



UNA ECOLOGÍA EN LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN:
UN ACERCAMIENTO DESDE LA TAD

LADY KATHERINE CASTILLO CAMACHO
(0839235)

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2014

UNA ECOLOGÍA EN LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN: UN
ACERCAMIENTO DESDE LA TAD

LADY KATHERINE CASTILLO CAMACHO

0839235

Trabajo de grado presentado como requisito para acceder al título de

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

WILDEBRANDO MIRANDA VARGAS

Tutor

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

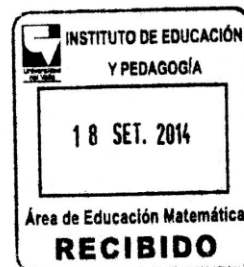
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2014



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

TÍTULO DEL TRABAJO:	Una ecología en la introducción del concepto de fracción: Un acercamiento desde la TAD.							
Se trata de:	Proyecto	☐	Informe Final	☒				
Director:	Wildebrando Miranda Vargas							
1er Evaluador:	Mónica Andrea Aponte Marín							
2do Evaluador:								
Fecha y Hora	Año:	2014	Mes:	Septiembre	Día:	5	Hora:	6:30 pm
Estudiantes								
Nombres y Apellidos completos			Código		Programa Académico			
LADY KATERINE CASTILLO CAMACHO			0839235		3487			

EVALUACIÓN							
Aprobado	☒	Meritorio	☐	Laureado	☐		
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐	Incompleto	☐		
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) ante:							
Director del Trabajo		☐	1er Evaluador		☐	2do Evaluador	☐
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:							
Año:		Mes:		Día:		Hora:	
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).							

FIRMAS:		
Wildebrando Miranda Vargas	Mónica Andrea Aponte Marín	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/col/> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Una eclogía en la introducción del concepto de fracción: Un acercamiento desde la TAD

Autores:

Nombre: Lady Katherine Castillo Comacho

Firma: Lady Castillo
C.C. 1'087.130.647

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Fecha: 3 de octubre 2014

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia, a Dios por darme la posibilidad de ingresar a la Universidad del Valle y darme la persistencia para poder obtener éste título como profesional.

A su vez agradezco a las personas que me apoyaron en el transcurso de mi carrera, a mis padres Alfredo y Cecilia, mis hermanos Didier, Edwin y Viviana , mis tías Yolanda y Berenice, mis primas Fernanda y Miryam, mis amigas Ingrid y Paola, mis compañeros y profesores, que hicieron parte de este sueño y esta transformación.

Y agradecer especialmente al mentor de este trabajo Wildebrando Miranda Vargas quien con sus conocimientos, dedicación y paciencia ayudó a la realización de este trabajo.

A todos mil gracias.

.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	10
INTRODUCCIÓN.....	11
CAPÍTULO 1	14
1.1. ANTECEDENTES	15
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	16
1.3. OBJETIVOS.....	19
1.3.1. Objetivo general	19
1.3.2. Objetivo específicos	19
1.4. JUSTIFICACIÓN.....	19
CAPÍTULO 2	22
2. REFERENTES TEÓRICOS.....	23
2.1 DESDE LA TEORÍA ANTOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD)	23
2.1.1. Obra matemática	24
2.1.2. Tipo de obra matemática	25
2.1.3. Niveles de Codeterminación	26
2.1.4. Fenómenos: Atomización de las enseñanzas y el autismo temático	27
2.2. DESDE LOS LINEAMIENTOS CURRICULARES Y ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS.....	28
2.3. DESDE LO MATEMÁTICO.....	34
CAPÍTULO 3	47
3.1. METODOLOGÍA	48
3.2. CARACTERÍSTICAS DE LA INSTITUCIÓN	48
CAPÍTULO 4	50
4.1. ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA	51
4.2. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES	53
4.2.1. Análisis de las praxis (tareas y técnicas)	57
4.2.2. Análisis de las obras matemáticas	61
4.3. CONTRASTE ENTRE EL ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA Y LOS TEXTOS ESCOLARES	67
CAPÍTULO 5	71
5.1. CONCLUSIONES.....	72
5.2. BIBLIOGRAFÍA	74

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Herramientas para el análisis de la coherencia vertical MEN (2006) -----	29
Tabla 2. Herramientas para el análisis de la coherencia horizontal MEN (2006) -----	33
Tabla 3. Estructura de la unidad 4 del texto de grado cuarto -----	55
Tabla 4. Estructura de la unidad 3 del texto de grado quinto -----	56
Tabla 5. Contextualización de los números fraccionarios en los textos escolares analizados ---	58
Tabla 6. Contrastes entre los contenidos propuestos en el plan de área de 4 y el texto escolar “Zona Activa 4” -----	68
Tabla 7. Contrastes entre los contenidos propuestos en el plan de área de 5 y el texto escolar “interactivo 5” -----	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura1. Estructura de una praxeología Matemática -----	24
Figura 2. Carátula del texto escolar de grado cuarto -----	49
Figura 3. Carátula del texto escolar de grado quinto -----	49
Figura 4. Mapa conceptual del plan de área del colegio Juan Pablo II -----	51
Figura 5. Tamada del plan de área de matemática de 5 de la institución Juan Pablo II -----	52
Figura 6. Mapa conceptual de la síntesis de los conceptos desarrollados en la unidad 4 del texto escolar Zona Activa 4. -----	59

Bajo el marco teórico de La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) Chevallard, (1992), se da cuenta de la ecología o las condiciones que limitan o posibilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje de los racionales positivos en La institución educativa Juan Pablo II.

Para ello se tomó como punto de partida algunos fenómenos que hacen parte de la TAD (autismo temático y la atomización de la enseñanza), realizando una Obra Matemática de referencia (OMr) que es tomada como base para realizar el análisis en términos de contraste entre OMr y una obra matemática propuesta (OMp).

Se tiene como referencia en la OMp documentos curriculares de carácter oficial, el plan de área de matemáticas de la institución y los textos escolares que se usan para abordar la enseñanza de los números racionales positivos (Q^+) en la escuela.

Palabras clave: TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico), OM (Obra Matemática), Números racionales positivos, Ecología.

Para el desarrollo de este trabajo se utiliza como marco de referencia la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), con la cual se examinó algunos fenómenos didácticos que suelen aparecer como transparentes en los actuales sistemas de enseñanza. Tal análisis se hizo sobre el estudio de los Racionales (Q) positivos de los cuáles hay numerosos trabajos en la literatura existente, pero pocos de ellos toman como punto de acercamiento el tratamiento brindado por la TAD que consiste en acercarse a las problemáticas inicialmente desde el cuestionamiento de las condiciones que limitan o posibilitan el desarrollo de un concepto o proceso matemático a nivel institucional.

Cabe destacar que los trabajos consultados con relación a las fracciones encaminados a sus múltiples significados, a su representaciones, a su aplicabilidad en situaciones cotidianas, entre otros (Behr, Wachsmuth & Post, 1985, Llinares&Sánchez, 1998; entre otros) presentan explícita o implícitamente modelos investigativos que suelen configurar modos particulares de hacer dichas investigaciones. No con ello se quiere decir, que dichas investigaciones estén mal enfocadas, al contrario, han permitido y siguen permitiendo el avance de las diversas problemáticas estudiadas. Lo que aporta la TAD es la necesidad de tener en cualquier nivel del proceso de enseñanza –aprendizaje, un modelo de la *actividad matemática* que pueda ponerse en contraste con los tradicionales modelos de dicho proceso.

Por consiguiente con la realización de este trabajo se hizo necesario generar una reflexión sobre la enseñanza de las fracciones desde la perspectiva de la TAD, pues ésta brinda una perspectiva que permite cuestionar situaciones que posibiliten o limiten el proceso de enseñanza y en el proceso de aprendizaje de las fracciones en una institución escolar.

Para el desarrollo de este trabajo es vital aclarar el término ecología, que se hace en términos de Barquero (2009), el cual lo caracteriza de la siguiente manera:

En lugar de plantear los problemas de enseñanza y aprendizaje en términos de qué hacer para que tal o cual noción, actividad o problemática puedan enseñarse o aprenderse mejor y, en consecuencia, investigar las dificultades que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas buscando la manera de superarlas, la TAD se pregunta cuáles

son las condiciones que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o “vivir”) en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las restricciones que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades. (p. 6).

Ahora bien, para hacer esta investigación y hacer explícita la ecología en la institución escolar es fundamental tener en cuenta la obra matemática que se propone para ser enseñada, ya que de ella surgen tareas, cuestiones, técnicas, etc., que son una base para introducir el concepto de racionales positivos en la escuela.

Tratando de hacer un análisis detallado de dicha obra, este trabajo está limitado al estudio de la Obra Matemática Propuesta (en adelante OMP), reconociendo la limitación de dicha decisión pero reconociendo la utilidad en términos de la profundidad en los análisis que se pueden hacer. En concordancia con lo dicho anteriormente este trabajo se desarrolla en los siguientes capítulos:

En el primer capítulo aparece la información general, que contiene antecedentes sobre algunos trabajos realizados sobre los racionales positivos, el planteamiento del problema en donde se describe cuál es la cuestión a trabajar, es decir la problemática en relación a la fracción, la justificación que expone la importancia del proyecto y los objetivos que establecen las metas a alcanzar.

En un segundo capítulo se abarca algunos referentes conceptuales enmarcados dentro de la TAD, en donde se resalta los niveles de codeterminación señalados por (Chevallard 1999), dos fenómenos presentes en la enseñanza de las matemáticas llamados autismo escolar y atomización del proceso de enseñanza (Gascón, 1998), el concepto de obra matemática que brinda pautas para el análisis de este trabajo, referentes de tipo curricular y se propone una construcción de una obra matemática de referencia OMr que aportará herramientas para una análisis sobre los racionales positivos.

En el tercer capítulo se presenta la metodología desarrollada en tres fases: en la primera, se amplía y se refina el marco teórico y seleccionamos la obra matemática propuesta a analizar (Libros de texto, Documentos curriculares, documentos oficiales de la

institución). La segunda fase, está dirigida hacia la construcción de la Obra Matemática de Referencia (OMr) y la Fase tres dirigida hacia la realización de los análisis de las Obras Matemáticas Propuestas (OMP) en términos de contraste con las OMr.

En el capítulo cuarto, se presenta el análisis de los documentos propios del área de matemáticas como lo son: plan de área de matemáticas y los textos escolares de matemáticas usados en la institución, el análisis se realiza teniendo en cuenta los referentes teóricos del capítulo dos y la cuestión problematizadora presentada en el capítulo uno para dar evidencia de la ecología que posibilitan o limitan la enseñanza de los números racionales positivos

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO 1

- ANTECEDENTES
- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
 - OBJETIVO GENERAL
 - OBJETIVOS ESPECÍFICOS
 - JUSTIFICACIÓN

1.1. ANTECEDENTES

Existen varios trabajos realizados a partir de la enseñanza de los números fraccionarios, para el desarrollo de este trabajo se tomaron algunos de estos trabajos, vale la pena realizar una aclaración, los números fraccionarios es un conjuntos de números muy general en el cual abarca otros conjuntos de números entre ellos los racionales positivos, este trabajo está desarrollado sobre los números racionales positivos.

Se tomará como antecedentes los siguientes trabajos.

