Vol. XIX, Nº 1, Junio (2011)
Educación e Historia: 89–101

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

El origen del metro y la confianza en la matemática

Hernán Estrada B.
Universidad Nacional de Colombia

Jorge Mauricio Ruiz V.
Universidad Nacional de Colombia

Juan Gabriel Triana L.
Universidad Nacional de Colombia

Recibido Ago. 27, 2010 Aceptado Nov. 19, 2010

Abstract

After the fall of the monarchy due to the French Revolution, the government had the idea of creating a system of weights and measures to unify the French countrywide. Such measure should not rely on arbitrary judgments or temporary things like the size of the body or other present king's attributes, but rather there was an absolute trust in defining a new unit with the help of the mathematicians. They trusted that this discipline was "able"to carry out this formidable task. In order to become universal this new unit, it was defined as the 1 ten-millionth part of the distance along the meridian passing through Paris from the North Pole to the equator. But how did mathematicians like François-André Méchain, and Jean-Baptiste-Joseph Delambre to carry out this extraordinary project if there were not satellites, GPS, or computers? In this paper we show how to answer this questions by using some tools of applied mathematics.

Keywords: History of mathematics, Least square method.

MSC(2000): Primary: 65-03, Secondary: 01A05

Resumen

Después de la caída de la monarquía como consecuencia de la revolución francesa, el gobierno tuvo la idea de crear un sistema de pesos y medidas para unificar a los franceses a lo largo y ancho del país. Dicha medida no debía basarse en juicios arbitrarios o cosas temporales como el tamaño del cuerpo u otros atributos del monarca de turno sino que se tuvo la idea de definir una nueva unidad con ayuda de matemáticos. Confiaron en que esta disciplina era "capaz"de llevar a cabo esta formidable tarea. Para que la nueva unidad fuera universal consideraron definirla como la diezmillonésima parte de la longitud del meridiano que pasa por Paris desde el polo norte hasta el ecuador. ¿Pero cómo hicieron matemáticos como François-André Méchain, y Jean-Baptiste-Joseph Delambre para llevar a cabo este proyecto si no se disponía de satélites, GPS, o computadores de última generación? En este artículo mostraremos como con elementos de la matemática aplicada se puede dar respuesta a esta inquietud.

Palabras y frases claves: Historia de las matemáticas, método de mínimos cuadrados

1 Introducción

A través de la historia, medir ha sido una necesidad de la sociedad. Por esta razón se han adoptado diversos patrones de medida para la longitud, el peso, la unidad de tiempo, el volumen, etc. Inicialmente el hombre utilizó las dimensiones del cuerpo para definir patrones de medidas de longitud, entre ellos el pie, el palmo, la brazada, y demás. Con el paso de los años se empezaron a utilizar herramientas para medir, prueba de ello son el uso de barras y palos en la edad media; sin embargo las medidas variaban entre los lugares, e incluso entre los habitantes de la misma ciudad. Es así que en Francia en el siglo XVIII existían más de 700 diferentes medidas de longitud todas carentes de objetividad debido a que se definían de manera muy local. Esto, en Europa, acarreo grandes dificultades ya que proliferaban intercambios culturales y comerciales, los cuales se veían entorpecidos debido a la falta de unificación de diversos sistemas de medidas que solían ser motivo de disputa entre los mercaderes y habitantes de las ciudades, amenazando la estabilidad social y económica, por esta razón se vio la necesidad de crear un sistema de medida estándar.

El gobierno francés, a finales del siglo XVIII, tomó la decisión de crear un sistema de medidas que permitiera unificar a todos los hombres. Lo sorprendente de esta decisión era que dicha medida no debía ser basada en juicios arbitrarios pasajeros. Por esta razón, decidieron crearla basándose en la naturaleza. Esta labor se convirtió en un proyecto científico totalmente patrocinado por el gobierno de una nación [11]. De este modo se decidió definir el metro como la diezmillonésima parte de la longitud de un cuadrante del meridiano que atraviesa París. Pero ¿cómo podrían llevar a cabo este ambicioso proyecto si no se disponía de la tecnología adecuada para realizar los cálculos numéricos, ni tampoco se contaba con satélites ni sistemas de posicionamiento global GPS?. En las siguientes secciones mostrarémos como con ayuda de la matemática se hizo posible la creación del sistema métrico decimal.

2 Una medida histórica

En 1790 el político Charles Tayllerand propuso a la Asamblea Nacional Francesa construir un sistema de medidas a partir de un patrón basado en la naturaleza para que fuera aceptado por todas las naciones. En 1791 en Francia, justo después que iniciara la revolución Francesa (1789) se nombró una comisión encargada de elaborar dicho sistema de medición, el cual se denominaría metro.

