



**Argumentos de los estudiantes en problemas con jerarquía de operaciones en contextos
aditivos y multiplicativos**

Presentado por:

Luis Daniel Osorio Morales

1628341-3487

Universidad del valle

Instituto de educación y pedagogía

Área de educación matemática

Licenciatura en matemáticas y física

2021



**Argumentos de los estudiantes en problemas con jerarquía de operaciones en contextos
aditivos y multiplicativos**

Presentado por:

Luis Daniel Osorio Morales

1628341-3487

Dirigido por:

Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal

Universidad del valle

Instituto de educación y pedagogía

Área de educación matemática

Licenciatura en matemáticas y física

2021

Agradecimientos

A mi familia quienes me dieron el apoyo y ayuda para culminar con esta carrera, a mi padre quien me dio las bases necesarias en matemáticas para poder afrontar los retos que se me presentaron.

a mi tutor de tesis por darme una buena guía y darme el apoyo para poder desarrollar este trabajo de la mejor manera.

A mis profesores de matemática del colegio por darme el interés por las matemáticas y haberme guiado en el camino que al final termine tomando.

LUIS DANIEL OSORIO MORALES

Resumen

Este Trabajo está enmarcado bajo el Área de Educación Matemática de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. El objetivo de este trabajo de grado es caracterizar los tipos de razonamientos que emergen en la solución de una actividad diseñada en GeoGebra para una intervención en un aula de grado sexto en la que se involucra la resolución de problemas y la jerarquía de las operaciones.

En el desarrollo del trabajo se exponen algunas investigaciones alrededor de la jerarquía de operaciones (Núñez 2016, Lee 2013, Zazkis 2017) y algunas investigaciones que ahondan en los conceptos de argumentación y razonamiento (Pierce 1956, Toulmin 1984, Planas 2012, Conner 2014, Barraza 2019) con las cuales se plantean las bases necesarias con las que se analizó los resultados obtenidos tras la intervención en el aula.

Para finalizar se realizó un análisis de la intervención en el aula, tomando las respuestas de los estudiantes a las preguntas de una actividad hecha en Geogebra en particular se tomaron los resultados de cuatro estudiantes y por medio de sus respuestas se identificó su estructura argumentativa para buscar indicios del uso de la jerarquía de las operaciones.

Palabras clave: razonamiento, argumentación, educación matemática, jerarquía de operaciones, GeoGebra, bitácora digital.

TABLA DE CONTENIDO

<u>Introducción</u>	<u>9</u>
<u>1. Capítulo 1. Problema de investigación</u>	<u>11</u>
<u>1.1 Antecedentes</u>	<u>11</u>
<u>1.1.1 El papel de la tecnología en la resolución de problemas</u>	<u>11</u>
<u>1.1.2 El uso de calculadoras en el aula</u>	<u>13</u>
<u>1.1.3 Orden de las operaciones y problemas en contextos aditivos y multiplicativos</u>	<u>14</u>
<u>1.1.4 Comprensión de la jerarquía de operaciones</u>	<u>16</u>
<u>1.1.5 Propuesta alrededor del orden de las operaciones</u>	<u>18</u>
<u>1.1.6 Errores en la resolución de problemas con signos de agrupación</u>	<u>20</u>
<u>1.2 Justificación</u>	<u>21</u>
<u>1.3 Formulación del problema</u>	<u>23</u>
<u>1.4 Objetivos</u>	<u>24</u>
<u>1.4.1 Objetivo general</u>	<u>24</u>
<u>1.4.2 Objetivos específicos</u>	<u>24</u>
<u>2. Capítulo 2. MARCO TEÓRICO</u>	<u>26</u>
<u>2.1 Teoría de la argumentación en educación matemática</u>	<u>26</u>
<u>2.1.1 Estructura argumentativa de Toulmin</u>	<u>26</u>
<u>2.1.2 Argumentación en educación matemática</u>	<u>27</u>
<u>2.2 Tipos de razonamientos en investigación en educación matemática</u>	<u>28</u>
<u>2.3 Contextos aditivos y multiplicativos no explícitos</u>	<u>30</u>
<u>3. Capítulo 3. METODOLOGÍA</u>	<u>32</u>
<u>3.1 Instrumentos</u>	<u>32</u>
<u>3.1.1 Bitácora digital</u>	<u>32</u>
<u>3.1.2 Intervención en el aula</u>	<u>33</u>

<u>3.1.3 Preguntas complementarias en la actividad</u>	<u>35</u>
<u>3.2 Aplicación de instrumentos</u>	<u>35</u>
<u>3.2.1 investigación cualitativa: Estudio de casos múltiples</u>	<u>35</u>
<u>3.2.2 Aplicación de la intervención en la clase</u>	<u>36</u>
<u>3.2.3 Aplicación de las preguntas complementarias</u>	<u>37</u>
<u>3.3 Alcances y limitaciones</u>	<u>37</u>
<u>4. Capítulo 4. Análisis</u>	<u>38</u>
<u>4.1 Análisis de los resultados</u>	<u>38</u>
<u>4.1.1 Fase 1: Motivación</u>	<u>39</u>
<u>4.1.2 Fase 2: Durante Clase</u>	<u>43</u>
<u>4.1.3 Fase 3: Actividad Reto</u>	<u>47</u>
<u>4.2 Argumentación global por estudiante</u>	<u>51</u>
<u>5. Conclusiones</u>	<u>56</u>
<u>Anexos</u>	<u>60</u>
<u>Bibliografía</u>	<u>84</u>

Tabla de Figuras

<u>Figura 1: Elementos de la argumentación y el razonamiento Conner (2014).</u>	<u>29</u>
<u>Figura 2: Tipos de argumentos basados en los tipos de razonamiento.</u>	<u>30</u>

Lista de Tablas

<u>Tabla 1. Estructura del argumento de E1 en la Fase 1: Motivación.</u>	<u>40</u>
<u>Tabla 2. Estructura del argumento de E2 en la Fase 1: Motivación.</u>	<u>41</u>
<u>Tabla 3. Estructura del argumento de E3 en la Fase 1: Motivación.</u>	<u>42</u>
<u>Tabla 4. Estructura del argumento de E4 en la Fase 1: Motivación.</u>	<u>43</u>
<u>Tabla 5. Estructura del argumento de E1 en la Fase 2: Durante Clase.</u>	<u>44</u>
<u>Tabla 6. Estructura del argumento de E1 en la Fase 2: Durante Clase.</u>	<u>45</u>
<u>Tabla 7. Estructura del argumento de E3 en la Fase 2: Durante Clase.</u>	<u>46</u>
<u>Tabla 8. Estructura del argumento de E4 en la Fase 2: Durante Clase.</u>	<u>47</u>
<u>Tabla 9. Estructura del argumento de E1 en la Fase 3: Actividad Reto.</u>	<u>48</u>
<u>Tabla 10. Estructura del argumento de E2 en la Fase 3: Actividad Reto.</u>	<u>49</u>
<u>Tabla 11. Estructura del argumento de E3 en la Fase 3: Actividad Reto.</u>	<u>50</u>
<u>Tabla 12. Estructura del argumento de E4 en la Fase 3: Actividad Reto.</u>	<u>51</u>

Tabla de anexos

<u>Anexo 1: Bitácora digital</u>	<u>60</u>
<u>Anexo 2: Transcripción de la transcripción en clase</u>	<u>61</u>
<u>Anexo 3: Respuestas a la actividad</u>	<u>70</u>
<u>Anexo 4: Aplets de Geogebra</u>	<u>81</u>

INTRODUCCIÓN

La presente investigación aborda aspectos de las problemáticas alrededor de la jerarquía de las operaciones, en el que se involucraron conceptos como el orden de las operaciones, la resolución de problemas y el uso de tecnologías en dichos problemas. Por lo que para profundizar en dichos procesos se ahonda en la teoría alrededor del razonamiento y argumentos para involucrarlo dentro de la educación matemática en el aula de clase.

La característica principal de esta investigación radica en caracterizar los tipos de razonamientos de los estudiantes, por medio de una actividad diseñada en Geogebra utilizando el instrumento de aprendizaje de bitácora digital de Santos Trigo (2020) en la que se trabaja con tres fases, que cada una se desarrolla en los estudiantes una estructura de razonamiento bajo la teoría de Conner (2014).

También cabe mencionar que el trabajo se divide en 5 capítulos:

- En el capítulo 1, se abordan los antecedentes y la formulación del problema en el que se hace una revisión a la literatura en la que diversos autores hacen sus aportes alrededor de la problemática planteada.
- En el capítulo 2, se presenta el marco teórico utilizado en la investigación, en el que se presentara toda la teoría alrededor del razonamiento y argumentación tomando como principal referente a Toulmin 1984 y Conner 2014.
- En el capítulo 3, se explica la metodología utilizada para llegar al objetivo planteado en la investigación y se mencionara en mayor profundidad la teoría alrededor del estudio de casos, y la intervención en el aula.
- En el capítulo 4, se dedica a mostrar los resultados de la actividad y realizar el respectivo análisis, tomando a cuatro estudiantes e identificando sus estructuras de razonamiento a la hora de la resolver la actividad antes planteada en la metodología.

- Finalmente, en el capítulo 5 se presentarán la discusión de los resultados de la investigación, las conclusiones, así como los alcances y limitaciones de la misma.

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes

En años recientes ha surgido un interés de muchos investigadores en lo relacionado a estudiar el uso de las tecnologías en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, estos se han centrado principalmente en la educación básica donde una de las ramas particulares de estudio es la de problemas en contextos aditivos y multiplicativos. (Becerra, 2013; Murillo, 2018; Núñez, 2016; Lee, 2013; Zazkis, 2017; López, 2017) Es así que con el fin de mejorar la manera en la que se presentan los conceptos alrededor de estos, los investigadores han identificado diversas dificultades en la resolución de problemas en contextos aditivos y multiplicativos, además una de las cosas que más inquietan giran en torno a los problemas matemáticos y la jerarquía de operaciones. Entendiendo la resolución de problemas como se presenta en la recopilación hecha por Voskoglou (2008) en la cual se entiende, teniendo como base un problema que tiene que ser resuelto y para esto hay que tener un buen conocimiento del problema, y así poder crear esquemas que permitan generar estrategias para su solución.

1.1.1 El papel de la tecnología en la resolución de problemas

Las herramientas tecnológicas han sido un medio a través del cual los profesores en educación matemática han presentado estos problemas, uno de los autores que plantea esto es Becerra (2013) el cual hace una revisión conceptual en el uso de las herramientas tecnológicas en la educación matemática hablando de las ventajas que están traen, las implicaciones, y las maneras en que cambian la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este hace un breve recorrido histórico de las investigaciones que se han hecho alrededor del uso de herramientas tecnológicas, de lo que se destaca cómo los avances tecnológicos han cambiado la manera en que se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje,

destacando la propuesta de que estas pueden mejorar sustancialmente la educación matemática.

Es entonces que se hace necesario pensar en herramientas digitales más potentes las cuales faciliten la enseñanza y el aprendizaje por medio de entornos que permita una mejor visualización y modelación de situaciones matemáticas. Es así que se posibilita el acceso a nuevos modelos y nuevas formas de pensar las matemáticas que antes no eran posibles sin el uso de las facilidades que brinda las nuevas tecnologías, Es en este sentido donde Becerra (2013) explica que la actividad de hacer matemáticas debe tratarse en última medida de realizar cálculos, por el contrario se debe centrar en realizar conjeturas, intentar probarlas y modelar situaciones matemáticas, mientras que las herramientas tecnológicas se deben encargar de hacer los cálculos numéricos más elementales permitiéndole a los estudiantes centrarse en la actividad matemática antes mencionada, lo cual implica que en la educación se exige un nuevo planteamiento con nuevos retos pero con una mayor ventaja.

Es así que Becerra (2013) hace la aclaración de que las nuevas tecnologías no deben ser utilizadas como un reemplazo de la comprensión básica y de la intuición de los estudiantes, más bien estas deben utilizarse para fomentar y fortalecerlas, se trata de que los estudiantes puedan aprender más matemáticas y de una mejor manera y para esto se plantea el uso de herramientas tecnológicas como una estrategia didáctica para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Es así que la propuesta de Becerra (2013) presenta una serie de aspectos que permitirán integrar los TICs en el proceso de enseñanza y aprendizaje: 1) disponer de la capacidad básica de usarlas 2) preparar estrategias pedagógicas que permitan disponer de toda la potencia de las TICs como herramientas en el aprendizaje de los estudiantes y 3) desarrollar la integración de las TICs cada vez mejor en su proceso de enseñanza. A manera de conclusión se destaca cómo las nuevas herramientas tecnológicas abren la posibilidad de

profundizar más en las prácticas de enseñanza y que si estas herramientas tecnológicas están al alcance de todos es pertinente que se sepa cómo incorporar en la enseñanza de las matemáticas.

1.1.2 El uso de calculadoras en el aula

En adición a lo anterior al considerar la importancia del uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, sale a relucir una nueva cuestión sobre el uso adecuado de las herramientas tecnológicas en el aula de clase, es así que se hace pertinente resaltar la investigación de Murillo (2018) el cual presenta una propuesta sobre el uso adecuado de la calculadora. dicha propuesta está hecha con un marco de resolución de problemas el cual hace énfasis en un proceso de cuatro etapas. Etapa uno: comprender el problema, se explica que en esta etapa se debe interpretar el problema para tener claro los datos, las incógnitas y las condiciones del problema. Etapa dos: trazar un plan, aquí se debe trazar el camino y buscar diferentes medios para resolver el problema. Etapa tres: ejecutar el plan, etapa donde se toma el plan trazado anteriormente y se lleva a cabo hasta encontrar la solución. Etapa cuatro: visión retrospectiva, una vez resuelto el problema se inicia un nuevo proceso en el que se reflexiona sobre la solución obtenida, se verifican los resultados y se busca explorar por caminos más cortos para resolver el problema.

Sobre el uso adecuado de la calculadora en el aula de clase, se destaca que es inevitable que los estudiantes las usen de manera frecuente ya que son objetos de uso cotidiano, por lo que es necesario pensar en cómo dar un buen uso en el aula de clase para que sirvan de manera auxiliar sin que los estudiantes terminen dependientes de estas, no se trata a la calculadora como la solución a todos los problemas y dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, más bien la calculadora puede ser una herramienta tener una mayor utilidad si se sabe aprovechar las ventajas que da usar herramientas tecnológicas que permitan agilizar el trabajo ahorrando cálculos elementales y cuidándose de sus debilidades

como algún tipo dependencia y entender que por sí solas estas no pueden dar una clase de matemáticas. Para aprovechar el uso de las calculadoras se decide clasificar por los distintos tipos que existen ya que cada uno está diseñado para realizar ciertos cálculos que las otras no, estas varían dependiendo de las funcionalidades que tengan, entre las que encontramos, por un lado: Calculadoras de cuatro reglas, las cuales se explica que son las que solo tienen las cuatro operaciones básicas y la raíz cuadrada. También se tiene las Calculadoras no jerárquicas, que no es capaz de reconocer la jerarquía de las operaciones por ejemplo al realizar la operación $5 \times 4 + 7$ o $7 + 5 \times 4$ darán cada una un resultado distinto. Calculadoras jerárquicas, distintas a las anteriores son capaces de reconocer la jerarquía de operaciones. Murillo (2018).

En la investigación se usa el tipo de calculadoras de cuatro reglas, durante la cual presentaron a un grupo de estudiantes una actividad en la que había ejercicios que podrían necesitar la ayuda de una calculadora. Murillo (2018) explica que durante el desarrollo de la actividad se vieron los siguientes resultados. En la etapa uno se aseguró de que la actividad fuera clara para los estudiantes y fuera fácil de entender, en la etapa dos se destacó que el 98% de los estudiantes planearon realizar el mismo proceso para resolver el problema, es decir los estudiantes descompusieron el problema en problemas más pequeños en los que se hiciera uso de la calculadora de cuatro reglas. En la etapa tres, los estudiantes abordaron el plan de la etapa dos y por medio de este lograron tener los resultados esperados. Y por último en la etapa cuatro de visión retrospectiva destacan que solo el 6.89% de los estudiantes verificaron sus respuestas.

1.1.3 Orden de las operaciones y problemas en contextos aditivos y multiplicativos

En lo referente a investigaciones alrededor de la comprensión del orden de las operaciones en problemas en contextos aditivos y multiplicativos está la investigación de Nuñez (2016). Esta se centra en aplicar una herramienta didáctica para ayudar a estudiantes

de nivel universitario por medio de una serie de actividades en las que además se estudia el uso que le dan a la calculadora para resolverlos. En dicha investigación se destaca que la jerarquía de operaciones y el uso de signos de agrupación es fundamental para desenvolverse en los estudios universitarios donde es necesario saber aritmética para resolver ecuaciones algebraicas y dan de ejemplo una fórmula de estadística sobre medidas de posición y variación para datos agrupados que permite calcular la mediana de la distribución de datos en la que destacan que la mayoría de estudiantes la resuelven sin seguir el orden adecuado, de manera adicional se propuso estudiar el uso que le dieran a la calculadora para realizar la actividad. La cual consistió en un problema con un contexto aditivo y multiplicativo que los participantes debían tratar de resolver, la pregunta decía que una persona había decidido comprar una cantidad de aparatos tecnológicos en una cierta cantidad, en dicha pregunta los estudiantes que participaron debían calcular cuánto había gastado la persona en el problema además de expresar una fórmula matemática que representara el problema, y también debían hacer un registro de todos los cálculos que hicieran con la calculadora.

El análisis de los resultados fue basado en la teoría de situaciones didácticas que resalta las interacciones entre el alumno, el profesor y el saber, lo cual fue muy fructífero para el tipo de actividad que se realizó en la investigación. Nuñez (2016) presenta dentro de su marco la teórica de situaciones didácticas la cual usara presenta las cuatro situaciones. *De acción*, donde el estudiante actúa sobre un medio aplicando conocimientos previos. *De formulación*, un estudiante o grupo de estudiantes llamados emisor deben formular un mensaje destinado a otro grupo de estudiantes denominado receptor con la intención que trabajen en grupo y compartan experiencias. *De validación*, donde dos o más grupos de estudiantes deben discutir y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de sus afirmaciones. *De institucionalización* donde se intenta que el grupo de estudiantes asuma el significado socialmente establecido de un saber.