- La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo (Obando 2006). Este trabajo fue presentado en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, centra la atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números racionales a partir de la relación parte-todo, concluyendo que se presentan dificultades en dichos procesos debido a las conceptualizaciones erróneas que manejan los estudiantes con relación a las fracciones; además se menciona que un buen camino para abordar las fracciones bajo sus diferentes significados es la relación parte-todo pues esta da paso a utilizar los diferentes conceptos a los cuales se remite las fracciones. Sobre esta conclusión se desarrolló una propuesta de trabajo mediante la cual se pudiera desencadenar procesos de aprendizajes más significativos en lo estudiantes. Para este estudio, resulta claro el aporte que representa no sólo en la bibliografía consultada, sino en la forma cómo el autor examina en detalle la relevancia de la relación parte-todo para la construcción del concepto de los racionales positivos, e igualmente por las dificultades surgidas en el proceso de aplicación de las actividades propuestas.
- Un análisis de las obras matemáticas propuestas en la enseñanza de los números enteros desde la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Ordoñez Leidy, Chavarro Mayerline, 2012). Este trabajo, se sitúa desde la perspectiva de la TAD, y el interés que representó fue el de abordar la enseñanza de los números enteros de manera integrada teniendo en cuenta los sistemas numéricos.

Principalmente se planteó la necesidad de determinar cuáles son las potencialidades y limitaciones de una obra matemática propuesta en la institución colegio Hebreo “Jorge Isaacs”, teniendo en cuenta lo que la obra matemática plantea para la construcción de número entero. El interés de dicho trabajo es que se sitúa en la perspectiva del análisis ecológico que se pretende desarrollar en este estudio.

- Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: Los sistemas de numeración y medida de magnitudes. (Ángel Sierra tomás, Madrid 2006). Esta tesis desarrolla una organización matemática desde la unión de lo matemático y lo didáctico. En donde se considera la enseñanza de los sistemas de numeración en tres niveles diferentes (Primaria, Secundaria y la Formación de Maestros) y la enseñanza de la Medida de Magnitudes al final de Primaria, para ello se parte de la teoría de situaciones didácticas y se construye un modelo epistemológico de referencia desde el punto de vista de la TAD. Este trabajo es de mucha utilidad, pues plantea lo que se denomina un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) para el estudio de los sistemas de numeración, y aunque nuestro estudio no se centra en dicho concepto, si es útil la idea de construir un MER para el caso de las fracciones. En nuestro trabajo, se le ha denominado Obra Matemática de Referencia de acuerdo a las primeras formulaciones de la TAD.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A través de algunas investigaciones como la realizada por diferentes autores (Behr, Wachsmuth y Post, 1985; Vasco, 1994; Llinares & Sánchez, 1998; entre otros) se manifiesta que existen diversas dificultades en la enseñanza-aprendizaje de los números racionales, relacionadas algunas con la metodología que utiliza el profesor para la enseñanza, aunado a los conocimientos previos del maestro. Otras investigaciones se centran en el aprendizaje, intentando explicitar las dificultades cognitivas que presenta el estudiante cuando se enfrenta a situaciones diseñadas para provocar la emergencia de diversos significados de los racionales positivos.

La TAD plantea que no hay que dejar de lado la organización curricular de las matemáticas escolares pues su análisis puede poner en evidencia que dicha organización limita o no permite una articulación coherente de los contenidos en un ambiente matemático-didáctico tranquilo, riguroso y sistemático, como se ha reportado en diversas investigaciones para el caso del sistema educativo español¹. Es decir, que las temáticas trabajadas en un contexto institucional tienden a convertirse en cuestiones que pierden su esencia debido a que se convierten en temas aislados desprendidos de una justificación legítima que haga suponer su tratamiento escolar. Es decir, se olvida el hecho de que las matemáticas como constructo social, obedecen a unas razones de ser que forman parte de la dinámica de la vida en sociedad.

Es por esto que se considera la TAD como marco teórico, pues brinda herramientas potentes para analizar y dar respuesta a preguntas concernientes con las tareas realizadas en un proceso didáctico. Un punto importante que se puede analizar desde la TAD es la desarticulación presente en los temas propuestos para ser abordados cuyo análisis se realiza teniendo en cuenta el proceso de estudio (institucionalizado) orientado hacia el saber hacer las tareas, las técnicas utilizadas para la solución de dichas tareas y el saber explicar las técnicas utilizadas en las tareas, este proceso se presenta en la TAD como Obra Matemática.

Considerando que estos elementos son parte fundamental en la construcción del *currículo* en las instituciones escolares y que la propuesta que estos hacen para la introducción del concepto de los racionales positivos tiene mucha importancia en el proceso de enseñanza, se hace necesario un análisis de la ecología que se propone con respecto a dicho concepto para ser abordada como objeto de enseñanza.

Con respecto a las fracciones que suele ser un contenido común en los distintos currículos de las instituciones educativas, hay que decir primero que todo, que es un concepto general que abarca al de número racional, pues toda representación de la forma $\frac{a}{b}$ con b diferente de cero es una fracción pero no necesariamente un número racional, pues la siguiente expresión $\frac{\sqrt{2}}{3}$ representa una fracción pero no es un número racional. Por lo tanto este estudio se limitará a los racionales positivos. Segundo, los avances

¹Un estudio más amplio de dichos estudios puede encontrarse en la Tesis doctoral de Pilar Bolea (2002), que se referencia en la bibliografía final.

investigativos han mostrado las numerosas dificultades que afrontan los estudiantes con los significados y usos de los racionales positivos. Por ejemplo, el que los estudiantes, textos escolares y hasta muchos docentes tiendan a limitar el uso de la representación de la relación parte/todo solamente a figuras iguales, sugiriendo una confusión entre el concepto de partes iguales con el de figuras iguales. No obstante, a pesar de que muchas de las dificultades referenciadas en la literatura son amplias, desde la TAD se sugiere que un análisis concienzudo de cualquier fenómeno didáctico enmarcado dentro de un proceso o concepto matemático, debería mirarse inicialmente desde un análisis ecológico (definido en la introducción), no porque sea la única manera de abordar un estudio, sino porque permitirá enmarcarse dentro de las dinámicas institucionales que de una u otra manera influyen en gran medida en la planeación, desarrollo y evaluación de cualquier proyecto de enseñanza de las matemáticas.

Por lo cual, se hace pertinente plantear la pregunta de investigación de este proyecto en los siguientes términos:

¿Cuál es la ecología que circula en la obra matemática propuesta del concepto de los racionales positivos en los grados 4^o y 5^o de una institución escolar?

Utilizando la TAD, se estudiará la vida institucional de las cuestiones matemáticas en relación con las fracciones, describir si estas cuestiones tiene o no sentido en la institución partiendo del hecho de cada cuestión debe provenir de una sociedad que la legitima (en el sentido de los niveles de codeterminación que se expondrán posteriormente), debe ser funcional y sin duda alguna sometida a las reglas de un proceso didáctico.

Planteamos como hipótesis que en lo concerniente al estudio de los racionales positivos en la institución escolar se presentaran en gran medida los fenómenos didácticos de la atomización del proceso de enseñanza y el autismo temático. Es decir, postulamos una hipótesis similar a cómo la presenta Pilar Bolea (2002) para el caso español de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria). En este caso, se centra el estudio para el caso de la primaria, y particularmente para el ciclo 4^o y 5^o de la educación básica.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. General

Analizar la ecología de la obra matemática propuesta en una institución con relación a la introducción del concepto de los racionales positivos.

1.3.2. Específicos

- Construir una obra matemática de referencia que idealice el conocimiento a ser enseñado sobre el concepto de los racionales positivos.
- Analizar la obra matemática presentada por los referentes curriculares (plan de área de matemática de la institución y los textos escolares que usa la institución).
- Contrastar la obra matemática de referencia con la obra matemática propuesta.

1.4. JUSTIFICACIÓN

Existen varias razones que le permiten a este trabajo adquirir importancia no sólo como ejercicio investigativo sino como elemento de reflexión en la compleja tarea de educar. Una de ellas está relacionada con el saber matemático que se desarrolla en las instituciones escolares, el cual analizado desde la TAD debe proporcionar el punto de entrada a los fenómenos didácticos. Otra razón se encuentra en los documentos nacionales curriculares como son los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) pues en ellos se encuentran establecidos algunos parámetros que podrían impedir o posibilitar un avance en la educación escolar relacionada con los contenidos y las coherencias de los temas a desarrollarse por grados o ciclos, es decir, que desde el punto de vista curricular,

este trabajo representaría una visión a lo que en la TAD se denomina “*Currículo como obra abierta*” que no es otra cosa que recalcar el papel cambiante de los conceptos y procesos que circulan a nivel no sólo escolar, sino a nivel de la cultura matemática que existe en la sociedad.

Por lo cual, la justificación de este trabajo puede sintetizarse en las siguientes razones:

1. Es necesario analizar los fenómenos que pueden llegar a impedir que los estudiantes desarrollen actividades provechosas en relación a los racionales positivos. El explicitar estas condiciones permitiría que desde la TAD se aborden cuestiones que ponen de manifiesto los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos en contenidos aptos para ser estudiados y determinar cuáles son las condiciones en que se desarrolla la enseñanza de los racionales positivos.
2. A pesar de que Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006), son documentos establecidos por el MEN como una orientación para el desarrollo del currículo de matemáticas, pero al no deber ser tomados como verdades, se hace necesario un cuestionamiento de su fundamentación y orientaciones metodológicas, lo cual pondrá en evidencia algunas restricciones que se le impone a la enseñanza para que pueda vivir con “normalidad” en las actuales instituciones escolares.
3. Alrededor de los números racionales positivos han surgido muchas investigaciones, pero muy pocas se han dado a la tarea de estudiar las condiciones que facilitan o limitan el desarrollo del concepto de racionales positivos en un ambiente institucional. Es decir, el análisis ecológico supone de entrada un cuestionamiento fuerte y fundamentado sobre los enfoques en que se basan actualmente la enseñanza de cualquier concepto o proceso matemático en la escuela.
4. Pensamos que debido a la multiplicidad de responsabilidades que se le asigna hoy a la escuela, materializada en la figura del docente como gestor principal de dichas responsabilidades, se hace necesario una reflexión profunda sobre si la articulación que se propone (entre los conceptos y procesos matemáticos) resulta ser coherente con lo que se posibilita desde la propuesta curricular emanada no sólo desde los estamentos de ley, sino desde los planes curriculares de área, y

desde la misma planeación que realiza el docente para gestionar un proceso de estudio de las matemáticas, tranquilo, sistemático y sostenido en el tiempo.

En síntesis, a partir de estas razones expuestas, se hace necesario reflexionar sobre la introducción del concepto de racionales positivos, bajo el marco teórico y metodológico de la TAD, pues este brinda elementos que permiten un análisis crítico de las OMp en un contexto institucional.