Dicha comisión estaba integrada por científicos que gozaban de gran prestigio en la época y que aún hoy sus nombres son recordados por sus aportes a diversas áreas del conocimiento, como: Jean C. Borda (1733-1807), Antoine Laurent de Lavoisier (1743-1794), Gaspard Monge (1746-1818), Pierre Simon de Laplace (1749-1827), Jean Dominique Cassini (1748-1845), Adrien Marie Legendre (1752-1833) y Marie Jean Antoine de Caritat Marqués de Condorcet (1743-1794).

Durante aquellos años se había estudiado la posibilidad de definir la nueva unidad como *la longitud que tiene un péndulo simple cuyo periodo de oscilación es un segundo* (esta definición fue propuesta por Christian Huygens), pero no se aceptó debido a que la fuerza de gravedad no afecta por igual a todos los puntos de la tierra. Este argumento inclinó la balanza hacia la definición que propusieron los franceses [5].

El problema ahora consistía en *medir la tierra*, lo cual incluso hoy en día contando con sistemas GPS y tecnología de punta no es una tarea fácil, entonces ¿porqué adoptaron una definición tan compleja? La razón es que ya contaban con

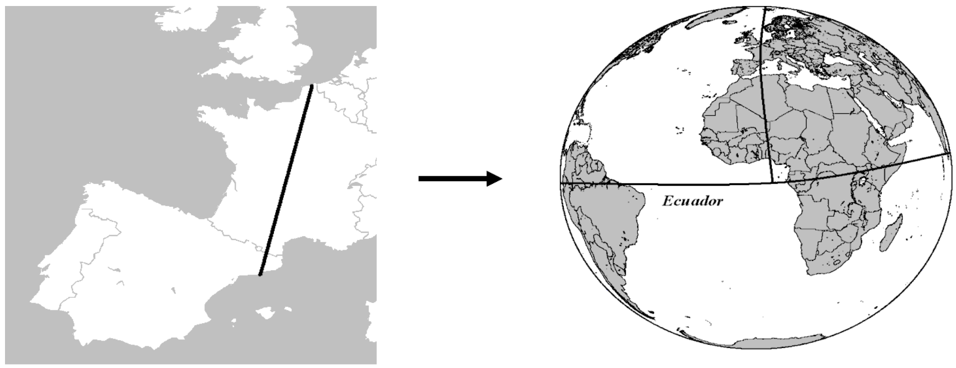


Figura 1: Extrapolación

una herramienta que les permitiría obtener la longitud que buscaban, dicha herramienta era la matemática, pero ¿cómo la aplicarían para resolver este problema de gran complejidad?.

La propuesta que adoptaron fue medir una parte del meridiano que atraviesa París, las condiciones que impusieron eran que los extremos del segmento debían estar al nivel del mar con el fin de minimizar el error que se puede presentar por la topografía del terreno, y que el segmento midiera al menos la décima parte de la longitud del segmento de meridiano que se encuentra en el cuadrante [10]. De esta forma, se decidió medir la distancia desde la ciudad de Dunkerque, ubicada al extremo norte de Francia, hasta Barcelona, ubicada en la parte sur, y a partir de ésta medición era posible extrapolar al tamaño del cuadrante deseado. Para ello, se decidió considerar un modelo que muestra a la tierra como un elipsoide de revolución. De esta forma, se podía emplear un sistema de coordenadas conveniente para poder realizar las mediciones pertinentes (Ver figura 1).

Sin embargo, a pesar del modelo matemático que facilitó la definición, era necesario efectuar la medida del segmento de meridiano. Para ello, el 30 de Marzo de 1791 el rey Luis XVI eligió a los matemáticos y expertos topógrafos François-André Méchain (1744 - 1804) y Jean-Baptiste-Joseph Delambre (1749 - 1822) para que realizaran las mediciones. Se decidió dividir el segmento a medir en dos partes, Delambre tomó la parte norte desde Dunkerque hasta Rodez, mientras Méchain mediría la parte sur que iba desde Rodez hasta Barcelona. El trabajo de la medición se inició en Julio de 1792, pero por cuenta de las dificultades que presentaba el terreno, las mediciones tomaron mucho más tiempo de lo esperado. Además su trabajo se vió entorpecido por las inclemencias climáticas, las enfermedades que afectaron a muchos de los integrantes de los grupos de medición (la fiebre amarilla cobró la vida de Méchain) y los problemas sociales de la época que también hicieron que esta labor tomara alrededor de 7 años.

Históricamente, algunos segmentos del meridiano que pasa por París ya habían sido medidos durante el proyecto de medición de Francia liderado por el abuelo

