudes de la misma naturaleza, aspecto que permite la ruptura de la homogeneidad del producto que se presenta en el libro V de Euclides, en donde el producto de dos magnitudes está representada por un área.

2.6.2 Solución de Problemas

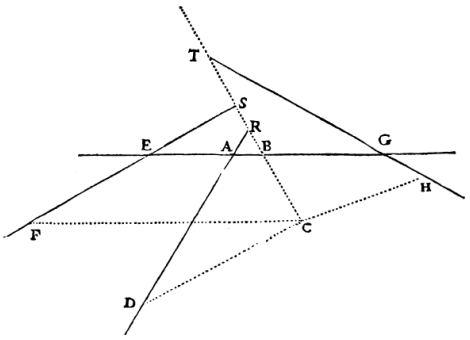
Dentro de los problemas abordados en *Geometría*, se encuentran: el problema de Pappus, la trisección del ángulo, problemas sobre lentes y el problema de la tangente a un punto de una curva. En estas soluciones, se evidencia la aplicación de la nueva heurística de solución de problemas a través del uso del método de resolución de problemas, descrito en las páginas 62 y 63 de este texto.

En la aplicación de este método siempre aparece un diagrama donde se asume a partir de imágenes la primera condición del método: suponer la solución del problema; en ese supuesto se visualizan las líneas auxiliares que cumplen las condiciones del problema

en el diagrama. La imagen es un espacio para construir las relaciones producto del tratamiento de lo conocido y lo desconocido como cantidades de la misma naturaleza.

El problema de Pappus. Inicialmente advertimos que en la solución del problema para cuatro rectas aparecen varias imágenes que acompañan la solución del problema, ninguna de ellas modificó la posición de las rectas dadas ni tampoco la posición del punto C dentro del problema.[68] Descartes usa una sola posición de lo dado y lo desconocido para hallar la ecuación que representa todas las soluciones al problema.

IMAGEN 1. PROBLEMA DE PAPPUS



TEXTO

Let *AB, AD, EF, GH*…, be any number of straight line given in position, and let be required to find a point *C*, from which straight line *CB, CD, CF, CH…*, can be drawn, making given angles *CBA, CDA, CFE, CHG…,*respectively, with the given line and such that the product of certain of them is equal to the product of the rest, or at least such that these two products shall have a given ratio, for this condition does not make the problem any more difficult[69] . (Descartes, 1954, pp. 26-29)

Figura 10. Primer diagrama del problema de Pappus. (Descartes, 1954, pp. 27)

Dos asuntos deben analizarse en este diagrama; la posición inicial de lo dado y el supuesto de lo buscado como parte de lo dado. En la imagen, hay una particularización del

[68] Un análisis de las consecuencias en la determinación de la solución de posibles posiciones de *C*, respecto a las rectas dadas se puede ver (Maronne, 2007), especialmente el problema para cuatro rectas, cuando estás conforma un cuadrado.

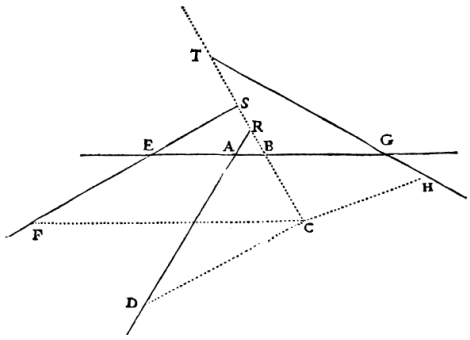
[69] Sea $AB, AD, EF, GH\ldots$, cualquier número de línea recta dada en posición, y sea necesario para encontrar un punto C, desde el cual se puede trazar la línea recta $CB, CD, CF, CH\ldots$, formando ángulos dados $CBA, CDA, CFE, CHG\ldots$, respectivamente, con la línea dada y tal que el producto de algunos de ellos sea igual al producto del resto, o al menos de manera que estos dos productos tengan una proporción dada, esta condición no hace más difícil el problema.

problema. Decir que AB, AD, EF, GH y C son dados, y ubicarlos en el espacio geométrico, con ángulos y prolongaciones determinadas, implica asumir, desde un ejemplo, la caracterización y la comprensión del problema; para, luego, determinar su solución y, desde esta posición, construir la solución para todo el problema. Esa es la primera fase del método de análisis.

En este caso, el diagrama aparece como un dispositivo fijo que representa la imaginación de Descartes al crear la solución, las rectas auxiliares CF, CD, CH y CB instruyen en la forma como se piensa la solución y C es un punto ejemplificativo de una infinidad de puntos que cumplen la condición propuesta en el problema.

Descartes ejemplifica la primera condición del método con este planteamiento del problema, el cual implica la construcción de una imagen que posibilita plantear las relaciones entre las líneas y explorar las condiciones de lo dado con lo desconocido.

IMAGEN 2. PROBLEMA DE PAPPUS



TEXTO

First, I suppose the thing done, and since so many lines are confusing, I may simplify matters by considering one of the given line and one of these to be drawn (as, for example, AB and BC), as the principal lines, to which I shall try to refer all the others. Call the segment of the line *AB*, between A y *B*, *x* and call *BC*, *y*. Produce all the other given lines to meet these two (also produced if necessary) provide none is parallel to either of the principal lines. Thus, in the figure, the given lines cut AB in the points A, E, G, and cut BC in the points R, S, T.

> Then, since the lines *AB, AD* y *EF* are given in position, the distance from A to E is know.If we call this distance *k*, then, EB is equal a *k*+*x*; although $EB = k - x$ when B lies between E y A….[70] (Descartes, 1954. p. 30)

Figura 11. Segundo diagrama problema de Pappus. (Descartes, 1954. p. 31)

Dos argumentos relevantes sobre la posibilidad de esta imagen como diagrama están asociados con el proceso de inferencia que Descartes describe en su texto. El primero, la decisión de escoger dos rectas, una dada y otra de las que se deben calcular, como referencia para construir las ecuaciones. Esta elección de las líneas con las cuales se van a describir las otras relaciones implica que las coordenadas aparecen como "herramienta para razonar y no solo como una escritura" (D´hombres, 2000, p. 77). Este razonamiento se da sobre el diagrama, se fijan posiciones y relaciones entre posiciones relativas de segmentos de recta que varían de *x* respecto a *y* para describir puntos de intersección de segmentos que miden la distancia de las rectas referencia al punto C. Se introduce la idea de distancia que varía en un intervalo determinado y genera otra distancia que depende de la posición de la primera. Son los primeros pasos de representaciones de curvas algebraicas por medio de lo que luego será el plano cartesiano.

[70] Primero, supongo que está solucionado, y dado que tantas líneas son confusas, puedo simplificar las cosas considerando una de las líneas dadas y una de estas para dibujar (como, por ejemplo, AB y BC), como líneas principales, con las que intentaré referirme a todas los demás. Llame al segmento de la línea AB, entre A y B, x y llame a BC, y. Realice todas las demás líneas dadas para que coincidan con estas dos (también se producen si es necesario) siempre que ninguna sea paralela a ninguna de las líneas principales. Así, en la figura, las líneas dadas cortan AB en los puntos A, E, G y cortan BC en los puntos R, S, T.
Entonces, dado que las líneas AB, AD y EF están dadas en posición, se conoce la distancia de A a E. Si llamamos a esta distancia k, entonces, EB será igual a $k + x$; aunque $EB = k - x$ cuando B se encuentra entre E y A…..

El segundo es la inferencia sobre los signos para la distancia *k*. Puestas las rectas dadas en la posición propuesta por Descartes, las otras tres rectas auxiliares nunca se cruzan con *AB* –por lo menos en el diagrama–, luego, la posición de las rectas no parece al azar.[71]

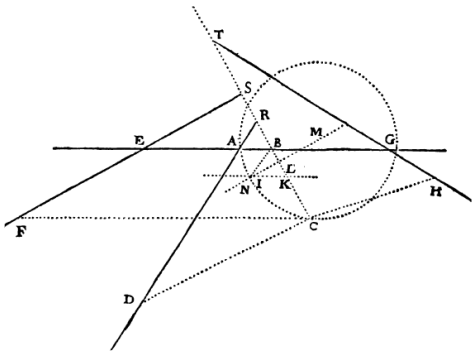
> Now, since all the angles of the triangule ARB are known, the ratio between the side *AB* and BR is known. If we let $AB:BR = z:b$ since $AB = x$, we have $RB = bx/z$, and since *B* lies between *C* and *R*; we have $CR = y + bx/z$, (when *R* lies between *C* and *B*, CR is equal to $y - bx/z$ and when C lies between B and R, CR is equal to $-y + \frac{bx}{z}$). (Descartes, 1954, p. 29)

La posición relativa de *C* y la posición dada de las líneas *AB, AD, EF, GH* permiten referirse a los signos de las expresiones simbólicas como se afirma en el fragmento; Descartes hace inferencias a partir de las rectas dadas y las rectas que solucionan el problema para cada uno de los puntos C, lo que implica considerar movimientos de las rectas o nuevas posiciones relativas dentro de la imagen que se manifiesta como estática. Se razona con las relaciones que están organizadas en el diagrama. La imaginación se visualiza ahora en los signos que toma la expresión algebraica. La comprensión del texto involucra considerar movimientos en los elementos que componen la imagen. Esto es un proceso inferencial que solo es posible si se ha experimentado con las posiciones iniciales de las rectas. El diagrama es el medio entre el razonamiento con las rectas y los cambios en los

[71] Ahora, dado que se conocen todos los ángulos del triángulo ARB, se conoce la razón entre el lado AB y BR. Si dejamos $AB:BR = z:b$ ya que $AB = x$, tenemos que $RB = bx/z$, y entonces B se encuentra entre C y R, tenemos $CR = y + bx/z$ (cuando R está entre C y B, CR es igual a $y - bx/z$ y cuando C está entre B y R, CR es igual a $-y + \frac{bx}{z}$.

signos que se describen con la posición de las rectas respecto a un punto que mantiene una relación directa con la forma simbólica que lo expresa.

IMAGEN 3. DIAGRAMA AUXILIAR



TEXTO

Consider again the four lines *AB*, *AD*, *EF*, and *GH*, given before, and let it be required to find the locus generated by a point *C*; such that, if four lines *CB*, *CD*, *CF*, and *CH*, be drawn through it making given angles with the given lines, the product CB and *CF* is equal to the product *CD* and *CH*. This is equivalent to saying that if [72].

$$CB = y$$

$$CD = \frac{czy + bcx}{z^2}$$

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$$

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$$

(Descartes, 1954, p.60)

Figura 12. Tercer diagrama del problema de Pappus. (Descartes, 1954, p.60)

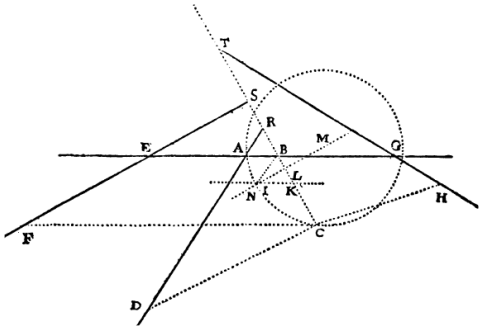
En las mismas posiciones para las rectas dadas y construidas Descartes induce una curva como solución de la situación, en esta iconicidad aparece la curva conformada a partir de puntos *C´*. La conformación de la curva por medio de puntos los cuales cumplen la condición del problema de Pappus sugiere que existe una solución que es una

[72] Considere nuevamente las cuatro líneas AB, AD, EF y GH, dadas antes, y sea necesario encontrar el lugar geométrico generado por un punto C; de modo que, si se dibujan cuatro líneas CB, CD, CF y CH a través de él, formando ángulos dados con las líneas dadas, el producto CB y CF es igual al producto CD y CH. Esto es equivalente a decir que: $CB = y$; $CD = \frac{czy+bcx}{z^2}$; $CF = \frac{ezy+dek+dex}{z^2}$; $CH = \frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$

circunferencia. Esta figura es un ícono dentro del diagrama; pues, la imagen no permite comprobar la existencia de esa solución.

En el texto que acompaña a la imagen se entiende que el camino que va a tomar Descartes es algebraico, tomando la representación algebraica de las rectas que cumplen con la condición del problema de Pappus, muestra que la ecuación general del problema contiene las cónicas.

IMAGEN 4. PROBLEMA DE PAPPUS



TEXTO

After this, *KI* equal and parallel *BA*, and cutting off on BC a segment *BK* equal to *m* (since the expression for *BC* contains +*m*; if this were -*m*, I should have drawn *IK* on the other side of *AB* while if *m* were zero, I would not have drawn IK at all). Then I draw *IL* so that if *IK* :*KL* =*z*: n; that is, so that if *IK* is equal to x, *KL* is equal to $\frac{n}{z}x$. In the same way I know the radio of KL to *IL*, which I may call $n:a$; so that if *KL* is equal to $\frac{n}{z}x$, *IL* is equal $\frac{a}{z}x$. I take the point *K* between *L* and *C*, since the equation contains $-\frac{n}{z}x$; if the were + $\frac{n}{z}x$ I should take *L* between *K* and *C*, while if $\frac{n}{z}x$, were equal to zero, I should not draw *IL* This being done, there remains the expression[73]

[73] Después de esto, KI es igual y paralelo a BA, y al cortar en BC un segmento BK igual a m (como la expresión de BC contiene $+m$, si fuera $-m$, se debería haber dibujado IK en otro lado de AB, mientrs que si fuera m igual a cero, no habría dibujado IK en absoluto). Luego se dibuja IL para que si $IK:KL = z:n$, de mode que si IK es igual a x, KL es igual a $\frac{n}{z}x$. De esta misma manera, si conozco el radio de KL a IL puedo decir que $n:a$ de modo que si KL es igual a $\frac{n}{z}x$. IL es igual a $\frac{a}{z}x$. Se toma el punto K entre L y C , ya que la

$LC = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$. (Descartes, 1954, p. 64)

Figura 13. Cuarto diagrama construcción auxiliar problema de Pappus. (Descartes, 1954, p. 64)

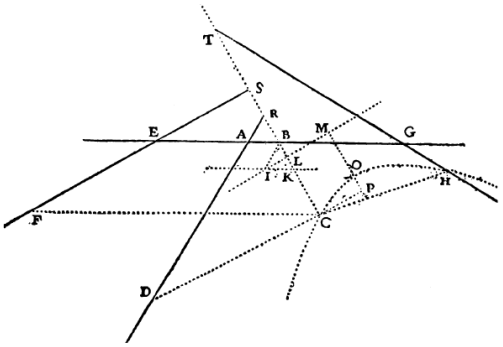
Esta imagen es usada por Descartes para trazar una construcción auxiliar a la inicialmente formulada al plantear el problema. Este nuevo diagrama le permite mostrar las relaciones que describen las soluciones particulares del problema para cuatro líneas a través de la ecuación de segundo grado. Como se puede observar en el diagrama se ubican los segmentos y las relaciones que el autor representa por medio de ecuaciones. La construcción permite relacionar un punto de la solución con las líneas de referencia y ejemplificar las relaciones geométricas que se dan para cada caso. Por ejemplo, obsérvese que la posición de *IL* depende de la posibilidad de plantear la proporción $\frac{IK}{KL} = \frac{z}{n}$. En este punto de resolución del problema, el diagrama ofrece la red de relaciones posibles en la construcción auxiliar, que permiten pasar al tratamiento algebraico en contexto geométrico.

El problema pasa a un estado predominantemente analítico. El diagrama se usa como síntesis figurativa, se da un complejo de razonamientos y conceptos que permiten construir las ecuaciones. La secuencia de argumentos se da en el mundo algebraico, pero, el principio que justifica se encuentra en el mundo geométrico, en este caso en la posibilidad de existencia de las proporciones por medio del paralelismo de *KI* y *AB* a través de la semejanza de triángulos.

---

ecuación contiene $-\frac{n}{z}x$ si fuera $+\frac{n}{z}x$, se debe tomar L entre K y C, mientras que si $\frac{n}{z}x$ fuera cero, no debería trazar IL, hecho esto, queda la expresión; $LC = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$.

IMAGEN 5. PROBLEMA DE PAPPUS



TEXTO

If, however, the required locus is a circle, an ellipse, or a hyperbola, the point *M*, the center of the figure, must first be found. This will always lie on the line IL and may be found by taking *IM* equal to $\frac{aom}{2pz}$. If *o* is equal to zero, *M* coincides with *I*. If the required locus is a circle or an ellipse, *M* and *L* must lie on the same side of *I*, when the term *ox* is positive and on opposite sides when ox is negative.On the other hand, in the case of the hyperbola *M* and *L*; lie on the same side of I when *ox*, is negative and on opposite sides when ox is positive[74].(Descartes, 1954, p. 68 - 71)

Figura 14. Imagen 5 problema de Pappus. (Descartes, 1954, p. 68 - 71)

El uso de la imagen permite ubicar los elementos fundamentales para construir las diferentes cónicas. Induce a pensar en la construcción por puntos, aunque no existe dentro de la descripción textual un procedimiento para ir generando punto por punto la cónica. Se establece la parte sintética descrita por elementos de conformación de cada una de las cónicas usando los criterios establecidos por Apolonio. El uso de expresiones algebraicas

[74] Sin embargo, si el lugar geométrico requerido es un círculo, una elipse o una hipérbola, se debe encontrar el punto M, el centro de la figura. Esto siempre estará en la línea IL y se puede encontrar tomando IM igual a $\frac{aom}{2pz}$. Si o es igual a cero, M coincide con I. Si el lugar geométrico requerido es un círculo o una elipse, M y L deben estar en el mismo lado de I, cuando el término ox es positivo y en lados opuestos cuando ox es negativo. Por otro lado, en el caso de la hipérbola. M y L; se encuentra en el mismo lado de I cuando ox, es negativo y en lados opuestos cuando ox es positivo.

producto de la fase de análisis permite describir y analizar las relaciones del lado recto y el diámetro, como se describe a continuación:[75]

> The latus rectum of the figure must be: $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}+\frac{4mpz^2}{a^2}}$. If $m^2$is positive and the locus is a circle or an ellipse, or if m^2 is negative and the locus is a hyperbola. It must be $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}-\frac{4mpz^2}{a^2}}$. (Descartes, 1954, p. 71)

De esta manera, quedan expresados los elementos de construcción de cada una de las cónicas por medio de expresiones algebraicas. La función determinante de la imagen consiste en dotar a la cónica correspondiente de una característica icónica, una curva conformada por la construcción de cada uno de sus puntos, a partir de las características expuestas por Apolonio para cada uno de estos lugares geométricos[76].

En resumen, el primer paso del método implica la construcción de una imagen que posibilita plantear las relaciones entre las líneas y explorar las condiciones de lo dado. Comprender el planteamiento involucra significar "las líneas dadas" como una manera de acceder al problema, es un diagrama lo que exige el método pues a partir del uso de la imagen se va determinando la solución. El diagrama como instrumento que permite visualizar la imaginación del resolutor permite crear unas condiciones geométricas para la solución del problema. Esto se da en la parte analítica del método, el uso del diagrama permite ir en vía analítica de construcción de la expresión simbólica.

---

[75] El latus rectum de la figura debe ser; $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}+\frac{4mpz^2}{a^2}}$, Si m^2 es positivo y el lugar es un círculo o una elipse. O si m^2 es negativo y el lugar es una hipérbola. Esto debe ser $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}-\frac{4mpz^2}{a^2}}$.

[76] Un análisis de la relación entre el trabajo de Apolonio y el de Descartes está en Forero & Bello (2015).

Por ejemplo, el diagrama se usa para inferir los signos de las expresiones simbólicas para diferentes posiciones de las rectas. La comprensión del texto involucra considerar movimientos en los elementos que componen la imagen. Esto es un proceso inferencial que se facilita significativamente si se experimenta sobre las posiciones iniciales de las rectas.

En la otra fase del método, en lo sintético, es posible que se recurra a otro tipo de diagrama; en este caso, el que aporta la red de conceptos que permiten justificar que la ecuación se corresponde a una ecuación conocida, se busca mostrar que la curva que se conforma cumple la condición que la define como un objeto geométrico. Para el caso del problema de Pappus que se cumplen con las condiciones propuestas por Apolonio para las cónicas.

2.6.3 Instrumentos y Construcción de Curvas

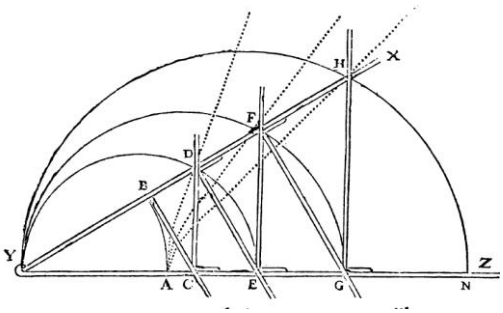
Recordemos que, en la práctica matemática realizada por Descartes, se reconoce el uso de varios instrumentos mecánicos para solucionar problemas. Para Descartes, el status epistémico de estos aparatos mecánicos se asemeja al uso de la regla y el compás en la práctica de los antiguos. Los instrumentos permiten la precisión y la exactitud, dos características de lo geométrico. Las curvas aceptadas por Descartes se generan a partir de;[77] "provided they can be conceived of as described by a continuous motion or by several successive motions, each motion being completely determined by those which precede". (Descartes, 1954, p. 43)

Dos compases aparecen en *Geometría*; uno para hallar medias proporcionales y un hiperbológrafo. El análisis sobre las posibilidades diagramáticas de estas dos imágenes implica aceptar la continuidad de las curvas producto de movimiento, propiedad que se

[77] siempre que puedan ser concebidos como descritos por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos, cada movimiento está completamente determinado por los que preceden.

justifica por el movimiento continuo que se hace del instrumento y que se hereda de hacer uso mental o físico del compás.

MEDIAS PROPORCIONALES



TEXTO

Consider the lines *AB*, *AD*, *AF* and so forth, which we may supposed to be described by means of the instrument *YZ*. This instrument consist of several rulers hinged together in such a way that *YZ*, being placed along the line *AN*, the angle *XYZ*; can be increased or decreased in size, and when its sides are together the points *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* all coincide with A; but as the size of the angle is increased, the ruler *BC*, fastened to right angle to *XY* at the point *B*, pushes toward *Z* the ruler *CD*; which slides along *YZ* always at right angles. In like manner CD push *DE*, which slides along YX always parallel to BC; DE pushes EF, EF pushes FG, FG pushes GH, and so on. Thus, we may imagine an infinity of rulers, each pushing another, half of them making equal angle with YX and the rest with YZ[78], (Descartes, 1954, pp. 44-47)

Figura 15. Compás para trazar medias proporcionales. (Descartes, 1954, pp. 44-47)

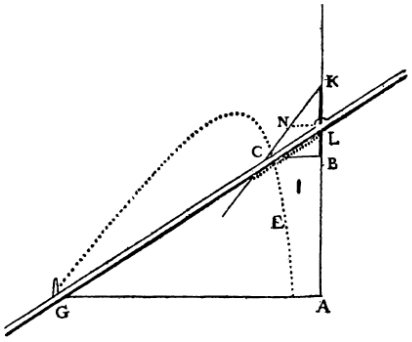
[78] Considere las líneas AB, AD, AF, etc., que podemos suponer que se describen mediante el instrumento YZ. Este instrumento consta de varias reglas articuladas entre sí de tal manera que YZ, se coloca a lo largo de la línea AN, el ángulo XYZ; se puede aumentar o disminuir de tamaño, y cuando sus lados están juntos los puntos B, C, D, E, F, G, H coinciden todos con A; pero a medida que aumenta el tamaño del ángulo, la regla BC, sujeta en XY que conforma un ángulo recto en el punto B, empuja hacia Z la regla CD; que se desliza a lo largo de YZ siempre en ángulos correctos. De la misma manera CD empuja DE, que se desliza sobre YX siempre paralelo a BC; DE empuja a EF, EF empuja a FG, FG empuja a GH, y así sucesivamente. Por lo tanto, podemos imaginar una infinidad de reglas, cada una empujando a la otra, la mitad de ellas formando un ángulo igual con YX y el resto con YZ.

La imagen y el texto permiten comprender las relaciones proporcionales que se mantienen para generar el movimiento, la existencia de las curvas descritas queda anclada a las características matemáticas de la construcción del instrumento; específicamente, al paralelismo entre BC, DE y FG y entre DC, FE y HG. Descartes por medio de esta imagen ejemplifica la curva como un conjunto de puntos que responden a una variación controlada por relaciones proporcionales.

El diagrama construye las curvas producto de cada uno de los puntos de trazo, es por medio de la imagen que se posibilita el trazo de la línea curva, nuevamente el diagrama es producto de la imaginación del autor, muestra la complejidad en la organización de la relación entre la imagen y las proporciones que se establecen en su construcción.

En el libro aparece nuevamente esta imagen ligada a la construcción de medias proporcionales y, en general, a las proporciones generadas por la igualdad $\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG}$. Sabemos, por los historiadores, que este instrumento fue usado por Descartes en *Cogitationes privatae* para planificar la solución de ecuaciones de tercer grado. Sin embargo, en el texto solo hace referencia a la posibilidad de encontrar tantas medias proporcionales como se desee haciendo uso del compás.

HIPERBOLÓGRAFO



TEXTO

Suppose the curve *EC*, to be described by the intersection the ruler *GL* and the rectilinear plane figure *CNKL* whose side *KN* is produced indefinitely in the direction of *C* and which, being moved in the same plane in such a way that its side *KL* always coincides with some part of the line *BA*, (produced in both directions), imparts to the ruler *GL* a rotary motion about *G* (the ruler being hinged to the figure *CNKL* at *L)*. If I wish to find out to what class this curve belongs, I choose a straight line, as *AB* to which to refer all its points, and in AB I choose a point A at which to begin the investigation[79]. (Descartes, 1954, p. 51)

Figura 16. Hiperbológrafo cartesiano. (Descartes, 1954, p. 51)

La imagen se usa para hacer la construcción geométrica de un instrumento que permite trazar una curva al generar un movimiento controlado de dos rectas. Como el movimiento del instrumento es continuo, los puntos que se generan y componen la curva también lo son. Sin embargo, en la imagen, la curva descrita está compuesta por un conjunto de punto discretos.

[79] Supongamos que la curva EC, es descrita por la intersección de la regla GL y la figura plana rectilínea $CNKL$ cuyo lado KN se produce indefinidamente en la dirección de C al moverse en el mismo plano de tal manera que su lado KL siempre coincide con alguna parte de la línea BA, (producida en ambas direcciones), la regla GL tiene un movimiento rotatorio alrededor de G (la regla está articulada a la figura $CNKL$ en L). Si se desea averiguar a qué clase pertenece esta curva, se elige una línea recta, como AB, a la que referir todos sus puntos, y en AB se toma un punto A en el cual comenzar la investigación.

Las inferencias que hace el autor a partir de la imagen consisten en deducir la ecuación de la curva que describe el instrumento, tomando las líneas AB y GA como ejes para describir el movimiento:

> (…) Since CB and BA are unknown and indeterminate quantities, I shall call one of them y and the other x. To the relation between these quantities, I must consider also the known quantities which determine the description of the curve.[80] (…). (Descartes, 1954, p. 52)

El diagrama describe una curva por medio de un movimiento mecánico, pero la deducción que produce describe la generalización de la ecuación de un tipo de curvas, las hipérbolas de ecuación $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$, en donde *a, b y c* son cantidades conocidas.

La imagen aparece nuevamente en la obra para señalar que la construcción de la curva depende del tipo de curvas que se intercepten. Esta es la heurística de construcción de curvas propuesta por Descartes y la cual explica a partir de este instrumento. En el caso anterior, la hipérbola es producida por la intersección de dos rectas. Descartes afirma:

> If the instrument used to describe the curve we substitute for the rectilinear figure CNK this hyperbola or some ther curve of the fist class lying in the plane $CNKL$, the

[80] Dado que CB y BA son cantidades desconocidas e indeterminadas, llamaré a una y y a la otra x. Para la relación entre estas cantidades debo considerar también las cantidades conocidas que determinan la descripción de la curva.

> interseccition of this curve with the ruler GL will describe, instead of the hyperbola EC, another curve, which will be of the second class[81]. (Descartes, 1954, p. 55)

La figura del instrumento es un diagrama que permite imaginar el reemplazo de una parte de esta imagen para comprender la heurística de describir una curva por medio de la intersección de dos de menor grado. Descartes le entrega al lector una idea a desarrollar para la visualización y el análisis de curvas algebraicas, en estos casos el diagrama muestra la creatividad de la creación del autor, la imagen externaliza la complejidad de relaciones que permiten que a partir de intersecciones entre líneas y curvas se generen nuevas curvas.

El análisis de instrumentos permite ver cómo el proceso de construcción de razones y proporciones, y el movimiento permiten construir elementos más complejos. La heurística de construcción de curvas a partir de intersecciones necesita imaginar o realizar un diagrama, posibilitar una imagen que permita comprender el movimiento de las relaciones proporcionales.

El diagrama es estático, pero representa determinados movimientos que se describen a partir de proporciones. En el estudio del diagrama se pasa de lo estático a los dinámico, para terminar en una representación de la curva que es nuevamente estática, la expresión analítica que describe el movimiento.

2.6.4 Solución de Ecuaciones

Después de representar el problema geométrico por medio de un diagrama y de construir una expresión simbólica en contexto geométrico que contiene las relaciones que permiten solucionar el problema, la solución depende de la posibilidad de encontrar la raíz

[81] Si en el instrumento utilizado para describir la curva sustituimos la figura rectilínea CNK por esta hipérbola o alguna otra curva de la primera clase situada en el plano $CNKL$, la intersección de esta curva con la regla GL describirá, en lugar de la hipérbola EC, otra. curva, que será de segunda clase.

de esa ecuación. En la figura 14, se ejemplifica el tipo de diagrama que se propone para solucionar ecuaciones, el cual generaliza un procedimiento para determinar el segmento solución. Veamos el caso para la ecuación $z^2 = az + bb$[82]

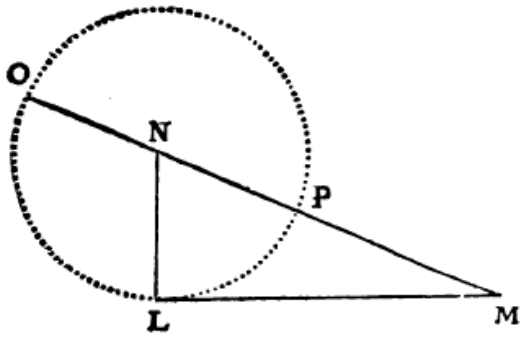
ECUACIONES DE LA FORMA $z^2 = az + bb$	TEXTO
	I construct a right triangle NLM, with one side LM, equal to b, the square root of the known quantity b^2, and the other side, LN equal to $\frac{1}{2}a$, that is, to half the other known quantity which was multiplied by z, which I supposed to be the unknown line. Then prolonging MN the hypotenuse of this triangle, to O, so that NO is equal to NL, the whole line OM is the required line z, This is expressed in the following way. $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$[83] (Descartes, 1954, p.13)

Figura 17. Solución de la ecuación $z^2 = az + bb$. (Descartes, 1954, p.13)

Los diagramas para encontrar el segmento que representa la solución de una ecuación, al igual que los diagramas para las operaciones develan la representación de un proceso algorítmico y proporcionan la red de conceptos y relaciones que permite

[82] El igual era notado por Descartes con el símbolo α.

[83] Construyo un triángulo rectángulo NLM, con lado LM, igual a b, la raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2, y el otro lado, LN igual a $1/2\ a$, es decir, a la mitad de la otra cantidad conocida que fue multiplicado por z, que supuse es la línea desconocida. Luego prolongando MN la hipotenusa de este triángulo, a O, de modo que NO sea igual a NL, la línea OM es la línea requerida z, Esto se expresa de la siguiente manera $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

generalizar el procedimiento en una ecuación que describe el segmento solución a partir de las relaciones conocidas.

Comprender la propuesta que hace Descartes en el texto implica analizar, experimentar y razonar a través del contenido de las imágenes. Sin embargo, existe una diferencia marcada entre ellas; en el caso de las construcciones de las raíces de ecuaciones y en la construcción de operaciones, el diagrama generaliza un procedimiento, el cual después de analizado será siempre el mismo. No es igual para los diagramas que se encuentran en la resolución de problemas y en los instrumentos, en estos, por su carácter instrumental se ve creación e imaginación por parte del resolutor.

En general, los diagramas que se encuentran en *Geometría* mantienen varios de los usos expuestos en el marco de referencia, los cuales están asociados a momentos concretos del método. El plantear el problema y suponer una solución, hace uso del diagrama como imaginación creadora; es allí donde se concreta el hacer de la práctica que hacen posible pensar en las relaciones que permiten mantener lo conocido y lo desconocido dentro de una misma operatividad. El otro diagrama que aparece se refiere a la solución de las ecuaciones; en este caso, es un algoritmo: una red de relaciones que permiten concretar la solución de cualquier ecuación de ese tipo. En ese sentido, un solo diagrama sirve para representar el segmento que corresponde a la solución.

3. Segunda Versión en latín de la *Geómetríe*

La primera edición en latín de la *Geometría* fue editada por van Schooten Junior (1605-1660) en 1649 como un documento aparte del *Discurso del método,* la cual incluyó *Notae breves*[84], de Florimond de Beaune (1601-1652), y los *Commentarii*[85] escritos por el propio van Schooten.

La segunda edición - que se usa en este análisis - contiene los documentos anteriores con algunos cambios y otros escritos que fueron el producto de las reflexiones en la Universidad de Leiden de algunos de los estudiantes de van Schooten o por el mismo. En el primer volumen adicionó a sus comentarios dos apéndices: *Cubicarum Aequationum Resolutione* y el tratado; *In quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis* & *Generalis Regula de extrahendis quibuseunque Radicibus Binomiis*; y dos nuevos documentos que contienen cartas con dos de sus mejores estudiantes: Johannes Hudde (1628-1704) y Hendrick van Heuraet (1634-1660): *Epistolae duae, quarum altera de Aequationum Reductione, altera de Maximis & Minimis agit* (Hudde, 1659) y *Epistola, de Curvarum Linearum in Rectas transmutatione* (Heuraet, 1659).

El segundo volumen de la *Geometría* editado por van Schooten fue publicado en 1661 y contiene cuatro documentos: *Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesianae Geometriae Methodum* (van Schooten, 1661) sobre el método de resolución de problemas y la Mathesis Universalis. El segundo, *Duo tractatus posthumi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus Aequationum* (De Beaune, 1661), es un estudio algebraico que complementa las técnicas del libro anterior. El tercero, *Elementis Curvarum*

[84] Notas breves fue elaborado en 1638 en francés.
[85] Comentarios.

Linearum fue escrito por Johan de Witt (1625-1672) en dos tomos, y contiene ilustraciones de van Schooten. El último documento, *Tractatus de concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico* (van Schooten, 1661), incluye la solución de varios problemas geométricos.

Este libro hizo parte de la estrategia comunicacional para dar a conocer las ideas de Descartes, en especial de van Schooten. Fue usado en algunos cursos privados dictados por el traductor a algunos de sus alumnos más talentosos y como tema de discusión entre académicos y artesanos. (Dopper, 2014, p. 17-60). Es decir, aunque la discusión y el estudio de las ideas cartesianas se dio al interior de la Universidad, no fue algo oficial, no hizo parte de ningún currículo ni programa de enseñanza. Sin embargo, influyó en el rumbo que toman las matemáticas con el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Como escribe Maanen (2003): *this edition served as the basic textbook for the generation that, in the last quarter of the century, took the lead in introducing differential and integral calculus*[86]. (p. 47)

La relación entre Descartes y van Schooten fue estrecha desde el momento en que se conocieron alrededor de 1630, y se mantuvo hasta la muerte de Descartes en 1650. Parte de los comentarios realizados por van Schooten a las ediciones en latín de *Geometría* fueron discutidos con Descartes.[87] También estuvieron en comunicación para la edición de las versiones en francés y latín. Van Schooten fue quien realizó las ilustraciones del primer texto. Por su familiaridad y gusto con la obra se encargó de preparar y publicar la segunda edición. Estas ediciones de la *Geometría* y su enseñanza en los cursos en la Universidad de

[86] esta edición sirvió como libro de texto básico para la generación que, en el último cuarto de siglo, tomó la iniciativa en la introducción del cálculo diferencial e integral.
[87] Estudios sobre las relaciones de Descartes con los autores de la segunda edición y en especial con van Schotten se puede encontrar en (Dopper, 2014; Maronne, 2007).

Leiden convertirían a van Schooten en la autoridad de mayor reconocimiento en el pensamiento cartesiano en Europa:

> *The works of van Schooten found their way to libraries of scholars and universities all over Europe. In England, the young Isaac Newton (1642–1727) was introduced to the* Géométrie *of Descartes through the translation and commentaries by Van Schooten. He carefully read the second edition of the Geometria during the summer and autumn of 1664 and he made detailed notes on the work. In addition, he studied Van Schooten's edition of Viète's collected works, and he wrote extensive notes on Book V of Van Schooten's Exercitationum Mathematicarum libri quinque.*[88]
>
> (Dopper, 2014, p. 80)

Para ese momento el pensamiento que circulaba en Cambridge era el empirismo baconiano y la filosofía cartesiana. La llegada de la tradición con el Rey Carlos III, llevó a Newton a estudiar a profundidad los trabajos de Aristóteles y, por recomendación de Isaac Barrow, la geometría cartesiana, la óptica de Kepler y la aritmética de Wallis (Chikara, 2003; Newton, 1993).

Leibniz (1646-1716) también leyó esta edición de la *Geometría* y se familiarizó con el cartesianismo por su relación con su mentor Cristian Huygens (1629-1695), uno de los seguidores de las ideas de Descartes. También tuvo relación con Hudde y estudió el método de máximos y mínimos publicado en 1659 (Bardi, 2006).

[88] Las obras de van Schooten llegaron a bibliotecas de académicos y universidades de toda Europa. En Inglaterra, el joven Isaac Newton (1642-1727) conoció la Géométrie de Descartes a través de la traducción y los comentarios de van Schooten. Leyó con atención la segunda edición de Geometría durante el verano y otoño de 1664 y tomó notas detalladas sobre la obra. Además, estudió la edición de van Schooten de las obras completas de Viète y escribió extensas notas sobre el Libro V del *Exercitationum Mathematicarum libri quinque* de Schooten.

Van Schooten fue profesor de matemáticas, ocupó una plaza en la Universidad de Leiden desde 1649 en la formación de ingenieros y militares reemplazando a su padre. Para su examen de ingreso al centro universitario, usó las notas que había obtenido en sus visitas a Descartes. Su primera publicación estuvo relacionada con el uso de instrumentos para el trazado de curvas, aspecto que revisó y del cual se interesó realizando las ilustraciones de la primera versión de la *Geometría.* Para la publicación de la segunda edición, Descartes y van Schooten intercambiaron cartas en las que discutieron la solución del problema de Pappus; en los comentarios, se dedica una extensa explicación a las particularidades de la solución. La segunda edición en latín presenta los resultados de varias de las discusiones y avances que produjo el estudio de la obra de Descartes.

La obra de van Schooten que retomó los escritos de su reflexión matemática fue *Exercitationes mathematicae libri quinque* (1957). Este texto se compone de cinco documentos, un texto de aritmética y geometría básica, *Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum Centuria;* el segundo escrito fue *Constructio problematium simplicium geometricorum*, en donde estudió la construcción de problemas geométricos y de agrimensura a partir de la práctica euclidiana. El siguiente texto es una reconstrucción de *De Locis Planis* de Apolonio, tratado que escribió van Schooten en 1646. El cuarto documento fue una reimpresión del escrito de 1646 sobre el trazado de curvas a partir de instrumentos, *Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptio.* Por último, el libro V *Sectiones miscellaneas triginta,* contiene problemas de álgebra geométrica y de combinatoria.

En este capítulo se presenta el análisis de la práctica cartesiana focalizado en los diagramas que se usaron en los documentos que componen la segunda edición en latín de la *Geometría*. Es decir, el diagrama es el dispositivo revelador de los cambios en la práctica

cartesiana. Los argumentos que acompañan los diagramas se presentan sin modificar la forma del relato, se mantienen las frases, la sintaxis y semántica del argumento. Para ello, se retoman las categorías de análisis de los diagramas que se usaron en el capítulo dos para analizar la *Geometría* de 1637 y se adiciona un nuevo uso de los diagramas, el análisis de curvas.

Este nuevo uso vincula la argumentación a las propiedades de las curvas y no a su construcción, la curva aparece *de hecho*; es decir, aparece como parte de lo dado, como uno de los supuestos del diagrama. Como se verá, en el proceso de análisis se establecen definiciones geométricas no cinemáticas de la curva o de sus propiedades.

3.1 Notae breves por Florimondi de Beaune

Este es el primer escrito aparece después de la traducción al latín de *Geometría*. Su contenido está organizado por comentarios a puntos específicos de la obra original. Para el análisis se usaron tres de las categorías estudiadas en el capítulo 2 para la obra de 1637.

En el prefacio del documento, Beaune destaca la importancia del método de resolución de problemas que presentó Descartes en su *Geometría*; al igual que la relevancia del uso de simbología como medio para expresar relaciones geométricas. En especial se llama la atención sobre la importancia de representar un segmento a partir de la potenciación, $b, b^2, b^3, \ldots$, ya que ello permite resolver geométricamente ecuaciones de grado mayor a tres.

El primer comentario de Beaune es sobre la importancia del método de análisis en la resolución de problemas. Se apoya en la situación que aparece en la figura 18[89] que para él muestra la importancia de conservar la proporción bajo condiciones específicas.

[89] Dado un triángulo rectángulo *ADE*, cuyos ángulos *DAE* son rectos, se cumple que la suma de los cuadrados de los lados es igual al cuadrado de la base.

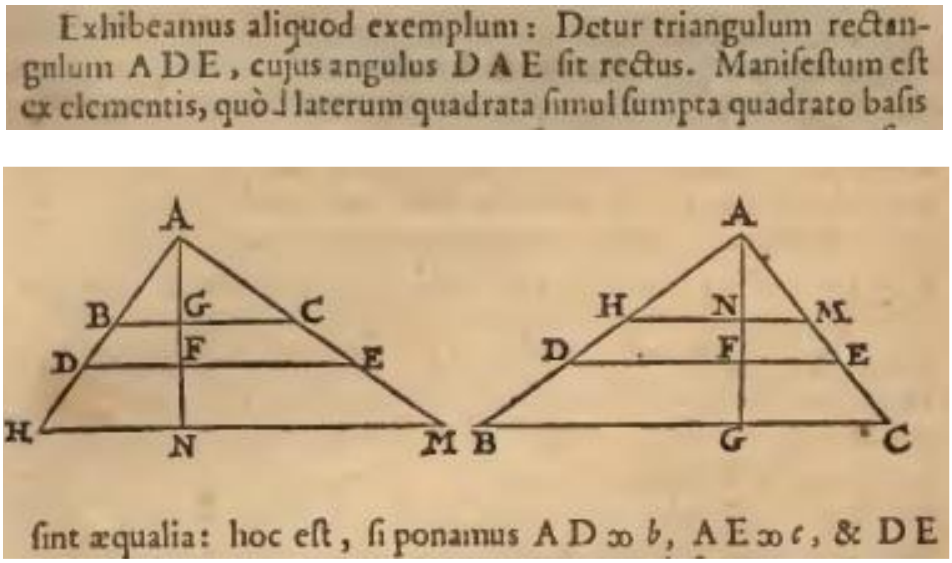


Figura 18. Problema y diagrama del problema sobre la importancia del método. (Beaune, 1659, p.110)

Aquí se incorpora el teorema de Pitágoras haciendo uso de simbología para las cantidades de magnitud de los triángulos propuestos. La argumentación es la siguiente: si suponemos que $AD = b$, $AE = c$, $DE = d$, entonces $b^2 + c^2$ es igual a d^2, lo que debemos mostrar es que esta propiedad se cumple en cualquier extensión del plano. Para ello, Beaune supuso que existe una línea de mayor o menor magnitud y que estas son paralelas a la base *DE*; ese supuesto extiende la relación entre los lados. Luego, formula la tercera proporcional para las siguientes triplas: BC, DE, HM; BC, AE, NM; BC, DA, HN y define las razones a partir de los triángulos semejantes AEF y BCA para concluir que la propiedad también se cumple en los otros triángulos rectángulos.

El diagrama es usado aquí como en la geometría euclídea, para mostrar una red de conceptos que permite deducir la propiedad de los triángulos rectángulos; los objetos en el sistema de representación simbólico heredan las propiedades del diagrama. Beaune

considera la universalidad del método a partir de este ejemplo, porque permite ver que el principio analítico, la ecuación, se verifica para cualquier triángulo rectángulo.

3.1.2 Solución de Ecuaciones

Beaune se refiere a la deducción geométrica de las ecuaciones de segundo grado que hizo Descartes para mostrar la solución de la ecuación $y^2 = -ay + b^2$. Para ello utiliza el mismo diagrama que aparece en la obra cartesiana con la siguiente argumentación:

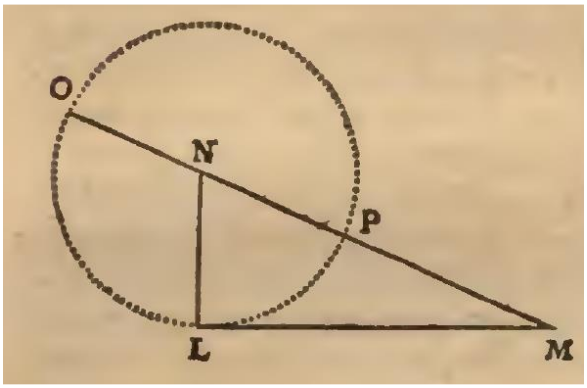


Figura 19. Solución de ecuaciones de segundo grado. (Beaune, 1659, p.112)

Siempre que LM sea tangente al círculo LOP se toma el rectángulo OPM y el cuadrado PM como iguales al rectángulo OMP. Ya que OMP es igual a cuadrado LM, entonces el cuadrado PM es igual al cuadrado LM menos el rectángulo OPM: en consecuencia $y^2 = -ay + bb$ y, como lo afirma Descartes, su raíz es: $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, cuando $NM = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$; $NP = \frac{1}{2}a$ y $MP = y$.

Beaune busca argumentos en la geometría euclídea para mostrar que la construcción que realiza Descartes es válida, luego acepta el principio analítico propuesto en la obra original y la forma analítica de la raíz positiva de la ecuación.

Debe observarse que en este caso como para la ecuación $y^2 = ay - b^2$, las argumentaciones se hicieron sobre los mismos diagramas que se presentaron en la edición

de 1637, estas imágenes permiten visualizar las relaciones geométricas que permiten verificar geométricamente la deducción analítica que presentó Descartes en *Geometría* y hacer el cambio de representación entre las relaciones geométricas y el proceso de simbolización a través de la escritura algebraica.

3.1.3 Solución de Problemas

Beaune comentó la solución de Descartes al problema de Pappus al considerar un ejemplo de su solución utilizando algunos segmentos propuestos en el diagrama auxiliar -figura 12- de la edición de 1637.

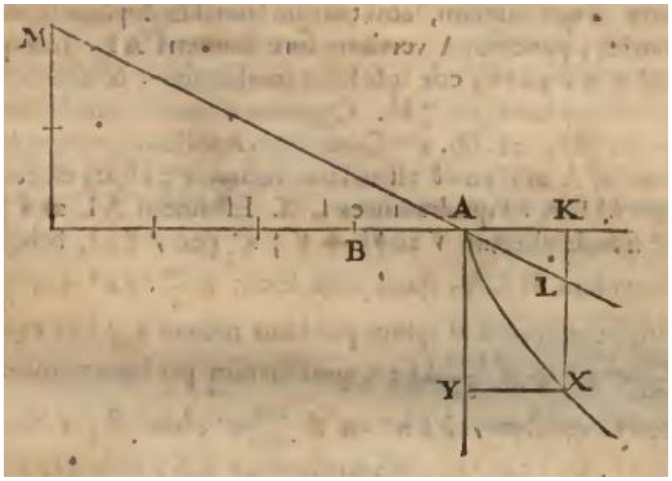


Figura 20. Ejemplo de solución al problema de Pappus. (Beaune, 1659, p.119)

El caso que presenta es el de la ecuación $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, cuando $m = 0$. En la construcción se toman la recta AY y la curva AX cuyo vértice es el punto A. $AB = b$, $AY = y$, y a AK es igual a la paralela $XY = x$. Ya que $b + y$ es a y como y es a x, se tiene que: $y^2 = bx + yx$; entonces, $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + bx}$ que es una hipérbola. Como $AK = x$, la línea $KL = \frac{1}{2}x$ entonces KL supone igual a $\frac{n}{z}x$ en la ecuación $y = m - \frac{n}{z}x +$

$\sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$ que es la ecuación general presentada por Descartes. Dado que el ángulo AKL es recto, el cuadrado de AL es igual al cuadrado AK más KL.

En la parte sintética de la solución Beaune hace uso del diagrama auxiliar propuesto por Descartes. En su argumentación muestra que los puntos de la curva cumplen con la condición de la relación de la curva. Para llegar a ello, Beaune tuvo que experimentar con la imagen y reconstruir las condiciones en la relación entre el diagrama y la expresión algebraica en contexto geométrico que permiten tomar un punto de la curva para representar la relación geométrica para cada punto de la relación.

En la solución de Descartes al problema de Pappus el proceso sintético se basa en el diagrama auxiliar, y se especifican las condiciones de la expresión simbólica para las cuales un tipo de cónica existe. En el caso de la parábola, la condición de que $\frac{n}{z}x$ no se encuentre en la ecuación fue hecha por Descartes sin aportar la prueba; eso es lo que muestra Beaune. Para ello escribe la expresión $yy = -2dy + by$, cuya raíz es: $y = -d + \sqrt{d^2 + bx}$. Luego asume, con base en la figura 21, que $AB = x$; estando en relación continua con $BC = y$; $BK = d$, NK paralela a AB, y con KI igual a AB. De esta manera debe mostrar que $\sqrt{d^2 + bx}$ es una parábola porque no se tiene el término en x^2. El punto N es el vértice, la línea $IN = \frac{d^2}{b}$, para este ejemplo. Por lo tanto, el *latus rectus* es $\frac{oz}{a}$, que es lo mismo que b, y KC es la ordenada del diámetro, lo cual está dado por las deducciones anteriores de Descartes.

Para realizar la prueba, el autor se refiere al uso de las proposiciones 11 del libro I de *Cónicas* de Apolonio,[90] de tal forma que, $NK = \frac{d^2}{b} + x$; por ejemplo, $dd + bx$ es igual al cuadrado de la línea KC. De esta manera, $KC = y + d$, su cuadrado es $yy + 2dy + dd$.

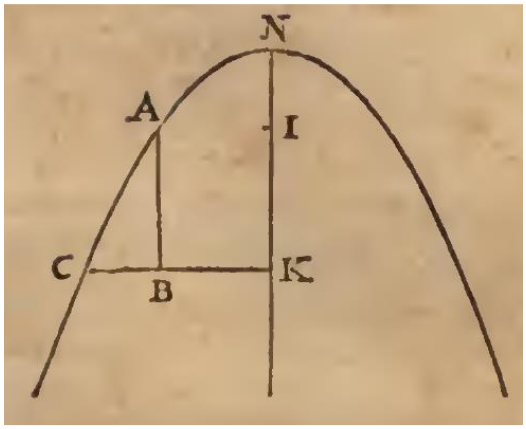


Figura 21. Solución del problema de Pappus por una parábola. (Beaune, 1659, p.121)

El uso del diagrama es ilustrativo de los segmentos con que se construyen las soluciones, en este caso las parábolas. La imagen visualiza una ejemplificación de la solución, la cual se generaliza a partir del cumplimiento de la propiedad para esta curva. El principio sintético se encuentra en los libros de Apolonio. En estos dos casos, los diagramas se usan para anticipar las relaciones que se dan entre las líneas que permiten construir los puntos que generan la curva y cumplen la condición de pertenecer a la parábola.

[90] If a cone cut by a plane through its axis, and also cut by another plane cutting the base of the cone in a straight line perpendicular to the base of the axial triangle, and if further the diameter of the section is parallel to one side of the axial triangle, then any straight line which is drawn from the section of the cone to its diameter parallel to the common section of the cutting plane and of the cone`s base, will equal in square the rectangle contained by the straight line cut off by it on the diameter beginning from the section's vertex and by another straight line which has the ratio to the straight line between the angle of the cone and the vertex of the section that the square on the base of the axial triangle has to the rectangle contained by the remaining two sides of the triangle. And let such a section be called a parabola. (Apolonio, 1952, p.615)

3.1.4 ***Instrumentos y Construcción de Curvas***

Beaune realiza en el comentario V una construcción para las ecuaciones de segundo grado. Muestra que la expresión simbólica de esta expresión puede ser descrita como el producto de dos expresiones lineales. De esa manera, presenta el tipo de ecuaciones que se pueden construir. El comentario se refiere al aparte de la *Geometría* en que Descartes anuncia que la solución del problema de Pappus para cuatro líneas es una de las cónicas. Para mostrar las ecuaciones de segundo grado, Beaune elabora la siguiente construcción:

Dada la posición de la línea BH y un punto A en ella, después de tomar la línea AX por x, dibuja la línea XY, necesariamente y, con AX se define un ángulo cualquiera, se pueden trazar un número indefinido de rectas paralelas a BH como las rectas DK, LP, QT, de tal manera que DK se encuentra por debajo de BH, LP por arriba de BH, entre el punto X y Y; QT más allá del punto Y.

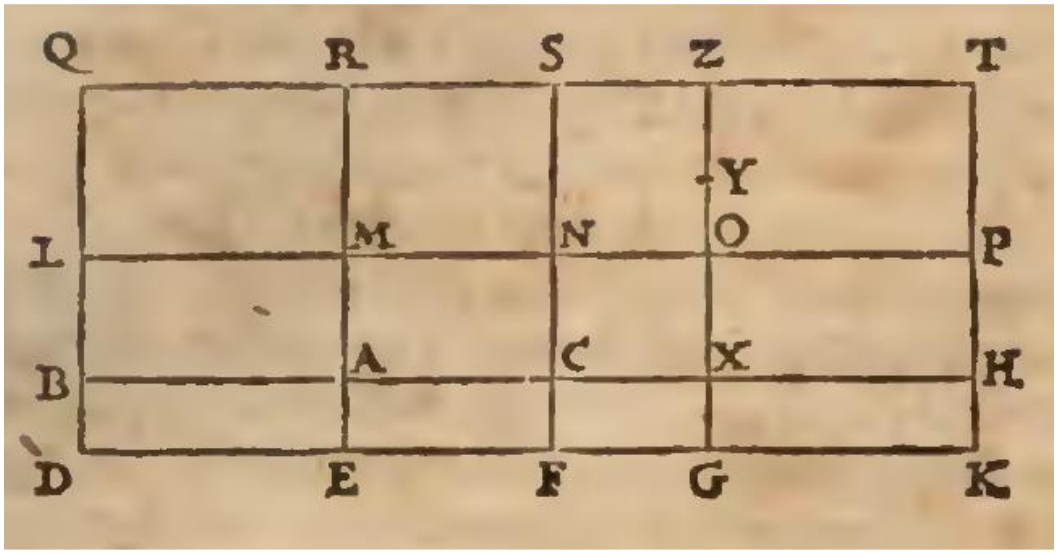


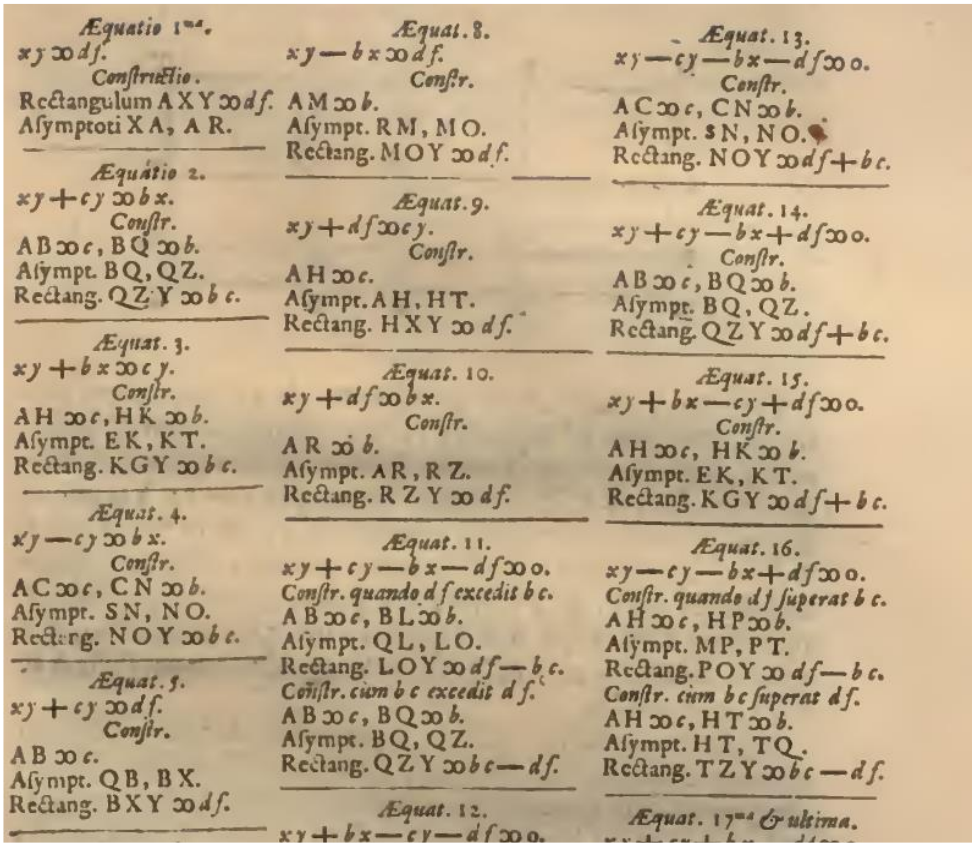
Figura 22. Estrategia para mostrar ecuaciones de segundo grado. (Beaune, 1759, p.128)

De manera análoga, se trazan las líneas QD, RAE, SF, TK paralelas a XY y a ZG, tales que QD corta la línea XA; y la línea SF está entre los puntos A y X, así como la línea TK, lo mismo que AX frente a X. Este gráfico es consecuencia de la proposición 4 del libro dos de las *Cónicas* de Apolonio,[91] en donde se construye una hipérbola a partir de un punto y sus asíntotas. Por lo tanto, en el diagrama se puede construir una hipérbola con un par de rectas que se interceptan, con el punto Y en el interior de la región delimitada por ellas. En consecuencia, queda por demostrar que las asíntotas y el rectángulo de cada ecuación están debidamente construidas.