CAPÍTULO 2

- REFERENTES TEÓRICOS
- DESDE LAS TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO
 - DESDE LO CURRICULAR
 - DESDE LO MATEMÁTICO

2. REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se presenta los elementos teóricos en los cuales está sustentado este trabajo, y está dado bajo tres perspectivas:

- Desde la TAD, donde fundamentalmente se describen los elementos de una Obra matemática, los tipos de obras matemáticas que permiten una articulación creciente en la actividad matemática, los niveles de codeterminación que pueden mostrar las restricciones que se imponen al estudio de una cuestión desde los distintos niveles de estudio (civilización, escuela, pedagogía, disciplina, entre otros).
- Desde lo curricular (Lineamientos curriculares; 1998 y Estándares Básicos de Competencias; 2006) que como ya se adelantó, representa una de las fuentes de reflexión al ser elementos de la OMp.
- Desde las matemáticas (Obra Matemática de Referencia) que pretende proponer una entrada para el análisis de los datos a través del análisis de los modelos de tratamiento de los racionales positivos que circulan en diferentes documentos de investigación.

Son estos los referentes utilizados para el análisis de las diferentes OM propuestas desde el currículo en una institución escolar.

2. 1. DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (LA TAD)

La TAD es una de las teorías que surge como desarrollo de la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1991) y la teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1985).

La TAD es un modelo teórico que consiste en cuestionar y reformular nociones, métodos, y procesos, dando cabida a debatir inicialmente cuáles son las condiciones que permiten, facilitan o favorecen una determinada actividad matemática y didáctica en un ambiente institucional (ecología).

Bajo este modelo teórico se desarrollan algunos elementos que serán pertinentes especificar.

2.1.1. Obra Matemática

(Chevallard 1996) da algunos desarrollos en el enfoque antropológico en donde modeliza la matemática institucional a través de una matemática, que es vista como una obra humana que nace como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo en una institución, determinadas tareas problemáticas. Esta obra describe los siguientes elementos.

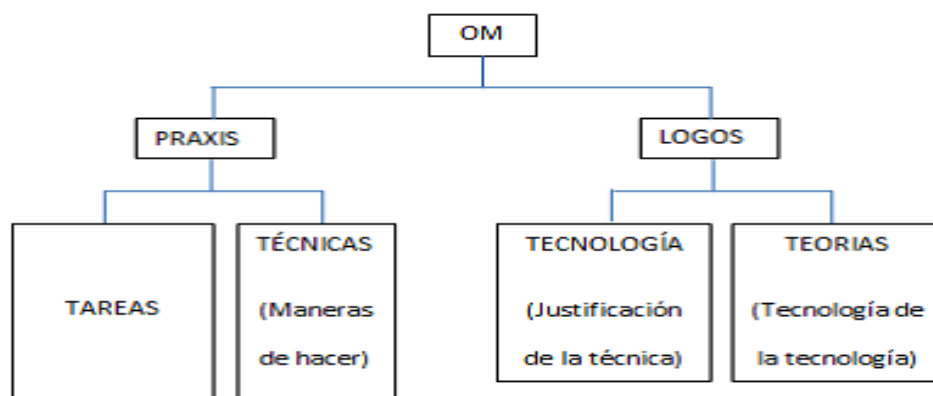


Figura 1: Estructura de una praxeología Matemática

Las OM son el resultado de una actividad matemática en donde es posible distinguir dos aspectos inseparables:

- Praxis que es el “saber hacer”, que enfatiza en un cierto tipo de problemas y cuestiones, además de las técnicas utilizadas para resolverlos.
- Logos o el “saber”, expone los discursos razonados sobre la práctica realizada.

A continuación se presenta un esquema donde se encuentran los diferentes elementos relacionados con la praxeología.

TAREAS: son las cuestiones o problemas a los que hay que dar respuesta.

TÉCNICAS: son las acciones o estrategias que se utilizan para dar respuesta a las tareas. Definida en primera instancia por (Chevallard 1991) como “una manera de hacer”.

TECNOLOGÍA: es el discurso interpretativo y justificativo de la técnica así como de su ámbito de aplicabilidad o validez.

TEORÍAS: es un discurso lo suficientemente amplio como para justificar e interpretar la tecnología, es decir, son los elementos teóricos que sustenta la realización de una actividad matemática donde más allá de dicha teoría ya todo es obvio y no necesita de más fundamentación.

Estos elementos de una obra matemática no son entes que se tengan que estudiar de manera aislada. De hecho, la TAD plantea que para tener una buena representación de la actividad matemática en un ambiente institucional es necesario que estos elementos estén relacionados entre sí. Dado que por ejemplo, para el desarrollo de una tarea se requiere de ciertas actividades que son sustentadas bajo algunas teorías.

2.1.2. Tipo de obras matemática

Con el objetivo de tener herramientas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) introdujo la distinción entre diferentes tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes:

- **Praxeologías puntuales:** se generan en la institución, a partir de las de tareas.
- **Praxeologías locales:** Es el resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Esta integración comporta que el discurso tecnológico asuma protagonismo, ya que algunas técnicas pierden el carácter auto-tecnológico (es decir, autoexplicativo).
- **Praxeologías regionales:** se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de praxeología locales, alrededor de una teoría matemática común. Esta integración comporta que el discurso teórico tome el papel central.
- **Praxeologías globales:** que surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías. Son mucho más complejas y exigen

tomar en cuenta numerosas relaciones que se dan entre los diferentes componentes de las Obras Matemáticas.

Es importante mencionar que las praxeología bien sean puntuales, locales, regionales o globales, no son únicas en todas las instituciones, son relativas a ellas pues éstas hacen parte de un currículo determinado y se categorizaran según su estructura. (Gascón, 2003). La TAD plantea que la unidad mínima de análisis debe centrarse en las praxeologías locales y no puntuales que suelen estar más limitadas a un único de tipo de tareas.

2.1.3. Niveles de codeterminación

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) propusieron una jerarquía de niveles de codeterminación entre las formas de estructurar las cuestiones matemáticas a estudiar y las maneras de organizar el estudio de las mismas en la escuela:

Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Él señala que en cada una de estos niveles se presentan restricciones que hace que el proceso de enseñanza se reduce a una cuestión (un tema) donde este pierde su sentido científico y su relación con su naturaleza, pierde su esencia dentro de la educación y una desconexión total entre todo el proceso educativo, que tienen sustento en los niveles superiores. Cuando esta conexión se pierde se llega a una cuestión “cerrada en sí misma” y, por tanto, “muerta” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 118).

De esta manera, los niveles de codeterminación que permiten ver las razones de ser sobre la presencia de determinado objeto matemático a nivel escolar, son una manera de hacer visible el comportamiento de la ecología con respecto a los elementos que configuran la Omp. En este sentido, su estudio, permitirá el análisis de algunas de dichas restricciones.

2.1.4. Fenómenos: Atomización de las enseñanzas y el Autismo temático

La TAD pone en cuestionamiento la manera en que los sistemas de enseñanza, estructuran las temáticas para ser estudiadas a nivel escolar. Plantea que el currículo se ha convertido en una serie de conglomerado de temáticas sin ninguna conexión que no sólo, no se articulan adecuadamente, sino que además, son más bien el fruto de decisiones irracionales y asistemáticas sobre la forma de llevar a cabo el proceso de estudio de las matemáticas. Esto implica que la idea de hacer matemáticas tienda a parecerse más a una transmisión de teorías cristalizadas, desnaturalizadas y justificadas en sí mismas olvidando las preguntas, cuestiones, problemáticas que le dieron sentido a su estudio. Este fenómeno se ha denominado “Autismo temático” que se relaciona a su vez con el fenómeno denominado “atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas”.

Estos fenómenos han sido evidenciados desde la TAD a través de estudios centrados particularmente en el sistema educativo español y en el análisis de la ESO (Escuela Secundaria Obligatoria). Aun así, pensamos que existe en Colombia una situación similar que queremos de alguna manera validar con la hipótesis de trabajo.

Por lo tanto, se presenta a continuación una sucinta caracterización que se hace desde la TAD sobre estos 2 fenómenos:

El *autismo temático* se presenta cuando se hace evidente un abandono de las razones de ser de un objeto matemático y esto impide al estudiante (e incluso al docente) establecer conexiones entre lo que se enseña y el porqué de lo que se enseña (Gascón, 1998).

El otro fenómeno es la *atomización*, definido como un encierro en los temas, en donde se evidencia una fragmentación de los contenidos enseñados. Esto hace que a los estudiantes se les dificulte identificar la naturaleza del objeto enseñado, de ahí que las conceptualizaciones que realizan los estudiantes carezcan de utilidad y significado, convirtiéndose en un conjunto desestructurado de actividades independientes entre sí, donde se tratan los problemas matemáticos como “anécdotas” aisladas. (Gascón, 1999).

Visto de esa manera, el análisis ecológico permite partir de un cuestionamiento en las OM que se proponen para ser enseñadas y permite analizar su alcance y limitaciones en el mismo análisis institucional, esto es, dependiente de la institución de referencia (escuela, matemáticas de investigación, matemáticas “aplicadas”, etc).

2.2. DESDE LOS ELEMENTOS CURRICULARES NACIONALES

La educación Matemática en Colombia está fundamentada actualmente por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006). Estos proponen el estudio de los distintos sistemas (numérico, variacional, métrico, geométrico, aleatorio) que permitirían relacionadamente una comprensión mayor de las matemáticas que se estudian en la escuela.

Para el caso del componente numérico que es uno de los ejes de reflexión en este trabajo, se puede plantear que dicha formulación expuesta en los Lineamientos abren la posibilidad de una mayor comprensión en el estudiante, aunque hay que tener presente que también existe la posibilidad de que esta propuesta curricular limite el proceso de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del pensamiento numérico, donde parezca que el estudiante esté movilizándolo un sentido operacional, con habilidades y destrezas numéricas, pero realmente no tiene por qué ser así.

En los Lineamientos Curriculares de Matemática (1998) se propone una relación gradual entre conceptos, procesos y contextos que se toman como referentes para una posible estructuración de la actividad matemática. Los Lineamientos conllevan a preguntarse qué enseñar y qué aprender en la institución y estos interrogantes permiten reflexionar en lo curricular, pero quizás al intentar articular unas matemáticas basadas en la vida en sociedad con unas matemáticas que deben continuamente descontextualizarse para ser reconstruidas en la escuela, olvidan que en las sucesivas reconstrucciones de las matemáticas, los elementos netamente matemáticos con sus razones de ser pueden tender a desaparecer por distintas razones (cognitivas, de legitimidad, de las aplicaciones actuales en las que se basan dichas matemáticas, etc) corriendo el peligro de caer en los fenómenos de autismo temático y atomización de la enseñanza expresados en líneas atrás.

Para el caso de Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) hay una situación similar aunque se entiende la naturaleza misma de este documento que de alguna manera intentaban corregir un olvido cuando se emanó la resolución 2343 de indicadores de logros y bajo la premisa de la Autonomía institucional esgrimida en la Ley 115 de 1994. Dicha Autonomía supuso cierto “caos” en los desarrollos particulares de los currículos locales, con lo cual los Estándares que al aunarse a la idea de Competencias, intentaron proponer una especie de Competencias Básicas que todos los estudiantes

debían desarrollar independiente del currículo adoptado por cada institución educativa, intentando así respetar lo consagrado en los PEI (Proyectos Educativos Institucionales).