La actividad fue realizada con 15 participantes de segundo semestre en el Instituto Tecnológico superior de Juarez, los estudiantes se repartieron en 5 grupos y entre los elementos a destacar, la mayoría no pensó el ejercicio como una sola expresión matemática, sino que más bien fueron haciendo poco a poco las sumas y multiplicaciones que el ejercicio pedía sin embargo solo un equipo de los cinco logro escribir de manera correcta la expresión matemática usando de manera adecuada todos los paréntesis se les pidió realizarlo en la actividad, mientras que los demás equipos escribieron fórmulas donde no se expresaba de manera correcta la jerarquía. Además, una vez todos los equipos entregaron la actividad la profesora a cargo escogió a propósito el ejercicio del equipo 1 que lo resolvió de manera incorrecta para que de esta manera los distintos equipos discutieron sobre este, y lograrán ayudar al equipo 1 a encontrar sus errores como en la situación didáctica de validación.

Sobre el uso de la calculadora la mayoría de los equipos la utilizaron solo para realizar operaciones básicas, esto en parte porque como se mencionó previamente en un principio ningún grupo planteó el problema con una sola expresión algebraica. Núñez (2016) concluye que es posible guiar a los estudiantes de tal manera que construyan su propio conocimiento enfrentándose a problemas propuesto con la guía del profesor. Además, lograron que la mayoría de los estudiantes reflexionaran sobre la jerarquía de operaciones para así evitar errores en el resultado final. También destacan que al aplicar esta estrategia de enseñanza mostraron que los estudiantes aprendieron de manera diferente al intentar defender sus ideas entre ellos.

1.1.4 Comprensión de la jerarquía de operaciones

También está la investigación de Lee (2013) sobre la jerarquía de operaciones trabajada alrededor de una mnemotecnica bastante común en el idioma inglés conocida como PEMDAS “**P**lease **E**xcuse **M**y **D**ear **A**unt **S**ally” cuyas siglas representan el orden en que deben realizarse las operaciones matemáticas. **P**aréntesis, **E**xponentes, **M**ultiplicación, **D**ivisión,

Adición y Sustracción. Se menciona que es bastante común que muchos estudiantes cometan errores al utilizar esta nemotecnia al pie de la letra porque así se ignoran la otra regla de la jerarquía de operaciones la cual dice que para operaciones de con la misma jerarquía es decir multiplicaciones y divisiones, o sumas y restas, se debe resolver de izquierda a derecha. Para entender el origen de este conjunto de reglas se hace un pequeño recorrido histórico para el cual se toma a en que los autores concluyen que fue alrededor del año 1600 cuando se llegó al acuerdo que la multiplicación precede a la adición. y, un par de siglos después en el siglo XX fue cuando surgió la disputa de si la multiplicación también debería preceder a la división concluyendo que deben tener la misma jerarquía, por lo cual queda claro que el actual orden de operaciones fue decidido recientemente en esta era.

Para solucionar las dificultades alrededor de la comprensión de la jerarquía de operaciones el autor propone un modelo de “reorganización de expresiones numéricas”. Este permite conectar algoritmos básicos de matemáticas dotando a los estudiantes de una oportunidad para entender el PEMDAS con razonamiento matemático recordando que la adición y la multiplicación son conmutativas y asociativas, para se da un ejemplo donde demuestran que con este proceso tratan que las multiplicaciones queden más a la izquierda y las divisiones más a la derecha además del mismo modo se puede reorganizar las sumas y restas. así después de reorganizar las expresiones matemáticas los estudiantes pueden usar el orden de PEMDAS al pie de la letra en lugar de usar la regla “izquierda a derecha” de este modo al reorganizar las expresiones siempre estará en el orden multiplicación y división o suma y resta.

Para poner en práctica su propuesta reorganización de expresiones algebraicas presentan un experimento con dos grupos, el grupo de control donde se enseña la jerarquía de operaciones de manera tradicional y el grupo experimental donde se hace utilizando el modelo de “reorganización de expresiones numéricas”, para luego comparar el resultado de

ambos grupos, el estudio consistió en hacer un test previo y un test al terminar además para los dos grupos del experimento utilizando el modelo ANCOVA (*analysis of covariance*). De los resultados destacan que en ambos grupos el 95% de los estudiantes no simplificaron correctamente en el examen previo, mientras que en examen final más del 50% del grupo experimental resolvió de manera adecuada las expresiones usando la “reorganización de expresiones numéricas” por lo que Lee (2013) concluyen que se puede simplificar expresiones numéricas sin usar la regla siempre y cuando se use la reorganización.

1.1.5 Propuesta alrededor del orden de las operaciones

Otra investigación con una propuesta interesante es la de Zazkis (2017) que se centran alrededor de la prioridad que tiene la multiplicación y la división afirmando que, en el orden de las operaciones, la división debería preceder a la multiplicación, dicha afirmación la va aclarando a lo largo de su investigación. En primer lugar, se deja claro que para eliminar la confusión alrededor del orden de las operaciones la comunidad matemática llegó al acuerdo de que la multiplicación y la división deben preceder a la suma, cosa que no es arbitrario ya que se puede probar fácilmente con el siguiente ejemplo $2+5+5+5+5$ el cual reescrito como $2+4 \times 5$ se hace evidente que la multiplicación debe preceder a la suma ya que ambas expresiones deben dar el mismo resultado.

De manera adicional se mencionan muy brevemente el cómo las calculadoras afectan a la hora de realizar operaciones aritméticas destacando que si se escriben expresiones $2+3 \times 5$ la calculadora dará un resultado distinto dependiendo si es del tipo de calculadora programada para tener en cuenta la jerarquía de operaciones por lo que aquí resaltan que los errores a la hora de resolver múltiples operaciones son bastantes comunes y el hecho de que las calculadoras sean herramientas de uso frecuente y estas puedan cometer errores puede mostrar que hay grandes dificultades con lo que respecta a la jerarquía de operaciones. Al igual que Lee (2013) destacan que parte de las dificultades alrededor del orden de las

operaciones surgen de tomar al pie de la letra las reglas de la jerarquía de operaciones al ignorar la regla de izquierda a derecha, y Zazkis (2017) propone como solución a esto que la división preceda a la multiplicación ya que esto no repercute en un resultado erróneo es decir si se precede la división sobre la multiplicación se obtiene el mismo resultado que si se sigue la regla de resolver de izquierda a derecha, esto se explica con el hecho de que la división se puede ver como una multiplicación por el opuesto multiplicativo del número en cuestión, por ejemplo $10 \times 6 \div 2 = 10 \times 6 \times \frac{1}{2} = (10 \times 6) \times \frac{1}{2} = 10 \times (6 \times \frac{1}{2})$

En su propuesta de investigación se constó con 22 estudiantes aspirantes a licenciados de educación primaria, y un cuestionario con una primera parte en la cual se presentaron varios ejercicios. Entre estos se pueden presentar como por ejemplo “ $60 \div 5 \times 2$ ” o “ $10 \times 4 \div 2$ ” o incluso “ $100 \div 10 \div 2$ ” en estos ejercicios hay combinaciones de multiplicaciones y divisiones y una segunda parte con un cuestionario que preguntaba cuál opinión les parecía la correcta sobre la jerarquía de operaciones y las opciones a esta pregunta eran: la multiplicación debía preceder a la división, “la división debía preceder a la multiplicación”, “resolver de izquierda a derecha”, o “no importa el orden en que se resuelvan siempre que haya multiplicaciones y divisiones”. Por lo que al final de la investigación los autores sugieren que el orden en el que se expresa la jerarquía de operaciones debía ser cambiada a paréntesis, exponentes, división, multiplicación, suma y resta.

En el análisis de los datos se vio que en la primera parte que la mayoría comete bastantes errores a la hora de resolver los ejercicios y en la segunda encuesta la mayoría respondió que la división debía preceder a la multiplicación pero esto se contradijo con lo que dijeron más adelante los estudiantes durante la socialización ya que aquí la mayoría parecía estar de acuerdo en que la multiplicación precedía la división u otros también afirmaban que se debía seguir el orden de izquierda a derecha siendo que en la encuesta para estas dos opciones la mayoría respondió negaba esto. Mostrando una discrepancia entre lo que afirman

y lo que resolvían en la encuesta. No obstante, mientras avanzaba la discusión de los ejercicios y los estudiantes iban viendo los errores que se cometieron en la primera parte del cuestionario fueron cambiando de opción y muchos terminaron afirmando que efectivamente la división debía preceder a la multiplicación.

1.1.6 Errores en la resolución de problemas con signos de agrupación

En cuanto a investigaciones que involucren problemas de adicción y multiplicación se encuentra López (2017) quien presentó una propuesta centrada en la comprensión lectora de los estudiantes. Con la ayuda de Symbolab resuelve problemas en los que se vieran implicadas adiciones, multiplicaciones y los signos de agrupación, esta propuesta se implementó por medio de una secuencia en la que se proponía identificar los errores que los estudiantes cometen y con esto buscar su origen lo que permitiría plantear estrategias dirigidas a superarlos, además de tratar de orientar el desarrollo de competencias matemáticas.

La secuencia que se implementó consistió en una serie de actividades separadas en tres partes en la que en cada una se enfatizaban en el uso de los signos de agrupación, y los estudiantes debían leer los ejercicios, interpretarlos e intentar resolverlos. Por ejemplo, en la primera parte se tenían expresiones aritméticas con múltiples operaciones y debían resolverlas, obteniendo resultados muy dispares entre sí, en la segunda parte tenían expresiones con resultados erróneos y debían intentar corregir la expresión cambiando alguna de sus partes y en la tercera había polinomios que debían resolver. López (2017) al analizar las respuestas y lo que explicaban los estudiantes se encontró que una de las dificultades más comunes fue la falta de verificación de los resultados, además de que también la mayoría expresaban no comprender la situación expresada en la actividad. También se encontró entre los errores, un uso incorrecto de los paréntesis, confusiones entre la multiplicación de las potencias y en general un mal uso de la jerarquía de operaciones. López (2017) considera que

estos errores y dificultades se deben a cuestiones que han quedado sin resolver conceptualmente.

Respecto a la herramienta que se utilizó para la propuesta, aclaran que por sí sola no puede enseñar a los estudiantes conceptos y habilidades matemáticas, es solo un medio con el que el profesor puede desarrollar en los estudiantes conocimiento matemático. Lo importante a destacar sobre este tipo de herramientas tecnológicas es el hecho que dentro del aula de clase pueden incentivar al estudiante a la hora de realizar las actividades y esto es algo que notaron dentro de la realización de la actividad pese a los errores cometidos por las razones mencionadas previamente se mostró un interés por parte de los estudiantes por querer aprender.

1.2 Justificación

Durante los años de escolaridad Básica es bastante común que la mayoría de estudiantes tengan dificultades cuando se enfrentan a problemas en contextos aditivos y multiplicativos, Ceneida (2011) destacan que muchas dificultades surgen debido a ciertas conexiones que hay entre ambas estructuras haciendo que algunos estudiantes abusen de algoritmos aditivos en contextos de proporcionalidad por lo que se puede pensar que hay una dificultad en cómo entienden estos problemas. Al buscar investigaciones que se centren en estas dificultades podemos encontrar que las investigaciones focalizan la problemática en el conjunto de reglas de propiedades aditivas y multiplicativas, sobre lo que autores como Lee (2013) estudia las problemáticas relacionadas con la jerarquía de operaciones. En este conjunto de reglas parece haber un conflicto entre dicha temática y el cómo los estudiantes las entienden a la hora de resolver problemáticas que involucren contextos aditivos y multiplicativos.

La problemática alrededor de este tipo de temáticas se hace más pertinente al inspeccionar documentos que los justifican, como por ejemplo tenemos el caso de los Estándares Básicos de Competencias MEN (2006) en el cual se dedica un apartado a

problemas para grado sexto y séptimo, afirmando que los estudiantes en estos años de escolaridad deben adquirir competencias lo cual se expresan con los siguientes estándares:

“Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones; Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos” (MEN, 2006, P.84). Estos estándares sintetizan la idea de trabajar los problemas que se plantean aquí, además de pensar alrededor de los procedimientos aritméticos. En particular estos estándares muestran otra cuestión a destacar y es lo que se conocen como los cómo los cinco procesos generales de la actividad matemática:

- *Formular y resolver problemas*
- *Modelar procesos y fenómenos de la realidad*
- *Comunicar*
- *Razonar*
- *Formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos*

De estos se resaltan el de comunicar y razonar, los cuales expresan la necesidad de que los estudiantes sean capaces de comunicar sus ideas y de razonar alrededor de estas lo que esto lleva a pensar sobre los argumentos, de hecho, en el mismo MEN (2006) se presenta la idea de las competencias que deben tener toda persona para desarrollarse en la vida adulta, por lo que los estudiantes deben desarrollarlas en las clases de matemáticas. Entre estas competencias destacan la capacidad de conjeturar, de refutar, y más concretamente de evidenciar sus argumentos con los cuales expresan su razonamiento.

Sobre la argumentación se tiene la investigación de Barraza (2020) en la cual se estudió la forma en la que los estudiantes razonan y así identificar los diferentes tipos de argumentos, además fueron el medio por el cual se logró evidenciar la relación entre los distintos enfoques de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. otro autor que profundiza en esta idea es Llinares (2012) el cual también destaca la importancia de estudiar los argumentos por ser el

medio por el cual los estudiantes discuten sus ideas y se pone en evidencia los aspectos más relevantes de la enseñanza en cuestión además de que se ven obligados realizar algún tipo de razonamiento y de este modo por medio de los argumentos pulir las garantías con las cuales apoyan sus conclusiones teniendo como uno de los referentes la propuesta de Toulmin (1984) para la argumentación.

1.3 Formulación del problema

La revisión de la literatura ha mostrado que alrededor de los problemas en contextos aditivos y multiplicativos hay ciertas dificultades por parte de los estudiantes principalmente debido a una confusión a la hora de entender el funcionamiento de las propiedades implicadas en la resolución del orden de las operaciones. Dentro de estos problemas en contextos aditivos y multiplicativos dicta que las operaciones se deben resolver en el orden multiplicación, división, suma y resta, teniendo claro que se ha llegado al acuerdo que la multiplicación y la división tienen el mismo nivel de jerarquía al igual que la suma y la resta y debido a esto, cuando hay expresiones matemáticas que tienen combinaciones de operaciones con igual jerarquía se deben resolver de izquierda a derecha. Teniendo en cuenta algunas investigaciones como Núñez (2016), Zazkis (2017) se observa que pese a tener este conjunto de reglas disponibles, siguen surgiendo dificultades por parte de algunos estudiantes para resolver múltiples operaciones principalmente en lo que respecta a las estructuras aditivas y multiplicativas, cada uno de los autores mencionan evidencian que la falla está en que no todos los estudiantes relacionan por completo el conjunto de reglas, haciendo que a la hora de enfrentarse problemas en contextos aditivos y multiplicativos, estos no se puedan resolver de manera adecuada.

Teniendo esto presente es pertinente pensar en maneras de llevar esta problemática. Es en este sentido que investigaciones como la de Llinares (2012) se vuelve relevante al destacar la importancia de los argumentos como un medio para identificar lo que los estudiantes

entienden sobre un concepto matemático idea que se refuerza con la propuesta de Conner (2014) el cual afirma que por medio de los argumentos podemos identificar los tipos de razonamientos que emergen de los estudiantes en una actividad matemática, y para el caso de esta propuesta pensar en cómo los argumentos de los estudiantes en problemas aditivos y multiplicativos permiten evidenciar la manera en la que entienden estos conceptos.

De manera adicional se tiene la propuesta de Fernández (2007) el cual habla de la importancia de las tecnologías en el aula de clase, gracias a su eficiencia para realizar cálculos de manera instantánea. Es así que su uso permite cambiar el énfasis de la clase, en vez de centrarse en aprender a resolver operaciones básicas de manera mecánica, es mejor que los estudiantes sepan los que están haciendo, y así dejarles los cálculos triviales a las calculadoras, por lo que pensando en estos elementos y los expuestos anteriormente se muestra como el interés de este trabajo es responder la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué razonamientos emergen en la solución de una actividad diseñada en GeoGebra que involucra la resolución de problemas con situaciones en contexto y jerarquía de operaciones?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Caracterizar los tipos de razonamientos que emergen en la solución de una actividad diseñada en GeoGebra que involucra la resolución de problemas y la jerarquía de las operaciones.

1.4.2 Objetivos específicos

1. Examinar la literatura alrededor de la resolución de problemas y la jerarquía de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos para construir una noción de las propiedades matemáticas que conforman dichas operaciones matemáticas.

2. Relacionar los argumentos de los estudiantes con su actividad matemática, por medio de la construcción de una actividad encaminada a resolver problemas con situaciones no explícitas alrededor la jerarquía de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos.
3. Clasificar los distintos tipos de argumentos de los estudiantes alrededor de una tarea que involucra resolución de problemas no explícitos y la jerarquía de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos para comprender la manera en la que entienden dicha actividad.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Como se ha venido mencionando en páginas anteriores, el interés de este trabajo investigativo está orientado en identificar los tipos de razonamientos que emergen en los estudiantes al enfrentarse a problemas que involucren la jerarquía de operaciones en contextos aditivos y multiplicativos no explícitos, y para esto se ha elegido la teoría de Toulmin (1984) en la que se define argumento, argumentación y razonamiento, cuya distinción es de relevancia para las bases de esta investigación.

Por lo tanto, en este capítulo se presentará principalmente la teoría de Toulmin (1984) en donde presenta un esquema argumentativo el cual será la base para identificar los argumentos a partir de una serie de elementos los cuales van a conformar su estructura argumentativa, que permite identificar los tipos de razonamientos emergentes. Es así entonces que se presentará la propuesta de Conner (2014) en la que se aplica la teoría de Toulmin para distinguir los distintos tipos de razonamientos para posteriormente presentar el uso de este marco dentro de la investigación.