Se supone que la hipérbola pasa por el punto Y, con asíntotas *DQ* y *DG*; y que el rectángulo determinado por las líneas DG, GY es igual al rectángulo $df + bc$ cuando se tiene que $AX = x, XY = y, AB = c, BD\ o\ XG = b$. Entonces $BX = x + c, y$ GY $= y + b$; multiplicando uno y otro se obtiene, $bc + bx + cy + xy$; por las líneas del rectángulo. Como $DG \times GY$ es igual a $df + bc$, entonces los productos conocidos se toman por bc, dado que $xy + cy + bx = df$. A partir de estas relaciones simbólicas de la propiedad geométrica, se indican las rectas que permiten la construcción.

A continuación, Beaune define diferentes tipos de ecuaciones que se pueden construir usando las relaciones de los segmentos del diagrama de la figura 22.

[91] Problem: given two straight lines containing an angle and a point witch in the angle, to describe through the point the section of a cone called hyperbola so that the given straight lines are its asymptotes. (Apolonio, 1952, p.685)



Æquatio 1ma.
xy ∞ df.
Conſtructio.
Rectangulum AXY ∞ df.
Aſymptoti XA, AR.

Æquatio 2.
xy + cy ∞ bx.
Conſtr.
AB ∞ c, BQ ∞ b.
Aſympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY ∞ bc.

Æquat. 3.
xy + bx ∞ cy.
Conſtr.
AH ∞ c, HK ∞ b.
Aſympt. EK, KT.
Rectang. KGY ∞ bc.

Æquat. 4.
xy − cy ∞ bx.
Conſtr.
AC ∞ c, CN ∞ b.
Aſympt. SN, NO.
Rectang. NOY ∞ bc.

Æquat. 5.
xy + cy ∞ df.
Conſtr.
AB ∞ c.
Aſympt. QB, BX.
Rectang. BXY ∞ df.

Æquat. 8.
xy − bx ∞ df.
Conſtr.
AM ∞ b.
Aſympt. RM, MO.
Rectang. MOY ∞ df.

Æquat. 9.
xy + df ∞ cy.
Conſtr.
AH ∞ c.
Aſympt. AH, HT.
Rectang. HXY ∞ df.

Æquat. 10.
xy + df ∞ bx.
Conſtr.
AR ∞ b.
Aſympt. AR, RZ.
Rectang. RZY ∞ df.

Æquat. 11.
xy + cy − bx − df ∞ 0.
Conſtr. quando df excedit bc.
AB ∞ c, BL ∞ b.
Aſympt. QL, LO.
Rectang. LOY ∞ df − bc.
Conſtr. cum bc excedit df.
AB ∞ c, BQ ∞ b.
Aſympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY ∞ bc − df.

Æquat. 12.
xy + bx − cy − df ∞ 0.

Æquat. 13.
xy − cy − bx − df ∞ 0.
Conſtr.
AC ∞ c, CN ∞ b.
Aſympt. SN, NO.
Rectang. NOY ∞ df + bc.

Æquat. 14.
xy + cy − bx + df ∞ 0.
Conſtr.
AB ∞ c, BQ ∞ b.
Aſympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY ∞ df + bc.

Æquat. 15.
xy + bx − cy + df ∞ 0.
Conſtr.
AH ∞ c, HK ∞ b.
Aſympt. EK, KT.
Rectang. KGY ∞ df + bc.

Æquat. 16.
xy − cy − bx + df ∞ 0.
Conſtr. quando df ſuperat bc.
AH ∞ c, HP ∞ b.
Aſympt. MP, PT.
Rectang. POY ∞ df − bc.
Conſtr. cum bc ſuperat df.
AH ∞ c, HT ∞ b.
Aſympt. HT, TQ.
Rectang. TZY ∞ bc − df.

Æquat. 17ma & ultima.

Figura 23. Ecuaciones construidas a partir de la figura 22. (Beaune, 1659, p. 129)

La elaboración del diagrama de la figura 22 implica un desprendimiento de la construcción por puntos para las curvas de segundo grado, para su representación es suficiente como se describe en las ecuaciones de la figura 23 conocer la posición de algunas rectas y las asíntotas. La representación de la propiedad geométrica a partir de símbolos se impone en cuanto a las relaciones que deben tener las líneas para la construcción de la curva. Sin embargo, el análisis que se debe hacer implica la deducción y experimentación, características estas de los diagramas que se explicaron antes en la sección 2.2. de esta tesis. En el diagrama se infiere la generalización de la propiedad de líneas paralelas a las

asíntotas planteada por Apolonio en las proposiciones 12 y 13,[92] del libro II de *Cónicas,* cuando el ángulo que conforman las asíntotas es recto.

La simbología en contexto geométrico y la propiedad de las cónicas quedan relacionadas por el principio geométrico que caracteriza la cónica, el cual es representable a partir de rectángulos. En este caso, el autor asume que el producto de dos expresiones algebraicas de primer grado es una ecuación de segundo grado y es esa la situación que representa. El diagrama es, así, un mediador bidireccional entre lo simbólico y lo geométrico, lo cual aparece por primera vez en el texto. Mientras que en la *Geometría* la relación es unidireccional, de lo geométrico a lo simbólico, en estos casos el diagrama cumple la función de mediador en la unidireccionalidad.

3.2 Los Comentarios de van Schooten

Los comentarios de van Schooten a la *Geometría* de 1637 se organizaron de acuerdo con cada uno de los tres libros del texto original por medio de letras, A, B, ..., etc. Al inicio de cada uno, se cita el párrafo de la obra que se va a comentar; de tal manera que, para hacer referencia a un comentario, se usan la letra y el libro de la obra original que se está comentando. En esta tesis, el aparte de la *Geometría* que se comenta se escribe en paréntesis cuadrado […], y se usa la versión de la traducción al inglés de Smith (Descartes, 1954).

3.2.1 Solución de Problemas

En este documento el uso de los diagramas en la solución de problemas se organiza en dos apartados: el primero presenta los comentarios a la solución del problema de Pappus y el segundo recopila algunos otros problemas presentados por el autor.

[92] Aunque el autor nombra únicamente la proposición 12, también aplica la proposición 13.

3.2.2.1 La Solución del Problema de Pappus.

Parte del estudio del texto de 1637 giró alrededor del debate que generó entre los matemáticos de la época la solución presentada por Descartes al problema de Pappus. Las observaciones fundamentalmente fueron sobre: las diferentes posiciones que puede tomar el punto C y la posición que Descartes le dio a las cónicas (hipérbola y círculo) en los diagramas.

Según Dooper (2014) en la segunda edición de *Geometría* van Schooten presentó las conclusiones de varios de los debates entre él, Roberval, Huygens y el propio Descartes. Para hacer el análisis, se sigue la ruta de comentarios que sugiere Dooper (2014, p.147).

El comentario BB del libro II hace referencia al diagrama de la solución que se presenta en la obra original -figura 10-, (van Schooten envía a la página correspondiente de la traducción de la *Geometría*) y las implicaciones de la solución sobre los ángulos alrededor del referencial EAR, RAG, GAD y DAE. Específicamente, el comentario está sobre el siguiente apartado:[93]

> [*If y is zero or less that nothing in this equation, the point C being supposed to lie within the angle DAG, then C must be supposed to lie whithin one of the angles DAE, EAR or RAG, and the signs must be changed to produce this result. If fot each of these four positions y is equal to zero, then the problem admits of no solution in the case proposed*.] (Descartes, 1954, p. 63)

[93] Si y es cero o menos que nada en esta ecuación, se supone que el punto C está dentro del ángulo DAG, entonces se debe suponer que C está dentro de uno de los ángulos DAE, EAR o RAG, y los signos deben cambiarse para producir este resultado. Si para cada una de estas cuatro posiciones y es igual a cero, entonces el problema no admite solución en el caso propuesto

En el comentario, se analizan los signos de las cuatro ecuaciones que representan las diferentes posiciones que pueden asumir las rectas EG y DR, y la posibilidad de existencia de solución para $y = 0$.

El comentario hace referencia al diagrama para recordar que la solución depende de la posición de las rectas dadas, del punto C y del producto de las rectas auxiliares $AB \times CF$ y $CD \times CH$. Se indican los signos de las ecuaciones que presenta la solución de Descartes anunciando que, para algunas posiciones de *C*, se obtiene una hipérbola o un círculo. Van Schooten no presentó ni los cálculos ni un nuevo diagrama para justificar las soluciones de la hipérbola y del círculo (Dopper, 2014).

En este mismo comentario, planteó un problema[94] como una explicación al razonamiento que hace Descartes en la solución del problema de Pappus con cuatro rectas.

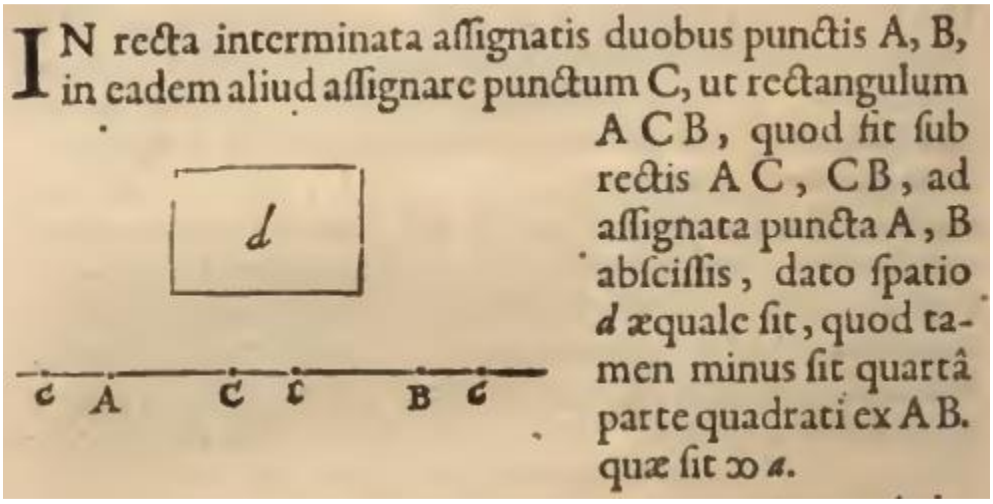


Figura 24. Problema de la explicación de signos en las ecuaciones. (Schooten, 1659, p. 180)

[94] El problema fue planteado por Huygens en la carta del 6 de diciembre de 1656. En una recta indeterminada, se asignan dos puntos, A y B, y un punto C. El rectángulo que se compone de los segmentos AC, CB con los puntos A y B dados es igual al espacio d, que es menor a la cuarta parte de $AB = a$.

El problema aborda la relación entre los signos de las ecuaciones y las relaciones proporcionales entre los segmentos determinados en la situación relativa del punto *C* respecto a los puntos *A* y *B*. Se explicita una parte de la solución del razonamiento del problema de Pappus, a través de un problema en donde el razonamiento es análogo. La situación tiene una función explicativa para la comprensión de la solución que plantea Descartes.

La solución del problema planteado por van Schooten le permitió identificar diferentes ecuaciones según la posición de C, la interpretación de d como un área invariante de la posición de C modela la condición del problema de Pappus respecto al punto solución C. Se supone que C está fuera de AB a la izquierda de A y que $CA = x$, entonces $xx + ax = d$. Al Suponer que C está entre A y B, la ecuación es $ax - xx = d$; y finalmente, si se supone que C está fuera AB a la derecha de B, entonces, la ecuación es $xx - ax = d$.

Este problema y su solución reconocen dos momentos significativos en el procedimiento cartesiano; el primero, comprender la emergencia del uso de magnitudes orientadas que conservan un valor específico independiente del cambio de orientación; una nueva forma de pensar sobre la orientación de una magnitud respecto a un punto o recta de referencia, las primeras ideas de lo que luego será el concepto de vector. El otro, la adopción de la convención simbólica de alternancia de signos para tener en cuenta todos los casos posibles en que se relacionan las magnitudes, proceso que también se presenta en la solución del problema de Pappus.

En el problema que plantea van Schooten se muestra la idea de ecuación general a partir del uso de las ecuaciones con cantidades numéricas. Luego realiza el producto de las tres ecuaciones que solucionan el problema encontrando una ecuación de sexto grado con

cuatro raíces positivas. La generalidad en la convención de alternancia de signos responde al rigor cartesiano en la determinación del principio analítico, como lo hizo Descartes en la solución al problema de Pappus al calcular la ecuación general de las cónicas.

El comentario CC hace referencia a las soluciones de la ecuación $LC = \sqrt{mm + om - \frac{pxx}{m}}$, específicamente, van Schooten cita a Descartes en el apartado; [*If none of these exceptional cases occur, the point C always lie son one of the three conic sections, or on a circle…*][95] (Descartes, 1954, p. 67). Las excepciones de las que habla Descartes se refieren a las posibilidades en donde *LC* es una recta. Van Schooten discutió este pasaje con Huygens y publicó, en este comentario, cada cónica acompañada de un diagrama. Van Schooten mostró 4 casos para la parábola, 5 casos para el círculo, 5 casos para la elipse y 10 casos para la hipérbola.

En *Geometría*, Descartes planteó de manera sucinta el tratamiento de las líneas de la construcción auxiliar[96] para cada una de las cónicas; pero, no mostró las relaciones entre los puntos de cada curva y la ecuación general. Este trabajo es el que realiza van Schooten en este comentario. La conclusión a la que Descartes llegó y desde la cual parte este comentario fue:[97]

[95] Si no ocurre ninguno de estos casos excepcionales, el punto C siempre se encuentra en una de las tres secciones cónicas, o en un círculo ...

[96] Figura 22 de este documento.

[97] En particular, si el término $\frac{p}{m}x^2$ es cero, la sección cónica es una parábola; si está precedido de un signo más, es una hipérbola y, finalmente, si está precedido de un signo menos, es una elipse. Una excepción se da cuando a^2m es igual a pz^2 y el ángulo ILC es un ángulo recto, en cuyo caso obtenemos un círculo en lugar de una elipse.
Si la sección cónica es una parábola, su *latus rectum* es igual a $\frac{oz}{a}$ y su eje siempre se encuentra a lo largo de la línea IL. Para encontrar su vértice N, haga que IN sea igual a $\frac{am^2}{oz}$, de modo que el punto I esté entre L y N si m^2 es positivo y ox es positivo; y si L se encuentra entre I y N si m^2 es positivo y ox negativo. Es imposible que m^2 sea negativo cuando los términos están organizados como se indicó anteriormente. Finalmente, si m^2 es igual a cero, los puntos N y I deben coincidir.

> *In particular, if the term* $\frac{p}{m}x^2$ *is zero, the conic section is a parabola; if it is preceded by a plus sign, it is a hyperbola, and, finally, if it is preceded by a minus sing, it is an ellipse. An exception occurs when* a^2m *is equal to* pz^2 *y el angle* ILC *is un right angle, in which case we get a circle instead of an ellipse.*
> *If the conic section is a parabola, its latus rectum is equal to* $\frac{oz}{a}$ *and its axis always lies along the line IL. To find its vertex, N, make IN equal to* $\frac{am^2}{oz}$*, so that the point I lies between L and N if* m^2*is positive and* ox *is positive; and L lies between I and N if* m^2*is positive* ox *negative. It is impossible that* m^2*should be negative when the terms are arranged as above. Finally, it* m^2*is equal zero, the points N and I must coincide.* (Descartes, 1954, p. 68)

Van Schooten se focaliza en la construcción auxiliar de Descartes, la cual usó durante el proceso sintético de resolución de problema de Pappus para cuatro líneas. En este diagrama, se construye la sección cónica mostrando que la ecuación $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$ corresponde a la ecuación de una sección cónica, según sea el caso. El argumento sobre este diagrama implica mostrar que toda ecuación cuadrática de dos variables representa una sección cónica.

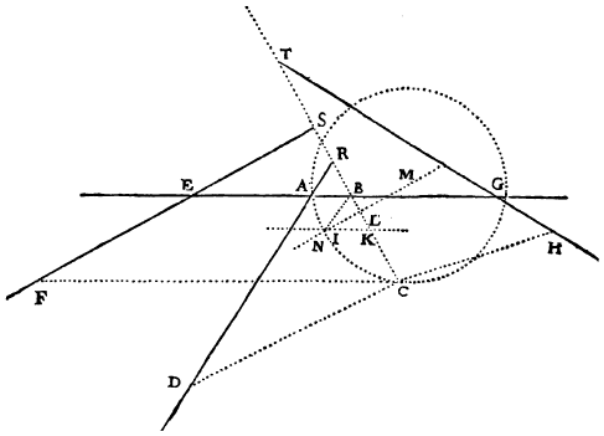


Figura 25. Construcción auxiliar del problema de Pappus de cuatro rectas. (Descartes, 1996, p. 423)

Los casos presentados para cada cónica analizan las posiciones relativas del vértice, el diámetro, el *latus rectum* y el *latus transversum*. Los diagramas especifican la posición de la curva a partir de las líneas auxiliares. Precisamente, van Schooten trabaja sobre esta última ecuación haciendo explícitas las soluciones para el cambio de signo y la nulidad de los términos. La figura muestra el primer caso para las parábolas[98].

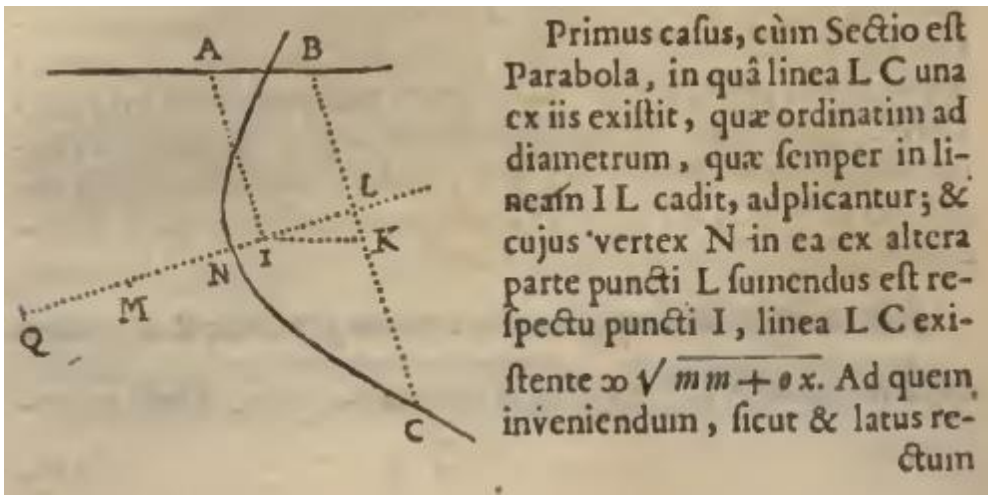


Figura 26. Diagrama caso I de la parábola. (Schooten, 1659-1661, p. 182)

[98] Primer caso: como la sección es una parábola, en la cual la línea LC existe; y las ordenadas aplicadas al diámetro siempre están en la línea IL. El vértice N está al otro lado del punto L, respecto al punto I y existe la linea LC=$\sqrt{mm + ox}$, para encontrar, el latus rectum.

En estas soluciones aparecen por primera vez los diagramas de la categoría que se denominó *de hecho*, cuya característica es que la curva aparece como un objeto ya terminado; en este caso, lo dado es una parábola. En el comentario CC, el discurso que acompaña al diagrama está relacionado con las representaciones simbólicas que se deducen de la posición de la curva, las cuales están focalizadas en la construcción auxiliar de Descartes, puntualmente sobre las rectas IL, NL, LC y las rectas AB y BC como referenciales para la construcción.

En el texto que acompaña al diagrama, puede verse que van Schooten asumió el tipo de sección cónica y las posiciones relativas expuestas en la obra original para las líneas IL, LC, y los puntos N e I. El argumento algebraico que usa para determinar la igualdad entre LC y la propiedad geométrica de la parábola se deduce de la proposición 11 del libro I de *Cónicas* de Apolonio.

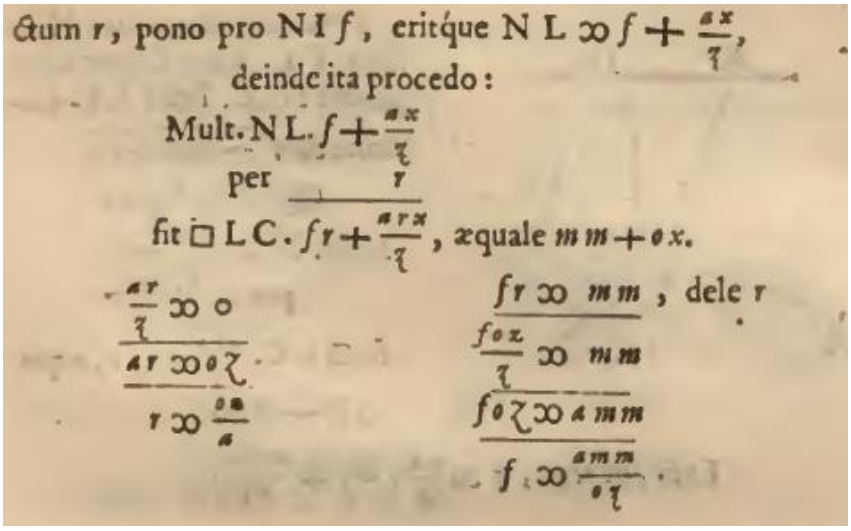


Figura 27. Procedimiento caso 1 de la parábola comentario CC. (Schooten, 1659, p. 183)

Cuando analiza la construcción auxiliar van Schooten muestra que la forma algebraica del *latus rectum* es igual a la que propuso Descartes y la relacionó para las

parábolas con *latus rectum IL*, "*in the same way I know the ratio of* KL *to* IL*, which I may call* $n:a$*, so that if* KL *is equal to* $\frac{n}{z}x$*,* IL *is equal to* $\frac{a}{z}x$[99]. (Descartes, 1954, p. 64). Un procedimiento de identificación y construcción de la parte analítica con la parte geométrica se realiza para los 24 casos propuestos en este comentario.

Van Schooten muestra las posiciones relativas de los puntos N, L, I, C y de los segmentos de recta IK, IN, LC, LM, LN para cada uno de los casos posibles, explicando las afirmaciones que Descartes hizo en *Geometría* respecto a la relación entre la ecuación que representa el problema y los segmentos de la construcción auxiliar. Las conclusiones que Descartes realiza con la ecuación solución del problema de Pappus de cuatro líneas $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$, y el diagrama auxiliar fueron explicitadas por van Schooten en este comentario.

El proceso de síntesis que planteó Descartes en el libro II de *Geometría* implica identificar las curvas de segundo grado encriptadas en el proceso analítico del problema, como afirma Álvarez (2000): "finalmente, Descartes regresa a la figura para reconocer las magnitudes geométricas involucradas en la expresión algebraica. Este es el momento que permite la construcción del lugar geométrico". (pp. 57-58)

La elaboración de van Schooten implica la comprensión de la relación entre el diagrama, la relación simbólica y las consecuencias de una representación en la otra. Todos estos diagramas son ilustrativos de las características de la curva que se toma como dada, se usan como memoria que anticipa los segmentos que intervienen en la argumentación para cada solución.

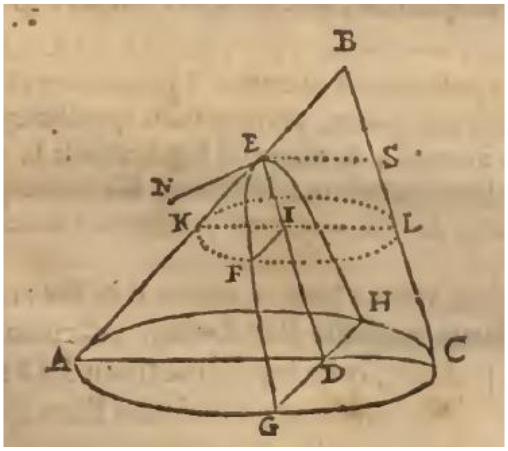
[99] De la misma manera conozco la razón de KL con IL, que puedo llamar $n:a$, de manera que si KL es igual a $\frac{n}{z}x$, IL es igual a $\frac{a}{z}x$.

El reconocimiento de las magnitudes en relación con las posibilidades de la ecuación solución es donde van Schooten localiza su trabajo. Sin embargo, la construcción del lugar geométrico no se da en este comentario. Las 24 imágenes son más ilustrativas de la posición de la curva respecto al referencial, el proceso es más algebraico. En este comentario, se asume que la solución al problema es una de las cónicas o la línea recta y, de esa manera, van Schooten encuentra la relación de la ecuación solución con el *latus rectum* en el caso de la parábola y, para la elipse y la hipérbola, el centro *latus rectum* y el *latus traversum.*

Las aclaraciones sobre la solución del problema de Pappus continuaron en el comentario CCC, [*it is thus easy to determine this parabola, according to the first problem of the first book of Apollonius*[100]] (Descartes, 1954, p. 68). Van Schooten comprendió el enfoque metodológico propuesto por Descartes: encontrar el principio analítico de las curvas que representan el problema y, luego, mostrar que cada cónica está inmersa en él. Los comentarios B, BB, CC y CCC hacen referencia a la segunda fase del método, el método sintético.

En la introducción al comentario CCC indica que realiza éste para que los lectores de *Geometría* puedan comprender la solución y las propiedades de las cónicas, incluso también para quienes no tengan acceso al libro *cónicas* de Apolonio. Van Schooten tomó la proposición 11 del libro I de *cónicas* e hizo una traducción de esta proposición en el lenguaje algebraico de la época. Para ello nombra las cantidades de magnitud con una letra minúscula y opera con ellas algebraicamente. Van Schooten realiza dos supuestos para el caso de la parábola e hizo uso del mismo diagrama que Apolonio.

[100] Por tanto, es fácil determinar esta parábola, según el primer problema del primer libro de Apolomio.



Suppoſitiones.

1. REctam lineam B A vel B C, quæ à vertice coni B ducitur ad baſis A C circumferentiam, eſſe in ſuperficie conica.
2. Sectionem K F L, baſi coni A C parallelam, eſſe circulum.

Figura 28. Diagrama usado por van Schooten de la proposición 11 del libro I de Apolonio. (Schooten, 1954, p. 207)

Los dos supuestos[101] garantizan la existencia del cono ABC y del plano que corta paralelo a la base AC del cono, y que genera el círculo KFL. Al revisar el tratamiento que hizo van Schooten para la parábola, se identifica que el papel del diagrama es el mismo que en la obra de Apolonio: permite establecer una condición de identidad para la sección que se conforma al cortar el cono y de la cual se deduce la propiedad geométrica que caracteriza a la cónica. La relación que hace van Schooten entre el discurso verbal y el diagrama mantiene la estructura de la construcción geométrica euclidiana. En este sentido, primero le da existencia a la curva como el corte de un plano en un cono.

[101] 1. La línea recta BA o BC, desde un vértice de un cono B, llevado a la base circular AC, es una superficie cónica.
2. La sección KFL paralela a la base del cono AC es un círculo

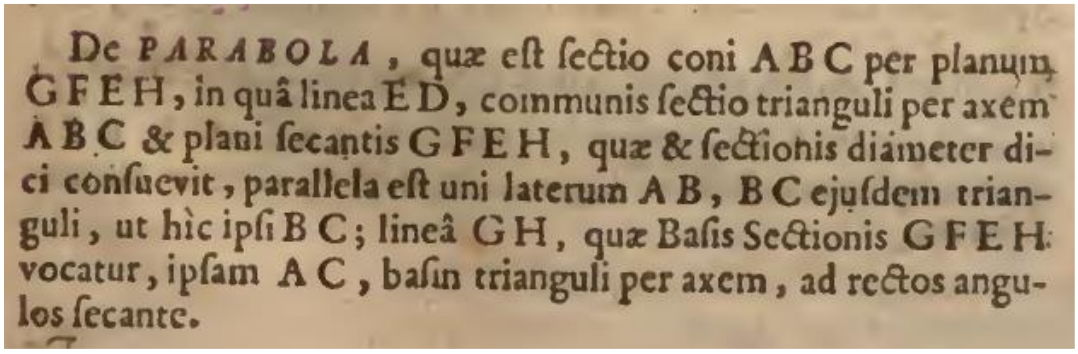

De PARABOLA, quæ eſt ſectio coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ED, communis ſectio trianguli per axem ABC & plani ſecantis GFEH, quæ & ſectionis diameter dici conſuevit, parallela eſt uni laterum AB, BC ejuſdem trianguli, ut hìc ipſi BC; lineâ GH, quæ Baſis Sectionis GFEH vocatur, ipſam AC, baſin trianguli per axem, ad rectos angulos ſecante.

Figura 29. Definición de parábola[102]*. (Schooten, 1659, p. 207)*

La sintaxis de lo simbólico en contexto geométrico usó la herramienta euclídea de las razones y las proporciones para operar y determinar una nueva expresión simbólica para las características geométricas de cada cónica. En el caso de la parábola, van Schooten tomó seis segmentos como dados, asumió la ruptura de la homogeneidad, operó con las cantidades de magnitud y usó la simbología para expresar la propiedad geométrica de la parábola. De esta manera, la cónica geométrica de Apolonio quedó representada en la nueva estructura de las curvas geométricas que luego harán parte de las curvas algebraicas. Una nueva manera de formular las cónicas aparece, la simbólica, en donde las curvas quedan clasificadas por el grado de su expresión; todas ellas son curvas de segundo grado.

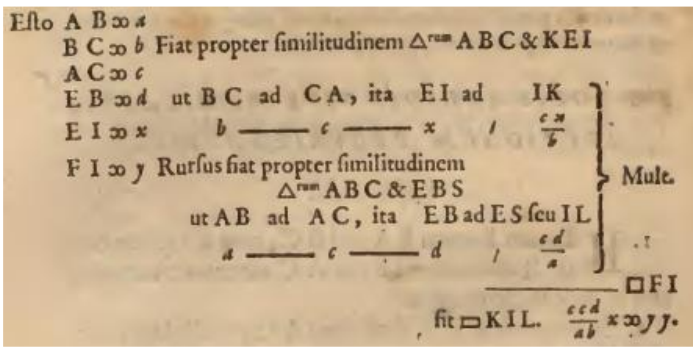

Eſto A B ∞ a
B C ∞ b Fiat propter ſimilitudinem △rum ABC & KEI
A C ∞ c
E B ∞ d ut B C ad C A, ita E I ad I K
E I ∞ x b —— c —— x / cx/b
F I ∞ y Rurſus fiat propter ſimilitudinem △rum ABC & EBS
ut AB ad AC, ita EB ad ES ſeu IL
a —— c —— d / cd/a
Mult.
□FI
fit □KIL. ccd/ab xx ∞ yy.

Figura 30. Expresión simbólica de la parábola. (Schooten, 1659, p. 208)

[102] La parábola, es la sección de un cono ABC por un plano $GEFH$, en el cual la línea ED es común a la sección a lo largo del eje del triángulo ABC, el plano secante $GEFH$ y el diámetro de la sección, que suele ser paralelo a uno de los lados AB, BC, del mismo triángulo. En el caso BC; la línea GH, es la base de la sección $GEFH$, así mismo AC es la base del triángulo a lo largo de un eje que se cruza en ángulos rectos.

El *latus rectum* de la parábola queda representado por medio del segmento $EN = \frac{ccd}{ab}$ y $FI \times FI = \frac{ccd}{ab}x$. El argumento parte del planteamiento de las proporciones que usó Apolonio, la nueva operatividad permitió obtener el producto de segmentos que representó la propiedad geométrica, que se encuentra en la proposición 11 del libro I de *Cónicas*, la cual ahora queda expresada en términos de una ecuación de segundo grado.

Para los casos de la hipérbola y de la elipse usó las proposiciones 12 y 13 del libro I de *Cónicas*; los argumentos siguen siendo sintéticos y los diagramas de la cónica como cortes del cono surgen de la intención de mostrar las relaciones proporcionales que se establecen luego de realizar el corte para, luego, sustentar el paso a la construcción de la expresión simbólica en contexto geométrico.

En el caso de la hipérbola aparecen dos asuntos diferentes y significativos sobre la función de los diagramas. Primero: van Schooten mantuvo la representación tridimensional que Apolonio sintetiza en la proposición 11 del libro I de *Cónicas,* lo que refuerza la idea de que quiso pasar de la definición antigua a la expresión simbólica de esa curva, plantear lo antiguo a través de las concepciones del momento. Adaptar a las cónicas en su contexto geométrico como objetos en el contexto analítico.

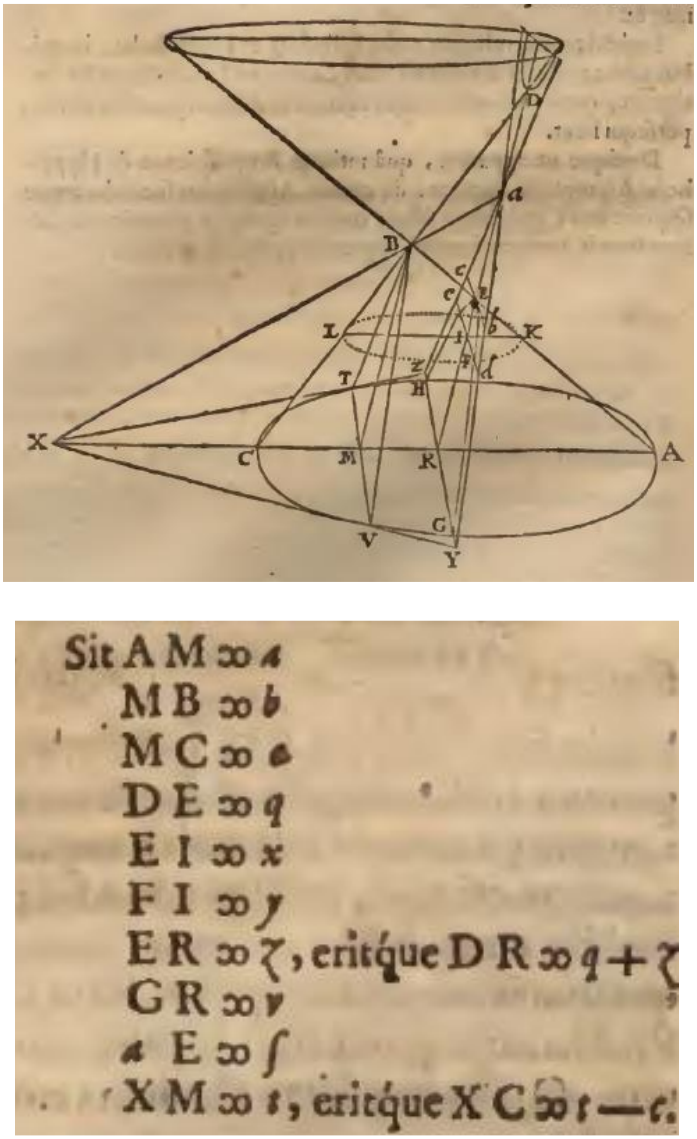


Figura 31. Diagrama para la representación simbólica de la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 216)

Segundo: van Schooten usó las propiedades de la hipérbola a partir de sus asíntotas, usando las proposiciones 10, 12 y 13 del Libro II de *Cónicas*[103] a través del siguiente diagrama:

[103] Proposition 10: If some straight line cutting the section meet both asymptotes, the rectangle contained by the straight lines cut off between the asymptotes and the section is equal to the fourth of the figure resulting on the diameter bisecting the straight lines drawn parallel to the drawn straight line. (Apolonio, 1952, p. 688) Proposition 12: if two straight lines at chance angles are drawn to the asymptotes from some point of those on the section, and parallels are drawn to them from some point of those on the section, then the rectangle

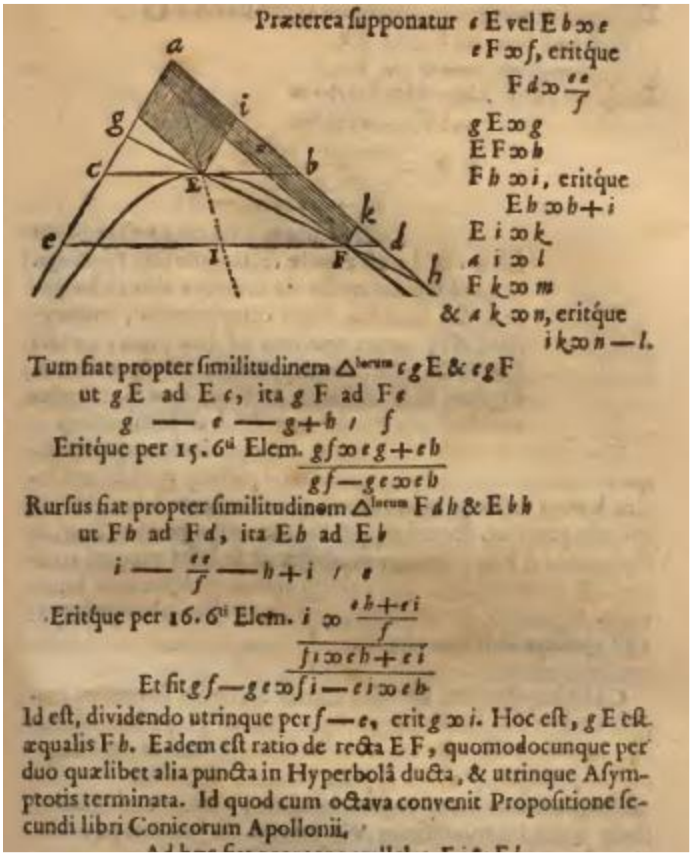


Figura 32. Asíntotas de la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 219)

Como se observa en la figura 32, el diagrama contiene una explicación gráfica de la propiedad que usará. La relación de rectángulos está sombreada, la imagen cumple doble función: pone en juego los elementos que se relacionan en la existencia de la hipérbola y muestra, explica, la propiedad que cumplen las asíntotas. El diagrama está elaborado con una intención pedagógica, se muestra como un instrumento para ilustrar la propiedad.

Durante el comentario, puede verse la intención de van Schooten de clarificar la parte sintética del problema de Pappus. Es decir: mostrar que la expresión analítica contiene las cónicas que advirtió Descartes. Para conseguirlo, hace una extensión de la idea de

contained by the parallels will be equal to that contained by those straight lines to which they were drawn parallel. (Apolonio, 1952, p. 690)
Proposition 13: In the place bounded by the asymptotes and the section some straight line is drawn parallel to one of the asymptotes, it will meet section in one point only. (Apolonio, 1952, pp.690-691)

cónica geométrica, como fue construida por Apolonio, a los nuevos preceptos de las curvas algebraicas y, en ese sentido, usó los diagramas de la antigüedad.

De esta manera, podían representarse todas las proposiciones propuestas por Apolonio[104], van Schooten reescribió al estilo de la *Geometría*, los aspectos fundamentales de las cónicas en este comentario. Mostró que la parte sintética del método de Descartes iba a buscar el principio conocido y establecido dentro del rigor euclidiano.

Siguiendo los comentarios para la solución del problema de Pappus, en el comentario F afirmo:[105]

> [*For the solution of any one of these problems of loci is nothing more that the fining of a point for whose complete determination one condition is wanting*[106]*, the other conditions being such that (as in the example) all the points of a single line will satisfy them*]. (Descartes, 1954, pp. 79-80)

Van Schooten hace afirmaciones sobre el método analítico que usó Descartes en la solución del problema de Pappus de cuatro líneas. En ese sentido, llamó la atención sobre la elección de las líneas referenciales AB y BC, su relación con el punto C y el ángulo que conforman las dos rectas. Indicó que estos tres elementos permiten obtener la ecuación general y que x tome diferentes valores para conformar los puntos que representa *C*. Para

[104] Van Schooten publicó algunas otras propiedades en los libros III y V de *Exercitationes mathematicae libri quinque.*
[105] Porque la solución de cualquiera de estos problemas de lugar no es más que la determinación de un punto para cuya determinación completa falta una condición, siendo las otras condiciones tales que (como en el ejemplo) todos los puntos de una sola línea se satisfacen.
[106] Hasta aquí cita van Schooten; pero, se incluye la siguiente idea, por ser necesaria para comprender el comentario.

explicar y como ejemplo de la solución de Descartes, soluciona el problema de Pappus para dos rectas[107].

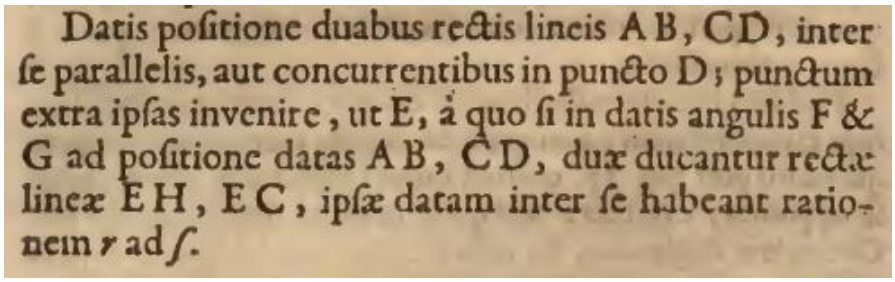

Datis poſitione duabus rectis lineis A B, C D, inter ſe parallelis, aut concurrentibus in puncto D; punctum extra ipſas invenire, ut E, á quo ſi in datis angulis F & G ad poſitione datas A B, C D, duæ ducantur rectæ lineæ E H, E C, ipſæ datam inter ſe habeant rationem *r* ad *ſ*.

Figura 33. Problema de Pappus para dos rectas. (Schooten, 1659, p. 226)

Para llevar a cabo la solución, van Schooten precisó tres momentos que llama resolución, en donde usa el método analítico; construcción y demostración.

Para la fase de resolución establece los siguientes supuestos: La igualdad a F y G de los ángulos $\measuredangle BAI, \measuredangle DCB$ respectivamente. Las rectas AI y CB se interceptan en el punto I; por lo tanto, la razón entre HE y EC se mantiene. Se toma como dado la razón AI es a K. Estos supuestos garantizan los ángulos dados sobre las rectas auxiliares EB y EH y permiten iniciar la resolución del problema.

Van Schooten trabaja con las cantidades de magnitud de las rectas y construye, a partir de la semejanza de los triángulos BIA y BEH, relaciones algebraicas que le permiten establecer expresiones simbólicas para las rectas auxiliares. De esta manera deduce la ecuación $sx - tx = tq$ la proporción dada $\frac{r}{s} = \frac{HE}{EC}$.

[107] Este mismo problema aparece en van Schooten (1657, p. 231). Dadas dos líneas rectas en posición AB, CD, que son paralelas o se encuentran en un punto D; averiguar el punto E,con los àngulos dados F y G y las posiciones dadas AB, CD, se trazan dos lineas rectas EH, EC,con las mismas razones que dan r es a s.

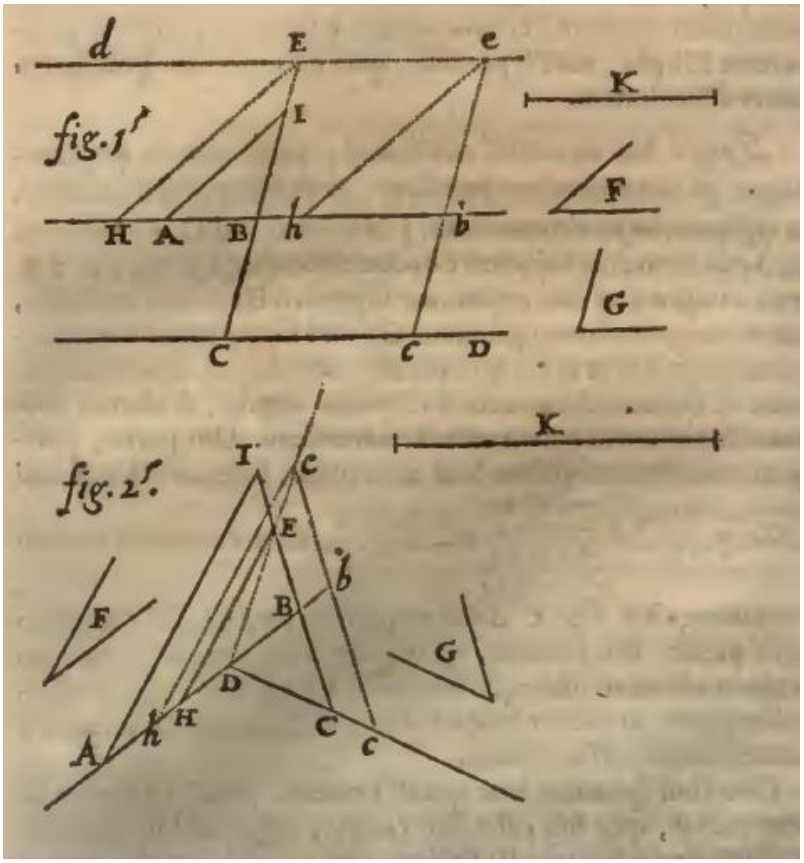


Figura 34. Diagrama de la solución del problema de Pappus para dos rectas. (Schooten, 1659, p. 226)

El uso que hace del diagrama es el mismo que le dio Descartes en el problema de Pappus para cuatro rectas; lo asume como sustento para suponer una solución al problema a través del punto E, y orienta el análisis de las relaciones entre los segmentos que le permiten construir una ecuación. Toma un caso en el diagrama para las rectas dadas y genera el movimiento de ese punto a través de relaciones de proporcionalidad; generaliza, a partir del álgebra, una ecuación que representa el movimiento de E. El diagrama es producto de la imaginación que tiene el resolutor del problema y que le permite usar de manera análoga el problema de Pappus y, en este sentido, usa todas las condiciones que permiten suponer una solución del problema para dos rectas.

En la fase de construcción, usó el punto e que tiene las mismas condiciones del punto E: dado que eh y ec son paralelas a EH y EC, entonces, concluyó que la razón $\frac{r}{s}$ se mantiene para cualquier punto e, para lo cual usa la fig. 2 que aparece en el diagrama –figura 34-. Esta es la fase sintética de la solución, por lo tanto, se mostró que los puntos e conforman dos rectas eh y ec dados los ángulos F y G. Al igual como procede en los comentarios CC y CCC construye en tercera dimensión el diagrama y allí realiza la fase sintética en donde usa la herencia del modelo geométrico de la antigüedad.

La fase de demostración está compuesta por argumentos sintéticos, a partir de las proporciones expuestas en la fase de construcción, prueba que el punto c está en la recta de y que está compuesta por todos los puntos que se construyen paralelos a CB y a HE. Es decir, prueba que el punto cumple con la proporción que llevó a la ecuación y, por lo tanto, todos estos puntos pertenecen al lugar geométrico que es solución de la situación.

Finalmente, con el comentario F, mostró la aplicación del método de resolución de problemas propuesto por Descartes en la situación más sencilla del problema de Pappus. Como lo antecede van Schooten, la función de la solución de este problema es permitirle al lector comprender la manera como se solucionó el problema de Pappus en *Geometría*, lo que implica que tenía una visión pedagógica, comunicacional, explicativa respecto al problema original.

3.2.2.2 La Resolución de otros Problemas en los Comentarios.

Además de los comentarios para la solución de Descartes del problema de Pappus para cuatro rectas, van Schooten, en algunas anotaciones, planteó y solucionó otros problemas. En este apartado se analizan algunas situaciones que usan el método de

resolución de problemas, principalmente del primer caso que trató Maanen (2003): esbozar un diagrama en el que se supone la solución conocida.

En el comentario G del primer libro, cita el método de solución de problemas:

> [*If, then, we wish to solve any problem, we first suppose the solution already effected, and give names to all the lines that seem needful for its construction, to those that are unknown as well as to those that are known. Then, making no distinction between know and unknow lines, we must unravel the difficulty in any way that shows most naturally the relations between these lines, until we find it possible to express a single quantity in two ways. This will constitute an equation, since the terms of one of these two expressions are together equal to the terms of the other*] (Descartes, 1954, p. 6).

Para ilustrar la forma como se debe usar el método, van Schooten plantea la siguiente situación:[108]

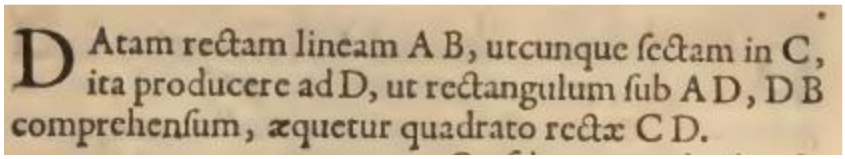

DAtam rectam lineam A B, utcunque ſectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum ſub A D, D B comprehenſum, æquetur quadrato rectæ C D.

Figura 35. Problema para explicar el método. (Schooten, 1659, p. 149)

Para determinar la solución y dar inicio al desarrollo del método, plantea el diagrama:

[108] Dada una línea recta AB con un punto C, y se produce un punto D, tal que el rectángulo comprendido por AD, DB es igual al cuadrado de la recta CD.

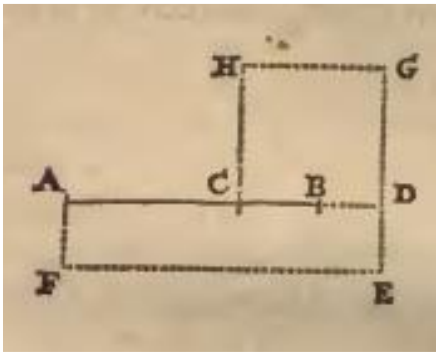


Figura 36. Diagrama del problema dado en la figura 35. (Schooten, 1659, p. 149)

En el diagrama, se plantea la solución del problema bajo el supuesto de que $AFED = CDGH$; la longitud desconocida: $BD = x$; y segmentos de longitud conocida: $AC = a, CB = b$. Como segundo paso del método cartesiano se construyeron ecuaciones para representar las relaciones que se visualizan a partir del diagrama y se expresan por medio de símbolos: $AD = a + b + x$ y $CD = b + x$; como $BD = DE$, entonces, el área $AFED = (a + b + c)x$ y $CDGH = (b + x)^2$. Luego, buscó el principio analítico que corresponde a la situación: $(a + b + c)x = (b + x)^2$; después de operaciones algebraicas, se obtiene que $x = \frac{b^2}{a-b}$. Van Schooten especificó que esta ecuación significa que el problema se resuelve con la tercera proporcional, $\frac{x}{b} = \frac{b}{a-b}$; que fue uno de los problemas tratados por Descartes, un principio geométrico conocido que garantiza la simplicidad y la veracidad de la solución a través de establecer la semejanza entre dos triángulos.

El diagrama contiene la solución del problema. Los supuestos que se deben realizar ya están contenidos en la imagen, este es un ejemplo del uso del diagrama como dispositivo de la imaginación creadora, la conformación del diagrama implica ya tener un camino de solución del problema; por lo tanto, comprender las relaciones que permiten su solución.

En el comentario L, van Schooten complementó el tratamiento de la normal a un punto de una curva.[109]

> [*For example, if CE is an ellipse, MA the segment of its axis of which CM is an ordinate, r its latus rectum, and q its transverse axis, then by theorem 13, book I, of Apollonius, we have* $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$. *Eliminating* x^2 *the resulting equation is* $s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$ *or* $y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0$] (Descartes, 1954, p. 96).

Van Schooten usa el diagrama que planteó Descartes para presentar el procedimiento general para hallar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos.

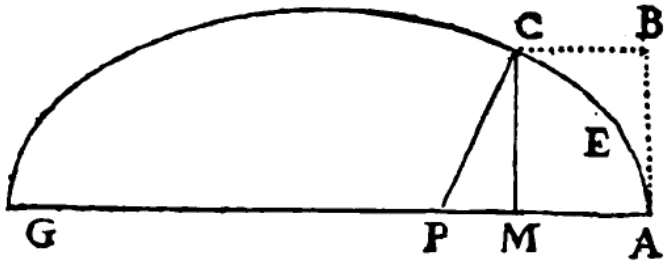


Figura 37. La curva normal en una elipse. (Descartes, 1957, p. 97)

Los argumentos en la obra de 1637 fueron;[110]

[109] Por ejemplo, si CE es una elipse, MA el segmento de su eje del cual CM es una ordenada, r su latus rectum y q su eje transversal, entonces por el teorema 13, libro I, de Apolonio, se tiene que $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$ Eliminando x^2 la ecuación resultante es $s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$ o $y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0$.

[110] Si CE es una elipse, MA es el segmento de su eje del cual CM es ordenada, r es el *latus rectum* con q su eje transversal, entonces por el teorema 13, libro I, de Apolonio, tenemos $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$.

If CE is an ellipse, MA the segment of its axis of which CM is and ordinate, r is the lactus rectum is q its transverse axis, then by theorem 13, book I, of Apollonius, we have $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$. (Descartes, 1954, p. 96)

Van Schooten adiciona una construcción al diagrama que permite comprender el uso de la proposición enunciada

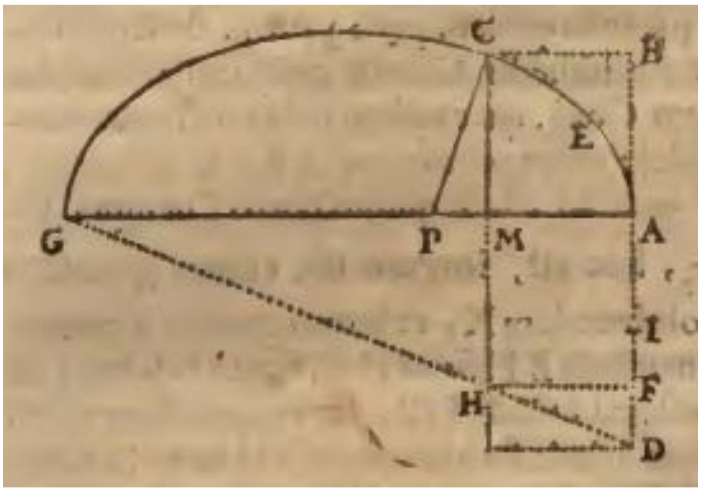


Figura 38. Modificación de van Schooten al diagrama propuesto por Descartes. (1659, p. 142)

La construcción en los comentarios mantuvo los supuestos de la obra original. Por tanto, lo que muestra van Schooten es la ecuación para la elipse $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$, usando la proposición 13 del libro I de *Cónicas* de Apolonio;[111] para lo cual, plantea la siguiente

[111] If a cone is cut by a plane through its axis, and is also cut by another plane on the one hand meeting both sides of the axial triangle, and on the other extender neither parallel to the base nor subcontrary wise, and if the plane the base of the cone is in , and the cutting plane meeting a straight line perpendicular either to the base of the axial triangle or to it produced, then any straight line which is draw from the section of the cone to the diameter of the section parallel to the common section of the planes, will equal in square some area applied to a straight line to which the diameter of the section has the ratio that the square on the straight line drawn from the cone's vertex to the triangle's base parallel to the section's diameter has to the rectangle contained by the intercepts of this straight line (on the base) from the sides of the triangle, an area having as breadth the straight line cut off on the diameter beginning from the section's vertex by this straight line from the section to the diameter, and deficient by a figure similar and similarly situated to the rectangle contained by the diameter and parameter. And let such a section be called an ellipse. (Apolonio, 1952, p.618)

construcción: extienda BA hasta D, de tal manera que $AD = r$. Por la semejanza entre los triángulos GAD y DHF, prueba que $\frac{FD}{y} = \frac{r}{q}$. Al multiplicar por HF, construye el rectángulo $HFD = \frac{ry^2}{q}$. Por la proposición enunciada en $Cónicas$, $MAD - HFD = CM \times CM$, de donde concluye que: $MF = ry - \frac{ryy}{q}$, que es la ecuación que propone Descartes (Schooten, 1659, p. 242).

Van Schooten develó los asuntos que enuncia Descartes pero que están implícitos en la obra. El diagrama es fundamental en este propósito explicativo porque muestra la relación entre el razonamiento general, propuesto en la obra original, y el caso particular. El primero hace uso de un diagrama que generaliza las relaciones que permiten proporciones válidas y muestra la relación entre los conceptos que permiten la solución. En el caso de los diagramas particulares, estos permiten ejemplificar el razonamiento que se debe llevar a cabo; es el proceso mostrado en la figura 4 de esta tesis, el diagrama de van Schooten expone lo que está implícito en el diagrama de Descartes, el uso de la proposición de Apolonio. De tal forma que explicita una construcción que permite concluir la expresión simbólica.