No obstante, aunque este documento recoge en gran medida los aportes y conceptos de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de 1998, intenta proponer no sólo una nueva conceptualización para la noción de Estándar y de Competencia, sino para rediseñar y dirigir la construcción de los currículos en matemáticas hacia 2 ideas básicas: La coherencia vertical y la coherencia horizontal. La coherencia vertical que está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros grados y la coherencia horizontal que es la relación de un estándar determinado con los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Para efectos de este trabajo, se presenta una aproximación al análisis de la coherencia horizontal y vertical en el conjunto de estándares de los grados 4° y 5° que están relacionados con los racionales positivos.

En la siguiente tabla se presenta algunos estándares que se han explicitado para posteriormente realizar un análisis de la coherencia vertical que será un apoyo para el análisis curricular.

Conjuntos de grados	Pensamiento numérico	Pensamiento variacional	Pensamiento métrico
De 1° a 3°	• Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).	• Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).	• Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición.
De 4° a 5°	• Interpreto las fracciones en diferentes contextos:	• Describo e interpreto variaciones	• Describo y argumento relaciones entre

	situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. • Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos. • Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes. • Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.	representadas en gráficos. • Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. • Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.	el perímetro y área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.
De 6° a 7°	• Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos	• Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	• Resuelvo y formulo problemas que requieran técnicas de estimación.

	(conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. • Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.	
De 8º a 9º	• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	• Generalizo procedimientos de cálculos válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.

De 10° a 11°	• Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.	• Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.	• Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medidos se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes.
--------------	--	---	---

Tabla 1. Herramienta para el análisis de la Coherencia vertical. MEN (2006).

Esta tabla esboza los diferentes conjuntos de grados haciendo énfasis en el pensamiento numérico, pensamiento variacional y el pensamiento métrico, que son los que se tendrán en cuenta para este trabajo, dado que en la OMr se hará una discusión sobre dos posibles formas de introducir el estudio de Q^+ en la escuela. Por un lado, se encuentra la fuente aritmética que tiende a ver la fracción como un número con algunas particularidades. Por el otro, se encuentra la fuente algebraica que tiende a ver la fracción como el resultado de un análisis ecuacional. Es decir, que para llegar al concepto de un número racional positivo como tal hay que utilizar un sistema algebraico el cual permite a su vez llegar al pensamiento numérico (racional positivo), pues a través del pensamiento numérico no se pueden abarcar algunas temáticas que permita desarrollar todo el concepto de fracción.

Los siguiente estándares, en el ciclo $4^o - 5^o$, son seleccionados para realizar posteriormente el análisis de la coherencia horizontal teniendo en cuenta los distintos conocimientos básicos emanados desde la publicación de los Lineamientos Curriculares.

Conjuntos de grados	Pensamiento numérico y sistemas numérico	Pensamiento espacial y sistema algebraico	Pensamiento métrico y sistema de medida	Pensamiento aleatorio y sistema de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
De cuarto a quinto	• Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación. • Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	• Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. • Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes y propiedades.	• Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación. • Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.	• Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.	• Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos. • Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.

Tabla 2: Herramienta para el análisis de la Coherencia horizontal. (MEN, 2006)

Con la coherencia horizontal se busca mostrar la relación entre los diferentes pensamientos, partiendo del estándar que hace referencia a los sistemas numéricos en general.

En esta tabla se hace evidente que desde el estándar relacionado con los números fraccionarios (Q^+), se propone una interpretación en diferentes contextos donde se demuestre las propiedades a partir de las operaciones, se presenta relaciones de congruencias y comparación, además la resolución de problemas mediante diferentes

procedimientos matemáticos y se utiliza las representaciones gráficas como método de comparación.

2.3. DESDE LO MATEMÁTICO

A continuación se realizarán algunas reflexiones de tipo epistemológico que intentan sustentar la idea de que los números racionales necesitan llevarse al campo de lo algebraico para poder dar evidencia de sus aspectos estructurales $(Q, *, \leq)$ pues se considera que con solo la estructura numérica no se puede abarcar todos los significados que engloba los números racionales.

En el currículo actual tiende a introducirse el concepto de número racional como una especie de subgénero del concepto de fracción. Es común desde este punto de vista que se definan los Racionales (Q) de la siguiente manera:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

Se ve como los racionales vienen a ser interpretados como fracciones con algunas particularidades.

Sin embargo, más que una definición, la escritura anterior es sólo una representación de un hecho que oculta la naturaleza de lo que pueden ser los Racionales y sus distintas maneras de ser interpretados.

Por lo tanto, no queda más que hacer una aproximación, al comienzo reduccionista, para intentar captar y categorizar los distintos significados de la fracción.

Para dicho abordaje, partiremos de la cuestión generatriz (Q_0) que planteamos así: ¿Qué tareas, técnicas, tecnologías y teorías permiten abarcar todos los significados de los números racionales positivos en un ambiente institucional?

Para tratar esta cuestión, se va a trabajar con una OMr que será útil para el diseño, gestión y evaluación de una determinada Obra matemática.

Comenzaremos con un breve relato de tipo histórico – epistemológico que permitirá dar cuenta de algunos acercamientos a la cuestión generatriz inicialmente planteada. Este relato se basa en los apuntes que realiza Obando (2003) en su trabajo sobre los racionales.

Desde los inicios de la historia del número ha existido una separación entre número y magnitud proveniente del pensamiento de los griegos. La idea de número, estaba ligado a lo discreto, es decir a lo que se puede contar, por otro lado la magnitud estaba relacionada con lo continuo, es decir a lo medible. Por otro lado el número estaba relacionado con la aritmética y las magnitudes con la geometría, por lo cual se reconocían dos tipos de unidad: la unidad aritmética y la unidad geométrica.

La unidad aritmética para los griegos era el “uno” que no necesariamente tenía que ser un número, pues era el generador de todos los números y era único y universal.

La unidad geométrica, por su parte, era relativa a la magnitud que se iba a medir. En este sentido no era única y universal como el número, sino que dependía de aquello que se quisiera medir.

Así pues, para los griegos, sólo eran números los naturales mayores que uno. No existían las fracciones de la unidad, como números. Se aceptaba la fracción $\frac{1}{2}$ en tanto que ella expresaba el resultado de la cuantificación de dos magnitudes homogéneas, en las cuales sus medidas estuvieran en una razón de 1 a 2. Las demás mediciones inexactas, es decir aquellas que dieran como resultado otro tipo de fracciones, eran expresadas como razones homogéneas entre números naturales. Por ejemplo $\frac{3}{4}$ era pensado como una razón de 3 a 4, y representaba la conmensurabilidad de dos magnitudes homogéneas. De esta manera, al expresar las medidas como razones entre números, se establecía un contacto entre la aritmética y la geometría.

Otro hecho importante en la historia de las matemáticas en el cual las prácticas sociales de la medición son fuente importante para la conceptualización de las fracciones como números se dio en culturas como la egipcia y la babilónica que lo relacionaban con la agrimensura y la astronomía era de vital importancia, de esta forma la medición y los cálculos aritméticos relativos a los problemas que debían enfrentar constantemente (medida de la superficie cultivable en un determinado terreno, cobro de impuestos en función de la tierra cultivada, etc.) hicieron que aritmética y geometría estuvieran estrechamente unidas y que, por tanto, se concluyera que las fracciones pueden

interpretarse como parte de un todo y parte de un número. De esta manera las fracciones de unidad también eran números, en tanto que expresaban el resultado de una medida.

En conclusión a través del estudio histórico–epistemológico se pueden destacar las separaciones entre “continuo–discreto”, “unidad aritmética–unidad geométrica” y “número–magnitud”.

Este breve recorrido histórico brinda elementos que son considerados en el desarrollo de la obra matemática, pues propone pistas sobre la discusión entre el uno y la unidad, el aporte del álgebra a la construcción de número, la discontinuidad entre número y magnitud.

Para la realización de esta OMr se presentarán dos modelos matemáticos desde los cuales poder analizar el concepto de los racionales positivos.

❖ Modelo aritmético

El modelo aritmético que se desarrolla presenta algunos conceptos relacionado con los racionales positivos y como son utilizados en una tarea.

Definición 1: una fracción (Q) es la relación entre una parte y el todo, que consiste fundamentalmente en dividir el todo en partes congruentes entre sí y la fracción (Q) vendría a expresar la relación entre el número de partes pedido y el número total de partes.

Definición 2: Dos fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son equivalentes, y se escribe $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ si se cumple la siguiente igualdad $p \cdot s = q \cdot r$.

Definición 3: Dos fracciones son homogéneas cuando comparten el mismo denominador.

Definición 4: Dos fracciones son heterogéneas cuando tienen distinto denominador.

Definición 5: Una fracción se llama propia si su numerador es menor que su denominador.

Definición 6: Una fracción se llama impropia si su numerador es mayor que su denominador.

Definición 7: Un número mixto está formado por un número natural y una fracción propia.

Definición 8: El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero entre dichos números.

Definición 9: Amplificar una fracción significa hallar otra fracción equivalente pero con términos mayores. Para ello, basta multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un mismo número.

Definición 10: Simplificar una fracción es hallar otra fracción equivalente, cuyos términos sean menores. Para simplificar una fracción se divide el numerador y el denominador por el mismo número.

Definición 11: Cuando se tiene una gráfica (figura geométrica o recta numérica) y esta es dividida en tantas partes congruentes como indique el denominador de un racional positivo y de estas se toma la cantidad que indique el numerador, esta es una representación de dicho racional.

Estas definiciones son tomadas de los textos escolares que fueron tomados por el análisis, más adelante son mencionados.

Ahora aterrizaremos algunas de estas definiciones mediante una tarea, para lo cual se centrará la atención solo en una operación matemática que será la adición.

- Calcular la adición entre $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

Usualmente para dar respuesta a esta tarea recurrimos a un modelo típico de “multiplicar numerador de la primera fracción por denominador de la segunda fracción más denominador de la primera fracción por numerador de la segunda fracción sobre la multiplicación de los dos denominadores”, en este caso se dará respuesta utilizando propiedades netamente numéricas.

Primero utilizaremos la definición 9,

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} \dots$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} \dots$$

Hay que identificar cuáles son las fracciones homogéneas, $\frac{3}{12}$ con $\frac{8}{12}$ y $\frac{6}{24}$ con $\frac{16}{24}$, aunque se sabe que hay infinitas fracciones equivalentes. Y para realizar la suma entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$ se utiliza las fracciones homogéneas, $\frac{3}{12}$ y $\frac{8}{12}$ que son fracciones equivalentes de las fracciones dadas respectivamente, y se procede a realizar la suma de fracciones homogéneas $\frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$

Una definición importante que se desarrolla en las instituciones escolares es el m.c.m. que en algunas ocasiones se desarrolla descomponiendo los denominadores. Formulemos la siguiente tarea.

- Sumar $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

La técnica usual se basa en hallar el m.c.m

Dándole solución por descomposición tomamos los denominadores 4 y 3.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ & 2 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

Entonces el (m. c. m.) de (4 y 3) = $2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$. Este 12 representa el denominador de dos fracciones que son equivalentes a las fracciones dadas, la cuestión sería por qué números fueron multiplicadas las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$ para obtener el 12 como denominador, una respuesta sería por 3 y 4 respectivamente, por lo cual si se multiplica $\frac{1}{4}$ por $\frac{3}{3}$ se obtiene $\frac{3}{12}$, y $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{4}$ se obtiene $\frac{8}{12}$ y ahora se puede realizar suma de fracciones homogéneas $\frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$.