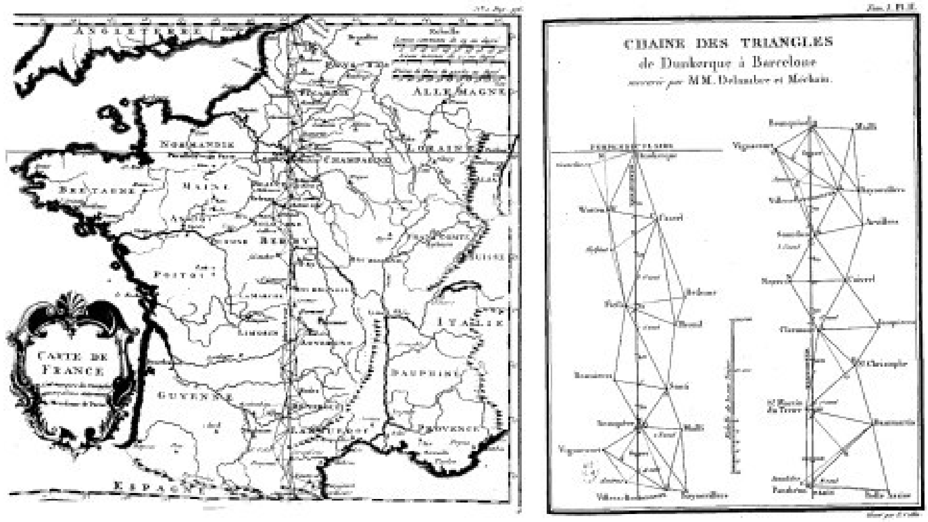


Figura 2: Izquierda: Meridiano de Cassini publicada en 1723 en Traité de la grandeur et de la Figure de la Terre (Tomado de http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:CD011-Cassini-Merdiani.jpg). Derecha: Triangulaciones realizadas sobre los segmentos de meridiano. (Tomado de [10], *Base du Système Mètrique Décimal, ou Mesure de lÁrc du Méridien. París, Vol III 1810.*)

y el padre de Dominique Cassini director del observatorio de París [11], pero los resultados obtenidos no eran satisfactorios ya que la precisión obtenida no era suficiente e incluso al repetir las observaciones se encontró que los resultados diferían notablemente de los obtenidos inicialmente. Por esta razón se encomendó a Jean Borda la creación de un artefacto mecánico que permitiera mejorar la precisión de las mediciones, este aparato conocido como el *Círculo repetidor de Borda*, permitió obtener mediciones con un margen de error mínimo. Además, el instrumento creado por Borda permitió, dada la versatilidad del equipo y los conocimientos de astronomía, determinar la latitud del lugar en el cual se encontraban.

Por la confiabilidad de la precisión de los instrumentos, se pudo trabajar el sistema geodésico de triangulaciones[1] para realizar las medidas. Este método consistía en ubicar señales en lugares de gran altura para que fueran visibles y con ellas se construyó una cadena de triángulos cuyas longitudes de los lados eran conocidas. En realidad las mediciones no se hacían directamente sobre el meridiano, sino sobre los triángulos previamente analizados por Méchain y Delambre.

Increíblemente la señalización de los puntos para las triangulaciones tuvo serias dificultades ya que durante las mediciones se estaba viviendo la revolución Francesa, razón por la cual los integrantes de los equipos eran considerados como

[1]El método de triangulaciones fue introducido por Gemma Frisius (1508 — 1555), Pero es Willebrord van Roijen Snell (1580 — 1626), quien emplea la medida de los ángulos en la cadena de triángulos para medir largas distancias sobre el suelo [5].

partidarios del antiguo régimen y además por la ignorancia de algunos franceses, los sofisticados aparatos de medición eran confundidos con armas. Anecdóticamente, las señales que eran de color blanco, provocaban la furia de los revolucionarios ya que este color era asociado con la realeza.

Estos contratiempos hicieron necesario que el 1 de agosto de 1793 la Convención que reemplazó a la Asamblea Nacional instituyera un sistema métrico provisional. En 1795 esta misma institución promulgó la existencia de un solo patrón de medida para toda Francia y se invitó a todos los franceses a unificarse bajo esta nueva medida de longitud probando así la unidad e igualdad para todos en el país.

Finalmente el 22 de Junio de 1799 después de superar muchos inconvenientes se proclama el sistema métrico, entregando a los Archivos de la República los patrones de el metro y el kilogramo que fueron elaborados en una aleación de platino e iridio. Este acto de entrega contó con la presencia de los más importantes funcionarios de Francia y varios países invitados, además de la asistencia de los más importantes académicos y científicos de la época.

Como era natural, era inevitable que surgieran dudas acerca de la confiabilidad de los resultados obtenidos, ya que el segmento de meridiano que se midió es pequeño en comparación con la longitud del cuadrante terrestre y por esta razón en 1806 Laplace solicitó directamente a Napoleón que se continuaran las mediciones que Méchain había iniciado pero que desafortunadamente fueron abandonadas luego de su muerte en 1804 debido a la fiebre amarilla. Esta nueva misión topográfica quedó a cargo de François Arago y Jean Baptiste Biot quienes debían medir hasta la isla mediterránea de Formentera. Tal como Laplace esperaba, al incluir las mediciones obtenidas de las nuevas observaciones realizadas, los resultados variaron ya que eran una prolongación del segmento de Meridiano. Sin embargo para sorpresa de muchos la definición de la nueva medida solo varió en 2 milésimas de milímetro (una millonésima de metro), lo cual es prácticamente imperceptible a simple vista, ratificando nuevamente la confiabilidad del modelo empleado.

