

Distribuciones clase (a, b) y algoritmo de Panjer

César Escalante Coterio

Recibido Jul. 28, 2005 Aceptado Abr. 18, 2006

Abstract

The (a, b) class distributions, used throughly on the actuarial context from the decade of the 80's on, present in general an important set of discrete distributions. The present article constitutes a introductory study in which the applications in *risk theory* are privileged and, at the same time, want to serve as an incentive for its study in other fields of investigation. Through the Panjer's algorithm the probability distribution of certain random sums (compound random variables) is obtained, problem that transcends the insurance mathematics. Calculation of the moments of a compound random variable with *primary distribution* in $(a, b; 1)$ class, is presented at the end.

Keywords: Frequency models, (a, b) class of distributions, the collective risk model, Panjer's algorithm.

AMSC(2000): 60E99

Resumen

Las distribuciones clase (a, b) , utilizadas ampliamente en el contexto actuarial desde la década del 80, presentan en forma general un conjunto importante de distribuciones discretas. El presente artículo constituye un estudio introductorio en el que se privilegian las aplicaciones en *teoría de riesgos* y a la vez quiere ser acicate para su estudio en otros campos de investigación. A través del *algoritmo de Panjer* se obtiene la distribución de probabilidad de ciertas sumas aleatorias (*variables aleatorias compuestas*), problema que trasciende la matemática de los seguros. Se presenta al final el cálculo de los momentos de una variable aleatoria compuesta con *distribución primaria* clase $(a, b; 1)$.

Palabras y frases claves: Modelos de frecuencia, distribuciones clase (a, b) , modelo de riesgo colectivo, algoritmo de Panjer.

1 Introducción

Una variable aleatoria (v.a.) N es discreta si existe un subconjunto numerable de reales $\mathbb{A} = \{n_0, n_1, \dots\}$ tal que $\Pr(N \in \mathbb{A}) = 1$. En tal caso se define la función de probabilidad (fp) $p : \mathbb{A} \rightarrow [0, 1]$ tal que $p(n_k) = \Pr(N = n_k)$. La pareja $(\mathbb{A}, p)$ brinda una descripción probabilística completa de N .

Una subclase importante de variables aleatorias (v.as.) discretas no negativas la constituyen los *látices*, en los que $\mathbb{A} \subseteq h\mathbb{N}_0$, esto es, $n_k = hk$ para algún real $h > 0$, donde $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. La fp de N se escribe $\{p_k\} = \{p_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, con $p_k = \Pr(N = n_k)$, y se dice que es un *látice* o *distribución aritmética*.

En teoría de riesgos los látices con $h = 1$, o *v.as. de conteo*, se usan para el modelado de la frecuencia de pérdidas (o reclamos¹), y se les llama

¹Un asegurado puede tener una pérdida y no constituirse en un reclamo ante la aseguradora porque, por ejemplo, no supera el deducible (cuantía a cargo del asegurado en cada pérdida) pactado en la póliza. Las distribuciones aquí estudiadas se aplican al modelado de ambos fenómenos.

Tabla 1: Distribuciones Poisson, binomial negativa y binomial

Distribución	p_k	$E(N)$	$Var(N)$	fgp $P_N(z)^{iii}$
$Poi(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp[\lambda(z-1)]$
$BN(\beta, r)$	$\binom{k+r-1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$	βr	$\beta r(1+\beta)$	$[1-\beta(z-1)]^{-r}$
$Geo(\beta)^i$	$\frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}$	β	$\beta(1+\beta)$	$[1-\beta(z-1)]^{-1}$
$Bin(q, m)^{ii}$	$\binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}$	mq	$mq(1-q)$	$[1+q(z-1)]^m$

i. Caso particular de la binomial negativa con $r = 1$.
ii. Para la distribución binomial $k = 0, 1, \dots, m$, y para las demás $k = 0, 1, \dots$
iii. $E(N) = P'_N(1) = E(Nz^{N-1})|_{z=1}$, $Var(N) = P''_N(1) + E(N)[1 - E(N)]$.

distribuciones de frecuencia o modelos de número de pérdidas.

La función generadora de probabilidades (fgp) (o transformada z) de N (o de su fp) es $P_N(z) = E(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $|z| \leq 1$ con $z \in \mathbb{C}$, aunque usualmente sea real.

Un entero no negativo n puede considerarse una *v.a. discreta degenerada* N con *fp degenerada* $\delta_n = I\{N = n\}$ donde la función indicadora $I\{N = n\}$ es igual a 1 si $N = n$ y 0 en otros casos. La fgp de δ_n es $P(z) = z^n$; en particular, la fgp de δ_0 es $P(z) = 1$.

Distribuciones de frecuencia de pérdidas importantes en teoría de riesgos son las de Poisson — $Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$ —, binomial — $Bin(q, m)$, $0 < q < 1$, m entero positivo— y binomial negativa — $BN(\beta, r)$, $\beta > 0$, $r > 0$ — incluyendo su caso particular geométrica — $Geo(\beta)$ — cuando $r = 1$. La Tabla 1 presenta algunas características de estas distribuciones. La varianza es igual a la media en el modelo $Poi(\lambda)$, mayor en el $BN(\beta, r)$ y menor en el $Bin(q, m)$.