Otra forma de darle solución es utilizando la definición de fracciones equivalentes, de amplificación de una fracción y fracciones homogéneas. La idea aquí es ubicar un número común en los denominadores tal que al amplificar las fracciones converjan a ese número. En el ejemplo citado $\frac{1}{4}$ se puede multiplicar por $\frac{3}{3}$ y $\frac{2}{3}$ se multiplica por $\frac{4}{4}$. Aunque este procedimiento puede ser lógico desde un punto de vista numérico, obsérvese que la justificación última descansa en un hecho puramente algebraico y se trata de tener que demostrar la existencia y unicidad del elemento neutro para el caso de la multiplicación, en donde $a(1)=a$. Después de eso, no queda sino sumar nuevamente las fracciones homogéneas resultantes.

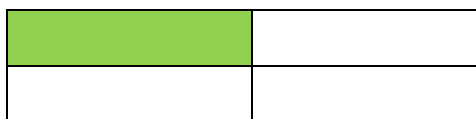
Miremos ahora otra forma de abordar la adición de dos números racionales positivos desde la representación gráfica y utilizando la definición de fracciones equivalentes.

- Hallar la adición entre $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

Por definición de fracciones equivalentes $\frac{1}{4}$ es equivalente con $\frac{3}{12}$ y $\frac{2}{3}$ es equivalente con $\frac{8}{12}$.

Gráficamente se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{4}$$

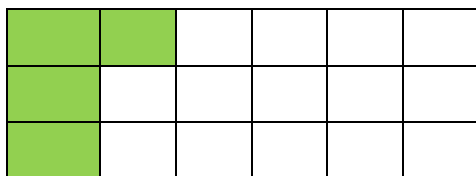


$$\frac{2}{3}$$



Ahora utilizamos las fracciones equivalentes correspondientes.

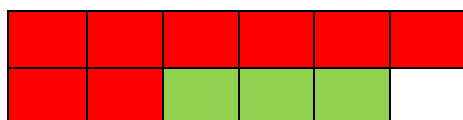
$$\frac{3}{12}$$



$$\frac{8}{12}$$



Si se ubican tanto los rectángulos de color rojo y verde en una sola gráfica se obtiene la siguiente representación.



Estos equivalen al número racional $\frac{11}{12}$.

Hay que resaltar que para la solución de tareas relacionadas con la adición de racionales positivos un concepto clave es fracciones equivalentes, si se intenta utilizar un procedimiento netamente aritmético. Igualmente el análisis de este conjunto de tareas deja ver que la suma de fracciones heterogéneas como tal, no existe o no es posible resolverlas sino es mediante el uso de alguna técnica que las convierta en homogéneas. Todo el trabajo numérico se reduce entonces en este caso a encontrar técnicas para convertir fracciones heterogéneas en homogéneas, lo cual deja sin una justificación fuerte a la idea de que en las instituciones escolares se vea al m.c.m como una idea última y fuerte de este proceso aritmético.

❖ Modelos algebraico

Ecuaciones tales como $ax = b$, dan inicio a los números racionales desde un enfoque más formal. Matemáticamente este tipo de ecuaciones son solucionadas mediante un sistema algebraico, pues estas ecuaciones dan paso a las diversas propiedades de los números racionales positivos que son demostradas mediante el álgebra.

Vale la pena nombrar algunas cuestiones que se deben llevar a la escuela y que de hacerlo permitirían hacer una construcción más apropiada de los números racionales. Existen algunas preguntas que se deben llevar a los estudiantes de modo que los cuestione y los invite a pensar en su aprendizaje, esas preguntas se mencionan continuación:

Q₁: ¿Cómo puede verse los racionales como elementos de una estructura algebraica?

Q₂: ¿Puede la fuente algebraica alimentar la fuente numérica en el significado de los racionales y viceversa?

Cuestiones como las mencionadas anteriormente, pueden contribuir a que los estudiantes empiecen a tener nociones acertadas hacia el concepto de los racionales

Las cuestiones anteriores pueden llegar a poner de manifiesto algunas necesidades que permitan observar y reconocer los elementos estructurales en la construcción de Q.

Pero eso sólo es posible si se toma el estudio en un entorno algebraico, porque las propiedades que enunciamos a continuación, no pueden hacerse creíbles en un plano puramente aritmético.

Definición 12: Sea H el conjunto de las parejas $(p, q) \in Z \times Z$ tales que $q \neq 0$:

$$H = \{ (p, q) \in Z \times Z : q \neq 0 \}$$

La siguiente definición abarca a los Q^+ desde una estructura más algebraica

Definición 13: La expresión $x = b \cdot a^{-1}$ se denomina cociente de b por a y se denota por la fracción $x = \frac{b}{a}$ para $a \in Z^+$

Definición 14: Para todo $x \in Q, x \neq 0$, existe $y \in Q$, tal que $xy = 1$; justamente este elemento y se denomina el inverso multiplicativo de x ; se representa por x^{-1} y es igual a $1/x$. De este modo, para todo $x \in Q, x \neq 0$, tenemos que:

$$xx^{-1} = x \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

Definición 15: Dado que dos números racionales x y t tal que x y $t \in \mathbb{Q}$ con $x \neq 0$ y $t \neq 0$ decimos $x < t$ o $t > x$ si y solo si $t - x \in \mathbb{Q}^+$. Además, diremos que $x \leq t$ si $x < t$ o $x = t$.

La relación de $\leq$ sobre $\mathbb{Q}$ es una relación de orden, y cumple las siguientes propiedades.

Propiedades del orden. Para x, y, s y t en $\mathbb{Q}$

1. si $x \leq y$, entonces para todo $z \in \mathbb{Q}$, $x + z \leq y + z$.
2. si $x \leq y$ y $s \leq t$, entonces $x + s \leq y + t$.
3. si $x \leq y$, entonces $-x \geq -y$.

Propiedades de densidad. Dado dos números racionales x y y , existe un racional t , tal que $x < t < y$ o más sencillamente: entre dos racionales diferentes cualesquiera, podemos encontrar otro racional entre ellos.

Definamos las siguientes operaciones en $\mathbb{Q}^+$

$$\frac{a}{h} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{hd}$$

Teorema 1: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tal que a, b, c y $d \in \mathbb{Z}$ con b y $d \neq 0$ entonces la suma entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ será igual a $\frac{ad+bc}{bd}$.

Demostración 1:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} \text{ Definición 13}$$

$$= ab^{-1}dd^{-1} + cbb^{-1}d^{-1} \text{ Definición 14}$$

$$= ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} \quad \text{Propiedad asociativa}$$

$$= (ad + bc)(bd)^{-1} \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{Definición 13}$$

Teorema 2: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tal que a, b, c y $d \in \mathbb{Z}$ con b y $d \neq 0$ entonces la resta entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ será igual a $\frac{ad-bc}{bd}$.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Demostración 2.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = ab^{-1} - cd^{-1} \text{Definición 13}$$

$$= ab^{-1}dd^{-1} - cbb^{-1}d^{-1} \text{Definición 14}$$

$$= ad(bd)^{-1} - bc(bd)^{-1} \quad \text{Propiedad asociativa}$$

$$= (ad - bc)(bd)^{-1} \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{ad-bc}{bd} \quad \text{Definición 13}$$

Teorema 2: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tal que a, b, c y $d \in \mathbb{Z}$ con b y $d \neq 0$ entonces el producto entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ será igual a $\frac{ac}{bd}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Demostración 2

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ab^{-1} cd^{-1} \text{Definición 13}$$

$$= ac(bd)^{-1} \text{Propiedad asociativa}$$

$$= \frac{ac}{bd} \text{Definición 13}$$

Teorema 3: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ tal que a, b y $c \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ entonces la suma entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ será igual a $\frac{a+c}{b}$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Demostración 3

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = ab^{-1} + cb^{-1} \text{Definición 13}$$

$$= (a + c)b^{-1} \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{a+c}{b} \text{Definición 13}$$

Teorema 4: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{c}$ tal que a, b y $c \in \mathbb{Z}$ con b y $c \neq 0$ entonces el producto entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{c}$ será igual a $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b}$$

Demostración 4:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = ac(bc)^{-1}$$

Definición 13

$$= acb^{-1}c^{-1}$$

Propiedad distributiva

$$= acc^{-1}b^{-1}$$

Propiedad transitiva

$$= a(cc^{-1})b^{-1}$$

Propiedad asociativa

$$= a 1 b^{-1}$$

Definición 14

$$= a b^{-1}$$

Multiplicación por la unidad

$$= \frac{a}{b}$$

Definición 14

Ahora veamos que $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ es un campo conmutativo.

- i. $(\mathbb{Q}; +)$ es un grupo abeliano, es decir que $\mathbb{Q}$ con la suma es asociativo y conmutativo.

Demotración: Dnde p, q, r, s, t y $u \in \mathbb{Z}$ con q, s y $u \neq 0$.

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{t}{u} = \frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) \text{ por propiedad asociativa de la suma}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \text{ por propiedad conmutativa de la suma}$$

ii. $(Q; .)$ es un semigrupo

Demostración:

$$\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) \cdot \frac{t}{u} = \frac{p}{q} \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u}\right) \text{ Por propiedad asociativa de la multiplicación}$$

Ahora veamos algunas tareas frecuentes en las instituciones escolares en donde se utilizan números racionales bajo un modelo algebraico.

- Hallar el valor de x en la siguiente igualdad, $\frac{2}{3} = \frac{x}{4}$.

Utilizando la definición de fracciones equivalentes se tiene,

$$2.4 = 3.x$$

$$8 = 3.x$$

$$\frac{8}{3} = x$$

- Verificar que las dos fracciones son equivalentes, $\frac{x+2}{x^2+4}$ y $\frac{1}{x-2}$ para todo x que pertenezca a Q .

Utilizando la definición de fracciones equivalentes, se tiene lo siguiente

$$(x+2)(x-2) = (x^2-4) \cdot 1$$

$$x^2-4 = x^2-4$$

Con las tareas anteriores se hace evidente que tanto el modelo aritmético como el algebraico están muy ligados en la solución de dichas tareas, por lo cual se hace necesario que las instituciones escolares hagan énfasis en que los números racionales positivos están dados a partir de una estructura algebraica y que no solo depende de una estructura aritmética.

Con la reconstrucción, además de tener una OMr, se desea resaltar elementos que son utilizados en las instituciones educativas y que dan desarrollo a dos sistemas como son el aritmético y el algebraico.

.

CAPÍTULO 3

- METODOLOGÍA
- CARACTERÍSTICAS DE LA INSTITUCIÓN

3. 1.METODOLOGÍA

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) basa la mayoría de sus análisis en el contraste entre las Obras Matemática (OM) que circulan en las diferentes instituciones, con relación a las Obras Matemáticas de Referencia (OMr).

En la realización de cada uno de los elementos que conforman este trabajo se particularizaron los momentos de la ejecución distribuidos por fases, los cuales permitieron recoger la información que da cuenta de su desarrollo. Las siguientes son las fases que se llevaron a cabo:

Fase I: En esta fase se desarrolló la ampliación del marco teórico de tal forma que se destacó ciertos elementos teóricos que son utilizados en el análisis de los elementos del currículo propuesto de la institución escolar (Plan de área de matemáticas, Texto escolar de Matemáticas, Estándares de competencias en Matemáticas y Lineamientos curriculares). Al igual que la selección de los textos escolares.