El sistema métrico fue aceptado internacionalmente durante la primera Conferencia General de Pesos y Medidas, celebrada en 1889 en la ciudad de París.

En la próxima sección, haremos un recuento desde un punto de vista actual de la matemática que se usó para poder obtener el metro a partir de la longitud de un cuadrante de la Tierra, debemos tener en cuenta que la longitud será obtenida en toesas (antigua unidad de longitud francesa) ya que en esta unidad se entregaron las mediciones realizadas sobre el meridiano de París, así que es necesario realizar la conversión de toesas a metros y de metros a toesas.

3 Cálculo de la longitud del meridiano de París

El problema de calcular longitud de un cuarto de meridiano no sólo era una tarea muy difícil desde el punto de vista topográfico y geodésico, sino que matemáticamente se empleaban resultados avanzados para la época. Es así, que después de tener en cuenta algunas consideraciones físicas como la casi esfericidad de la tierra, se aplicarían conceptos del cálculo como la longitud de arco, aproximaciones en serie de Taylor y el método de mínimos cuadrados para resolver un problema de identificación de los parámetros.

3.1 ¿La tierra es achatada por los polos o esférica?

Desde el año 1687 Newton afirmaba que debido a efectos provocados por las fuerzas generadas por la la rotación de la tierra sobre su eje, se genera un achatamiento de ésta. Estas aseveraciones eran también sustentadas por los resultados obtenidos en 1672 por la expedición francesa a cargo de los astrónomos y matemáticos Jean Richer y Jean Picard en Cayenne (Guyana Francesa), donde midieron la intensidad de la gravedad local. Se encontró que ésta es menor que la encontrada en Paris; concluyendo que Paris está más cerca del centro de la Tierra que Cayenne y por lo cual la tierra es achatada por los polos [5]. Finalmente, en 1744 la tesis de Newton sobre el achatamiento de la tierra es aceptada por la comunidad científica, al comparar los resultados obtenidos por dos misiones topográficas que calcularon el radio de curvatura del meridiano de Perú que cruza la linea del Ecuador y del meridiano de Laponia (Finlandia) cerca del círculo polar Ártico, encontrando que el radio de curvatura de éste último es mucho mayor que el del meridiano de Perú [5], [12].

Lo anterior conduce a considerar la Tierra como un elipsoide de revolución, el cual se obtiene al girar la elipse con semi-eje mayor a y semi-eje menor b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alrededor del eje vertical que une a los polos Norte y Sur. Por lo cual a denotará la longitud del radio ecuatorial terrestre y b la longitud del radio polar.

3.2 Longitud de un arco de meridiano

Para determinar la longitud de arco de un meridiano terrestre entre dos puntos sobre la Tierra que tienen diferente latitud ϕ es conveniente tomar la siguiente parametrización de la elipse:

$$x = a\cos\theta, \qquad x = b\ \mathrm{sen}\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

donde θ denota la latitud, que es el ángulo que la vertical forma con el plano del Ecuador. Así, la longitud de arco de meridiano entre dos latitudes ϕ_1 y ϕ_2 esta dada por:

$$L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta$$
$$= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + b^2(1-\text{sen}^2\theta)}\, d\theta = b\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1+k^2\text{sen}^2\theta}\, d\theta \quad (1)$$

donde $k^2 = (a^2 - b^2)/b^2$, o en términos de la excentricidad de la elipse se tiene que $k^2 = e^2/(1-e^2)$.

El siguiente paso es calcular la integral (1), sin embargo esta integral aparentemente sencilla es una integral elíptica de segunda clase, la cual no es posible calcular mediante técnicas analíticas [2], por lo cual optamos por calcular una aproximación analítica de ésta. Explotando el hecho de la casi esfericidad de la tierra, tenemos que su excentricidad e es muy cercana a cero, o sea que k también es muy cercana a cero. Esto nos permite realizar una aproximación en serie de Taylor del integrando de (1) alrededor de $k = 0$.

Consideremos entonces la aproximación en serie de Taylor de segundo orden de

$$f(k) = \sqrt{1+k^2\text{sen}^2\theta},$$

para ello primero evaluamos

$$f'(k) = -k\,\frac{\text{sen}^2\theta}{f(k)} \qquad \text{y} \qquad f''(k) = \frac{f(k)\,\text{sen}^2\theta + k\; f'(k)\,\text{sen}^2\theta}{f(k)^2}$$

en $k = 0$. A partir de lo cual, la integral de longitud de curva (1) se aproxima por

$$L \approx b\int_{\phi_1}^{\phi_2} 1 + \frac{k^2}{2}\,\text{sen}^2\theta\; d\theta \quad (2)$$
$$= b\int_{\phi_1}^{\phi_2} 1 + \frac{k^2}{2}\Big(\frac{1-\cos^2\theta}{2}\Big)\, d\theta \quad (3)$$
$$= b\Big(1+\frac{k^2}{4}\Big)(\phi_2-\phi_1) - \frac{bk^2}{8}(\text{sen}(2\phi_2) - \text{sen}(2\phi_1)). \quad (4)$$