El presente artículo brinda una visión general de estas distribuciones (denominadas clase $(a, b; 0)$) junto con algunas de sus extensiones y casos límites, así como aplicaciones a *modelos compuestos de número de pérdidas* y al *modelo de riesgo colectivo* a través del *algoritmo de Panjer*; [6, 9, 2, 1].

La distribución $BN(\beta, r)$ es de mayor flexibilidad que la $Poi(\lambda)$ y sus aplicaciones van desde la descripción de estadísticas de accidentes hasta su uso en procesos de nacimiento y muerte, pasando por su empleo en psicología, descripción de retrasos en series de tiempo en economía, investigación de mercado y los gastos de los consumidores, así como aplicaciones en confiabilidad, medicina, ecología y en teoría de inventarios; [4], p. 232.

2 Distribuciones clase $(a, b; 0)$

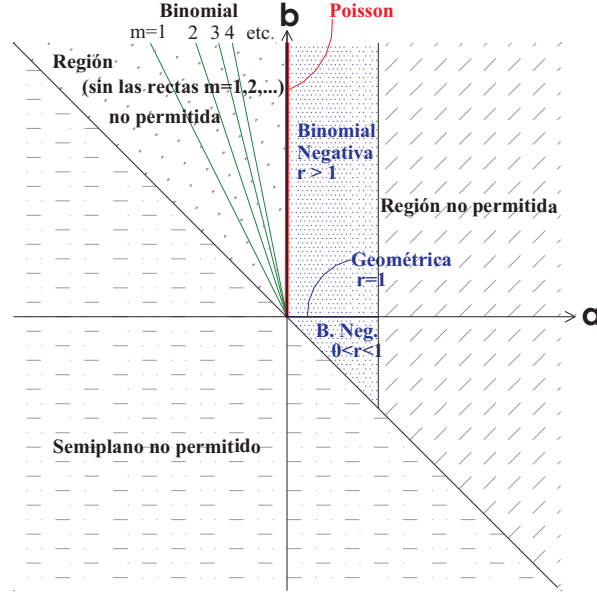
Definición 2.1. Una distribución de frecuencia $\{p_k\}$ es un miembro de la clase $(a, b; 0)$ si existen las constantes a y b tales que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

En la Tabla 2 se especifican, para cada una de estas distribuciones, los valores de las constantes a y b y se indican los respectivos valores iniciales

Tabla 2: Distribuciones clase $(a, b; 0)$

Distribución	a	b	p_0	$b = f(a)$
$Poi(\lambda)$	0	λ	$e^{-\lambda}$	λ
$BN(\beta, r)$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$	$(r-1)a$
$Geo(\beta)$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$	0
$Bin(q, m)$	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$	$-(m+1)a$

Figura 1: Distribuciones clase $(a, b; 0)$

$p_0 = \Pr(N = 0)$ para la fórmula recursiva (1).

Teorema 2.2. *Las únicas ditribuciones no degeneradas cuyas funciones de probabilidad verifican la fórmula recursiva (1) son $Poi(\lambda)$, $Bin(q, m)$ y $BN(\beta, r)$; [6].*

Demostración. Nos apoyaremos en la Tabla 2 y en la Figura 1 para guiar la demostración. Primero analizaremos las partes de $\mathbb{R}^2$ correspondientes a las distribuciones $(a, b; 0)$: Las semirrectas de la forma $b = -(m+1)a$ con $a < 0$ y $m = 1, 2, \dots$ corresponden a la distribución $Bin(q, m)$. El semieje vertical positivo ($a = 0, b = \lambda$) corresponde a la distribución de $Poi(\lambda)$. La región $b > -a$ y $0 < a < 1$ corresponde a la distribución $BN(\beta, r)$. Cuando $b = 0$, se obtiene el caso particular de la $Geo(\beta)$.

Las demás partes del plano no contienen fp de la forma (1): Es claro que en el semiplano $b < -a$ no es posible tener valores fijos de a y b que generen funciones de probabilidad de la forma (1): Para $a < 0$ y $b > 0$, todos los valores de p_k , para $k \in \mathbb{N}$, serían negativos, igual que para $a < 0$ y $b < 0$, y,

para $a > 0$ y $b < 0$, hasta cierto valor entero $k = M_1$ se obtendrían valores negativos para p_k .

Consideremos ahora la región disconexa $b \geq -a$ y $a < 0$ que excluye las semirrectas de la forma $b = -(m+1)a$ con $m = 1, 2, \dots$ ya analizadas. La semirrecta $b = -a$ (con $a < 0$) corresponde a la fp degenerada δ_0 , pues para $k \in \mathbb{N}$, $p_k = (a + b/k) p_{k-1} = 0$. Para cualquier otro punto de esta región se verifica (1) con $a < 0$ y b fijos. Así, a partir de cierto valor entero $k = M_2$ se obtendrían valores negativos para p_k , esto es, no existen en esta región fp de la forma (1).