Fase II: En esta fase se llevó a cabo la construcción de la OMr la cual sirvió para analizar las posibles limitaciones o potencialidades al introducir el concepto de los números racionales positivos (Q^+), en un entorno aritmético y algebraico.

Fase III: En esta etapa se realizó el análisis de la OMp con la OMr, lo cual permitió llegar a la conclusión de si se logró o no, el objeto inicial en el que se intentaba determinar algunas limitaciones y potencialidades en la enseñanza de los números racionales de manera integrada en el currículo propuesto.

3.2. CARACTERÍSTICAS DE LA INSTITUCIÓN

El estudio se llevó a cabo en la institución Educativa Juan Pablo II ubicada en la Calle 1-A No 78-23 Barrio Prados del sur en Cali. En esta institución, labora como docente Dora Janeth Gómez, quien está encargada del área de matemática de los grados 4^o y 5^o, ella ha realizado diferentes actividades relacionadas con las fracciones motivo por el cual ella

puso al servicio de este trabajo su práctica como docente. Hay que mencionar algunas situaciones que son relevantes en el análisis de este trabajo, como las reuniones por área que están programadas una vez por mes pero que en la práctica no siempre se llevan a cabo; en estas reuniones se proponen actividades que “potencialicen” el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y harán parte del proceso de estudio de la Omp. Igualmente, la profesora Dora Janeth realiza un trabajo de investigación a nivel personal, sobre las fracciones, utilizando actividades con el uso de materiales manipulativos como el tangram y ha obtenido algunos resultados que puede ser un aporte para el análisis ecológico que aquí se sugiere.

Por otro lado se presenta las respectivas caratulas de los textos escolares que son una de las fuentes principales de análisis en este trabajo



Figura 2. Caratula del texto escolar de grado cuarto



Figura 3. Caratula del texto escolar de grado quinto

El texto de la figura 2 pertenece a la editorial voluntad de Bogotá y fue escrito por Mejía, (2011), es un textos que contiene muchas gráficas para ayudar a la comprensión del texto, por otro lado el texto de la figura 3 pertenece a la editorial Santillana de Bogotá y fue escrito por Ramírez, (2011), este libro describe sus actividades paso a paso para facilitar la comprensión.

Para la realización de nuestro análisis usamos dos preguntas que consideramos son claves, para abarcar los elementos teóricos abordados y que nos brindan las pautas de estudio, que a su vez son transversales a las diferentes OM analizadas y contienen al currículo, los números fraccionarios y las tareas.

1. ¿Cuáles son los conceptos matemáticos encontrados en las OM analizadas en relación a los números racionales positivos?
2. ¿Qué tipo de tareas se encuentran inmersas y cuál es el apoyo teórico que las justifica desde la praxis y el logos?

En los análisis se hará evidente la pertinencia de estas preguntas pues allí se les dará respuesta teniendo en consideración los objetivos planteados al inicio.

CAPÍTULO 4

- ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA
- ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES

4.1. ANALISIS DEL PLAN DE ÁREA

Con el fin de tener una visión general de la organización del plan de área de la institución en la cual se llevó a cabo el análisis del presente trabajo, se plantea a continuación un mapa conceptual que deja ver la estructura que tiene el plan de área de matemáticas, la cual es objeto de análisis en el presente trabajo. Estructura del plan de área (Mapa conceptual).

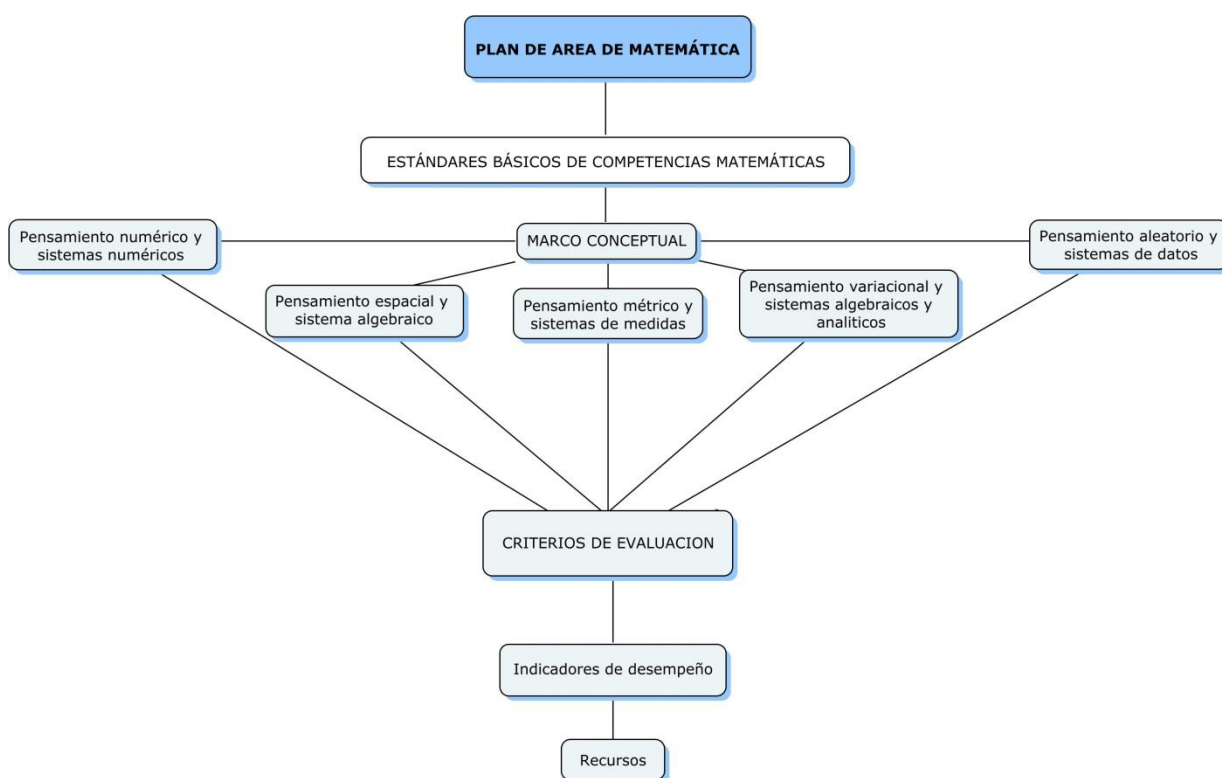


Figura 4. Mapa conceptual del plan de área del colegio Juan Pablo II

La institución educativa Juan Pablo II en su plan de área de matemáticas para los grados 4^o y 5^o de primaria presenta en la parte inicial los estándares básicos de competencias en matemáticas en los diferentes pensamientos para los diferentes periodos académicos que son cuatro, los contenidos, los logros, indicadores de logros y las competencias, criterios generales de evaluación donde se menciona el paso a paso para evaluar al estudiante según el proceso de enseñanza.

En el plan de estudio desarrollan tres pensamientos que son el numérico, el espacial y el aleatorio, en cada uno de ellos se hace específico las temáticas a trabajar. Estas temáticas están más ligadas al sistema numérico.

En el plan de área se presenta un logro esperado por periodo académico en el cual no se evidencia el por qué se es necesario alcanzar dicho logro en contextos cotidianos, pues no hay en ellos una justificación clara y explícita que valide la importancia de la enseñanza de los contenidos temáticos. Lo que hace que los temas carezcan de una razón de ser de su enseñanza en ésta institución, en lo que se observa presente el fenómeno de enseñanza llamado “autismo temático”.

Para dar evidencia de estos se toma un fragmento del plan de área de la institución.

GRUPO TEMATICO:		
NUMÉRICO: LAS FRACCIONES: RELACIÓN PARTE-TODO - Lectura y escritura de fracciones. - Fracciones Unitarias $1/2$ (medios), $1/4$ (cuartos), $1/8$ (octavos), $1/16$ (dieciseisavos), $1/3$ (tercios), $1/6$ (sextos), $1/12$ (doceavos)... - Fracciones propias - Fracciones impropias.	ESPACIAL – MÉTRICO: RELACIONES ESPACIALES - Movimientos de traslaciones y rotaciones RELACIONES MÉTRICAS - Comparaciones de magnitudes lineales - Comparaciones de magnitudes de superficie - Comparaciones de magnitudes de volumen	ALEATORIO: ESTADÍSTICA Organización de datos: Recolección de datos y Representación de datos en graficas
LOGRO ESPERADO: Realiza comparaciones entre el todo (unidad) y cada una de sus partes (fracciones), para establecer la relación entre ellas, a través de las magnitudes de volumen, áreas y longitudes, manipulando materiales concretos para construir significativamente nuevos saberes.		
CRITERIOS DE EVALUACION: - Diseños con teselados a partir de movientes en el plano cartesiano - Organización de datos estadísticos de las traslaciones resultantes en el teselado - Elaboración de diseños usando el tangrams chino - Presentación de un diseño personal de tangrams - Cálculo de áreas y perímetros usando las fichas del tangrams chino		

Figura 5. Tamada del plan de área de matemática de 5 de la institución Juan Pablo II

Los temas o cuestiones matemáticas que se proponen desde el plan de área para ser estudiadas surgen solo en un nivel temático y además no se estructura propiamente como una OM local, lo que hace que los temas parezcan ser independientes entre sí.

En el plan de área de 4^0 se trabaja bajo el sistema numérico decimal y en el plan de 5^0 se inicia también con el sistema decimal dándole paso a la relación de orden y luego a la construcción de número racional positivo a partir de la relación parte todo, en esta cuestión se puede evidenciar un autismo temático pues se abandona la razón de ser del

objeto matemático ya que no se hace explícito la conexión entre el sistema numérico decimal y la construcción de los racionales positivos.

Por otro lado en el plan de área de 5^o en el segundo periodo como eje temático se propone las fracciones unitarias, esta temática está relacionada con el sistema numérico decimal, pero en el plan de área se maneja como cuestiones separadas, en este caso relacionando con los niveles de codeterminación propuesto por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) se hace presente una restricción en el proceso de enseñanza pues se pierde el sentido y la naturaleza del objeto matemático haciéndose evidente una separación en un proceso educativo que se supone que debe ser continuo y grupal, partiendo de esta idea se puede decir que estas temáticas no están desarrolladas bajo un contexto social que le permita al estudiante navegar diferentes contextos relacionado con los racionales por lo cual se hace evidente una restricción en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado los lineamientos curriculares de matemática proponen la interpretación de los números racionales positivos en diferentes contextos, pero el plan de área propone los números racionales desde un plano netamente numérico, lo cual no le brinda herramientas al estudiante para un análisis algebraico en este caso.

Se puede decir entonces que la obra matemática propuesta en el plan de área sería de tipo local pues se evidencia la integración de obras puntuales que de alguna forma da una justificación al objeto matemático en cuestión.

4.2. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES

Existe una praxeología asociada a las tareas que permiten usar diferentes técnicas, tecnologías o teorías para solucionar las situaciones presentadas en una institución. Estas soluciones se relacionan con cuestiones matemáticas que potencializa la búsqueda de una respuesta válida o no, a determinada situación. (Gascón, 2003).

Sin embargo estas cuestiones deben ser transformadas y adaptadas a la situación para que se lleve a cabo un estudio adecuado de las tareas planteada.