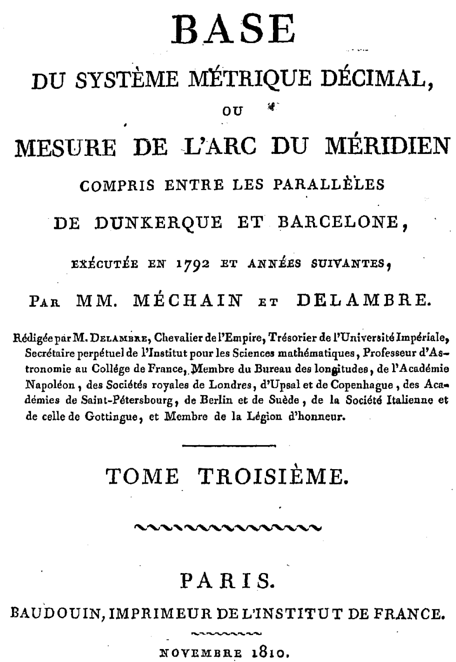
Haciendo uso de la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(2\phi_2) - \text{sen}(2\phi_1) = 2\cos(\phi_2+\phi_1)\,\text{sen}(\phi_2-\phi_1)$$

obtenemos que la longitud de arco de un segmento de meridiano entre dos latitudes ϕ_1 y ϕ_2 esta dada finalmente por

$$L \approx b\Big(1+\frac{k^2}{4}\Big)(\phi_2-\phi_1) - \frac{bk^2}{4}\cos\Big(2\;\frac{\phi_2+\phi_1}{2}\Big)\;\text{sen}(\phi_2-\phi_1). \quad (5)$$

[2]Es precisamente por esta dificultad que llevo a que se dedicaran muchos matemáticos del siglo XIX como Abel y Jacobi a estudiarlas como funciones.



BASE

DU SYSTÈME MÉTRIQUE DÉCIMAL,

OU

MESURE DE L'ARC DU MÉRIDIEN

COMPRIS ENTRE LES PARALLÈLES

DE DUNKERQUE ET BARCELONE,

EXÉCUTÉE EN 1792 ET ANNÉES SUIVANTES,

PAR MM. MÉCHAIN ET DELAMBRE.

Rédigée par M. DELAMBRE, Chevalier de l'Empire, Trésorier de l'Université Impériale, Secrétaire perpétuel de l'Institut pour les Sciences mathématiques, Professeur d'Astronomie au Collége de France, Membre du Bureau des longitudes, de l'Académie Napoléon, des Sociétés royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des Académies de Saint-Pétersbourg, de Berlin et de Suède, de la Société Italienne et de celle de Gottingue, et Membre de la Légion d'honneur.

TOME TROISIÈME.

PARIS.

BAUDOUIN, IMPRIMEUR DE L'INSTITUT DE FRANCE.

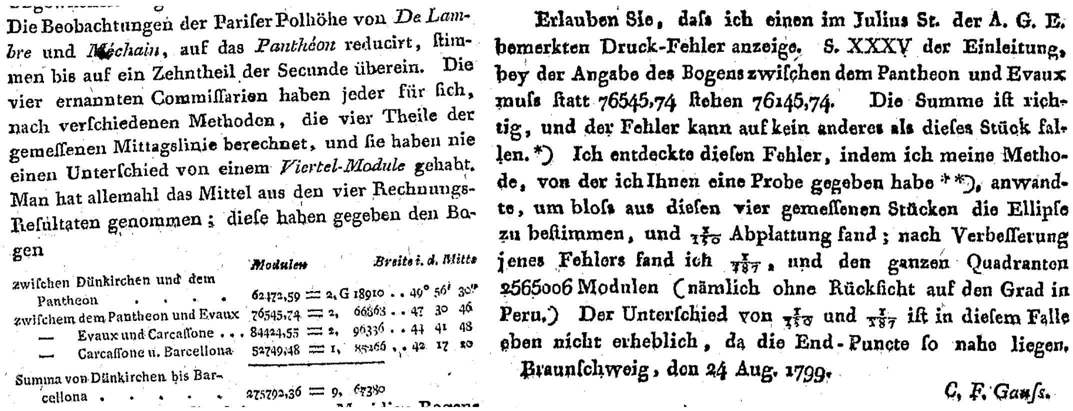
NOVEMBRE 1810.