Por último, para terminar de cubrir el plano $\mathbb{R}^2$, estudiemos lo que sucede en la región $a \geq 1$ y $b \geq -a$: Aquí $a + b/n \geq a - a/n = a(n-1)/n \geq (n-1)/n$, pues $a > 1$. Por tal razón se verifica,

$$\begin{aligned} p_2 &= \left(a + \frac{b}{2}\right) p_1 \geq \frac{1}{2} p_1 \\ p_3 &= \left(a + \frac{b}{3}\right) p_2 \geq \frac{2}{3} p_2 \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} p_1 = \frac{1}{3} p_1 \\ p_4 &= \left(a + \frac{b}{4}\right) p_3 \geq \frac{3}{4} p_3 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} p_1 = \frac{1}{4} p_1 \\ &\vdots \\ p_n &= \left(a + \frac{b}{n}\right) p_n \geq \frac{1}{n} p_1 \end{aligned}$$

y en consecuencia $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \geq p_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$ diverge, así que no existe fp de la forma (1) en esta región. Por consiguiente, las únicas distribuciones no degeneradas que satisfacen (1) son $Poi(\lambda)$, $Bin(q, m)$ y $BN(\beta, r)$. $\square$

La fórmula (1) puede expresarse $k p_k / p_{k-1} = ak + b$, $k \in \mathbb{N}$, esto es, la cantidad $k p_k / p_{k-1}$ es una función lineal en k con pendiente a . Como se observa en la Tabla 2, la pendiente a es nula para $Poi(\lambda)$, positiva para la $BN(\beta, r)$ y negativa para la $Bin(q, m)$.

En la siguiente sección ampliaremos la lista de distribuciones discutidas hasta el momento, a través de construcciones de modelos más generales relacionados con las mismas.

3 Distribuciones clase $(a, b; 1)$

Examinaremos el problema de un bajo ajuste de la distribución en los menores valores de la v.a. de conteo N , en particular en $p_0 = \Pr(N = 0)$. En seguros p_0 es la probabilidad de no tener pérdidas durante el periodo en estudio. Cuando $\Pr(N \geq 1)$ es baja, p_0 tiene obviamente un gran valor, y en consecuencia es de importancia capital su evaluación precisa. En contraste, existen situaciones en las que la probabilidad de no sufrir pérdidas en un lapso dado es casi nula,

como sucede, por ejemplo, en el programa de seguros de autos de una gran flota de vehículos o en una póliza colectiva de salud.

Definición 3.1. Una distribución de frecuencia $\{p_k\}$ es un miembro de la clase $(a, b; 1)$ si existen las constantes a y b tales que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (2)$$

La única diferencia con las distribuciones clase $(a, b; 0)$ es que en éstas la recursión inicia en $k = 1$, mientras que en la clase $(a, b; 1)$ comienza en $k = 2$, y es claro que todo miembro clase $(a, b; 0)$ lo es también de la clase $(a, b; 1)$.

Puede suceder que la forma (no las probabilidades) de una distribución coincida, salvo en cero, con la de un láctice clase $(a, b; 0)$ con fp $\{p_k\}$. Una solución factible para ajustar los datos en tal situación es construir una *distribución Cero-Modificada (ZM)* $\{p_k^M\}$ con $p_0^M \in [0, 1)$ —valor arbitrario— y $p_k^M = cp_k$, $k \in \mathbb{N}$, donde c es una constante de proporcionalidad tal que $1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M = p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M = p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_0^M + c(1 - p_0)$. Esto es, $c = (1 - p_0^M)/(1 - p_0)$ y de esta manera

$$p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Una distribución así construida es clase $(a, b; 1)$. Por esta vía surgen las fp ZM-Poi(λ), ZM-BN(β, r) (que incluye a ZM-Geo(β)) y ZM-Bin(q, m). En el caso extremo cuando $p_0^M = 0$, se obtiene una subclase especial de miembros de $(a, b; 1)$ denominada distribuciones *Cero-Truncadas (ZT)*, con fp $\{p_k^T\}$. Éstas son: ZT-Poi(λ), ZT-BN(β, r) (que incluye a ZT-Geo(β)) y ZT-Bin(q, m). De (3),

$$p_k^T = \frac{p_k}{1 - p_0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Y de (3) y (4),

$$p_k^M = (1 - p_0^M) p_k^T; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Cálculo de P^M , fgp de $\{p_k^M\}$

$$\begin{aligned} P^M(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k = p_0^M + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\ &= p_0^M + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} [P(z) - p_0], \end{aligned} \quad (6)$$

donde $P(z)$ es la fgp de $\{p_k\}$, perteneciente a la clase $(a, b; 0)$. Con $p_0^M = 1 - \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} (1 - p_0)$ obtenemos de (6),

$$P^M(z) = \left(1 - \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}\right) \cdot 1 + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} \cdot P(z), \quad (7)$$

que corresponde al promedio ponderado de la fgp de δ_0 y la fgp del miembro de la clase $(a, b; 0)$.

Cálculo de P^T , fgp de $\{p_k^T\}$ De (7), con $p_0^M = 0$,

$$P^T(z) = \frac{P(z) - p_0}{1 - p_0} \quad (8)$$

A partir de (8) se puede expresar P^M , según (6), en la forma

$$P^M(z) = p_0^M + (1 - p_0^M)P^T(z) \quad (9)$$

Así, la fgp de la distribución ZM es también el promedio ponderado de la fgp de δ_0 y la fgp de la distribución ZT correspondiente al látice de la clase $(a, b; 0)$.