Para el análisis de los textos escolares, se tendrá en cuenta los cuatro elementos estructurales de las OM desarrollados en el capítulo 2: las tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías.

De los textos escolares (Zona Activa 4 e Interactivo 5) seleccionados por la institución como marco teórico de referencia, se centrará la atención en el tipo de actividad que propone y en la praxeología que se puede desarrollar para validar los enunciados propuestos por el texto guía.

En los siguientes cuadros se realiza una caracterización sobre los contenidos explícitos en los textos escolares. Esto nos permitirá realizar un análisis integrado de los dos textos, que posteriormente nos proporcionarán las pautas de análisis del cómo se enlazan los contenidos enunciados con las tareas (la praxis) y el tipo de conceptualización o definición (el logos) usado por el texto escolar, para identificar la técnica para la resolución de las tareas planteados desde las pautas que nos brinda la TAD teniendo en cuenta la obra matemática de referencia mencionada en el capítulo 2.

El texto escolar Zona Activa 4 presenta 8 unidades temáticas, para la realización de este análisis se tendrá en cuenta la OM presentada en la unidad temática 4. En el texto escolar interactivo 5 se explicitan 5 unidades temáticas de las cuales analizaremos la unidad 3.

Número y nombre de la unidad.	Tipo de pensamiento.	Temas.	Estándares.
Unidad 4 Fracciones	Numérico	➤ Concepto de fracción. ➤ Fracción como parte todo. ➤ Fracción como parte de un número. ➤ Clase de fracciones ➤ Fracciones equivalentes. ➤ Simplificación y complicación de fracciones. ➤ Fracciones en la recta numérica y orden. ➤ Adición y sustracción de fracciones heterogéneas. ➤ Adición de números mixtos. ➤ Sustracción de números mixtos. ➤ Multiplicación de fracciones.	Reconocer el significado de las fracciones en diversos contextos.

Tabla 3. Estructura de la unidad 4 del texto Zona Activa.

Número y nombre de la unidad.	Tipo de pensamiento.	Temas.	Estándares.
Unidad 3 fracciones	Numérico	➤ Concepto de fracción. ➤ Representación de fracciones. ➤ Lectura de fracciones. ➤ Clase de fracciones. ➤ Números mixtos. ➤ Conversiones de fracciones impropias a números mixtos. ➤ Representación de fracciones en la recta numérica. ➤ Fracciones equivalentes. ➤ Complicación de fracciones. ➤ Simplificación de fracciones. ➤ Orden en las fracciones. ➤ Adición y sustracción de fracciones de igual denominador. ➤ Adición y sustracción de fracciones de diferentes denominadores. ➤ Multiplicación de fracciones. ➤ Fracción de un número. ➤ División de fracciones. ➤ Operaciones combinadas con fracciones.	Identificar, resolver y representar situaciones relacionadas con los números fraccionarios.

Tabla 4. Estructura de la unidad 3 del texto de Interactivo.

Observando las tablas se puede decir que ambos textos escolares proponen temáticas muy similares, aunque hay que destacar que el texto escolar de 5^o propone trabajar con los números mixtos, temática que no es propuesta por el texto escolar de 4^o, también en el texto Zona Activa 4 propone el concepto de los racionales positivos como parte de un todo y como parte de un número. Además ambos textos proponen su contenido bajo el pensamiento numérico y su estándar maneja como temática los números racionales positivos.

De esta manera en nuestro análisis de los textos escolares, teniendo como referente la TAD, nos centraremos en las tareas (ejemplos, actividades, ejercicios a resolver, resolución de problemas), para evaluar que tanto permiten las cuestiones para ser resueltas de una estructura que los determine.

Así mismo, consideramos importante explicitar que gran parte de las cuestiones matemáticas asociadas al saber hacer, inmersas en las instituciones, se encuentran previamente estructuradas en un nivel temático y nominalmente organizadas; pero para afirmar esto, es pertinente conocer la estructura que compone en nuestro caso los textos escolares. (Gascón, 2003).

Con base en la explicitación de los ejes temáticos esbozados anteriormente, se presenta a continuación un examen más minucioso de lo hallado en los textos.

4.2.1. Análisis de la praxis (tareas y técnicas).

Consideremos en detalle las características de la actividad matemática relacionada con los números fraccionarios, tal y como ella se desarrolla en el interior de la unidad.

Caracterización de los textos escolares teniendo en cuenta la forma como introducen los números fraccionarios.

A continuación se presenta una tabla que fue construida para describir particularmente los dos textos y que contiene los datos en donde se encuentra el objeto de estudio a analizar en cuanto a la secuencia que se da desde el inicio con el concepto de número fraccionario y un mapa conceptual en donde se pone en evidencia esta secuencia en cuanto a cómo se introduce el concepto de Q en esta institución escolar basado en los textos escolares, que muestra las relaciones y características de los conceptos desarrollados.

	Zona Activa 4 (Editorial Voluntad)	Interactivo 5 (Editorial Santillana)
¿Cómo se introduce el concepto de número fraccionario?	La unidad inicia con una lectura sobre una finca la cual tiene un lago que está dividido en 9 zonas de las cuales 4 de estas zonas tiene peces grandes y las restantes peces pequeños. También muestran imágenes de conjuntos con algunos elementos diferentes, donde hay que identificar cuantos elementos con las mismas características hay en dicho conjunto. Luego presentan imágenes de figuras geométricas divididas en partes iguales y algunas de esas partes están resaltadas con colores y al lado su representación numérica.	La unidad inicia una lectura histórica sobre las lenguas indígenas, donde se menciona los grupos indígenas que existen en Colombia y la cantidad de personas que hablan una lengua indígena, luego se contextualiza con una pregunta sobre la representación en relación con los números fraccionarios. Luego se presentan algunas figuras donde el estudiante debe representar un número fraccionarios específico.
Estructura de la presentación del tema de los números racionales positivos.	➤ Fracción como parte de un todo. ➤ Fracción como parte de un número. ➤ Fracciones equivalentes. ➤ Fracciones en la recta numérica y orden. ➤ Adición y sustracción de fracciones homogéneas.	➤ Representación de números fraccionarios. ➤ Clase de fracciones. ➤ Números mixtos. ➤ Conversión de fracciones. ➤ Representación de fraccionarios en la recta numérica. ➤ Fracciones equivalentes. ➤ Orden en las fracciones. ➤ Adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones.

Tabla 5: Contextualización de los números fraccionarios en los textos escolares analizados.

En la tabla anterior se muestra cómo se introduce el concepto de número racional positivo en ambos textos escolares y la estructura de cómo se presentan los temas, al introducir el concepto se presenta algunos de elementos que justifican el desarrollo del concepto.

En el siguiente mapa conceptual se presenta la organización de cómo se introduce el concepto de número fraccionario, basado en los textos escolares según los temas planteados.

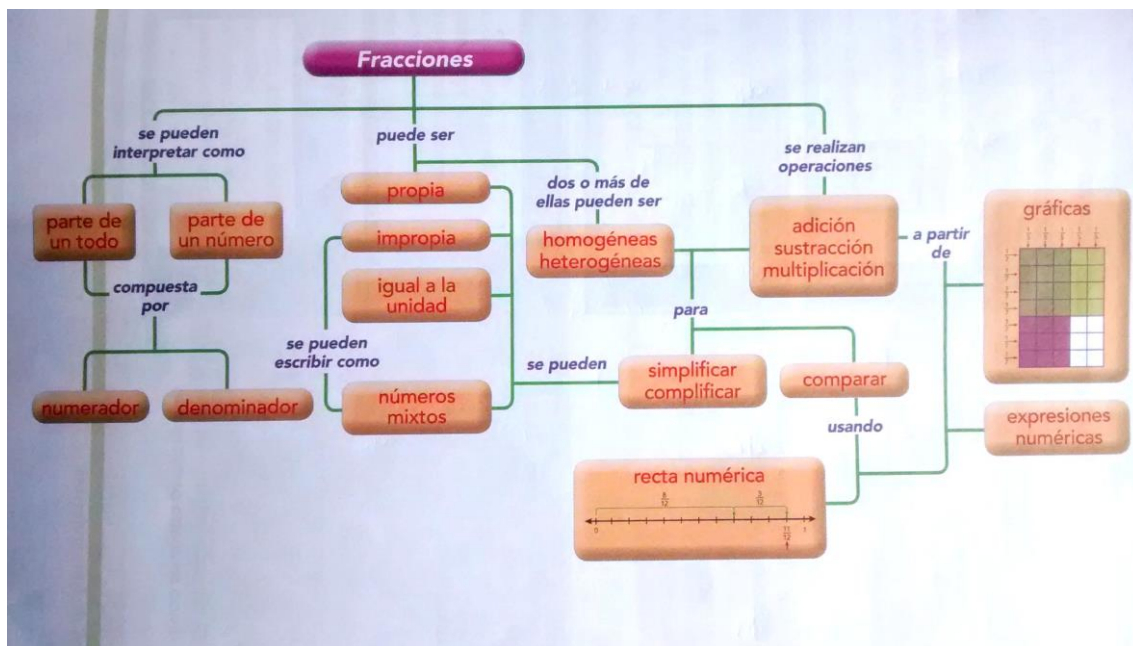


Figura 6. Mapa conceptual de la síntesis de los conceptos desarrollados en la unidad 4 del texto escolar Zona Activa 4.

En el anterior mapa conceptual se define las fracciones (rationales positivos) desde un marco general, se la interpreta como la parte de un todo o la parte de un número, donde la representación puede ser una fracción propia, impropia, igual a la unidad o un número mixto, además se expresa que dos o más fracciones pueden ser homogéneas o heterogéneas con las cuales se pueden realizar operaciones como la adición, la sustracción y la multiplicación. Dichos números pueden compararse utilizando la recta numérica.

Desde esta información se puede decir que la conceptualización que se le da a los racionales está más encaminado a una estructura aritmética pues no se da indicios de una interpretación que involucre un tratamiento algebraico.

No hay una distinción clara entre si el trabajo con magnitudes continuas y discretas. De esta manera se trata de la misma manera tareas en donde hay que hallar por ejemplo la parte de un todo continuo, ya sea en una gráfica o en una situación descrita mediante un problema verbal, y se le aplica el mismo tratamiento a tareas en donde hay que hallar la parte de un número discreto, bien sea mediante otra fracción o en su expresión equivalente en porcentajes.

Esta observación deja ver que es muy difícil explicitar si el modelo epistemológico de referencia para el tratamiento de los racionales positivos, puede llegar a trascender hacia

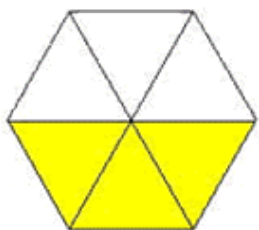
una estructura algebraica, puesto que en el mismo modelo aritmético que sustenta no tiene las características claras para operar con toda lógica dentro del mismo sistema.

Muestras de tareas

A continuación se presentan 8 tareas propuestas por los libros de textos escolares, a los cuales se les dará una posible solución, las tareas no son especificadas a que libro perteneces, pues se pretende analizarlas con base al siglo escolar 4^o y 5^o por lo cual no se hace necesario realizar una distinción.