2.1 Teoría de la argumentación en educación matemática

2.1.1 Estructura argumentativa de Toulmin

En la investigación de Toulmin. (1984) se relacionan tres conceptos importantes: Argumentación, Razonamiento y Argumento. Siendo estas actividades parte de una misma estructura la cual se presenta en su marco argumentativo, es así que Toulmin las define de la siguiente manera Argumentación: “se utilizará para referirse a toda la actividad de hacer aserciones, desafiarlas, respaldarlas produciendo razones, criticando esas razones, refutando esas críticas, etc.”. Razonamiento: “la actividad central de presentar las razones en apoyo de una aserción, a fin de mostrar cómo esas razones logran dar fuerza a la aserción”. Y por último Argumento: “cadena de razonamiento, es la secuencia de aserciones y razones interconectadas que, entre ellas, establecen el contenido y la fuerza de la posición por la que

un hablante en particular está argumentando”. Dicho de otro modo, Toulmin (1984) define la argumentación, el razonamiento y los argumentos como parte de una estructura donde la argumentación es el conjunto universal dentro del cual se encuentran los argumentos y dentro de estos últimos están los razonamientos. Así la actividad de hacer y producir aserciones se hace dentro de este conjunto universal de la argumentación, presentando una secuencia de aserciones siguiendo una cadena que le da fuerza a una afirmación presentada por un hablante durante una argumentación

Es así que se evidencian ciertos elementos comunes que permiten describir la estructura argumentativa según la cual Toulmin (1984) afirma que todo razonamiento no formal o formal se puede estudiar desde la unión de ciertos elementos que son. *Dato*, *Garantía*, *SopORTE*, *Refutación*, *Calificativo modal*, y *Aserción* los cuales conforman la estructura argumentativa completa de Toulmin. Pero para el caso de esta investigación se hará uso del núcleo del esquema de Toulmin en el que se encuentra en los tres elementos principales de *Dato*: la evidencia que se cita para respaldar una aserción, *Garantía*: tiene el rol de conectar los datos con la aserción y por último la *Aserción*: es la afirmación a la que llega el argumentador, con esta estructura argumentativa se pueden estructurar y estudiar todo tipo de razonamiento, ya que se basa en lo que llama datos que dan las premisas o las bases para el argumento y es por medio de la garantía que estas se conectan y permiten al interlocutor a llegar a una aserción a una conclusión basándose en los datos y las garantías.

2.1.2 Argumentación en educación matemática

Con lo se ha mencionado anteriormente, el modelo argumentativo de Toulmin permite la formulación de una estructura argumentativa además esta se puede ser usada en la educación matemática, entonces que se hace pertinente saber cómo tomar dicho modelo y aplicarlo a la misma, es así que surgen investigaciones como la propuesta de Planas (2012) la cual hacen alusión a la noción de competencia argumentativa para referirse a la capacidad de crear

argumentos alrededor de las matemáticas usando el modelo de Toulmin, dicha noción la definen de la siguiente manera “entendemos por competencia argumentativa la capacidad en construcción de comprender y producir textos (orales y escritos) con componentes descriptivas, narrativas, explicativas, argumentativas y justificarlas” Planas (2012). Es en esta competencia argumentativa que se hace la actividad de argumentar en matemática por que como las autoras muestran en su propuesta al tener en cuenta estas actividades de la competencia argumentativa es cuando se pueden crear textos argumentativos de nociones matemáticas siguiendo la estructura de razonamiento, argumento y argumentación de Toulmin (1984).

También surgen propuestas como la que se encuentra en la investigación de Barraza (2019) en la que se utiliza el modelo argumentativo de Toulmin para el desarrollo de argumentación colectiva en el aula de en dicha propuesta la cual se habla de la forma en la que en un salón de clase se puede construir una argumentación basada en las interacciones y las distintas participaciones de los estudiantes. partiendo de una premisa presentada por el profesor, el cual guía la discusión y los estudiantes van dando argumentos y razonando presentando *garantías*, siguiendo el modelo presentado por Conner (2014) para al final los estudiantes por medio de la discusión ellos mismos llegan a la *aserción*. Por lo que Barraza (2019) presenta una propuesta adecuada para identificar una forma de argumentación que presentan los estudiantes basados en las interacciones entre estos, la cual puede ser usada para identificar el tipo de argumentación que se va formando colectivamente en el aula de clase.

2.2 Tipos de razonamientos en investigación en educación matemática

Tomando como base la teoría alrededor de la argumentación de Toulmin el cual permite construir y organizar argumentos, por medio de su estructura de datos, garantía y aserción, Conner (2014) reconoce que esta estructura es insuficiente para reconocer las diferencias

entre distintos tipos de razonamientos por lo que la integra con otra propuesta sobre los elementos del razonamiento hecha por Pierce (1956) el cual presenta una estructura caso regla y resultado la cual se puede hacer una relación con la propuesta por Toulmin(1984) (Ver figura 1).

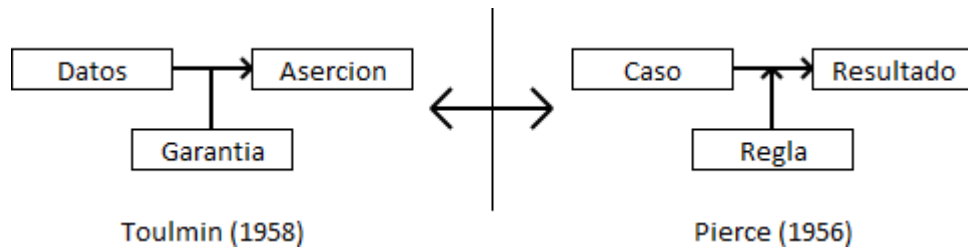


Figura 1: Elementos de la argumentación y el razonamiento Conner (2014)

Así Conner (2014) define los tipos de razonamientos teniendo como base las dos propuestas de estructura argumentativa y razonamiento. Por un lado, toma los elementos de Caso, Regla y Resultado propuestos por Pierce (1956) los cuales define de la siguiente manera. *Caso* se trata de “una observación específica de que se cumple una condición” (p. 83), entendiendo condición como asociación entre dos cosas. *Regla* siendo “una proposición que establece que, si ocurre una condición, también ocurrirá otra” mientras que *Resultado* es una “una observación que mantiene una condición relacionada con otra condición o por una regla” y sobre estos tres elementos es necesario destacar una diferencia sustancial entre caso y resultado, ya que mientras el segundo requiere una cadena lógica de deducción el primero no. además, Conner (2014) toma los elementos mencionados anteriormente de dato, garantía y aserción; y con estos elementos en mente se pueden definir los siguientes tipos de razonamiento. *Razonamiento deductivo* como la construcción de conclusiones o aserciones resultado de consecuencias lógicas, supuestos o premisas previamente establecidas, al contrario del *Razonamiento inductivo* el cual se trata de construir conjeturas basadas en generalizaciones de casos particulares. por otro lado, el *Razonamiento abductivo* se basa en proceso de razonamientos contrarios al deductivo, es decir se razona de adelante hacia atrás donde se parte de la conclusión y se llega a una hipótesis, este se puede formar de dos

maneras, partiendo de los resultados infiriendo un caso en base a una regla. O partiendo de una regla se infiere un caso fundamentado desde los resultados. Y por último el

Razonamiento por analogía recae en la construcción de una conclusión basada en observar similitudes entre casos correspondientes.

Todos estos tipos de razonamientos según Conner (2014) se pueden estructurar usando los elementos presentados por Pierce, además como sabemos los argumentos son cadenas de razonamiento, en los que se definen los distintos tipos de argumento basado en cada uno de los tipos de razonamiento quedando la siguiente estructura:

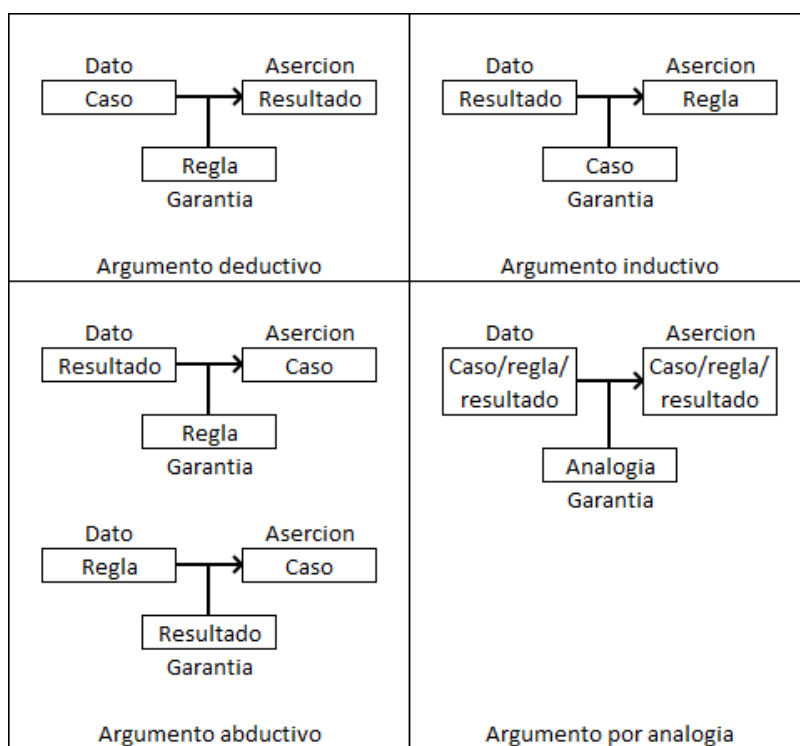


Figura 2: Tipos de argumentos basados en los tipos de razonamiento de Conner (2014).

2.3 Contextos aditivos y multiplicativos no explícitos

En lo referente a contextos aditivos y multiplicativos Gómez (2015) los define al hablar de por un lado del pensamiento aditivo centrándose en los tipos de problemas que se puedan proponer en el aula sobre transformaciones, o comparaciones además de permitir el desarrollo del pensamiento numérico, mientras que por otro lado está el pensamiento multiplicativo, se explica que realmente no se tiene una caracterización de su naturaleza sin

embargo se puede entender este pensamiento como la resolución de tareas de multiplicación y división, en problemas propuestos que lleven a la proporcionalidad.

También se tiene el artículo de José (2018) el cual abarca los problemas en contextos aditivos y multiplicativos desde una perspectiva de resolución de problemas en el que menciona que con estos problemas se pueden crear estrategias que “permiten desarrollar competencias básicas que permitan aprender de manera permanente”, ya que explica que un buen o mal resultado puede influir en el gusto o el rechazo para dar solución a los problemas y para este caso el afrontarse a problemas en contextos aditivos y multiplicativos.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

En los capítulos anteriores se presentaron los aspectos ligados a la formulación del problema y pregunta de investigación, la cual se centraba en la argumentación de los estudiantes al enfrentarse a problemas en contextos aditivos y multiplicativos no explícitos, para esto se tomó como referencia la teoría de la argumentación y razonamiento con los autores referenciados anteriormente (Toulmin 1984, Pierce 1956, Conner 2014), además de otras investigaciones que permitieron relacionar el estudio de los argumentos con la educación matemática lo que permitió dar una idea de los posibles caminos que se pueden tomar para una investigación que toma como referencia la estructura argumentativa de Toulmin (1984).

A continuación, se presentará la metodología empleada en el desarrollo de este trabajo, en la primera parte se describe cada uno de los instrumentos utilizados en la investigación, utilizando el modelo de actividad denominado como bitácora digital de Santos Trigo (2020), después se mencionará como fue la implementación y la toma de datos, para al final describir la aplicación del instrumento, el modelo de Toulmin adaptado que se utilizó además de los alcances y limitaciones.

3.1 Instrumentos

3.1.1 Bitácora digital

Dicho en las propias palabras de Santos Trigo, esta se trata de “un instrumento importante que permite al estudiante registrar y llevar un control de su propio proceso de comprensión de conceptos y resolución de problemas.” Trigo (2020). Es así que la bitácora digital presenta un proceso en el que logra un seguimiento a la construcción de conceptos de los estudiantes, y esto se logra se realiza por medio de una actividad que consta de tres fases las cuales tratan de llevar al estudiante por el proceso de conformar sus conocimientos mediante la resolución de problemas.

La bitácora digital permitió hacer la recolección de datos y la materialización de los objetivos por medio de su estructura empezando con la primera fase de *Motivación*, en la que se realiza a los estudiantes una actividad introductoria que tiene como objetivo hacer un reconocimiento de sus conocimientos previos y a partir de estos guiarlos por el nuevo concepto que se propone. Es entonces que se procede con la segunda fase de *Durante clase* se le presentó a los estudiantes una actividad la cual trataba directamente con el concepto matemático de interés para este trabajo. Dicha actividad es dirigida por el profesor el cual por medio de una serie de preguntas guía a los estudiantes para llegar entre todos a la solución de un problema contextualizado en el cual se espera que los estudiantes logren construir el conocimiento esperado. Y por último está la fase de *Actividad Reto* en la que se trabajó con una actividad muy similar a la presentada en la fase de *Durante clase*, con la principal diferencia de que en esta parte son los estudiantes los que deben llegar a la solución del problema contextualizado por su propia cuenta además en esta parte, el profesor se encarga casi en su mayoría de resolver cualquier duda que tengan los estudiantes. (ver anexo 1).

3.1.2 Intervención en el aula

Vega (2012) menciona que en una intervención en el aula es necesario crear ambientes de aprendizaje significativos y para que esto suceda deben cumplirse una serie de prerequisites los cuales van ligados a que la clase debe tener claro los objetivos que se propone, además de presentar a los estudiantes problemas desafiantes que les llamen la atención para que así estos puedan presentar interés en la actividad y así pueda haber una dinámica de interacción entre los estudiantes y el profesor, por lo que en este sentido la actividad propuesta en el aula por medio de bitácora digital presenta una serie de problemas contextualizados con la intención de cumplir con los requisitos para crear un ambiente de aprendizaje significativo en la intervención en el aula.

Una vez entendido de lo que se trata la bitácora digital y su importancia en la intervención en el aula, se hace pertinente profundizar en el diseño de las actividades, cada una de las cuales se trató de un problema contextualizado para cada caso empezando por la fase de *Motivación* en la que se le presento a los estudiantes un ejercicio en el que consistía un texto en que se describía un juego de mesa de 32 casillas en el que había 4 jugadores, y en la actividad se daba una descripción de con la que se podría calcular la posición de cada uno de los jugadores haciendo uso de operaciones de adición y multiplicación, adicionalmente con la actividad en texto vino acompañado con un archivo en Geogebra (Ver Anexo 4) donde se veía el juego de mesa en cuestión y los estudiantes podían mover a los jugadores para ponerlos en sus respectivas posiciones con la ayuda de la descripción dada en la en el texto antes mencionado.

Continuando con la bitácora digital, en la segunda fase de *Durante clase* se presentó un caso hipotético en el que un apersona planeaba comprar una serie de aparatos electrónicos como celulares, audífonos y un videojuego, además de debía calcular el presupuesto que llevaría a dicha compra y con la ayuda de un archivo en Geogebra podrían construir la fórmula para hacer los cálculos además de hacer el uso de la calculadora para facilitar los cálculos más sencillos. Esta actividad estaba diseñada de tal manera en la que los estudiantes debían hacer uso de las operaciones de adición y multiplicación, así como de los signos de agrupación, y de esa manera mostrar la importancia del orden de las operaciones a la hora de resolver un problema contextualizado.

Para finalizar con la fase *Actividad reto* en la que se le presento a los estudiantes una actividad muy parecida a la presentada en la fase de *durante clase*, pero para este caso se trató de un problema en la que un grupo de personas, fueron a un local de comida a pedir una cierta cantidad de comida para después repartirse el precio entre los participantes

dependiendo de lo que pidieron. Esta actividad fue creada con la intención de responder en relación con lo presentado en la fase anterior.

3.1.3 Preguntas complementarias en la actividad

Además de lo mencionado anteriormente, la bitácora digital aquí presentada consta con una serie de actividades complementarias que sirven para dar una guía en la actividad además de comprobar que esta pueda ser llevada de manera adecuada. Por ejemplo, en la primera la Fase de *Motivación* se pregunta por la posición de los jugadores por que con esta pregunta se espera que por lo menos los estudiantes hallan usado los datos dados en la actividad para posicionar cada uno de los jugadores en su posición dentro del archivo de Geogebra, mientras que el resto de preguntas de esta fase van encaminadas a hacer una reflexión de la posición de cada uno de los jugadores, y hacer comparativas entre estos como quien está más cerca o quien está más lejos, esto para empezar a dar una introducción al uso de las operaciones básicas las cuales luego serán usadas en mayor medida en las siguientes fases de la bitácora digital.

En el caso de la segunda fase de Durante clase las preguntas fueron encaminadas a averiguar cómo quedaría el inventario de las compras hipotéticas además del presupuesto que se llevaría con la intención de que los estudiantes construyeran dos fórmulas para ambos cálculos dentro del archivo de Geogebra que venía incluido con la actividad, además de hacer preguntas para verificar los resultados que darían dichas formulas. Además, es en este sentido que la fase de Reto es bastante similar en cuanto a las preguntas que presenta y esto se da debido a que como tal ambas se tratan de actividades muy similares.

3.2 Aplicación de instrumentos

3.2.1 investigación cualitativa: Estudio de casos múltiples

La investigación es de carácter cualitativo por lo que el modelo elegido para la misma se trata de un estudio de casos ya que según Jimenes (2016) “un estudio de caso como enfoque

metodológico, la intención es dar respuesta a cómo y por qué ocurren el o los hechos, focalizando a los fenómenos en estudio desde múltiples perspectivas” Es decir, en el estudio de casos se tratan temas muy particulares que requieren de un estudio que profundice más en el contexto real donde se desarrolle el fenómeno. Es entonces que los elementos que se utilizan en un estudio de casos salen a relucir ya que en estos se utilizan ciertas técnicas para obtener la información de forma descriptiva.

Esta metodología según Jimenes (2016) permite profundizar más en algunos casos particulares y esto permite dar respuesta con mayor complejidad a preguntas de cómo y porque ocurre el hecho, focalizando en el fenómeno en cuestión que se estudia y es en esta profundización de los casos particulares que se puede obtener un conocimiento más amplio.

3.2.2 Aplicación de la intervención en la clase

La intervención en clase fue hecha en el Colegio mayor ubicado en la ciudad de Cali, Colombia en grado sexto con un grupo de 13 estudiantes, siguiendo la teoría de intervención en la clase de Vega (2012) de manera virtual siguiendo el modelo de bitácora digital propuesto por Trigo (2020), la implementación de la actividad fue hecha de tal manera en la que cada estudiante tenía en su disposición tanto la bitácora digital como los respectivos archivos de Geogebra para cada una de las fases. Además el profesor encargado presento su pantalla a todos los estudiantes donde se mostraba la bitácora digital, cada vez que entraba a alguna de las fases se mostraba también el respectivo archivo de Geogebra y entonces como fue mencionado en apartados anteriores el profesor leía la actividad presentada en la bitácoras digital para después hacerle preguntas a los estudiantes sobre los pasos para resolverla y mientras cada uno lo resolvía por su cuenta en sus respectivos computadores, también el profesor encargado mostraba como resolverlo en la pantalla que presentaba. en algunos casos los estudiantes daban respuestas cortantes, y el profesor procedía a realizar preguntas del estilo “¿y cómo llegaste a esa respuesta?” con la intención particular de buscar relacionar las

garantías de los estudiantes, clasificando sus respuestas en los elementos de la estructura argumentativa de Toulmin y así identificar el tipo de razonamiento que utilizan para resolver la actividad.