Figura 3: Portada de Base du Système Mètrique Décimal, ou Mesure de lÁrc du Méridien Vol III 1810 (Tomado de [10], *Base du Système Mètrique Décimal, ou Mesure de lÁrc du Méridien. París, Vol III 1810.)*

3.3 Determinación de los parámetros de la tierra y el método de los Mínimos Cuadrados

Observando la ecuación (5) es necesario conocer los valores de la longitud del radio polar b y la excentricidad de la tierra e para calcular la longitud de un cuarto de meridiano ($\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi/2$). Es precisamente en la determinación de estos parámetros donde juega un papel crucial las mediciones topográficas y geodésicas tomadas por Méchain y Delambre. Los datos de estas mediciones y los cálculos de triangulaciones y distancias tomadas entre los diferentes puntos del meridiano que pasa por Paris se encuentran en la monumental obra de tres tomos: *"Base du Système Mètrique Décimal, ou Mesure de lÁrc du Méridien"(Vol I 1806, Vol II 1807, Vol III 1810).*

Las mediciones que realizaron los equipos de investigación tenían por objetivo no solo conocer la longitud del segmento de meridiano que va de Dunkerque a Barcelona sino también debían precisar la latitud del lugar. Toda esta información fue utilizada por Delambre, Legendre, Traller y Van Swinden para calcular separadamente y por métodos distintos las bases de los triángulos y determinar las distancias entre un grupo de cinco ciudades que se hallaban sobre el segmento de meridiano. Finalmente los resultados fueron sometidos a un comité evaluador



Die Beobachtungen der Pariſer Polhöhe von *De Lambre* und *Méchain*, auf das *Panthéon* reducirt, ſtimmen bis auf ein Zehntheil der Secunde überein. Die vier ernannten Commiſſarien haben jeder für ſich, nach verſchiedenen Methoden, die vier Theile der gemeſſenen Mittagslinie berechnet, und ſie haben nie einen Unterſchied von einem *Viertel-Module* gehabt. Man hat allemahl das Mittel aus den vier Rechnungs-Reſultaten genommen; dieſe haben gegeben den Bogen

	Modulen		Breite i. d. Mitte
zwiſchen Dünkirchen und dem Pantheon	62472,59	= 2, G 18910 . .	49° 56′ 30″
zwiſchem dem Pantheon und Evaux	76545,74	= 2, 66868 . .	47 30 46
— Evaux und Carcaſſone . . .	84424,55	= 2, 96336 . .	44 41 48
— Carcaſſone u. Barcellona	52749,48	= 1, 85266 . .	42 17 20
Summa von Dünkirchen bis Barcellona	275792,36	= 9, 67380	

Erlauben Sie, daſs ich einen im Julius St. der A. G. E. bemerkten Druck-Fehler anzeige. S. XXXV der Einleitung, bey der Angabe des Bogens zwiſchen dem Pantheon und Evaux muſs ſtatt 76545,74 ſtehen 76145,74. Die Summe iſt richtig, und der Fehler kann auf kein anderes als dieſes Stück fallen. *) Ich entdeckte dieſen Fehler, indem ich meine Methode, von der ich Ihnen eine Probe gegeben habe **), anwandte, um bloſs aus dieſen vier gemeſſenen Stücken die Ellipſe zu beſtimmen, und $\frac{1}{150}$ Abplattung fand; nach Verbeſſerung jenes Fehlers fand ich $\frac{1}{187}$, und den ganzen Quadranten 2565006 Modulen (nämlich ohne Rückſicht auf den Grad in Peru.) Der Unterſchied von $\frac{1}{150}$ und $\frac{1}{187}$ iſt in dieſem Falle eben nicht erheblich, da die End-Puncte ſo nahe liegen.

Braunſchweig, den 24 Aug. 1799.

C. F. Gauſs.

Figura 4: Izquierda: Datos del Meridiano de París usados por Gauss. Derecha: Carta de Gauss dirigida a AGE para corrección tipográfica en la distancia entre Phanteon y Evaux Agosto 24 de 1799 (Tomado de [7], *Vermischte Nachrichten no 3. Allgemeine Geographische Ephemeriden, (1799).*

que decidió promediar los resultados [10]. Estos datos fueron publicados por primera vez por Carl Friedrich Gauss *"Allgemaine Geographische Ephemenriden"* en el volumen 4 de 1799 (Ver figura 4 y Tabla 1).

i	Segmento de	L_i (módulos)	$(\phi_2 - \phi_1)_i$	$(\frac{\phi_2+\phi_1}{2})_i$
1	Dunkerque a Phanteon	62472.59	2.18910	$49°56'30''$
2	Phanteon a Evaux	76145.74	2.66868	$47°30'46''$
3	Evaux a Carcasonne	84424.55	2.96336	$44°41'48''$
4	Carcasonne a Barcelona	52749.48	1.85266	$42°17'20''$

Cuadro 1: : Datos obtenidos por Delambre y Mechain

Una vez obtenidos los datos de campo, es posible determinar los parámetros de la tierra : el semieje mayor y excentricidad. En efecto, si en el cálculo de L en (5) denotamos por

$$A = b(1 + \frac{k^2}{4}), \qquad B = -\frac{bk^2}{4}$$

y reemplazamos los datos de la tabla 1 de las diferencias de latitudes $(\phi_2 - \phi_1)$ y latitudes medias $(\frac{\phi_2+\phi_1}{2})$ en (5), obtenemos el siguiente sistema lineal sobredeterminado de cuatro ecuaciones y dos incógnitas

$$L_i \approx A(\phi_2 - \phi_1)_i + B\cos\left(2\,\frac{\phi_2+\phi_1}{2}\right)_i \operatorname{sen}(\phi_2 - \phi_1)_i \qquad i = 1, ..., 4. \qquad (6)$$