Distribución binomial negativa truncada extendida, ETNB

A partir de la distribución ZT-BN(β, r) es posible (a través de la ampliación del espacio de parámetros), obtener una nueva distribución de la clase $(a, b; 1)$, a saber: la *Binomial Negativa Truncada Extendida* (ETNB²). El espacio de los parámetros a y b se amplía para admitir una extensión que incluya casos en los que $-1 < r < 0$. Así, los parámetros de la distribución ETNB de la clase $(a, b; 1)$ son entonces $\beta > 0$ y $r > -1$, con $r \neq 0$.

Justifiquemos por qué la ETNB es una distribución de probabilidad: Por definición $p_0^T = 0$. De (4),

$$p_1^T = \frac{p_1}{1 - p_0} = \frac{\beta r}{(1 + \beta)^{r+1} - (1 + \beta)} \quad (10)$$

En el nuevo espacio de parámetros, $p_1^T \in (0, 1)$. En efecto³, sea $f(r) = (1 + \beta)^{r+1} - (1 + \beta) - \beta r$. Así, $f'(r) = (1 + \beta)^{r+1} \ln(1 + \beta) - \beta$ y $f''(r) = (1 + \beta)^{r+1} \ln^2(1 + \beta)$. Como $\beta > 0$, entonces $f''(r) > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, y en consecuencia f es convexa en todo su dominio $\mathbb{R}$. Por otra parte, $f'(r) \leq 0$ implica que $r \leq \ln \left\{ \beta [\ln(1 + \beta)]^{-1} \right\} / \ln(1 + \beta) - 1 = r_c$, punto crítico. O sea que f es decreciente en el intervalo $(-\infty, r_c)$ y creciente en (r_c, ∞) . Por último, como f tiene el mínimo en $r = r_c$ (pues $f''(r_c) > 0$), y además $f(-1) = f(0) = 0$, entonces, para $r \in (-1, 0)$ y $\beta > 0$: $f(r) = (1 + \beta)^{r+1} - (1 + \beta) - \beta r < 0$, lo que implica que $(1 + \beta)^{r+1} - (1 + \beta) < \beta r < 0$, y así, por (10), $0 < p_1^T < 1$.

²*Extended Truncated Negative Binomial*. Distribución introducida por S. Engen en 1974, trabajo citado en [11, 4].

³El intervalo de interés para el parámetro r es $(-1, 0)$, pues para $r > 0$ estaríamos en la distribución binomial negativa, donde no habría nada qué probar.

Para la distribución ETNB, $a = \beta/(1 + \beta)$ y $b = (r - 1)a$, con $\beta > 0$, $r > -1$, $r \neq 0$. Así, para $k = 2, 3, \dots$,

$$p_k^T = p_{k-1}^T \left(\frac{\beta}{1 + \beta} + \frac{r-1}{k+1} \frac{\beta}{1 + \beta} \right) = p_{k-1}^T \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{k+r-1}{k}$$

y $p_{k-1}^T = p_{k-2}^T \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{k+r-2}{k-1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} p_k^T &= p_{k-2}^T \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^2 \frac{k+r-1}{k} \frac{k+r-2}{k-1} \\ &= p_{k-3}^T \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^3 \frac{k+r-1}{k} \frac{k+r-2}{k-1} \frac{k+r-3}{k-2} \\ &\vdots \\ &= p_1^T \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{k-1} \frac{k+r-1}{k} \frac{k+r-2}{k-1} \dots \frac{r+1}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

En consecuencia, $p_k^T > 0$ para $k = 2, 3, \dots$, pues $p_1^T \in (0, 1)$, $\beta > 0$ y $r > -1$, $r \neq 0$, lo que hace que cada factor en (11) sea positivo. Verifiquemos ahora que $\sum_{j=1}^{\infty} p_j^T = 1$. Para esto usaremos la identidad obtenida en [5] por el desarrollo en serie de Taylor alrededor de cero, de la función $h(t) = (1-x)^t$, con $t = -r$:

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} x^k, \quad |x| < 1 \quad (12)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p_k^T &= p_1^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{k-1} \frac{k+r-1}{k} \frac{k+r-2}{k-1} \dots \frac{r+1}{2} \\ &= \frac{p_1^T}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{k-1} \frac{\overbrace{(k+r-1)(k+r-2)\dots(r+1)r}^{\Gamma(k+r)} \Gamma(r)}{k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot \Gamma(r)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k^T &= \frac{p_1^T (1 + \beta)}{\beta r} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^k \\ &= \frac{p_1^T (1 + \beta)}{\beta r} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^k - 1 \right] \\ &= \frac{p_1^T (1 + \beta)}{\beta r} \left[\left(1 - \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{-r} - 1 \right], \text{ por (12)} \\ &= 1, \text{ por (10).} \end{aligned}$$

La fp ETNB es

$$p_k^T = \frac{\binom{k+r-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{(1+\beta)^r - 1}, \quad \beta > 0, \quad r > -1, \quad r \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

La fgp de la ETNB se obtiene también con la ayuda de (12):

$$P(z) = \frac{[1 - \beta(z-1)]^{-r} - (1+\beta)^{-r}}{1 - (1+\beta)^{-r}}, \quad \beta > 0, \quad r > -1, \quad r \neq 0. \quad (13)$$