3.2.3 Aplicación de las preguntas complementarias

Además de la intervención en la clase, la bitácora digital también venía con una serie de preguntas encaminadas con la actividad. Para esta serie de preguntas, fue hecho un formulario en Google con el que se recolectó las respuestas de cada uno de los estudiantes, y como se ha dicho anteriormente estas permitieron dar una mejor guía a la actividad al encargarse de dirigir a los estudiantes para llegar a la solución esperada en cada uno de los problemas presentados en la bitácora digital.

3.3 Alcances y limitaciones

Debido a que fue hecho en una clase virtual no siempre se tuvo la mayor participación por parte de los estudiantes el cual es un problema al que no se le puede dar una solución directa. Pero la actividad que se presentó en este capítulo puede permitir dar a los estudiantes formas de solucionar problemas en contextos aditivos y multiplicativos no explícitos en los que se involucrados el orden de operaciones haciendo la aclaración de que esta propuesta no puede ser tomada como una generalización ni mucho menos se puede tomar como un ejemplo absoluto que representes a todos los estudiantes.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de los datos fue hecho con un enfoque cualitativo, con un foco en la estructura de los argumentos de los estudiantes, por lo que se tendrá de principal referente la propuesta de Conner (2014). Se tomó las respuestas de cada uno de los estudiantes a las preguntas presentadas en la actividad (ver anexo 3), para lo cual se utilizó la propuesta de Barraza (2019) en la que se tomaron cuatro estudiantes aleatoriamente y se examinaron sus respuestas clasificándolas si se trataba de un Caso, una Regla o un Resultado dependiendo de la estructura argumentativa usada en el razonamiento evidenciado por cada uno de los estudiantes seleccionado.

El análisis se hizo con foco en la actividad presentada a los estudiantes, en la cual se trabajó la jerarquía de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos. Como se evidencia la actividad los estudiantes hicieron uso de los signos de agrupación además de hacer un uso claro del orden de las operaciones, haciendo primero las divisiones y multiplicaciones cuando era debido al igual que la suma y resta para resolver los problemas presentados.

Además, se destaca como entre cada uno de los estudiantes tomados para el análisis hubo cierto patrón al responder la actividad, y se vieron que en muchos casos hubo una estructura de razonamiento similar, así como una primera noción del uso de la jerarquía de las operaciones.

4.1 Análisis de los resultados

Como se mencionó al principio del capítulo se tomaron cuatro estudiantes para hacer el análisis, así que a continuación se presentan cada una de las respuestas dadas por los mismos a las actividades que constan de las preguntas complementarias de cada una de las fases. Se organizaron los estudiantes por medio de tablas que constan de tres columnas, en la primera se indica el número de la respuesta para cada pregunta, es decir la *RI* (Respuesta 1) responde

a la primera pregunta de su respectiva fase, en algunos casos se subdivide al estar conformada por dos partes por ejemplo *R4-1* y *R4-2* representarían dos partes de la misma respuesta a la pregunta 4, en la segunda columna se muestra la respuesta escrita hecha por el estudiante para esa pregunta, en la tercera columna se indica que tipo de elemento del razonamiento es cada pregunta es decir si se trata de un Caso una Regla o un Resultado, también se muestra en la parte inferior de la tabla antes descrita una gráfica con la estructura de los distintos argumentos identificados.

4.1.1 Fase 1: Motivación

En la fase 1 de motivación se evidenció en la mayoría de estudiantes dos estructuras argumentativas para dar solución a dos problemas que se presentan en dicha fase, la primera se trata del razonamiento utilizado para encontrar la posición de cada uno de los jugadores (ver anexo 1), y el segundo argumento identificado en los estudiantes fue el resultado del planteamiento de la pregunta 4 en el que se presentaba un caso hipotético y se les pedía responder en base a eso y justificar su respuesta, y es en esta justificación que hacen uso de argumentos.

A continuación, se encuentran las respuestas dadas por *E1* (Estudiante 1) para la fase 1. (Ver Tabla 1) En este caso parece que llegó al resultado esperado para la actividad, *E1* intenta justificar de manera aritmética sus resultados como se ve en *R3* y en *R4-2*, lo cual permite evidenciar indicios del uso del orden de las operaciones en *R3* específicamente en la línea “J2: $(23 - 15 = 8 / 2 = 4 + 21 = 25)$ ” en este caso la nomenclatura explica que primero hizo la resta “ $23 - 15 = 8$ ”, luego la división “ $8 / 2 = 4$ ” y por último la suma “ $4 + 21 = 25$ ” para realizar el cálculo, este orden es debido a la forma en la que se plantea el problema en la actividad de la Fase 1.

Para llegar al *Resultado* expresado en *R1*, parte de *R3* que tiene la estructura de un *Caso* y hace uso de una *Regla* la cual se representa en la estructura como OO (Orden de las

operaciones) y el *Respaldo* a dicha *Regla* representado como OB (Operaciones Básicas), es entonces que se evidencia que para encontrar las posiciones de los jugadores hace uso de una cadena lógica por lo que hace uso de un razonamiento deductivo. Mientras que para el cálculo de la pregunta cuatro hace uso de un razonamiento abductivo, ya que parte del *Resultado* obtenido en *R1* para llegar al *Caso* que se muestra en *R4-1* teniendo de justificación la *Regla* expresada en *R4-2*.

No.	Respuesta	Tipo
R1	J1-23 J2-25 J3-15 J4-21	Resultado
R2	Está más cerca el jugador 2 y está más lejos el jugador 3	Resultado
R3	J1: 23 J2: $(23 - 15 = 8/2 = 4 + 21 = 25)$ J3: $(23 - 8 = 15)$ J4: $(32 - 11 = 21)$	Caso
R4-1	Alcanzaría al J4 que está en la casilla 21	Caso
R4-2	Porque el J3 está en la casilla $15 + 6 = 21$	Regla
Estructura del razonamiento		
Deductivo <pre> graph TD CR3[Caso R3] --- RR1[Resultado R1] CR3 --- ROO[Regla OO] ROO --- ROB[Respaldo OB] </pre> Abductivo <pre> graph TD RR1[Resultado R1] --- CR41[Caso R4-1] RR1 --- RR42[Regla R4-2] </pre>		

Tabla 1. Estructura del argumento de *E1* en la Fase 1: Motivación.

De los razonamientos utilizados por *E1* se destaca que para resolver las dos incógnitas hace uso de dos distintos de razonamientos, mientras que en uno de los casos finalizaba con *R1* en el otro se partía de ese mismo resultado lo que muestra distintas maneras de plantear la solución a los problemas.

E2 tuvo resultados parecidos a *E1* en la solución de la actividad (Ver Tabla 2), en el sentido que sus respuestas evidencian que hizo uso del orden de las operaciones para resolver la actividad además de presentar razonamientos con la misma estructura que *E1*. Aun así,

hubo algunas diferencias en su forma de argumentar, por ejemplo, en las respuestas de *E2* se hace menos uso de justificaciones con fórmulas matemáticas como se puede ver en *R4-2*, además de que expreso la conclusión de *R4-1* de manera distinta, en la en la que se pregunta si la conclusión del jugador 3 es acertada o no, y el *E2* escribe de manera más directa “No” lo cual es acertado y se destaca la diferencia que tiene con *E1* para justificar sus resultados.

No.	Respuesta	Tipo
R1	Jugador 1: 23 Jugador 2: 25 Jugador 3: 15 Jugador 4: 21	Resultado
R2	el jugador # 2 está más cerca de la meta y el jugador # 3 está más lejos	resultado
R3	1. PUESTO 23 3. $23 - 8 = \text{PUESTO } 15$ 4. $32 - 11 = \text{PUESTO } 21$ 2. $23 - 15 = 8 / 2 = 4$ 2. $21 + 4 = \text{PUESTO } 25$	Caso
R4-1	No	Caso
R4-2	Porque con lo que le da el dado alcanza al jugador #4	Regla
Estructura del razonamiento		
Deductivo Caso R3 Resultado R1 Regla OO Respaldo OP Abductivo Resultado R1 Caso R4-1 Regla R4-2		

Tabla 2. Estructura del argumento de E2 en la Fase 1: Motivación.

Por otro lado, se tiene el caso del *E3* el cual no parece haber llegado solucionado el problema planteado como se esperaba (Ver Tabla 3), como se muestra en *R1* es una respuesta que no cumple con lo pedido en la actividad además de destacar que pone el jugador 4 dos veces, se asume que fue un error de ortografía y debía referirse al jugador 2 en uno de los casos, por lo tanto, si no respondió la pregunta con claridad no se puede evidenciar un uso del

razonamiento, es decir al no decir en qué posición se encuentran cada uno de los jugadores, no se puede sacar ningún razonamiento si ni siquiera hay cálculos hechos en esa respuesta. mientras que sí parece hacer uso de un razonamiento deductivo con la pregunta 4 pero sigue siendo muy inconcluso, porque al no tener claro las posiciones de los jugadores so se puede saber de dónde saco que la afirmación de *R4-2* lo que hace que difícil saber el origen del resultado dado en *R4-1* pese a estar acertado.

No.	Respuesta	Tipo
R1	Jugador 1: primer lugar Jugador 4: segundo lugar Jugador 3: tercer lugar Jugador 4: cuarto lugar	Resultado
R2	Jugador 1: está cerca Jugador 2: está lejos	Resultado
R3	Se resta la cantidad de casilla faltantes al llegar a la meta y la posición del jugador la cual se encuentran.	Regla
R4-1	No	Resultado
R4-2	Porque le faltan 19 casilla para llegar a la meta.	Caso
Estructura del razonamiento		
N/A Deductivo <pre> graph TD C[Caso R4-2] --- R[Resultado R4-1] R --- Reg[Regla R3] </pre>		

Tabla 3. Estructura del argumento de E3 en la Fase 1: Motivación.

Continuando con el siguiente estudiante, se tienen las respuestas dadas por *E4* (Ver Tabla 4), el cual no usa justificaciones con fórmulas matemáticas para sus respuestas a la actividad presentada, además no efectúa los mismos tipos de razonamientos que *R1* y *R2*, por un lado se tiene el primer razonamiento que es deductivo y en este en sus respuestas no presenta ningún *Caso* del cual parte su razonamiento más bien hace uso de los datos presentados en la Actividad reto y en este caso por su forma de justificar se puede tomar su *R3* como regla para la formulación del razonamiento deductivo y de igual manera que los estudiantes antes presentados llega al resultado expuesto en *R1*. Mientras que para el segundo

razonamiento Abductivo expresa una forma de argumentar similar a *E1* y *E2*, con la diferencia que aprovecha R3 como un *Respaldo* para dar apoyo a su *Regla R4-2*, a pesar de que su resultado en esta cuarta pregunta no sea acertado ya que, bajo sus argumentos *E4* afirma que no lo “pasaría” a ningún jugador, lo cual puede ser una confusión ya que en la pregunta se habla de “alcanzar” no de “pasar”.

No.	Respuesta	Tipo
R1	Jugador 1 casilla 23, jugador 3 casilla 15, Jugador 4 Casilla 21, Jugador 2 Casilla 25.	Resultado
R2	El jugador 2 está más cerca y está más lejos el jugador 3	Resultado
R3	Averiguando las diferencias de cada posición por medio de la suma y resta	Regla
R4-1	Si	Caso
R4-2	Por qué aun sumando 6 casillas no pasara a otro jugador	Regla
Estructura del razonamiento		
Deductivo Abductivo		

Tabla 4. Estructura del argumento de *E4* en la Fase 1: Motivación.

De los Resultados obtenidos en esta primera fase, se puede notar que tres de cuatro estudiantes presentaron argumentos similares para resolver cada una de las cuestiones presentadas en la actividad, con apenas pocas diferencias en el orden de los elementos que conforman sus estructuras y pocas diferencias en los tipos de razonamiento utilizados

4.1.2 Fase 2: Durante Clase

En la fase 2 se evidencio que los estudiantes presentaron dos estructuras argumentativas para desarrollar la actividad, la primera representaba el procedimiento necesario para hacer

los cálculos que se pedían en el problema mientras que la segunda era sobre la última pregunta de la fase en la que se pedía estimar si con el presupuesto alcanzaba para la compra.

A continuación, se encuentran las respuestas dadas por *E1* (Ver Tabla 5). Al igual que en la fase anterior el estudiante hace justificaciones puramente matemáticas lo que permite evidenciar si este tiene en cuenta el orden de las operaciones además ese era el objetivo principal de esta fase, y como se muestra en sus respuestas *E1* parece tenerlo en cuenta como se ve en *R2* o en *R3* en el que hace uso de los signos de agrupación para priorizar unas operaciones sobre otras, sobre su estructura argumentativa *E1* parte de un *Caso* expresado en *R2* y por medio de las *Reglas* planteadas en *R3* llega a los *Resultados* planteados en *R1* por lo que hace uso de un razonamiento deductivo, mientras que para el segundo planteamiento parte de este mismo *Resultado* para llegar al *Caso R4-1* teniendo como *Regla R4-2*.

No.	Respuesta	Tipo
R1	2 celulares a \$ 340000 c/u 6 audífonos a \$55000 c/u un video juego \$75000	Resultado
R2	$(\$340000 \times 2) + (\$55000 \times 6) + (\$150000/2)$ $\$900000 + (2 \times \$35000) + (3 \times \$25000)$	Caso
R3	$(\$340000 \times 2) = \$ 680000$ $(\$55000 \times 6) = \330000 $(\$150000/2) = \$ 75000$ TOTAL \$1085000 $\$900000 + (2 \times \$35000) = \$70000 + (3 \times \$25000) = \$75000$ TOTAL \$1045000 $\$1085000 - \$1045000 = \$ 40000$ Gasto en la compra \$40000 por que tenía \$ 900000 ahorrados	Regla
R4-1	No	Caso
R4-2	Le faltaron \$ 40000	Regla
Estructura del razonamiento		
Deductivo Abductivo		

Tabla 5. Estructura del argumento de *E1* en la Fase 2: Durante Clase.

En las respuestas de *E2* se evidencia de manera similar a *E1* una aplicación del concepto de orden de las operaciones y de la misma manera el uso de los signos de agrupación para priorizar algunas operaciones sobre otras. (Ver Tabla 6) Ahondando en sus estructuras argumentativas, es de destacar que *E2* hizo uso de un razonamiento inductivo para resolver el primer planteamiento como se ve en sus respuestas para *R1* y *R2* dio una explicación más compleja lo cual permite clasificar de manera distinta sus argumentos porque muestran una manera distinta de plantear la argumentación a diferencia de *E1*.

No.	Respuesta	Tipo
R1	Ahorro: \$900.000 Egresos: 2 celulares a \$ 340.000 cada uno = $340.000 \times 2 = \$ 680.000$ 5 audífonos a \$ 55.000 cada uno = $55.000 \times 5 = \$ 275.000$ 1 video juego a \$ 150.000 / 2 = \$ 75.000 TOTAL=\$1.030.000 Reintegro de los celulares 2 x \$ 35.000 = \$ 70.000 3 x \$ 25.000 = \$ 75.000 SUBTOTAL=\$145.000 VALOR TOTAL = \$1.030.000 - \$145.000= \$885.000	Caso
R2	$(2 \times 340000) + (5 \times 55000) + (1 \times 75000) = 680000 + 275000 + 75000 = \1030000 valor total Reintegro $(2 \times 35000) + (3 \times 25000) = 70000 + 75000 = \145000 Valor real $1030000 - 145000 = 885000$	Regla
R3	1. Se realizó el inventario de los productos comprados 2. Se buscó el valor de los artículos comprados mediante las operaciones básicas con los números naturales	Resultado
R4-1	Si	Caso
R4-2	El dinero alcanza para hacer toda la compra porque con el ahorro del hermano mayor + el de los hermanitos se cubrió el valor de la compra	Resultado
Estructura del razonamiento		
Inductivo <pre> graph TD R3[Resultado R3] --- R2[Regla R2] R3 --- R1[Caso R1] R2 --- R1 </pre> Abductivo <pre> graph TD R2[Regla R2] --- R4_1[Caso R4-1] R2 --- R4_2[Resultado R4-2] R4_1 --- R4_2 </pre>		

Tabla 6. Estructura del argumento de *E2* en la Fase 2: Durante Clase.

Es de destacar que pese a realizar el mismo tipo de estructura argumentativa para el segundo planteamiento que *E1*, el *E2* no llegó al resultado esperado con *R4-1* ya que la respuesta correcta para esta pregunta era que “no alcanzaba” conclusión a la que llegó *E1*, es de destacar que al revisar el total de respuestas de todos los estudiantes no hubo un consenso global para esa respuesta, había quienes decían que sí y hubo quienes decían que no.

Mientras que *E3* como se puede ver a continuación (Ver Tabla 7), dio respuestas mucho más simplificadas a cada una de las preguntas además de que no mostro ningún procedimiento y dio una respuesta poco específica para justificar sus resultados, por lo que para este caso no es posible encontrar una estructura argumentativa para el segundo planteamiento, mientras que para el primer planteamiento se puede notar un uso de un razonamiento deductivo, pero es de destacar que por lo menos el estudiante respondió correctamente *R4* pese a no justificar sus resultados.

No.	Respuesta	Tipo
R1	2 celulares a 340.000 pesos cada 1 8 audífonos a 55.000 pesos cada 1 75.000 pesos de la mitad del costo del video juego	Caso
R2	Gasto 1.195.000 pesos	Resultado
R3	Sumar todos los gastos	Regla
R4	No	Caso
Estructura del razonamiento		
Deductivo N/A <pre> graph TD R1[Caso R1] --- R2[Resultado R2] R1 --- R3[Regla R3] R2 --- R3 </pre>		

Tabla 7. Estructura del argumento de E3 en la Fase 2: Durante Clase.