Precisamente, el problema de la longitud del segmento de meridiano que va de Dunkerke a Barcelona es el que Gauss soluciona en 1799 en [7] mediante un novedoso método precursor del hoy conocido método de los mínimos cuadrados propuesto por Legendre en 1805 en *"Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes (Apéndice: Sur la méthode des moindres carrés)"* donde se considera también el problema de la longitud de un arco de meridiano. Cuatro años después, Gauss presentó un estudio detallado del método de los mínimos cuadrados desde un punto de vista probabilístico de los errores de observación en la obra *"Theoria Motus Corporum Coelestium in sctionibus conicis solem ambientium"*.

La idea básica del método de mínimos cuadrados es *"resolver"* el sistema sobredeterminado minimizando el error residual del sistema, es decir encontrar $u = [A, B]^T \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\|d - Mu\|_2 = \min_{v \in \mathbb{R}^2} \|d - Mv\|_2,$$

donde las componentes de la matriz $M \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ son dadas por

$$(m_{i,j}) = \begin{cases} m_{i,1} = (\phi_2 - \phi_1)_i, & i = 1, ..., 4 \\ m_{i,2} = \cos\left(2\ \frac{\phi_2+\phi_1}{2}\right)_i \operatorname{sen}(\phi_2 - \phi_1)_i, & i = 1, ..., 4 \end{cases}$$

y el vector $d = [L_1, L_2, L_3, L_4]^T \in \mathbb{R}^4$. Es fácil probar que el problema de minimizar el error resulta equivalente a resolver las *ecuaciones normales de Gauss*

$$M^T M u = M^T d.$$

Reemplazando los datos en el sistema de ecuaciones normales y hallando la solución, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1633119{,}8767 \\ -15237{,}0159 \end{bmatrix}$$

y por consiguiente:

$$\begin{aligned} &e = 0{,}1905 && \text{(excentricidad)} \\ &b = 1{,}6179 \times 10^6 \text{ módulos} && \text{(radio polar)} \\ &a = 1{,}6480 \times 10^6 \text{ módulos} && \text{(radio ecuatorial).} \end{aligned}$$

3.4 Determinación del metro

Finalmente ya estamos en capacidad de encontrar la longitud del cuarto de meridiano. Sustituyendo los valores obtenidos en la integral (5) y considerando $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = \pi/2$ tenemos que

$$L \approx 1633119{,}8767(\frac{\pi}{2} - 0) - 15237{,}0159 \cos\left(2\ \frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}\right) \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - 0).$$

Por consiguiente, la longitud de un cuadrante de la tierra es aproximadamente 2565298.7036 módulos o 5130597.4072 toesas (1 módulo = 2 toesas).

Ahora si dividimos este valor en 10000000 obtendremos un metro en términos de toesas, así una toesa equivale a 0.51306 metros y un metro equivale a 1.94909 toesas.

El 22 de Junio de 1799 fue presentado a la Asamblea Francesa el patrón del metro elaborado en una aleación de platino e iridio, definiendo finalmente el metro como 1.9490 toesas, equivalente aproximadamente a 3 pies de rey, 11 líneas y 296 milésimas de línea. Copias del patrón fueron puestas al público en todo París de tal manera que cualquier persona pudiera verificar la longitud de las telas o cadenas que comerciaban [12].

Para comprobar la confiabilidad del modelo presentado, en la tabla 2 comparamos los resultados obtenidos con datos actuales sugeridos en [8]. Se aprecia que los errores relativos de los datos obtenidos en la sección anterior son del orden del 0.7 %.

Datos	Valor actual (m)	Valor obtenido (m)	Error relativo
Radio Polar	6356774	6306798.610	0.00785
Radio Ecuatorial	6378149	6424493.681	0.00726

Cuadro 2: : Comparación de los radios polar y terrestre

Sólo hasta el año de 1960 se redefinió el metro como 1650763.73 longitudes de onda en el vacío de la radiación del isótopo 86 del Kriptón. Luego en 1983 esta definición fue reemplazada por la distancia recorrida por la luz en el vacío durante 1/299792458 segundos.

4 Comentarios finales

Es sorprendente como las mediciones de campo realizadas (tabla 1) por Mechain y Delambre corresponden exactamente a los datos necesarios para plantear el problema de minimización lineal (5). Esto puede explicarse por la experiencia lograda en la medición de otros arcos en donde se aprendió que datos eran necesarios para los cálculos de la longitud de arco lo cual muestra que la matemática permite hacer una planeación precisa del proceso a seguir para la recolección de los datos necesarios para dar solución al problema que se esta investigando.