La media y la varianza de una v.a. N con distribución ETNB son, respectivamente:

$$E(N) = \frac{\beta r}{1 - (1+\beta)^{-r}}, \quad Var(N) = \frac{\beta r [(1+\beta) - (1+\beta+\beta r)(1+\beta)^{-r}]}{[1 - (1+\beta)^{-r}]^2}$$

Distribución logarítmica, caso límite de la ETNB

Estudiamos el límite de la ETNB cuando $r \rightarrow 0$. La distribución obtenida es la logarítmica $Log(\beta)$ y su fp se deduce a partir de (11) cuando $r \rightarrow 0$:

$$p_k^T = p_1^T \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{k-1} \frac{(k-1)(k-2)\cdots 2}{k(k-1)\cdots 2} = p_1^T \frac{1+\beta}{\beta} \frac{1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k.$$

Así, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^T = p_1^T \frac{1+\beta}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k = 1$, y usando la expansión en serie de Taylor de $\ln(1-x)$, obtenemos $p_1^T \frac{1+\beta}{\beta} \left[-\ln\left(1 - \frac{\beta}{1+\beta}\right)\right] = p_1^T \frac{1+\beta}{\beta} \ln(1+\beta) = 1$, con lo cual $p_1^T = \beta / [(1+\beta) \ln(1+\beta)]$. Por tanto, $p_k^T = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \frac{1}{k \ln(1+\beta)}$, $k = 1, 2, \dots$. La fgp de la distribución logarítmica es entonces

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{\ln(1+\beta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\beta z}{1+\beta}\right)^k = \frac{1}{\ln(1+\beta)} \left[-\ln\left(1 - \frac{\beta z}{1+\beta}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{\ln[1 - \beta(z-1)]}{\ln(1+\beta)} \end{aligned}$$

La media y la varianza de una v.a. N que sigue la distribución logarítmica son, respectivamente:

$$E(N) = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)}, \quad Var(N) = \frac{\beta \left[1 + \beta - \frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\right]}{\ln(1+\beta)}$$

La distribución $ZM-Log(\beta)$ se crea asignando un valor $p_0^M \in (0, 1)$ y, a partir de (5), deduciendo las otras probabilidades.

Tabla 3: Distribuciones clase $(a, b; 1)$

Distribución ⁽ⁱ⁾	Parámetros	a	b	p_0
$Poi(\lambda)$	$\lambda > 0$	0	λ	$e^{-\lambda}$
ZT- $Poi(\lambda)$	$\lambda > 0$	0	λ	0
ZM- $Poi(\lambda)$	$\lambda > 0$	0	λ	(ii)
$BN(\beta, r)$	$\beta > 0, r > 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
ETNB	$\beta > 0, r > -1, r \neq 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	0
ZM-ETNB	$\beta > 0, r > -1, r \neq 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	(ii)
$Geo(\beta)$	$\beta > 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$
ZT- $Geo(\beta)$	$\beta > 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	0
ZM- $Geo(\beta)$	$\beta > 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	(ii)
$Bin(q, m)$	$0 < q < 1, m \in \mathbb{N}$	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
ZT- $Bin(q, m)$	$0 < q < 1, m \in \mathbb{N}$	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	0
ZM- $Bin(q, m)$	$0 < q < 1, m \in \mathbb{N}$	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	(ii)
$Log(\beta)$	$\beta > 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$-\frac{\beta}{1+\beta}$	0
ZM- $Log(\beta)$	$\beta > 0$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$-\frac{\beta}{1+\beta}$	(ii)

i. ZT: Cero truncada. ZM: Cero modificada.

ii. Arbitrario en $[0, 1)$. Con $p_0 = 0$, se obtiene la versión ZT.

La distribución $Log(\beta)$ tiene la ventaja de depender de sólo un parámetro en lugar de los dos necesarios para la $BN(\beta, r)$, y sirve para describir el número de especies de plantas encontrado en cuadrados de diferentes tamaños de terrenos, la distribución de parásitos por anfitrión, aplicaciones a problemas de control de inventario en la industria siderúrgica y la distribución del número de artículos de un producto ordenados por un comprador en un periodo dado de tiempo; [4], p. 316.

Distribución de Sibuya, caso límite de la ETNB

En 1979 M. Sibuya introdujo la distribución homónima. La fgp de otra distribución límite de la ETNB (con $-1 < r < 0$) se obtiene de (13) cuando $\beta \rightarrow \infty$, y es $P(z) = 1 - (1 - z)^{-r}$. Se denomina distribución de Sibuya, no tiene momentos finitos (su media es $P'(1) = \infty$) y por tal razón carece de interés como modelo de frecuencia de pérdidas, pues como se sabe, la *prima pura* del seguro se obtiene del producto de la frecuencia media por la severidad media. La fp se infiere de su fgp y (12): $P(z) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\binom{k+r-1}{k} \right] z^k$, así que los coeficientes de z^k son precisamente su fp: $p_k^T = -\Gamma(k+r)/[k! \cdot \Gamma(r)]$, $k \in \mathbb{N}$.