Por último, se tienen las respuestas del *E4* para la fase 2 (Ver Tabla 8), es de destacar en sus respuestas que para *R1* no respondió dando el precio total, sino que dio la cantidad de objetos comprados, lo cual realmente sería una transcripción de lo planteado en la actividad, por otro lado, en *R2* trata de justificar un procedimiento matemático arbitrario el cual no

permite responder tener relación con el problema planteado, pese a eso el argumento presentado en *R3* es bastante acertado. Hablando ya propiamente de la estructura argumentativa por la forma en que lo justifica hace uso de un razonamiento deductivo para el cálculo del primer problema, ya que partió de *R1* como *Caso*, uso la *Regla* planteada en *R3* y llevo al *Resultado* de *R2* el cual asumimos hubo errores en la formulación matemática.

No.	Respuesta	Tipo
R1	CELULARES:2 AUDIFONOS:5 JUEGO DE VIDEO:1	Caso
R2	$900(340 \times 2 + 275 + 75) + (75 + 70) = 15$	Resultado
R3	A 900.000 le restamos el dinero que se gastó comprando las cosas y luego sumamos el dinero que le dieron los hermanos	Regla
R4	SI	Caso
Estructura del razonamiento		
Deductivo Abductivo		

Tabla 8. Estructura del argumento de E4 en la Fase 2: Durante Clase.

De los resultados obtenidos en esta segunda fase hubo una mayor variedad de resultados que en la fase anterior, como se mencionó anteriormente en esta parte de la actividad uno un menor consenso en las respuestas dadas en *R4*, además de presentar una mayor variedad en la forma de estructurar el razonamiento, lo que permitió en mayor o menor medida evidenciar su comprensión y aplicación del orden de las operaciones.

4.1.3 Fase 3: Actividad Reto

En la fase 3 se trabajó con una actividad más corta que la anterior de la cual se sacó una sola estructura argumentativa para cada uno de los estudiantes en la que se muestra el proceso que siguieron para hallar el aporte de cada uno en un grupo de amigos como lo plantea la actividad.

No.	Respuesta	Tipo
R1	7000 empanadas + 1500 salchipapa + 800 papa rellena = 9300	Caso
R2	4 chicos pagaron $\$7000 / 4 = \1750 2 chicos pagaron $\$1500 / 2 = \750 1 chico pago $\$800$	Resultado
R3	los 4 chicos pidieron 10 empanadas a $\$700$ cada una y lo dividieron entre los 4 $10 \times \$700 = \$7000 / 4 = \$1750$ los 2 chicos pidieron una salchipapa que costo $\$1500$ y la dividieron entre los 2 $\$1500 / 2 = \750 y un chico pidió una papa rellena que costó $\$800$	Regla
Estructura del razonamiento		
Deductivo <pre> graph TD R1[Caso R1] --- R2[Resultado R2] R1 --- R3[Regla R3] R2 --- R3 </pre>		

Tabla 9. Estructura del argumento de E1 en la Fase 3: Actividad Reto.

Si se toman las respuestas dadas por E1 (Ver Tabla 9) se nota como cada una de las respuestas representa un elemento de la estructura argumentativa deductiva partiendo del Caso R1 en el que se tiene el dinero total que se plantea en el problema hasta llegar al Resultado lo que le tocaría contribuir a cada uno de los del grupo de amigos como se ve en R2 teniendo a R3 como una justificación a su razonamiento. También se destaca que, a diferencia de las dos fases anteriores, el estudiante E1 aquí hace menos justificaciones con solo expresiones matemáticas, y muestra de manera más implícita la aplicación del orden de las operaciones. De manera similar E2 (Ver Tabla 10) presenta una estructura argumentativa con la principal diferencia que da una respuesta más general para justificar sus resultados como se ve en R3.

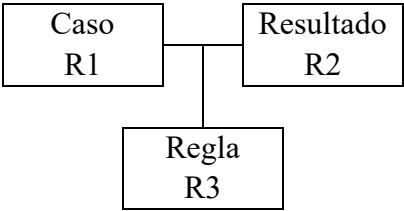
No.	Respuesta	Tipo
R1	7 amigos 10 empanadas a 700 pesos cada una = \$ 700 x 10 = \$ 7000 1 salchipapa a 1500 pesos cada una = \$ 1500 x 1 = \$ 1500 1 papa rellena a 800 pesos cada una = \$ 800 x 1 = \$ 800 TOTAL = \$ 9300	Caso
R2	Empanadas \$7000 / 4 = \$1750 cada una Salchipapa \$1500 / 2 = \$ 750 cada una Papa rellena \$800 / 1 = \$ 800 cada una	Resultado
R3	Se realizaron multiplicaciones y divisiones para calcular el valor total y del pago de cada uno	Regla
Estructura del razonamiento		
Deductivo		
 <pre> graph TD R1[Caso R1] --- J1(()) R2[Resultado R2] --- J1 J1 --- R3[Regla R3] </pre>		

Tabla 10. Estructura del argumento de E2 en la Fase 3: Actividad Reto.

Por otro lado, al en las respuestas de *E3* se muestran respuestas más cortas y con una justificación menos clara (Ver Tabla 11), es decir no se logra evidenciar por completo que el estudiante haya realizado la actividad como se esperaba, por lo que a diferencia de los dos estudiantes anteriores. En este caso *E3* calcula el total de la compra en vez de lo que pagaría cada uno como se plantea en el problema inicial. Esto debido a que parte del *Resultado R2* y por medio de las *Reglas* planteadas en *R3* es que llega al *Caso* de *R1*, lo que muestra una estructura de razonamiento abductivo.

No.	Respuesta	Tipo
R1	Le costó 9.300	Caso
R2	A las 4 personas de las empanadas le toca pagar 1.750 El de las salchipapas a 750 Al de la papa rellena 800 pesos	Resultado
R3	Sumar, multiplicar y dividir.	Regla
Estructura del razonamiento		
Abductivo <pre> graph TD R2[Resultado R2] --- R1[Caso R1] R2 --- R3[Regla R3] R1 --- R3 </pre>		

Tabla 11. Estructura del argumento de E3 en la Fase 3: Actividad Reto.

Pese a no responder la actividad como es esperado *E3* muestra indicios del uso de la jerarquía de operaciones ya que para llegar a la respuesta obtenida en *R1* se requiere hacer uso de esto. De la misma manera *E4* presenta unas respuestas similares a *E3* (Ver Tabla 12), pero no expresa la misma estructura. En este caso hace uso de un razonamiento Deductivo con la diferencia que parte el Caso planteado en la Actividad Reto.

No.	Respuesta	Tipo
R1	todo les costó:9.300	Resultado
R2	Quienes comieron empanada pagan \$1.750 cada uno, quienes comieron salchipapa pagan \$750 cada uno y quien comió papa rellena paga \$800	Resultado
R3	Tuve que multiplicar y dividir para obtener las respuestas	Regla
Estructura del Razonamiento		
Deductivo <pre> graph TD C[Case Actv Reto] --- R2[Resultado R2] C --- R3[Regla R3] R2 --- R3 </pre>		

Grafica 12. Estructura del argumento de E4 en la Fase 3: Actividad Reto.

Como se evidencia en esta última fase hubo un mayor consenso con las estructuras argumentativas dadas por los estudiantes, con el detalle de que hubo quienes fueron más allá

y calcularon cuanto le tocaría pagar a cada una de las personas en el grupo de amigos en planteado en la actividad, mientras hubo algunos casos que se limitaron a solo calcular el final. Pero los estudiantes analizados mostraron tener indicios del uso de la jerarquía de las operaciones.

4.2 Argumentación global por estudiante

Una vez evidenciadas las distintas estructuras argumentativas presentes en cada una de las tres fases de la actividad, ahora se procede a realizar un análisis global por cada uno de los estudiantes en el que se relacionara individualmente de tal manera en la que se pueda evidenciar la evolución de cada uno de los estudiantes mientras avanzaban en el desarrollo de la actividad.

Empezando por *E1*, en sus respuestas dadas para la fase 1 justifica utilizando fórmulas matemáticas lo que le permitió tener respuestas más precisas además de que como se evidencio en R3, el estudiante E1 hacia uso de manera implícita la jerarquía de operaciones por ejemplo en esa respuesta para encontrar la posición del jugador 2 hace la siguiente justificación “J2: $(23 - 15 = 8/2 = 4 + 21 = 25)$ ” la cual muestra un orden en el cual hace las operaciones, teniendo primero la resta, luego la división y por último la suma, todas estas operaciones las expresa por medio de una expresión que matemáticamente no es válida, porque realmente $23 - 15$ no es igual a $8/2$ pero sí que es igual a 8 y luego hace la división por 2 que es lo que da a entender con el procedimiento pero muestra que realiza las operaciones en un orden específico para llegar al resultado. En la segunda fase se muestra un uso más avanzado de las expresiones matemáticas al justificar sus respuestas con fórmulas que a diferencia de las expuestas en la fase anterior ya tienen un mayor sentido tal como se puesta por ejemplo en la siguiente expresión hecha en R2 “ $(\$340000 \times 2) + (\$55000 \times 6) + (\$150000/2)$ ” aquí hace bastante uso de los signos de agrupación para priorizar unas operaciones sobre otras y especificar un orden o jerarquía a diferencia de la fase anterior en la

que mostraba este orden, escribiendo las operaciones de izquierda a derecha, al igual de la tercera fase en la que pese a usar menos expresiones matemáticas para justificar sus resultados evidencia el uso de la jerarquía de operaciones por lo menos de manera implícita lo cual se muestra en sus respuestas dadas por ejemplo en *R3* en la que para desarrollar sus argumentos hace uso de frases como “los 4 chicos pidieron 10 empanadas a \$700 cada una y lo dividieron entre los 4” por lo que muestra que *E1* evidencio un desarrollo a lo largo de la actividad evidenciando que desde el principio muestra una estructura argumentativa consistente.

El estudiante *E2* empieza dando respuestas en la primera fase con un menor uso de expresiones algebraicas en comparación con *E1* tal como se muestra en sus respuestas dadas en *R4-2* que por un lado *E1* respondió “Porque el J3 está en la casilla $15 + 6 = 21$ ”, haciendo argumentaciones que justificaba con expresiones algebraicas, mientras que *E2* daba respuestas como “Porque con lo que le da el dado alcanza al jugador #4” la cual es una argumentación igual de válida para la pregunta planteada pero deja de manera más implícita el razonamiento utilizado para llegar a esos resultados. Haciendo que sus estructuras argumentativas se conformen de manera más implícita, pero esto cambió en el desarrollo de la segunda fase donde hizo uso de justificaciones matemáticas en las cuales se muestra que empieza a usar el orden de las operaciones a la hora de justificar sus resultados como por ejemplo las respuestas dadas en *R2* como lo siguiente “ $(2 \times 340000) + (5 \times 55000) + (1 \times 75000) = 680000 + 275000 + 75000 = \1030000 valor total” en el cual como se ve no solo hace uso de expresiones matemáticas para justificar sus respuestas sino que también muestra el uso de la jerarquía de las operaciones al hacer uso de los signos de agrupación. Por otro lado se descarta que a diferencia de sus resultados dados en la primera fase para este caso cuando se le presento el problema contextualizado de gastos no logro llegar a la respuesta esperada tal como se puede evidenciar en *R4* en el que afirma que en el problema dado si

alcanza el dinero para la compra cuando no es así, debido a que en el problema se plantea que una persona llevaría cierto presupuesto el cual sería menor al necesario para realizar las compras, y aquí *E2* afirma que si le alcanzaría lo cual se puede deber a un error en los cálculos. Pese a esto hubo una mejora en sus respuestas dadas en la fase 3, en la que se dio el caso que volvió a justificar con menor uso de expresiones matemáticas lo cual se muestra también en su razonamiento con el cual llegó a los resultados acertados a diferencia de lo que mostró en la fase 2.

Por otro lado el estudiante *E3* desde un principio no justificó sus respuestas con expresiones matemáticas en la fase 1 además como se mencionó anteriormente *E3* dio respuestas muy poco claras como la respuesta dada en *R1* “Jugador 1: primer lugar, Jugador 4: segundo lugar, Jugador 3: tercer lugar, Jugador 4: cuarto lugar” lo que impidió evidenciar una estructura argumentativa tal como si se pudo con los demás estudiantes, y es por esto que en esta primera actividad hubo respuestas bastantes inconclusas que no dicen prácticamente nada sobre la actividad como por ejemplo la respuesta dada en *R2* “Jugador 1: está cerca Jugador 2: está lejos”, lo mismo se aplica para sus respuestas dadas en la fase 2 en las cuales se dio respuestas poco claras y que no cumplen realmente con lo esperado en la actividad, pero es de destacar que en la fase 2 hubo una mejora con respecto a la fase anterior, ya que en esta dio algunas respuestas más acertadas como la dada en *R1* “2 celulares a 340.000 pesos cada 1, 8 audífonos a 55.000 pesos cada 1, 75.000 pesos de la mitad del costo del video juego”, o que permitió identificar de manera más concreta sus estructuras argumentativas, adicionalmente se muestra que en la fase 3 el *E3* dio respuestas que solo mostraban resultados y ningún tipo de justificación lo cual se muestra en las garantías dadas en las respuestas como *R1* “Le costó 9.300” también en *R2* daba indicios de entender el problema pero no justificaba de manera precisa el cómo llegaba a sus resultados más allá de la respuesta dada en *R3* “Sumar, multiplicar y dividir”, pero se destaca que con respecto a la

fase anterior tubo una mejora ya que pese a dar respuestas poco sustanciales al menos llegó a la respuesta que se pedía en esta actividad. y en esta fase se pudo identificar de manera más precisa la estructura de razonamiento utilizada.

Por último, la evolución en el desarrollo de la actividad por parte de *E4* muestra respuestas puramente textuales como por ejemplo la respuesta dada en *R3* “Averiguando las diferencias de cada posición por medio de la suma y resta”, en esta respuesta no hay nada de justificación aritmética con lo que permite evidenciar una estructura de razonamiento distinta a la presentada por *E1* y *E2*, con dichas respuestas, pero no permite evidenciar una noción inicial del uso de la jerarquía de las operaciones, más allá de que sus respuestas para la primera fase son en su mayoría acertadas para la actividad. Esto cambio con la actividad desarrollada en la fase 2 en la cual hace uso de expresiones matemáticas para justificar sus resultados como se muestra en *R2* “ $900(340 \times 2 + 275 + 75) + (75 + 70) = 15$ ”, pero son justificaciones muy inconclusas ya que las respuestas que da en esta segunda fase no aparentan corresponder con lo mostrado en la actividad por lo que en este caso parece no haber una mejora con respecto a la fase anterior, es decir en esta fase se dan respuestas muy inconclusas. lo cual cambia en el desarrollo de la fase 3 en la que muestra un mejoramiento y vuelve a dar respuestas con una justificación más detallada y acertada tal como en la fase 1 y esto se muestra por ejemplo en sus respuestas dadas en *R2* “Quienes comieron empanada pagan \$1.750 cada uno, quienes comieron salchipapa pagan \$750 cada uno y quien comió papa rellena paga \$800” con lo cual llega al resultado esperado, además justifica su resultado de manera bastante general como se evidencia en *R3* en el cual respondió “Tuve que multiplicar y dividir para obtener las respuestas”, también se destaca que al ver sus resultados dados en las distintas fases pareciera evidenciar un uso de la jerarquía de operaciones de manera implícita ya que pese a no mostrarlo de manera directa en sus respuestas como se

puede ver en la R3 de la fase tres, si hace uso de la jerarquía de operaciones para llegar a los resultados.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

La actividad planteada con el instrumento de aprendizaje de bitácora digital en la que se hizo uso de la jerarquía de operaciones permitió incentivar la argumentación y experimentación, además teniendo en cuenta que este trabajo presentó un diseño hecho de tal manera que el estudiante es el mayor responsable del conocimiento que pueda construir y por medio de la jerarquía de operaciones y el uso de la bitácora digital que se realizó hizo que esto se vea fortalecido. Los argumentos son más sólidos cuando tienen un respaldo matemático, este uso de las operaciones permitió categorizar y validar los argumentos de los estudiantes, así como clasificar los tipos de razonamientos que emergen en la actividad matemática en secundaria, y permitir evidenciar si es una argumentación sólida con la que se desarrollen competencias matemáticas con la jerarquía de las operaciones como un medio. Tal como se menciona en los análisis en el que se notó en algunos estudiantes una evolución en su forma de solucionar los problemas por medio de los argumentos y los razonamientos que emergieron de tal manera en el que se identificó el desarrollo en los estudiantes, por medio de la actividad guiada utilizando la bitácora digital centrada en la jerarquía de las operaciones.

La jerarquía de las operaciones como concepto matemático no permite un desarrollo muy profundo si se hace por medio de la memorización por lo que este trabajo se centró en orientar más su comprensión, ya que es así como se le da un mayor sentido al orden de las operaciones, y permite una mayor comprensión de mnemotecnias como el PEMDAS tal como menciona Zazkis (2017). El cual afirma que su uso permite afrontar de manera más fuerte las operaciones aritméticas, señalando que esta mnemotecnica en particular permitió tanto introducir ideas correctas como que la multiplicación precede a la suma como introducir ideas incorrectas al decir que la suma antes que la resta.

En lo referente al razonamiento se evidenció un desarrollo en la argumentación presentada en los cuatro estudiantes analizados, mientras fue avanzando la actividad cada uno argumentó y permitió construir una estructura de razonamiento en la que se podía ver indicios del uso de la jerarquía de operaciones ya que tal como se mencionó en el análisis, los estudiantes en sus respuestas hacían justificaciones que expresaban operaciones matemáticas priorizando un cierto orden con el cual llegaban al resultado esperado pese a que no utilizan la escritura adecuada, ya se empieza a evidenciar el uso del orden de las operaciones tal como en muestra en la Tabla 1 en R3 con expresiones como “ $23 - 15 = 8/2 = 4 + 21 = 25$ y además tal”, otro ejemplo de esto mismo está en la tabla 6, en la respuesta dada en R2 “ $(2 \times 340000) + (5 \times 55000) + (1 \times 75000) = 680000 + 275000 + 75000 = \1030000 ” ya que como se puede ver aquí el estudiante empieza a usar los signos de agrupación para priorizar unas operaciones sobre otras. Además, también se tienen las estructuras argumentativas de los estudiantes expuestas en los análisis que muestran como de manera implícita el uso de la jerarquía de las operaciones para dar solución a la actividad planteada con la bitácora digital.