Este mismo proceso se dio en las explicaciones del comentario M, sobre el problema de la tangente al punto de una curva donde se mantuvo el uso de los diagramas de la obra de 1637 para mostrar las ecuaciones para la parábola, la hipérbola y la concoide. En el caso de la hipérbola, van Schooten usó la proposición 12 del libro I que había enunciado Descartes.

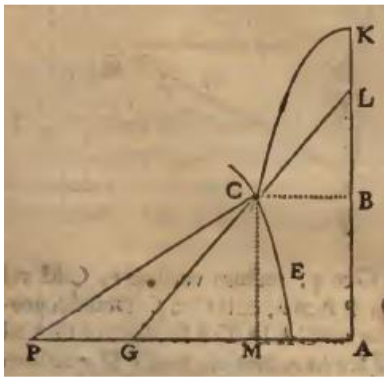


Figura 39. Tangente a la hipérbola. (Descartes, 1954, p. 97)

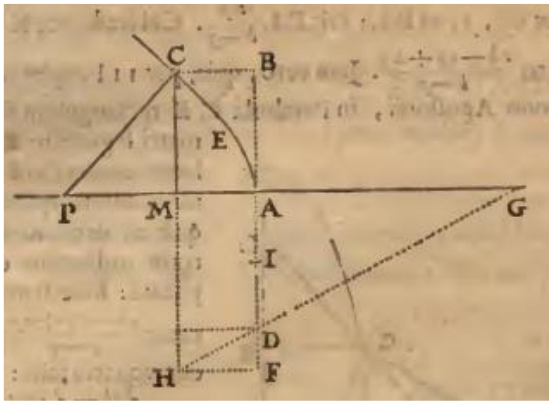


Figura 40. Tangente a la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 244)

En las figuras 39 y 40, se ve el movimiento que hizo van Schooten al diagrama, realizó una construcción adicional a partir de la recta HG que permite mostrar, a partir de relaciones proporcionales, que los puntos de la curva cumplen el principio de la cónica que estableció Apolonio.

En el comentario N, trató la curva concoide de los antiguos y realizó una adaptación a la construcción propuesta por Descartes[112]:

> [*Given, for example, CD the first conchoid of the ancients. Let A be its pole and BH the ruler, so that the segment of all straight lines, as CE and DB, converging toward A and included between the curve CD and the straight-line HB are equal. Let it be required to find a line CG normal to the curve at the point C*]. (Descartes, 1954, p. 115)

[112] Dado, por ejemplo, CD el primer concoide de los antiguos. Sea A su polo y BH la regla, de modo que el segmento de todas las líneas rectas, como CE y DB, convergen hacia A e incluyen entre la curva CD y la línea recta HB son iguales. Es necesario encontrar una línea CG normal a la curva en el punto C.

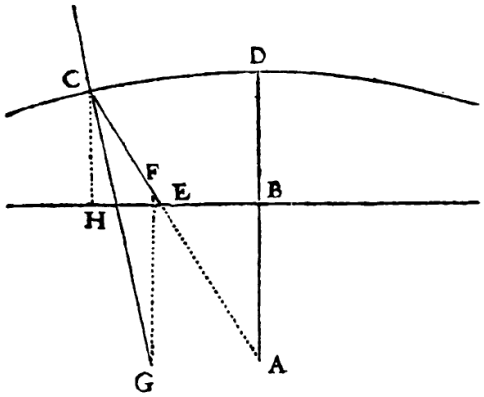


Figura 41. Diagrama de la concoide (Descartes, 1954, p. 113)

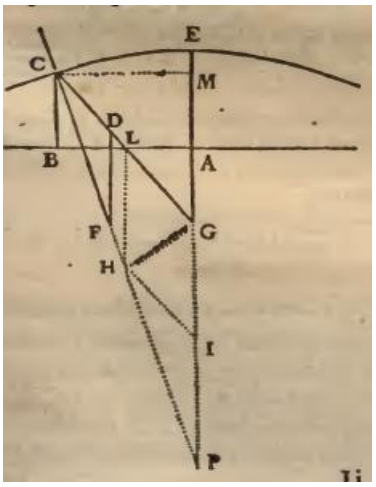


Figura 42. Diagrama de la concoide (Schooten, 1659, p. 249)

Van Schooten asumió la tarea propuesta por Descartes en la descripción de la construcción de la normal a un punto de la concoide: *we would involve ourselves in a calculation as long as, or longer than any of those just given*[113] (Descartes, 1954, p. 115); mostró la relación de la recta normal con la curva CE. Al igual que en los casos anteriores, construye modificaciones al diagrama que aparece en la primera edición de la obra.

Los cambios en el diagrama permiten identificar los triángulos semejantes con los cuales se establecieron las relaciones de proporcionalidad y luego las ecuaciones.

Van Schooten, siguiendo el método, esta vez para construir la ecuación, asignó una letra a cada segmento de recta conocido y desconocido, y tomó como referente la recta BA, de la siguiente manera: sean $GA = b, AE\ o\ LC = c, CM\ o\ AB = x, MA\ o\ BC = y\ AP = v, PC = s$; se establece la semejanza entre los triángulos rectángulos CPE y BCL, de donde dedujo las primeras ecuaciones $CM^2 = ss - vv - 2vy - yy; BL = \sqrt{cc - yy};\ AL = x -$

[113] nos involucraríamos en un cálculo tan largo o más largo que cualquiera de los que acabamos de dar.

$\sqrt{cc - yy}$. Con los triángulos semejantes GMC y GAL, deduce que $\frac{b+y}{x} = \frac{b}{x-\sqrt{cc-yy}}$; por tanto, después operar algebraicamente obtiene que $bx + yx -$ $\sqrt{bbcc - 2bccy \pm bbcc\, yy - 2by^3 - y^4} = bx$.

En todos estos comentarios, van Schooten muestra la parte sintética que Descartes enuncia, pero no desarrolla. Complementó el método de solución de problemas mostrando las razones por las cuales se dan las soluciones particulares de la expresión analítica realizada por Descartes. Identificó que el diagrama que permite generar la ecuación general, para cualquier curva, puede modificarse para mostrar la condiciones para cada curva solución.

Al final del comentario O, que dedica a aspectos algebraicos de la regla de máximos y mínimos de Hudde, van Schooten presenta una forma de describir la tangente a un punto *C* para curvas que no son algebraicas. Usó la construcción de Roberval (1602, 1675) de la curva cicloide para este propósito, este matemático consideró la trayectoria de los puntos de estas curvas determinados por dos movimientos o más movimientos simultáneos independientes. La cicloide es la trayectoria de un punto A en un círculo que se mueve a lo largo de una línea recta AE.

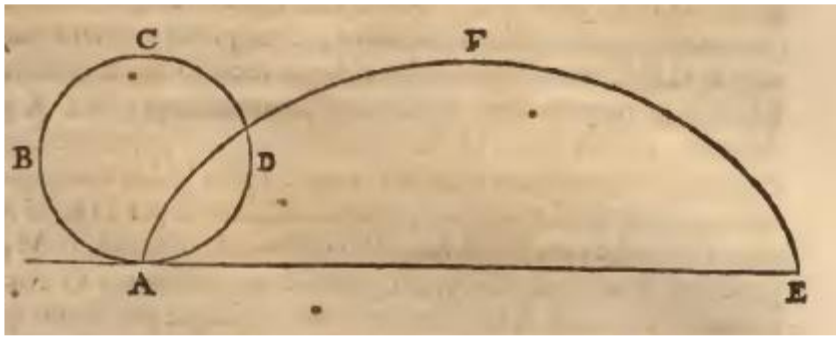


Figura 43. La cicloide. (Schooten, 1659, p. 265)

Van Schooten describió una construcción por puntos para comprender el movimiento de la curva:

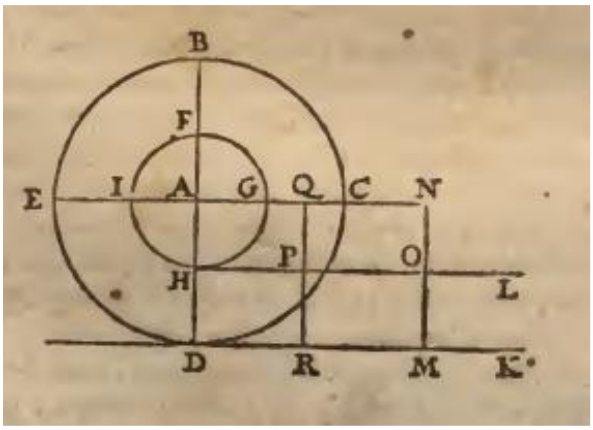


Figura 44. Construcción por puntos de la cicloide. (Schooten, 1659, p. 265)

La idea que presenta es mover dos círculos concéntricos al mismo tiempo e identificar puntos en dos rectas paralelas DK y HL, que son tangentes a los círculos en un punto paralelo al radio AC y AG respectivamente, y que van describiendo la recta correspondiente. De esta manera, existe un punto que se puede proyectar por una perpendicular a DM en la recta AG que es N; y, lo contrario, existe un punto R que es perpendicular a la recta DM en Q. En este caso el diagrama representa el movimiento y permite imaginar la construcción de la curva punto a punto.

En conclusión, van Schooten amplió la solución de algunos problemas de la *Geometría* de 1637 para hacerla más compresible, generalmente en aspectos que Descartes describió, pero no desarrolló. Pero, este aporte le permitió también mostrar que las curvas de los antiguos se pueden describir a partir de esta nueva práctica, lo que implica comprender que el principio analítico que describió Descartes contiene a todos los posibles casos que son solución del problema. Así fue posible describir las curvas de los antiguos, sus propiedades y el principio de su construcción a partir de expresiones simbólicas

inmersas en contextos geométricos. Esto es van Schooten conectó la antigüedad con los recursos modernos.

Van Schooten explicó, usó y modificó los diagramas que permitieron construir la solución general para especificar la parte sintética o analítica del método; dio a los diagramas una función explicativa de la teoría que subyace a cada situación. Así, los diagramas adquirieron una función pedagógica en el estudio y la compresión del texto cartesiano.

Van Schooten usó el diagrama general que aparece en Geometría como una síntesis de los conceptos que subyacen a la solución, como un instrumento de indagación de las soluciones; práctica que se aproxima a lo que se llamó, en el marco referencial, razonamiento diagramático: dada la construcción, se da un proceso de manipulación y observación que permite concluir sobre el uso de la propiedad que enunció Apolonio.

Estos diagramas no son estáticos, al ser usados en otro punto de la curva, las relaciones de proporcionalidad se mantienen, movilizan la propiedad euclídea que se encarna en la construcción de la simbología en contexto geométrico y mantienen el invariante geométrico conocido para la conformación de cada curva.

3.2.2 Instrumentos y Construcción de Curvas

Como se formula en el marco referencial de esta investigación, los instrumentos tuvieron un papel relevante en las propuestas de la matemática planteada en *Geometría*, no solo marcaron una separación del rigor de la antigüedad, también se convirtieron en la forma de imaginar y representar las relaciones que dan origen a las curvas. No fue en los comentarios en donde van Schooten trató los instrumentos articulados para trazar curvas, el

documento en donde profundizó este tema fue el libro IV *Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptio* del libro de 1657.

Este capítulo tiene como idea central la presentación de los instrumentos a partir de transformar el articulado más sencillo, un instrumento para trazar rectas, a mecanismos más complejos que permitieron trazar las cónicas.

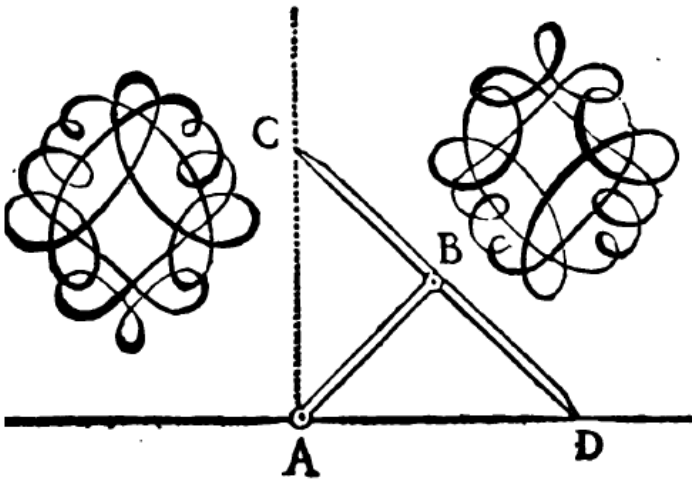


Figura 45. Instrumento para trazar rectas. (Schooten, 1657, p. 304)

Las consideraciones realizadas por van Schoteen para este instrumento pueden resumirse así: una regla AB, que se mueve alrededor de un punto fijo A y sobre otra regla CBD. Las dos reglas se conectan de tal manera que, AB, CB y BD sean de igual longitud. Al mover D sobre la regla AD, C describe una línea recta perpendicular a AD; por tanto, los triángulos que se forman ABC, ABD son isósceles y el ángulo recto CAD es el doble de $\measuredangle BCA + \measuredangle ADB$. Luego, se articula la regla CD al punto B, de forma que CB y BD sean iguales a AB; así, en el movimiento, se genera el triángulo CBD.

Luego van Schooten modifica el instrumento articulando el segmento BC en B de tal manera que obtiene un nuevo instrumento que traza rectas en diferentes posiciones del

plano. Algunas de las posiciones consideradas por van Schooten se encuentran en la figura 46.

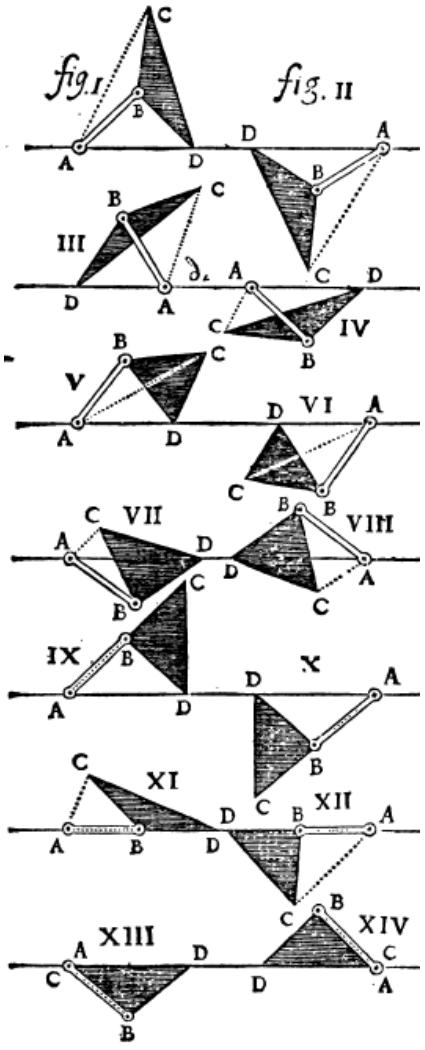


Figura 46. Primera transformación del mecanismo. (Schooten, 1657, p. 305)

En los diagramas sobre el movimiento de este instrumento, pueden verse dos aspectos que resaltó van Schooten. El primero: que el principio para generar la recta y el funcionamiento del instrumento recaen sobre el triángulo isósceles que está sombreado, el cual se mantiene para cualquier posición de los brazos; esa es la condición que permite la construcción, el funcionamiento y el principio de la curva que se produce, en este caso, una recta. De igual manera, se mantiene la variación proporcional entre las áreas que se conforman entre los triángulos ACB y BCD; a este aspecto no se refiere van Schooten, aunque en el diagrama siempre sombrea el triángulo BCD. El segundo aspecto es que el movimiento se produce a cualquier lado del punto fijo A; por lo tanto, hay que considerar magnitudes con sentido y rectas que tienen pendientes negativas.

Van Schooten describió cada una de las figuras para mostrar las relaciones que se producen entre los triángulos; por ejemplo, que para las figuras I, II, III y IV el ángulo CDA es el doble del ángulo BDA. Las propiedades de los triángulos isósceles constituyen el principio euclidiano que permite que se construya la recta a partir del movimiento. Nuevamente se da una extensión de la geometría antigua a la nueva práctica propuesta por Descartes.

Los siguientes capítulos los dedicó a mostrar cómo generar los instrumentos para las cónicas a partir de este primer mecanismo. Aquí se mostrará el caso de la elipse.

La regla AB se mueve alrededor del punto fijo A y la regla *BED*, en el punto *B*, de tal manera que: $BD = AB$ y un punto E entre B y D traza la elipse.

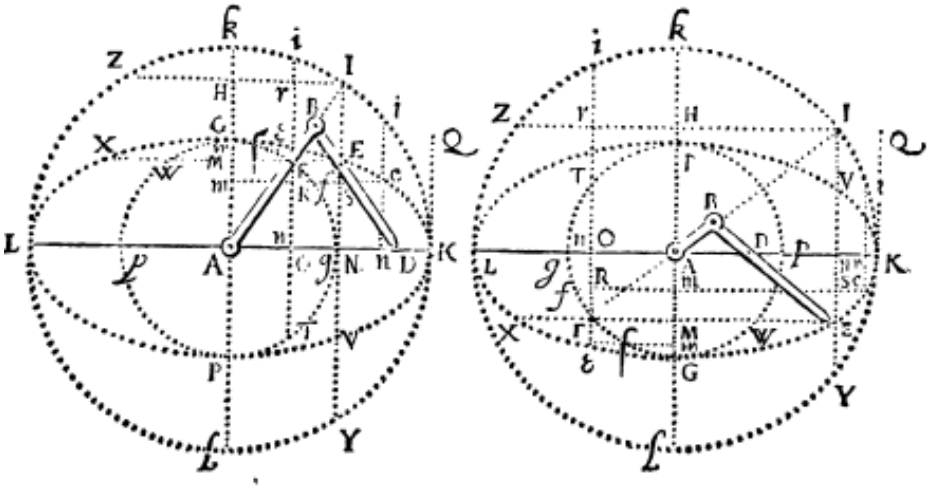


Figura 47. Instrumento modificado para trazar elipse. (Schooten, 1657)

Mediante el análisis del instrumento y la construcción de las líneas auxiliares que se ven en el diagrama –figura 48–, van Schooten dedujo lo siguiente de las proporciones que conducen a la conformación de la curva. Como EF pasa por AG en el punto M, entonces, este será paralelo a AD y perpendicular a AG. Se produce IE que corta a AD en N, que es

perpendicular a AD. Finalmente, traza FO, equidistante a INE y secante a AD en O, y por lo tanto los ejes LK y GP se encuentran en tercera proporcional con KQ.

Como los triángulos AFO, AIN son semejantes; entonces, FO es a FA como NI es a IA, FO es a NI como FA es a IA y el doble de FA es al doble de GP como el doble de AI es a LK. El cuadrado de FO es al cuadrado de NI como GP al cuadrado y LK al cuadrado, por lo tanto: QK, GP y LK son proporcionales, el cuadrado de GP y el cuadrado LK son como QK es a LP, que también son el cuadrado de FO; esto es, el cuadrado de NE es al cuadrado de NI, que es KQ es a LK. Estos cuadrados NI son iguales al rectángulo LNK; también, el cuadrado NE es al rectángulo LNK y KQ es el *latus rectum* de la figura y LK el *latus traversum*. Por lo tanto, el punto E es una circunferencia elipse cuyos diámetros son LK y GP, el latus rectus principal es KQ perteneciente al eje LK. (Schooten, 1657, pp. 309-311)

Van Schooten analizó el instrumento permitiendo visualizar la relación entre el mecanismo de trazar rectas y el de trazar elipses. La figura 48 muestra la característica geométrica que garantiza el trazo de la curva.

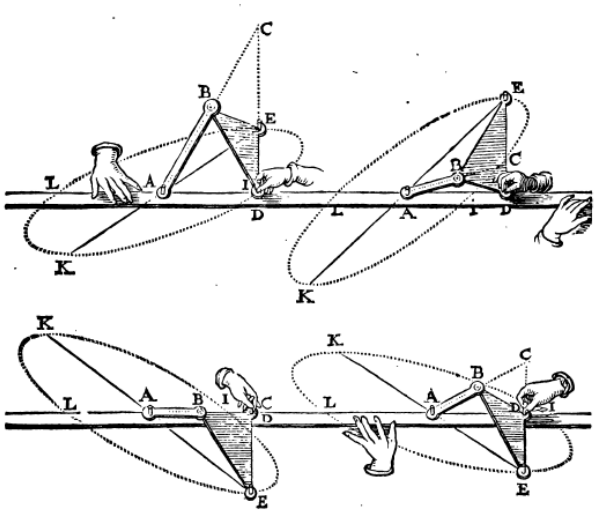


Figura 48. Relaciones geométricas para trazar elipses con el instrumento. (Schooten, 1657, p. 327)

Al producir el movimiento del mecanismo sobre la recta AD, E describe la elipse. Los lados DB y BC son iguales, y los triángulos DBE y DCB aumentan y disminuyen a la misma razón. Van Schooten en el comentario A del libro II de la segunda edición de *Geometría*, muestra los argumentos que permiten deducir que el trazo es una elipse; es el único mecanismo diferente a los presentados por Descartes que presenta. A diferencia de los argumentos que aparecen en el libro de 1657, que son euclidianos, en los comentarios aplicó análisis para encontrar la expresión simbólica de la curva que traza el instrumento.

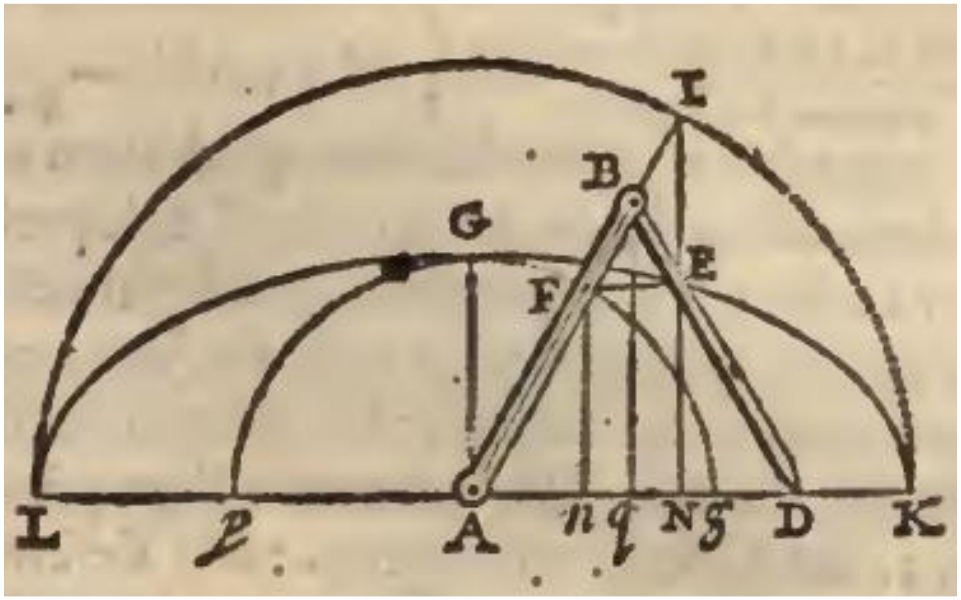


Figura 49. Mecanismo que aparece en comentarios libro II. (Schooten, 1659, p. 173)

Supuso que las reglas AB y BD son iguales, y que AB se mueve alrededor del punto fijo A; entonces, toma un punto E entre B y D de tal manera que moviendo el mecanismo por la línea AD, E describe la curva objeto de estudio $KEGL$.

Lo primero que establece fue que se debía obtener la relación de cada uno de los puntos de la curva a estudiar con la recta AD. Toma el punto E y traza un segmento de recta

EN perpendicular a AD, y un segmento AN sobre A; a estas dos cantidades desconocidas las nombró x e y, y las relaciona con las cantidades conocidas $AB = a = BD$ y $DE = b$. De esta manera, usó el referencial ortogonal para tratar lo conocido y lo desconocido de maneras análogas. Primero tomó un punto que pertenece a la curva y luego representó, bajo dos rectas que dependen de la posición del punto, la variación de los puntos que representa la curva.

Entonces, por ser el triángulo NED rectángulo, obtiene que $ND = \sqrt{bb - xx}$, perpendicular a AD; y por $,B$ se traza el punto q, que es punto medio de AD. A partir de la semejanza de los triángulos BqD y END, se obtiene que $AD = \frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx} = y + \sqrt{bb - xx}$ y $AN = \frac{2a-b}{b}\sqrt{bb - xx}$. Haciendo los productos, se obtiene $4aa - 4ab + bb - \frac{4aaxx}{bb} + \frac{4axx}{b} - xx = yy$. Van Schooten advirtió que, para dejar indeterminado y, y obtener el valor de x, se tiene que $xx = bb - \frac{bbyy}{4aa-4ab+bb}$. Esta ecuación determina los puntos de la curva al mover el instrumento.

Para garantizar la parte sintética del método, que la curva trazada y representada por la ecuación es una elipse, van Schooten procedió a partir de las relaciones descritas en el diagrama y evidenciadas en el libro de 1657. Toma BI igual a BE, así, se describe el círculo con centro A y radio AI, el cual es secante a AD en L y en K; entonces LK es el eje transversal de la elipse. Paralelo a AD, está el segmento EF, que describe, en el movimiento, el círculo $pGFg$. Un punto sobre de la curva se encuentra sobre la línea IN y, con el mismo procedimiento, se encuentran todos los puntos que pertenecen a la curva. De esta manera, entonces, $AI = 2a - b$ y $AN = y$; por triángulos semejantes, se tiene que b es a An como y es AI; entonces, $An = \frac{by}{2a-b}$ y, por ser el triángulo rectángulo, se obtiene

$An^2 = \frac{bbyy}{4aa+4ab+bb}$. Por lo tanto, $nF = bb - \frac{bbyy}{4aa+4ab+bb}$, como $xx = NE^2$; así, queda probado que la curva es una elipse.

En la primera parte de este mismo comentario, van Schooten usó el instrumento que Descartes presentó para trazar hipérbolas; adicionó líneas que le permitieron usar las asíntotas de la curva y configurar otro grupo de argumentos para justificar la relación entre el instrumento y las propiedades de la cónica que traza.

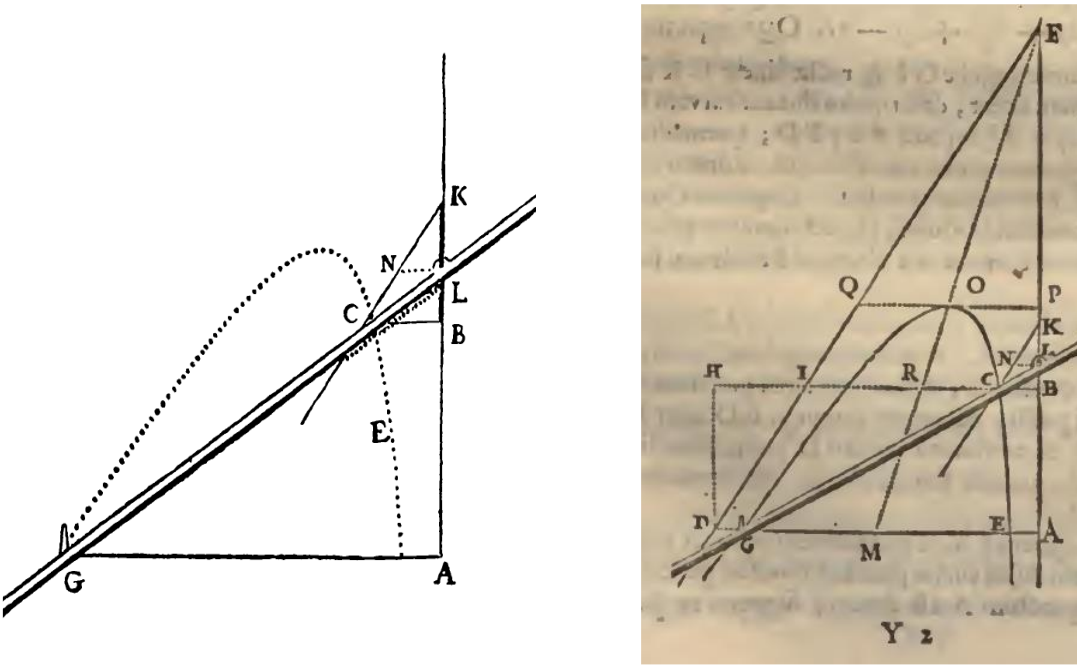


Figura 50. Imagen de instrumento para trazar hipérbolas en Descartes –izquierda (Descartes, 1954, p. 50), y en van Schooten –derecha. (Schooten, 1657, p. 171*)*

Este diagrama aparece dos veces en los comentarios. La justificación del funcionamiento del instrumento que realiza van Schooten asume una hipótesis diferente a la de Descartes; él supuso la existencia de la curva *de hecho*, por lo tanto la existencia es dada, no es constructiva. El objeto epistemológico de esta argumentación sobre el diagrama es otro, la constructibilidad de la cónica se pierde, la curva ya no es generada por un instrumento con un movimiento continuo y controlado. Como se lee en la figura 51, van

Schooten supone las dos asíntotas DF y AF; de ahí, pasa a mostrar, entonces, que efectivamente lo son para eso, da por hecho que la curva que traza el instrumento es una hipérbola.[114]

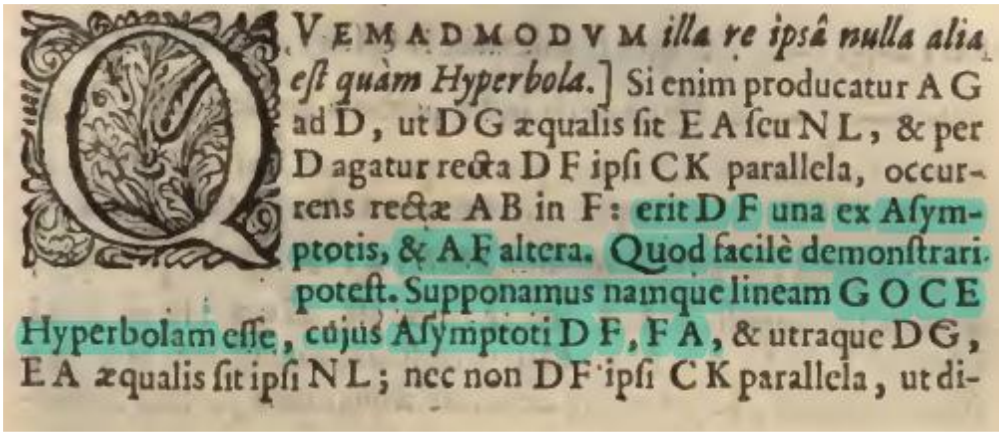

QVEMADMODVM *illa re ipsâ nulla alia eſt quàm Hyperbola.*] Si enim producatur AG ad D, ut DG æqualis ſit EA ſeu NL, & per D agatur recta DF ipſi CK parallela, occurrens rectæ AB in F: erit DF una ex Aſymptotis, & AF altera. Quod facilè demonſtrari poteſt. Supponamus namque lineam GOCE Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti DF, FA, & utraque DG, EA æqualis ſit ipſi NL; nec non DF ipſi CK parallela, ut di-

Figura 51. Descripción del instrumento para trazar hipérbolas (Schooten, 1659, p. 171)

En la *Geometría* la construcción se basó en[115]:

Then I take on the curve an arbitrary point, as C, at which we will suppose the instrument applied to describe the curve. Then I draw through C the line CB parallel to GA. Since CB and BA are unknown and indeterminate quantities. I shall call one of them y and the other x. (Descartes, 1954, p. 52)

En el argumento de la *Geometría* de 1637 x e y son tomadas como segmentos de recta entre las reglas del instrumento y el punto C. En los comentarios de van Schooten esta

[114] Si se extiende AG a D y DG es igual a EA y a NL, y por D pasa la recta DF siendo paralela a CK, concurre con la recta AB en F entonces DF es una asíntota y AF otra. Esto se demuestra facilemente. Supongamos que la linea $GOCE$ es una hipérbola, cuyas asíntotas son DF, FA y ambas DG, EA son iguales a NL asi como DF es paralelo a CK.

[115] Tomo en la curva un punto arbitrario, como C, en el que supondremos el instrumento aplicado para describir la curva. Luego dibuja a través de C la línea CB paralela a GA. Dado que CB y BA son cantidades desconocidas e indeterminadas. Llama a uno de ellos y y al otro x.

relación no es clara, los argumentos se soportan en la hipérbola como dada, por tanto, la existencia de sus asíntotas también es dada.

El proceso argumentativo cambió. En el caso de Descartes el estudio se estableció en la intersección del plano $CNKL$, que luego se convierte en el modelo para construir curvas a través de la intersección de líneas de grado menor:

> *If in the instrument used to describe the curve, we substitute for the rectilinear figure CNK this hyperbola or some other curve of the first class lying in the plane $CNKL$, the intersection of this curve with ruler GL will describe, instead of the hyperbola EC, another curve, which will be of the second class*[116]. (p. 55)

En los comentarios no se hace referencia a este modelo de conformación de curvas, van Schooten no hizo referencia a esta heurística planteada por Descartes para generar curvas a partir de la intersección de curvas de menor grado; tampoco hay comentarios, ni adiciones sobre la generación de curvas por movimiento.

El modelo para solucionar ecuaciones planteado en el texto de 1637 implicaba pensar en la intersección de dos curvas de grado menor. El planteamiento en los comentarios desarrolló su fuerza argumentativa en las características conocidas de las curvas dadas. Por ejemplo, para probar el hiperbológrafo usó la proposición 10 del libro II de las *Cónicas* de Apolonio,[117] en donde se prueba una propiedad de la hipérbola respecto a sus asíntotas:

---

[116] Si en el instrumento utilizado para describir la curva sustituimos por la figura rectilínea CNK esta hipérbola o alguna otra curva de primera clase situada en el plano $CNKL$, la intersección de esta curva con la regla GL describirá, en lugar de la hipérbola EC, otra curva, que será de segunda clase.

[117] If some straight line cutting the section mete both asymptotes, the rectangle contained by the straight lines cut off between the asymptotes and the section is equal to the fourth of the figure resulting on the diameter bisecting the straight lines drawn parallel to the draw straight side. (Apolonio, 1952, p. 688)

En los comentarios usa el paralelismo entre DF y CK, construye un punto I en BC que pasa por DF y llega hasta H, DH paralelo a AF, de tal manera que los triángulos DHI, KLN y FAD son semejantes. Con $KL = b$; $LN = c$; $DH = x$; como KL es a LN como HD es a HI entonces $HI = \frac{c}{b}x$. Como $HB = DA$, entonces $IB = a + b - \frac{c}{b}x$, como $BC = y$, entonces $IC = a + c - \frac{c}{b}x - y$. Aplicando la proposición de Apolonio, se obtiene que $IC \times CB = (a + b - \frac{c}{b}x - y)y$; entonces, $DEA = ICB = ay + by + \frac{c}{b}xy - y^2$. Por lo tanto: $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$.

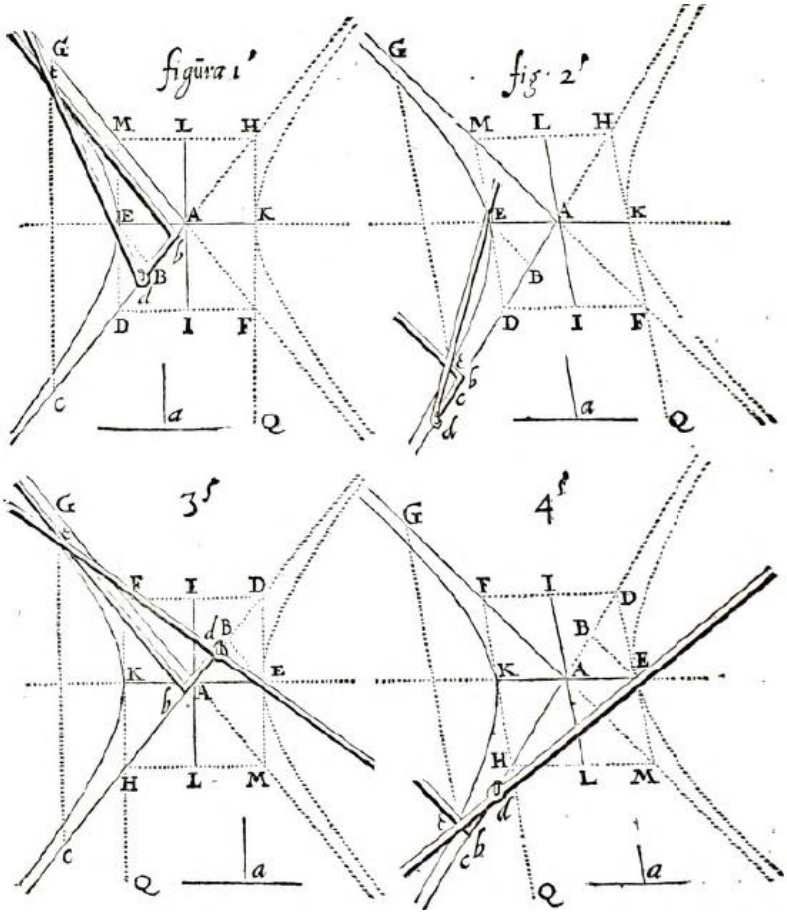


Figura 52. Instrumento para trazar hipérbolas. (Schooten, 1657, p. 332)

Van Schooten señaló que este instrumento es el mismo que presentó en el libro IV del texto de 1657. La figura 52 muestra el manejo del instrumento en diferentes puntos de

la curva y esboza las asíntotas de la hipérbola. La argumentación desarrollada a partir de los instrumentos en esta edición de la *Geometría* no mantuvo el mismo discurso que en la obra original. La disertación de Descartes expuesta en el libro II de *Geometría* comparó el papel de los instrumentos con la regla y el compás, que es el análogo de la mecanización e instrumentación de la geometría euclidiana, desde el punto de vista del instrumento, la regla y el compás es a la geometría Euclidiana, como lo son los artefactos para construir curvas en la práctica cartesiana. Con la construcción de mecanismos que permiten construir curvas geométricas, la modelación y construcción se limitaba al uso de estos instrumentos, para luego, por medio del análisis de las relaciones de estos, poder obtener una ecuación:

> *If we say that they are called mechanical because some sort of instrument has to be used to describe them, then we must, to be consistent reject circles and straight lines, since these cannot be described on paper without the use of compasses and a ruler, which may also be termed instruments*[118]. (Descartes, 1954, p. 43)

Pero esa analogía está ligada a una estrategia, una heurística para el reconocimiento de las curvas que modificó la estructura que por años se había tenido, a partir de la geometría euclidiana. En Descartes la técnica fue la conformación de puntos de una curva por medio de la intersección de curvas de menor grado. El hiperbológrafo en la obra original es un ejemplo de esta estrategia.

En este comentario de van Schooten la práctica se modifica en los sentidos vistos anteriormente. En esta segunda edición del texto cartesiano se comienza a instrumentalizar

[118] Si decimos que se llaman mecánicos porque se debe usar algún tipo de instrumento para describirlos, entonces debemos, para ser consistentes, rechazar círculos y líneas rectas, ya que estos no se pueden describir en papel sin el uso de compás y una regla, que también pueden denominarse instrumentos.

un modelo analítico en donde el supuesto es la curva y la fase constructiva geométrica para la solución de ecuaciones comienza a eliminarse.

Según Bos (1984) el declive de la propuesta de generación de curvas por instrumentos y por intersección de curvas de menor grado de Descartes se dio en los años posteriores a la publicación de *Geometría*, buscar las curvas más simples con las cuales se podía describir una curva se fue diluyendo y reemplazando por la representación simbólica de las curvas. En acuerdo con el análisis de Bos (1984, p.p. 338) la estrategia cartesiana estuvo caracterizada por[119]:

> *1. Curves that are geometrical in the above sense have algebraic (i.e. polynomial) equations in rectilinear coordinates.*
> *2. Whenever a curve has an algebraic equation it can be traced by a combination of motions which is acceptable a means of geometrical construction.*
> *3. In constructions beyond straight lines and circle are should always use the simplest possible curves; curves are simpler in as much as the degrees of their equations are lower.*

Se evidencia que en la segunda edición en latín de *Geometría*, el libro de mayor difusión de las matemáticas propuestas por Descartes, la práctica matemática comenzó a cambiar; la visión epistémica de la curva empezó el tránsito de un elemento constructivo a

[119] 1. Las curvas que son geométricas en el sentido anterior tienen ecuaciones algebraicas (es decir, polinomiales) en coordenadas rectilíneas.
2. Siempre que una curva tiene una ecuación algebraica, se puede trazar mediante una combinación de movimientos que es un medio aceptable de construcción geométrica.
3. En construcciones más allá de las líneas rectas y circulares se deben utilizar siempre las curvas más simples posibles; Las curvas son más simples en la medida en que los grados de sus ecuaciones son más bajos.

partir de curvas conocidas a un objeto matemático descrito por sus propiedades geométricas a partir de su expresión simbólica.

Durante el trabajo de van Schooten en los comentarios y sobre todo en el libro de 1657, hay un uso pedagógico del proceso de construcción de curvas a partir de los instrumentos. Los diagramas modelaron las posiciones relativas de las piezas de los instrumentos con la relación geométrica que es invariante al movimiento y que permite definir la curva. Imágenes estáticas de diferentes posiciones del punto que pertenece a la curva, permitieron analizar el movimiento y la relación geométrica.

Descartes plantea que a través de la instrumentación se pasa de la precisión de la mecánica a la exactitud de lo geométrico. Por eso, sumó una hipótesis a la geometría, "(...) *namely, two or more lines can be moved, one upon the other, determining by their intersection other curves*[120]" (Descartes, 1954, p. 43). A mitad del siglo XVIII la instrumentalización para el trazo de curvas geométricas fue desapareciendo en la práctica matemática; pocos matemáticos trabajaban en ella. La práctica basada en la expresión simbólica de las curvas y la teoría algebraica de ecuaciones se convirtieron en el medio de abordaje tanto de la solución de ecuaciones como de la existencia de curvas, pues toda curva expresable por medio de una ecuación algebraica es geométrica.

3.2.3 Solución de Ecuaciones

En los comentarios de van Schooten la solución de ecuaciones de primero y segundo grado se realiza a partir de procesos aritméticos y algebraicos; no hay acotaciones para los procedimientos que se presentan en *Geometría.* Para ecuaciones de grado mayor a dos, sugirió el trabajo con la descomposición de los divisores del término independiente. En el

[120] es decir, se pueden mover dos o más líneas, una sobre la otra, determinando por su intersección otras curvas.

comentario M del libro III: [*Note that I am here considering* y^6 *as of the third degree since there are no terms in* y^5, y^3, *or* y. *Trying the binomial* $y^2 - a^2 - c^2 = 0$[121]] (Descartes, 1954, p.179), presenta el uso de la construcción para ecuaciones de tercer grado por medio de la intersección de una parábola y el círculo, ejemplificó la existencia de la solución de raíces cuando estas no son enteras. En la figura 50, está el diagrama para la ecuación $x^3 = -8x + 24$ descompuesta inicialmente en la forma $x^3 = -a'px + a'a'q$, se encuentra una raíz por medio de los divisores de 24, $x = 2$.

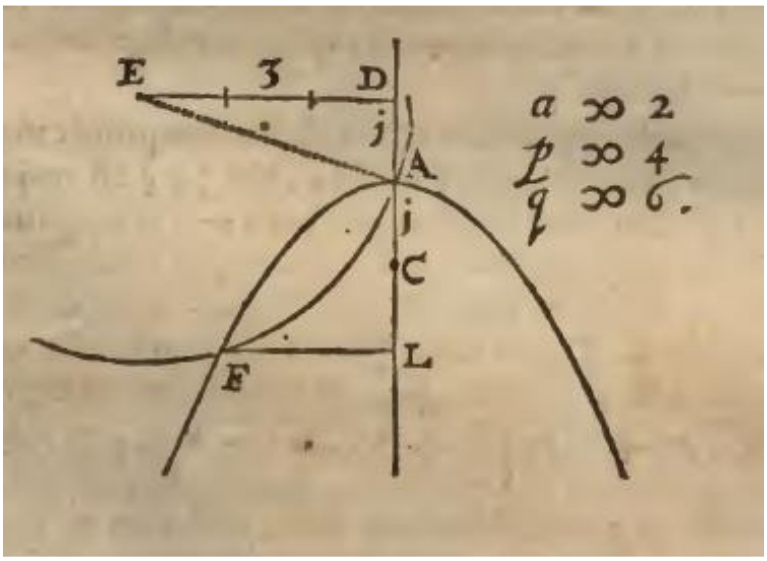


Figura 53. Solución de una ecuación de tercer grado: $x^3 = -8x + 24$. *(Schooten, 1959, p. 303)*

En los comentarios este diagrama se usa para comprobar un proceso algebraico que genera una sola raíz para la ecuación, la cual se representa con $\overline{FL}$. Se comprueba, con la construcción del círculo y la parábola que estas dos curvas para la ecuación se interceptan una sola vez, lo que significa que existe una sola raíz. La construcción geométrica, por lo

[121] Tenga en cuenta que estamos considerando y^6 como de tercer grado ya que no hay términos en y^5, y^3,o y. Pruebe el binomio $y^2 - a^2 - c^2 = 0$.

menos en términos de la solución de ecuaciones, sigue teniendo la certeza de la solución. Su estatus epistemológico es mayor que el procedimiento algebraico. En este sentido, la práctica matemática de la que hace uso van Schooten no modifica los criterios establecidos en *Geometría.*

El comentario Q del tercer libro hace referencia a la raíz que soluciona el problema:

[*and by the preceding rule, we know that its root; which it the length of the line*[122]]

(Descartes, 1954, p.223)

Alrededor de la existencia de las raíces de ecuaciones se presentó el siguiente diagrama cuyo objetivo es mostrar las raíces que no se pueden determinar por medios aritméticos, pero existen.

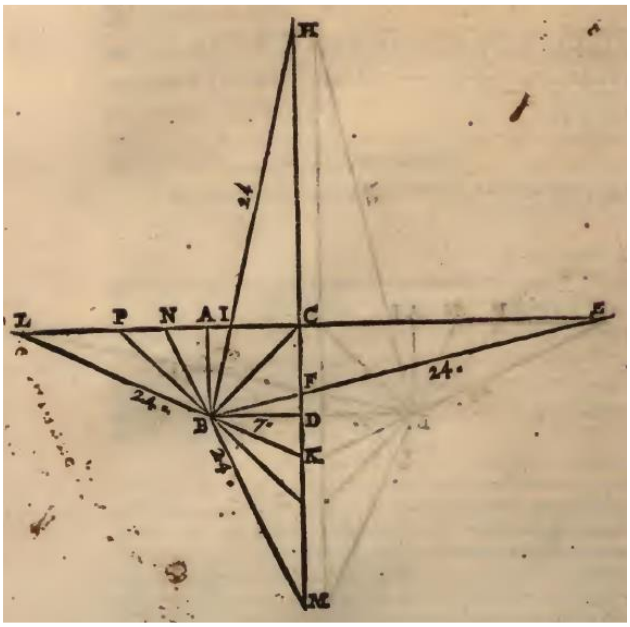


Figura 54. Determinación de raíces de $x^4 - 2ax^3 + (aa - cc)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$.

[122] y por la regla anterior, conocemos su raíz; cuál es la longitud de la línea.

La técnica es novedosa, busca la longitud de la raíz $DF = x$ para la curva $x^4 - 2ax^3 + (aa - cc)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$, que tiene las raíces $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + a\sqrt{aa + cc}}$ y $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + a\sqrt{aa + cc}}$; una es la raíz DF y la otra DH. Se usa la relación del punto D respecto a un punto C que es la intersección de dos rectas LE y HM. La construcción supone la existencia de un punto B en donde FE, IH, KL y MN son iguales a la longitud de la constante c.

Esta construcción muestra un modelo para encontrar raíces de estas ecuaciones que no es por medio de intersección de curvas; es producto de hallar un punto que está relacionado con líneas rectas que asumen el papel de ejes cartesianos, el procedimiento se inclina hacia lo que D´hombres (2000) llamó razonamientos ordenados por un referencial. Al estilo del problema de la solución del problema de Pappus, la solución de este tipo de ecuaciones usa los inicios de lo que hoy llamamos el plano cartesiano.

Descartes planteó un problema para mostrar la utilidad de la reducción de ecuaciones a cuatro dimensiones cuando el problema es plano y sobre los que son sólidos.

> *Given the square AD and the line BN, to prolong the side AC to E, so that EF, laid of from E on EB, shall be equal to NB.*
>
> *Pappus showed that if BD is produced to G, so that DG=DN, and a circle is described on BG as diameter, the required point E will be the intersection of the straight-line AC (produced) with the circumference of this circle. Those not familiar with this construction would not be likely to discover it, and if they applied the method suggested here, they would never think of taking DG for the unknown*

quantity rather that CF od FD, since either of these would much more easily lead to an equation[123]. (Descartes, 1954, pp. 188-191)

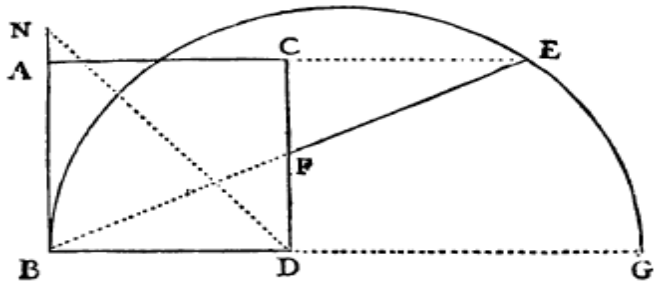


Figura 55. Diagrama propuesto por Descartes para la solución del problema (Descartes, 1954, p 189)

El comentario R se refiere a la solución del problema propuesto por Descartes:

[Again, if DG were used, the equation would be much more difficult to obtain, but its solution would be very simple. I state this simply to warn you that, when the proposed problem is not solid, if one method of attack yields a very complicated equation a much simpler one can usually be found by some other method[124]*.]* (Descartes, 1954, p. 191)

Descartes advirtió la dificultad de tomar DG como la cantidad desconocida, propuso tomar a CD o a FD que conducen a una ecuación más fácil de resolver. Estableció $BD =$

[123] Dado el cuadrado AD y la línea BN, se prolonga el lado AC a E, de modo que EF que establece E en EB, sea igual a NB. Pappus mostró que si BD se produce por G, de modo que $DG = DN$, y un círculo se describe en BG como diámetro, el punto E requerido será la intersección de la línea recta AC (producida) con la circunferencia de este círculo. Aquellos que no estén familiarizados con esta construcción probablemente no la descubrirán, y si aplican el método sugerido aquí, nunca pensarían en tomar DG para la cantidad desconocida en lugar de CF o FD, ya que cualquiera de estos conduciría a una ecuación mucho más fácil.

[124] Nuevamente, si se usara DG, la ecuación sería mucho más difícil de obtener, pero su solución sería muy simple. Digo esto simplemente para advertirle que, cuando el problema propuesto no es sólido, si un método de abordarla produce una ecuación muy complicada, generalmente se puede encontrar una mucho más simple mediante algún otro método.

$CD = a$, $EF = c$, $DF = x$ y $CF = a - x$. Por proporciones, se obtiene que $a - x : c = x : CF$; de donde se obtiene la ecuación general de problema:

$x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$, por lo tanto, la raíz es:

$$DF = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Van Schooten modificó el diagrama y realizó la solución que Descartes desestimó por la dificultad. Tomó como incógnita a DG.

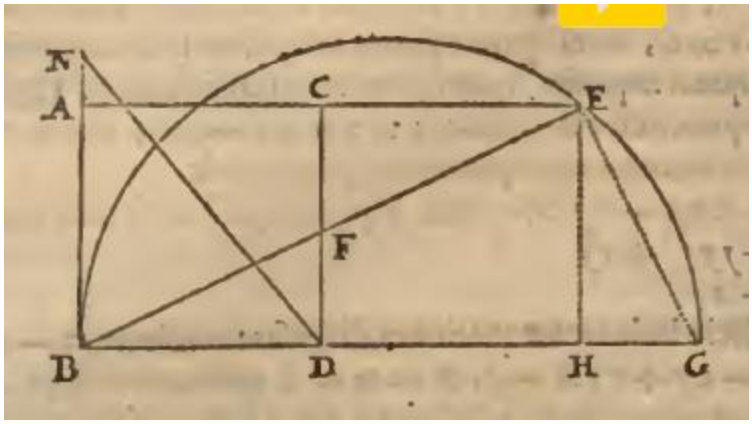


Figura 56. Modificación al diagrama realizado por Descartes. (Schooten, 1659, p. 316)

Inicialmente agrega a la construcción $\overline{EG}$ y, $\overline{EH}$ paralelo a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; nombra lo conocido y lo desconocido, $\overline{BD} = \overline{DC} = a$, $\overline{FC} = c$, $\overline{BF} = y$ y $\overline{DG} = x$. Luego, a partir de las relaciones entre los triángulos BGE y BEH, EHG y BDF, obtuvo la ecuación $xx - aa = cc$; ecuación de menor grado a la obtenida por Descartes: $x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$.

La modificación del diagrama permite visualizar relaciones entre otros triángulos y llegar a una ecuación cuya solución y construcción son conocidas. Van Schooten muestra que este problema que Descartes consideró resoluble a partir de la intersección de un

círculo y una parábola es resoluble a partir de una ecuación más simple. Esta era una de las características propuestas por Descartes para la clasificación de las curvas: la intersección entre ellas se debería dar entre las más simples, lo que se traduce en curvas de menor grado posible. Aparece el diagrama como producto de la imaginación creadora. A partir de la imagen, entran en juego otras relaciones, otra idea sobre la solución, otra creación para la misma situación. Van Schooten encuentra una forma de aplicar el método analítico al problema con una solución más simple que la presentada por Descartes, la trasformación del diagrama permite encontrar otra red de relaciones geométricas que sustentan la ecuación solución, lo que nos permite mostrar que van Schooten experimento con las relaciones de los diagramas que se encuentran en la obra de 1637.

En el comentario VV: [*This rule*[125] *is evidently as general and complete as could possibly be desired. Its demonstration is also very easy*[126]], van Schooten usó las construcciones que presentó Descartes en *Geometría* para mostrar las posibles raíces en las ecuaciones $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s = 0$ y $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$. Para ello, planteó una construcción y su demostración.

Dada la construcción del principio analítico que se encuentra en *Geometría,* van Schooten por medio del proceso sintético, muestra la construcción de las soluciones y luego, dedujo la ecuación a partir de suponer la raíz. Se completa así el método: la integración de lo sintético y lo analítico que presenta no solo las raíces sino la construcción de estas curvas por medio de la intersección de la hipérbola y la circunferencia.

[125] El contexto de esta expresión es la interpretación de las intersecciones de las curvas; de tal forma que, si las curvas no se tocan, entonces no existen raíz verdadera o falsa, en términos de Descartes, es decir: no hay raíz en el conjunto de los números Reales.
[126] Evidentemente, esta regla es tan general y completa como podría desearse. Su demostración también es muy fácil.

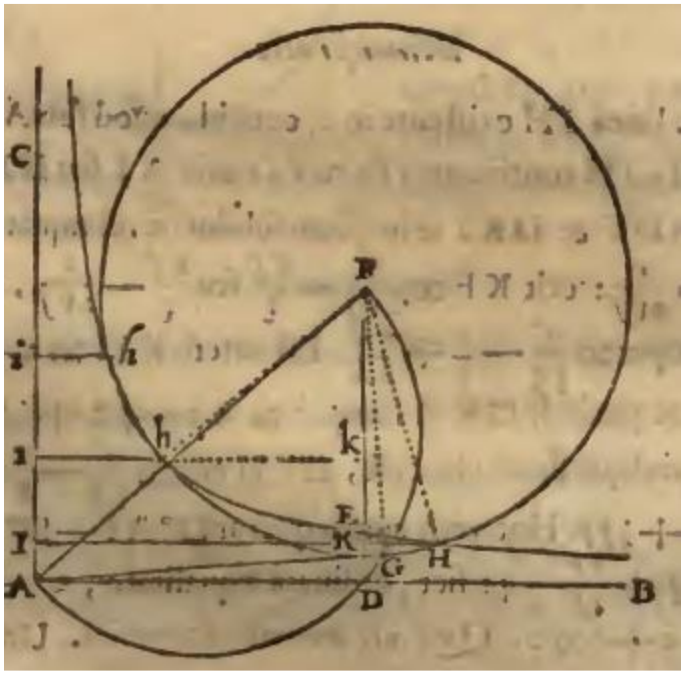


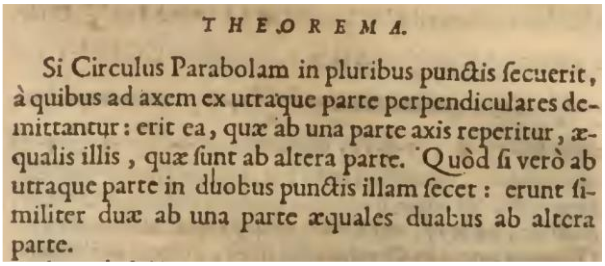
Figura 57. Construcción para la ecuación $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s = 0$

Para la construcción toma $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, las cuales se intersecan en el ángulo recto A. En $\overline{AB}$ la línea $\overline{AD} = \frac{1}{2}p$, desde D y paralelo a $\overline{AC}$, se traza $\overline{DF}$. Entonces se forma el punto E, $\overline{DE} = \sqrt{s}$ descrito por E cerca de las asíntotas AC y AB de la hipérbola Heh. Además, toma $\overline{DF} = \frac{r}{2\sqrt{s}}$, traza el segmento AF y, con ese diámetro, traza el semicírculo ADF que permite encontrar el punto G en la intersección con el círculo de centro F y traza el segmento $AG = \sqrt{q}$. El círculo es tangente a la hipérbola, en la línea AC se limitan las perpendiculares de la ecuación HI, Hi hi, que son las longitudes de las raíces. Van Schooten aclara que se debe notar que, si la longitud de AG es mayor que la del semicírculo GHh, no se toca a la hipérbola Heh y no es posible construir la raíz; por lo tanto, para estas ecuaciones las raíces son imaginarias.