La Tabla 3 contiene todas las distribuciones clase $(a, b; 1)$. En [6] se demuestra que ninguna otra distribución no degenerada pertenece a esta amplia clase. Una distribución no perteneciente a la clase $(a, b; 1)$, usada como modelo de frecuencia, es la distribución zeta; es ZT y su fp es $p_k^T = k^{-(\rho+1)}/\zeta(\rho+1)$, $\rho > 0$, $k \in \mathbb{N}$. El denominador es la función zeta, que puede evaluarse como $\zeta(\rho+1) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(\rho+1)}$. Se observa que $p_k/p_{k-1} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\rho+1} \neq a + \frac{b}{k}$, $\forall a, b, \rho, k$.

4 Variables aleatorias compuestas

Una *v.a. compuesta* $S = S_N$ es una suma aleatoria

$$S_0 = 0, S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, N \geq 1 \quad (14)$$

donde las v.as. X_j son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución (fd) común $F_X(x) = \Pr(X_j \leq x)$, y la v.a. de conteo N es independiente de las v.as. X_j . La fgp de S es

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)], \quad (15)$$

siempre que la fgp P_X exista. La fd de la v.a. compuesta S es $F_S(x) = \Pr(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)$, donde la n -ésima convolución de F_X es $F_X^{*n}(x) = \Pr(X_1 + \cdots + X_n \leq x)$; [1, 2].

Si N sigue un modelo Poisson ($N \sim Poi(\lambda)$), se dice que S tiene *distribución compuesta de Poisson*, modelo de capital importancia en el estudio del problema clásico de la ruina de un asegurador ([9, 6, 2]) y en otras aplicaciones de la probabilidad; [8, 10].

Respecto de (14), la fp $\{p_k\}$ de N se denomina *distribución primaria*: $p_k = \Pr(N = k)$; la fp $\{f_k\}$ de X se denomina *distribución secundaria*⁴: $f_k = \Pr(X = k)$ y la fp de S es $\{g_k\}$: $g_k = \Pr(S = k)$.

Toda distribución ZM es una distribución compuesta. En efecto, consideremos la distribución primaria de Bernoulli, de modo que $P_N(z) = 1 - q + qz$. Entonces, por (15), $P_S(z) = (1 - q) \cdot 1 + qP_X(z)$, que coincide con (7) cuando $q = (1 - p_0^M)/(1 - p_0)$.

El modelo descrito por la v.a. compuesta S tiene gran variedad de aplicaciones; por ejemplo, sirve para describir la demanda de un artículo determinado en un lapso dado. Dos importantes usos en teoría de riesgos son: Como modelo de frecuencia, las v.as. X_j son discretas, y S corresponde al número total de pérdidas resultantes de la suma de un número N aleatorio de accidentes en los que en cada uno ocurren X eventos. Por ejemplo, el número total de torres de transmisión de energía eléctrica afectadas por atentados terroristas en un lapso dado: N es el número de atentados y X_j el número de torres afectadas en el j -ésimo ataque. En [2, 4] se prueba que si $N \sim Poi(\lambda_1)$ y $X \sim Poi(\lambda_2)$, entonces S sigue la distribución Poisson-Poisson o Neyman tipo A con fgp $P(z) = \exp\{\lambda_1 [e^{\lambda_2(z-1)} - 1]\}$; como modelo de riesgo colectivo, la v.a. N describe el número de reclamos o pérdidas acaecidos en un lapso de estudio $[0, t]$ (un año, por ejemplo), mientras que la v.a. X_j representa la cuantía de la j -ésima pérdida individual, así que las v.as. X_j pueden ser continuas; [9, 6, 2, 7, 1].

La distribución de Neyman tipo A ha sido usada para describir distribuciones de plantas, especialmente cuando la reproducción de especies se da por

⁴Cuando X es discreta o es su versión discretizada.

grupos. Otro modelo concreto descrito por S es la distribución Pólya-Aeppli, que se obtiene cuando $N \sim Poi(\lambda)$ y $X \sim ZT-Geo(\beta)$; [4, 2].

Algoritmo de Panjer

No existe solución analítica general para la fd $F_S(x)$ ⁵. Empero, cuando N es de clase (a, b) es posible hallar la distribución de probabilidad de S a través del algoritmo de Panjer.

Presentamos los casos en los que X es discreta, donde se obtiene la distribución exacta de S , o continua en versión discretizada, donde la distribución obtenida para S es aproximada. En ambos casos la serie que define la fgp converge para $|z| \leq 1$ y por tanto existe P_X . El caso correspondiente a X continua puede consultarse en [6, 7]; es posible que la distribución de X tenga *cola pesada*, es decir, que la función generadora de momentos de X no tenga forma cerrada, lo que exige un tratamiento matemático diferente para la distribución de S ; [7].