En adición, los razonamientos que emergieron en los estudiantes, se evidencio un consenso en cuanto a los tipos utilizados, es decir en la mayoría de los casos los estudiantes utilizaron las mismas estructuras argumentativas, o al menos muy similares habiendo una predominancia de Razonamiento Deductivo y Abductivo para los casos que fue posible evidenciar la estructura utilizada ya que como se mencionó en el análisis hubo al menos un estudiante (*E3*) de entre los seleccionados el cual dio respuestas poco conclusas del cual no se pudo destacar su estructura argumentativa de manera tan exitosa. Es de destacar que los estudiantes hicieron uso de un razonamiento Deductivo en los casos en los que se les daba unos datos iniciales y debían llegar a un resultado, con el cual en sus respuestas justificaron con expresiones matemáticas o indicando que operación utilizaron, esto se muestra en las tres fases, en las respuestas dadas en *R1 R2* y *R3* lo cual se abordó en profundidad en el análisis y

se puede ver cualquiera de las tablas de la 1 a la 12 para comprobar. También se destaca que los estudiantes utilizaron un razonamiento Abductivo en las preguntas en las que se refería tomar los resultados obtenidos y razonar con de cuestiones alrededor de los mismos, en la primera fase en la pregunta 4 se cuestionaba si el jugador que estaba más lejos de la meta podría o no alcanzar a los demás jugadores, para lo cual se necesitaba ya haber encontrado la posición de los jugadores para responder esta pregunta, mientras que en la segunda fase, una vez habiendo hecho los cálculos respectivos se preguntaba si el dinero alcanzaba para las compras del problema, cuestiones que en ambas fases eran respondidas en las respuestas *R4-1* y *R4-2*, para lo cual en ambos casos los estudiantes hicieron uso de un razonamiento abductivo en la mayoría de casos.

Como se mencionó anteriormente hubo una predominancia de dos estructuras de razonamiento en las respuestas dadas por los estudiantes a la actividad, en la que cuando el problema mostraba datos y debían llegar a un resultado hacían uso de un razonamiento deductivo mientras que cuando debían tomar esos resultados y trabajarlos para llegar a la solución de una pregunta con respecto a los mismos, se hacía uso de un razonamiento Abductivo en la mayoría de los caso, pese a esto hubo algunas excepciones entre las cuales se encuentran las siguientes. En la fase 1 el *E3* hizo uso de un razonamiento deductivo para resolver la cuestión presentada en *R4-1* y *R4-2* mientras que los demás estudiantes hicieron uso de un razonamiento abductivo para resolver esta cuestión, se considera que esta diferencia fue debido a la forma en la que respondió dichas preguntas ya que como se mencionó en el análisis en esta fase el *E3* respondió de manera diferente a las preguntas con respecto a las respuestas de los demás estudiantes en esta fase de tal manera que en su estructura, parte de un caso para llegar a un resultado, con lo que construye un razonamiento deductivo, tal como se puede ver en la Tabla 3. Otro ejemplo de excepción con el razonamiento usado, se encuentra en la fase 2 en las respuestas dadas por *E2*, el cual hizo uso

de un razonamiento inductivo en la actividad en la cual los demás usaron un razonamiento deductivo. Esta diferencia tal como se muestra en la Tabla 6 se debe a que en este caso el estudiante usa una estructura argumentativa distinta partiendo de un resultado y llegando a una regla, en dicha estructura llega de manera adecuada al resultado, pero por “otro camino” diferente al que usaron los demás estudiantes.

Sobre las respuestas en si dadas por los estudiantes seleccionados, se destaca que no en todos los casos los estudiantes lograron dar respuestas “perfectas” para las preguntas dadas, de los cuatro. dos estudiantes dieron respuestas completamente acertadas, hubo uno con respuestas medianamente acertadas y uno que no dio respuestas tan acertadas, y sobre esto se profundiza en los análisis, pero aquí es de destacar que en todas las respuestas dadas por los estudiantes se vio un desarrollo dado a distintos niveles dependiendo del caso, con el cual se logró conformar estructuras de razonamientos que mostraban un uso implícito de la jerarquía de operaciones que fue distinto para cada uno de los casos ya que como se mencionó, el nivel de la forma en la que usaban de manera implica el orden de operaciones, se identificó de distintos niveles dependió de que tan acertadas podían estar sus respuestas para la actividad.

En cuanto al uso de la tecnología, tal como se mencionó al principio del documento se notó que el uso de la bitácora digital presentada a los estudiantes con el uso de los applets de Geogebra, permitió que los mismos pudieran experimentar y manipular los elementos dados en la actividad para que pudieran llegar a la respuesta. Además tal como se notó a la hora de hacer la intervención en la clase, los estudiantes respondían con mucha rapidez cuando en alguna parte de la actividad se pedía hacer un cálculo con algún número de más de cuatro cifras y es de presuponer que estos cálculos tan rápidos fue gracias al uso de las calculadoras que por ejemplo venia incluido dentro del propio applet, ya que como fue mencionado en los antecedentes. Las TICs pueden ser usadas como herramientas que agilicen cálculos triviales y puedan permitir centrar la actividad en estrategias para resolver los problemas presentados.

ANEXOS

ANEXO 1: BITÁCORA DIGITAL

En este anexo se encuentra la bitácora digital implementada a los estudiantes de grado sexto, la cual consta de tres fases, cada una con su actividad y sus preguntas.

Bitácora digital	Unidad 1	Eje temático: Jerarquía de operaciones
Método: Elaboración Conjunta	Medio tecnológico, Lápiz, Papel, Regla, Calculadora, Software educativo, Geogebra	
INSTRUCCIONES		
Competencias • Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. • Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. Resultado de aprendizaje • Aprovechar de diversas estrategias para afrontar las situaciones de operaciones matemáticas. • Aplicar nociones alrededor de la adición, la multiplicación y el orden de operación a problemas cotidianos. • Realizar un uso adecuado de las herramientas tecnológicas en la resolución de problemas en contextos que requieran adición y multiplicación en particular la jerarquía de operaciones. Estrategias metodológicas • Lee cuidadosamente la sección de motivación. • En cada actividad se debe responder y argumentar tus respuestas • Debes de exponer tus resultados ante tus compañeros cuando el maestro lo indique		

INSTRUCCIONES

Para esta actividad tendrás en todo momento una app de Geogebra que te ayudara en el desarrollo de la misma, además podrás en todo momento hacer uso de la calculadora que viene incluida en la app, con las instrucciones que dará el profesor guía de la actividad.

MOTIVACION

El juego de mesa

Lee el siguiente ejercicio detalladamente y con ayuda de la app de Geogebra responde las preguntas correspondientes.

Se tiene un juego de mesa de 4 jugadores en el que cada uno debe llegar al final de su camino para ganar, todos los caminos tienen la misma cantidad de casillas es decir 32 casillas deben recorrer 32 casillas, en una partida 4 personas tienen la siguiente colocación:

- El Jugador 1 en casilla 23
- El Jugador 3 está 8 casillas por detrás de jugador 1 en su propia fila
- Al jugador 4 le faltan 11 casillas para llegar a la meta
- El Jugador 2 está adelantado a jugador 4, por la mitad de la diferencia entre el jugador 1 y 3

Actividad

- Pregunta 1: En qué posición está cada jugador, puedes hacer uso de la app de Geogebra para poner cada uno en su posición.
- Pregunta 2: ¿Quién está más cerca de la meta?, ¿quién está más lejos de la meta?
- Pregunta 3: Argumente el procedimiento que permite ubicar sus fichas donde están.
- Pregunta 4: El jugador que está más lejos llegar a la meta afirma que incluso si al lanzar el dado le saliera un seis no sería capaz de alcanzar a ninguno de los otros jugadores, esta afirmación está o no en lo correcto ¿por qué?

DURANTE CLASE

Lea detalladamente la siguiente situación y usando la app de Geogebra responda las preguntas a continuación.

El año pasado estuve ahorrando con el objetivo de comprar un celular moderno, ahorré \$900000, con esta cantidad compré dos celulares, uno para mi novia y otro para mí pues no podíamos estar juntos todo el tiempo, cada uno me costó \$340.000 También, mis 5 hermanos me pidieron que comprara unos audífonos para cada uno de ellos con el objetivo de que ya no hubiese tanto ruido en la casa, cada uno me costó \$55.000 además tuve que reponer unos

audífonos que se me dañaron, dos de mis hermanos me dieron \$35.000 pesos cada uno y mis otros tres hermanos me dieron \$25.000 cada uno.

Además, como mi hermano menor de 12 años quería un juego de video, mi novia y yo decidimos poner cada quien la mitad del costo del juego de video, para regalarle uno que estaba en oferta, nos costó \$150000 porque incluía dos videojuegos gratuitos.

Actividad

Teniendo en cuenta la situación anterior resuelve la siguiente Actividad

- Pregunta 1: Con la ayuda de la app de Geogebra has un inventario de todo lo que se compró en la situación anterior
- Pregunta 2: Con ayuda del inventario que creaste construye una expresión algebraica para calcular cuánto dinero gasto en la compra.
- Pregunta 3: Describe el procedimiento que seguiste con tus compañeros para resolver el problema
- Pregunta 4: ¿Con la cantidad de dinero que lleva le alcanza para hacer toda la compra?

RETO EN CLASE

Con ayuda de la app de Geogebra resuelve la siguiente situación

En un pequeño negocio de fritanga se venden empanadas a 700, papas aborrajadas a 800, papas rellenas a 800 y salchipapas 1500

Un grupo de amigos 7 va a este local de fritanga entre los cuales, cuatro personas del grupo de amigos se piden una bandeja con 10 empanadas y se reparten equitativamente el precio de la bandeja, además dos personas más del grupo deciden comprar un solo paquete de salchipapas y lo reparten equitativamente, y el ultimo del grupo se compra una papa rellena.

- Con ayuda de la app de Geogebra has un inventario de todo lo que compraron
- Pregunta 1: ¿Cuánto les costó todo en total?
- Pregunta 2: ¿Cuánto le tocaría pagar a cada uno?
- Pregunta 3: Explica el procedimiento que hiciste para hacer los cálculos.

ANEXO 2: TRANSCRIPCIÓN DE LA INTERVENCIÓN EN CLASE

A continuación, se presenta la transcripción de la clase que consto de dos horas en las cuales cada uno desde su computador hizo uso de los archivos de Geogebra para resolver las preguntas puestas en la bitácora digital.

L1 Introducción

L2 L: la idea es que tenemos esta primera actividad, espero que la tengan todos abierta, porque la
L3 gracia de esta actividad es que haya un poco de participación y que en estos espacios donde están
L4 estas preguntitas, las intenten responder y espero que lo más pronto posible me puedan
L5 compartir las respuestas que vallan a dar a las preguntas en este archivo.

L6 Actividad 1: motivación

L7 L: Entonces para empezar en esta primera actividad, se hará uso del primer archivo de Geogebra
L8 que, si tienen el Geogebra abierto perfecto, pero si no lo tienen entonces busquen en Google
L9 Geogebra clásico, abren el primero que les sale y les abrirá la misma aplicación de Geogebra pero
L10 en línea entonces vienen aquí (en esta parte se explica cómo se abre el archivo con la primera
L11 actividad, y se da un espacio breve para que alcancen a abrir la actividad, después de esto ahora si
L12 se empieza con el desarrollo de la primera actividad como tal, 7:45 - 19:14). ¿Qué es lo que se
L13 supone que hay que hacer en esta primera actividad? Esta es como una pequeña parte
L14 introductoria un pequeño abrebocas como para ir calentando, la idea es que nosotros tenemos
L15 aquí un juego de mesa en el que tenemos 4 jugadores, y que cada uno para ganar el juego debe
L16 llegar a la meta que estaría en la casilla 32 entonces aquí a nosotros nos dan 4 instrucciones que
L17 nos indica donde esta cada uno de los jugadores y hay que ir y poner cada uno de los jugadores en
L18 sus respectivos puestos, entonces si tenemos esto encuentra sigamos las instrucciones dice que
L19 por ejemplo, el jugador 1 está en la casilla 23 entonces se toma el jugador 1 y se pone en la casilla
L20 23 entonces a partir de aquí es cuando la cosa se pone interesante porque me dicen que el
L21 jugador 3 está 8 casillas por detrás del jugador 1 en su propia fila, entonces qui les pregunto a
L22 ustedes, si el jugador 3 está 8 casillas por detrás del jugador 1 entonces en que numero de casilla
L23 estaría el jugador 3

L24 E miguel ángel: 15

L25 L: en la 15 si, entonces luego que dicen el que jugador 4 le faltan 8 casillas para llegar a la meta
L26 ¿así que donde estaría el jugador 4? Si le faltan 8 casillas para llegar a la meta.

L27 Varios estudiantes dicen al unisonó: 21, estaría en la casilla 21

L28 L: bueno, y entonces para el jugador 3 hay que hacer un pequeño proceso extra del que se habla
L29 que el jugador 3 está adelantado al jugador 4 pero entonces hay que saber cuánto esta
L30 adelantado, y aquí dice una pequeña frase que la idea es que tratemos de traducirla al lenguaje
L31 matemático para saber en qué posición está el jugador 2, que me dice que está a la mitad de la
L32 diferencia entre el jugador 1 y 3, esto que significa, que temeos que saber cuál es la diferencia
L33 entre el jugador 3 y el jugador 1 y luego a eso le sacamos la mitad, entonces si el jugador 3 está en
L34 la casilla 15 y el jugador 1 está en la casilla 23, cuanto seria la diferencia entre esos 2 números o

L35 cómo podría sacar esa diferencia entre esas dos casillas

L36 E Juan José: la diferencia es que el 15 está en la tabla del 3 y el 23 pues no tendría una tabla diría
L37 yo.

L38 L: pues es una forma curiosa de verlo, pero cuando se habla de diferencia se habla de resta que

L39 esa es una forma de referirse al llamar la operación resta que se le puede llamar diferencia,

L40 entonces como se le llama diferencia y entonces si el jugador 1 está en la casilla 23 y el jugador 3

L41 está en la casilla 15 entonces la diferencia es la resta entre esos dos números y entonces ¿cuánto

L42 sería esa resta?

L43 E Juan José: entonces sería 8:

L44 L: así es sería 8, pero bueno, ya tenemos esa diferencia, pero el proceso todavía no está hecho

L45 aquí me dicen que el jugador 2 este adelantado por la mitad de eso, así que cuanto sería la mitad

L46 de 8

L47 E Miguel Ángel: 4

L48 E Santiago: la mitad de 8 es 4

L49 L: entonces bueno ya sabemos que tan adelantado está el jugador 2 pero recordemos que es con

L50 respecto al 4, entonces en que casilla estaría el jugador 2

L51 E Miguel Ángel: 25

L52 L: así es, la casilla 25. Y aquí la gracia es que respondan estas preguntitas (en esta parte se explica

L53 que se traten de poner en el archivo de las preguntas, como fue que lo resolvieron 24:54-25:26)

L54 Y por ejemplo aquí pregunta cual estaría más cerca y cual más lejos y obviamente para hacer este

L55 paso necesitan tener los jugadores bien posicionados, y si alguien se ofrece a participar que nos

L56 cuente cual es y como llegó al que llegó

L57 E Jorge: yo, yo quiero participar, el jugador 2

L58 L: el jugador 2 que, está más lejos o está más cerca

L59 E Jorge: Está más cerca.

L60 L: y como lo sabes

L61 E Jorge: porque yo conté el jugador cuatro cuantas casillas le faltan y está más lejos que el

L62 primero, lo conté y vi que está más cerca, pero luego conté al morado que le falta 6 casillas y al

L63 primero le faltan 8.

L64 L: si, es una forma de verlo está bien, que de hecho esta es una de las cosas por las que apreciaría

L65 que participen porque hay distintas formas de ver estos problemas y la que tú ves es muy

L66 interesante, pero antes de hablar quien más quiere participar para saber quién está más lejos

L67 entonces.

L68 E Juan Camilo: profe el 3 estaría más lejos.

L69 L: el 3 estaría más lejos, ok y como llegaste a esa conclusión

L70 E Juan Camilo: porque conté las casillas y vi que estaba más lejos.

L71 L: bueno si, lo que yo decía de que hay distintas formas de verlo porque por ejemplo una forma en

L72 la que yo lo haría es ver el número en el que esta cada uno y ver cual número es más grande o más

L73 pequeño, y la meta está en el 32 así que si se quiere saber cuál jugador está más cerca sería ver

L74 cual número está más cerca del 32. Entonces como les decía la idea es ir respondiendo estas

L75 preguntas, aquí ya vemos que hay una última preguntita que nos dice que si el jugador que esta
 L76 más lejos de la meta que en este caso sería el jugador 3 no sería capaz de alcanzar a ningún
 L77 jugador incluso si le saliera un 6 en el dado. Entonces si este que está más lejos dice que si pudiera
 L78 avanzar 6 casillas aun así no podría alcanzar a los demás

L79 E Jorge: hey una cosa y si los demás jugadores sacan 1 o 2 entonces el 3 podría tener una
 L80 oportunidad.

L81 L: si, también puede ser, pero aquí nos estamos centrando de momento en el jugador 3, en la que,
 L82 si el jugador 3 se mueve 6 casillas, la pregunta seria donde quedaría.

L83 Varios estudiantes dicen al unisonó: profe quedaría en la casilla 21

L84 Y algunos otros dicen también: alcanzaría al cuatro.

L85 L: entonces sí, alcanzaría al 4 entonces el jugador 3 alcanzaría a los demás, entonces como les
 L86 decía la gracia aquí es que traten de responder aquí como llegaron a las respuestas de la actividad.