La demostración dedujo la expresión simbólica de la ecuación que presenta la intersección entre las curvas, a partir de suponer la existencia de la raíz $IH = z$, que está

contenida en las relaciones propuestas entre AD, DE y AI, IH como $DE = \sqrt{s}$ entonces $DK = \frac{\sqrt{s}}{z}$. Como $DF = \frac{r}{2\sqrt{s}}$, entonces, $KF = \frac{r}{2\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{z}$ o $\frac{\sqrt{s}}{z} - \frac{r}{2\sqrt{s}}$. Entonces $KF^2 = \frac{s}{z^2} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s}$. También se conoce que $KH = z - \frac{1}{2}p$ o $\frac{1}{2}p - z$; de donde, se obtiene que $KH^2 = zz - zp + \frac{1}{4}p^2$. Usando el teorema de Pitágoras, se obtiene que $FH^2 = \frac{s}{z^2} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s} + zz - zp + \frac{1}{4}p^2$ y esto es igual a $AF^2 - AG^2$, que es lo mismo que $\frac{1}{4}pp + \frac{rr}{4s} - q$, de donde se conforma la igualdad $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s = 0$, y, por tanto, $IH = z$.

Este mismo tratamiento lo realiza para las ecuaciones de tercer grado. En el comentario X: [*and the false root FL is equal to the sum of QN and NV as may easily be shown*[127]], van Schooten se refiere a la frase de Descartes de la elección del segmento solución en el problema de la trisección del ángulo como parte de las conversaciones con Claudius Mylon y en donde se construyó el siguiente teorema[128]:



THEOREMA.

Si Circulus Parabolam in pluribus punctis secuerit, à quibus ad axem ex utraque parte perpendiculares demittantur: erit ea, quæ ab una parte axis reperitur, æqualis illis, quæ sunt ab altera parte. Quòd si verò ab utraque parte in duobus punctis illam secet: erunt similiter duæ ab una parte æquales duabus ab altera parte.

Figura 58. Teorema sobre la resolución de ecuaciones.

Este enunciado es ejemplo del estudio que van Schooten realizó de esta construcción y la categoría epistemológica en que puso la resolución de ecuaciones por medio de la intersección de curvas de menor grado. En la obra original se describe la heurística de creación de las curvas, se resuelven problemas con ella, pero no intenta institucionalizarse

[127] Y la raíz falsa FL es igual a la suma de QN y NV como se puede mostrar fácilmente.

[128] Si una pluralidad de puntos de un círculo ha cortado una parábola y se trazan perpendiculares al eje por ambos lados, desde los puntos de corte que están a ambos lados del eje, la longitud del segmento que va en perpendicular de un lado del eje es igual a la longitud de los segmentos que están al otro lado.

en las matemáticas de la época a través de una teoría de curvas, aunque, enunció la técnica para ecuaciones de grado n. Este teorema es un vestigio del intento de teorización de las propiedades de los objetos a través de la técnica. Sin embargo, es el único que existe en los comentarios.

Para argumentar y probar la existencia de la propiedad, usó el siguiente diagrama:

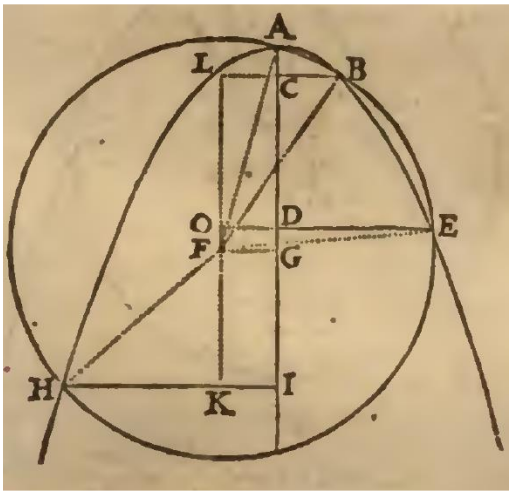


Figura 59. Diagrama usado para demostrar el teorema. (Schooten, 1659, p. 334)

La parábola $HABE$ tiene eje AI y vértice en A. El círculo corta en H, B, E a la parábola; siendo los segmentos HI, DE y BC perpendiculares al eje. El *Latus rectum* de la parábola es a, y $CB = c$, $DE = d$, $HI = z$, $AG = x$ y $FG = y$. Se va a mostrar que HI es igual a DE y CB juntos. Por la proposición 11 del libro I de *Cónicas* de Apolonio y tomando cada uno de los segmentos como *latus rectum*, se tiene que $AC = \frac{cc}{a}$, $AD = \frac{dd}{a}$ y $AI = \frac{zz}{a}$; por lo tanto, si se toma $AC = \frac{cc}{a}$ al lado de $AG = x$, dejando CG o $LF = x - \frac{cc}{a}$. Al elevar al cuadrado, se obtiene que $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{a^2}$. Al adicionar el cuadrado de la recta $LB = yy + 2cy + cc$, y al sumar se obtiene: $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{a^2} + yy + 2cy + cc = FB$, y que

$FA^2 = xx + yy$. Igualando, porque las dos longitudes son el radio de las circunferencias, se obtiene que: $x = \frac{c^3+2aay+aac}{2ac}$.

Análogamente, si se toma que $AD = \frac{dd}{a}$ tomando $AG = x$ y $FO = x - \frac{dd}{a}$, cuyo cuadrado es $xx - 2x\frac{dd}{a} + \frac{dd^2}{a^2}$, el cuadrado de $EO = dd + 2dy + yy$, al proceder de la misma manera que en el anterior, obtenemos que $x = \frac{d^3+2aay+aad}{2ad}$.

Entonces, se obtiene la igualdad $\frac{c^3+2aay+aac}{2ac} = \frac{d^3+2aay+aad}{2ad}$; de donde se deduce que $cdd + ccd = 2aay$. De manera similar, si se toma la siguiente opción: $AI = \frac{zz}{a}$, tomando $AG = x$ y $FK = \frac{zz}{a} - x$, el cuadrado es $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx$, de donde se deduce que $x = \frac{z^3-2aay+aaz}{2az}$. Como se tiene x representada de varias maneras, se iguala a la primera forma y se obtiene $czz - ccz = 2aay$. Por lo tanto, se tiene que $czz - ccz = cdd + ccd$; siendo así, $zz - cz - dd - cd = 0$. Queda mostrar que la ecuación se elimina, de manera que $z - c - d = 0$. Entonces, se dice que: $z = c + d$ o que HI es igual BC junto a ED.

Nuevamente, el diagrama hace parte del proceso de argumentación de la prueba a través de un caso, el cual se expone en el diagrama, pero con el cual, se generaliza la propiedad que se quiere mostrar. Se muestran las relaciones que garantiza la existencia de la propiedad. Este tipo de diagrama también fue usado por Descartes en *Geometría*, hace parte del supuesto que permite el uso del método.

3.3 Appendix de Cubicarum Aequatonum Resolutione

En este apéndice Schooten demostró tres teoremas y la misma cantidad de problemas sobre la resolución de ecuaciones cúbicas, los cuales fueron trabajados en el

libro de 1629 de Albertus Girardus a partir de la regla Cardano, van Schooten afirma que va a esclarecer la solución de esas proposiciones.

El primer teorema es;[129]

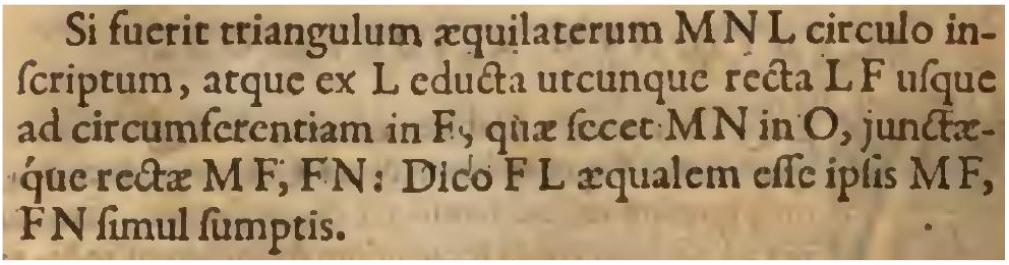

Si fuerit triangulum æquilaterum M N L circulo inſcriptum, atque ex L educta utcunque recta L F uſque ad circumferentiam in F, quæ ſecet M N in O, junctæque rectæ M F, F N: Dico F L æqualem eſſe ipſis M F, F N ſimul ſumptis.

Figura 60. Teorema I. (Schooten, 1659b, p.346)

El tipo de argumentación que van Schooten presentó de este teorema fue de estilo euclidiano; el diagrama se usa para ejemplificar las relaciones geométricas que se dan entre los segmentos involucrados.

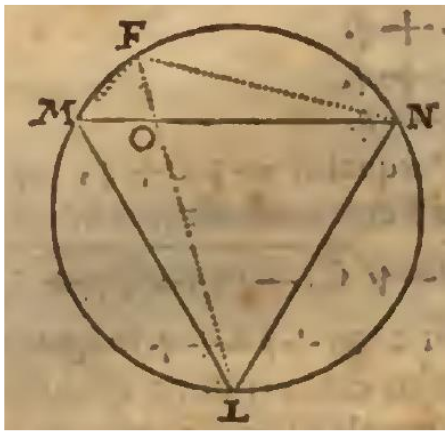


Figura 61. Diagrama asociado al teorema I. (Schooten, 1659b, p.346)

Toma la semejanza entre los triángulos *LNO* y *LFN* con el ángulo *L* común; de tal manera que, NO es a LN como FN es a LF. Se cumple la semejanza entre los triángulos LMO y LFM, luego dedujo que MO es a LM o LN, como FM es a LF; por lo tanto, NO y

[129] en un triángulo equilátero MNL inscrito en un círculo, se cumple que el segmento LF desde el vértice L a un punto Fde la circunferencia, es igual a la suma de los segmentos de cada uno de los otros dos vértices con F. MF y FN.

MO son a LN. Entonces FN, FM es a LF. NO y MO juntos son iguales a LN, por lo tanto, FM y FN juntos son iguales a LF.

Van Schooten le dio a la argumentación un tratamiento que mantiene el carácter clásico euclídeo. La argumentación estuvo centrada en la semejanza de triángulos y en los segmentos proporcionales. Este estilo lo mantuvo en los siguientes dos teoremas. El segundo de ellos hace referencia a las relaciones de los arcos, al inscribir el triángulo equilátero y probar las relaciones entre los segmentos del teorema I. En el último teorema prueba que HL, HN, y HM son iguales a la recta LK. Para este propósito el autor usa las relaciones proporcionales que encontró en los teoremas I y II.

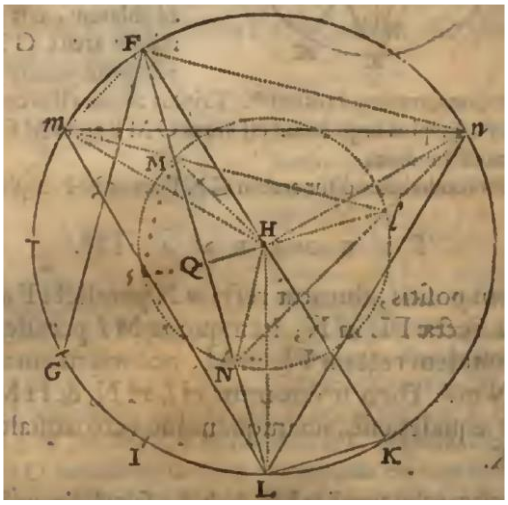


Figura 62. Diagrama teorema III. (Schooten, 1659b, p.348)

Luego de hacer una prueba sintética, constructiva, en la que usó el paralelismo de mL con FK, de Fn con ml y de Fm con Nn, van Schooten probó que *Hl*, *HN* y *HM* son iguales a *LK* y *mF*.

Desarrollada la construcción, van Schooten generaliza un enunciado de los tres teoremas que abordó y, con las herramientas algebraicas de la época, encontró el principio analítico, la solución es una ecuación de grado tres.

Dado el círculo FGK con un diámetro KF, el segmento FL, el arco *GK*, el cual se triseca en I y en L, y la medida del ángulo GI; y sabiendo que HK y HF=a y $FG = b$, hallar $FL = x$.

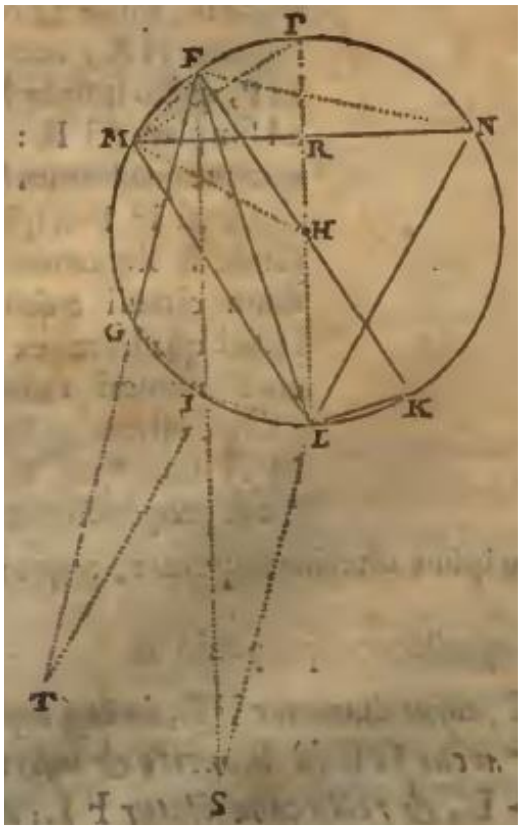


Figura 63. Diagrama anexo al teorema III. (Schooten, 1659, p.349)

El planteamiento de la solución es: dibujar KL, LI e IG, segmentos de la trisección del arco KG del teorema II. A partir de FI, sobre esa base, construye S, de tal manera que: SI y $SL = LF$. Igualmente, construyó el punto T, siendo el ángulo FTI congruente con el ángulo $GFI, TI = IF$ y $TG = LF$.

Como FH o $HK = a$ y $FG = b$, por propiedades de los triángulos ILS y KLF y la semejanza de los triángulos FHL, FLS y FIT, se deduce que $HF : FL :: LF : FS$. Entonces, obtuvo que $FS = \frac{xx}{a}$ y $IF = \frac{xx}{a} - 2a$. Como $HF: FL :: IF: FT$, entonces, $FT = \frac{x^3}{aa} - 2x$;

como $TG = FL = x$ y $FG = b$, se obtiene que $x^3 = 3aax + aab$, que es una ecuación de tercer grado. Por lo tanto, la solución de los teoremas es resolver una ecuación de tercer grado. El método analítico ya no solo se usa para resolver problemas, van Schooten lo usó para probar los tres teoremas. Situación que se va a volver frecuente, usar el método analítico para la prueba de proposiciones.

En este apartado, trabajó tres problemas relacionados con los teoremas propuestos. Para abordar estas situaciones geométricas usó el método cartesiano, planteó ecuaciones y, por medio de procedimientos algebraicos, solucionó la situación. Usó los diagramas en el mismo sentido que lo hizo Descartes; es decir, como parte del primer acercamiento del problema, a través del diagrama propuso una solución particular a la situación.

En el problema uno, buscó la construcción de un cuadrilátero inscrito en un semicírculo, del cual se conocen tres lados para buscar la medida del cuarto lado, que es el diámetro del semicírculo.

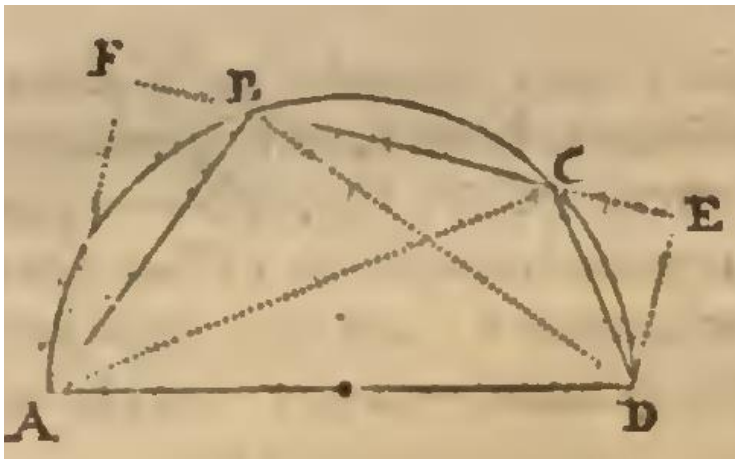


Figura 64. Diagrama problema I.

La argumentación que realiza es: dados $AB = a$, $BC = b$ y $CD = c$, y el diámetro $AD = x$, se traza una línea BD y sobre ella DE perpendicular con BC. El triángulo ABD es rectángulo; por lo tanto, el cuadro AD es igual al cuadrado de AB más el cuadrado de BD.

Entonces, $BD = xx - aa$. Por otro lado, el triángulo BDC y el cuadrado de BC, es más que el cuadrado BD junto al cuadrado CD. El duplo del rectángulo BCE; se sabe que es $BD^2 = xx - aa$, por lo tanto, $CD = bb + cc$ y el resto es el doble del rectángulo, $BCE = xx - aa - bb - cc$. Finalmente, como los triángulos ABD y CED son semejantes, los ángulos A y DCE, son congruentes; DA es AB, como DC es a CE. Así, cuando $AD = x$, $AB = a$ y $DC = c$, entonces, $CE = \frac{ac}{x}$. Si se multiplica por el doble de $BC = 2b$, de tal forma que $BCE = 2\frac{abc}{x}$, entonces, $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$, que es igual, $x^3 = 2abc + a^2x - b^2x + c^2x$. Esta ecuación ya era conocida por van Schooten y, por lo tanto, la situación estaba resuelta por medio de transformaciones algebraicas.

En este apartado, el autor muestra una jerarquía epistemológica para las proposiciones y de los modelos de argumentación que usa. El diagrama, como lo afirma Panza (2012), es un ejemplo de la relación permanente que se da; hereda las propiedades que ya se conocen del objeto. El diagrama en el teorema toma una de las tantas posiciones que pueden adquirir los objetos, muestra una red de conceptos y relaciones que existen en la proposición. Estos teoremas muestran la ampliación de la teoría euclidiana a partir de las nuevas herramientas analíticas, el diagrama siguió interactuando con las relaciones de los objetos geométricos, ahora para hallar la expresión simbólica.

En los problemas, dio otro comportamiento respecto a la relación con el diagrama. Asumió el método para solucionar problemas que se deduce del trabajo de Descartes. El proceso es analítico, la vinculación del diagrama con la solución del problema se dio al suponer las relaciones geométricas a través del diagrama. Nuevamente, es la imaginación la que se pone en juego, se construyen los segmentos auxiliares que permitieron ver las relaciones geométricas que llevan a la expresión algebraica que contiene la solución del

problema. En la solución de los problemas, usa la diferenciación entre la jerarquía de las proposiciones y de su tratamiento argumentativo. Sin embargo, tanto para el problema como para el teorema, se presenta un caso a través del diagrama; es con los elementos que se relacionan en el diagrama que se abre la posibilidad de construir tanto la argumentación como la solución del problema. La relación epistémica entre estos dos tipos de enunciado que muestra van Schooten permite decir que los objetos en el rigor euclidiano pasan a ser representables como objetos en el mundo analítico cartesiano.

3.4 Epistola de Transmutatione Curvarum Linearum in Rectas

Este documento es una carta escrita por Heuraet a van Schooten el 13 de enero de 1659, en donde presentan un método para describir el área bajo una curva a partir de una longitud dada. Veamos el problema y los argumentos; si dentro de dos curvas $ABCDE$ y $GHIKL$ y la recta AF se dibuja, desde el punto M, en la línea AF, la perpendicular MI, secante a las curvas en C y en I, con CQ perpendicular a la curva $ABCDE, MC$ es a CQ como una recta cualquiera dada Σ es a MI. Esta superficie $AGHIKLF$ es igual al rectángulo comprendido entre Σ y otra línea igual a la longitud de la curva $ABCDE$.

Toma un punto M arbitrario en AF, traza una línea perpendicular a AF por M, MI se intercepta con las curvas en C y en I. Por el punto C, se traza una perpendicular a la curva CQ en el punto C, así cualquier recta dada Σ puede ser un MI. Entonces, la superficie $GHIKLF$ es igual al rectángulo comprendido bajo una línea dada Σ y otra línea recta igual a la curva $ABCDE$.

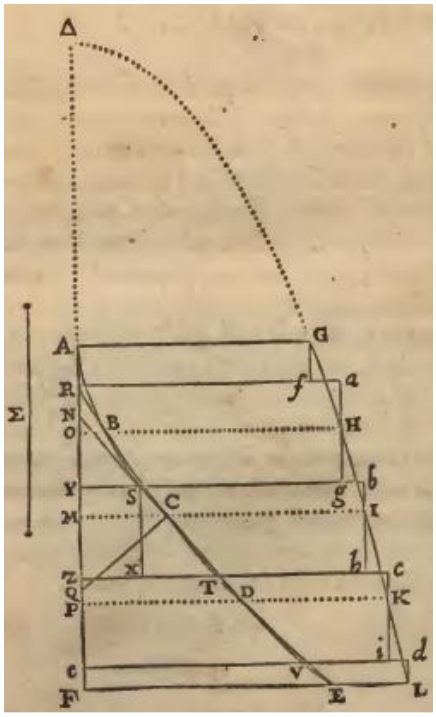


Figura 65. Área bajo una curva a partir de una longitud dada. (Heuraet, 1659, p.518)

La argumentación que mostró Heuraet es una construcción al estilo euclidiano, en los pasos que geométricamente garantizan la proposición, se combinaron varios elementos de las problemáticas de la época; especialmente: el cálculo del área debajo de la curva y la linealización de una curva.

Los argumentos que plantea el autor para mostrar que es posible el cálculo del área en las condiciones propuestas fueron; se divide la línea AF en partes; por ejemplo, en O, M y P, se dibujan perpendiculares a AF; OH, MI y PK, secantes a la curva $ABCDE$ en los puntos B, C, D; y a la curva $GHIKL$, en los puntos H, I y K. Por los puntos A, B, C, D y E pasan secantes en R, S, T y v; en estos puntos, se dibujan Ra, Yb, Zc que son perpendiculares a AF.

Por los puntos G, H, I, K y L se dibuja una línea paralela a AF y secante a Ra en f; g en Yb; h en Zc; i en cd. Finalmente, en S se dibuja Sx paralela a AF produciendo la tangente TS hasta N. Por el ángulo recto NCQ, se tiene que CM es a CQ, como MN es NC; MN es NC como Sx es ST. Por lo cual, Sx es ST como CM es CQ, y porque CM es a CQ como Σ es a MI. Así, el producto de Sx con YZ y MI con Yb son iguales al rectángulo ST y Σ. De este modo queda demostrado que el rectángulo ce es igual al rectángulo $TV\Sigma$. El rectángulo dF es igual al rectángulo $VE\Sigma$; el rectángulo aY es igual al rectángulo $RS\Sigma$. Si estas relaciones se extienden al infinito, entonces, se define la superficie $AGHIKLF$ igual al rectángulo comprendido entre Σ y $ABCDE$.

La relación entre el diagrama y la argumentación permite mostrar, paso a paso, la red de conceptos y elementos que se involucran en la construcción se expone como una herramienta que me permite pensar la relación de proporcionalidad para cualquier punto de la curva, el proceso infinito de igualdades queda representado en el diagrama a través de la finitud de la secuencia de relaciones entre varios puntos de la curva, asunto que es nuevo en la obra. El diagrama ahora representa procesos infinitos asunto que se vuelve a ver en los trabajos presentados por Reyneau sobre cálculo diferencial e integral, pero que se salen de los dominios de esta investigación.

3.5 Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesiane Géometríae Methodum Renati Descartes

Van Schooten dedicó el primer escrito del segundo tomo de la segunda edición en latín de la *Geometría* a organizar la idea de *mathesis Universalis*, la cual estuvo basada en la presentación de las técnicas de operatividad algebraica. Este desarrollo persistió durante

el siglo XVIII; autores como Newton y Leibniz leyeron este documento y basaron parte de sus trabajos en esta idea. (Chikara, 2003, pp. 394-405).

Como se planteó en el marco referencial, capítulo dos de esta tesis, los historiadores mantienen dos posiciones sobre la idea de *mathesis Universalis* en el *Discurso del Método* y de las *reglas para la dirección del espíritu*. En una interpretación, sugieren que Descartes entendió la *mathesis Universalis* como la relación entre el álgebra y el método como sistema matemático-mecánico; en esta perspectiva, la *mathesis* es matemática. En la otra perspectiva la *mathesis* es un proceso de abstracción diferenciado de la matemática que permite buscar la verdad de cualquier cosa, pero que contiene la forma de pensar de la matemática. En este caso, es un problema más filosófico: a través de la *mathesis* se impone la razón. (Chikara, 2003, pp. 189-203; Descartes, 2010, pp. 29-50)

La referencia que Descartes hizo a este tema se encuentra en la regla IV:[130]

> *I saw consequently that there must be some general science to explain that element as a whole which gives rise to problems about order and measurement, restricted as these are to no special subject matter. This, I perceived, was called "Universal Mathematics", not a fat fetched designation, but one of long standing which has passes into current use, because in this science is contained every-things on account of which the others are called parts of mathematics*. (Descartes, 1952, p. 7)

La interpretación de esta parte de la regla permite pensar que Descartes va más allá de la matemática. Toda su propuesta sobre cómo conocer está basada en la construcción del

[130] En consecuencia, vi que debe haber algo de ciencia general para explicar ese elemento en su conjunto que da lugar a problemas sobre el orden y la medición, restringidos como estos no son temas especiales. Esto, percibí, se llamaba "Mathesis universalis", no una designación engorrosa, sino una de larga data que ha pasado al uso actual, porque en esta ciencia está contenido todo, por lo que las otras se denominan partes de las matemáticas.

método, el cual se complementa con la *mathesis Universalis* permitiendo pensar cualquier problema, no solo los científicos. La forma de razonar y de expresar los problemas es como en la matemática, que fue la única ciencia que Descartes consideró que lo llevaría a la verdad. Para este análisis se adopta esta última posición sobre la *mathesis* y su relación con el método.

Este escrito fue usado por van Schooten para sus cursos privados en la Universidad de Leiden; en donde, se refirió a la idea de *mathesis* como método general: una organización de las cantidades abstractas a través de las operaciones (Chikara, 2003). El método que presentó son reglas que se traducen en el método analítico de resolución de problemas. El principio lógico de la tricotomía se enuncia en las primeras páginas, en donde indicó que: si existen dos cantidades representadas por líneas iguales a y b, eso implica que $a = b$.

Este documento contiene el manejo simbólico de las cantidades, su correspondencia con el tratamiento operativo por cada operación; van Schooten afirmó, en el prefacio, que desde esta simplicidad solo queda aplicar los principios de la proporción para poder solucionar problemas geométricos.

El autor le explica al lector los principios cartesianos desde una teoría general de la cantidad, sobre magnitudes abstractas, sin apelar al significado geométrico, a los diagramas o algún otro recurso semiótico diferente al signo y sus operaciones. Un nuevo campo operativo que permite el tratamiento de todos los problemas que tiene que ver con la cantidad. (Schooten, 1661, pp. 1-2)

En la idea de práctica matemática que se sigue en esta tesis algunas componentes del sistema de práctica original se modificaron en este escrito de van Schooten. La estructura es la misma, pero, la posición sobre el papel del álgebra cambia. En esta introducción a la

mathesis Universalis los símbolos no están en el campo de la geometría, constituyen un sistema dentro de la práctica que está desprovisto de contexto: es el símbolo en términos de la definición de Pierce; su origen es un convenio sobre su tratamiento, sobre su operatividad y sobre su existencia.

Por ejemplo: al revisar el caso de las operaciones en la obra de Descartes, se definieron cinco operaciones ligadas a una comparación entre la aritmética y la geometría que usa diagramas para justificar y plantear la operación. Existe visualización geométrica de las relaciones que se establecían como definición de la operación. Así, en el caso del producto se define la proporción $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE}$, AB se tomó como la unidad definiendo el producto como $BE = BD \times BC$. -Ver figura 6-.

En este caso, la definición depende tanto de la unidad como de la proporción, y está ligada a las relaciones geométricas expuestas en el diagrama. Los casos de la división y de la raíz cuadrada también están definidos en este campo semántico y sintáctico, y así son usados en la práctica.

El procedimiento de van Schooten no hace referencia ni al diagrama ni a la proporción; define la operación como el producto de dos líneas a y b, que se escribe ab o ba y, sin nombrar más la representación por medio de líneas, define la potenciación, a partir de ejemplos como $a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$. Se establece una nueva sintaxis, el lenguaje simbólico se consolida en el programa de investigación que se estableció alrededor de la obra de Descartes.

De Multiplicatione quantitatum ſimplicium.

POrrò ad multiplicandum lineam *a* per lineam *b*, ſcribo *a b* vel *b a*. Sic & ad multiplicandum *a* per *a*, hoc eſt, *a* in ſe, ſcribo *a a* ſeu a^2: & *aaa* ſeu a^3 ad prædictum productum *a a* adhuc ſemel multiplicandum per *a*. Adeò ut literæ immediatè ſeſe conſequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam eſſe, indicent. Non ſecus, ſi multiplicare velim *a*, *b* & *c* per invicem, ſcribo *a b c*, vel *b a c*, vel *c b a* &c: & *a b b* ſeu $a b^2$ vel $b^2 a$, ad multiplicandum *a*, *b*, & *b*. Hîc enim, ut in additione, non refert, quo ordine ſcribantur.

Figura 66. Definición de producto.[131] *(Schooten, 1661, p.4)*

De igual manera, los planteamientos de ejemplos y de ejercicios no dependen de situaciones problema. La simbología aparece despojada de espacio y tiempo, la naturaleza de la simbología ya no es geométrica; las ecuaciones son objetos matemáticos abstractos, y se plantean expresiones cuyo resultado es difícil de representar en geometría euclidiana, pues tienen más de tres varias variables. Los ejercicios recaen en la manipulación de la sintaxis que se produce en la nueva definición de las operaciones.

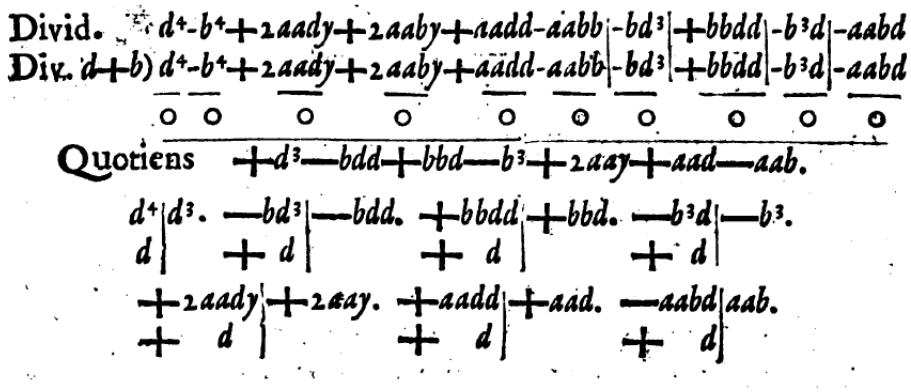


Figura 67. Ejercicio de división. (Schooten, 1661, p.15)

[131] De la multiplicación de cantidades simples. Además, la multiplicación de una línea a por una línea b escribimos ab, si es la multiplicación de a por a, es decir por si mismo, escribo a^2 y aaa es a^3, como producto entre aa una multiplicado por a, entonces esa letra, inmediatamente después de la otra, multiplicándolas por las otras, todas van siendo conocidas. Lo mismo pasa si multiplicamos como a, b y c, escribimos abc o bac o cba y abb es ab^2 o b^2a que es el producto de a, b, b. Como en la adición no importa el orden en que fueron escritos.

En el caso de la igualdad de expresiones, aparecen algunas de las fórmulas que hoy son tradicionales en el manejo simbólico del álgebra, por ejemplo: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

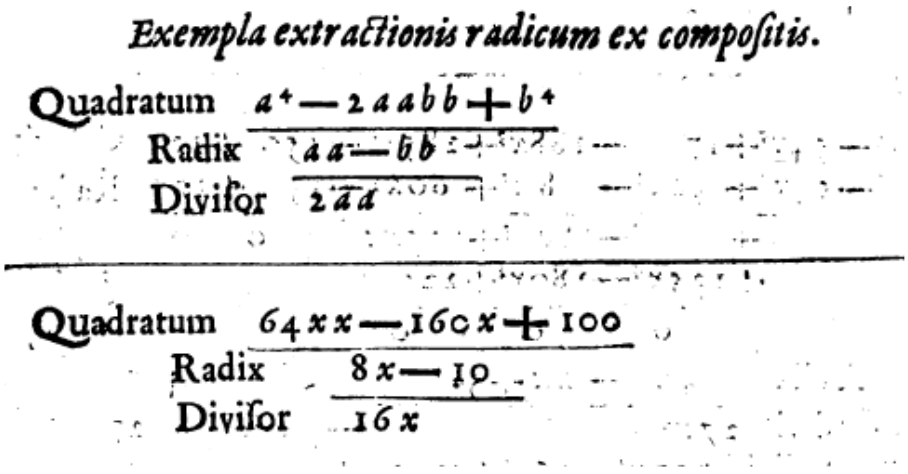


Figura 68. Ejemplo de extracción de raíces. (Schooten, 1661, p.17)

Esta transformación en la práctica que presentó Descartes en la *Geometría* no es estructural; no modifica la totalidad de la práctica. El horizonte del programa de investigación se mantiene, al igual que la idea de matemática de la que habló Descartes en el *Discurso del método*; en donde advierte la necesidad de construir un procedimiento para resolver todos los problemas de la ciencia que tuviera las virtudes que había encontrado en la aritmética, el análisis de los antiguos y el álgebra de los modernos, podemos decir que este tratado de van Schooten completa este proyecto. Van Schooten realiza este escrito como una introducción a la geometría cartesiana, para luego resolver problemas; en ese sentido, la operatividad algebraica es un requerimiento para aplicar el método. Es este lenguaje y su operatividad los que hacen parte de los principios de la *mathesis Universialis,* los cuales se usan a través del método.[132]

[132] Y en cuanto al análisis de los antiguos, el hecho de que abarquen sólo las cuestiones más abstractas, como las que parecen no tener un uso real, las primeras están siempre tan restringidas a la consideración de los símbolos que no pueden ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación de las personas y en el

> *And as to the Analysis of the ancients the fact that they embrace only matters the most abstract, such as appear to have no actual use, the former is always so restricted to the consideration of symbols that it cannot exercise the understanding without greatly fatiguing the imagination; and in the latter one is so subjected to certain rules and formulas that the result is the construction of an art which contributes to its cultivation. This made me feel that sone other method must be found, which, comprising the advantages of the three, is yet exempt from their faults.* (Descartes, 1952, pp. 46-47)

El método, como lo cita Descartes en su *Geometría*, fue modificado; se comparte aquí con Graukroger (1989, pp. 48-52) que la perspectiva original incluyó intuición, experimentación y deducción para generar un nuevo conocimiento; gran parte de sus seguidores implementaron una idea más mecánica, más estructural, en donde la intuición y la experimentación para el análisis de problemas se fueron separando de la idea original.

Van Schooten, terminó esta introducción al cartesianismo ampliando el sistema numérico para el cual se cumplen las técnicas algebraicas. Presenta las operaciones con fracciones de igual o diferente denominador y las formas de reducir términos semejantes.

Este modelo de presentación de las técnicas algebraicas y luego la resolución de problemas a partir del método, se estableció durante años en los libros de texto, Arnauld en *Nouveaux Éléments de Géometrie* (1ra. Edición 1667, 2da. Edición 1683) y Prestet *Éléments des Mathématiques* (1.ra edición 1675, 2.da edición en 1689), mantuvieron esta estructura de un álgebra de las cantidades abstractas y usaron la geometría como una

segundo está tan sometido a ciertas reglas y fórmulas que el resultado es la construcción de un arte que contribuye a su cultivo. Esto me hizo sentir que se deben encontrar algunos otros métodos, que, al comprender las ventajas de los tres, está exento de sus defectos.

aplicación. (Schubring & Karp, 2014 p. 467). Este tipo de exposición para la enseñanza, llamado lógico–genético (Steiner , 1998), no siguió la estructura euclidiana, propuso nuevas demostraciones y estructuró un modelo de libro cuyo primer capítulo estuvo centrado en el manejo de la sintaxis simbólica, sobre las operaciones de las cantidades, tal y como lo hizo van Schooten en esta parte de la segunda edición de la *Geometría*.

La aproximación a la propuesta de Descartes se dio con esta versión de la *Geometría*, los científicos de la época leyeron esta introducción a las matemáticas cartesianas. En el caso de Leibinz, las conversaciones cartesianas estuvieron influenciadas por Arnauld (Leibinz, 2007). Sus primeros escritos estuvieron penetrados por una analogía entre el análisis matemático, estructurado a partir del álgebra simbólica con sus operaciones, que se usó para resolver problemas geométricos después de Descartes y el análisis lógico como principio para descomponer verdades en entidades simples[133] "*More than targeting at Descartes himself, the model of «Cartesian» logical analysis aimed at by Leibniz here is the one provided by Arnauld and Nicole in their Logique*" (Rabouin, 2015, p. 53).

En 1684 Leibniz escribió sobre las bondades y las dificultades del método cartesiano; en ese momento reconoció que ya tenía un manejo del método para encontrar la naturaleza de las curvas a partir de la ecuación general. Se va a separar de las ideas cartesianas, entre otros asuntos, porque encuentra dificultades para aplicar el método en algunos problemas; por ejemplo, para solucionar algunos problemas planteados en la aritmética de Diofanto y para aplicar esa idea al estudio de curvas trascendentes.

[133] Más que apuntar al propio Descartes, el modelo de análisis lógico "cartesiano" al que apunta Leibniz aquí es el proporcionado por Arnauld y Nicole en su Lógica.

3.6 Elementa Curvarum Lineaurum

Los dos tomos de este libro fueron escritos por Jan de Witt (1626-1672) y son considerados por algunos historiadores como la primera organización de un libro de texto de geometría analítica, el libro I con una visión de las cónicas como objeto geométrico, basado en el texto de *Cónicas* de Apolonio y el libro II con las ideas del cartesianismo, con un uso especial de la representación simbólica.

El autor fue un ilustre abogado, estudió en la Universidad de Leiden y se dedicó a las matemáticas en sus tiempos libres; las estudió con van Schooten quien lo formó en matemáticas cartesianas, fue gran pensionario de Holanda (1653-1672), lo que se conoce hoy como primer ministro.

3.6.1 Liber Primus

El primer tomo de *Elementan Curvarum Lineaurum* contiene una carta de octubre 8 de 1658, en donde Witt narra las intenciones de su texto: dar a conocer una forma de abordar las curvas de segundo grado más fácil de entender que la propuesta por los antiguos, que está basada en las curvas que se producen al realizar cortes de un cono. Las pruebas que se abordan están escritas en lenguaje natural, el autor usa simbología solo para designar puntos; esta presentación se mantiene durante este análisis. En ese sentido, esta tesis se aparta de la percepción de historiadores como Easton (1963) o Coollidge (1968) quienes analizaron la obra a partir del uso actual de las proporciones. En la interpretación de este texto, no existe un tratamiento de simbólico de la proporción; son nombradas para explicar las relaciones que se establecen a partir de diagramas. La intención de de Witt es estudiar las cónicas como objetos geométricos a través de diagramas que representan movimiento. En algunas ocasiones, a partir de las relaciones inmersas en la construcción de

instrumentos. De Witt no se refirió a instrumentos para la construcción; pero, las representaciones geométricas que usa se corresponden con los instrumentos que presentó van Schooten en la obra de 1657.

La organización de cada capítulo se realizó con unas primeras definiciones, luego teoremas y corolarios. Cada proposición tiene una jerarquía dentro la estructura, cada teorema aparece con su prueba y algunos diagramas ilustran las posiciones de las curvas en un punto determinado. De Witt retoma las propiedades expuestas en *Cónicas* y construye argumentos geométricos que permiten entender esos objetos y sus propiedades a partir del movimiento.

En este sentido, el libro I construye un puente entre la cónica geométrica y la cónica generada por movimiento, como lo propone Descartes. La construcción de curvas que propuso de Witt depende de la generación de puntos que se mueven bajo ciertos parámetros y eso mismo es lo que se construye a partir de los instrumentos propuestos por Descartes y van Schooten.

En este documento se analizan como ejemplo de este tratamiento algunas proposiciones sobre las cónicas que están en el capítulo II del libro I, el cual trata sobre la hipérbola. De Witt propuso para esta cónica ocho definiciones, nueve teoremas, dieciséis corolarios y un problema. En su presentación introduce la idea de trazo de curva a partir del movimiento continuo, genera curvas al controlar la relación entre un par de brazos, los cuales forman punto a punto la curva. Por ejemplo, en la definición 2 del capítulo II:[134]

[134] Cuando una línea recta gira alrededor de un punto fijo y al mismo tiempo empuja un ángulo rectilíneo a lo largo de una línea recta fija de modo que uno de sus brazos se encuentra en esta línea recta fija, y de modo que la línea recta que rota pasa siempre por el mismo punto del brazo aplicado (en la línea fija) y al mismo tiempo de modo que el punto de intersección del otro brazo y la línea que gira describen una curva, entonces esta línea recta que gira se llamará generador.

When a straight line rotates about a fixed point and at the same time pushes a rectilinear angle along a fixed straight line so that one of its arms lies on this fixed straight line, and so that the rotating straight line always passes through the same point of the (on the fixed line) applied arm, and so that at the same time the point of intersection of the other arm and the rotating line describes a curve, then this rotating straight line will be called the generator. (Witt, 2000, pp. 86-88)

En proposiciones como esta, es posible imaginar un instrumento girando y haciendo la curva. Estas primeras proposiciones para la construcción de las hipérbolas permiten ubicar los elementos fundamentales en el movimiento, o alguna posición relevante.

II

The other, fixed straight line will be called the directrix.

III

The said angle and its adjacent angle will bear the name moving angles–as in the former case.

IV

Likewise, the fixed point about which the generator rotates will be called the pole.

V

The arm of the moving angle on the other hand that is pushed along the directrix by the generator will be called the passive arm.

VI

The other arm, which is intersected by the generator, will be called the active arm; when it is produced through the vertex of the moving angle, it will be called the active line.

VII

When the generator is parallel to the active line and so they do not intersect, we say that both the active line and the generator are in the initial position, and when they are referred to in this way, we assume that they are in this position.

Figura 69. Definiciones para la hipérbola. (Witt, 2000, p. 88)

Por ejemplo, en la definición VII hace referencia a una posición relativa para las líneas que se interceptan para generar la curva. El otro uso de las definiciones es asignarle un nombre a las líneas que producen las curvas.[135]

En cada capítulo, las definiciones terminan con una proposición que comenta los elementos y las relaciones entre puntos, ángulos y segmentos que permiten organizar la información en el diagrama que se usa en las proposiciones.

VIII

Here, however, we give the name interval to that part of the passive arm that lies between the vertex of the moving angle and the generator, as well as to that part of the generator (in the initial position, transl.) that is cut off between the pole and the directrix. We refer to the added figures. If we imagine that the line ABC^a rotates about the point A and that during its motion it pushes forward and carries along the angle BEC,[a] so that the arm EB always remains attached to the fixed straight line KL and so that the said moving ABC always passes through the same point on the arm EB, let us say through the point B, and so that at the same time the point of intersection of the other arm–EC–with the said ABC describes a curve cC, while the drawn straight line AD is parallel to EC, then it is clear that the closer the straight line ABC approaches AD, the smaller the angle ECB will be and that in the end, when ABC reaches AD so that ABC coincides with AD, this angle ECB completely vanishes. The reason is that AD and therefore also the said ABC in this position are parallel to the arm EC. In this situation the said arm EC or the straight line CEM is the same as the straight line GFH: for indeed we supposed that DF is equal to BE, and so the following will be true:

ABC is the generator in different positions.
KL is the directrix.
BEC, BEM, or DFH and DFG are the moving angles.
A is the pole.
EB is the passive arm; EC is the active arm.
MC is the active line; GFH is the active line in the initial position or simply the active line.
ADI is the generator in the initial position or simply the generator.
EB–or FD–and AD are both the interval.

Figura 70. Capitulo II, definición VIII.[136] *(Witt, 2000, p. 90)*

[135] II. La otra línea recta fija se llamará directriz. III. Dicho ángulo y su ángulo adyacente llevarán el nombre de ángulo móvil como en el primer caso. III. Asimismo, el punto fijo sobre el que gira el generador se denominará polo. V. El objetivo del ángulo de movimiento por otro lado que es empujado a lo largo de la directriz por el generador se llamará brazo pasivo. VI. El otro brazo, que está cruzado por el generador, se denominará brazo activo; cuando se produce a través del vértice del ángulo en movimiento, se llamará línea activa. VII. Cuando el generador es paralelo a la línea activa y por lo tanto no se cruzan, decimos que tanto la línea activa como el generador están en la posición inicial, y cuando están referidos de esta manera, asumimos que están en esta posición.

[136] Aquí, sin embargo, damos el nombre de intervalo a la parte del brazo pasivo que se encuentra entre la parte superior del ángulo móvil y el generador, así como a la parte del generador (en la posición inicial, trans.) que

Con este acervo de conocimiento sobre la curva, de Witt inicia a argumentar sus propiedades. Por ejemplo, el teorema tres se refiere a la construcción de la hipérbola.[137]

> *A curve described according to the preceding definitions, by arbitrary moving angles and arbitrary intervals, has the property that the rectangle contained by an arbitrary line segment, drawn from any point on the curve, parallel to the active line and by that part of the directrix, cut off between the said line segment and the active line (in the initial position), equals the rectangle contained by both intervals.* (Witt, 2000, p. 92)

Específicamente, tomó varios puntos de la curva, como se observa en la figura 71, y mostró que para cualquier punto se mantiene la propiedad de semejanza entre los triángulos BDA y BEC y, de esta manera, el rectángulo FEC es igual al rectángulo AD y EB.

está cortada. entre el polo y la directriz. Nos referimos a adicionar figuras. Si imaginamos que la línea ABC gira sobre el punto A y que durante su movimiento empuja hacia adelante y se lleva a lo largo del ángulo BEC de tal manera que el brazo EB siempre permanece unido a la línea recta fija KL de la manera en que se ha dicho ABC en movimiento siempre pasar por el mismo punto en el brazo de EB, digamos por el punto B, y de modo que al mismo tiempo el punto de intersección del otro brazo-EC- que se llama ABC describe una curva cC, cuyo trazo de la línea recta AD es paralela a EC, entonces está claro que cuanto más se acerque la recta ABC a AD, entonces menor será el ángulo ECB y que, al final, cuando ABC alcance AD se da que ABC coincida con AD, este ángulo ECB se desaparece por completo. La razón es que AD y por lo tanto también el ABC dicho en esta posición son paralelos al brazo EC. En esta situación, el brazo EC o la línea recta CEM es el misma que la línea recta GFH, porque de hecho supusimos que DF es igual a BE,y, por lo tanto, lo siguiente será cierto:

ABC es el generador en diferente posición.
KL es la directriz.
BEC, BEM, o DFH y DFG son los ángulos móviles.
A es el polo.
EB es el brazo pasivo; EC es el brazo activo.
MC es la línea activa, GFH es la línea activa en la posición inicial o simplemente la línea activa.
ADI es el generado en la posición inicial o simplemente le generador.
EB- o FD – y AD son ambos los intervalos.

[137] Una curva descrita de acuerdo con la definición anterior, mediante ángulos de movimiento en intervalos arbitrarios, tiene la propiedad de que el rectángulo contenido por un segmento de línea arbitrario, dibujado desde cualquier punto de la curva, paralelo a la línea activa y por esa parte de la directriz el corte entre dicho segmento de línea y la línea activa (en la posición inicial) es igual al rectángulo contenido por ambos intervalos

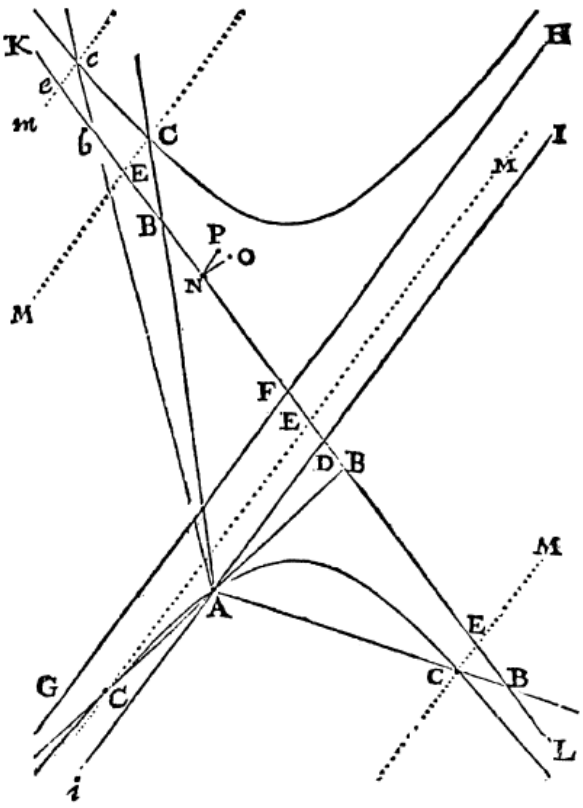


Figura 71. Diagrama Teorema III. (Witt, 2000, pp. 90-94)

De Witt reconoce que esta propiedad la conocían los antiguos y se refiere a una curva llamada hipérbola, la cual tiene dos ramas o partes y que las rectas KL y HG son sus asíntotas. A los rectángulos FEC que se conforman en el movimiento y con los cuales se define la igualdad en la prueba los llama *Power* de la hipérbola.

El diagrama describe el mismo instrumento que van Schooten presentó en 1657 (figura 52); de Witt construye la relación que enuncia el teorema para varios puntos c o C pertenecientes a la curva y el segmento CE que traza en una línea paralela a GE, que pasa por C. Este tipo de Diagrama que uso de Witt hace referencia a la construcción por puntos de la curva y muestra en varios de ellos las rectas que se pasan por el punto y en las cuales se cumple la propiedad geométrica.

De manera estática se muestra que los puntos que pertenecen a la curva cumplen con las relaciones que permiten establecer la condición, de esta manera, el invariante –razones y proporciones– que se mantiene al relacionar los puntos de la curva mantiene una relación directa con las premisas mediante las cuales se desarrolla la argumentación. Este es el puente que se construye entre la geometría antigua y esta forma moderna de obtener y definir las cónicas.

Los tres corolarios de este teorema refieren propiedades que se deducen de la construcción inicial de la hipérbola. Son enunciados que clarifican propiedades o circunstancias deducidas de la construcción que se realiza. Por ejemplo, el corolario I afirma que la curva y sus asíntotas se acercan de manera que es posible hacer esta diferencia más pequeña que cualquier cantidad dada. Las propiedades que se conocen a partir del texto de Apolonio se van generando en esta nueva definición de cónica como movimiento de un punto controlado por una relación geométrica que se sigue describiendo en el lenguaje de la antigüedad.

En la proposición IV de este mismo capítulo, se origina un método de prueba que no es usual en las técnicas de la época; se usa una prueba por contradicción, en la que el diagrama describe las posiciones relativas que llevan a concluir la verdad del enunciado:[138]

> *A straight line-whether passing through two arbitrary points on a hyperbola or meeting the hyperbola in such a way that this line, being produced on both sides,*

[138] Una línea recta que pasa por dos puntos arbitrarios en una hipérbola o si se encuentra con la hipérbola de tal manera que esta línea que se produce en ambos lados se encuentra fuera de la hipérbola e interseca cada una de las asíntotas dentro del ángulo que contiene la curva.

lies outside the hyperbola intersects each of the asymptotes within the angle that contains the curve. (Witt, 2000, p. 98)

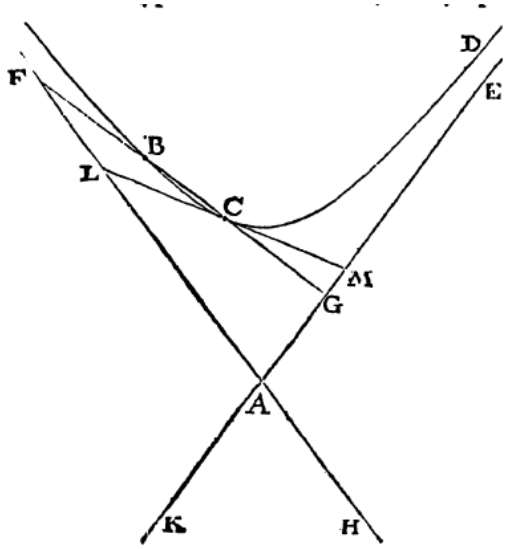


Figura 72. Teorema IV. Capítulo II. (Witt, 2000, p. 99)

El diagrama acompaña la deducción de la proposición, cumple un papel intuitivo en las posibilidades de existencia de la relación entre la línea que toca la curva y sus asíntotas. De manera que sean esas rectas las que se describen en los argumentos de la prueba. El diagrama deja intuir que la única forma de no darse la intersección en dos puntos o en uno tangente a la curva es con una línea paralela a una de las asíntotas, argumento que se usa en la contradicción[139].

[139] Supongamos que a través de la hipérbola BCD, con las asíntotas KAE y HAF, se ha trazado la recta $FBCG$, pasando por los dos puntos B y C de la curva, y que también se ha trazado MC, cumpliendo la hipérbola de tal forma que- producido hacia L-se encuentra fuera de la hipérbola en ambos lados. Digo que tanto la línea recta $FBCG$ como la línea recta MCL cumplen con las asíntotas KAE y HAF dentro del ángulo EAF. Porque, si esto no sucediera, entonces $FBCG$ o MCL serían paralelas a una de las asíntotas o, si una de ellas se encontrara con una de las asíntotas fuera del ángulo EAF, sería una línea recta trazada a través de un punto dentro del ángulo. KAH, el opuesto del ángulo que contiene la hipérbola, e intersecaría una de las asíntotas. Por lo tanto, se encontraría con la curva en un solo punto, no en dos puntos, y, al producirse, intersecaría esta curva y no quedaría fuera de la curva en ambos lados en contradicción con la suposición.

> *Suppose that through the hyperbola BCD, with asymptotes KAE and HAF, the straight line FBCG has been drawn, passing through the two points B and C on the curve, and that MC has also been drawn, meeting the hyperbola in such a way that- being produced towards L-it lies outside the hyperbola on both sides. I say that the straight line FBCG as well as the straight line MCL meet both asymptotes KAE and HAF inside the angle EAF. For, if this should not happen, then FBCG or MCL would either be parallel to one of the asymptotes or –if one of them should meet one of the asymptotes outside the angle EAF– would be a straight line drawn through a point inside the angle KAH, the opposite of the angle that contains the hyperbola, and it would intersect one of the asymptotes. Therefore, it would meet the curve at only one point, not at two points, and, being produced, it would intersect this curve and would not lie outside the curve on both sides in contradiction to the supposition.* (Witt, 2000, pp. 98-100)

El resultado de esta argumentación de Witt lo usa para describir varias de las propiedades geométricas que se conocían por el libro II de *cónicas* de Apolonio, específicamente la proposición VII, VIII, IX.

En conclusión, el libro I de Jan de Witt toma la teoría antigua de las cónicas y construye los argumentos necesarios para comprender la generación de estas curvas por medios cinemáticos. Extendió las propiedades que describió Apolonio en *Cónicas* al análisis del movimiento que había sido aceptado por Descartes como se ha dicho en el marco referencial. Este escrito preparó el camino para comprender la generación de estas curvas por medio de un punto y dispuso los elementos necesarios para comprender el

principio analítico que las describe. Este aspecto se desarrolla en la segunda parte de este texto.