Teorema 4.1 (Algoritmo de Panjer). *Si la distribución primaria en (14) es un miembro de la clase $(a, b; 1)$, entonces $g_0 = P_N(f_0)$ y*

$$g_k = \frac{[p_1 - (a + b)p_0]f_k + \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right)f_j g_{k-j}}{1 - af_0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Demostración. De (15), $g_0 = \Pr(S = 0) = P_S(0) = P_N[P_X(0)] = P_N(f_0)$. De (2) con $np_n = [a(n-1) + (a+b)]p_{n-1}$, multiplicando en cada lado por $[P_X(z)]^{n-1}P'_X(z)$, sumando en n y dado que $P_S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n [P_X(z)]^n$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \overbrace{\sum_{n=2}^{\infty} np_n [P_X(z)]^{n-1} P'_X(z)}^{P'_S(z) - p_1 P'_X(z)} \\ &= a \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) p_{n-1} [P_X(z)]^{n-1} P'_X(z) + (a+b) \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} [P_X(z)]^{n-1} P'_X(z) \end{aligned}$$

En consecuencia, con $k = n - 1$,

$$\begin{aligned} & P'_S(z) - p_1 P'_X(z) \\ &= a P_X(z) \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \frac{[P_X(z)]^k}{P_X(z)} P'_X(z) + (a+b) P'_X(z) \sum_{k=1}^{\infty} p_k [P_X(z)]^k \\ &= a P'_S(z) P_X(z) + (a+b) P'_X(z) [P_S(z) - p_0]. \end{aligned}$$

⁵En [7, 2, 1] se estudian algunas soluciones analíticas particulares para la fd $F_S(x)$ obtenidas por métodos diferentes a los usados en este artículo.

Expandiendo ambos miembros en potencias de z e igualando los coeficientes de z^{k-1} , obtenemos

$$\begin{aligned}
kg_k - p_1kf_k &= a \sum_{j=0}^k (k-j) f_j g_{k-j} + (a+b) \sum_{j=1}^k j f_j g_{k-j} - kp_0(a+b)f_k \\
&= akf_0g_k + a \sum_{j=1}^k (k-j) f_j g_{k-j} + (a+b) \sum_{j=1}^k j f_j g_{k-j} - kp_0(a+b)f_k \\
&= akf_0g_k + ak \sum_{j=1}^k f_j g_{k-j} + b \sum_{j=1}^k j f_j g_{k-j} - kp_0(a+b)f_k.
\end{aligned}$$

Y (16) se obtiene al despejar g_k de la ecuación anterior. $\square$

Corolario 4.2 (Algoritmo de Panjer). *Si la distribución primaria en (14) es un miembro de la clase $(a, b; 0)$, entonces $g_0 = P_N(f_0)$ y*

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k} \right) f_j g_{k-j}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Demostración. De (16), con $p_1 = (a+b)p_0$, pues en este caso $\{p_k\}$ es clase $(a, b; 0)$, se obtiene (17). $\square$

Un caso particular de (17) se obtiene cuando $\{p_k\}$ es $Poi(\lambda)$. Así, la forma recursiva de calcular la fp de una v.a. compuesta de Poisson es, $g_0 = \exp[-\lambda(1 - f_0)]$ y $g_k = (\lambda/k) \sum_{j=1}^k j f_j g_{k-j}$, $k \in \mathbb{N}$, que fue presentada por R. M. Adelson en 1966; [10, 8].

En el modelo de riesgo colectivo, en los casos en los que X tiene densidad de probabilidad, es posible utilizar el algoritmo de Panjer como aproximación, a través de la versión discretizada de X ([2]), que puede ser (sin excluir otra posibilidad) considerada como el látice con eventos $\{X = jh\}$, donde $h > 0$ y $j \in \mathbb{N}_0$, esto es, con $f_0 = \Pr(X < \frac{h}{2})$ y $f_j = \Pr(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}) = F_X(jh + \frac{h}{2}) - F_X(jh - \frac{h}{2})$ para $j \in \mathbb{N}$. Un ejemplo que muestra el parentesco entre las distribuciones exponencial y geométrica se logra al discretizar la primera. Usando este método de discretización, se obtiene la distribución ZM-Geométrica a partir de la distribución exponencial, ambas con la propiedad de *pérdida de memoria*, esto es, $\Pr(X > t + s | X > t) = \Pr(X > s)$, $\forall s, t \geq 0$. En efecto, $F_X(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x > 0$, con lo cual, $f_0 = F_X(\frac{h}{2}) = 1 - e^{-\frac{\mu h}{2}}$, y, para $j = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}
f_j &= F_X \left[\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right] - F_X \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) h \right] \\
&= 1 - e^{-\mu h(j + \frac{1}{2})} - 1 + e^{-\mu h(j - \frac{1}{2})} = e^{-\frac{\mu h}{2}} \left(1 - e^{-\mu h} \right) e^{-\mu h(j-1)} \\
&= (1 - f_0) (1 - \vartheta) \vartheta^{j-1}
\end{aligned}$$

donde $\vartheta = e^{-\mu h}$.

Es posible generalizar el método expuesto para obtener la clase $(a, b; \ell)$, con modificaciones arbitrarias de los ℓ valores iniciales de la fp clase $(a, b; 0)$. Por ejemplo, en [3] se estudia el interesante caso de la versión truncada de la clase $(a, b; \ell)$. Antes de este trabajo, se presentaron, durante las décadas del 80 y 90, varias generalizaciones del algoritmo de Panjer.