L87 Durante clase

L88 L: Pero para agilizar vamos a pasar a la siguiente actividad, que es aquí donde las cosas se ponen

L89 interesantes, porque si recordaran la anterior era un abrebocas, en la que introducíamos las

L90 operaciones básicas, cuando hablábamos de sumas restas divisiones, y es ahora en esta actividad

L91 en donde haremos uso de esas operaciones. Y para eso vamos a abrir el siguiente archivo de

L92 Geogebra (otra vez se toma un tiempo para que los estudiantes puedan abrir la siguiente

L93 actividad, 31:50-40:15). Continuando con esta segunda actividad, aquí es cuando se hace una

L94 especie de problema de gastos, de una persona que con un presupuesto va a comprar unos

L95 celulares, unas cosas, entonces leamos la pregunta, aquí deben tener el archivo de Word abierto

L96 (en esta parte se dedica a leer el problema en cuestión) entonces hasta ahí se entiende

L97 E: si

L98 L: bueno, entonces aquí habiendo entendido esta problemática, y aquí en esta parte si necesito

L99 que me presten mucha atención que traten de participar si no entienden algo pregunten,

L100 entonces pasemos a las preguntas habiendo entendido el problema, la primera dice que con la

L101 ayuda de la app de Geogebra haga un inventario de todo lo que se compró en el problema

L102 anterior, ¿entonces que es lo que hay que hacer? Vamos a tomar los numeritos que se ven aquí en

L103 el Geogebra y vemos lo que hay que hacer, entonces vemos que el problema dice al principio, aquí

L104 me dice que compro dos celulares ¿cierto? Entonces tomo en el Geogebra y tomo dos celulares y

L105 los saco y entonces, como puedo saber cuánto costarían los dos celulares si cada uno cuesta

L106 340000

L107 E juan camilo: 680000

L108 L: si exacto, son 680000 pero te estas adelantando un poco, la idea es que de momento solo hacer

L109 el inventario, y si bueno ahora que dijiste 680000, ¿cómo sacaste ese 680000? ¿Qué operaciones

L110 hiciste?

L111 E juan camilo: multiplicar por 2.

L112 L: exacto multiplicar por 2, eso es exactamente los pasos que quiero que vayan haciendo,

L113 entonces si tenemos dos celulares que cada uno de ellos vale 340000, lo que tenemos es 340000

L114 por 2 (mueve los números en la app para formar la operación) y hasta aquí vamos bien, y entonces

L115 cómo les dije la idea es que vallan jugando con esto de Geogebra y vallan haciendo las
L116 operaciones. Entonces de momento tenemos esta primera parte, y tenemos lo que sigue, tenemos
L117 que son 2 celulares, pero también tenemos que son 5 audífonos que iba a regalar más unos que
L118 iba a reponer entonces cuantos audífonos en total si son 5 más 1, ¿cuántos audífonos serian?
L119 E Juan José y Santiago arias: Serian 6
L120 L: 6 exacto, serian 6, entonces si queremos calcular cuánto valdrían todos como haríamos, si
L121 pensamos en como hicimos con los celulares
L122 E Juan camilo: serian 330000
L123 L: si, serian 330000 eso es cierto, pero como nosotros queremos de momento es construir la
L124 pequeña formula, y si me parece bien que se halla adelantado, pero vamos a hacerlo paso a paso
L125 para los que no les queda tan claro él porque es 330000 que ya vamos a llegar a eso. Así que
L126 ¿cómo llegaste a ese 330000?
L127 E Juan camilo: lo multiplique, ese 55000 por 6
L128 L: entonces sí, para saber cuánto da tendríamos que tomar ese 55000 por 6 (arma la formula en el
L129 Geogebra) y hasta ahí vamos bien y es aquí donde sale una cosa bastante curiosa que si nos
L130 fijamos todavía estamos hablando del presupuesto y ver cuanto está gastando, y luego nos hablan
L131 de un videojuego que costaba 150000 del cual esta persona solo va a pagar la mitad, entonces
L132 cómo podríamos cuanto le costó en realidad, cual número tendríamos ¿que tomar de estos de
L133 aquí?
L134 E Juan camilo: 150000
L135 L: exacto 150000 y entonces si se habla que gasto la mitad de estos 150000 que operación
L136 tendríamos que hacerle para saber cuánto gasto en realidad.
L137 E Joshua: división
L138 L: división, y lo dividimos con que
L139 E Juan camilo y Joshua: con dos
L140 L: exacto, entonces tenemos ya cuanto gasto la persona de este problema y es aquí algo que es
L141 bastante curioso bastante interesante, y es que haber, acá si se fijan. Bueno hasta el momento
L142 estamos como dice aquí que con la ayuda de la aplicación de Geogebra hacer un inventario del
L143 problema anterior entonces el inventario quedaría más o menos así y con la ayuda de este
L144 inventario tenemos que crear una expresión matemática para saber cuánto dinero gasto en la
L145 compra, entonces de momento tenemos que son 2 celulares de 340, 6 audífonos a 55, y un
L146 videojuego que es la mitad de 150000 entonces aquí lo que tendríamos que saber si gasto todo
L147 esto en total entonces como podríamos calcular todo eso
L148 E Juan camilo: tenemos que hacer todas las operaciones y entonces sumarlo.
L149 L: eso sumarlo así es, entonces por eso lo construí de manera así horizontal que sería suma y suma
L150 entonces les debería quedar algo así, y he aquí algo interesante, y es que como tu dijiste, primero
L151 hay que hacer las multiplicaciones y luego las sumas a lo que yo pregunto, ¿Qué pasaría si no lo
L152 hiciéramos así? ¿Por qué es importante que primero hagamos estas multiplicaciones y luego las
L153 sumas? No podríamos simplemente hacer primero las sumas o en otro orden, como sabemos que
L154 es importante que hay que hacer ciertas operaciones primero

L155 E Juan camilo: porque el resultado quedaría mal

L156 L: exacto quedaría mal, y de hecho aquí es cuando les voy a contar una de las razones por las que

L157 yo me decidí a hacer este tipo de ejercicios, si se hace este tipo de operaciones en el orden

L158 incorrecto queda mal y algo curioso y a lo que quiero llegar es que si se fijan abajo aquí hay una

L159 calculadora si utilizan alguna calculadora, las típicas que se tienen en casa sencillitas, si intentan

L160 meter toda la expresión (aquí se interrumpe porque los estudiantes tenían que ir al receso de la

L161 mitad de la clase)

L162 Después del receso

L163 L: bueno, espero que hayan tenido un buen descanso y continuemos, estuve viendo el chat y vi

L164 que alguien ya dio la respuesta de cuanto se gastó, y si efectivamente es ese valor 1085000, y lo

L165 que les quería decir antes del receso es el hecho de que si escriben esta expresión entera en

L166 algunas calculadoras, les puede dar el resultado equivocado, y es aquí donde viene estos dos

L167 bonitos símbolos, los paréntesis esto lo que me hace es que me va agrupando estas operaciones, y

L168 se supone que ahora teniendo los paréntesis a la mano ya la operación no puede dar mal.

L169 (hubo otra pausa en la que se llamó a lista)

L170 Después de esa pausa

L171 L: bueno, entonces continuando, la siguiente parte de la actividad es donde nos dicen si el

L172 presupuesto le alcanzaba para toda la compra, y aquí tenemos que volver a leer el problema, que

L173 aquí vemos que dice que inicialmente lleva 900000 así que tomamos ese número (en la app de

L174 Geogebra) y luego si recordaran aquí hablan de que los hermanos contribuyeron un poquito, 2 de

L175 sus hermanos dieron 35000, así que como podríamos saber cuánto dieron cada uno de ellos, es

L176 decir, que operación tendríamos que poner acá en esta formulita para agregar los 35000 de los

L177 dos hermanos.

L178 E Santiago arias: entre los dos hermanos cada uno dio 17.5, la mitad de 35 es 17.5

L179 L: bueno, si la mitad de 35 es 17.5 pero no están pidiendo la mitad, aquí dice que el primer

L180 hermano dio 35 y el segundo también dio 35.

L181 E Juan camilo: 70000 y hay que sumarlos

L182 L: así es, entonces que operación tendríamos que hacer aquí (señalando al número 35000)

L183 E Juan Camilo: eso lo multiplicamos por 2

L184 L: exacto, a eso es lo que quería llegar, que creáramos una formulita para calcular el presupuesto,

L185 y así es el que dijo que había que sumarlos es verdad, hay que sumarlos (procede a poner un

L186 símbolo de + entre las dos operaciones ahí puestas) y quedaría así, entonces lo siguiente sería que

L187 nos dicen que hay tres hermanos que dieron cada uno 25000, entonces como agregamos estos

L188 25000 de cada uno de los 3 hermanos a la formulita

L189 E Juan camilo: sería lo mismo solo que con los 25000

L190 L: lo mismo, ósea sería los 25000. Y que operación, ¿multiplicación, suma, división?

L191 E Juan camilo: pues, multiplicación entre eso con dos de sus hermanos

L192 L: ojo ahí, no son dos de sus hermanos.

L193 E Juan camilo: Entonces serian multiplicación por 3

L194 (para este punto está la formula casi terminada y ya están todas las operaciones puestas)

L195 L: ojo importante, ¿en qué orden se tendrían que hacer las operaciones, para que nos del valor
L196 correcto?

L197 E Juan camilo: tendríamos que hacer la multiplicación entre 35000 y 2, el 25000 por 3 y los
L198 resultados los sumamos

L199 L: exacto y la formula tendría esta forma (señalando los paréntesis que indican el orden de las
L200 operaciones) y aquí ya es resolver la fórmula de presupuesto y la fórmula de gasto y recuerden
L201 que lo pueden hacer por calculadora, que no hay ningún problema siempre y cuando sepan lo que
L202 están haciendo, y tengan cuidado de poner los paréntesis porque como digo algunas calculadoras
L203 no dan los resultados correctos, por eso la importancia de los paréntesis. Entonces si hacemos las
L204 sumas para el presupuesto ¿cuánto daría?

L205 E Santiago arias: a mí me da 1045000 (refiriéndose al presupuesto)

L206 (en el chat alguien escribió el cálculo para cuanto se gastó)

L207 E Juan camilo; a mí me da 1085000

L208 Con estas respuestas se continua

L209 L: bueno comparemos. Tenemos que gastarían 1085000 y por el otro lado llevan 1045000,

L210 entonces aquí podemos decir que le alcanzo o no el presupuesto para las compras

L211 Varios estudiantes responden al unisonó: no, no le alcanzo

L212 L: si, en efecto no le alcanzaría el presupuesto y de hecho por esto es importante hacer bien los
L213 cálculos. Entonces esta era la primera actividad ahora es que traten de responder estas

L214 preguntitas. Obviamente ya lo resolvimos, pero si alguno no presto atención o quiere resolverlo

L215 por su cuenta puede intentarlo para ver como llegarían al resultado, para que respondan estas

L216 preguntas. Entonces ¿esta actividad quedo clara?

L217 E Juan camilo: si señor

L218 Actividad reto

L219 L: bueno, pregunto si quedo claro porque en la siguiente parte en la final esta si en teoría nos

L220 tomaría menos tiempo, y es resolver un problema parecido al anterior, solo que esta vez no lo voy

L221 a resolver yo, sino que lo van a intentar hacer ustedes, y como en el anterior se van a responder

L222 unas preguntas. Y para abrir el archivo se hace como el anterior

L223 (aquí se dedica un tiempo a abrir el archivo)

L224 L: entonces continuando, tenemos el siguiente problema... (aquí se toma un tiempo para leer el

L225 problema en cuestión) ... entonces ahora ustedes me dirían como se calcula lo que gastaron,

L226 empezando por el primer grupo que compro empanadas

L227 E Juan camilo: tendríamos que multiplicar el precio de la empanada por 10 y eso lo dividimos entre

L228 4

L229 L: bien, entonces aquí tendríamos que hacer la pregunta del millon, que operación entramos que

L230 hacer primero

L231 E Juan camilo: yo diría que 700×10 y luego lo dividimos por 4

L232 L: efectivamente, pasando al siguiente grupo de salchipapas y como se calcularía lo que gasta cada

L233 uno

L234 E Juan José: pues habrá que coger el paquete de salchipapas y partirlo equitativamente

L235 L: ¿bien, y entonces como lo partiríamos?

L236 E juan camilo: tendríamos que tomar el precio de la salchipapa y dividirlo entre dos

L237 L: y me dicen que el ultimo se compró una papa rellena cuanto seria

L238 E juan camilo: seria 800

L239 L: entonces aquí la idea es que traten de calcular el total que gastaron, que tendríamos que hacer

L240 con estos tres valores, cuanto, le tocaría pagar a cada uno e intenten explicar que procedimientos

L241 hicieron, y tendrían que poner también cuanto le toca a cada uno. ¿Hasta ahí quedo claro?

L242 E juan camilo: si señor

L243 L: bueno, entonces eso sería la actividad, la idea es que respondan las preguntas, jueguen con la

L244 app y traten de mandármelo lo más pronto posible, si alguien tiene alguna duda pueden

L245 hacérmela

ANEXO 3: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

A continuación, se encuentran las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas hechas en la bitácora digital. Cabe aclarar que las respuestas están organizadas en el mismo orden en cada una de las preguntas, es decir, la primera respuesta de cada pregunta está hecha por el mismo estudiante y así con el resto.

Actividad 1 Motivación

1. En qué posición está cada jugador, puedes hacer uso de la app de Geogebra para poner cada uno en su posición.
 - Jugador 1 casilla- 23 Jugador 2 casilla- 25 Jugador 3 casilla- 15 Jugador 4 casilla- 21
 - Jugador 1 primer lugar Jugador 4 segundo lugar Jugador 3 tercer lugar Jugador 4 cuarto lugar
 - jugador 1 casilla 23 jugador 2 casilla 25 jugador 3 casilla 15 jugador 4 casilla 21
 - Jugador 1 está en la casilla 23 Jugador 2 está en la casilla 25 Jugador 3 está en la casilla 15 Jugador 4 está en la casilla 21
 - el jugador 1 está en la 23, el jugador 3 está en la 15, el jugador 4 está en la 21 y el jugador 2 está en la 28
 - 1:23, 3:15, 4:21, 2:28
 - 23 15 21 28
 - Jugador 1: 23, Jugador 2: 25, Jugador 3: 15, Jugador 4: 21
 - J1-23 J2-25 J3-15 J4-21
 - Jugador 1: 23 Jugador 2: 25 Jugador 3: 15 Jugador 4: 21
 - Jugador 1 Casilla #23 Jugador 3 Casilla #15 Jugador 4 Casilla #21 Jugador 2 Casilla #25
 - Jugador 1 casilla 23, jugador 3 casilla 15, Jugador 4 Casilla 21, Jugador 2 Casilla 25.
 - profe la verdad no me acuerdo bien porque no me quiso abrir el archivo

2. ¿Quién está más cerca de la meta?, ¿quién está más lejos de la meta?

- El más cerca es el jugador 2 por que está en la casilla 25. El más lejos de la meta es el jugador 3 por que está en la casilla 15
- Jugador 1: está cerca. Jugador 2: está lejos
- jugador 2 está más cerca jugador 3 está más lejos
- El jugador 2 está más cerca de la meta. El jugador 3 está más lejos de la meta
- El jugador 2 está más cerca y el jugador 3 está más lejos
- El 2 está más cerca y el jugador 3 más lejos
- 28 está más cerca y 15 está más lejos
- Jugador 2 está cerca de la meta y Jugador 3 está lejos de la meta
- Está más cerca el jugador 2 y está más lejos el jugador 3
- el jugador # 2 está más cerca de la meta y el jugador # 3 está más lejos
- El jugador 2 está más cerca de la meta y El jugador 3 está más lejos de la meta.
- El jugador 2 está más cerca y está más lejos el jugador 3
- el más cerca creo que era el 2 y el más lejos creo que el 4

3. Argumente el procedimiento que permite ubicar sus fichas donde están.

- muy fácil en el texto dice dónde va cada una de ellas y por eso van ubicadas en esas casillas
- Se resta la cantidad de casilla faltantes al llegar a la meta y la posición del jugador la cual se encuentran.
- contar las casillas que están delante y detrás
- El plano cartesiano
- la suma, la resta y la división
- Suma, resta, división
- profe lo tenía y se me boro Geogebra

- Jugador 1: tabla 23, Jugador 3: $3+8 = 15$
 - J1-23 J2 ($23 - 15 = 8/2 = 4 + 21 = 25$) J3 ($23 - 8 = 15$) J4 ($32-11 = 21$)
 - 1. PUESTO 23; 3. $23 - 8 =$ PUESTO 15; 4. $32 - 11 =$ PUESTO 21; 2. $23 - 15 = 8 / 2 = 4$; 2. $21 + 4 =$ PUESTO 25"
 - Averiguando las diferencias de cada posición por medio de la suma y la resta.
 - Averiguando las diferencias de cada posición por medio de la suma y resta
 - en el problema nos ponían a restar y sumar para saber dónde estaba ubicada cada una de las fichas
4. El jugador que está más lejos llegar a la meta afirma que incluso si al lanzar el dado le saliera un seis no sería capaz de alcanzar a ninguno de los otros jugadores, esta afirmación está o no en lo correcto ¿por qué?
- Es incorrecta porque si al jugador 3 saca 6 sería 21 aunque no pasaría ni quedaría atrás igual quedaría empatado con el jugador 4
 - No, porque le faltan 19 casilla para llegar a la meta.
 - no está correcta porque si lanza un 6 puede alcanzar al jugador 4
 - Esta afirmación es incorrecta porque alcanzaría al jugador 4
 - Si, por que si saca 6 queda con 21 igual que la 4
 - Si porque quedaría con 21 igual que el 4
 - se borró Geogebra
 - no está en lo correcto porque alcanzaría al jugador 4 y tendría alguna esperanza de ganar el juego
 - alcanzaría al J4 que está en la casilla 21 por que el J3 está en la casilla $15 + 6 = 21$
 - no, porque con lo que le da el dado alcanza al jugador #4
 - Esta afirmación es verdadera, porque al sumarle 6 casillas a la casilla 15 el resultado da 21 y no rebasa a ningún jugador.

- Si, por que aun sumando 6 casillas no pasara a otro jugador
- no está en lo correcto porque alcanzaría creo que al 1

Actividad 2: durante clase

1. Con la ayuda de la app de Geogebra has un inventario de todo lo que se compró en la situación anterior

- gasto 1.085.000
- 2 celulares a 340.000 pesos cada 1
8 audífonos a 55.000 pesos cada 1
75.000 pesos de la mitad del costo del video juego
- 680.000 de los celulares 275.000 de los audífonos 75.000 del video juego
- -Compro dos celulares(a) cada uno costo 340.000
b-Compro seis audífonos(b) cada uno por un valor de 55.000
c-Y un video juego(c) que costo 150.000"
- 1.030.000
- 1.030.000
- 23 15 21 28
- se compró 2 celulares 6 audífonos para sus hermanos y a un hermano menor de 12 años un video juego
- 2 celulares a \$ 340000 c/u
6 audífonos a \$55000 c/u
un video juego \$75000
- Ahorro: \$900.000
Egresos: 2 celulares a \$ 340.000 cada uno = $340.000 \times 2 = \$ 680.000$
5 audífonos a \$ 55.000 cada uno = $55.000 \times 5 = \$ 275.000$
1 video juego a \$ 150.000 / 2 = \$ 75.000

TOTAL=\$1.030.000

Reintegro de los celulares 2 x \$ 35.000 = \$ 70.000

3 x \$ 25.000 = \$ 75.000

SUBTOTAL=\$145.000

- VALOR TOTAL = \$1.030.000 - \$145.000= \$885.000"

CELULARES: 2

AUDIFONOS: 5

JUEGO DE VIDEO: 1

- CELULARES:2

AUDIFONOS:5

JUEGO DE VIDEO:1

- compro dos celulares, 6 audifonos, un juego de vídeo repartieron el coste equitativamente entre la novia y el

2. Con ayuda del inventario que creaste construye una expresión algebraica para calcular cuánto dinero gasto en la compra.