3.6.2 Liber Secundus

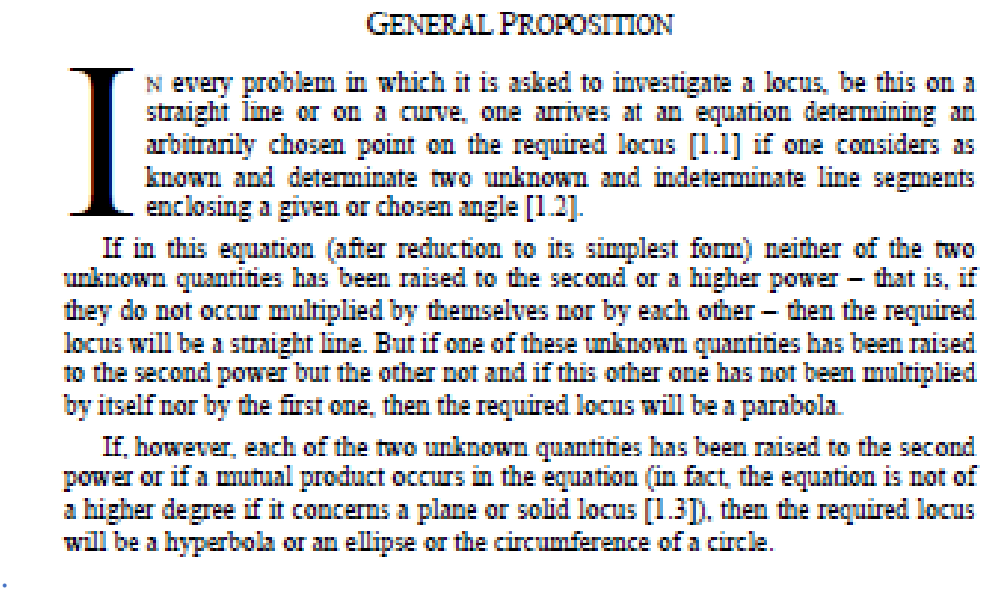
El segundo libro de de Witt tuvo características muy diferentes a todos los documentos que aparecieron con la segunda edición de *Geometría*. Su organización y su lenguaje ejemplifican lo que en muchos casos[140] se entiende hoy como el legado de Descartes. El documento mantiene el objetivo de generalización y organización de las curvas que se encuentra en la obra de 1637, desarrolla una forma para solucionar ecuaciones de segundo grado y distingue el tipo de curva mediante sus expresiones simbólicas.

En general, este segundo volumen de *Elementa Curvarum Linearum* contiene una forma de relacionar la expresión simbólica y la representación gráfica de cada una de las cónicas diferente al resto de las presentaciones que se efectuaron en la segunda edición de la *Geometría*; de Witt partió del hecho de que una curva que tiene una determinada forma algebraica pertenece a un tipo de cónica.

Las relaciones geométricas que se estudian en el libro I pasaron a ser representadas a través del álgebra y usadas para justificar que cierta expresión simbólica es un tipo de cónica. Con este propósito de Witt usa algunos de los diagramas que estudió en el primer tomo; caracteriza la variación que se produce en la curva a través de un punto arbitrario que, como se sabe, se representó en un eje, segmentos de recta llamado x, bajo un ángulo determinado.

[140] Un ejemplo de esta interpretación es el significado que se encontró del método planteado por Descartes en el análisis de los libros de didáctica del álgebra. (Bello, 2019).

El texto inicia con una declaración de los propósitos del texto, la cual llama proposición general; en ella, realiza declaraciones sobre el uso y el tipo de expresiones simbólicas de las curvas de segundo grado.[141]



GENERAL PROPOSITION

In every problem in which it is asked to investigate a locus, be this on a straight line or on a curve, one arrives at an equation determining an arbitrarily chosen point on the required locus [1.1] if one considers as known and determinate two unknown and indeterminate line segments enclosing a given or chosen angle [1.2].

If in this equation (after reduction to its simplest form) neither of the two unknown quantities has been raised to the second or a higher power – that is, if they do not occur multiplied by themselves nor by each other – then the required locus will be a straight line. But if one of these unknown quantities has been raised to the second power but the other not and if this other one has not been multiplied by itself nor by the first one, then the required locus will be a parabola.

If, however, each of the two unknown quantities has been raised to the second power or if a mutual product occurs in the equation (in fact, the equation is not of a higher degree if it concerns a plane or solid locus [1.3]), then the required locus will be a hyperbola or an ellipse or the circumference of a circle.

Figura 73. Proposición general. (Witt, 2010, p.60)

En esta proposición queda inscrita la idea de análisis, en donde se asume que lo desconocido se opera de la misma manera que lo conocido; y, luego, a través de deducciones lógicas, se ubica un principio lógico que le permite garantizar las proposiciones como ciertas y aplica estas ideas para el caso de la construcción de la ecuación de segundo grado.

[141] En cada problema en el que se pide investigar un locus, ya sea en línea recta o en curva, se llega a una ecuación que determina un punto elegido arbitrariamente en el locus requerido si se considera como conocido y determinado dos líneas desconocidas e indeterminadas, segmentos que encierran un ángulo dado o elegido. Si en esta ecuación (después de la reducción a su forma más simple) ninguna de las dos cantidades desconocidas se ha elevado a la segunda potencia o a una potencia superior, es decir, si no ocurren multiplicadas por sí mismas ni entre sí, entonces el locus requerido será ser una línea recta. Pero si una de estas cantidades desconocidas se ha elevado a la segunda potencia, pero la otra no y si esta otra no se ha multiplicado por sí misma ni por la primera, entonces el locus requerido será una parábola.
Sin embargo, si cada una de las dos cantidades desconocidas se ha elevado a la segunda potencia o si se produce un producto mutuo en la ecuación (de hecho, la ecuación no es de un grado superior si se trata de un lugar plano o sólido), entonces el locus requerido será una hipérbola o una elipse o la circunferencia de un círculo.

La proposición 1 del capítulo I indica que:[142] *If the equation is* $y = \left(\frac{b}{a}x\right) + c$*, then the required locus will be a straight line* (Witt, 2010, p. 62). Este estilo de formulación de las proposiciones relaciona una forma de la expresión simbólica con un tipo de curva; lo que se debe probar es que un tipo de forma simbólica se corresponde con ese tipo de objeto geométrico. Se invierte, entonces, la relación entre las expresiones respecto al tratamiento que realizó Descartes.

Esta es una variación en el sistema de práctica que se presentó en el capítulo II, otra organización de las componentes que no modifica la estructura, una transformación en la equivalencia entre la expresión simbólica y la representación gráfica, que complementa el significado del principio analítico y de las relaciones que se pueden representar a través de símbolos.

De Witt consideró elementos conceptuales previos al tratamiento representacional y analítico, la construcción de la curva por medio de instrumentos mecánicos y como corte del cono. Las pruebas que realiza en este tomo implementaron el método analítico cartesiano como medio para encontrar el principio, el elemento, que da sustento a la justificación de la proposición, el cual lo adopta de la antigüedad, en el primer tomo. Por ejemplo, en el caso de la proposición 1 del libro I, la argumentación se realiza de la siguiente manera:

Inicialmente, como se indica en la proposición general, se genera un punto x que se extiende a través del segmento AB. En B se construyó la línea BC y se genera el ángulo ABC; de la relación AB es a BC. Luego se nombra $AB = a$ y $BC = b$; así se obtiene que a es a b. Se traza la línea AC, que describe el lugar requerido. Al seleccionar un punto

[142] Si la ecuación es $y = \left(\frac{b}{a}x\right) + c$ entonces el lugar requerido es una línea recta.

arbitrario en AC, por ejemplo D, y dibujar DE en el mismo ángulo dado ABC, es decir, DEA. Luego llama a $DE = y$; entonces, AE es a ED como AB es a BC, que es igual a, a es a b como x es a y. Esto es: $ay = bx$, que es igual a $y = \frac{b}{a}x$. Como el punto AB es arbitrario en la línea AC, la misma prueba debe mantenerse para cualquier punto en AC, que es el lugar construido. Por lo tanto, la expresión simbólica representa los puntos de una recta.

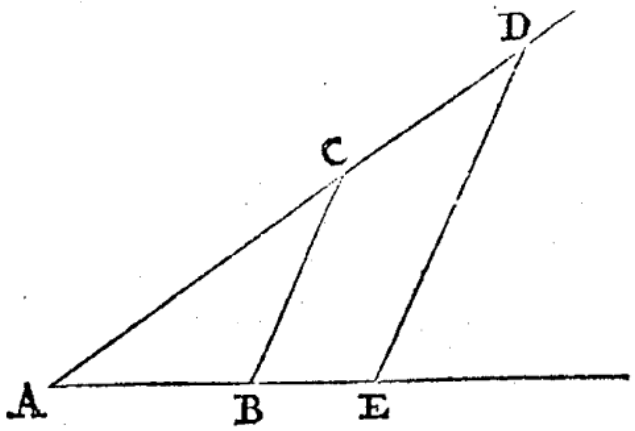


Figura 73. Diagrama proposición 1, libro I. (Witt, 2010, p.65)

La base de esta argumentación es la elección de un punto cualquiera en el segmento en el que se construye la relación que genera el lugar geométrico. Este acondicionamiento del primer paso del método de análisis, refiriéndose a través de un punto que varía en un segmento, a las posibles cantidades que representa la variable x en un universo limitado por el segmento AB, es nuevo en las argumentaciones que están en esta edición de la *Geometría*. Una posible traducción y modernización de la frase "se toman un punto cualquiera en AB", usada en la antigüedad por Apolonio,[143] a los elementos que se

[143] Un estudio de esta trasformación se puede ver en (Bello & Forero, 2015).

disponían en el siglo XVII: el plano referencial, la representación de cantidades a partir de simbología y los inicios de lo que más adelante serán las variables.

El diagrama permite visualizar los pasos en que se construye la argumentación, evidencia el principio de construcción de la prueba, en este caso, permite ver el uso del teorema de Tales alojado en la nueva práctica analítica, ahora es una herramienta que permite argumentar la existencia de una relación geométrica a través de una expresión algebraica. Esta forma de presentar la relación entre expresiones y representaciones se mantuvo para cada una de las cónicas. En el caso de las parábolas consideró las siguientes expresiones simbólicas:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & y^2 = ax \\ \text{II.} & y^2 = ax + b^2 \\ \text{III.} & y^2 = ax - b^2 \\ \text{IV.} & y^2 = -ax + b^2 \end{array}\right\} \text{ or conversely } \left\{\begin{array}{l} ay = x^2 \\ ay + b^2 = x^2 \\ ay - b^2 = x^2 \\ b^2 - ay = x^2 \end{array}\right.$$

Figura 74. Ecuaciones consideradas por de Witt para las cuadráticas. (Witt, 2000, p. 72)

Por ejemplo, en la proposición 8 del libro II:[144] "*if the equation is* $y^2 = ax + b^2$ *or conversely* $ay + b^2 = x^2$*, then the required locus will be a parabola*" (Witt, 2010, p. 74), de Witt supone que el punto A es el punto inicial de x que se extiende indefinidamente a lo largo de la recta AB y que el ángulo dado y elegido es ABC. Construye x en AB en el intervalo desde A hasta G, de modo que $AG = \frac{b^2}{a}$, porque es la distancia entre el vértice y el punto en donde inicia la variación. Luego, elige GB como un diámetro con el cual las líneas

[144] Si la ecuación es $y^2 = ax + b^2$ o transformada $ay + b^2 = x^2$, entonces el lugar requerido es una parábola.

aplicadas en forma ordenada encierran los ángulos iguales al ángulo dado ABC y cuyo *latus rectum* GF es igual al segmento conocido a, entonces, el lugar requerido es la parábola GCD, que se describe a través del vértice G en el diámetro y *latus rectum* correspondiente.

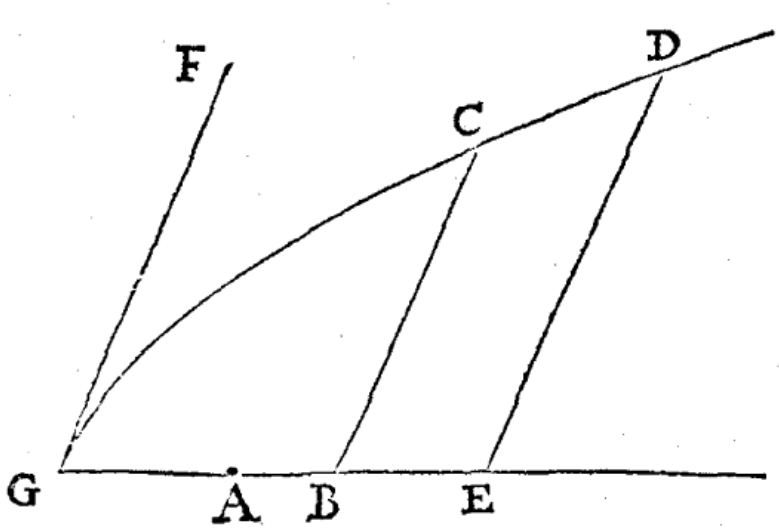


Figura 75. Proposición VIII del libro II. (Witt, 2010, p. 75)

Luego, selecciona un punto al azar en el diámetro, D, y traza DE con ángulo AED igual al ángulo elegido. Si $DE = y$, entonces $y^2 = ax + b^2$; porque GE, o $AE + AG$, es igual $ax + \frac{b^2}{a}$ entonces se cumple la naturaleza geométrica de una parábola que el cuadrado en ED es igual al rectángulo en FG y GE (Witt, 2010).

En estas argumentaciones, de Witt muestra que la ecuación está asociada a un tipo de lugar geométrico; en el diagrama, supone la existencia de la curva, en este caso una parábola, la cual no es construida; aparece, *de hecho*, como parte de la organización diagramática, diámetros, *latus rectum* y vértice hacen parte de los elementos que se pone en juego en la imagen. Luego, toma una distancia que va desde el punto donde inicia la variación hasta el punto elegido y la llama x y a su correspondiente valor en la curva lo llama y. Garantiza la unicidad del lugar geométrico a partir de usar el mismo ángulo, lo que

se encuentra en la proposición 12 del libro I de Apolonio; y, luego, garantiza que las relaciones proporcionales pertenecen a ese lugar geométrico.

En este tomo de Witt abandona la idea constructiva de la curva dando cabida a la equivalencia entre la forma simbólica y la identificación de la familia de curvas que expresa. La curva es dada, ya existe dentro de la prueba, lo que se quiere probar es la equivalencia entre la expresión analítica y la forma del lugar geométrico.

La interpretación de cada cónica a partir de su expresión simbólica permite una caracterización que ya no es geométrica. Sin embargo, la cónica siguió ligada a los criterios y las propiedades probados por Apolonio; y, en algunos casos, se usa el mismo diagrama. En el caso de la proposición VIII de Witt usó la proposición XI del libro I de las cónicas de Apolonio; la cual define la parábola como corte de un cono. Esta propiedad le permite mostrar que el cuadrado DE es igual a los rectángulos FG y GE.

Varias proposiciones que se encuentran en este libro de texto de geometría analítica fueron traducciones de las proposiciones del libro *Cónicas* de Apolonio, al nuevo lenguaje algebraico. El diagrama que acompañó la prueba de la proposición VIII de de Witt es equivalente al que aparece en la proposición 20 del libro I de Apolonio:[145]

> *If in a parabola two straight lines are dropped ordinate wise to the diameter, the squares on them will be to each other as the straight lines cut off by them on the diameter beginning from the vertex are to each other.* (Apolonio, 1952, p. 627)

[145] Si en una parábola se dejan caer dos líneas rectas ordenadas en función del diámetro, los cuadrados de ellas serán entre sí como las líneas rectas cortadas por ellas en el diámetro que comienzan desde el vértice están entre sí.

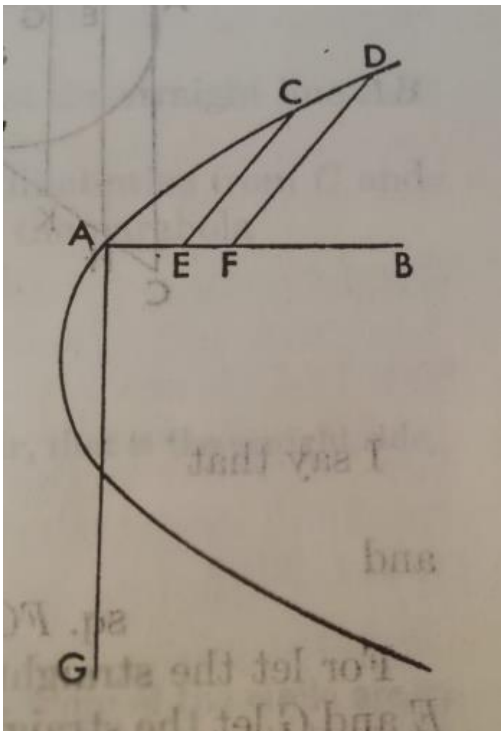


Figura 76. Diagrama proposición 20 libro I. (Apolonio, 1952, p. 627)

En Apolonio se muestra la proporcionalidad entre el cuadrado de la longitud de las líneas rectas que van de la curva al diámetro, manteniendo el mismo ángulo y la distancia del vértice a cada una de las rectas; de Witt usó el argumento de la proposición 20 para justificar la covariación entre la variable x y el punto en la curva, con ello, la colección de puntos que conformaban el lugar geométrico expresado en la ecuación general de la forma $y^2 = ax + b^2$.

En el caso de estos diagramas cada paso de la construcción sustenta la prueba que se realiza. Existe una estrecha relación, casi isomorfa, entre los hechos geométricos que se conforman y la argumentación que se construye para probar la proposición. Las herramientas geométricas euclidianas se disponen en la nueva práctica de la geometría, a través del método analítico mantienen la memoria histórica de las relaciones proporcionales, pero ahora expresadas en el nuevo lenguaje del álgebra.

Otro asunto tratado por de Witt en este texto es la generalización de un procedimiento para generar cualquier cónica. Los inicios del modelo están definidos en el escrito de Beaune y en los comentarios de van Schooten; este último autor lo usa para la construcción para el caso de la hipérbola.

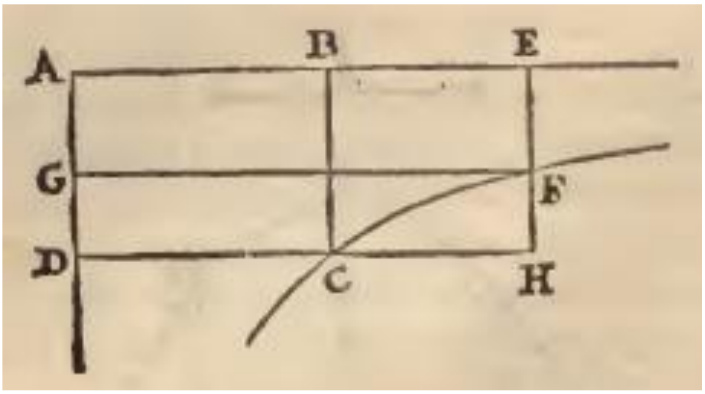


Figura 77. Diagrama general usado para el caso de la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 176)

En la descripción de esta construcción van Schooten afirma que siempre se pueden trazar los paralelogramos $AEFG$ y $ABCD$, de la misma manera que en la proposición XII y XIII del libro II de Apolonio. De modo que: AE y EF se puedan utilizar para cualesquiera puntos en la construcción, en vez de la cantidad variable x y su correspondiente punto en la curva. La variación en los argumentos de de Witt en cuanto a un x que cambia en el segmento de recta AB para un ángulo determinado y la relación de estas líneas con la expresión simbólica, propone elementos diferentes en la componente de argumentación de la práctica de Descartes y de los otros autores que acompañan esta edición de la *Geometría*. Pues de Witt construye el modelo general sobre la representación algebraica canónica de cada una de las cónicas.

Específicamente, en el capítulo IV del tomo dos, usa una regla general que permite determinar el lugar geométrico para ecuaciones que expresan una línea o una curva de

segundo grado. Clasifica las expresiones de estas curvas a través de las siguientes formas simbólicas:

a. Clasificación para las lineales:

$y = bx/a$, or, which is the same, $y = x$, as we may suppose $a = b$.

$$y = \frac{bx}{a} \pm c \quad \text{or} \quad y = c - \frac{bx}{a}.$$

Figura 78. Expresiones que son líneas.[146] *(Witt, 2010, p. 184)*

b. Para las curvas de segundo grado, afirmó que todas las expresiones son reducibles a una de las siguientes ecuaciones:

2. $y^2 = dx$, or conversely $dy = x^2$.
   $y^2 = dx \bullet f^2$, or conversely $dy \bullet f^2 = x^2$.
   $z^2 = dx$, or conversely $dy = v^2$.
   $z^2 = dx \bullet f^2$, or conversely $dy \bullet f^2 = v^2$.

3. $y^2 = \frac{lx^2}{g} \bullet f^2$, or also $yx = f^2$.
   $z^2 = \frac{lx^2}{g} \bullet f^2$, or also $zx = f^2$.
   $y^2 = \frac{lv^2}{g} \bullet f^2$, or also $yv = f^2$.
   $z^2 = \frac{lv^2}{g} \bullet f^2$, or also $zv = f^2$.

Figura 79. Clasificación de ecuaciones de segundo grado. (Witt, 2010, p. 184)

Este propósito de organizar la menor cantidad de expresiones para cada cónica lo acompañó de un diagrama en el que no traza ninguna curva, pero que le sirve para estudiar la orientación y el significado de los signos en cada representación simbólica. En estas ecuaciones aparece el signo • que significaba ±, como lo usó Descartes en el libro III de la *Geometría*; x e y, son cantidades indeterminadas; pero, z y v son cantidades compuestas por una cantidad conocida y otra desconocida; para que algunas formas simbólicas pudieran expresarse con alguna de las formas canónicas de la figura 79, de Witt usó cambios de

[146] $y = {bx}/{a}$ o que es lo mismo $y = x$, como podemos suponer $a = b$ $y = \frac{bx}{a} \pm c$ o $y = c - \frac{bx}{a}$

variables, z o v eran las variables de sustitución; un procedimiento que es frecuente en la obra de Descartes, cuando soluciona el problema de Pappus y que de Witt usa de la misma manera para encontrar la forma más simple de la expresión algebraica.

En el modelo general de diagrama para el análisis de líneas que permiten la construcción de las cónicas, de Witt representa las variables conocidas y desconocidas como segmentos, establece la variabilidad de x sobre un segmento AB, el cual usa como eje coordenado. Para el caso de la figura 81 establece la posición de las rectas que trata como referente suponiendo un ángulo dado ABE.

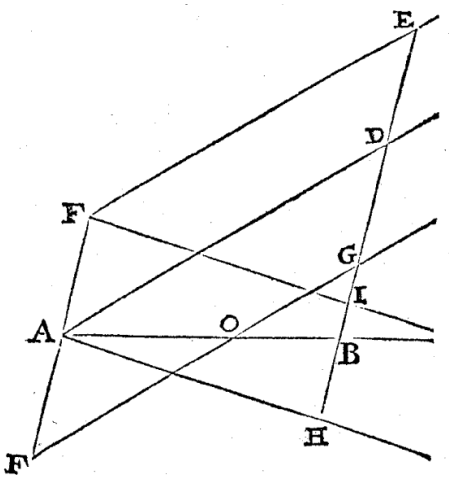


Figura 80. Diagrama para ecuaciones lineales. (Witt, 2010, p. 189)

Para el caso de las ecuaciones lineales presupuso: que la cantidad desconocida x varía en el segmento de recta AB, un ángulo fijo ABE y unas cantidades y que se miden a partir de B. Luego, dibuja una línea recta a través de B; por ejemplo, HBE, de modo que el ángulo ABE sea igual al ángulo dado. Se selecciona un punto en esta línea recta (por ejemplo, D) de tal forma que AB y BD sean iguales, o para que AB sea a BD como a es b, y como se traza desde A la línea recta AD, entonces AD será el lugar requerido. Pero, si también se encuentra un término c en la ecuación y si este término está acompañado del

signo más, entonces se dibuja el segmento AF desde A, paralelo a HBE e igual a c; y, en el mismo lado de AB, el punto E, o en el lado opuesto, si c tiene el signo menos. Luego se dibuja FE o FG (intersectando AB en O) paralela a AD, entonces FE u OG son el lugar requerido.

Pero, si la ecuación es $y = c - \left(\frac{bx}{a}\right)$, se tiene que seleccionar el punto H en la línea HBE mencionada anteriormente, en el lado opuesto de la línea AB desde el ángulo elegido ABE, de modo que AB sea a BH como a es a b.

Este modelo, de Witt lo usa para determinar la posición de puntos característicos de las curvas; para modificarlos en rotaciones y traslaciones por el plano, posible herencia del estudio de los movimientos realizados con instrumentos, en donde se estudiaron puntos en diferentes posiciones. El diagrama también sirve para establecer posiciones relativas del eje, en relación con los signos de los términos de la expresión simbólica de la curva. Para el caso de las parábolas, por ejemplo, para la ecuación $y^2 = dx \bullet f^2$ realiza las siguientes consideraciones.

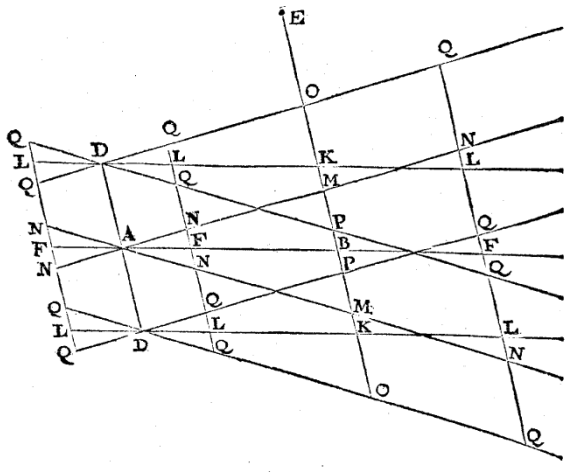


Figura 81. Diagrama de la parábola $y^2 = dx \bullet f^2$. (Witt, 2010, p.91)

En general el uso del diagrama consiste en identificar un vértice, analiza la relación entre los signos de los términos y las posiciones relativas que toma la curva respecto al eje. Por ejemplo, al tomar a A como vértice, luego lo traslada a una nueva posición F y, finalmente, lo mueve fuera del eje inicial tomando la posición *D*; todos estos puntos representan en algún momento el vértice de una parábola.

El diámetro permanece en la línea AB y, si se traza $AF = (f^2/d)$, como en la figura 82, su vértice se sitúa en el punto F. Sin embargo, si ambos términos, dx y f^2 son positivos, F debe situarse en el lado opuesto del punto A desde el punto B. Pero, si el término dx o el término f^2 tienen el signo menos, el punto F debe situarse en la misma dirección del punto A y del punto B. De esta manera, los segmentos tienen sentido dentro de la construcción, esta representación diagramática se separa de lo geométrico, permite estudiar la relación la posición de la curva con lo algebraico. Este recurso de cambio de signo dependiendo de la posición relativa del segmento lo presentó Descartes en la solución de Pappus, de Witt lo usó en el mismo sentido para caracterizar las expresiones algebraicas a partir de los signos de algunos términos.

Cuando al término dx es positivo, la parábola debe describirse de A hacia B; en el caso contrario, con el término dx negativo, debe describirse en la dirección opuesta, es decir, desde F hacia A. En ese sentido, el diagrama muestra los movimientos que se generan en varios puntos dependiendo el signo de la expresión simbólica. El punto A o sus traslaciones siempre es el vértice de la parábola, el centro de la hipérbola o de la elipse.

En la figura 81 también se analizan las rotaciones del eje por donde se desplaza x; pueden ser la línea AM o DO. El diagrama muestra la relación de estos puntos para hacer un análisis de la posición de la curva en el sistema de referencia.

El uso del diagrama se encuentra explicitado en Witt (2010, p. 285). La figura 83 muestra este análisis para el caso de la parábola. Las líneas punteadas en cada una de las figuras representan los valores negativos para una o las dos variables; estas no fueron tenidas en cuenta por de Witt porque las cantidades representaban la medida de un segmento de recta, el cual era una cantidad de magnitud que se describe para valores positivos.

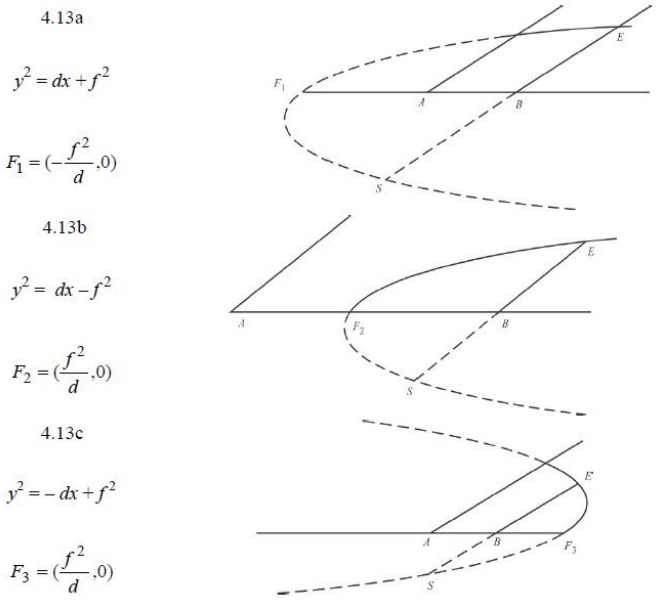


Figura 82. Análisis caso II de las parábolas. (Witt, 2010, p. 285)

En el mismo sentido que en la solución del problema de Pappus realizada por Descartes en *Geometría,* el autor desarrolla una caracterización de los signos de la representación algebraica a través del análisis de la posición de la curva. De Witt entendió que, para representar geométricamente las generalizaciones que realiza, necesitaba analizar solo un grupo de puntos, vértice y *latus rectum* en el caso de la parábola; para eso diseña este diagrama.

En este sentido, el método analítico es la herramienta fundamental; aunque, la práctica que desarrolla de Witt inicia con la representación simbólica, él supone un punto

que al moverse dentro de la presentación cartesiana da origen a una curva, a una cónica, y en ese momento supone solucionado el problema porque el punto pertenece a la curva, luego muestra que efectivamente cumple la propiedad geométrica.

Este nuevo sistema de la práctica que se origina en el uso de la expresión simbólica para presentar un tipo de curva específico profundiza la práctica presentada en la obra de 1637 en dos sentidos; primero, se generaliza el proceso de representación gráfica y expresión simbólica, para la argumentación de las relaciones se usan puntos específicos de las curvas en el diagrama, los cuales se toman en ambos sentidos y se corresponden con los recursos simbólicos. Segundo, la curva se usa en los diagramas; *de hecho*, pierde su sentido constructivo, se da una equivalencia epistemológica entre las representaciones y, en este sentido, el método de construcción de curvas pierde su utilidad en la prueba de proposiciones. A partir de las consideraciones realizadas por de Witt, si se habla de una cónica, la representación más eficiente y económica es la expresión algebraica.

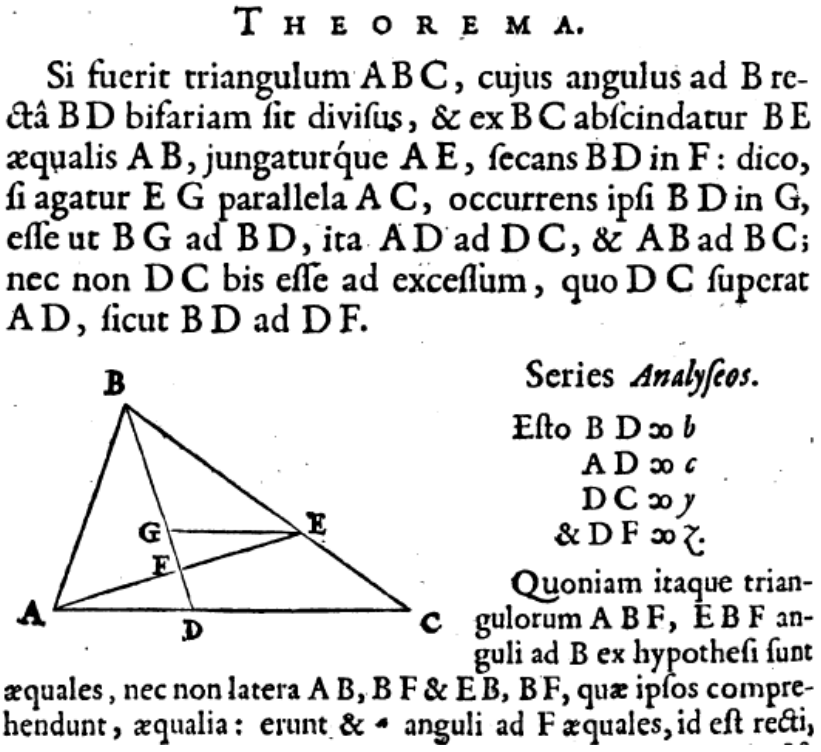
3.7 Tratactus de Concinnandis Demostrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico

Este tratado contiene algunos problemas y teoremas que van Schooten solucionó por medio del método analítico. En las declaraciones que hace su hermano Petrus van Schooten, quien editó esta parte del libro ante la muerte del autor; expone que tuvo la intención de mostrar lo novedoso que era el método propuesto. El proceso de análisis es descrito como la posibilidad de usar los métodos algebraicos en geometría. Lo caracteriza igual que Descartes a través de pasos, dar por solucionado el problema, plantear ecuaciones, usar el álgebra para hallar una ecuación que representa la solución del problema, construir la ecuación y encontrar la raíz de la ecuación.

En el manuscrito se evidencian las diferencias en el tratamiento dado a las proposiciones que llamó teoremas y el que dio a las que llamo problemas. Los primeros fueron tratados en una fase que llamó "*series Analyseos*", la cual tuvo dos partes: la interpretación de los segmentos del problema por medio de letras y la elaboración de un diagrama que contiene las relaciones entre los segmentos. En esta última fase, se clarificó la hipótesis de solución del problema.

Para los teoremas presenta la prueba luego de las fases de análisis; y, en ella, no acude al diagrama, solo a las ecuaciones que llevan a mostrar la hipótesis de la proposición.

Por ejemplo, van Schooten consideró como teorema el siguiente enunciado:[147]



THEOREMA.

Si fuerit triangulum ABC, cujus angulus ad B rectâ BD bifariam ſit diviſus, & ex BC abſcindatur BE æqualis AB, jungaturque AE, ſecans BD in F: dico, ſi agatur EG parallela AC, occurrens ipſi BD in G, eſſe ut BG ad BD, ita AD ad DC, & AB ad BC; nec non DC bis eſſe ad exceſſum, quo DC ſuperat AD, ſicut BD ad DF.

Series *Analyſeos*.

Eſto BD ∞ *b*
AD ∞ *c*
DC ∞ *y*
& DF ∞ *z*.

Quoniam itaque triangulorum ABF, EBF anguli ad B ex hypotheſi ſunt æquales, nec non latera AB, BF & EB, BF, quæ ipſos comprehendunt, æqualia: erunt & anguli ad F æquales, id eſt recti,

Figura 83. Teorema. (Schooten, 1661b, p. 368).

[147] Si el ángulo B del triángulo ABC es bisecado por la recta BD y se toma BE igual a BA sobre BC y se traza AE, BD se intercepta con AE en el punto F. Al trazar EG paralela a AC, se obtiene el punto G en BD; entonces, se cumple que BG es a BD; AD es a DC y AB es a BC. El exceso del doble de DC; cuando DC es más grande que AD, es como BD es a DF.

Para la prueba, van Schooten realiza dos planteamientos. El primero fue de análisis y tuvo dos acciones; nombrar los segmentos conocidos y a conocer, y trazar un diagrama de la situación en el cual se visualiza la propiedad que se quiere probar. En esta primera fase, también aclaró cuál es la hipótesis de la proposición. En este caso, dada la bisección del ángulo B, entonces ocurren las proporciones e igualdades que van a ser probadas y que se generan al tener la semejanza entre los triángulos BGE y BDC. Esta argumentación se realiza como en la antigüedad, manteniendo los cánones de la geometría de Euclides.

En una segunda parte de la argumentación, se organizan las ecuaciones algebraicas producto de las igualdades que se deducen del análisis geométrico, como se muestra en la figura.

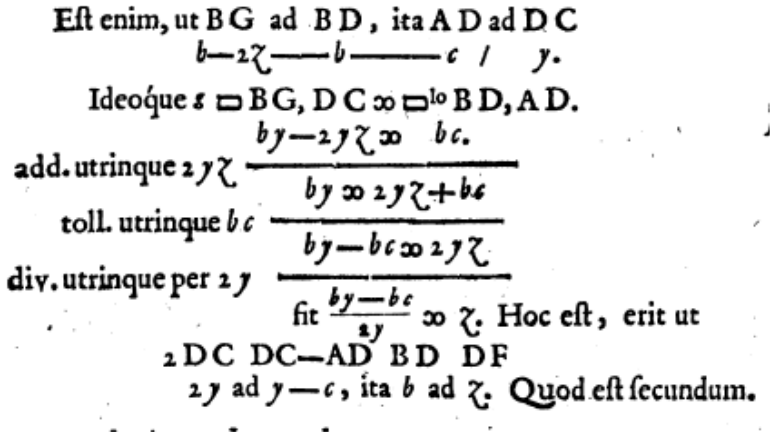

Eſt enim, ut B G ad B D, ita A D ad D C
$b-2\zeta \quad b \quad c \;/\; y.$
Ideoque ſ ▭ B G, D C ∞ ▭lo B D, A D.
add. utrinque $2y\zeta$ $\dfrac{by-2y\zeta \propto bc.}{by \propto 2y\zeta+bc}$
toll. utrinque bc $\dfrac{by-bc \propto 2y\zeta}{}$
div. utrinque per $2y$
fit $\frac{by-bc}{2y} \propto \zeta$. Hoc eſt, erit ut
2 D C DC—AD B D DF
$2y$ ad $y-c$, ita b ad ζ. Quod eſt ſecundum.

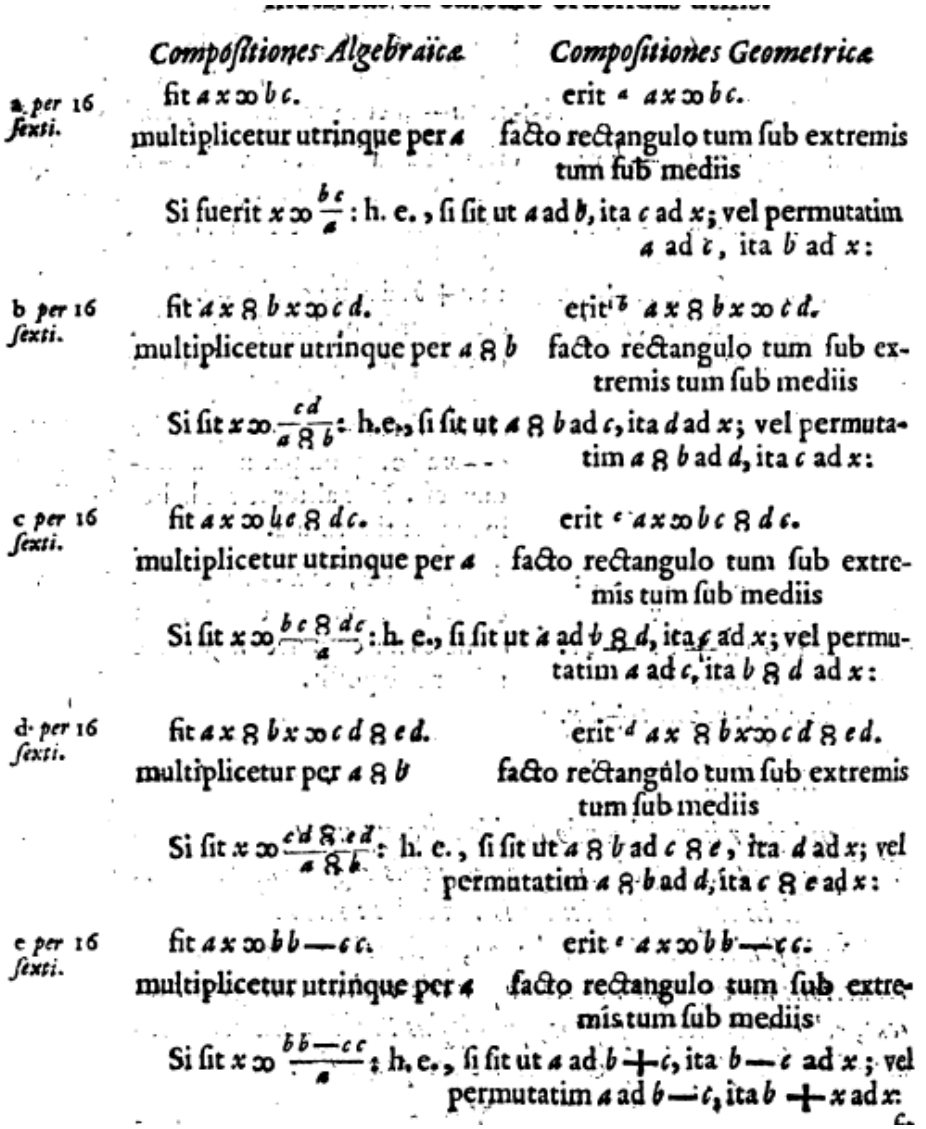
Figura 84. Composición algebraica del análisis geométrico. (Schooten, 1661b, p. 369)

La prueba del teorema se realiza en el apartado que van Schooten llama la *compositiones algebraïca*, que consiste en la representación algebraica de una propiedad geométrica por medio del uso de razones y proporciones.

En los teoremas uso el análisis como método de prueba, el diagrama aparece como organizador de la construcción y permite visualizar las relaciones entre los segmentos que

la componen, la imagen contiene las relaciones conceptuales que permiten justificar la prueba de teorema.

En la resolución del primer problema, van Schooten mostró algunos casos de la correspondencia entre la *compositione algebraica* y la *compositione geometrica*. Advirtió que estas correspondencias son útiles para la demostración de teoremas y la resolución de problemas geométricos.



	Compoſitiones Algebraïcæ	*Compoſitiones Geometricæ*
a *per* 16 *ſexti.*	fit $a x \infty b c$.	erit [a] $a x \infty b c$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis
	Si fuerit $x \infty \frac{bc}{a}$: h. e., ſi ſit ut a ad b, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita b ad x:	
b *per* 16 *ſexti.*	fit $a x \mathbin{8} b x \infty c d$.	erit [b] $a x \mathbin{8} b x \infty c d$.
	multiplicetur utrinque per $a \mathbin{8} b$	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis
	Si ſit $x \infty \frac{cd}{a \mathbin{8} b}$: h. e., ſi ſit ut $a \mathbin{8} b$ ad c, ita d ad x; vel permutatim $a \mathbin{8} b$ ad d, ita c ad x:	
c *per* 16 *ſexti.*	fit $a x \infty bc \mathbin{8} dc$.	erit [c] $a x \infty bc \mathbin{8} dc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis
	Si ſit $x \infty \frac{bc \mathbin{8} dc}{a}$: h. e., ſi ſit ut a ad $b \mathbin{8} d$, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita $b \mathbin{8} d$ ad x:	
d *per* 16 *ſexti.*	fit $a x \mathbin{8} b x \infty c d \mathbin{8} e d$.	erit [d] $a x \mathbin{8} b x \infty c d \mathbin{8} e d$.
	multiplicetur per $a \mathbin{8} b$	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis
	Si ſit $x \infty \frac{cd \mathbin{8} ed}{a \mathbin{8} b}$: h. e., ſi ſit ut $a \mathbin{8} b$ ad $c \mathbin{8} e$, ita d ad x; vel permutatim $a \mathbin{8} b$ ad d, ita $c \mathbin{8} e$ ad x:	
e *per* 16 *ſexti.*	fit $a x \infty bb - cc$.	erit [e] $a x \infty bb - cc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis
	Si ſit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$: h. e., ſi ſit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + x$ ad x.	

Figura 85. Algunas relaciones entre la composición algebraica y geométrica (Schooten, 1661b, p. 357)

Van Schooten presenta una tabla con dos columnas en la cual muestra la correspondencia entre una expresión algebraica y su posible representación geométrica. Las relaciones geométricas siguen siendo la herramienta para razonar los teoremas y los problemas; sin embargo, en esta tabla, lo algebraico toma la misma importancia que lo geométrico. Se evidencia que el registro algebraico puede ser concluyente para el tratamiento de los teoremas.

En el caso de los problemas, van Schooten construye otra propuesta de argumentación y de interacción entre los métodos de análisis y síntesis, a través del principio de construcción del problema; que fue el producto de usar la tabla de relación entre la composición algebraica y la construcción geométrica. Por ejemplo, en la solución del siguiente problema:[148]

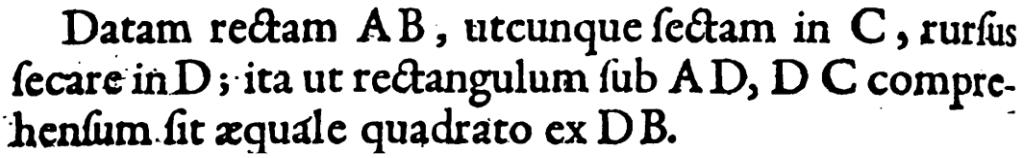

Datam rectam AB, utcunque ſectam in C, rurſus ſecare in D; ita ut rectangulum ſub AD, DC comprehenſum ſit æquale quadrato ex DB.

Figura 86. Ejemplo de problema. (Schooten, 1661b, p. 360)

El análisis o la resolución fueron espacios dedicados a suponer la solución del problema a través de un diagrama que expresa las condiciones que permiten la solución de la situación, contiene rectas auxiliares y las propiedades que se generan. Estos diagramas muestran el producto de la imaginación del resolutor, el manejo de la práctica en la cual está instaurado el problema, la imagen hace parte constitutiva de la solución.

[148] Dada la recta AB y un punto en esta recta C. Cortar la recta en D, de tal manera que el rectángulo comprendido entre AD, DC es igual al cuadrado DB.

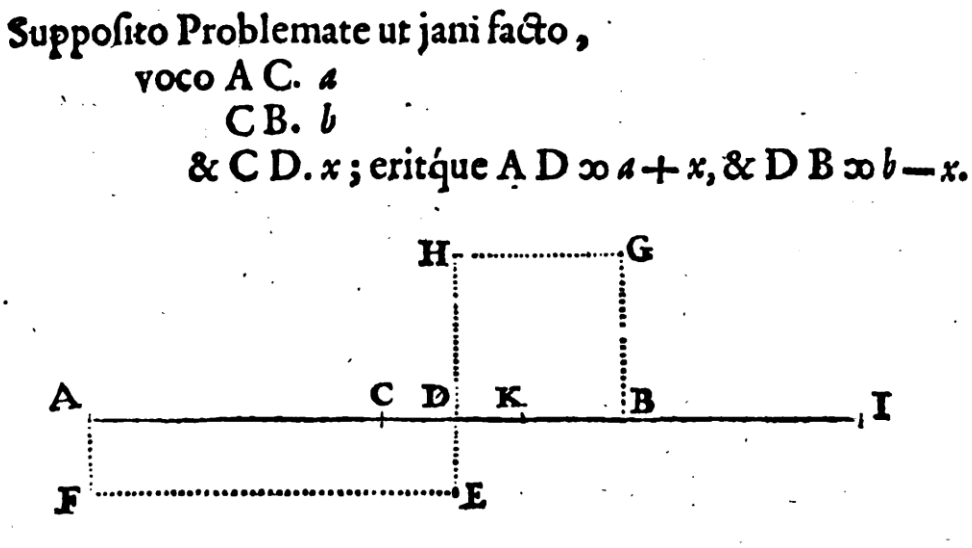


Figura 87. Propuesta de solución problema de la figura 87. (p. 360)

Lo que sigue a la suposición del problema es establecer las relaciones algebraicas que representan los cuadriláteros hasta llegar a la ecuación $ax + xx = bb - 2bx + xx$ que representa la igualdad buscada en el problema. Al despejar x de la ecuación, entonces, se tiene la relación proporcional que produce la solución al problema $\frac{x}{b} = \frac{b}{a+2b}$. El principio analítico queda justificado a partir de la simplicidad de una proporción.

En un segundo apartado, aparece la relación entre la composición algebraica y la representación geométrica. En estas dos columnas aparece cada uno de los hechos geométricos o algebraicos y su justificación teórica, la cual está dispuesta en la parte derecha de la hoja.[149]

[149] El texto que aparece citado para argumentar las relaciones es la versión de *Elementos* de Euclides de Clavius (1589). Un análisis de las diferencias entre las versiones de Euclides en la época se puede estudiar en; *the development of Euclidean axiomatics. The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the Elements in the Early Modern Age*. (Risi, 2015)

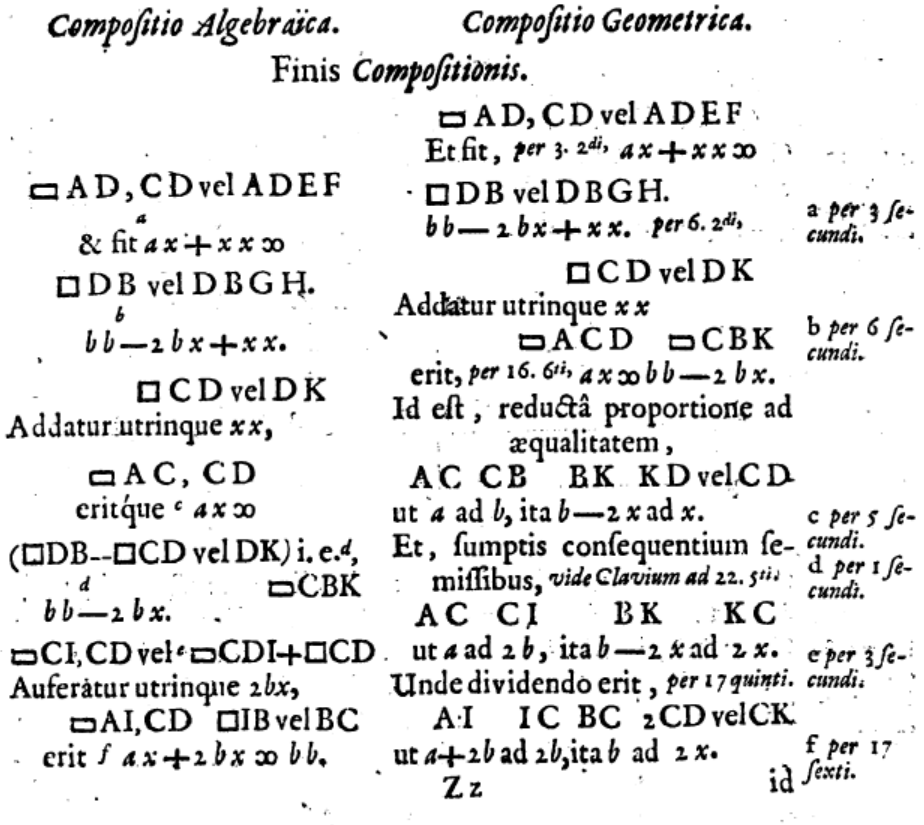


Figura 88. Composición algebraica y geométrica. (Schooten, 1661b, p. 361)

La relación entre lo geométrico y lo algebraico permitió justificar el principio que estaba detrás del problema y que se deducía a través del análisis, que fue: $a + 2b$ es a b como b es a x; o, geométricamente, AI es a IB como BC es a CD. Haciendo uso del proceso de síntesis, van Schooten construye y justifica esta relación.

El principio de construcción que se afirma es; al tomar AB hasta I, de tal manera que BI es igual a BC se establece que AI es a IB o BC, como BC es a CD entonces la relación entre el rectángulo ADC y el cuadrado $ADEF$ es igual a la del cuadrado DB con el rectángulo $DBGH$. Esta igualdad se establece por medio del análisis y se comprueba geométricamente en la síntesis. Siendo así, van Schooten realiza los dos procesos usando el mismo diagrama -figura 88-.

La imagen reúne las relaciones que se establecen en la prueba a través de la proporción AI es a IB como BC es a CD. Por medio de proporciones entre los segmentos, mostró que, partiendo del principio, puede argumentarse la igualdad entre el rectángulo $AD \times CD$ y el cuadrado DB.

Van Schooten muestra una forma de organizar la relación entre el hecho algebraico y el geométrico. Este modelo de explicación sirvió para relacionar el método de análisis y el de síntesis, y para mostrar la equivalencia entre los dos registros. La justificación geométrica de las ecuaciones se realiza a partir de una proporción y no por medio de una construcción. El diagrama que se mantiene es el que permite obtener el supuesto para la solución y la correspondiente red de relaciones que permiten solucionar la situación. En el caso de los teoremas, el diagrama aparece en la parte sintética como un organizador de la red de conceptos que permite probar la proposición.

3.8 Cambios en la Práctica Cartesiana en la Segunda Edición de la *Geometría.* Reflexión para el Horizonte de Contenido

Para finalizar este capítulo, a partir del uso de las componentes de la definición de práctica matemática y del sistema de práctica de la *Geometría* de 1637 se organizan los cambios vistos en la segunda edición en latín.

Estos pequeños movimientos que corresponden a la transición de la práctica matemática para el crecimiento del conocimiento matemático propuesto en el modelo de práctica de Kitcher (1984) estuvo a cargo del quehacer matemático de quienes impulsaron y determinaron la interpretación que se dio en los años posteriores a la primera publicación de *Geometría* y que han sido analizados en este capítulo a partir de los escritos que se encuentran en la segunda edición en latín del texto.

Algunas componentes del sistema de práctica definido en el apartado 2.5 fueron reinterpretados o modificados dentro de la estructura de la práctica. Se realizaron nuevas formas de tratamiento de las consideraciones que se hacen de las curvas algebraicas y sus representaciones que originaron resignificaciones de los conceptos y métodos usados, estas prácticas post-cartesianas se han evidenciado en los numerales de este segundo capítulo. La siguiente tabla muestra las transformaciones en cada componente de la práctica en la segunda edición en latín de la *Geometría*:

Componente de la práctica	Cambios en la segunda edición
Comunidad de matemáticos	Esta edición de la *Geometría* tuvo difusión en toda Europa y recogió parte las discusiones alrededor de cartesianismo. Incluyó la obra realizada por de Witt y, con ella, la primera organización de la naciente geometría analítica basada en las concepciones cartesianas. Los pupilos de van Schooten, en la Universidad de Leiden, son los principales comunicadores y estudiosos de la obra cartesiana. Por ser una obra en latín tuvo reconocimiento en toda Europa y la mayoría de los matemáticos de la época la leyeron. El texto tiene apartes aclaratorios como los comentarios de van Schooten e interpretativos, como la introducción que hizo al método cartesiano el mismo autor.
Programa de investigación	Los criterios metafísicos del programa de investigación cartesiano no cambiaron, la búsqueda de

	criterios generales por medio de un método siguió siendo la perspectiva científica de la época. Las preguntas que intentó contestar Descartes siguieron estando en la discusión de los matemáticos. Se profundizó la idea de construir una matemática universal con la cual fuera posible solucionar cualquier problema de la aritmética o la geometría. El álgebra (su operatividad y sus técnicas) se constituyó como respuesta a esta pretensión.
Lenguaje formal	El lenguaje que se presenta continúa siendo caracterizado por las proporciones; la teoría euclidiana queda incorporada en las nuevas formas de comunicar las ideas matemáticas a través de letras minúsculas que representan cantidades de magnitud y que geométricamente representaban la medida de un segmento de recta. Las operaciones y los procedimientos algebraicos son más numerosos en esta edición y en algunos de los escritos no es necesaria la representación geométrica; la escritura por medio de letras y ecuaciones inició un desprendimiento de la geometría y comenzó a consolidarse como una forma de expresar las ideas cartesianas.
Métodos de prueba	El método de análisis se usa para resolver problemas y para probar las propiedades de las curvas. En el segundo caso, lo dado es la representación gráfica de la curva y, en

	el caso de Witt, también la expresión simbólica. Aparece la variabilidad de un punto sobre un segmento para construir los argumentos que permiten argumentar una proposición. El diagrama, en su función de mantener la red de conceptos que desarrollan una argumentación, se mantiene durante toda la obra, al igual que como resultado de la imaginación que permite plantear la primera parte del método analítico.
Conceptos	La base conceptual de toda la obra es una traducción al álgebra de la época del trabajo Apolonio en *Cónicas.* Las curvas pasan a ser objetos de estudio, su ontología deja de ser geométrica, se trabaja con la relación símbolo–gráfica, lo que le otorga el mismo significado a la expresión algebraica y la representación geométrica. Los diagramas ya no tienen énfasis en la construcción de curvas sino en sus propiedades; por lo que, se desvanece el uso de construcciones para representar ecuaciones.
Métodos argumentativos	En esta edición el análisis como método para la solución de problemas se complementa con un análisis que sirve para justificar proposiciones matemáticas. En la obra de de Witt se organiza el conocimiento de las ecuaciones de segundo grado a partir del tipo de curva que representan.

	Desaparecen los instrumentos como medio para argumentar la existencia de una curva. En muchos casos, ésta aparece de hecho, como parte del supuesto que permite probar la propiedad de una curva.
Estrategias de prueba	Solamente en de Witt se nota la estrategia de generalización de procedimientos y prueba que se ve en Descartes. No hay una clasificación de problemas por medio de la intersección de curvas; esta cambia por el grado de la ecuación con que se trabaja. En varios escritos, la raíz de la ecuación se justifica por medio de las proporciones que se deducen del principio analítico y no por medio del procedimiento geométrico de intersección de curvas.

En la propuesta de horizonte de contenido que se está trabajando, apartado 2.4, se vinculó el horizonte interno del contenido con el horizonte matemático del currículo y el horizonte externo con el horizonte matemático avanzado. El foco de análisis en este estudio corresponde al papel de los diagramas en el desarrollo del post-cartesianismo.