A pesar que los cálculos presentados en éste artículo no son exactamente los realizados por Mechain y Delambre en [10], ambas deducciones conducen a que es necesario obtener los mismos tipos de datos para la solución del problema de identificación de los parámetros de la tierra (ecuación (5)). En efecto, estos dos matemáticos de finales de siglo XVIII e inicios del XIX deducen después de un desarrollo geométrico y algebraico detallado, que la distancia entre los puntos A y $A' := A + dA$ sobre el meridiano con latitudes ϕ y $\phi' := \phi + d\phi$ respectivamente, puede calcularse a partir del radio de curvatura del meridiano

$$\frac{dA}{d\phi} = \frac{m\cos I}{(1-\ \mathrm{sen}^2 I\cos\phi)^{1/2}} \tag{7}$$

donde sen I es la excentricidad de la elípse de revolución. Luego de realizar un desarrollo en serie de Taylor de (7) se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{A-A'}{\cos^2 I} &= \alpha(\phi'-\phi) - 2\beta\ \sin(\phi'-\phi)\cos(\phi'+\phi)\\ &+ 2\gamma \mathrm{sen}2(\phi'-\phi)\cos 2(\phi'+\phi) - 2\delta \mathrm{sen}3(\phi'-\phi)\cos 3(\phi'+\phi) + ...\end{aligned}$$

con α, β, γ y δ constantes dependientes de la excentricidad.

Después de un trabajo numérico arduo de evaluación de las funciones trigonométricas mediante series y de la solución del problema de la determinación del achatamiento de la tierra, se encontró que la longitud de un cuarto de meridiano meridiano es exactamente 2565379 módulos y un metro equivale a 1.94903 toesas [10]. De manera similar Gauss obtuvo que la longitud de un cuarto de meridiano meridiano es 2565006 módulos [7], de donde se deduce que 1.94931 toesas son un metro. Claramente estos resultados difieren ligeramente de los aquí calculados (ver sección 3.3), esta discrepancia se origina en el hecho que empleamos diferentes expresiones para la determinación de la longitud de arco y diferente número de términos en la serie de Taylor. Además parece que se usaban diferentes métodos de aproximación para resolver el problema de identificación de los parámetros de la tierra (Ver [10]) que perfeccionados darían origen al método de mínimos cuadrados como hoy lo conocemos.

Finalmente, queremos reconocer la gran confianza que el gobierno francés de la época tuvo en la ciencia de la matemática para dar solución a este complicado problema de la vida real que es abiertamente un beneficio para la población. Es preciso resaltar el hecho que el enfrentar problemas reales o aplicados es una fuente inagotable de ideas innovadoras y novedosos métodos que abren nuevos horizontes teóricos y prácticos a la ciencia de la matemática.

Referencias

[1] Bell, E. T.: Los Grandes Matemáticos. Editorial Losada S.A., Buenos Aires, 1948.

[2] Bourdon, P.L.M.: Elementos de Aritmética, Librería de los señores viuda e hijos de Calleja, 1843.

[3] Burton, D. M.: The History of Mathematics an Introdution, Wm. C. Brown Publishers, Dubuque Iowa, 1988.

[4] Collette, J. P.: Historia de las matemáticas Vol 2, Editorial Siglo XXI México, 1993.

[5] Danson, E.: Weighing the world, Oxford University Press, 2006.

[6] Dominguez Garcia-Tejero, F.: Topografía Abreviada 7^{a} edición, Editorial Dossat.Madrid, 1985.

[7] Gauss, C. F.: Vermischte Nachrichten no 3. Allgemeine Geographische Ephemeriden, 4 (1799), p. 378.

[8] Kuchling, H.: Taschenbuch der Physik, Fachbuchverlag Leipzig, 2004.

[9] Legendre, A. M.: Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des cometes. (Apéndice: Sur la méthode des moindres carrés). (1805).

[10] Méchain, P. and Delambre, J.-B.: Base du Système Mètrique Décimal, ou Mesure de lÁrc du Méridien. Paris Baudouin, Imprimeur de lÍnstitut National, Vol I 1806, Vol II 1807, Vol III 1810.

[11] Murdin, P.: Full Meridian of Glory Perilous Adventures in the Competition to Measure the Earth, Springer Science + Business Media, 2009.

[12] Ruiz M, M.: Revista Internacional de Ciencias de la Tierra, Número 111, Medidas de la Tierra Julio-Agosto, 2006.

[13] Von Friedrich, L. Bauer und Bulirsch, R.: Carl Friedrich Gauss oder Die Vermessung der Welt, Akademie Aktuell, Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 3 (2005), pp 17-19.

Dirección de los autores

Hernán Estrada B. — Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá-Colombia

e-mail: hestradab@unal.edu.co

Jorge Mauricio Ruiz V. — Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá-Colombia

e-mail: jmruizv@unal.edu.co

Juan Gabriel Triana L. — Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá-Colombia

e-mail: jtrianal@unal.edu.co