- $(340.000 \times 2) + (55.000 \times 6) + (150.000 \div 2) = 1.085.000$
- Gasto 1.195.000 pesos
- 1.030.000
- $(a \times 2) + (b \times 6) + (c) = (340000 \times 2) + (55000 \times 6) + (150000) = 1160000$
- $(340.000 \times 2) + (55.000 \times 5) + (150.000 / 2)$
- $(340.000 \times 2) + (55.000 \times 5) + (150.000 / 2)$
- el gasto 1,045,000
- El dinero que tuvo que gastar fue 1.085.000
- $(\$340000 \times 2) + (\$55000 \times 6) + (\$150000 / 2)$
 $\$900000 + (2 \times \$35000) + (3 \times \$25000)$

- $(2 \times 340000) + (5 \times 55000) + (1 \times 75000) =$

$$680000 + 275000 + 75000 = \$1030000 \text{ valor total}$$

Reintegro

$$(2 \times 35000) + (3 \times 25000) =$$

$$70000 + 75000 = \$145000$$

$$\text{Valor real } 1030000 - 145000 = 885000$$

- $900 - (340 \times 2 + 275 + 75) + (75 + 70) = 15$

- $900(340 \times 2 + 275 + 75) + (75 + 70) = 15$

- $340.000 \times 2 = 680.000, 55.000 \times 6 = 330.000, 150.000 \times 2 = 300.000,$

$$680.00 + 330.000 + 300.000 = 1.310.000$$

3. Describe el procedimiento que seguiste con tus compañeros para resolver el problema

- por gasto 1.085.000 por que $680.000 + 330.000 + 75.000 = 1.085.000$

- Sumar todos los gastos

- sumar

- Separe los valores dados y luego Multipliqué y sume para cada situación

- Primero tuve que Multiplicar 340,000 por 2, luego multiplique 55.000x5, después dividí 150.000 entre 2 y al final sume los resultados de estas operaciones

- Primero tuve que Multiplicar 340,000 por 2, luego multiplique 55.000x5, después dividí 150.000 entre 2 y al final sume los resultados de estas operaciones

- 23dividimos el valor dado restamos y sumamos

- $(340000 \times 2) + (55000 \times 6) + (150000 \div 2) = 1.085.000$

- $(\$340000 \times 2) = \$ 680000 (\$55000 \times 6) = \$330000 (\$150000/2) = \$ 75000 \text{ TOTAL}$

$$\$1085000 \$900000 + (2 \times \$35000) = \$70000 + (3 \times \$25000) = \$75000 \text{ TOTAL}$$

$$\$1045000 \$1085000 - \$1045000 = \$ 40000 \text{ Gasto en la compra } \$40000 \text{ por que tenía } \$$$

900000 ahorrados

- 1. Se realizo el inventario de los productos comprados 2. Se buscó el valor de los artículos comprados mediante las operaciones básicas con los números naturales
 - A 900.000 le restamos el dinero que se gastó comprando las cosas y luego sumamos el dinero que le dieron los hermanos.
 - A 900.000 le restamos el dinero que se gastó comprando las cosas y luego sumamos el dinero que le dieron los hermanos
 - primero hice una lista de lo que compro, luego lo pase a operación ocupando los precios que me dio en el problema, luego multiplique los precios por la cantidad que le pidieron, los resultados que me dio los sume y me dio 1.310.000 que fue lo que gasto
4. ¿Con la cantidad de dinero que lleva le alcanza para hacer toda la compra?
- No le alcanzo por que el llevaba 1.015.000 y costaba 1.085.000
 - No
 - sí porque sus hermanos le dieron más dinero
 - sí, porque el llevaba 900000 ahorrados, 70000 de dos hermanos y 75000 de los otros 3 hermanos, mas 150000 entre la novia y el, lo cual suma 1195000, y solo gasto 1160000
 - Si y le sobraron 15.000 pesos
 - Si y le sobran 15.000 pesos
 - no porque el total de la compra fue 1,085.00 y él tenía 1,045,000 quiere decir que quedo debiendo 40 mil pesos
 - No porque el lleva \$900000 y necesita \$185000 para comprar todo lo que dijo
 - No, le faltaron \$ 40000
 - sí, el dinero alcanza para hacer toda la compra porque con el ahorro del hermano mayor + el de los hermanitos se cubrió el valor de la compra

- Si
- SI
- $900.000 + (35.000 \times 2) + (25.000 \times 3) = 900.000 + 70.000 + 75.000 = 1.045.000$ no le alcanza ya que el presupuesto de él es menor que el presupuesto de lo que él va a comprar

Actividad 3: reto

1. ¿Cuánto les costó todo en total?

- les costó 10.800
- Le costó 9.300
- 11500
- todo en total costo 9.300
- 9200
- 9.200
- 803.25
- le toco pagar en total \$6.600
- $7000 \text{ empanadas} + 1500 \text{ salchipapa} + 800 \text{ papa rellena} = 9300$
- 7 amigos

$10 \text{ empanadas a } 700 \text{ pesos cada una} = \$ 700 \times 10 = \$ 7000$

$1 \text{ salchipapa a } 1500 \text{ pesos cada una} = \$ 1500 \times 1 = \$ 1500$

$1 \text{ papa rellena a } 800 \text{ pesos cada una} = \$ 800 \times 1 = \$ 800$

TOTAL = \$ 9300

- Todo les costó \$9.300
- todo les costó:9.300
- $700 \times 10 = 7.000 + 1.500 + 800 = 9.300$

2. ¿Cuánto le tocaría pagar a cada uno?

- 1.542
- A las 4 personas de las empanadas le toca pagar 1.750
El de las salchipapas a 750
Al de la papa rellena 800 pesos
- 1.437 le toca pagar a cada uno
- los que comieron empanadas pagaron 1750, los de las salchipapas pagaron 750 y el de la papa 800
- Los que compraron empanadas les toco pagar a cada uno 1,750 pesos los que compraron el paquete de salchipapa les toco pagar 750 pesos y el que compro la papa rellena pago los 800 pesos
- Los que compraron empanadas les toco pagar a cada uno 1,750 pesos los que compraron el paquete de salchipapa les toco pagar 750 pesos y el que compro la papa rellena pago los 800 pesos
- por lo de la empanada de 1,750 deben pagar los 4
los 2 que compraron la salchipapa deben pagar 7,50
y más el aborrajado que lo compro solo 1
- en el 1 grupo de amigos les toca pagar \$2.800, el segundo grupo de amigos les toca pagar \$3.000 y el tercer grupo (ósea un solo amigo de los que quedaron) le toca pagar \$800
- 4 chicos pagaron $\$7000 / 4 = \1750
2 chicos pagaron $\$1500 / 2 = \750
1 chico pago \$ 800
- Empanadas $\$7000 / 4 = \1750 cada una
Salchipapa $\$1500 / 2 = \750 cada una
Papa rellena $\$800 / 1 = \800 cada una

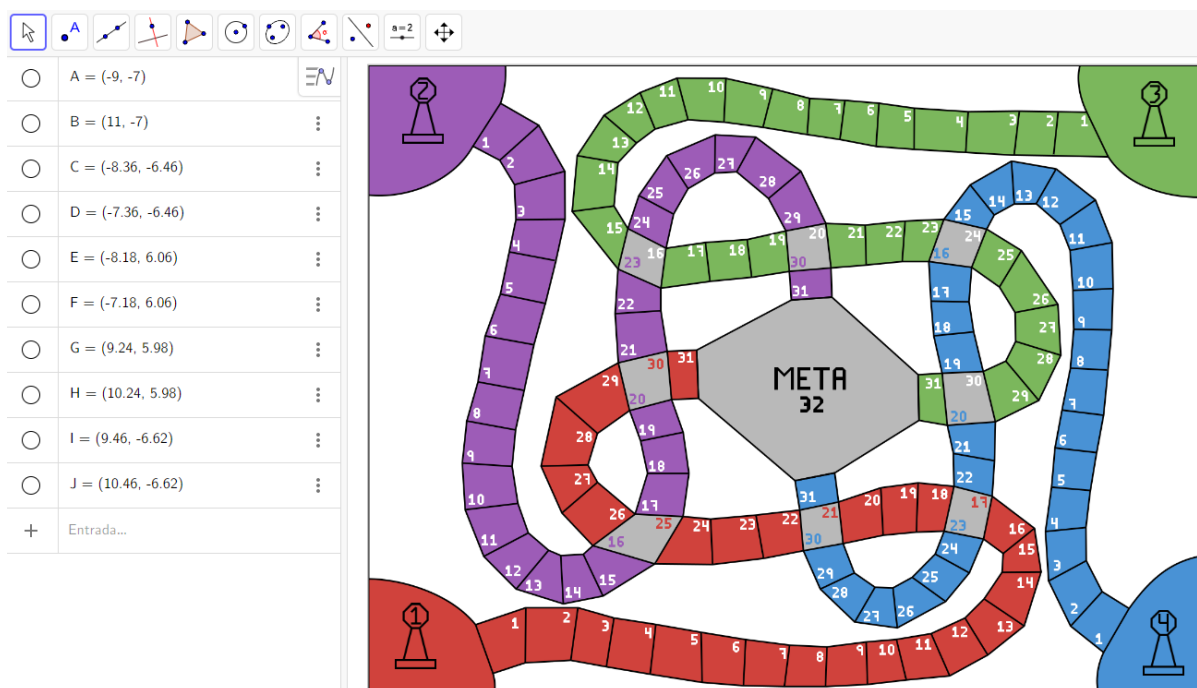
- Quienes comieron empanada pagan \$1.750 cada uno, quienes comieron salchipapa pagan \$750 cada uno y quien comió papa rellena paga \$800
 - Quienes comieron empanada pagan \$1.750 cada uno, quienes comieron salchipapa pagan \$750 cada uno y quien comió papa rellena paga \$800
 - para los que compraron las empanadas a cada uno le tocaría pagar de 1.750, para los que compraron la salchipapa le tocaría pagar a cada uno de a 750, y al último le tocaría pagar 800, y si reparten equitativamente el costo de este precio 9.300 a cada uno le tocaría de a 1.328
3. Explica el procedimiento que hiciste para hacer los cálculos.
- $(800 \times 10) + (1.500 \times 2) + (800 \times 1) = 10.800$
 - Sumar, multiplicar y dividir.
 - sacar 1 mitad
 - Separe los valores los dividí en las personas y sume
 - Primero multiplique 700 por 10 y le sume el valor de una salchipapa y una papa rellena, y así obtuve el valor total que pagaron. Luego dividí 7,000 entre 4 y 1.500 entre 2 para obtener el valor que pagó cada uno
 - Multiplique las empanadas por 10, le sume la salchipapa y papa rellena, ese es el valor de lo que costó, y luego dividí 7.000 entre 4 y 1500 entre 2 para saber cuánto pagaron cada uno
 - primero multipliqué 700×10 luego dividí por los amigos que eran 4 este r luego dividí 1,500 entre 2 luego le sume el aborrajado sume cada resultado el de la empanada y la salchipapa y el aborrajado y eso medio 803.25
 - $(700 \times 10) \div 4) (1500 \div 2) 800$

- los 4 chicos pidieron 10 empanadas a \$700 cada una y lo dividieron entre los 4
 $10 \times \$700 = \$7000 / 4 = \$1750$
los 2 chicos pidieron una salchipapa que costo \$1500 y la dividieron entre los 2
 $\$1500 / 2 = \750
y un chico pidió una papa rellena que costo \$ 800
- 1. Se realizaron multiplicaciones y divisiones para calcular el valor total y del pago de cada uno
- Tuve que multiplicar y dividir para obtener las respuestas
- Tuve que multiplicar y dividir para obtener las respuestas
- primero hice una lista de lo que compraron, luego lo pase a operación ocupando los precios que me dio en el problema, luego multiplique los precios por la cantidad que le pidieron y luego dividí el precio entre todos los amigos y separe equitativamente cuanto le tocaría pagar a cada uno

ANEXO 4: APLETS DE GEOGEBRA

A continuación, se presentan pantallazos de los aplets de Geogebra utilizados en la bitácora digital en cada una de sus fases.

Fase 1 motivación: al abrirlo se ve una imagen estilo Tablero de juego de mesa y con el ratón los estudiantes deberán mover cada uno de los jugadores por las casillas siguiendo las instrucciones dadas en la actividad.



Fase 2 Durante Clase: al abrir el aplet de esta fase se verá una serie de iconos y números, y la intención de la misma es que los estudiantes muevan cada uno de los elementos con el ratón y así vayan construyendo un inventario de las compras como lo pedía la actividad.

☐	B = (-10, 5)	≡
☐	C = (-10, 5)	⋮
☐	D = (-10, 5)	⋮
☐	E = (-8, 5)	⋮
☐	F = (-8, 5)	⋮
☐	G = (-8, 5)	⋮
☐	H = (-8, 5)	⋮
☐	I = (-8, 5)	⋮
☐	J = (-8, 5)	⋮
☐	K = (-8, 5)	⋮
☐	L = (-5, 5)	⋮
☐	M = (-5, 5)	⋮
☐	N = (-5, 5)	⋮
+	Entrada...	





900 000	150 000	340 000
55 000	35 000	25 000

() + - × ÷

2
3
4
5
6
7
8

Fase 3 Actividad Reto: al abrir el aplet de esta fase se verá una serie de iconos y números, de manera similar a la fase anterior y de la misma manera deberán realizar un inventario de la comida comprada para así responder las preguntas planteadas en esta fase de la actividad.

☐	B = (-9, 5)	≡
☐	C = (-9, 5)	⋮
☐	D = (-9, 5)	⋮
☐	E = (-9, 5)	⋮
☐	F = (-6, 5)	⋮
☐	G = (-6, 5)	⋮
☐	H = (-6, 5)	⋮
☐	I = (-3, 5)	⋮
☐	J = (-3, 5)	⋮
☐	K = (-3, 5)	⋮
☐	L = (2, 5)	⋮
☐	M = (2, 5)	⋮
☐	N = (2, 5)	⋮
+	Entrada...	

BIBLIOGRAFÍA

- Barraza, J. C., Cuastumal, J. S. O., Carballo, A. M. (2020). *Los argumentos de estudiantes universitarios en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)* Universidad Autónoma de Guerrero. Universidad Autónoma de Occidente en Cali, Colombia.
- Barraza, J. C., Sánchez, G. C., Porras, K. M. (2019). *El rol del profesor en la construcción de conocimiento matemático a través de la argumentación colectiva. Tendencias en educacin matematica.* 214-230.
- Becerra, N. R. (2013). *Uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas.* I, 8(14), 35–43.
- Ceneida, F., & Llinares, S. (2011) *De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional, Infancia y Aprendizaje,* 34:1, 67-80.
- Conner, A., Laura, M., Singletary, L. M, Ryan, C., Smith, R. C., Wagner P. A. & Richard T. F. (2014) *Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation, Mathematical Thinking and Learning,* 16:3, 181-200.
- Fernández, J. D., Santonja, J. M . (2007). *Las Tic como herramienta educativa en matemáticas.* España. Unión.
- Gómez, J., Mojica, J., Pantano, O. (2015). *Procesos de objetivación en los pensamientos algebraico, multiplicativo y aditivo. Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM. Volumen 2.*

Jiménez, V. E. C., Weiler, C.C. (2016) *Los estudios de casos como enfoque metodológico.*

ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades. Vol. 3

Nro. 2.

José, L., P. (2018). *Resolución de problemas aditivos y multiplicativos al usar fracciones en forma gráfica.*

Lee, J. K., Licwinko, S., & Taylor-Buckner, N. (2013). *Exploring Mathematical Reasoning of the Order of Operations: Rearranging the Procedural Component PEMDAS.* Journal of Mathematics Education at Teachers College.

Llinares, S. (2012). *Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea.* Avances de Investigación en Educación Matemática.

López Márquez, L. A. (2017). *El uso de Symbolab en una secuencia didáctica para la detección de errores.* Actualidades Pedagógicas, (69), 227-245.

MEN, M. D. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Murillo, O. A., Sinisterra, D. G., Benítez, D. (2018). *La Calculadora De Cuatro Reglas: Algunas Reflexiones Didácticas Sobre Su Uso Para La Resolución De Problemas Matemáticos.* Colombia. Universidad del Atlántico.

Núñez, M. L., Borjón, E. y Calvillo, N. J. (2016). *El uso de la calculadora en problemas de jerarquía de operaciones en el nivel superior.* Revista Electrónica AMIUTEM. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Pierce, C. S. (1956). *Sixth paper: Deduction, induction, and hypothesis*. En M. R. Cohen (Ed.), *Chance, Love, and Logic: Philosophical Essays* (pp. 131-153). Nueva York, NY: G. Braziller (Original publicado en 1878).

Planas, N., Morera, L. (2012) *La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado*. In *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*.

Toulmin, S., Rieke, R., y Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. Nueva York, NY: Macmillan.

Trigo, S. (2020). <https://www.revistac2.com/bitacora-digital-y-oportunidades-de-aprendizaje/>.

Vega, V., Sevilla, Y. O. (2012). *Estrategias de intervención con maestros centradas en la construcción de espacios educativos significativos para el desarrollo de competencias matemáticas*. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 30 (1), 93-107.

Voskoglou, M. G. (2008). *Problem solving in mathematics education: Recent trends and development*. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Matematiche)*, 18(1), 22-28.

Zazkis, R., Rouleau, A. *Order of operations: On convention and met-before acronyms*. *Educ Stud Math* 97, 143–162 (2018).