En Bello (2019) se argumentó el uso que en algunos textos de didáctica del álgebra se le ha otorgado al método cartesiano, fundamentalmente, se asocia con su reducción a un sistema matemático de símbolos y en su énfasis de manipulación algebraica dejando de lado el análisis del tratamiento representacional y semántico de la *Geometría* de Descartes.

Por otra parte, en la literatura en didáctica de la matemática, se encuentran propuestas de aula con aspectos que se visualizaron importantes en términos del análisis de la obra; específicamente, lo referente a los instrumentos como artefactos mediadores en el

conocimiento matemático. El grupo de Laboratorio de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Modena, en especial las personas vinculadas con el laboratorio de didáctica de la matemática,[150] desde hace más de tres décadas han desarrollado investigación respecto al uso de instrumentos y maquinas históricas en el aula de matemáticas. Para ello han recreado por medios físicos y virtuales, máquinas e instrumentos que históricamente sirvieron para trazar curvas y solucionar ecuaciones; entre ellos, los compases de Descartes y van Schooten. (Bartolini y Sun, 2018; Maschietto y Bartolini, 2006). Propuestas como estas son ejemplo del uso didáctico de elementos que se reconocen en la obra cartesiana y que están en la perspectiva de esta investigación, hacen parte del horizonte interno del método de resolución de problemas en la formación matemática que se reconoce en la obra de Descartes.

El estudio de la práctica que se desarrolló alrededor de la obra de Descartes, por lo menos para la segunda edición en latín del texto y colocando el lente en el uso de diagramas, permite dilucidar pequeñas transformaciones alrededor de algunos aspectos, en cada dominio del sistema de práctica. El uso que se observa de los cambios de práctica cartesiana a la postcartesiana que se estudió en esta edición editada por van Schooten y que permitirían configurar una historia de la práctica para el desarrollo del horizonte de contenido en la formación del profesor de matemáticas, se resume en la siguiente tabla:

Horizonte de contenido	Aspectos segunda edición en latín de la Geometría
Horizonte externo	• Pérdida del modelo de construcción geométrico por intersección de curvas de las

[150] En la página de la Associazione Macchine Matematiche http://www.macchinematematiche.org/

	raíces de ecuaciones. • Equivalencia entre la representación geométrica y algebraica de una curva. • Representación de la variación de los elementos de magnitud que conforman una cónica a través de diagramas estáticos que muestran el cambio en varios puntos de una curva. • La variación de un punto en un segmento como modelo de construcción de las representaciones cartesianas. • El análisis como método de solución de problemas y de argumentación en matemáticas.
Horizonte interno	• La relación bidireccional entre la expresión simbólica y la representación geométrica. • La curva como supuesto, como dado, para mostrar sus propiedades. • El uso de modelos de identificación de posiciones de las curvas a partir de diagramas que generalizan una familia de curvas.

4. La Práctica Cartesiana en los Libros de Texto

En este capítulo se revisa la práctica matemática cartesiana en el libro de Geometría del padre Bernard Lamy y el texto del padre Charles-René Reyneau. En ese entonces, la hermandad de los oratorianos tenía a cargo algunas universidades y colegios en Francia. Las matemáticas hacían parte de las clases de filosofía, y el énfasis en su enseñanza era la solución de problemas de la física.

Se presume, como lo indica Belhoste (1993), que el cartesianismo fue enseñado inicialmente fuera del currículo escolar, en el caso de la comunidad de oratorianos, a partir de las ideas de Malebranche (1638-1715), quien influyó en las Universidades de la congregación desde 1660, especialmente la de Angers; sin embargo, no se tienen muchos datos del tipo de enseñanza, pero, por ejemplo, se sabe que el libro de Geometría de Lamy todavía se estudiaba por 1720.

Malebranche fue nombrado profesor de Matemáticas en el oratorio a partir de 1674 y, desde ese momento, lideró un grupo que transformó la enseñanza de esta área en la congregación:

> *A la suite de Malebranche, toute une lignée de mathématiciens cartésiens passés au collège d'Angers s'illustrent par leurs travaux entre 1670 et 1740. Citons en particulier le père Bernard Lamy (1640-1715), professeur de philosophie à Angers de 1673 à 1675 et les pères Jean Prestet (1648-1690), Charles Reyneau (1656-1728), Jean-Baptiste de Mercastel (1669-1754) et Jean-Simon Mazières (né en 1683), qui occupent successivement la chaire de mathématiques d'Angers de 1681 à 1724. Tous contribuent par leurs ouvrages à répandre les méthodes de l'analyse cartésienne. Lamy critique les Eléments d'Euclide comme ouvrage élémentaire ;*

> *Prestet proclame la supériorité de l'analyse - c'est à dire de l'algèbre - sur la "géométrie des figures" Reyneau, considérant les trois manières d'exprimer les grandeurs en général et tous leurs rapports, "par les lignes et les figures, par les expressions des nombres et par les expressions littérales", juge cette dernière la plus générale. Ce qui caractérise à l'évidence l'enseignement de ces professeurs, c'est le primat accordé à l'algèbre sur la géométrie*[151]. (Belhoste, 1993, p. 5)

Malebranche y su grupo criticaron el papel de la imaginación en las ideas de Descartes; para ellos, la forma analítica algebraica no depende de la visualización geométrica, lo que implica un avance en el razonamiento geométrico,[152] *The pursuit of geometrical knowledge by algebraic means thus protects the geometer from the temptations of the imagination, which lead toward pleasure and thus sin* (Arana, 2016, p. 470). Estos aspectos fueron difundidos a partir de los libros de texto de los integrantes del grupo; de esta manera, la práctica de enseñanza puso énfasis en el análisis algebraico.

Su compromiso con los problemas de la física que estaban siendo abordados con las nuevas técnicas de cálculo diferencial e integral, los cuales había discutido con Leibniz, condujeron a Malebranche a una posición entre el cartesianismo y los nuevos enfoques

---

[151] Después de Malebranche, un grupo de matemáticos cartesianos que pasaron por el colegio de Angers se destacaron por sus trabajos entre 1670 y 1740. Citemos en particular al padre Bernard Lamy (1640 1715), profesor de filosofía en Angers de 1673 a 1675 y a los padres Jean Prestet (1648-1690), Charles Reyneau (1656-1728), Jean-Baptiste de Mercastel (1669-1754) y Jean-Simon Mazières (nacido en 1683), que ocuparon sucesivamente la cátedra de matemáticas en Angers de 1681 a 1724. Todos ellos contribuyen con sus obras a difundir los métodos del análisis cartesiano. Lamy critica los *Elementos* de Euclides como una obra elemental; Prestet proclama la superioridad del análisis, es decir del álgebra, sobre la "geometría de las figuras"; Reyneau, consideró tres formas de expresar las magnitudes en general y todas sus relaciones, "por líneas y cifras, por expresiones de números y por expresiones literales", considera esta última como la más general. Lo que caracteriza claramente la enseñanza de estos profesores es la primacía otorgada al álgebra sobre la geometría.
Belhoste se apoya en Jeanne Peiffer para afirmar que Malebranche cambiará luego su posición y valorará el papel de la intuición en relación con el cálculo infinitesimal.

[152] La búsqueda del conocimiento geométrico por medios algebraicos protege así al geómetra de las tentaciones de la imaginación, que conducen al placer y por tanto al pecado.

propuestos por Leibniz sobre la primacía en el pensamiento matemático de la simbolización, las técnicas algebraicas y el uso de los infinitesimales. Según Costabel (1981), el *ocasionalismo*[153] -filosofía de Malebranche-, propició el avance en su posición sobre la relación entre la teoría y el experimento:

> *It is not difficult to understand why occasionalism was a conception particularly conducive to the advance of experimental science. To the degree that nature appeared, to Malebranche, as simply a sphere of relations, the dialogue between reason and experience became for him, inevitably, the fundamental stimulus in the pursuit of knowledge. For when reason was supported by metaphysics, as it was in Descartes, it had much too great a tendency to declare what should be, a priori, and to call upon experience solely for confirmation. In his view, however, the only means of discovery available to the human mind are occasional causes, that is, causes which could have been totally different and which are the reflection not of some ontological necessity but only of the Creator's will. Consequently, experience is indispensable*[154]. (p. 49)

Esta relación entre lo experimental en la resolución de situaciones y su relación con la teoría es relevante para comprender el papel asignado a la imagen en estos libros, en

[153] El ocasionalismo es una teoría filosófica sobre la causalidad, afirma que las sustancias creadas no pueden ser causas eficientes de eventos. En cambio, todos los eventos se consideran causados directamente por Dios.
[154] No es difícil comprender por qué el ocasionalismo fue una concepción particularmente propicia para el avance de la ciencia experimental. En la medida en que la naturaleza le pareció a Malebranche, simplemente, como una esfera de relaciones, el diálogo entre la razón y la experiencia se convirtió para él, inevitablemente, en el estímulo fundamental en la búsqueda del conocimiento. Porque cuando la razón se apoyaba en la metafísica, como en Descartes, tenía una tendencia demasiado grande a declarar lo que debería ser, a priori, y a recurrir a la experiencia únicamente para su confirmación. Sin embargo, en su opinión, el único medio de descubrimiento disponible para la mente humana son las causas ocasionales; es decir, causas que podrían haber sido totalmente diferentes y que son el reflejo, no de alguna necesidad ontológica sino, únicamente, de la voluntad del Creador. En consecuencia, la experiencia es indispensable.

especial en el de Reyneau. La dualidad experiencia-razón, se focaliza para el caso de las matemáticas, en la aplicación de la teoría algebraica en situaciones que son representables a través de diagramas. La teoría aparece como experiencia a través de resolución de situaciones, es la práctica de la teoría lo que es la experiencia. Esta posición se mantiene con algunos matices en la obra de Lamy.

El padre Lamy fue recibido en el oratorio en 1662 y, hasta que fue ordenado en 1667, ocupó un puesto como maestro en el colegio jesuita de Juilly. Luego, fue trasladado a *Le Mans* hasta 1669; después fue a enseñar en la Universidad de *Angers*, donde fue conocido por impartir lecciones de cartesianismo. En 1675 fue suspendido de su cargo por realizar enseñanzas antimonárquicas, entre ellas, por enseñar la filosofía de Descartes. (Schubring, 2005). Quizás un año después volvió a enseñar en el seminario de Grenoble.

Lamy escribió dos textos sobre matemáticas: Éléments de mathématiques ou traité de la grandeur en général qui comprend l`arithmétique y L'algèbre, l'analyse et les principes de toutes les sciences qui ont la grandeur (1680), en donde trata la cantidad de manera general y Les éléments de géométrie, ou de la mesure du corps, tout ce qui comprennent qu'Euclide a enseigné (1685), un texto que refiere a las cantidades de magnitud geométrica, el último libro de este texto está dedicado al método cartesiano. Lamy propuso leer primero el libro de 1680, que se refiere a la cantidad, y luego su geometría, pues consideraba que esta última no era un buen camino de ingreso a las matemáticas porque apelaba a los sentidos los cuales eran engañosos. (Alfonsi, 2012)

Reyneau ingresó a la congregación en 1676 en donde conoció a Malebranche con quien trabajó en la reforma de las matemáticas. Fue profesor de filosofía desde 1679 y enseñó geometría desde 1681, un año después fue nombrado profesor de matemáticas en la Universidad de *Angers*, luego enfermó y dejó la docencia en 1705.

Escribió dos obras matemáticas que fueron usadas en la enseñanza universitaria en Angers. La primera está compuesta de dos tomos, Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes des mathématiques, et d'apprendre facilement ces sciences, y Usage de L'analyse ou la manière de l'appliquer; *ambos tomos hacen referencia al método cartesiano y su aplicación a varias áreas del conocimiento.*

> *Because of the close cooperation within the Malebranche group, this answer can further be expected not to have been Reyneau's alone, but one jointly elaborated. Indeed, the textbook's title already underlines its character of intentional retort: Analyse démontrée, a title implicitly refuting the objection that the new theory was lacking rigorous proof*[155]. (Schubring, 2005, p. 194)

El uso de textos no era común en esta época, existía la cultura del dictado que fue la modalidad de enseñanza imperante para las matemáticas basadas en el libro euclidiano. Por lo tanto, cada texto que se publicó estaba vinculado a nuevas formas de entender la enseñanza de la matemática. Estos libros fueron apoyados por corrientes filosóficas que se oponían a la tradición de la visión euclidiana. (Belhoste, 1993)

En esta sección de la tesis se analizará el enfoque de práctica matemática cartesiana expuesta en el libro sobre el método, comparando las diferentes ediciones de la Geometría de Lamy con los dos tomos del libro del Reyneau. Este análisis va a brindarnos una idea de qué aspectos de la práctica cartesiana fueron acogidos en la comunidad de oratorianos para la enseñanza y cuáles fueron sus transformaciones en la práctica.

[155] Debido a la estrecha cooperación dentro del grupo Malebranche, puede esperarse que esta respuesta no haya sido solo de Reyneau, sino una elaborada en conjunto. De hecho, el título del libro de texto ya subraya su carácter de réplica intencional: *Analyse démontrée*, título que refuta implícitamente la objeción de que la nueva teoría carecía de pruebas rigurosas.

4.1 Las Ediciones de la *Geometría* de Bernard Lamy[156]

En todas las ediciones de *Les éléments de Géométrie ou de la mesure du corps* de Lamy el contenido se distribuyó por libros y estos en capítulos. En este estudio se analiza el apartado dedicado al método, el cual se presenta como último libro en las siete impresiones del texto. Los libros anteriores plantean cuestiones geométricas desde la perspectiva euclidiana haciendo énfasis especial en las proporciones. Por la ubicación de lo cartesiano en el texto, se deduce que Lamy consideró que el método de la geometría antigua era un requisito para abordar la resolución de problemas. De igual manera, en el prefacio del texto, afirmó que primero se debería leer su texto sobre de la magnitud, en donde presenta las técnicas y operaciones del álgebra.

Para adelantar el análisis de estos textos, se organizaron las impresiones en tres grupos de ediciones con el mismo contenido. El grupo 1 contiene las impresiones de 1685 y 1692 se analiza el libro V en el cual se encuentra el método. En el grupo 2, se estudia el libro V de las ediciones de 1710, 1732, 1734 y 1740; y, en el último grupo, se estudia el libro VI de la edición de 1758. La siguiente tabla muestra esta organización:

Grupo	Año	Texto
1	1685	Les élémens de Géométrie ou de la mesure du corps
	1692	Nouveaux éleméns de Géométrie ou de la mesure du corps
2	1710	Les éleméns de Géométrie ou de la mesure de l'étendue. Cuarta Edición. Revisada y aumentada

[156] Parte de este documento fue publicado en la *Revista Científica*. (Bello, 2020)

	1731	Les éleméns de Géométrie ou de la mesure de L´étendue. Quinta Edición. Revisada y aumentada
	1734	Les éleméns de Géométrie ou de la mesure de L´étendue. Sexta Edición. Revisada y aumentada
3	1758	Les éleméns de Géométrie ou de la mesure de L´étendue. Séptima Edición. Revisada y aumentada

Siguiendo a Schubring (1987) en el análisis de textos antiguos, se estudian las diferentes ediciones del texto, el tipo de problemas que abordaron y el contexto en que se desarrollaron. En la *Geometría* de Lamy se estudia su concepción del método de resolución de problemas en cada grupo. Ello permite comprender las diferencias entre la idea de método propuesta por Descartes en la *Geometría* y su interpretación en la enseñanza. En especial, se profundiza en el uso de los diagramas en el método y tratamiento de las proporciones.

4.1.1 Análisis Sobre el Método. Primer Grupo

En estas ediciones, Lamy se propone desarrollar el método para solucionar problemas a través de las siguientes ocho reglas (Lamy, 1685, p. 282-289):

a. Como todo no es desconocido en una pregunta se representa lo conocido y se supone lo desconocido.
b. Si se propone una pregunta se debe saber elegir ciertas cantidades y, en consecuencia, comprender si la pregunta es determinada o indeterminada.
c. Se debe considerar cuidadosamente qué buscar en una pregunta para indicar lo que se conoce y distinguir lo que no. Las cantidades conocidas se indican con las primeras letras del alfabeto y las desconocidas con las últimas.

d. En una pregunta se descubre lo que relaciona una magnitud desconocida por las propiedades de la figura que se aprovecha para resolver esta cuestión y por las relaciones que las cantidades desconocidas tienen con las conocidas.
e. Examinar las cantidades y expresar lo desconocido de dos maneras se llama ecuación.
f. Los términos que representan una pregunta deben expresarse de modo que, si es posible, solo haya una letra desconocida.
g. Realizar procedimientos para igualar las cantidades desconocidas.
h. Es necesario reducir los términos de una pregunta a los términos más simples.

Cada regla es un paso en la conformación de la resolución. El método consiste en un análisis relacional entre cantidad que permita identificar su estatus y luego suponer que el problema está resuelto, de manera que la imaginación que involucra la solución queda plasmada en un diagrama que contiene las relaciones que ha de cumplir lo desconocido. Luego acude a la escritura sobre la cantidad de magnitud, que usó Descartes, tanto para lo conocido como para lo desconocido; lo que permite obtener la ecuación que contiene la solución del caso.

Lamy interpretó el método a través de una técnica que consiste en pasar del análisis de la pregunta a la formulación de una ecuación que la representa usando, adecuadamente, las relaciones geométricas que se desprenden del diagrama. Sus consideraciones para enseñar el método hacen énfasis en el análisis de la pregunta y el proceso de doble escritura planteado por Descartes; las cinco primeras reglas presentadas por Lamy en esta edición se refieren a esta parte del método.

Antes de exponer las reglas para solucionar problemas, Lamy dedicó los primeros capítulos de este libro a mostrar la importancia de analizar la pregunta y la solución de una

situación a través de una figura que contiene las relaciones geométricas de lo dado y lo desconocido en el problema. Al igual que en Descartes la imagen cumple el papel de encausar el supuesto de la solución. El diagrama muestra las relaciones que generan la solución y la manera en que debe avanzarse en el razonamiento para producir las ecuaciones que ayudan a resolver la situación. Por ejemplo, en el siguiente caso:[157]

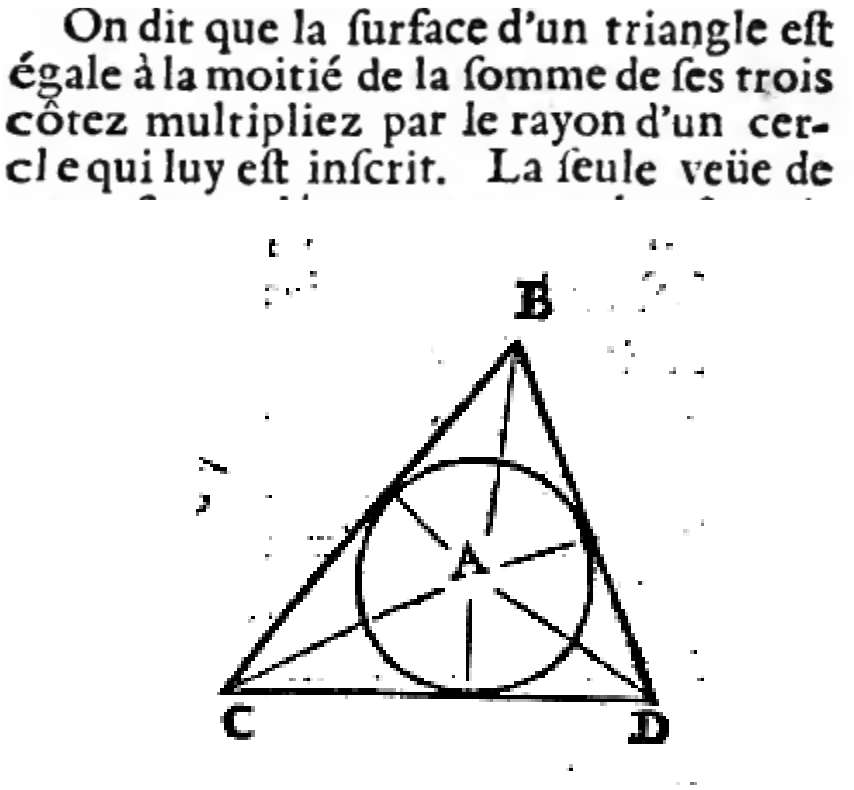


Figura 89. Problema: inscribir un círculo en un triángulo. (Lamy, 1685, p. 269)

El punto de partida de Lamy es apreciar que en el diagrama se da por supuesto que la propiedad que enuncia el problema es verdadera y que puede garantizarse por medio de la pura observación. Luego indica que se forman tres triángulos cuyas bases son iguales a cada uno de los lados del triángulo CBD y cuya altura es igual al radio del círculo inscrito; por lo tanto, el triángulo CBD, queda compuesto por los triángulos CAB, BAD y CAD. El

[157] El área de un triángulo es igual a la mitad de la suma de sus tres lados multiplicados por el radio de un círculo que se inserta en él.

diagrama cumple su función de visualizar las relaciones que permiten solucionar la situación; en la imagen se encuentra la red de conceptos involucrados en la solución, el radio de la circunferencia que equivale a la altura de cada uno de los triángulos que componen el triángulo BCD que son las relaciones entre cantidades que luego las transformaciones que permiten establecer las ecuaciones.

En el diagrama se supone el problema resuelto a partir de la relación entre el radio y el círculo. En el primer grupo de ediciones se observa que el texto contiene amplias explicaciones y ejemplificaciones de la importancia de suponer una solución para la pregunta e ilustrarla por medio de una imagen. De la propuesta de análisis de la pregunta y la conformación de una figura que permita evidenciar las relaciones del problema, es posible admitir con Barbin (2010), que constituyen una presentación que está acompañada por una heurística alrededor de la descomposición en triángulos. Esta técnica que aparece en el libro II de los *Elementos* de Euclides, se emplea en el transcurso del texto de Lamy para resolver y comprender todos los problemas. Posiblemente, en ella se expresa la simplicidad que se debe buscar en el método, pues reducir los problemas a triángulos es una manera de establecer las relaciones más simples entre las cantidades que representan los segmentos, y el principio que determina tales relaciones es una proporción por el teorema de Tales.

En el capítulo IV, Lamy plantea cuatro tipos de conocimientos requeridos en el análisis de la figura para la solución de un problema geométrico: las propiedades de los objetos involucrados, los ángulos, las razones y proporciones, y, por último, saber descomponer las figuras en triángulos semejantes. (Lamy, 1685, p. 274). Las ocho reglas antes mencionadas corresponden a los pasos en la aplicación del método, los medios se refieren al conocimiento matemático necesario para resolver los problemas.

El prefacio de esta edición de Lamy aclara que la Geometría es el mejor ejercicio para cultivar el espíritu de la verdad a través del método. Esto es, hacer avanzar el razonamiento geométrico por medios algebraicos, dotarlo de medios que permitan disipar los sentidos.

Antes de presentar las reglas, Lamy enseñó que en el diagrama se encuentran las relaciones que posibilitan solucionar un problema; estudiar el diagrama implica comprender la posibilidad de establecer representaciones simbólicas para las relaciones que se establecen o infieren a partir de la solución. Como ejemplo, la siguiente situación:[158]

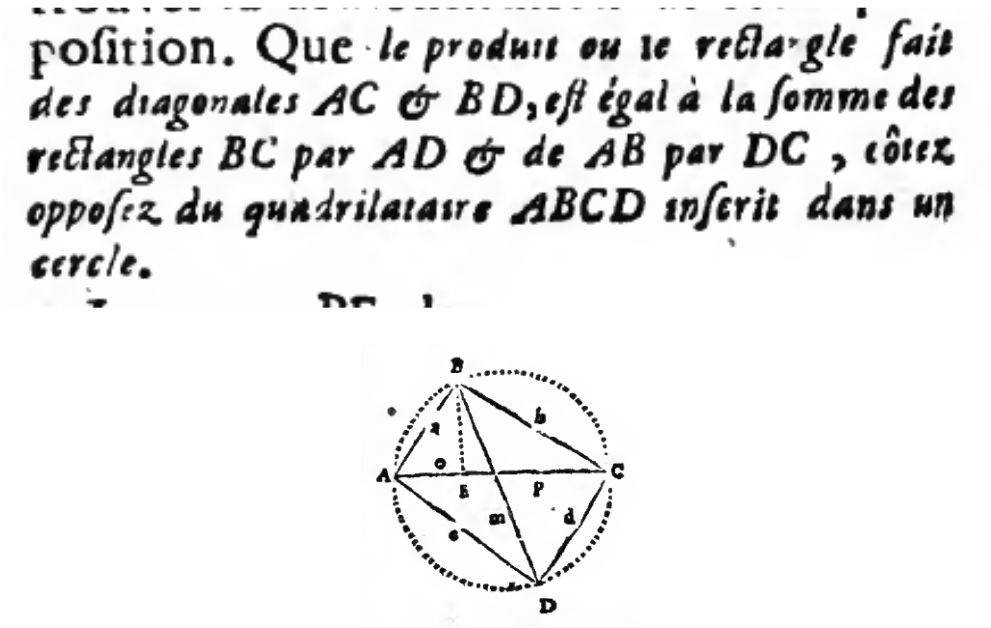


Figura 90. Problema del cuadrilátero inscrito. (Lamy, 1685, p. 274)

Después de asignar una letra a los segmentos de recta, como se ve en la imagen, Lamy propuso una línea auxiliar BE de tal manera que los ángulos ABE y DBC resultan iguales. Por la semejanza de los triángulos BDA y BCE, se deduce la siguiente proporción:

[158] Si del rectángulo se conoce el producto de sus diagonales AC y BD, y este es igual a la suma de los rectángulos BC por AD y de AB por DC, entonces, los lados opuestos del cuadrilátero $ABCD$ están inscritos en una circunferencia.

$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{CE} = \frac{m}{c} = \frac{b}{p}$, consecuencia de la condición de los ángulos con que se construye el segmento BE, los triángulos BDC y BAE son semejantes y, por tanto, $BD:CD::AB:AE$ que es $mo = ad$; de igual manera, se deduce que $mp = bc$ y $mo = ad$. Reemplazando, se tiene que $qm = bc + ad$.

El planteamiento de este problema muestra que el diagrama, al igual que en la obra de Descartes, es una herramienta imprescindible en la exploración de la solución. La imagen es el resultado de la imaginación creadora del resolutor, la cual se expresa a partir de relaciones que son posibles solo a través del trazo del segmento auxiliar BE. El diagrama conduce a la solución del problema, permite que las relaciones euclídeas sean observables en lo cartesiano y escritas por medio de técnicas y procedimientos algebraicos.

Otro asunto tratado por Lamy sobre el método es que se obtiene una expresión que permite generalizar la situación. Por ejemplo, en el siguiente problema,[159] presenta dos soluciones: una con los argumentos geométricos y la otra usando la escritura algebraica para implementar el método analítico:

BAC eſt un iſoſcele, on propoſe de couper ſes côtés AB, AC, par une parallele à la baſe BC; de ſorte que cette parallele ſoit égale à ce qui reſte des côtés, c'eſt à dire (je ſupoſe la choſe faite) que DB = DE.

[159] Sea BAC un triángulo isósceles; cortar sus lados AB y AC con una paralela a la base BC; de modo que, esta paralela sea igual a lo que queda de los lados; es decir: que $DB = DE$.

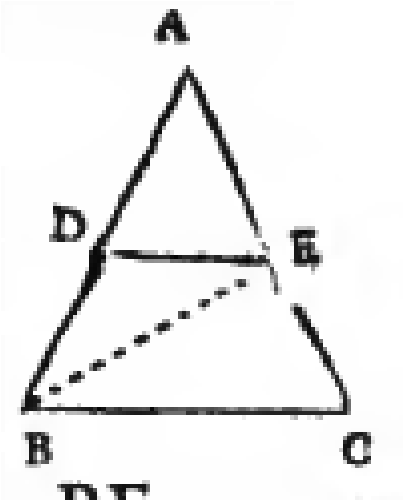


Figura 91. Problema para mostrar la capacidad de generalización del método. (Lamy, 1685, p. 314)

Primera solución

Supone que el problema está resuelto, entonces $BD = DE$; el triángulo BDE es isósceles y los ángulos DBE y DEB son iguales. Los ángulos CBE y BED son iguales, de tal forma que los ángulos EBC y EBD también lo son. Por lo tanto, la línea BE corta por la mitad al ángulo DBC. De aquí se deduce que son triángulos isósceles, al igual que BAC. Por esta propiedad del triángulo isósceles, encuentra el medio para resolver el problema propuesto. (Lamy, 1685, p. 314)

Segunda solución

Supone el problema resuelto, nombra a AB, que es conocido como a, y d, la base BC, también conocida. Llama x al tamaño desconocido AE; así que, $EC = a - x$, también $DE = a - x$. Entonces, $a : d :: x : a - x$; se obtiene $aa - ax = dx$. Agrega, a ambos lados ax, entonces, $aa = dx + ax$. Supone que $c = d + a$. Entonces, $cx = dx + ax$ y, por lo tanto, en lugar de $dx + ax$ coloca cx; se obtiene $aa = cx$. Dividiendo la ecuación por c se

tiene que $\frac{aa}{c} = x$ por consecuencia: $\frac{\ddot{.}\ 160}{\ddot{.}}c, a,\ x$. En consecuencia, el problema se trata de agregar un tercio proporcional a dos líneas conocidas, que son los primeros dos términos de una progresión. La línea AB unida con la línea BC es el primer término y AB el segundo.[161] (Lamy, 1685. p. 314)

En las dos formas de resolver el problema, se usa el mismo diagrama; porque este representa el supuesto de existencia de la línea que cumple la condición del problema, que es necesaria para su solución. Lamy recomienda a sus lectores la segunda solución, pues es una forma analítica general, se llega a una conclusión de relación de segmentos, el problema queda transformado en una situación de suma de segmentos. Nótese que solo la expresión $a: d :: x: a - x$ es interpretada en términos geométricos, el resto de la solución se elabora con razonamiento algebraico que no se presenta geométricamente (Arana, 2016). La respuesta de la tercera proporcional es interpretada de manera geométrica. En esta edición el símbolo sigue siendo interpretado geométricamente.

4.1.2 Análisis Sobre las Proporciones. Primer Grupo

En el prefacio del texto Lamy afirma que por las características educativas de la obra aborda solo problemas lineales y planos cuya solución es una ecuación de primer o segundo grado. Únicamente nombra la posibilidad de existencia de otros tipos de ecuaciones, por ejemplo, plantea la ecuación de tercer grado que resuelve el problema de la trisección del ángulo.

En este texto de Lamy la solución de los problemas y la resolución de ecuaciones se reducen a las proporciones de la media y la tercera proporcional, las cuales, afirma, deben

[160] Símbolo usado en la obra para referirse a la proporción geométrica continua.
[161] En la presentación que hace Arana (2016) de este mismo problema, omite esta última parte de la prueba. La solución la presenta como $x = \frac{a^2}{d+a}$ que no es exactamente lo que deduce Lamy.

ser estudiadas en el libro sobre la cantidad en general. Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones de segundo grado, usa el mismo diagrama y la misma construcción que en el texto de 1637 de Descartes; pero, los argumentos geométricos de la solución cambian. Así se observa en la solución de Lamy para la ecuación $yy = bb + yd$.

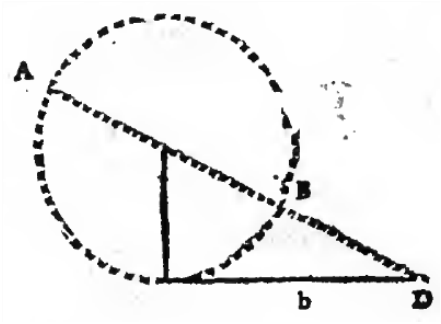


Figura 92. Construcción ecuaciones de segundo grado. (Lamy, 1685, p. 299)

La línea b, por construcción, es una tangente a la circunferencia; y, dado que el radio de la circunferencia es igual a la mitad de d, el diámetro entero es $AB = d$. Llama y a la secante AD, y x a la parte DB que está fuera del círculo. Dado que el todo multiplicado por la suma de las partes es el producto del todo por el todo, entonces, $yy = yd + yx$, que se puede interpretar con $\ddot{-}\,y, b, x$ entonces $yx = bb$ sustituyendo así en la ecuación anterior el cuadrado bb en lugar de yx, se obtiene $yy = bb + yd$; la línea AD, que es igual a la magnitud, previamente desconocida. (Lamy, 1685, p. 299)

En la presentación de Lamy, existen cambios significativos respecto al tratamiento realizado por Descartes en 1637. En Descartes, se llega a $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ por medio del teorema de Pitágoras y la argumentación que se presenta en el apartado 2.6.4. de este documento.

Esta diferencia en la argumentación de la solución de las ecuaciones de segundo grado entre Lamy y Descartes permite comprender que para Lamy la tercera proporcional

pasa a ser un principio geométrico simple que permite llegar a una generalización del tratamiento aritmético sin construcción.

Por ejemplo, en la descripción del capítulo IX, enuncia: "*Les équations de deux dimensions se peuvent réduire à une progression de trois termes, ce qui donne un moyen plus naturel pour résoudre les problèmes plans*" [162] (Lamy, 1685, p. 301). La solución de ecuaciones de segundo grado, entonces, ya no necesita una justificación geométrica; ellas se pueden representar y solucionar a partir de encontrar los términos de una progresión, por medio de una proporción.

Son las proporciones y, en especial, la tercera proporcional, las ideas simples que permiten generalizar el procedimiento para hallar la raíz de la ecuación. Lamy muestra cómo, a partir del método del análisis, se establece el principio fundamental que sustenta la resolución; la relación geométrica que permite la existencia y la justificación de una idea matemática. Lamy afirma que al buscar por análisis la resolución de un problema, después de llegar a una de las formas de las ecuaciones de segundo grado, debe reducirse a una progresión de tres términos en la que siempre se conoce la media proporcional. (Lamy, 1685, pp. 301-308).

Los elementos que justificaron este tipo de deducciones son las proporciones. En consecuencia, algunas "fórmulas" para la solución de ecuaciones van desplazando la construcción geométrica. Para el caso de las ecuaciones de segundo grado, desarrolla los siguientes casos:

La ecuación $xx = ax + bb$ se reduce $\ddot{\cdot}\ddot{\cdot} x - a, b, x$ porque $xx - ax = bb$; al sumar ax en ambos lados, se tiene la ecuación en cuestión: $xx = ax + bb$. La ecuación $xx =$

[162] las ecuaciones bidimensionales pueden reducirse a una progresión de tres términos, lo que proporciona una forma más natural de resolver problemas planos.

$ax - bb$ se reduce $\dddot{x}, b, a - x$. Como $ax - xx = bb$, al sumar xx en ambos lados, se tiene $ax = bb + xx$. Eliminando bb en ambos lados, se tiene $ax - bb = xx$. La ecuación $xx = bb - ax$ se reduce a $\dddot{x} + a, b, x$; porque $xx + ax = bb$. Eliminando en cada lado, se tiene: $xx = bb - ax$.

Estas tres maneras de expresar las ecuaciones median entre la construcción de la solución de la ecuación y la expresión simbólica, pues geométricamente se busca tener una de esas proporciones y la forma simbólica es otra manera de expresar la misma ecuación. La pretensión de Lamy de hacer conocer las cosas de la manera más natural termina siendo reducir los problemas a un principio elemental para las matemáticas, como lo es la media y la tercera proporcional. Este proceso mediador y generalizador es más aritmético que geométrico.

4.2 Cambios en Relación con el Método. Segundo Grupo de Ediciones

Este grupo de ediciones va desde 1710 hasta la impresión de 1740. Del prefacio se deduce que fue revisada y ampliada por el mismo Lamy, quien adicionó un libro sobre las propiedades que cumple cualquier magnitud y, al final del texto, un apartado sobre secciones cónicas. En la introducción, Lamy precisa que el libro VI lo dedica al método (lo que los geómetras llamaban análisis) y que esta forma de proceder contribuye a formar mentes más exactas y penetrantes.

En la introducción de este libro sobre el método, anuncia la diferencia al abordar los problemas con respecto a los libros anteriores. Afirma que el método consideraba la idea de las cosas de las que se hablaba y, luego, se derivaban sus propiedades; por lo tanto, se trataría de un método que supone lo conocido (Lamy, 1710, pp. 374-375). Advierte que durante este capítulo, trabajará con un nuevo método con el cual se encuentra lo que no se

sabe; lo llama “método de invención”, en oposición al primero, al cual llamó “método de doctrina” (Lamy, 1710, p. 375). Lamy se refiriere a la síntesis y al análisis; este segundo método es el que desarrolla durante el libro.

Tres asuntos llaman la atención en el tratamiento de problemas con el método en esta edición: el primero, la distribución de las reglas con las que introduce el método durante gran parte del libro; dedica un capítulo para explicar cada una. Segundo, la pérdida del énfasis en la elaboración del diagrama, por lo menos en términos de extensión y ejemplificación en el texto. En algunos problemas, para justificar la resolución de una ecuación que soluciona un problema, recurre al diagrama de otro problema o a uno general, hace más énfasis en la cantidad y en la proporción que en la construcción geométrica. Tercero, en esta edición no se ve un énfasis en la heurística de descomposición de triángulos.

Las seis reglas que se deducen de las descripciones de los capítulos son más específicas en la actividad que se debe realizar:

a. Es necesario concebir y expresar claramente la pregunta por medio de una figura.
b. Expresar las líneas de todas las magnitudes de las que hablamos en una pregunta y hacer sobre ellas todas las operaciones de aritmética, sin conocerlas todas.
c. Distinguir lo conocido de lo desconocido para considerar si el problema es determinado o es indeterminado, y distinguir entre estas tres cosas: las líneas que se conocen, aquellas líneas que no se conocen y todas las relaciones entre líneas conocidas y desconocidas.
d. Conocer las relaciones que están entre las líneas que conforman la figura de un problema permite hacer igualaciones o encontrar dobles expresiones para la

misma magnitud.

e. Encontrar tantas ecuaciones como líneas desconocidas y reducir todas estas ecuaciones a una sola expresión.

f. Reducir los términos de una ecuación a la expresión más simple y, luego, dejar la magnitud desconocida en uno de los lados de la ecuación.

En general el método es más técnico, respecto al tratamiento de la cantidad y la proporción, más instructivo que en la edición anterior, dedica mayor espacio a explicar cómo reducir ecuaciones, cómo expresar una misma magnitud a partir de una expresión simbólica diferente y en hacer operaciones entre términos semejantes. Por ejemplo, en el capítulo IV plantea:

> *Ce qu'on a vu dans le troisième Livre touchant les Puissances, est aussi une source de différentes Equations : car si je sçay que* $a + b = x$ *donc* $aa + 2ab + bb = xx$. *Si* x *est l'hypotenuse d'un triangle, & que les deux côtez soient* a *&* b *alors* $aa + bb = xx$ *partant* $xx - aa = bb$ *ou* $xx - bb = aa$. (Lamy, 1710, p. 386)[163]

En esta edición recurre a propiedades algebraicas, a la relación entre la multiplicación y la cuarta proporcional y, en general, a aspectos que permiten ir generalizando ecuaciones; eso hace que las explicaciones sobre las reglas sean más operativas que en la versión anterior.

[163] Lo que hemos visto en el tercer libro sobre las razones también es una fuerte de ecuaciones diferentes; si $a + b = x$, entonces, $aa + 2ab + bb = xx$. Si x es la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los lados son a y b, entonces, $aa + bb = xx$; así, $xx - aa = bb$ o $xx - bb = aa$.

Los diagramas usados son los que permiten plantear algunos problemas; por ejemplo, el resuelto por Schooten –figura 36– al cual Lamy le da el mismo tratamiento: una solución por medio de la tercera proporcional.

4.2.1 Cambios en Relación con las Proporciones. Segundo Grupo de Ediciones

En los primeros planteamientos de esta edición, Lamy relaciona la proporción y la multiplicación sin tener referente de construcción geométrica. Por ejemplo, plantea el siguiente asunto:

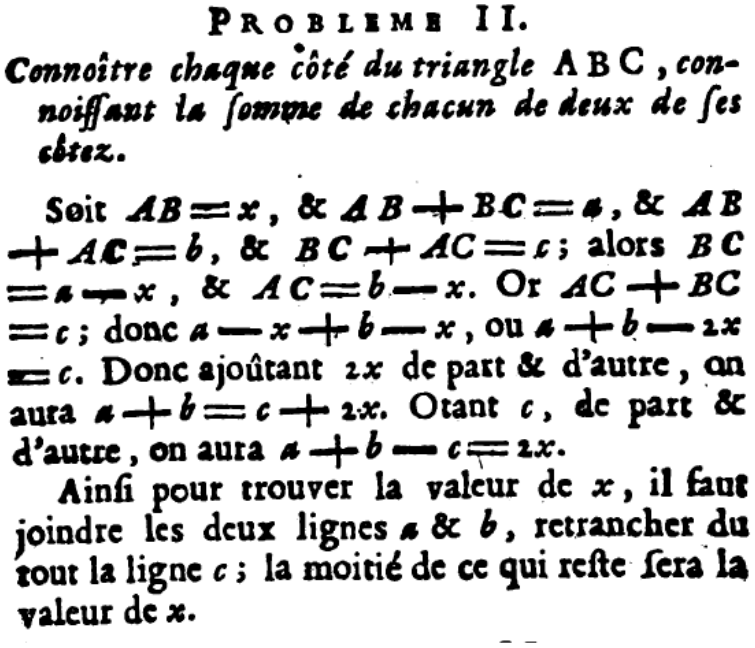
> *Ainsi le produit de trois lettres, comme abc, peut marquer ces deux proportions :* $1 : c :: ab : abc$ *&* $1 : ab :: c : abc$. *Cela fait voir que le produit de quatre lignes marque trois proportions ; le produit de cinq lignes* $abcde$ *marque quatre proportions ; & dans ces proportions le produit total n'est qu'une ligne*[164]*(…)*
>
> (Lamy, 1710. p. 380)

En la cita, puede verse una generalización del producto entre segmentos cuya justificación consiste en poder plantear proporciones tomando una de las líneas como unidad y el teorema de Tales. Al mostrar las posibles proporciones, se da un proceso de separación entre la operación entre segmentos y su construcción; un tratamiento frecuente en esta edición.

Lamy propone, en el último capítulo, la solución a algunos problemas; varios están en la edición anterior. Las ecuaciones producto del tratamiento de proporciones y la solución de ecuaciones por medio de la tercera proporcional son las técnicas que usa. Para

[164] Entonces, el producto de tres letras, como abc, puede establecer estas dos proporciones: $1 : c :: ab : abc$ y $1 : ab :: c : abc$. Esto muestra que el producto de cuatro líneas $abcd$ establece tres proporciones; el producto de cinco líneas $abcde$, cuatro proporciones; y, en todas estas proporciones, el producto final es una línea.

solucionar algunos de los nuevos problemas, no realiza el diagrama ni la construcción de la ecuación; por ejemplo:[165]



PROBLEME II.

Connoître chaque côté du triangle A B C, *connoiſſant la ſomme de chacun de deux de ſes côtez.*

Soit $AB = x$, & $AB + BC = a$, & $AB + AC = b$, & $BC + AC = c$; alors $BC = a - x$, & $AC = b - x$. Or $AC + BC = c$; donc $a - x + b - x$, ou $a + b - 2x = c$. Donc ajoûtant $2x$ de part & d'autre, on aura $a + b = c + 2x$. Otant c, de part & d'autre, on aura $a + b - c = 2x$.

Ainſi pour trouver la valeur de x, il faut joindre les deux lignes a & b, retrancher du tout la ligne c; la moitié de ce qui reſte ſera la valeur de x.

Figura 93. Problema cuya solución no presenta diagrama. (Lamy, 1710, p. 410)

También plantea un grupo de problemas que hacen referencia a la representación geométrica de tres términos que están en progresión, los cuales llevan a una ecuación de segundo grado. En estos problemas, realiza una construcción que muestra el segmento solución, pero, no es posible calcular su cantidad; para ellos, se debería solucionar la ecuación de segundo grado. Por ejemplo, en el siguiente problema:[166]

---

[165] Encontrar cada lado del triángulo ABC conociendo la suma de cada uno de sus lados.
Si $AB = x$ y $AB + BC = a$, y $AB + AC = b$ y $BC + AC = c$, entonces, $BC = a - x$ y $AC = b - x$ y $AC + BC = c$; entonces $a - x + b - x$ o $a + b - 2x = c$. Sumando $2x$ en ambos lados, se tendrá $a + b = c + 2x$. Estando c en ambos lados, se tendrá $a + b - 2x = c$. Entonces, para encontrar el valor de x, se tienen que sumar las dos líneas a y b, para restarle a la línea c la mitad de lo que quede será el valor de x.

166 Considérese esta progresión de tres líneas $x + d,\ b, x$ o $x - d, b,\ x$. Se conocen el promedio b y la diferencia entre los extremos $x + d$ y x. Halle el valor de x.
Sea $AB = d$, y en B, se eleva perpendicularmente BD igual a b. Luego C es la mitad de AB. Con el intervalo CD, se hace un círculo. Se prolonga AB hasta la circunferencia. Después AE o $BF = x$, porque $\ddot{\dot{x}} + d, b, x$. Si la progresión es $\ddot{\dot{x}} - d, b, x$ se debe hacer lo mismo; pero, en este caso, donde $x = EB$, el término más pequeño es BF igual a $EB - AB$ o $x - d$.

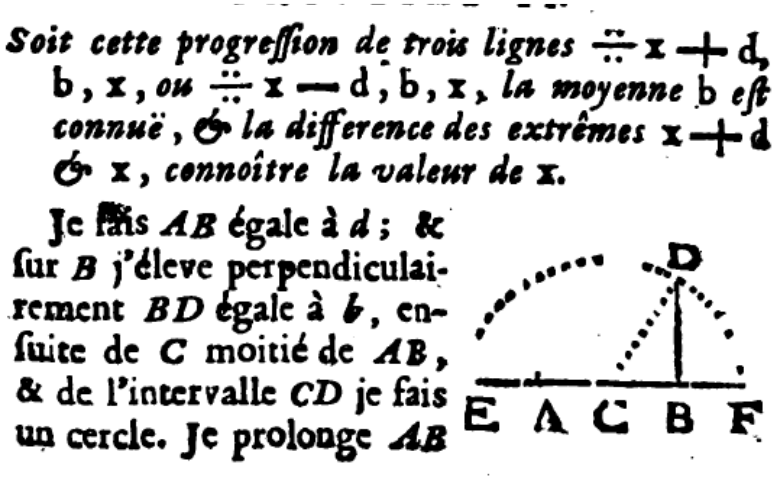


Figura 94. Solución de ecuaciones de segundo grado por progresiones (Lamy, 1710, p. 304)

En conclusión, la distribución por capítulos para cada una de regla permitió un mejor detalle de las reglas algebraicas involucradas. Se eliminó el énfasis en el diagrama que tiene la primera edición y se fortaleció la generalización de procedimientos para la solución de problemas. La tercera y la cuarta proporcional aparecen como una forma de razonamiento para solucionar varios problemas por medio de la misma construcción; de esta manera, ocurre menos que en la edición anterior la equivalencia entre la representación geométrica y expresión algebraica, es más frecuente la equivalencia entre la representación por medio de proporciones y la forma algebraica; lo que implica que, en varios casos, la construcción geométrica desaparezca porque se conoce que es la conclusión aritmética de la proporción y está tiene validez teórica en el contexto de las cantidades, lo que va haciendo menos necesaria la representación geométrica de la cantidad, sus relaciones y las acciones sobre ellas. Por ejemplo, que se deben sumar los términos conocidos y dividir por dos.

4.3 Cambios Respecto al Método. Tercer Grupo

La séptima edición del texto data de 1758, momento para el cual Lamy ya había fallecido. En el texto no es posible identificar el nombre de sus editores; se deduce, por la autorización que manifiesta la congregación, que las adiciones y las alteraciones al texto fueron realizadas por personas de esta organización. Específicamente, en el aviso a las bibliotecas siempre se refieren a "nosotros" en términos de la comunidad. Para el libro VI sobre el método y el tratado de secciones cónicas se refieren a "uno de nosotros", "un oratoriano que se comprometió a realizar estas adecuaciones".

En este mismo apartado se anuncia que el capítulo VI es un curso sobre análisis y síntesis en problemas que son solucionables con ecuaciones de primer, segundo y tercer grado. De igual manera, anuncian que el libro sobre secciones cónicas fue modificado, de tal manera que incluye todas las proposiciones esenciales para estudiar la física de Newton. La *Física Matemática* fue un objetivo de la educación universitaria en Francia entre 1740 y 1770. (Belhoste, 1993, pp. 2-3)

Respecto a las ediciones anteriores, las modificaciones al libro VI se leen desde el inicio del texto; ahora el método tiene nombre: analítico y sintético. Se aclara que su uso es solucionar problemas que presentan una aplicación del Álgebra a la Geometría.

En esta edición se reconoce que el análisis busca un principio, una proposición fundamental que determine la veracidad sobre el supuesto mismo, aspecto que se comprueba por la síntesis. Aunque se describen dos métodos por separado, Lamy reconoce la interacción entre estas dos formas:

> *Ces deux méthodes quoiqu' assujetties à une marche particulière que l'on reconnait mieux par l'usage que par des descriptions particulières que l'on en donne ici, ou*

> *dans les autres ouvrages didactiques, ne sont pas tellement incompatibles qu'elles ne puissent se trouver ensemble & le plus souvent elles s'entraident & se prêtent un secours mutuel.* (Lamy, 1758, p. 515)[167]

Relaciona el método analítico con una buena enseñanza; afirma que los pasos del método son los aspectos que un maestro debe privilegiar, en vez del conocimiento seco de los teoremas de la geometría; como en la *Geometría* de Euclides. (Lamy, 1758, p. 516)

Esta discusión sobre lo analítico y lo sintético en la enseñanza seguirá hasta después de la revolución francesa; donde grupos de filósofos y pedagogos apostaron por el método analítico y el lenguaje algebraico. Sin embargo, años más tarde, se daría un restablecimiento del método sintético. (Schubring, 2005, 291-293)

En esta edición, el autor reconoce al álgebra como una herramienta que posibilita un buen análisis:

> *(...) on peut se convaincre que l'algèbre appliquée à la géométrie, est l'algèbre soumise aux règles de l'analyse, en tant que cette méthode a pour objet la découverte ; des propriétés des lignes, ou des autres dimensions inconnues par les expressions des rapports qu'elles ont avec les connues; car les lignes , les surfaces, les solides dont s'occupe la géométrie, étant des grandeurs comparables, on en peut assigner les rapports dans une équation algébrique*[168]. (Lamy, 1758, p. 519)

[167] Estos dos métodos, aunque están sujetos a un curso particular que se reconoce mejor por el uso que por las descripciones particulares que uno da de ellos aquí o en las otras obras didácticas no son tan incompatibles como para que no puedan estar juntos; la mayoría de las veces, se ayudan mutuamente.

[168] (…) podemos convencernos de que el álgebra aplicada a la geometría es álgebra sujeta a las reglas del análisis, en la medida en que este método tiene por objeto el descubrimiento de las propiedades de las líneas, o de las otras dimensiones desconocidas por las expresiones de las relaciones que tienen con las conocidas; para las líneas, las superficies, los sólidos de los que trata la geometría, que son cantidades comparables, podemos asignar sus razones en una ecuación algebraica.

En este sentido, los objetivos del texto cambian, el conocimiento sobre el método se instrumentaliza mediante el álgebra; como afirma el autor, es suficiente que la mano desarrolle los cálculos para liberar a lo desconocido.

Para esta edición, las reglas del método son cinco y se explican en el primer capítulo:

a. Tener conocimiento previo que ayude a comprender la naturaleza de lo desconocido.
b. Las condiciones establecidas en el problema deben ser discutidas cuidadosamente.
c. Discutir las relaciones entre lo conocido y lo desconocido: son estas expresiones los instrumentos de análisis. Por lo tanto, debe prestarse toda la atención a: i. eliminar de la pregunta todas las ideas que no conducen a la verdad; ii. examinar la pregunta en todas sus partes, una después de la otra en orden natural, comenzando por la más simple, es decir, por las que tiene menos relaciones; iii. recomponer las relaciones de acuerdo con las condiciones más complicadas del problema y, si no es posible, hacer las relaciones comparado las condiciones. Se debe recurrir a una idea intermedia que finalice con dos relaciones para asignar su relación de mediación.
d. Abreviar las relaciones, expresarlas de la manera más simple posible, ordenarlas y con signos reconocibles.
e. Cuando se comprenden y simplifican las relaciones de lo conocido con lo desconocido, se forman ecuaciones o proporciones.

En estas reglas, el énfasis está sobre las cantidades, sus relaciones y las acciones sobre ellas, antes que sobre los objetos geométricos. Este aspecto se confirma en los capítulos II y III, en los que se trabajan las propiedades y las operaciones de las ecuaciones.

En la sección de problemas, aparecen diagramas en su función de visualizar el supuesto para solucionar la situación y la red de conceptos involucrados para el desarrollo de los argumentos que justifican la solución. Estos diagramas se encuentran en la parte final del texto, como un anexo. En el texto, esta localización solo sucede para las imágenes del libro VI y en el tratado de secciones cónicas. Una razón podría ser la afirmación del autor según la cual las construcciones son más elegantes que el trabajo algebraico; pero, este último, es el que permite hallar la solución de manera más ágil.

Por ejemplo, en el siguiente problema, en el cuerpo del texto, se presenta la solución analítica y el relato de la construcción sintética:

PROBLEME VI.

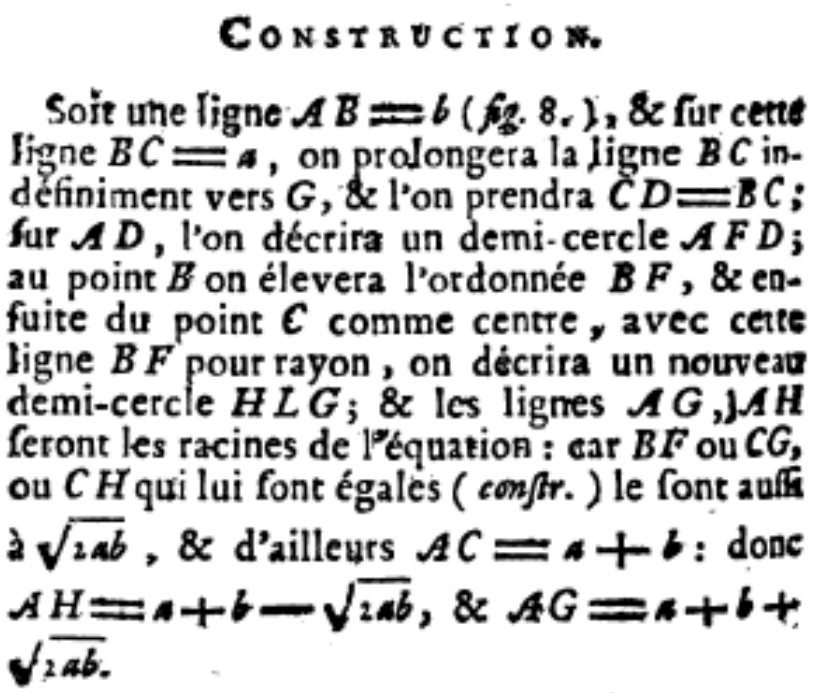
46. Connoiſſant les différences des deux côtés d'un triangle rectangle à l'hypoténuſe, trouver les trois côtés de ce triangle.

Soit x l'hypoténuſe; a, l'excès de cette ligne ſur le plus grand côté; b, l'excès de cette même hypoténuſe ſur le plus petit côté. Ces mêmes côtés ſeront, le plus grand $x - a$, & le plus petit $x - b$. La condition de l'angle droit donne $xx - 2ax + aa + xx - 2bx + bb = xx$, ou en réduiſant $xx - 2bx - 2ax = -aa - bb$; d'où l'on tire, par la réſolution de l'équation $x = a + b \pm \sqrt{2ab}$.

Figura 95. Resolución analítica de un problema sin diagrama.[169] *(Lamy, 1758. p. 546)*

[169] Conociendo las diferencias en ambos lados de un triángulo rectángulo con la hipotenusa, encuentre los tres lados de este triángulo.

El diagrama queda inmerso en la imaginación de quien lee el texto; no existe la externalización de la representación mental por medio del diagrama, por lo menos la equivalencia del registro figural con su equivalente algebraico en contexto geométrico no se da en el mismo espacio de trabajo. En esta edición, se ve el desplazamiento de lo geométrico, el intento por aplicar el método sin imágenes que era un ideario del grupo de Malebranche. El desarrollo de lo sintético también tiene las mismas características:



CONSTRUCTION.

Soit une ligne $AB = b$ (*fig.* 8.), & ſur cette ligne $BC = a$, on prolongera la ligne BC indéfiniment vers G, & l'on prendra $CD = BC$; ſur AD, l'on décrira un demi-cercle AFD; au point B on élevera l'ordonnée BF, & enſuite du point C comme centre, avec cette ligne BF pour rayon, on décrira un nouveau demi-cercle HLG; & les lignes AG, AH ſeront les racines de l'équation : car BF ou CG, ou CH qui lui ſont égales (*conſtr.*) le ſont auſſi à $\sqrt{2ab}$, & d'ailleurs $AC = a + b$: donc $AH = a + b - \sqrt{2ab}$, & $AG = a + b + \sqrt{2ab}$.