Momentos de una v.a. compuesta con distribución primaria clase $(a, b; 1)$

En [1] se deducen los tres primeros momentos de la v.a. compuesta S en (14):

$$\begin{aligned} E(S) &= \mu'_S = \mu'_N \cdot \mu'_X = E(N) \cdot E(X) \\ Var(S) &= \mu_{S2} = \mu'_N \cdot \mu_{X2} + \mu_{N2} \cdot (\mu'_X)^2 \\ E[(S - \mu'_S)^3] &= \mu_{S3} = \mu'_N \cdot \mu_{X3} + 3\mu_{N2} \cdot \mu'_X \cdot \mu_{X2} + \mu_{N3} \cdot (\mu'_X)^3 \end{aligned}$$

donde el primer subíndice indica la variable y el segundo (de los que lo tienen) el orden del momento.

A continuación se presenta un teorema general para los momentos de S cuando la distribución primaria es clase $(a, b; 1)$, que incluye, como caso particular ([9]), a la clase $(a, b; 0)$, pues $p_1 = (a + b)p_0$.

Teorema 4.3. *Si la distribución primaria $\{p_k\}$ de S en (14) es clase $(a, b; 1)$, entonces, para $n \in \mathbb{N}$,*

$$E(S^n) = \frac{[p_1 - (a + b)p_0] E(X^n) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \left(a + \frac{bj}{n}\right) E(X^j) E(S^{n-j})}{1 - a} \quad (18)$$

siempre que $E(X^j)$, con $j = 1, 2, \dots, n$, exista.

Demostración.

$$\begin{aligned} (1 - af_0) E(S^n) &= (1 - af_0) \sum_{m=0}^{\infty} m^n g_m = \sum_{m=1}^{\infty} m^n (1 - af_0) g_m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m^n \left\{ [p_1 - (a + b)p_0] f_m + \sum_{k=1}^m \left(a + \frac{bk}{m}\right) f_k g_{m-k} \right\}, \text{ de (16)} \\ &= [p_1 - (a + b)p_0] \sum_{m=1}^{\infty} m^n f_m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (am^n + bkm^{n-1}) f_k g_{m-k} \\ &= \underbrace{[p_1 - (a + b)p_0] E(X^n)}_{\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} (am^n + bkm^{n-1}) f_k g_{m-k} \\ &= \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[a(l + k)^n + bk(l + k)^{n-1} \right] f_k g_l \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
E(S^n) &= af_0 E(S^n) + (1 - af_0) E(S^n) \\
&= af_0 \sum_{l=0}^{\infty} l^n g_l + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[a(l+k)^n + bk(l+k)^{n-1} \right] f_k g_l \\
&= \gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[a(l+k)^n + bk(l+k)^{n-1} \right] f_k g_l \\
&= \gamma + a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (k+l)^n f_k g_l + b \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k(k+l)^{n-1} f_k g_l \\
&= \gamma + a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} l^{n-j} k^j f_k g_l \\
&\quad + b \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} l^{n-1-j} k^{j+1} f_k g_l \\
&= \gamma + a \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E(X^j) E(S^{n-j}) \\
&\quad + b \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} E(X^{j+1}) E(S^{n-1-j}) \\
&= \gamma + a E(S^n) + a \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} E(X^j) E(S^{n-j}) \\
&\quad + b \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j} E(X^j) E(S^{n-j})
\end{aligned}$$

de donde se obtiene (18). $\square$

La fórmula recursiva (18) es una generalización de la identidad demostrada en [8], p. 85, para una v.a. compuesta de Poisson.

En [4] se pueden consultar otras aplicaciones de las distribuciones aquí estudiadas, su génesis, generalizaciones mayores y una extensa bibliografía.

Agradecimientos. El autor agradece las importantes observaciones y sugerencias hechas por los árbitros del artículo.

Referencias

- [1] Escalante, C.; Arango, G. Aspectos básicos del modelo de riesgo colectivo. Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. XII, No 2. (2004).

- [2] Klugman, Stuart A.; Panjer, Harry H.; Willmot, Gordon E.(1998). Loss Models: From Data to Decisions. Wiley.
- [3] Hess, K.; Liewald, A.; Schmidt, K. An extension of Panjer's recursion. Astin Bulletin, Vol. 32, No 2. (2002).
- [4] Johnson, Norman L.; Kemp, Adriene W.; Kotz, Samuel. Univariate Discrete Distributions. Wiley. Third Edition.(2005).
- [5] Mood, A.; Graybill, F.; Boes, D. Introduction to the Theory of Statistics. McGrawHill. Third Edition. (1974).
- [6] Panjer, Harry H.; Willmot, Gordon E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries. (1992).
- [7] Rolsky, T.; Schmidli, H.; Schmidt, V.; Teugels, J. Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley. (1999).
- [8] Ross, Sheldon M. Stochastic Processes. Wiley. Second Edition. (1996).
- [9] Schmidt, Klaus D. Lectures on risk theory. Technische Universität Dresden. (1995).
- [10] Tijms, Henc C. A First Course in Stochastic Models. Wiley. (2003).
- [11] Willmot, Gordon E. Sundt and Jewell's family of discrete distributions. Astin Bulletin, Vol. 18, No 1. (1988).

Dirección del autor: César Escalante Coterio, Delima Marsh S.A. Ingeniería de Riesgos, Cesar.E.Escalante@Marsh.com