Figura 96. Construcción del problema sin diagrama.[170] *(Lamy, 1758, p. 637)*

Suponga que x es la hipotenusa; a, el exceso con la hipotenusa del lado más largo; b, el exceso de la hipotenusa con el lado más corto. Entonces, el lado más grande es $x - a$, y el más pequeño es $x - b$. La condición de ángulo recto permite que $xx - 2ax + aa + xx - 2bx + bb = xx$; que se reduce a $xx - 2bx - 2ax = -aa - bb$. De donde tenemos la ecuación $x = a + b \pm \sqrt{2ab}$.

[170] Tomemos una línea $AB = b$ (fig. 8) y en esta línea $BC = a$, prolonguemos la línea BC indefinidamente a G y tomamos $CD = BC$; en AD, describimos un semicírculo AFD, en el punto B, se eleva una recta BF, siguiendo al punto C como centro y, con BF para el radio, se describe un nuevo semicírculo HLG. Y las líneas AG y AH serán las raíces de la ecuación. Porque BF o CG o CH, que son iguales (constr.), también son $\sqrt{2ab}$; además, AC = a + b. Entonces, $AH = a + b - \sqrt{2ab}$ y $AG = a + b + \sqrt{2ab}$. (Lamy, 1758. p. 546)

En la construcción geométrica, aunque se menciona la imagen que, ubicada en los anexos, el hecho de no estar en el mismo espacio con el registro verbal indica que, para el momento, el diagrama no era parte de la argumentación del problema; debería ser posible seguir la construcción en la mente, sin necesidad de los sentidos.

4.3.1 Cambios en Relación con las Proporciones. Tercer Grupo

En esta edición, Lamy considera que las propiedades que cumple la aritmética también se cumplen para la geometría; hay un cambio en el foco sobre el cual se realiza el análisis, cambia de lo geométrico a las cantidades y sus relaciones; de esta manera, las proporciones que se usan para resolver ecuaciones de segundo grado son equivalentes para la solución de problemas geométricos y las operaciones que se definen en aritmética también pueden definirse a través de segmentos en la geometría.

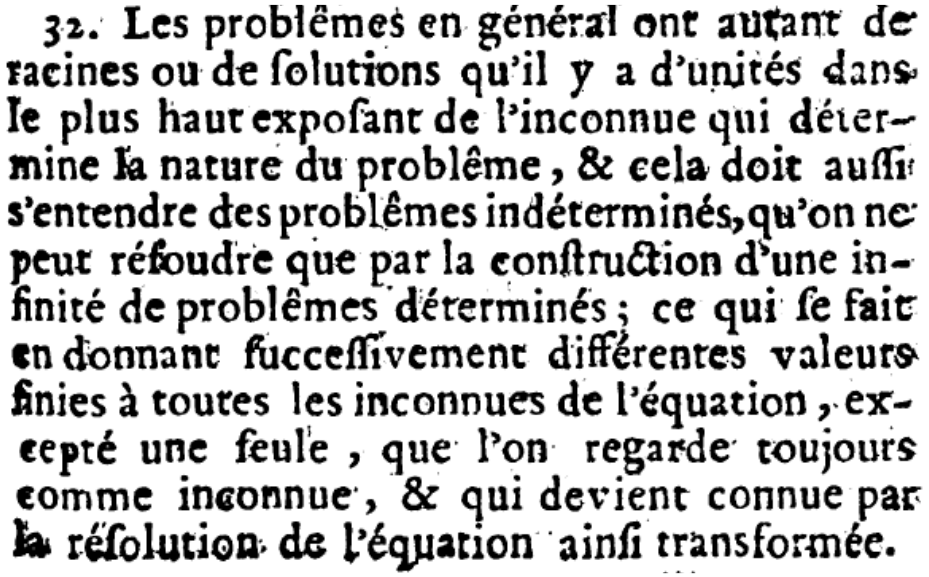
En esta edición, se consideran expresiones que son combinaciones de las operaciones: suma, resta, producto, división y raíz cuadrada. En este sentido, se indica que es posible construir fracciones, como por ejemplo $\sqrt{\frac{a^3bc}{fg^2}}$, siguiedo el procedimiento que se presentó y que consideraron el más fácil:

Sea primero $f: a :: b \quad \frac{ab}{f} = d$, la fracción por sustitución de esta línea se convertirá en $\frac{a^2dc}{g^2}$; se busca, de nuevo, un promedio proporcional entre d y c igual a b, esto es: $\frac{a^2h^2}{g^2}$, haciendo las raíces solo para tener el valor de esta fracción y, desde ahí, el de la primera proporción; que es igual, solo hay que encontrar un cuarto proporcional a las líneas g, a, b. (Lamy, 1758, p. 534)

Como el enunciado anterior puede expresarse a partir de proporciones, entonces, existe como línea geométrica: es decir, existe un segmento cuya cantidad de magnitud es

igual a esa expresión. Por lo tanto, se concluye que cualquier expresión algebraica podría ser expresada a partir de sustituciones proporcionales. En estos apartados no se muestra ningún tipo de construcción geométrica; se enuncia que todas pueden ser construidas por medio de triángulos semejantes incluyendo cualquier fracción. En el texto se propone que las proporciones sean interpretadas como fracciones, aspecto que relacionó la operación con una intención numérica, más que con una relacional.

Esta edición otorga otro papel a las expresiones algebraicas: ahora, desde ellas es posible solucionar los problemas transformando las expresiones indeterminadas en determinadas, por medio del remplazo de las letras por números; una función para la forma simbólica como expresión que generaliza una situación.



32. Les problêmes en général ont autant de racines ou de ſolutions qu'il y a d'unités dans le plus haut expoſant de l'inconnue qui détermine la nature du problême, & cela doit auſſi s'entendre des problêmes indéterminés, qu'on ne peut réſoudre que par la conſtruction d'une infinité de problêmes déterminés; ce qui ſe fait en donnant ſucceſſivement différentes valeurs finies à toutes les inconnues de l'équation, excepté une ſeule, que l'on regarde toujours comme inconnue, & qui devient connue par la réſolution de l'équation ainſi transformée.

Figura 97. Expresiones de Lamy sobre los problemas indeterminados y determinados.[171] *(Lamy, 1758, p. 537)*

[171] Los problemas, en general, tienen tantas raíces o soluciones como unidades hay en el máximo exponente de lo desconocido; lo que determina la naturaleza del problema. Y esto también debe entenderse para los problemas indeterminados que solo podemos resolver mediante la construcción de una infinidad de problemas definidos. Lo cual se hace dando sucesivamente diferentes valores finitos a todas las incógnitas de la ecuación, excepto una, que siempre se considera desconocida, y que se conoce por la resolución de la ecuación así transformada.

Como se puede leer en el fragmento que muestra la figura 98, se tiene la misma aproximación a lo que luego será el teorema fundamental del álgebra, que ya se había dado en la obra de Descartes; sin embargo, Lamy deja claro que todas las expresiones que se generan cuando la expresión toma valores también cumplen la misma condición; un uso de la expresión simbólica que apenas inicia el camino de consolidación.

Finalmente, al comparar el tratamiento del método durante las ediciones del texto, se encuentran dos tipos de enunciados para las reglas, unas más amplias, menos técnicas, menos matematizadas y más filosóficas, como las del primer y el tercer grupo de ediciones. En el segundo grupo, se encuentran reglas más algorítmicas; tratadas con un lenguaje más matemático, más técnico y menos filosófico.

Hubo una transformación durante las ediciones del papel de las imágenes en el texto. En la primera edición, la reflexión sobre el diagrama producto de las condiciones del problema era fundamental para que el lector entendiera la importancia del método. Fundamentalmente la preocupación estuvo sobre la relación entre las magnitudes conocidas y las desconocidas, el proceso de doble escritura, su importancia en la construcción del diagrama y para la solución del problema. En las otras ediciones, el diagrama tuvo poca reflexión, aunque se usa en una gran parte de los problemas. Como se ha dicho anteriormente el foco se puso sobre las cantidades y sus relaciones, este contexto contaba con la validez y el rigor necesario para poder solucionar las situaciones. Se inicia un proceso en donde un mismo diagrama sirve para solucionar más de un problema intentando mostrar que un problema es parte de una situación generalizable.

En el caso de las construcciones para la solución de ecuaciones de primer y segundo grados, estas fueron desapareciendo a medida que las ecuaciones fueron clasificadas por la forma de los términos de la progresión que las solucionaba. En la última edición, se

evidencia el uso de fórmulas producto del uso algebraico de las proporciones, hay una modificación del método planteado por Descartes: la práctica se enfatiza en el desarrollo de técnicas algebraicas que se justifican por medio de la aritmética.

La práctica que se desarrolla en el texto durante sus diferentes ediciones cambió en el papel que se le otorga al álgebra; la equivalencia entre los registros argumentativos se desequilibró a favor de las técnicas algebraicas. Los diagramas, construcciones geométricas que justifican la solución de ecuaciones, cada vez fueron menos usados; sin embargo, los diagramas que ayudan a plantear problemas se siguen usando, así un solo diagrama represente varios problemas.

4.4 El Libro de Reyneau. Consolidación del Análisis en la Enseñanza

El primer tomo del libro de texto *Analyse Démontrée ou la Méthode, de résoudre les problèmes des Mathématiques*, publicado por primera vez en dos volúmenes por Charles René Reyneau (1656-1728), contiene los primeros siete libros de la obra. El segundo tomo, titulado *Usage de L`analyse*, contiene el libro VIII, en el cual se presentan las aplicaciones para la teoría exhibida en el tomo I. La edición que se analiza para esta tesis es la primera que data de 1708 y, según Costabel (1981a), tuvo mayor difusión en la enseñanza. Esta obra tuvo una segunda edición en 1738 para la cual se subsanaron algunos errores de contenido y se agregó, en el segundo volumen, un tratado que contiene las notas escritas por *Monsieur Varignon* al libro realizado por Reyneau en 1708, puntualmente, sobre la técnica para la resolución de ecuaciones de tercer grado. Fue esta edición sobre la que D´alambert estudió las matemáticas cartesianas.

Este libro es un encargo que le hizo Malebranche a Reyneau para usarlo como texto en la enseñanza de las matemáticas en el oratorio y reemplazar la última edición del texto

de Prestet. Tuvo la función de centrar una posición de los participantes del grupo de Malebranche respecto a la función del análisis en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, discusión que estaba en furor en la academia de ciencias de Paris (Costabel, 1981a, y Lubet, 2005). Los historiadores lo reconocen como indispensable en la reforma de la matemática, inicialmente en la congregación y luego en Francia, por su forma de abordar el método cartesiano. (Costabel, 1981ª, 1981b)

Según el prefacio del tomo I, se usó en la Universidad de Angers y recogió la experiencia de aproximadamente veintidós años del autor en la enseñanza de técnicas algebraicas y del uso del método cartesiano; plasmó la decantación de las ideas de Descartes que se estudiaron en las escuelas oratorianas. Su contenido cuenta un estado de desarrollo de la idea de método, su relación con el álgebra y el uso de los diagramas en la enseñanza; la idea del contenido que debe enseñarse cambió con respecto a la tradición euclidiana. Como lo afirma Schubring (2005): "*Reyneau stresses indeed that arithmetic and algebra form the "general science" of mathematics, and that one learning mathematics must begin with them*[172]". (p. 77)

El centro del trabajo de Reyneau fue el estudio de la relación de las propuestas de Descartes con las nuevas ideas de Bernoulli, Newton y Leibniz, como afirma Lubet (2005):

> *(…) le nouveau calcul consiste seulement à démontrer directement ce que les anciens obtenaient par une double réduction à l'absurde, la modification porte sur la forme du raisonnement, mais elle n'ôte rien à sa légitimité. La même idée est*

[172] Reyneau enfatiza, de hecho, que la aritmética y el álgebra forman la "ciencia general" de las matemáticas, y que quien aprende matemáticas debe comenzar con ellas.

utilisée par Varignon face aux détracteurs des nouvelles mathématiques à l'Académie des sciences[173]. (p. 19)

El momento histórico de este libro coincide con las primeras publicaciones sobre cálculo diferencial e integral, de las cuales Reynaeu tuvo conocimiento. En la segunda y tercera parte del segundo tomo, trabajó los problemas sobre la tangente a un punto, puntos de inflexión, máximos y mínimos (Lubet , 2005).

En el prefacio del tomo I de la primera edición, Reyneau se refiere a la necesidad de practicar un método, el análisis, que permite avanzar en la comprensión de las matemáticas que se están conformando; una forma natural de estructurar el pensamiento y la imaginación, de tal forma que las matemáticas más complejas se expresan de la forma más simple posible. Schubring (2005) afirma que este texto "(…) *it forms the first integral presentation of the field of analysis newly created since Descartes*[174]" (p. 194).

En esta misma parte del documento, el autor diferencia con claridad la matemática de los antiguos y la de los modernos: la primera representada por la práctica de la geometría a través del estudio de figuras que encarnaban un grupo particular de objetos usando el método sintético. La segunda, en donde las líneas y las cantidades estaban simbolizadas mediante letras del alfabeto que permitían reducir la solución de los problemas a la resolución de una forma algebraica, que expresaba las relaciones simples y compuestas que tenían las líneas y las figuras. Este proceso se realiza por medio de análisis.

[173] (…) el nuevo cálculo solo consiste en demostrar directamente lo que los antiguos obtuvieron mediante una doble reducción al absurdo; la modificación concierne a la forma del razonamiento, pero, no le resta legitimidad. Varignon utiliza la misma idea contra los detractores de las nuevas matemáticas en la Academia de Ciencias.

[174] (…) forma la primera presentación integral del campo de análisis recién creado desde Descartes.

Reyneau se refiere a Descartes como el pionero de la técnica del análisis para resolver problemas a través de ecuaciones, mediante las cuales puede expresarse una infinitud de relaciones entre magnitudes, algunas conocidas y otras desconocidas. El propósito del método sería encontrar las soluciones que satisfacen la ecuación. En el prefacio del segundo tomo, afirma que "(…) *la manière dont l'Analyse réduit les lignes droites & courbes à des équations; que ces équations expriment les principales propriétés, & pour ainsi dire, la nature des lignes courbes (…)*"[175] (Reyneau; 1708b, p. iii). Este autor se refiere a que las características que definen la curva quedan expresadas en la ecuación; cualquier información que se desee de una curva es posible determinarla por medio de su ecuación. La representación geométrica de la curva ya no es necesaria, la representación simbólica posee la información sobre la curva.

Reyneau afirma que el análisis permite tener toda la matemática de los antiguos de una manera más simple, porque el hombre no ocupa su imaginación, ya no es necesario mirar la figura, todo queda condensado en la ecuación:

> *Ces nouvelles méthodes réduisant la géométrie à un calcul simple & facile, retranchaient ce qu´il y avait d´embarrassant dans la figure, c´est à dire, tout ce qui fatiguait de l´esprit. Elles lui laissaient la liberté de pénétrer son sujet, & de découvrir avec évidence tout ce qu'il renfermait*[176]. (Reyneau, 1708a, p.iii)

El Analyse *Démontrée ou la Méthode* se orienta a la construcción de un sistema de símbolos matemáticos que permiten operar con las ecuaciones que después llegaron a

[175] (…) la forma en que el Análisis reduce las líneas rectas y curvas a ecuaciones; que estas ecuaciones expresan las propiedades principales y, por así decirlo, la naturaleza de las líneas curvas (…).
[176] Estos nuevos métodos, reduciendo la geometría a un cálculo simple y fácil, eliminaron lo que era vergonzoso en la figura, es decir, todo lo que cansa la mente. Le dieron la libertad de penetrar en su tema y descubrir con pruebas todo lo que contenía.

expresar los problemas; a diferencia de la componente de lenguaje de la sección 2.5.3, aquí existe la intención de separar el diagrama del símbolo y se privilegia la semántica de este método argumentativo. Este énfasis, la idea del desarrollo de la operatividad y la estructura algebraica como introducción a la resolución de problemas es comparable con la presentación del método y de la *mathesis universalis* que se encontró en van Schooten, al inicio del Libro II de la segunda edición de la *Geometría* (sección 3.5).

4.4.1 Las Técnicas Algebraicas Como Columna Vertebral de la Enseñanza

Reyneau tematiza el método cartesiano de resolución de problemas en una perspectiva pedagógica. Para el autor, el análisis contiene los métodos para descubrir las cantidades que uno desconoce y busca; en ese sentido, el álgebra y sus técnicas son parte del método:

> *On forma un Art méthodique (qui est ce que l`on nomme l`Analyse) pour trouver, par les rapports connus qu`ont les grandeurs inconnues que l`on cherche dans les problèmes avec celles qui sont connues, des équations qui exprimassent les conditions & la nature, pour ainsi dire, des problèmes; & pour découvrir les valeurs des grandeurs inconnues de ces équations; ce qui donne la résolution des problèmes monsieur Descartes perfectionna & réduisit à une extrême facilité ces calculs & cette analyse naissante*[177]. (Reyneau, 1708a, p. ii)

Distingue, así, entre análisis simple y compuesto; la diferencia entre ellos es el grado de la ecuación que expresa el problema; el análisis es simple cuando apunta a la solución de

[177] Formamos un Arte metódico (que es lo que llamamos Análisis) para encontrar, a través de las relaciones conocidas entre las cantidades desconocidas que buscamos en los problemas con las que se conocen, ecuaciones que expresen las condiciones y la naturaleza, por así decirlo, de los problemas; y para descubrir los valores de las cantidades desconocidas de estas ecuaciones; lo que da la resolución de los problemas que el señor Descartes perfeccionó y redujo a una facilidad extrema estos cálculos y este análisis naciente.

las ecuaciones de primer grado y se estudia en los primeros capítulos del primer libro. El análisis compuesto se aplica a las ecuaciones de dos o más incógnitas o expresiones algebraicas en que la incógnita se multiplica por sí misma; es decir, ecuaciones no lineales.

En las páginas de la sección de advertencia, Reyneau construye una ruta de lectura para el texto dejando claro que el lector debe volverse ágil en los cálculos; por eso, recomienda leer el libro al lado de un cuaderno para hacer cómputos. Esta ruta propone la lectura de los primeros cinco libros para las personas que conocen de geometría antigua; luego, sugiere ir a las dos primeras secciones del libro ocho, sección de problemas relacionada con estos conocimientos. Así mismo, indica la ruta para los siguientes capítulos: primero, la lectura del libro relacionado con las técnicas de solución para un tipo determinado de ecuaciones, el método de análisis; luego, la lectura y la resolución de los problemas correspondientes.

Entonces, para Reyneau el proceso de enseñanza debe darse de manera unidireccional; primero las técnicas algebraicas que se aplican en el método y luego la resolución de situaciones, o aplicaciones, que se solucionan a partir del método. Las técnicas algebraicas aparecen como una especie de teoría independiente pero necesaria para aplicar el método de resolución de problemas.

En esta misma sección, Reyneau afirma que, para conocer el libro de texto, basta conocer los principios operativos del álgebra, las proporciones y las progresiones; las cuales pueden estudiarse en el tratado escrito por van Schooten, al inicio de la segunda edición en latín de la *Geometría* de Descartes, sección 3.5 De igual manera, afirma la necesidad del conocimiento de los seis primeros libros de *Elementos* de Euclides para leer el libro VIII.

El estilo de Reyneau consiste en tratar directamente las técnicas, las llama métodos, para resolver diferentes tipos de ecuaciones sin apelar a ninguna relación con la geometría. Es decir, las ecuaciones son analizadas y estudiadas estrictamente en un contexto algebraico. Este enfoque es distinto al empleado en la obra original de Descartes, pues una ecuación expresa el lugar geométrico de los puntos que la satisfacen; es decir, la ecuación es el principio analítico de la curva algebraica.

Para los años anteriores a la publicación de esta obra, las ecuaciones ya se habían despojado de su referencia geométrica, el álgebra se consolidaba como el campo de conocimiento que desarrolla teoría sobre las ecuaciones como objeto; Reyneau reconoce que varias obras anteriores tienen este enfoque:

> *Pour entendre tout cet Ouvrage, il ne faut savoir que les opérations de l´Algèbre sur les grandeurs littérales, c'est à dire, il ne faut savoir que le seul calcul & les proportions & les progressions. Ces choses sont expliquées dans les Traités d'Algèbre, comme dans les Eléments du Père Prestet, ou dans le Traité de la Grandeurs du Père Lamy ; ceux qui ont la Géométrie latine de M'Descartes, peuvent se contenter du petit Traité dont le titre est, Principié Matheseos universalis, qui est au commencement du second Volume*[178]. (Reyneau, 1708a, p. xvi)

Cada libro se compone de secciones que corresponden a la explicación de un enunciado sobre un determinado procedimiento algebraico, sin relación con situaciones

[178] Para comprender este Trabajo, uno debe conocer solo las operaciones del Álgebra sobre las cantidades literales, es decir, debe conocer solo el cálculo único y las proporciones y las progresiones. Estas cosas se explican en los Tratados de Álgebra, como en los Elementos del Padre Prestet, o en el Tratado de la magnitud de Padre Lamy; los que tienen la Geometría en latín de Descartes, pueden contentarse con el pequeño Tratado cuyo título es Principia Matheseos universalis, que se encuentra al comienzo del segundo volumen.

problémicas. El primer libro tiene el siguiente enunciado: "*De l'analyse, qui enseigne à résoudre les Problèmes qui se réduisent à des équations simples"*[179] (Reyneau, 1708, p. 1) y por ejemplo, la sección tres se dedica "*Où l'on explique la manière de résoudre entièrement les problèmes simples ou du premier degré, & l'on en apporte plusieurs exemples"*[180]. (Reyneau, 1708a, p. 14)

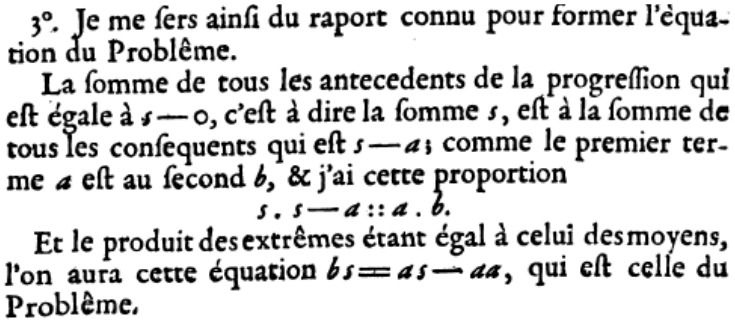
En este primer libro, cada sección hace referencia a actividades para llevar a cabo el método de análisis que queda organizado en las siguientes actividades así:

a. Réduire un Problème en équations ; c'est à dire, exprimer par des équations tous les rapports d'un Problème[181]. (Reyneau, 1708a, p. 1)
b. Usage de l'addition o de la soustraction pour le dégagement des inconnues, o pour y préparer les équations[182] (p. 4). Usages de la division pour préparer les équations, o pour dégager les inconnues[183] (p. 7). Usages de l´extraction des racines pour préparer les équations o pour dégager les inconnues[184] (p. 8).
c. Après avoir réduit un Problème en autant d'équations qu'on a pris d'inconnues ; trouver la valeur connue de toutes les inconnues, c'est à dire trouver la résolution du Problème[185] (p. 14)

En la primera actividad propuesta queda claro que el principio analítico, la ecuación que simboliza el problema, depende de la adecuada formulación del sistema de ecuaciones

[179] Análisis, que enseña cómo resolver problemas que se pueden reducir a ecuaciones simples.
[180] Donde explicamos la forma de resolver por completo problemas simples o de primer grado, y brindamos varios ejemplos.
[181] Reducir un problema a ecuaciones; es decir, expresar mediante ecuaciones todas las razones de un Problema
[182] Uso de la suma o de la resta para la liberación de las incógnitas, o para preparar las ecuaciones.
[183] Usos de la división para preparar ecuaciones o para identificar incógnitas.
[184] Usos de la extracción de raíces para preparar ecuaciones o para identificar incógnitas.
[185] Después de haber reducido un problema a tantas ecuaciones como incógnitas; encontrar el valor. conocido de todas las incógnitas, es decir, encontrar la solución del problema.

lineales a partir de razones; que es el uso del principio geométrico de Tales. Sin embargo, en este paso, el autor no considera la construcción geométrica del problema. Como ejemplo de este momento del método, plantea por ejemplo la siguiente parte de la explicación de las ecuaciones que resultan de las progresiones geométricas.[186]



3°. Je me ſers ainſi du raport connu pour former l'équation du Problême.

La ſomme de tous les antecedents de la progreſſion qui eſt égale à $s - o$, c'eſt à dire la ſomme s, eſt à la ſomme de tous les conſequents qui eſt $s - a$; comme le premier terme a eſt au ſecond b, & j'ai cette proportion

$$s . s - a :: a . b.$$

Et le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, l'on aura cette équation $bs = as - aa$, qui eſt celle du Problême.

Figura 98. Ecuaciones a partir de proporciones de progresiones geométricas. (p.3)

Paralelo a la presentación del método, en el libro I se presentan las técnicas para despejar una variable en una ecuación lineal y operaciones con radicales. Entonces, planteada una proporción de la cual se conocen tres de las cantidades, la cuarta puede expresarse a partir de las tres restantes y, de esa manera, se calcula la cantidad desconocida.

Dedica el capítulo dos a mostrar cómo reducir varias ecuaciones que simbolizan un problema a una sola ecuación que contiene las condiciones del problema. Para el caso de problemas de la geometría, Reyneau ve necesario el siguiente asunto:

> *Si le Problème est de Géométrie, il faut faire la figure propre au Problème, & qui l'exprime comme s'il étroit résolu, c'est à dire, il faut y marquer les lignes inconnues comme si elles étoilent connues, il faut ensuite tracer dans cette figure des lignes perpendiculaires, parallèles, & autres, selon qu'on les jugera nécessaires pour*

[186] Por tanto, utilizo la razón conocida para formar la ecuación del problema. La suma de todos los antecedentes de la progresión es igual a $s - 0$, es decir la suma s es la suma de todas las consecuencias que es $s - a$ como el primer término a está en el segundo b y tengo esta proporción $s . s - a :: a . b$ y el producto de los extremos siendo igual al de los medios, tendremos esta ecuación $sb = as - a^2$ que es el problema.

> *former des triangles rectangles, des triangles semblables, ou d'autres figures propres à découvrir ce qu'on cherche.*[187] (p. 28)

En este aparte, el autor se refiere a la construcción del diagrama con el que inicia el análisis y en donde se pone en juego la imaginación del resolutor para encontrar condiciones en la figura que permitan solucionar el problema. Para el caso de los problemas que se interpretan a partir de la geometría, Reyneau reconoce un papel fundamental al diagrama, lo que solo se aplica en el capítulo VIII.

En este mismo libro, presenta dos ideas técnicas algebraicas que luego usa en los problemas: reducir un sistema de ecuaciones a una ecuación y usar los divisores del término independiente para hallar las raíces enteras de una ecuación. Al igual que en el texto que se presentó en la sección 3.5, estas técnicas algebraicas se consideran fundamentales dentro del proceso de resolución de situaciones por medio del análisis.

En el capítulo tres, Reyneau enuncia su el primer teorema del libro que se refiere a la relación entre el grado de una ecuación y su expresión simbólica a partir de productos:

> *Toute équation compose peut-être conçue comme étant formée par la multiplication d'autant d'équations simples, que l'équation composée a de degrés. Ainsi toute équation de deux degrés, peut être conçue com me formée par la multiplication de deux équations simples. Toute équation du troisième degré, peut erre conçue formée par la multiplication de trois équations simples ; & ainsi, des autres.*[188] (p. 58)

---

[187] Si el problema es de Geometría, es necesario hacer la figura específica del problema, que lo ilustra como si estuviera resuelto; es decir, hay que marcar las líneas desconocidas allí como si fueran conocidas, Entonces es necesario dibujar en esta figura líneas perpendiculares, paralelas y otras, según se consideren necesarias para formar triángulos rectángulos, triángulos semejantes u otras figuras adecuadas para descubrir lo que se busca.

[188] Cualquier ecuación compuesta puede considerarse conformada como producto de tantas ecuaciones simples como el grado de la ecuación compuesta; por tanto, cualquier ecuación de segundo grado puede

El teorema es un acercamiento a lo que hoy se reconoce como teorema fundamental del álgebra, Reyneau toma esta idea de la cual existen vestigios en el libro III de la *Geometría* de 1637 y le pone un estatus epistemológico diferente a lo operativo en la teoría algebraica que presenta. De esta manera, una expresión algebraica de un polinomio tiene dos tipos de registros de la misma naturaleza, uno a partir de productos y el otro como sumas o restar de términos algebraicos. El teorema también se convierte en un organizador de la teoría, pues, como lo hace Descartes, se estudian y se clasifican las ecuaciones por su grado, las diferentes ecuaciones que pertenecen a un respectivo grado se hallan realizando el producto entre las expresiones simples con diferentes signos, por ejemplo:

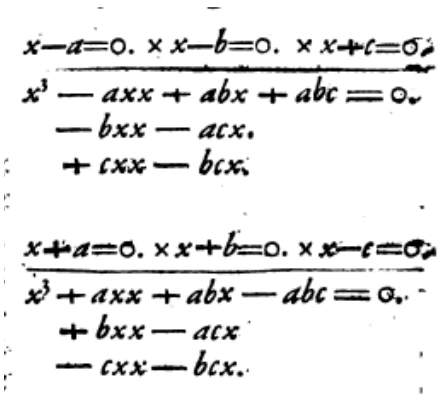


Figura 99. Productos que generan ecuaciones de tercer grado. (p. 67)

Este método de generación de ecuaciones exclusivamente algebraico le permite a Reyneau identificar una expresión simbólica para cada grado de polinomio; por ejemplo, en el caso de la ecuación de grado tres: $x^3 \pm nx^2 \pm px \pm q = 0$. En el capítulo IV, expone métodos algebraicos que permiten expresar ecuaciones polinómicas en forma de productos de factores lineales.

concebirse como formada por la multiplicación de dos ecuaciones simples. Cualquier ecuación de tercer grado puede concebirse formada por la multiplicación de tres ecuaciones simples; y así, otros.

En los siguientes capítulos, Reyneau reconoce raíces imaginarias y negativas[189] como raíces de ecuaciones y desarrolla un método algebraico para la aproximación de éstas cuando son inconmensurables; en este estudio, no se profundizará en estos aspectos.

En el libro *Usage de L`analyse*, Reyneau organiza el octavo capítulo del tomo II en tres grupos de problemas: los que se resuelven con técnicas algebraicas, los que tienen solución por medio de las técnicas de cálculo diferencial y, por último, las situaciones que se solucionan a través de técnicas del cálculo integral. En esta tesis solo se estudian los diagramas del primer grupo: problemas que se resuelven con álgebra.

En el prefacio de la primera parte de dicho capítulo, se afirma que en el análisis se simbolizan las líneas y las cantidades de la geometría con las letras del alfabeto; con ellas, se expresan todas las relaciones simples y compuestas entre estas líneas. Las relaciones de las figuras geométricas se simbolizan y se calculan con estas letras, este es el proceso del análisis en geometría; las líneas o las figuras se expresan en los valores geométricos de las formas algebraicas. Las proporciones que se establecen a partir de estas líneas y figuras son como los objetos representados por los cálculos analíticos. Reyneau afirma que esta relación entre el análisis y la geometría debe quedar clara entre los aprendices; porque este es el uso del análisis en geometría, por lo tanto, ellos deben concebir los métodos algebraicos que posibilitan resolver problemas. (Reyneau, 1708b)

La idea de análisis así propuesta está asociada a la resolución de problemas, no a la demostración de proposiciones; es el mismo sentido de método que se observa al inicio del tomo II de la segunda edición en latín; el álgebra se consideró el conocimiento prioritario para el uso del análisis; el conocimiento previo para solucionar problemas por medio del

[189] Un estudio de las raíces negativas se encuentra en Schubring (2005).

método. Lo que propone este grupo de oratorianos para la enseñanza es una nueva sistematización de la práctica, una reorganización de la idea cartesiana en la misma práctica que se caracteriza especialmente porque consolida una teoría de curvas mediante el álgebra.

El estudio de la variación y la covariación de magnitudes realizado en la primera edición de *Geometría*, a través de la estrategia de elaborar y usar instrumentos mecánicos, el análisis de las propiedades de las curvas por medio de la intersección de curvas de menor grado, no aparecen en las reflexiones del primer tomo. Se da una jerarquización de la teoría algebraica sobre la resolución de problemas, la cual aparece en el tomo II como una aplicación del análisis y de las técnicas algebraicas.

4.4.2 Los Diagramas en el Libro: Usage de L`analyse de Reyneau

En la primera sección del capítulo VIII, Reyneau muestra el uso del análisis en la resolución de problemas geométricos; para esto, usa relaciones entre figuras semejantes, especialmente entre triángulos. En algunos problemas, se indica el número de la figura que representa la situación; esta reposa en la parte posterior de la obra. Los diagramas no se encuentran en el mismo espacio de la resolución del problema, el tratamiento es algebraico; pero, como lo anunció en el tomo I, en el caso de la geometría hay una imagen en donde es posible representar el proceso de análisis que soluciona la situación. En general, estos diagramas pertenecen al planteamiento y la suposición de la solución, median las relaciones entre lo geométrico y lo algebraico. También se encuentran imágenes para analizar curvas (los cuales incluyen instrumentos) en este sentido, mantiene la misma relación entre la curva y la expresión algebraica que Descartes y Schooten; muestra, a partir de un punto en un sistema de referencia, que cumple el principio geométrico que se conoce de la curva.

En el ejemplo I, estudia las propiedades de los triángulos rectángulos a partir del siguiente enunciado:[190]

AEB eſt un triangle rectangle en E, ſon hypothenuſe AB FIG. II. eſt le diametre de la circonference AEB qui paſſe par le ſommet E de l'angle droit; ED eſt une perpendiculaire tirée du ſommet E ſur AB. Pour découvrir les proprietés de ce triangle, on ſuppoſera $AE = a$; $EB = b$; $AB = d$; $BD = x$, ce qui donnera $AD = d - x$.

Figura 100. Propiedades del triángulo rectángulo. (p. 499)

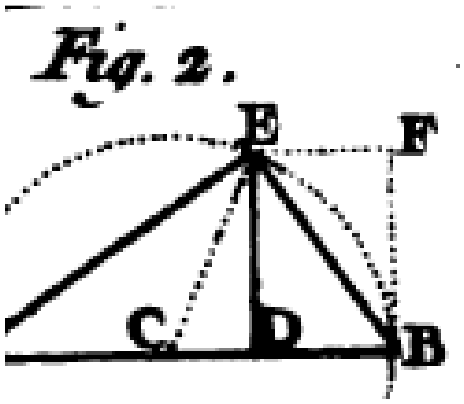


Figura 101. Imagen asociada a las propiedades del triángulo rectángulo. (Reyneau, 1708b, plancha I)

Las propiedades que se estudian mediante la figura 102 son:

a. La expresión de la hipotenusa AB es $dd = aa + bb$ deducida a partir de los triángulos semejantes ABE y AED.

b. El cuadrado DE es la media proporcional entre las dos partes de la hipotenusa AD, y DB o el diámetro AB cortado por la perpendicular DE es igual al rectángulo de las dos partes del diámetro. Propiedad que queda expresada con la

[190] Sea AEB un triángulo rectángulo en E, con hipotenusa AB –que también es el diámetro de la circunferencia AEB que pasa por el vértice E del ángulo recto–. ED es una perpendicular tomada desde E hasta AB. Para descubrir las propiedades de este triángulo, se supone: $AE = a$, $EB = b$, $AB = d$, $BD = x$, que da: $AB = a - x$.

ecuación $dx - xx = cc$.

Esta imagen ilustra las condiciones de los segmentos que se conforman en la construcción, es un diagrama que permite organizar la red de conceptos involucrados en las deducciones de las propiedades de los triángulos rectángulos; al igual que en la última edición del texto de Lamy, las ecuaciones expresan la generalización de las situaciones o las propiedades que se involucran en una situación; así, las situaciones que usen esa propiedad son reducidas a ese diagrama y a esa simbología. Por lo tanto, resolver un problema es identificar la ecuación que expresa todos los posibles valores al problema, la cual está asociada a una organización determinada de objetos geométricos. Por ejemplo, el diagrama de la figura 102 también se usa para representar geométricamente la forma simbólica de las raíces de segundo grado. Reyneau consideró los siguientes cuatro casos para este tipo de ecuaciones:

		La premiere racine.	La feconde racine.
1re,	$xx - dx - bb = 0.$	$x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$	$x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$
2e,	$xx + dx - bb = 0.$	$x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$	$x = -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}.$
3e,	$xx - dx + bb = 0.$	$x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$	$x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$
4e,	$xx + dx + bb = 0.$	$x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$	$x = -\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - bb}.$

Figura 102. Tipos de ecuaciones de segundo grado. (p. 503)

En la solución de problemas la construcción del diagrama contiene el supuesto para la solución del que habla el método de análisis. En el ejemplo II propuso la siguiente situación:[191]

[191] Sea $ABDE$ un cuadrilátero inscrito en un círculo. Encuéntrense los triángulos semejantes que se obtienen al trazar las diagonales AD, BE y la línea DF, lo que construye el punto D. El ángulo EDF es igual al ángulo ADB; entonces, se tiene: a). El triángulo ADB es semejante al triángulo EDF, porque el ángulo ADB es igual al supuesto del ángulo EDF; y los ángulos DAB y DEF son iguales; cada uno mide la mitad del arco BD. b). Los triángulos ADE y BDF también son semejantes, porque los ángulos ADE, BDF son iguales, cada uno contiene los ángulos BDA, EDF, igual al supuesto; y, además del ángulo común FDA y el ángulo DAE, DBF son iguales; cada mitad mide el arco DE.

ABDE eſt un quadrilatere inſcrit dans un cercle, pour y trouver des triangles ſemblables qui faſſent découvrir les proprietés qui lui conviennent ; il faut tirer les diagonales *AD*, *BE*, & la ligne *DF* qui faſſe au point *D* l'angle *EDF* égal à l'angle *ADB* ; & l'on aura, 1°, le triangle *ADB* ſemblable au triangle *EDF* ; car l'angle *ADB* eſt égal par la ſuppoſition à l'angle *EDF*, & les angles *DAB*, *DEF* ſont égaux, ayant chacun pour meſure la moitié de l'arc *BD*. 2°. Les triangles *ADE*, *BDF* ſont auſſi ſemblables, parceque les angles *ADE*, *BDF* ſont égaux, contenant chacun les angles *BDA*, *EDF* égaux par la ſuppoſition ; & de plus l'angle commun *FDA*, & les angles *DAE*, *DBF* ſont auſſi égaux, ayant chacun pour meſure la moitié de l'arc *DE*. Fig. III.

Suppoſant à preſent $AE = a$, $AB = b$, $BD = c$, $DE = d$, $AD = e$, $BE = f$, $FE = x$; par conſequent $BF = BE(f) - FE(x)$. L'on aura à cauſe des triangles ſemblables *ADB*, *EDF*, $AD(e) . DE(d) :: AB(b) . EF(x)$; d'où l'on déduira cette premiere égalité $ex = bd$. L'on aura auſſi à cauſe des triangles ſemblables *ADE*, *DBF*, $BF(f - x) . AE(a) :: BD(c) . AD(e)$; d'où l'on déduira cette ſeconde égalité $ef - ex = ac$. Ajoutant ces deux egalitez, on trouve $AD \times BE\ (ef) = AE \times BD\ (ac) + AB \times DE\ (bd)$; c'eſt à dire *qu'en tout quadrilatere inſcrit au cercle, le rectangle des diagonales* $AD \times BE\ (ef)$, *eſt égal à la ſomme des rectangles des côtés oppoſés* $AE \times BD + AB \times DE\ (ac + bd)$, qui eſt une proprieté de ce quadrilatere qui ſert dans la trigonometrie.

Figura 103. Problema del cuadrilátero inscrito. (pp. 505-506)

Supóngase $AE = a, AB = b, BD = c, DE = d, AD = e, BE = f, FE = x$. En consecuencia, $BF = BE(f) - FE(x)$. Se tienen que hacer triángulos semejantes ADB, EDF; $AD(e).DE(d)::AB(b).EF(x)$, de donde se deduce la siguiente igualdad: $ex = db$; también se obtienen los triángulos semejantes ADE, DBF, $BF(f - x).AE(a)::BC(c).AD(e)$, de donde se deduce que $ef - ex = ac$. De acuerdo con estas dos igualdades, se tiene que $AD \times BE\ (ef) = AE \times BD\ (ac) + AB \times DE\ (bd)$. Luego, en cualquier cuadrilátero inscrito en el círculo, el rectángulo de las diagonales $AD \times BE\ (ef)$, es igual a la suma de rectángulos de lados opuestos $AE \times BD + AB \times DE\ (ac + bd)$, que es una propiedad de los cuadriláteros que se utiliza en trigonometría.

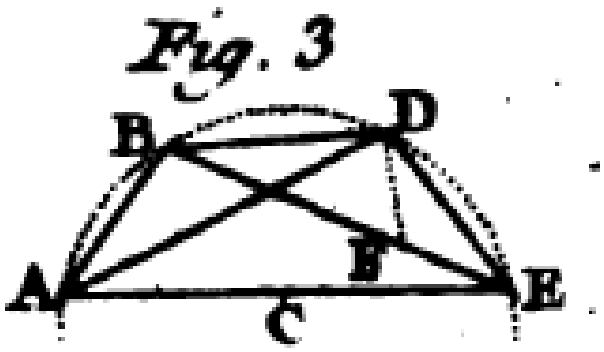


Figura 104. Diagrama problema del cuadrilátero inscrito (Reyneau, 1708, Plancha 1)

El supuesto de trazar el segmento de recta DF para desarrollar la prueba de las propiedades de los cuadriláteros permite visualizar las relaciones entre triángulos semejantes; de tal manera que, la argumentación se produce alrededor de las relaciones que se conforman al considerar el supuesto. Por esta razón, el diagrama permite seguir la argumentación bajo la generalización de la circunscripción de cualquier cuadrilátero.

Reyneau usa contextos de la física para formular problemas cuya solución usa el método. Por ejemplo:[192]

[192] Un cuerpo A es empujado por dos fuerzas, al seguir la dirección AB, y la siguiente AD, ¿cuál es el ángulo BAD, de manera que la velocidad por segundo sea la misma en el mismo tiempo? Como AB es a AD, al completar el paralelogramo BD y su diagonal AC, esta diagonal, AC, marca el camino que toma el móvil, la longitud que cubrirá al mismo tiempo y la velocidad que habrá recibido de las dos fuerzas. Es decir, AB es a AC como la próxima velocidad AB está en la siguiente velocidad AC; y, similarmente, la siguiente velocidad AD está en la siguiente velocidad AC como AD; o, si igual BC es a AC, y pasa por cada una de estas tres líneas en tiempos iguales con la velocidad conveniente.

UN corps *A* eſt pouſſé en même temps par deux forces, l'une ſuivant la direction *AB*, l'autre ſuivant *AD*, qui font l'angle quelconque *BAD*, de maniere que la viteſſe que donne la premiere ſoit à la viteſſe que donne la ſeconde dans le même temps, comme *AB* eſt à *AD*; ſi l'on acheve le parallelogramme *BD*, & qu'on tire la diagonale *AC*, cette diagonale *AC* marquera le chemin que tiendra le mobile, la longueur qu'il parcourera dans le même temps, & la viteſſe qu'il aura reçue des deux forces; c'eſt à dire, *AB* eſt à *AC* comme la viteſſe ſuivant *AB* eſt à la viteſſe ſuivant *AC*, & de même la viteſſe ſuivant *AD* eſt à la viteſſe ſuivant *AC*, comme *AD* ou ſon égale *BC* eſt à *AC*, & il parcoureroit chacune de ces trois lignes en des temps égaux avec la viteſſe reſpective qui leur convient.

Figura 105. Problema de movimiento. (pp. 512-513)

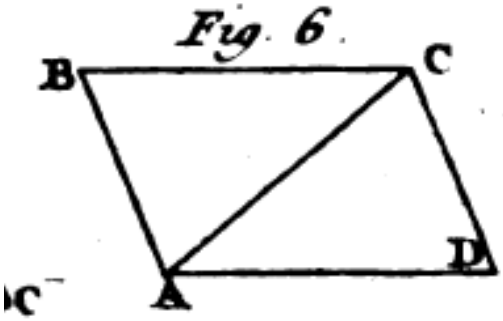


Figura 106. Diagrama problema de movimiento. (Reyneau, 1708b, Anexo)

En este caso, el diagrama aparece como explicación del movimiento uniforme que componen las dos fuerzas sobre la partícula. La situación queda condensada en la diagonal de un cuadrilátero y, de esta manera, el movimiento hereda las propiedades de los cuadriláteros y la solución de su diagonal. El diagrama desnuda las propiedades geométricas que permiten analizar cualquier pregunta sobre las cantidades de magnitud puestas en juego en la variación del movimiento. De esta manera, el diagrama contiene la red se relaciones que cumple el problema.

Reyneau plantea más situaciones de física, a las cuales les da el mismo tratamiento que al problema de la figura 105 y generaliza algunos resultados de la solución de los problemas a partir de definiciones; por ejemplo:[193]

DE'FINITION.

ON prendra *pour la meſure de la force de la poudre* ou de la viteſſe qu'elle donne à une bombe ſuivant quelque direction *AC*, *AE*, *AG*, &c. que ce puiſſe être, la hauteur *HA* d'où il faudroit que la bombe tombât librement depuis le repos pour acquerir par cette chute une viteſſe égale à celle avec laquelle elle eſt pouſſée par la force de la poudre. On l'appelle auſſi *la force du jet.*

Figura 107. Definición a partir de la solución del problema de las bombas. (p. 515)

En el corolario, la misma imagen le permite analizar la situación que describe la definición. En este enunciado, estudia una expresión simbólica para los segmentos de línea que intervienen en la representación de la situación.

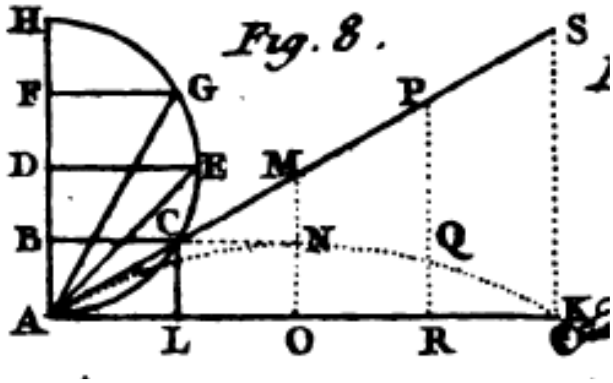


Figura 108. Diagrama problema de bombas. (Reyneau, 1708b, plancha 1)

[193] Definición: Tomaremos la medida de la fuerza de la pólvora o la velocidad que le da a una bomba en fuga hacia cualquier dirección AC, AE, AG & c, incluyendo que pueda ser la altura HA, desde donde sería necesario que la bomba cayera libremente desde el reposo para adquirir una velocidad igual a aquella a la que es disparada por la fuerza de la pólvora. También se denomina fuerza de chorro.

Toma el diámetro HA (que se supone es vertical) del semicírculo $HGECA$ para representar cualquier fuerza de la pólvora; todas las cuerdas AC, AE, AG & c, trazadas en todos los puntos de la semicircunferencia, representan todas las inclinaciones que se le pueden dar al mortero sobre la horizontal AK; por lo tanto, en todas las direcciones, los chorros oblicuos pueden ser hechos por esta fuerza generada por la pólvora.

Si d es la altura HA y x, los cortes verticales AB, AD, AF, se conforman dos triángulos rectángulos ABC, ADE que tiene chorros oblicuos como hipotenusas, AC, AE, AG, producidos por la misma fuerza que a HA, el diámetro sobrante, BH, DH, FH, es expresado por $d - x$; y los lados horizontales de los triángulos, como BC, DE y FG, por $\sqrt{dx - xx}$; y las cuerdas, AC, AE, AG, por $\sqrt{dx}$; luego, se presenta cada segmento de recta por medio del sistema simbólico.

En este problema, el autor tiene la intención de ir estudiando la variación de las cantidades de magnitud para generar conclusiones después del trabajo algebraico. El diagrama muestra el análisis del movimiento a partir del uso de puntos de la curva. La velocidad $\sqrt{d}$ recorre la cuerda $\sqrt{dx}$, al mismo tiempo que la velocidad $\sqrt{x}$ recorre el lado vertical x y que la rapidez, $\sqrt{d - x}$, hace el recorrido horizontal $\sqrt{dx - xx}$; y se supone que los tres movimientos son uniformes; de tal manera que, el tiempo durante el cual cada uno recorre las tres líneas y la mitad del tiempo que la bomba usa para descender del resto de la altura del lado vertical x tienen movimiento uniforme.

A este mismo diagrama se asocian los problemas II, III, IV y V, y cuatro corolarios consecuencias de la solución de dichos problemas. El texto está diseñado de tal forma que cada situación dada se estudia y se ejemplifica haciendo uso del mismo diagrama, en donde

se pueden ilustrar todas las posibles relaciones que se sintetizan en las expresiones simbólicas de las cantidades de magnitud.

Para el problema V, se usa el diagrama y algunas de las líneas auxiliares que aparecen en la imagen; se estudia la variación entre las cantidades de magnitud midiendo, desde el eje horizontal y desde el eje vertical, cada punto de la curva que describe el movimiento. Así:[194]

> *Faire' tomber une bombe sur l'endroit qu'on voudra, avec une charge de poudre telle qu'on 'voudra choisir, dont la force est supposée connue par le quatrième Problème ; pourvu que cet endroit ne soit par hors de la portée de la force de la poudre dont on veut se servir, ce que la résolution analytique fera mémé connaitre*. (p. 522)

El primer caso considerado para esta situación es cuando el lugar donde se quiere dejar caer la bomba es en el plano horizontal que atraviesa el mortero. El cuestionamiento se reduce a encontrar la inclinación CAK que debe darse al mortero, con la fuerza dada. Supóngase que esta es HA; se tira una bomba en el lugar K de la horizontal AK que pasa por el mortero, supuestamente en A; también se asume la distancia horizontal AK, conocida por geometría. Para encontrar la inclinación CAK, se tiene que encontrar el lado vertical BA de un triángulo BAC.

[194] Lanza una bomba donde quieras, con una carga de pólvora como quieras, cuya fuerza se supone que es conocida por el cuarto problema; siempre que este lugar no esté fuera del alcance de la fuerza de la pólvora que se desea utilizar, que incluso la resolución analítica dará a conocer.

Sean la fuerza conocida $HA = d$, la distancia horizontal, también conocida, $AK = h$; por lo tanto, el lado horizontal $BC = \frac{1}{4}AK$; $AK = \frac{1}{4}h$ o, del lado vertical que se está buscando $BA = x$; de donde se tendrá $HB = d - x$.

La solución a este problema retoma los aspectos algebraicos expuestos en el análisis y la descripción de la situación a través de la proporción $\sqrt{d-x}:\sqrt{x} :: AK(h):4AB(4x)$; de donde se deduce: $xx - dx + \frac{1}{16}hh = 0$, los dos valores de x que solucionan la ecuación son positivos: $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1}{16}hh}$ y $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{1}{16}hh}$, lo que demuestra que hay dos inclinaciones del mortero por las que se dejaría caer la bomba en el mismo lugar K de la horizontal AK.

El ejemplo muestra el modelo de generalización construido por Reyneau para solucionar problemas; tanto diagrama como procedimiento se usan para encontrar soluciones de las ecuaciones con cantidades cualquiera. Así, la resolución de problemas por medio del método implica la construcción de diagramas que permiten comprender a partir de las cantidades, sus relaciones y operaciones que se encuentra al analizar la situación, la identificación del objeto matemático que describe la variación de las magnitudes involucradas en la situación, en este caso la ecuación de segundo grado que se generaliza por medio de la relación entre los objetos que se representan en el diagrama y el modelo algebraico que resulta de este análisis.

En la sección que dedica al análisis de las cónicas, Reyneau usa instrumentos para trazar estas curvas como los planteados en la obra de 1637; la curva está producida por un movimiento continuo, controlado por las relaciones que se establecen en el dispositivo. En

este sentido, la curva está compuesta por puntos que cumplen una condición específica y esta es la forma de mostrar su existencia.

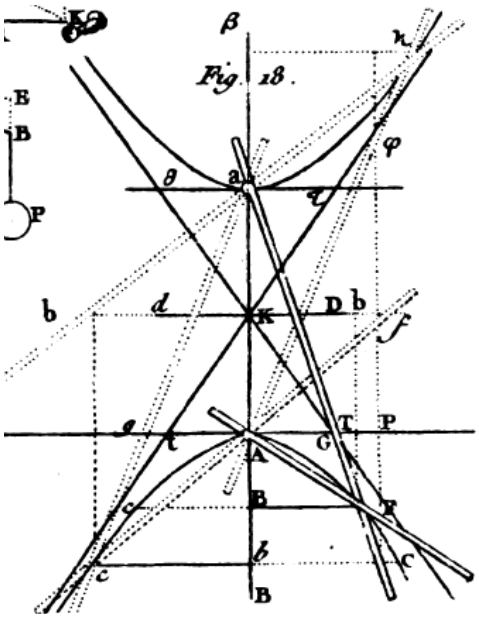


Figura 109. Construcción de la hipérbola. (Reyneau, 1708, plancha 2)

En el diagrama se visualizan varias posiciones para el instrumento, de tal forma que, quien estudia la conformación de la curva considere varios puntos de estudio. Es una forma de mostrar el movimiento a partir de una imagen estática. Por ejemplo, para describir la curva de la parte inferior de la figura ABb, basta moverse debajo de la recta P, sobre la primera regla ACF, por el vértice A y, al mismo tiempo, sobre la segunda, la regla aC, por el vértice a, asegurándose de que AG siempre sea igual a PF, al trazar con C, la curva que pasa por los puntos donde se cruzan las dos reglas. Así queda descrito el movimiento de las reglas que generan el punto y, de esa manera, se va conformando la curva. La construcción de la otra parte de la hipérbola mantiene las mismas relaciones descritas anteriormente.

Después de describir el movimiento que lleva a la construcción de la curva, Reyneau analiza la curva; es decir, simboliza cada elemento que permite la construcción de la curva mediante cierta expresión algebraica. Usa el mismo diagrama, el cual contiene las

relaciones que permiten la construcción de la curva y el principio que permite mostrar que cada punto cumple la condición que determina a la hipérbola.[195]

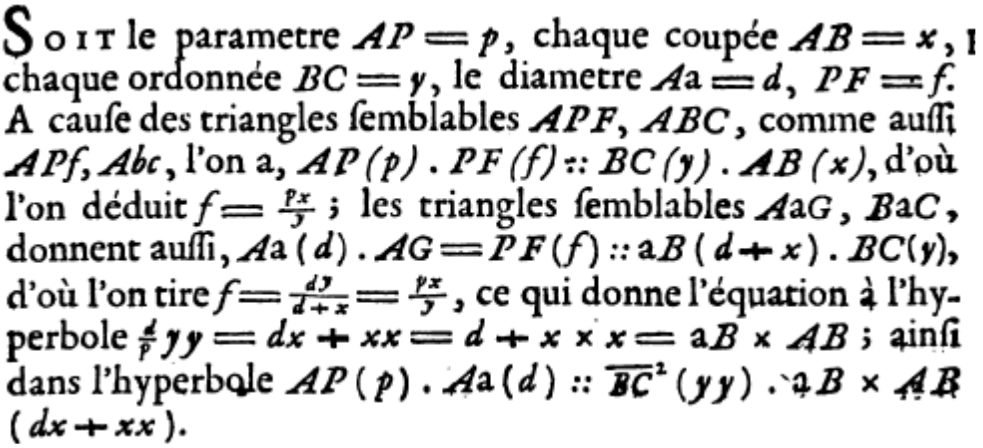

SOIT le parametre $AP = p$, chaque coupée $AB = x$, l
chaque ordonnée $BC = y$, le diametre $Aa = d$, $PF = f$.
A cauſe des triangles ſemblables APF, ABC, comme auſſi
APf, Abc, l'on a, $AP(p) . PF(f) :: BC(y) . AB(x)$, d'où
l'on déduit $f = \frac{px}{y}$; les triangles ſemblables AaG, BaC,
donnent auſſi, $Aa(d) . AG = PF(f) :: aB(d+x) . BC(y)$,
d'où l'on tire $f = \frac{dy}{d+x} = \frac{px}{y}$, ce qui donne l'équation à l'hy-
perbole $\frac{d}{p}yy = dx + xx = d + x \times x = aB \times AB$; ainſi
dans l'hyperbole $AP(p) . Aa(d) :: \overline{BC}^2(yy) . aB \times AB$
$(dx + xx)$.

Figura 110. Proceso analítico de la hipérbola. (p. 555)

En este proceso, la idea de curva compuesta por infinitos puntos –presente tanto en la obra de Descartes (1637) como en la de van Schooten (1657)–, este paso de aspectos de naturaleza geométrica a su principio analítico, mediante instrumentos y ejes de referencia, se mantiene para las cónicas. Lo que muestra Reyneau es que, a partir de tomar puntos cualesquiera en la curva, puede mostrarse que cada punto cumple la propiedad característica de la curva; aquí la hipérbola. Para las otras cónicas, procedió del mismo modo.

[195] Dado el parámetro $AP = p$, cada corte $AB = x$, cada ordenada $BC = y$, el diámetro $Aa = d$, $PF = f$. A causa de los triángulos semejantes APF y ABC, como también APf, Abc, entonces por consecuencia $AP(p) \cdot FP(f) :: BC(y) \cdot AB(x)$, de donde se deduce que: $f = \frac{px}{y}$, los triángulos semejantes AaG, BaC; entonces, $Aa(d) \cdot AG = PF(f) :: aB(d+x) \cdot BC(y)$. De donde se obtiene que: $f = \frac{dy}{d+x} = \frac{px}{y}$, que es la ecuación de la hipérbola: $\frac{d}{p}yy = dx + xx = x(d+x) = aB \cdot AB$. Entonces, en la hipérbola, $AP(p) \cdot Aa(d) :: \overline{BC^2}(yy) \cdot aB \cdot AB(dx + xx)$.

En otros problemas sobre propiedades de las cónicas, se toma la ecuación como dada, lo que permite que las argumentaciones sean algebraicas. Por ejemplo, en este problema[196]:

MENER une tangente SC *par un point donné* C *de l'hyperbole dont le premier diametre eſt* Aa (d) ; *le ſecond* Dd (δ) ; *le parametre du premier diametre* Aa (p) ; *la coupée* KB (x) ; *l'ordonnée* BC (y) ; *la ſoutangente* BS (s), *& l'équation* $\frac{d}{p}yy + \frac{1}{4}dd - xx = 0$.

Il faut * mettre dans l'équation $x + e$ à la place de x, & * $y + \frac{ey}{s}$ à la place de y, parceque $AB(x)$ augmentant de $+e$, y augmente auſſi de $+\frac{ey}{s}$; & l'on aura $\frac{d}{p}yy + \frac{2de}{ps}yy + \frac{dee}{pss}yy = 0$, $- xx - 2ex - ee$ $+ \frac{1}{4}dd$

d'où l'on tire * $\frac{d}{ps}yy = x$, & (en mettant au lieu de $\frac{d}{p}yy$ ſa * valeur $xx - \frac{1}{4}dd$) $BS(s) = \frac{xx - \frac{1}{4}dd}{x}$, qui eſt la valeur de la ſoutangente $BS(s)$ que l'on cherchoit, puiſque $BK(x)$ eſt ſuppoſée connue.

D'où l'on déduit $KS = KB - BS(x - s) = \frac{\frac{1}{4}dd}{x}$; par conſequent $KB(x) \cdot KA(\frac{1}{2}d) :: KA(\frac{1}{2}d) \cdot KS(x - s)$.

Ce qu'il faut remarquer.

Figura 111. Problema de la tangente a un punto de la curva. (pp. 556-557)

[196] Realizar una tangente SC a un punto dado C de una hipérbola cuyo primer diámetro es $aA(d)$ y el segundo, $Dd(\delta)$; el parámetro del primer diámetro, $Aa(p)$; el corte, $KB(x)$; la ordenada, $BC(y)$; la tangente, $BS(s)$; y la ecuación, $\frac{d}{p}yy + \frac{1}{4}dd - xx = 0$.

Hay que reemplazar la ecuación $x + c$ en el lugar de x, e $y + \frac{cy}{s}$ en el lugar de y. Al reemplazar en la ecuación, se tiene que: $\frac{d}{p}yy + \frac{2dc}{ps}yy + \frac{dcc}{pss}yy - xx - 2cx - c^2 + \frac{1}{4}dd = 0$. De donde se obtiene: $\frac{dp}{s}yy = x$. Y, reemplazando, en el lugar de $\frac{d}{p}yy$, el valor de $xx - \frac{1}{4}dd$; $BS(s) = \frac{xx - \frac{1}{4}dd}{x}$, que es el valor bajo la tangente que se busca; porque $BK(x)$ se supone continuo. De lo anterior, puede deducirse $KS = KB - BS(x - s) = \frac{\frac{1}{4}dd}{x}$. En consecuencia, entonces, se tiene la proporción $KB(x) \cdot KA\left(\frac{1}{2}d\right) :: KA\left(\frac{1}{2}d\right) \cdot KS(x - s)$.

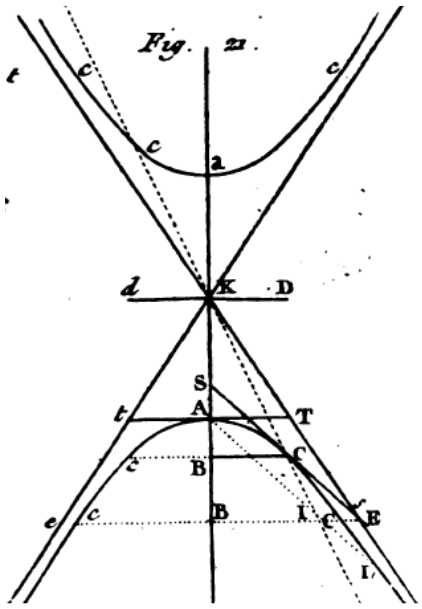


Figura 112. Problema de la tangente a un punto en la hipérbola. (Reyneau, 1708b, Plancha 2)

En este problema se muestra el manejo algebraico, la poca necesidad del diagrama para solucionar la situación. Al tomar como dada la ecuación, la solución consiste en reemplazar en ella las condiciones del problema para la tangente. Este es un uso de la representación simbólica que no se había dado, por lo menos en los libros revisados, y que implica otro tipo de elaboración para las pruebas; es un tipo de argumentación netamente simbólico, luego se muestra que el resultado cumple con el principio de teorema de Tales.

Reyneau también consideró para la enseñanza la resolución de ecuaciones por medio de la intersección de curvas de menor grado. Esta heurística que se desarrolla en la *Geometría* de 1637 es una de las innovaciones de Descartes; pero, no su desarrollo no aparece en la segunda edición en latín. Hay que revisar el planteamiento de Reyneau para la ecuación de cuarto grado:

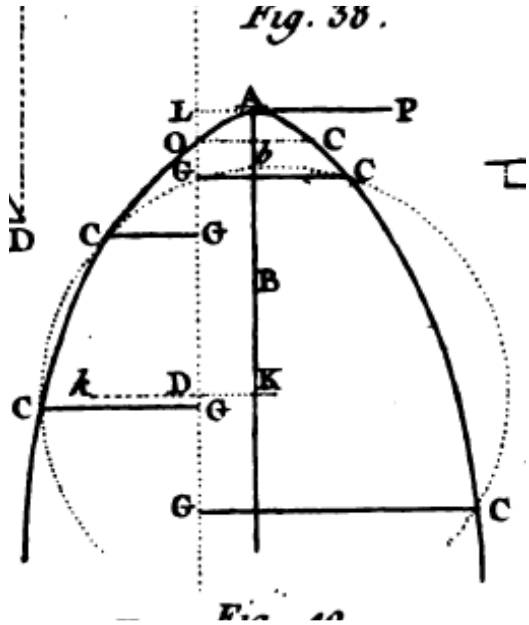


Figura 113. Ecuación de cuarto grado a partir de la parábola y el círculo.

(Reyneau, 1708b, Plancha 2)

La construcción para esta ecuación se realiza por medio de la intersección de una parábola y un círculo. La ecuación por resolver y transformar es $z^4 + \frac{nk}{a}z^3 + \frac{kkq}{a}z^2 + \frac{k^3r}{a}z + \frac{k^4ss}{aa} = 0$. Para ello, Reyneau se apoya en las propiedades que ha encontrado en la sección sobre la hipérbola y el círculo. Se tiene la parábola OAC con eje AB, parámetro $AP = a$ y la ecuación $yy - ax = 0$. Se muestra que los puntos C pertenecen a las dos curvas. La realización de esta prueba encadena varias de las construcciones que se presentan con anterioridad en el texto y no se aborda completamente en este documento[197]; lo que interesa aquí es que, en el análisis de curvas que presenta Reyneau, aparece una de las actividades que identifican la obra. Lo que permite concluir que, por lo menos en el caso de este libro de texto usado por los estudiantes de la Universidad de Angers, se enseña la

[197] Algunos ejemplares que se encuentran en la red de este libro no tienen el anexo de las figuras y otros no las tienen completas, eso dificulta completar fielmente el razonamiento.

heurística de intersección de curvas y se usan los diagramas para representar puntos de intersección de curvas que representan las raíces de alguna ecuación.

En conclusión, los dos tomos del libro de texto de Reyneau proponen, para enseñar una transformación en la relación entre geometría y álgebra a este grupo de personas orientadas por Malebranche, el conocimiento algebraico; y, que el método de análisis se enseñaba sin referencia geométrica. Quizás sea en la idea de experiencia en donde, para ese momento, tienen cabida la geometría y sus imágenes. Así la geometría pasa a ser una aplicación del álgebra; las otras áreas van a tener que ver con el desarrollo de los infinitesimales en las técnicas del cálculo diferencial e integral. En las aplicaciones, en la resolución de problemas, Reyneau deja ver su herencia cartesiana; pues, reivindica los usos tanto del método, suponiendo el problema a través de imágenes, como de la heurística de la intersección de curvas. Igual que en Descartes, los diagramas son usados para analizar el movimiento, para interpretar la heurística propuesta y para solucionar problemas.

4.5 La Práctica Matemática Cartesiana en Libros Para la Enseñanza. Reflexión Para el Horizonte de Contenido

En el capítulo 2 se afirmó que los pequeños cambios en las componentes del sistema establecen nuevas configuraciones en las actividades de la práctica cartesiana. En la siguiente tabla, se decantan, para cada componente del sistema, los cambios establecidos en los textos trabajados en el capítulo, que, a su vez, son las reflexiones del grupo de Malebranche.

Componente de la práctica	Cambios en la segunda edición
Comunidad de matemáticos	Estos textos muestran las buenas relaciones que existían entre la comunidad de científicos y de personas dedicadas a la enseñanza. En algunos momentos eran los mismos, sin embargo, este grupo de personas era reconocidos más por su trabajo como maestros. Estos textos fueron un significativo medio de divulgación del método de análisis, del álgebra y de la resolución de problemas con estas dos herramientas.
Programa de investigación	Detrás de las ideas de Malebranche existe una filosofía diferente en algunos aspectos a la de Descartes, en el caso de las matemáticas, en esos momentos las discusiones sobre los infinitesimales se estaban dando, L'hôpital pertenecía a este grupo de personas, ellos tuvieron comunicación con Leibniz quien les hizo saber algunas de las dificultades para aplicar el cartesianismo en curvas que no fueran algebraicas y en las técnicas del cálculo diferencial e integral (Costabel, 1981b). Estos textos, en especial el de Reyneau son consecuencia de la revisión del método y del álgebra por estas nuevas ideas. El carácter generalizador y unificador de la matemática se mantiene.

Lenguaje formal	El álgebra de símbolos comienza camino a convertirse en una teoría para la matemática, se compone de operaciones y objetos matemáticos como curvas algebraicas. Las imágenes se reducen esencialmente al planteamiento del problema y del supuesto para la solución.
Métodos de prueba	Se realizan pruebas manipulando algebraicamente las expresiones, se reemplazan cantidades en las variables y en las cantidades fijas pero arbitrarias. Todas estas actividades muestran los usos del principio analítico.
Conceptos	Se vislumbra la aparición de los infinitesimales, los conceptos son los mismos, aunque existen cambios en el tratamiento de las curvas algebraicas, pues ahora la representación simbólica es usada en algunos casos como única representación.
Métodos argumentativos	La forma de argumentar tiene los cambios relativos a las otras componentes del sistema. El cambio más significativo obedece al no uso de la representación gráfica para construir el argumento.
Estrategias de prueba	Las estrategias no tienen cambios

5. Conclusiones

Para constituir una historia de la práctica cartesiana, focalizada en el uso de diagramas; que permita el desarrollo del HCK; se identificaron en los documentos estudiados en el capítulo III y IV, dos estados de la práctica que surgieron en la interpretación de los trabajos de Descartes.

El primero, corresponde a la práctica post cartesiana en el estudio del método propuesto por Descartes en *Geometría,* específicamente la relación del principio analítico, representado en una ecuación y las curvas que describe. Este estado de la práctica permitió el fortalecimiento de la componente de métodos de prueba al esclarecer la influencia de ciertos aspectos de la geometría de los antiguos en la nueva geometría, especialmente en cuanto al papel central de la teoría de proporciones, el uso del teorema de Tales y la aplicación del tratamiento geométrico dado por Apolonio a las curvas cónicas. En esta actividad, que se corresponde con la parte sintética del método propuesto por Descartes, los diagramas generan un anclaje entre las dos teorías, pues los objetos de la geometría euclidiana describen sus características geométricas en el diagrama y es allí donde se han configurado las relaciones entre cantidades que permiten una solución analítica del problema.

Este tratamiento profundiza la componente de conceptos, pues se hace uso de diagramas que describen instrumentos que trazan curvas; es a partir de ellos que van Schooten y de Witt muestran que las propiedades de las curvas propuestas en *Cónicas* por Apolonio se cumplen en este nuevo registro -sección 3.2.2 y 3.6.2-, que tiene como característica principal que la curva es generada por un movimiento continuo. Se pasa de una curva estática, producida por el corte de un cono, a una curva con movimiento. En el

diagrama se analizan varios puntos de la curva para mostrar que la propiedad geométrica se cumple en toda la curva. La característica principal que presentan estas representaciones visuales es que retoman diagramas e instrumentos de textos escritos en la tradición euclideana, como el de Apolonio, y los resignifican en el nuevo enfoque cartesiano de la geometría.

El método implica establecer un par de rectas desde donde se representan la relación que cumplen los puntos de una curva algebraicas a partir de la longitud a cada una de las dos rectas y un dominio de variación de las magnitudes involucradas -sección 3.2 y 3.6.2, que en el diagrama se expresa como una distancia cualquiera que puedo tomar sobre una recta, la cual es la variable independiente de la expresión analítica.

En este mismo proceso, las cónicas ya no aparecen en su definición como cortes de un cono y, en varios apartes, tampoco como construcción a partir del movimiento, sino que aparecen vinculadas a su expresión analítica; es esta nueva representación la que permite que las curvas sean consideradas en las argumentaciones de los problemas como un objeto dado. Se pasa entonces, de construir la curva, a probar las características geométricas por medio del recurso al método analítico, como se ve en el estudio del segundo texto de de Witt -sección 3.6.2-.

Un segundo estado de la práctica cartesiana se caracteriza por los cambios en las componentes de lenguaje, conceptos y métodos de argumentación, a partir de los inicios de una teoría algebraica cuyos objetos son abstractos, es decir, de naturaleza cualquiera -sección 3.5-. Aunque este era un ideal cartesiano, en el texto de *Geometría* las expresiones algebraicas tuvieron su representación geométrica -sección 2.5-, sin embargo, en la segunda edición en latín y en especial al inicio del segundo tomo se evidencia el estudio de una teoría para las curvas algebraicas que se basa en la clasificación por su representación

simbólica. Se hallan las raíces de las ecuaciones por medio aritméticos o algebraicos y los diagramas que representan soluciones de ecuaciones perdieren su uso y se reemplazan por técnicas algebraicas que permiten aproximar la raíz de una ecuación.

En este momento de la práctica post cartesiana, la primera fase del método de análisis donde se supone la existencia de una solución para el problema se sigue abordando a partir de un diagrama -sección 3.7- el cual deja ver la imaginación del resolutor al plantear la solución y el manejo de la práctica. En estos diagramas se especifican líneas auxiliares, posiciones específicas de los objetos que permiten a partir del proceso de doble escritura y las técnicas algebraicas construir la ecuación que representa el problema.

La estructura de práctica que usamos en esta tesis tiene la posibilidad de poder diferenciar cambios en el sistema a partir de las componentes, este enfoque para el análisis de libros es fructífero en la identificación de pequeñas trasformaciones en el sistema, que generan estados de la práctica de dos maneras: clarifican aspectos de la práctica inicial, este es el caso, del primer estado que se presenta en estas conclusiones; o identifican estados de práctica que profundizan aspectos, como es el caso del segundo estado que se presenta. Sin embargo, este primer ejercicio de indagación de prácticas matemáticas a partir de esta estructura para la formación del profesor tendrá que ser decantado y en próximas investigaciones posiblemente modificado en asuntos que sean de interés para quienes forman profesores. Vemos posible con los años elaborar una estructura que permita estudiar la práctica para la formación de maestros y que incluya tópicos más problémicos como el paso de la intuición a la formalización o de los problemas a los teoremas o definiciones.

Como se afirmó en el marco referencial -capítulo 2-, lo que se moviliza para la formación del profesor es un estado de la práctica matemática, estos dos estados de transformación de la práctica cartesiana a la post cartesiana son los que creemos

constituyen un importante campo de saber para los profesores de matemáticas y con los que se debería reconstruir está parte de la historia, con el propósito de desarrollar el horizonte de contenido las matemáticas cartesianas de finales del siglo XVII hasta la mitad del siglo XVIII.

La definición de HCK refiere a las trasformaciones y conexiones del conocimiento en la disciplina de las matemáticas y de la escuela, es el conocimiento que puede situar un maestro en la organización y gestión de las matemáticas escolares. Los énfasis que tomó la práctica cartesiana son una muestra de esta organización; como se advirtió en el primer capítulo al citar a Chevellard, el maestro debe develar las heurísticas que permitieron la constitución de las matemáticas y en este sentido, las variaciones en el sistema de práctica y que fueron disminuyendo el uso de los diagramas, en el estilo como los uso Descartes, muestra formas de organizar y situar las discusiones sobre la práctica cartesiana, con miras al desarrollo de las matemáticas escolares.

Las componentes que cambiaron en el sistema de práctica cartesiano nos indican que asociados a estos estados de la práctica post cartesiana existen tres asuntos acompañan la trasformación; el desarrollo del método de análisis tanto para resolver problemas como para probar proposiciones, el proceso de significación simbólica a través del lenguaje de la doble escritura de Descartes, y el uso de diagramas en el sentido de los párrafos anteriores.

Al comprender la función de estos estados de práctica en los saberes que tuvo el desarrollo del pensamiento cartesiano, sugerimos que estos aspectos sean movilizados a la formación del profesor. El horizonte de contenido matemático -sección 2.4.1- de las matemáticas cartesianas debe permitir comprender el posicionamiento del álgebra en la cultura matemática de la época, pues creemos que eso permite que curricularmente se logren establecer diferentes focos de desarrollo en la escuela y que el profesor esté en

mejores condiciones de experimentar organizaciones curriculares y secuencias didácticas menos convencionales y tal vez más pertinentes para los fines de la enseñanza en contexto de aula.

Lo que vemos en estos dos estados de la práctica que favorece la formación del profesor, es que la práctica que le permitió a Descartes oponerse a la tradición euclídea - sección 2.5- fue explicada y complementada por sus seguidores -capítulo 3- de tal manera, que la expresión simbólica se convierte en una forma de representación de las curvas algebraicas. Esto implica comprender el papel de los diagramas en la formulación del método de análisis, especialmente en su función de imaginación creadora de las matemáticas y como organizador de la red de conceptos que permiten la solución de un problema o la prueba de una proposición. De igual manera, el HCK se favorecería al comprender como los objetos matemáticos de la antigüedad fueron expresados e incorporados en la matemática cartesiana -capítulo 3-.

En el capítulo 2 se estudió la importancia de la noción HCK en cuanto al uso de la historia en la formación docente y en la sección 2.4.2 se expusieron las virtudes que teóricamente le vemos a la interacción del MKT y la práctica matemática, lo que la tesis nos permite concluir al respecto es lo siguiente:

- El horizonte de contenido externo se enriquece con el estudio de estos estados de práctica por parte de los profesores, pues la práctica cartesiana es un aspecto nodal en la historia de la matemática y en la comprensión de las diferencias de la matemática euclidiana y las visiones de la matemática que llevaron a la modernidad. En ese sentido su práctica es la terminación de una forma de pensar las matemáticas, pero también el comienzo de varias teorías en esta área. Su expresión es el análisis como método de solución de problemas y para la realización de pruebas, el método y sus reinterpretaciones son

fundamentales para comprender el avance teórico y práctico que surge a partir del cartesianismo. Quedan abiertas preguntas sobre el cambio específico de la práctica cartesiana en Leibniz y la función que cumplió el diagrama en el desarrollo de conceptos como el de infinitesimal y diferencial; al igual que en la construcción de técnicas de métodos numéricos.

- En el horizonte interno, centrado el foco en los usos de los diagramas de la práctica cartesiana favorecería el estudio del método analítico de resolución de problemas y la significación de la geometría como objeto analítico. Creemos que el conocimiento de estos estados de práctica permite el desarrollo de propuestas curriculares que tengan en cuenta el sistema de producción que llevó al desarrollo de teoría algebraica. Así se podría establecer una secuencia curricular que relacione la geometría euclidiana, el análisis como método de solución de problemas, el álgebra en contexto geométrico, la construcción de curvas algebraicas usando modelos que permitan analizar la covariación y el álgebra simbólica.

En el capítulo 4 se analiza la práctica matemática cartesiana que realizó el grupo de oratorianos liderados por Malebranche para la escuela y que está consignada en libros utilizados en los colegios y universidades a cargo de esta congregación. Estos textos centran su labor de enseñanza en el estado de práctica post cartesiano que refiere a la construcción de la teoría algebraica. En este sentido los libros tienen la intención de desarrollar la geometría como una de las aplicaciones del álgebra.

En el estudio de las ediciones del libro de Lamy – sección 4.1- se pudo ver como los diagramas que refieren a la solución de ecuaciones y en la función de conservar la red de conceptos que permiten solucionar un problema, fueron desapareciendo en la medida en

que el álgebra y su relación con la aritmética se fueron posicionando en la práctica cartesiana.

De igual manera en el análisis de los dos tomos del libro de Reyneau -sección 4.4- se evidenció el álgebra simbólica, desnaturalizada de cualquier intuición o magnitud, de tal manera, que el texto le dedica uno de sus tomos a la construcción de las operaciones y técnicas algebraicas para la solución de ecuaciones polinomiales. Luego en la sección de aplicaciones aparecen la geometría.

Aunque este grupo de profesores de matemáticas rechazan el uso de la imagen en las matemáticas los diagramas en su función de representar las condiciones de una situación problema y de suponer su solución, se mantuvieron dentro las aplicaciones. Al igual que diagramas que permiten el análisis del movimiento que produce una curva de segundo grado.

A partir de estos argumentos podemos concluir que: la práctica cartesiana que establecen los oratorianos para la enseñanza se deduce más de las interpretaciones de los divulgadores del cartesianismo en especial de van Schooten, que de la práctica que se deduce de la *Geometría* de 1637. El uso de la resolución de problemas para la construcción de expresiones algebraicas en contexto geométrico, la construcción de la ecuación que representa la solución de un problema geométrico, el uso de instrumentos para construir curvas y el uso del método de resolución de problemas, no fueron considerados por esta comunidad para el aprendizaje. Lo que nos permite suponer que esta versión del cartesianismo fue la que se estableció en Europa para la enseñanza, problema que queda abierto para nuevas investigaciones. Este estado de la práctica cartesiana coincide en la con algunas de las ideas que en la actualidad se identificaron en los libros de didáctica del álgebra.

Para finalizar, vemos que los trabajos en historia de la matemática y de la educación matemática revelan asuntos de la constitución de los objetos matemáticos y de su enseñanza que se corresponden con los intereses de la investigación en el conocimiento del horizonte de contenido matemático del profesor de matemáticas, este camino está por recorrer tanto teóricamente como en la misma formación del profesor de matemáticas y del formador de profesores de matemáticas. En este sentido este trabajo es una pequeña contribución en ese camino que nos corresponde a quienes organizamos y estamos en las aulas formando profesores de matemáticas.

Bibliografía

Adler, J., y Venkat, H. (2014). Mathematical Knowledge for Teaching. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 385 - 388). New York: Springer.

Adler, J., Ball , D., Krainer , K., Lai Lin, F., y Novotna, J. (2005). Reflections on an Emerging Field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics*, 359-381. doi:10.1007/s10649-005-5072-6

Alfonsi, L. (2012). L'enseignement des Mathématiques au XVIIIème siècle en France. *Histoire des mathématiques*, 1-56.

Alshwaikh, J. (2011). *Geometrical Diagrams as Representation and Communication: A Functional Analytic Framework.* PhD. Thesis, University of London, Institute of Education, London.

Alvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides. En C. Álvarez, & R. Martinez (Edits.), *Descartes y la Ciencia del Siglo XXI.* D.F. México: Siglo XXI editores.

Apolonio, D. (1952). Conics. En *Britannica Great Books 11* (C. Taliaferro, Trad., págs. 597-804). London: Encyclopedia Britannica, INC.

Arana, A. (2016). Imagination in mathematics. En A. Kind (Ed.), *The Routledge handbook of philosophy of imagination* (págs. 463-477). New York: Routledge.

Arboleda, L. (2017). VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. En FESPM (Ed.), *Historia de la Matemática y formación docente: el caso de la completitud de los números reales* (págs. 111-120). Madrid: FESPM.

Arboleda, L., y Castrillón, G. (2012). La historia y la educación matemática en el "horizonte" conceptual de la pedagogía. *Quipu, 14*(1), 13-32.

Arboleda, L. (1983). Historia y Enseñanza de las Matemáticas. *Serie Epistemología, Historia y Didáctica de la Matemática*(4), 241-266.

Arboleda, L. (2011). Los estudios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* . Recife . Obtenido de http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2845/1165

Arboleda, L. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 764 - 777). Medellín: Universidad de Medellin. Obtenido de http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA_EDUCATIVA_13_Encuentro_Colombiano%20ECME.pdf

Arenas, L. (1996). Matemáticas, método y mathesis universalis en las Regulae de Descartes. *Revista De Filosofía*. Obtenido de https://revistas.ucm.es/index.php/RESF/article/view/RESF9696120037A

Arnauld, A. (1667). *Nouveaux Elemens de Géométrie.* Paris: Ch. Savreux. Obtenido de http://books.google.com

Arnauld, A. (1683). *Nouveaux Elémens de Géométrie.* La Haye: H. van Bulderen.

Azzouni, J. (2007). How and Why Mathematics is Unique as a Social Practice. En B. V. Kerkhove, & J. P. Bendemen (Edits.), *Perspectives on Mathematical Practices. Bringing together philosophy of mathematics, sociology of mathematics and mathematics education* (págs. 3-24). Springer.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico.* Mexico D. F.: Siglo XXI editores.

Ball, D., y Bass, H. (Marzo 1 - 4, 2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung fur Didaktik der Mathematik.* Oldenburg.

Ball, D. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary SchoolMathematics. *The Elementary School Journal, 94*(4), 373 - 397.

Ball, D., Thames, H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching : What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 389-407. doi:10.1177/0022487108324554

Barbin, E. (2009). The Notion of Magnitude in Teaching: The "New Elements" of Arnauld and His Inheritance. *The International Journal for the History of Mathematics*, 1-18.

Barbin, E. (2010). Evolving Geometric Proofs in the Seventeenth Century: From Icons to Symbols. En G. Hanna, H. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), *Explanation and Proof in*

Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives (págs. 237-252). New York: Springer.

Bardi, J. (2006). *The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time.* New York: Thunder´s Mount Press.

Bartolini, M., y Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Milano: Springer.

Bartolini, M., y Sun, X. (Edits.). (2018). *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades. The 23rd ICMI Study.* Switzerland: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2

Beaune, F. (1659). Notae Breves. En F. Schooten (Ed.), *Geometria, a Renato Des Cartes* (Vol. 1, págs. 107-142). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee , L. (Edits.). (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Belhoste, B. (1993). L´enseignement des mathematique dans les collèges oratoriens au XVIII. En J. Ehrard, *Le collège de Riom et l'enseignement oratorien en France au XVIIIe siècle* (págs. 141-160). Paris: Voltaire Foundation.

Bello, J. (2017). La perspectiva de la práctica matemática en la formación del conocimiento matemático del profesor de matemáticas. *II Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe.* Cali. Obtenido de http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/375/58

Bello, J. (2019). XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. *Interpretaciones del método de Descartes en Didáctica del álgebra. Estudio documental.* Medellin. Obtenido de http://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/487/288

Bello, J. (2020). Transformación del método cartesiano en las ediciones de la geometría de Bernard Lamy. *Revista Científica, 38*(2), 216-228. doi:https://doi.org/10.14483/23448350.14580

Bello, J., y Forero, A. (2015). La noción de cónica en Apolonio y Descartes: Un análisis comparativo. *Revista Brasileira de História da Matemática, 15*(30), 33-48.

Bello, J., y Forero, A. (2016). *El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. Una experiencia con la Geometría de Descartes.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

Bendegem, J. P. (2014). The Impact of the Philosophy of Mathematical Practice on the Philosophy of Mathematics. En L. Soler, S. Zwart, & V. Jost (Edits.), *Science after the practice turn in the philosophy, history, and social studies of science* (págs. 215-226). New York: Routledge.

Bos, H. (1981). On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie. *Archive for History of Exact Sciences, 24*(4), 295-338. Recuperado el 22 de 03 de 2013, de Jstor: http://www.jstor.org/stable/41133624

Bos, H. (1984). Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory: the construction of ecuations. 1637 - 1750. *Archive for History of Exact Sciences*, 331 - 380. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/41133725

Bos, H. (1986). The Concept construction and the Representation of Curves in Seventeenth-Century Mathematics. *International Congress of Mathematicians*, 1629-1641.

Bos, H. (1998). La structure de la Géométrie de Descartes. *Revue d'histoire des sciences, 51*(2-3), 291-318.

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer.

Bourdieu, P. (1997). *Razones prácticas Sobre la teoría de la acción.* (T. Kauf, Trad.) Barcelona: Anagrama.

Bourdieu, P. (2007). *El sentido práctico.* Siglo Veintiuno Editores.

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica Didáctica. Del saber Sabio al saber enseñado.* (C. Gilman, Trad.) Buenos Aires: Aique.

Chikara, S. (2003). *Descartes´s Mathematical Thought.* New York: Springer.

Cho, Y.A., y Tee , F.-D. (2018). Complementing Mathematics Teachers' Horizon Content Knowledge with an Elementary-on-Advanced Aspect. *Pedagogical Research, 3*(1). doi:https://doi.org/10.20897/pr/85172

Clarke, D. (1982). *La Filosofía de la Ciencia de Descartes.* Madrid : Alianza Editorial .

Clarke, D. (2005). Descartes´ philosophy of science and the scientific revolution. En *The Cambridge Companion to Descartes* (Décima ed., págs. 258 - 285). Cambridge : Cambridge University Press.

Coollidge, J. (1968). *A History of the Conic Sections and Cuadric Surfaces* . New York: Dover.

Costabel, P. (1981a). Malebranche Nicolas. En *Dictionary of Sciencitific Biography* (Vol. 9, págs. 47-53). New York: Charles Scribner´s Sons.

Costabel, P. (1981b). Reyneau Charles Rene. En C. C. Gillispie (Ed.), *Dictionary of Scientific Biography* (Vol. 11, pág. 392). New York: Chales Scribner´s Sons.

D´hombres, J. (2000). La banalidad del referencial cartesiano. En C. Álvarez, & R. Martínez, *Descartes y la cienica del siglo XVII* (págs. 69 - 98). México: Siglo XXI editores.

Dennis, D. (1997). Rene Descartes' Curve-Drawing Devices: Experiments in the Relations Between Mechanical Motion and Symbolic Language. *Mathematics Magazine, 70*(3), 163-174. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/2691256

Detlefsen, M. (2005). Formalism. En S. Shapiro (Ed.), *The Oxford handbook of philosophy of math and logic* (págs. 136-317). Oxford University Press.

Descartes, R. (2010). *Reglas para la Dirección del Espíritu.* (J. Navarro Cordón, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

Descartes, R. (1659 - 1661). *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem...* (F. Schooten, Ed.) Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, Amstelædami: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Descartes, R. (1952). Discurse on the Method of Rightly Conducting the Reason. *Enciclopedia Británica, 31*, 41-68. (E. Haldane, & G. Ross, Trads.) London: William Benton. Publisher.

Descartes, R. (1952). Rules for the Direction of the Mind. *Enciclopedia Británica, 31*, 1-40. (E. Haldane, & G. Ross, Trads.) London: William Benton. Publisher.

Descartes, R. (1954). *The Geometry.* (D. Smith, & M. Latham, Trads.) New York: Dover Publication.

Dopper, J. (2014). *A life of learning in Leyden. The Mathmetician Frans Van Schooten (1615-1660).* Tesis doctoral , Universidad de Utrecht, Veedam.

Easton, J. (1963). Johan de Witt's kinematical constructions of the conics. *The Mathematics Teacher, 56*(8), 632-635.

Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemáticas Educativa* (págs. 35 - 42). México D.F.: Red de Centros de Investigaciones en Matemáticas Educativa A.C.

Euclides. (2007). *Elementos I.* (M. Puertas Castaños, Trad.) Barcelona: Gredos.

Ferreiros, J. (2016). *Mathematical Knowlegde and the Interplay of Practice.* Princeton: Princeton University Press.

Foucault, M. (2010). *¿Qué es un autor?* (S. Mattoni, Trads.) Buenos Aires: el cuenco de la plata.

Foster, C. (2011). Peripheral Mathematical Knowledge. *For the Learning of Mathematics, 31*(3), 24 - 26.

Gaukroger, S. (1980). *Descartes. Philosophy, Mathematics and Physics.* Great Britain: The Pitman Press.

Graukroger, S. (1989). *Cartesian Logic. An essay o Descartes´s Conception of Inference.* United Kingdom: Oxford University Press.

Gaukroger, S. (2005). The Nature of Abstract Reasoning Philosophical Aspects of Descartes Work in Algebra. En J. Cottingham (Ed.), *The Cambridge Companion on Desartes* (Décima ed., págs. 91 - 114). New York: Cambridge University Press.

Giardino, V. (2013). A Practice-Based Approach to Diagrams. En Amirouche, & Shin (Edits.), Visual Reasoning with Diagrams (págs. 135-152). New York: Birkhauser.

Giardino, V. (2016). Behing the Diagrams: cognitive issues and open problems. En S. Kramer, & C. Ljungberg (Edits.), *Thinking With Diagrams. The Semiotic Basic of Human Cognition* (págs. 77-102). Boston/Berlin: De Gruyter Mouton.

Glas, E. (2007). Mathematics as Objective Knowlegde and as Human Practice. En V. Kerkhoven, & J. Bendengem (Edits.), *Perspectives on Mathematical Practice. Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics and Mathematics Education* (págs. 25-42). New York: Springer.

Groshloz , E. (2007). *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences.* Great Britain: Oxford University Press.

Guacamene, E. (2016). *Potencial Formativo de la Historia de la Teoría Euclidiana de la Proporción en la Constitución del Conocimiento del Profesor de Matemáticas.* Tesis Doctoral , Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Cali.

Gutierrez, A. (2005). *Las prácticas sociales: una introducción a Pierre Bourdieu* . Buenos Aires : Ferreira Editor.

Hacking, I. (1980). Proof and Eternal Thuths: Descartes and Leinbinz. En S. Graukroger, *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics* (págs. 169 - 180). Great Britain : The Pitman Press.

Heuraet, H. (1659). Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas. En F. v. Schooten (Ed.), *Geometria a Renato Des Cartes* (págs. 517–520). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Hilbert, D. (1902). *The Foundations of Geometry.* (E. Townsend, Trad.) Chicago: The open court publishing Company.

Hoffmann, M. (2005). Sings as Means For Discoveries: Peirce and His Concepts of "Diagrammatic Reasoning" "Theorematic Deduction", "Hypostatic Abstraction," and "Theoric Transformation". En M. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Edits.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (págs. 45-56). New York: Springer.

Hoffmann, M. (2007). Cognitive Conditions of Diagrammatic Reasoning. *Working Paper Series Georgia Tech*(24), 1 - 29.

Holland, D., y Cole, M. (2009). Between Discourse and Schema: Reformulating a Cultural-Historical Approach to Culture and Mind. *Anthropology & Education Quarterly*, 475 - 489. doi:DOI: 10.1525/aeq.1995.26.4.05x1065y

Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D., y Lai, Y. (2016). Making Progress on Mathematical Knowledge for Teaching. *The Mathematics Enthusiast, 13*(1 & 2), 3-34.

Jakobsen, A., Ribeiro, M., y Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (págs. 4635-4644). Seul: ICMI.

Jones, M. (2006). *The good life in the scientific revolution : Descartes, Pascal, Leibniz, and the cultivation of virtue.* Chicago and London : The University of Chicago Press.

Kadunz, G. (2016). Diagrams as Means For Learning. En A. Sáenz-Ludlow, & G. Kadunz (Edits.), *Semiotics as a Tool for Learning Mathematics.How to Describe the Construction, Visualisation, and Communication of Mathematical Concepts* (págs. 111-126). The Netherlands: Sense Publishers.

Kerkhove, B., y Bendegem, J. (2004). The Unreasonable Richness of Mathematics. *Journal of Cognition and Culture, 4*(3-4), 525–549. doi:https://doi.org/10.1163/1568537042484913

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge.* New York: Oxford University Press.

Klein, F. (2016). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint.* (G. Schubring, Trad.) Berlín: Springer.

Kozak, P. (2020). Diagrammatic Representation and Inference. 11th International Conference. En A.-V. Pietarinen, P. Chapman, V. Giardino, J. Corter, & S. Linker (Ed.), *The Diagram Problem* (págs. 216-224). Estonia: Springer.

Kokomoor, F. W. (1928). The Teaching of Elementary Geometry in the Seventeenth Century. *The History of Science Society*, 85-110. Recuperado el 26 de 05 de 2017, de http://www.jstor.org/stable/224762

Kuhn, T. (2001). *La Estructura de las Revoluciones Científicas* (Decimoséptima ed.). México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The logic of mathematical discovery* . Cambridge: University press Cambridge.

Lamy, B. (1685). *Les éléments de Géométrie ou de la mesure du corps.* Paris: Pralard. Obtenido de http://books.google.com

Lamy, B. (1692). *Nouveaux éleméns de Géométrie ou de la mesure du corps.* Paris: Pralard.

Lamy, B. (1710). *Les eleméns de Géométrie ou de la mesure de l'étendue.* (cuarta ed.). Paris: Florentin de Laulne.

Lamy, B. (1731). *Les eleméns de Géométrie ou de la mesure de L´étendue* (Quinta ed.). Paris: Florentin de Laulne.

Lamy, B. (1734). *Les eleméns de Géométrie ou de la mesure de L´étendue* (Sexta ed.). Amsterdam: Pierre Mortier.

Lamy, B. (1758). *Les éleméns de Géométrie ou de la mesure de L´étendue* (Séptima ed.). Paris: Durand.

Leibniz, G. (2007). *Leibniz. Correspondecia con Arnauld.* Buenos Aires: Lozada.

Liu, C. (2017). Re-examining Descartes´ Algebra and Geometry. *Analytic Philosophy, 58*(1), 29 - 57.

Löwe, B. (2016). Philosophy or not? The study of Cultures and Practices of Mathematics. En S. Ju, B. Löwe, T. Müller, & Y. Xie (Edits.), *Cultures of Mathematics and Logic. Selected Papers from the Conference in Guangzhou, China, November 9-12, 2012* (págs. 23-42). Switzerland: birkhauser.

Lubet, J. P. (abril de 2005). Le calcul différentiel et intégral dans L´Analyse démontrée de Charles René Reyneau. *Recherches sur Diderot et sur L´Encyplopédie*. doi:10.4000/red.304

Maanen, J. (2003). Precursors of Differentiation and Integration. En H. N. Jahnke (Ed.), *A history of analysis* (págs. 41 - 71). Providence: American Mathematical Society. London Mathematical Society.

Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal*, *25*(2), 87 - 117.

Macbeth, D. (2014). *Realizing Reason. A Narrative of Truth and Knowing.* United Kingdom: Oxford University Press.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century.* New York: Oxford University Press.

Mancosu, P. (diciembre de 2016). *Algunas observaciones sobre la filosofia de la práctica matemática.* Obtenido de Disputatio Philosophical Research Bulletin: https://disputatio.eu/

Manders, K. (2008). The Euclidean Diagram. En P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (págs. 80 - 133). Oxford: Oxford University Press.

Manders, K. (2008a). Diagram - Based Geometric Practice. En P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (págs. 65 - 79). Oxford: Oxford University Press.

Maronne, S. (2007). *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne: 1637 - 1661.* Université Paris - Diderot , Paris VII. Paris : Histoire et

perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Obtenido de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00204125v2

Martinez , S., y Huang, X. (2015). *Hacia una filosofia de la ciencia centrada en prácticas* . México, D.F.: Bonilla Artiagas Editores / Insitituto de Investigaciones Filosóficas. UNAM .

Montesinos, J. (1995). Descartes: el Álgebra y la Geometría. *Actas, año II, Seminario Oratova de Historia de la Ciencia* , (págs. 392 - 404). Canarias.

Mosvold, R., Jakobsen , A., y Jankvist, U. T. (2014). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. *Science & Education*(23), 47 - 60. doi: 10.1007/s11191-013-9612-7

Newton, I. (1993). *Principios Matematicos de la filosofía natural.* (A. Escohotado, & M. Sáenz, Trads.) Barcelona: Altaya.

O'Halloran, K. (2005). *Mathematical Discourse: Language, Symbolism and Visual Images.* London - New York: continuum.

Panza, M. (2012). The Twofold Role of Diagrams in Euclid´s Plane Geometry. *Synthese, 186*, 55-102. doi:10.1007/s11229-012-0074-2

Paty, M. (1997). Mathesis Universalis e Inteligibilidad en Descartes. *Memorias del Seminario en Conmemoración de los 400 Años del Nacimiento de René Descartes* (págs. 135-170). Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Prestet, J. (1675). *Nouveaux Elémens des Mathématiques ou Principes Generaux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objet.* Paris: Pralard.

Prestet, J. (1689). *Nouveaux Elémens des Mathématiques ou Principes Generaux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objet.* Paris: Pralard.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The History of Algebra in Mathematics Education. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Edits.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (págs. 197-224). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Rabouin, D. (2015). The Difficulty of Being Simple: On Some Interactions Between Mathematics and Philosophy in Leibniz's Analysis of Notions. En *G.W. Leibniz,*

Interrelations Between Mathematics and Philosophy (págs. 49 - 74). New York: Springer.

Rabouin, D. (2016). Mathesis Universalis et àlgebre gènèrale dans les regulae ad directinem ingenii de Descartes. *Revue d'histoire des sciences*, 259-309.

Rabouin, D. (2017). Logic of imagination. Echoes of Cartesian epistemology in contemporary philosophy of mathematics and beyond. *Synthese*. doi:10.1007/s11229-017-1562-1

Radford, L. (2014). De la teoria de la objetivación. *Revista latinoamericana de etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Real Academia Española. (9 de 08 de 2018). Obtenido de http://dle.rae.es/?w=diccionario

Reyneau, C. R. (1708a). *Analyse demontrée ou la Méthode de résoudre les problêmes des mathématiques, et d'apprendre facilement ces sciences.* Paris: Quilliau.

Reyneau, C. R. (1708b). *Usage de l'Analyse, ou de la maniere de l'appliquer à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie, ..., en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel et le calcul integral.* Paris: Quillau.

Risi, V. (2016). The development of Euclidean axiomatics. The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the Elements in the Early Modern Age. *Archive for History of Exact Sciences*, 591-676. doi:DOI 10.1007/s00407-015-0173-9

Schooten, F. (1657). *Exercitationum mathematicarum libri quinque.* Leiden: Ex officina Johannis Elsevirii.

Schooten, F. (1659). commentarii. En F. Schooten (Ed.), *Geometria a Renato Des Cartes* (Vol. 1, págs. 143-400). Amsterdam: Apud Ludovicum& Danielem Elzevirios.

Schooten, F. (1659b). Appendix de cubicarum aequationum resolutione. En F. Schooten (Ed.), *Geometria a Renato Des Cartes* (Vol. 1, págs. 345-368). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Schooten, F. (1661). Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesiane Géometríae Methodum. En F. Schooten (Ed.), *Geometria a Renato Des Cartes* (Vol. 2, págs. 1-48). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Schooten, F. (1661b). Tratactus de Concinnandis Demostrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico. En F. Schooten (Ed.), *Geometria a Renato Des Cartes* (págs. 345-418). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Schubring, G. (November de 1987). On the methodology of Analysing Historical Textbook: Lacroix as Textbook Autor. *For the Learning of Mathematics*, 41 - 50.

Schubring, G. (2011). Conceptions for Relating the Evolution of Mathematical concepts to Mathematics Learning Epistemology, History, and Semiotcis Interacting. *Educacional Studies in Mathematics*, 129-155.

Schubring, G., y Karp, A. (2014). *Handbook on the History of Mathematics Education.* New York: Springer.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization Rigor, and Intuition.* New York: Springer.

Schuster, J. (1980). Descartes´ Mathesis Universalis 1619 - 28. En S. Gaukroger (Ed.), *Descartes. Philosophy, Mathematics and Physics* (págs. 41 - 96). New Jersey: The Harvester Press.

Shea, W. (1993). *La Magia de los Números y el Movimiento. La carrera científica de Descartes.* Madrid : Alianza Editorial .

Sepper, D. (2016). Descartes. En A. Kind (Ed.), *The Routledge handbook of philosophy of imagination* (págs. 27-39). New York: Routledge.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1 - 21.

Stacey, K., Chick, H., y Kendal, M. (Edits.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Stamper, A. (1909). *A History of the Teaching of Elementary Geometry.* New York: Columbia University.

Steiner, H. (Nov. de 1998). Two Kinds of "Elements" and the Dialectic between Synthetic-deductive and Analytic-Approaches in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 7-15. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/40248146

Stjernfelt, F. (2007). *Diagrammatology. An investigation on the borderlines of phenomenology, ontology, and semiotics* . Dordrecht: Springer .

Sutherland, R., Rojano , T., Bell, A., y Lins, R. (Edits.). (2002). *Perspectives on School Algebra.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Wasserman, N., Stockton, J., y Wasserman, N. (2013). Horizon Content Knowledge in the Work of Teaching a Focus on Planning. *For the Learning of Mthematics, 33*(3), 20-22.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad* . Buenos Aires : Paidos .

Witt, J. (2000). *Jan de Witt's Elementa Curvarum Linearum, Liber Primus.* (A. Grootendorst, Ed.) New York: Springer-Verlag.

Witt, J. (2010). *Jan de Witt´s Elementa Curvarum Linearum. Liber Secundus.* (A. Grootendorst, J. Aarts, M. Bakker, & R. Erné, Edits.) New York: Springer.

Zazkis, R., y Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing Knowledge at the Mathematical Horizon. *For the Learning of Mathematics, 31*(2), 8-13.

Tabla de figuras

Figura 1. Fases del diseño metodológico. Elaboración propia. 25

Figura 2. Etapa de definición de la práctica. Elaboración propia. 27

Figura 3. Interpretación de la práctica cartesiana. Elaboración propia. 28

Figura 4. El proceso de razonamiento diagramático. (Stjernfelt, 2007, p. 104) 44

Figura 5. Dominios del conocimiento matemático del profesor. (Ball, et al., 2008, p. 403)..... 50

Figura 6. Diagrama de la multiplicación. (Descartes, 1954, p. 5)..... 78

Figura 7. Diagrama de la raíz cuadrada. (Descartes, 1954, p. 6) 79

Figura 8. Compás para trazar medias proporcionales. (Descartes, 1954 p. 154)..... 84

Figura 9. Diagrama del producto con texto. (Descartes, 1954, p. 5)..... 89

Figura 10. Primer diagrama del problema de Pappus. (Descartes, 1954, pp. 27) 91

Figura 11. Segundo diagrama problema de Pappus. (Descartes, 1954. p. 31)..... 93

Figura 12. Tercer diagrama del problema de Pappus. (Descartes, 1954, p.60)..... 95

Figura 13. Cuarto diagrama construcción auxiliar problema de Pappus. (Descartes, 1954, p. 64)..... 97

Figura 14. Imagen 5 problema de Pappus. (Descartes, 1954, p. 68 - 71) 98

Figura 15. Compás para trazar medias proporcionales. (Descartes, 1954, pp. 44-47) 101

Figura 16. Hiperbológrafo cartesiano. (Descartes, 1954, p. 51) 103

Figura 17. Solución de la ecuación $z2 = az + bb$. (Descartes, 1954, p.13) 106

Figura 18. Problema y diagrama del problema sobre la importancia del método. (Beaune, 1659, p.110) 113

Figura 19. Solución de ecuaciones de segundo grado. (Beaune, 1659, p.112) 114

Figura 20. Ejemplo de solución al problema de Pappus. (Beaune, 1659, p.119).... 115

Figura 21. Solución del problema de Pappus por una parábola. (Beaune, 1659, p.121)..... 117

Figura 22. Estrategia para mostrar ecuaciones de segundo grado. (Beaune, 1759, p.128)..... 118

Figura 23. Ecuaciones construidas a partir de la figura 22. (Beaune, 1659, p. 129) 120

Figura 24. Problema de la explicación de signos en las ecuaciones. (Schooten, 1659, p. 180)..... 123

Figura 25. Construcción auxiliar del problema de Pappus de cuatro rectas. (Descartes, 1996, p. 423)..... 127

Figura 26. Diagrama caso I de la parábola. (Schooten, 1659-1661, p. 182)..... 127

Figura 27. Procedimiento caso 1 de la parábola comentario CC. (Schooten, 1659, p. 183)..... 128

Figura 28. Diagrama usado por van Schooten de la proposición 11 del libro I de Apolonio. (Schooten, 1954, p. 207) 131

Figura 29. Definición de parábola. (Schooten, 1659, p. 207) 132

Figura 30. Expresión simbólica de la parábola. (Schooten, 1659, p. 208)..... 132

Figura 31. Diagrama para la representación simbólica de la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 216)..... 134

Figura 32. Asíntotas de la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 219)..... 135

Figura 33. Problema de Pappus para dos rectas. (Schooten, 1659, p. 226) 137

Figura 34. Diagrama de la solución del problema de Pappus para dos rectas. (Schooten, 1659, p. 226) 138
Figura 35. Problema para explicar el método. (Schooten, 1659, p. 149) 140
Figura 36. Diagrama del problema dado en la figura 35. (Schooten, 1659, p. 149) 141
Figura 37. La curva normal en una elipse. (Descartes, 1957, p. 97) 142
Figura 38. Modificación de van Schooten al diagrama propuesto por Descartes. (1659, p. 142) 143
Figura 39. Tangente a la hipérbola. (Descartes, 1954, p. 97) 145
Figura 40. Tangente a la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 244) 145
Figura 41. Diagrama de la concoide (Descartes, 1954, p. 113) 146
Figura 42. Diagrama de la concoide (Schooten, 1659, p. 249) 146
Figura 43. La cicloide. (Schooten, 1659, p. 265) 147
Figura 44. Construcción por puntos de la cicloide. (Schooten, 1659, p. 265) 148
Figura 45. Instrumento para trazar rectas. (Schooten, 1657, p. 304) 150
..... 151
Figura 46. Primera transformación del mecanismo. (Schooten, 1657, p. 305) 151
Figura 47. Instrumento modificado para trazar elipse. (Schooten, 1657) 152
Figura 48. Relaciones geométricas para trazar elipses con el instrumento. (Schooten, 1657, p. 327) 153
Figura 49. Mecanismo que aparece en comentarios libro II. (Schooten, 1659, p. 173) 154
Figura 50. Imagen de instrumento para trazar hipérbolas en Descartes –izquierda (Descartes, 1954, p. 50), y en van Schooten –derecha. (Schooten, 1657, p. 171) .. 156

Figura 51. Descripción del instrumento para trazar hipérbolas (Schooten, 1659, p. 171)..... 157

Figura 52. Instrumento para trazar hipérbolas. (Schooten, 1657, p. 332)..... 159

Figura 53. Solución de una ecuación de tercer grado: $x3 = -8x + 24$. (Schooten, 1959, p. 303)..... 163

Figura 54. Determinación de raíces de $x4 - 2ax3 + aa - ccx2 - 2a3x + a4 = 0$. 164

Figura 55. Diagrama propuesto por Descartes para la solución del problema (Descartes, 1954, p 189)..... 166

Figura 56. Modificación al diagrama realizado por Descartes. (Schooten, 1659, p. 316)..... 167

Figura 57. Construcción para la ecuación $z4 - pz3 + qzz - rz + s = 0$ 169

Figura 58. Teorema sobre la resolución de ecuaciones..... 170

Figura 59. Diagrama usado para demostrar el teorema. (Schooten, 1659, p. 334) . 171

Figura 60. Teorema I. (Schooten, 1659b, p.346) 173

Figura 61. Diagrama asociado al teorema I. (Schooten, 1659b, p.346)..... 173

Figura 62. Diagrama teorema III. (Schooten, 1659b, p.348) 174

Figura 63. Diagrama anexo al teorema III. (Schooten, 1659, p.349)..... 175

Figura 64. Diagrama problema I. 176

Figura 65. Área bajo una curva a partir de una longitud dada. (Heuraet, 1659, p.518) 179

Figura 66. Definición de producto. (Schooten, 1661, p.4)..... 184

Figura 67. Ejercicio de división. (Schooten, 1661, p.15)..... 184

Figura 68. Ejemplo de extracción de raíces. (Schooten, 1661, p.17)..... 185

Figura 69. Definiciones para la hipérbola. (Witt, 2000, p. 88) 190

Figura 70. Capitulo II, definición VIII. (Witt, 2000, p. 90) 191

Figura 71. Diagrama Teorema III. (Witt, 2000, pp. 90-94) 193

Figura 72. Teorema IV. Capítulo II. (Witt, 2000, p. 99)..... 195

Figura 73. Diagrama proposición 1, libro I. (Witt, 2010, p.65) 200

Figura 74. Ecuaciones consideradas por de Witt para las cuadráticas. (Witt, 2000, p. 72)..... 201

Figura 75. Proposición VIII del libro II. (Witt, 2010, p. 75)..... 202

Figura 76. Diagrama proposición 20 libro I. (Apolonio, 1952, p. 627) 204

Figura 77. Diagrama general usado para el caso de la hipérbola. (Schooten, 1659, p. 176)..... 205

Figura 78. Expresiones que son líneas. (Witt, 2010, p. 184) 206

Figura 79. Clasificación de ecuaciones de segundo grado. (Witt, 2010, p. 184) 206

Figura 80. Diagrama para ecuaciones lineales. (Witt, 2010, p. 189) 207

Figura 81. Diagrama de la parábola $y2 = dx \bullet f2$. (Witt, 2010, p.91) 208

Figura 82. Análisis caso II de las parábolas. (Witt, 2010, p. 285) 210

Figura 83. Teorema. (Schooten, 1661b, p. 368)..... 212

Figura 84. Composición algebraica del análisis geométrico. (Schooten, 1661b, p. 369)..... 213

Figura 85. Algunas relaciones entre la composición algebraica y geométrica (Schooten, 1661b, p. 357) 214

Figura 86. Ejemplo de problema. (Schooten, 1661b, p. 360) 215

Figura 87. Propuesta de solución problema de la figura 87. (p. 360) 216

Figura 88. Composición algebraica y geométrica. (Schooten, 1661b, p. 361) 217

Figura 89. Problema: inscribir un círculo en un triángulo. (Lamy, 1685, p. 269) .. 233
Figura 90. Problema del cuadrilátero inscrito. (Lamy, 1685, p. 274) 235
Figura 91. Problema para mostrar la capacidad de generalización del método. (Lamy, 1685, p. 314) 237
Figura 92. Construcción ecuaciones de segundo grado. (Lamy, 1685, p. 299) 239
Figura 93. Problema cuya solución no presenta diagrama. (Lamy, 1710, p. 410).. 245
Figura 94. Solución de ecuaciones de segundo grado por progresiones (Lamy, 1710, p. 304)..... 246
Figura 95. Resolución analítica de un problema sin diagrama. (Lamy, 1758. p. 546) 250
Figura 96. Construcción del problema sin diagrama. (Lamy, 1758, p. 637)..... 251
Figura 97. Expresiones de Lamy sobre los problemas indeterminados y determinados. (Lamy, 1758, p. 537) 253
Figura 98. Ecuaciones a partir de proporciones de progresiones geométricas. (p.3) 263
Figura 99. Productos que generan ecuaciones de tercer grado. (p. 67)..... 265
Figura 100. Propiedades del triángulo rectángulo. (p. 499)..... 268
Figura 101. Imagen asociada a las propiedades del triángulo rectángulo. (Reyneau, 1708b, plancha I)..... 268
Figura 102. Tipos de ecuaciones de segundo grado. (p. 503) 269
Figura 103. Problema del cuadrilátero inscrito. (pp. 505-506) 270
Figura 104. Diagrama problema del cuadrilátero inscrito (Reyneau, 1708, Plancha 1) 271
Figura 105. Problema de movimiento. (pp. 512-513) 272

Figura 106. Diagrama problema de movimiento. (Reyneau, 1708b, Anexo) 272

Figura 107. Definición a partir de la solución del problema de las bombas. (p. 515) 273

Figura 108. Diagrama problema de bombas. (Reyneau, 1708b, plancha 1) 273

Figura 109. Construcción de la hipérbola. (Reyneau, 1708, plancha 2) 277

Figura 110. Proceso analítico de la hipérbola. (p. 555)..... 278

Figura 111. Problema de la tangente a un punto de la curva. (pp. 556-557) 279

Figura 112. Problema de la tangente a un punto en la hipérbola. (Reyneau, 1708b, Plancha 2)..... 280

Figura 113. Ecuación de cuarto grado a partir de la parábola y el círculo. (Reyneau, 1708b, Plancha 2)..... 281