Escribo la fracción que representa la parte coloreada en cada figura.

a)



b)



c)



2. Represento gráficamente cada una de las siguientes fracciones.

a. $\frac{3}{4}$

b. $\frac{5}{5}$

c. $\frac{6}{8}$

3. Hallo la fracción de tiempo en minuto o en hora, según corresponda.

a. $\frac{5}{6}$ de hora, es decir, $\frac{5}{6}$ de 60 minutos equivalen a ___ minutos.

b. $\frac{5}{6}$ de día, es decir, $\frac{5}{6}$ de 24 horas equivalen a ___ horas.

4. Calculo $\frac{2}{10}$ de 30 y $\frac{1}{5}$ de 30, luego analizo por qué $\frac{2}{10}$ de 30 $\frac{1}{5}$ de 30 representan la misma cantidad _____

5. Escribo las siguientes fracciones impropias como número mixto

a. $\frac{45}{7} =$

b. $\frac{62}{4} =$

c. $\frac{75}{16} =$

6. Escribo la fracción que representan cada situación.

a. 3 de cada 5 adultos no tolera la lactosa.

- b. De los 8 estudiantes, 3 son niñas.
- c. La selección juvenil ganó 6 de los 8 partidos jugados.

7. representa cada fracción en una recta numérica.

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{3}{4}$

c. $\frac{2}{5}$

8. compara cada par de fracciones, luego escribe $<$ ó $>$ según corresponda.

a. $\frac{2}{7}$ — $\frac{5}{9}$

b. $\frac{12}{5}$ — $\frac{9}{5}$

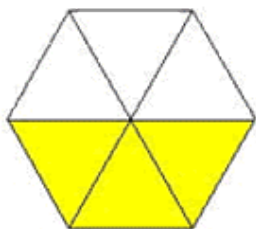
c. $\frac{3}{2}$ — $\frac{4}{2}$

4.2.2. Análisis de las obras matemáticas

Los textos escolares Zona Activa 4 e interactivo 5, introducen de manera contextualizada los números fraccionarios, de esta forma permiten reconocer la necesidad intrínseca de estudiarlos de esta manera, dado que hacen parte de la vida cotidiana. A continuación se hace un desarrollo de algunas formas de hacer y aplicar la técnica para la solución de las tareas propuestas por el texto escolar.

T₁. Escribo la fracción que representa la parte coloreada en cada figura.

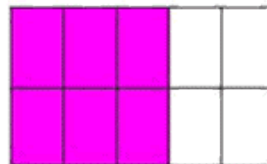
a)



b)



c)



Solución: para resolver esta cuestión hay que tener claro cuál es el numerador y el denominador y qué significado tiene, cuando tomamos una figura y la dividimos en partes

iguales, el denominador (número de abajo) indica en cuantas partes se debe dividir todo (la figura) y el numerador (número de arriba) indica cuantas partes esta coloreada.

a) $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{6}{10}$

T₂. Represento gráficamente cada una de las siguientes fracciones.

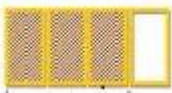
a. $\frac{3}{4}$

b. $\frac{5}{5}$

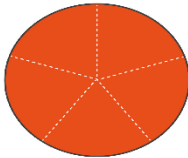
c. $\frac{6}{8}$

Solución: Para dar solución a esta situación es necesario tener en cuenta que el denominador indica en cuantas partes se divide el todo y el numerador cuantas partes se colorea o escoge.

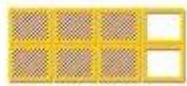
a. $\frac{3}{4}$



b. $\frac{5}{5}$



c. $\frac{6}{8}$



T₃. Hallo la fracción de tiempo en minuto o en hora, según corresponda.

a. $\frac{5}{6}$ de hora, es decir, $\frac{5}{6}$ de 60 minutos equivalen a __ minutos.

b. $\frac{5}{6}$ de día, es decir, $\frac{5}{6}$ de 24 horas equivalen a __ horas.

Solución: Para dar solución a esta cuestión hay realizar una división.

a. como la fracción es $\frac{5}{6}$ de 60 minutos hay que dividir 60 entre 6 y se obtiene una respuesta de 10 minutos, esos 10 minutos se multiplican por 5 y se obtiene 50 minutos, que es la respuesta final.

b. $\frac{5}{6}$ de 24 horas, hay que dividir 24 entre 6 y se obtiene una respuesta de 4 horas, estas 4 horas se multiplican por 5 y se obtiene 20 horas, que es la respuesta final.

T₄. Calculo $\frac{2}{10}$ de 30 y $\frac{1}{5}$ de 30, luego analizo por qué $\frac{2}{10}$ de 30 $\frac{1}{5}$ de 30 representan la misma cantidad _____

Solución: Dividimos 30 en 10 partes iguales y se obtiene 3. Tomamos 2 de esas partes y lo multiplicamos por 3, entonces $\frac{2}{10}$ de 30 son 6.

Dividimos 30 entre 5 que es igual a 6, luego multiplicamos 1 por 6, luego $\frac{1}{5}$ de 30 es 6.

Por fracciones equivalentes, $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ pues de una fracción llego a la otra, si simplifico $\frac{2}{10}$ entre dos, se obtiene $\frac{1}{5}$.

T₅. . Escribo las siguientes fracciones impropias como número mixto

a. $\frac{45}{7} =$

b. $\frac{62}{4} =$

c. $\frac{75}{16} =$

Solución: para resolver este enunciado hay que tener presente, cuando una fracción es impropia, pues cuando el numerador es mayor que el denominador y estas se pueden expresar como un número mixto.

a. $\frac{45}{7} = 6 \frac{3}{7}$

b. $\frac{62}{4} = 15 \frac{2}{4}$

c. $\frac{75}{16} = 4 \frac{11}{16}$

T₆. Escribo la fracción que representa cada situación.

- a. 3 de cada 5 adultos no tolera la lactosa.
- b. De los 8 estudiantes, 3 son niñas.
- c. La selección juvenil ganó 6 de los 8 partidos jugados.

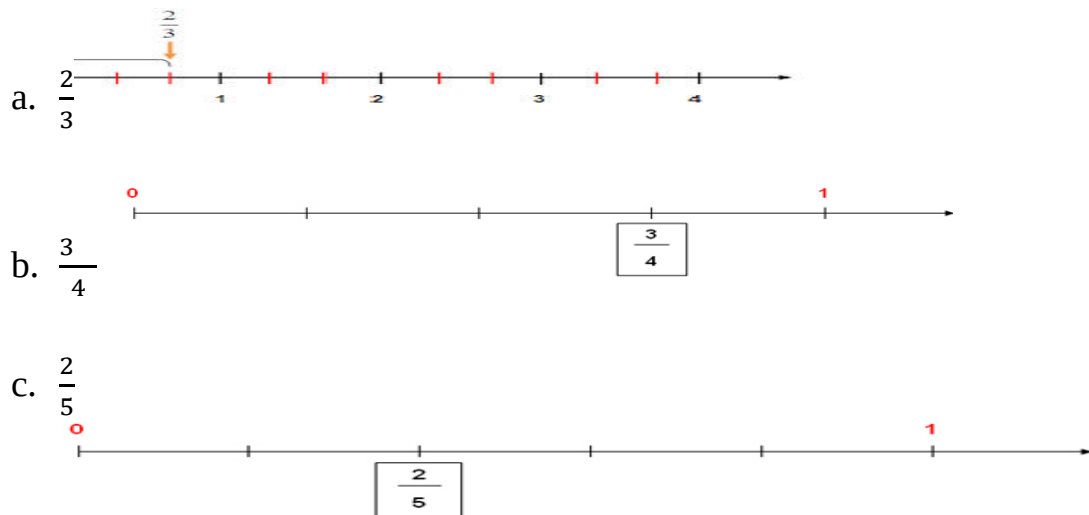
Solución: para dar respuesta a esta cuestión hay que tener presente la definición de parte todo.

$$a. \frac{3}{5} \qquad b. \frac{3}{8} \qquad c. \frac{6}{8}$$

T₇. . Representa cada fracción en una recta numérica.

- a. $\frac{2}{3}$
- b. $\frac{3}{4}$
- c. $\frac{2}{5}$

Solución: Para representar los números mencionados es necesario conocer la recta numérica y tener claro que la unidad se divide en partes iguales según de denominador.



T₈. Compara cada par de fracciones, luego escribe < ó > según corresponda.

a. $\frac{2}{7}$ — $\frac{9}{7}$

b. $\frac{12}{5}$ — $\frac{9}{5}$

c. $\frac{3}{2}$ — $\frac{4}{2}$

Solución: para dar respuesta a esta cuestión es necesario conocer algunas reglas de orden sobre los fraccionarios, como por ejemplo si se tiene dos fracciones con igual denominador, es menor la fracción que tiene el numerador menor, si se presenta el caso en que dos fracciones tengan denominadores diferentes, por ejemplo $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{3}$, entonces se puede amplificar la $\frac{1}{3}$ multiplicándolo por $\frac{4}{4}$ y se obtiene $\frac{4}{12}$ por lo cual se puede comparar $\frac{5}{12}$ con $\frac{4}{12}$ y se retoma a comparar dos números con igual denominador.

a. $\frac{2}{7} < \frac{9}{7}$

b. $\frac{12}{5} > \frac{9}{5}$

c. $\frac{3}{2} < \frac{4}{2}$

Elementos tecnológico-teóricos

Ahora se mencionan las características de las técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que se encuentran inmersos en la conceptualización de número fraccionario que plantea el texto escolar.

A continuación se una dará una descripción concreta de los conceptos, definiciones y características claves que están en los textos escolares (Zona Activa 4 e interactivo 5) y que permiten el uso de determinada técnica al momento de solucionar un problema matemático relacionado con los números fraccionarios.

Enunciados matemáticos (Em) propuestos por los textos escolares propuestos por los textos escolares sobre número fraccionario.

Em1: una fracción es un número que representa parte de un conjunto o de una unidad.

Em2: en la fracción $\frac{4}{9}$, al 4 se le llama numerador y al 9 denominador. El denominador indica el número de partes en que está dividida la unidad o conjunto, y el numerador muestra el número de partes que se están tomando de esa unidad o conjunto.

Em3: para que una fracción exista su denominador debe ser diferente de cero.

Em4: las fracciones se utilizan para representar parte de una unidad. La fracción $\frac{7}{10}$ indica que de diez partes de la unidad, se están considerando siete.

Em5: una fracción impropia es la que tiene el numerador mayor que su denominador, por tanto, es mayor que la unidad.

Em6: una fracción propia tiene el numerador menor que su denominador, por consiguiente, es menor que la unidad.

Em7: una fracción igual a la unidad es aquella en la que su denominador y su numerador son iguales.

Em8: las fracciones que representan la misma parte de una unidad o conjunto reciben el nombre de fracciones equivalentes.

Em9: una fracción irreducible es aquella en la que el múltiplo común divisor entre su numerador y denominador es uno.

Em10: complicar una fracción es multiplicar el denominador y el numerador de la fracción por un mismo número para obtener un número equivalente al dado.

Em11: simplificar una fracción es dividir el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número.

Em12: una recta numérica nos ayuda a ubicar fracciones y a compararlas.

Realizando una comparación entre los enunciados matemáticos (Em) y la obra matemática propuesta se hace evidente una falta de conexión entre los enunciados y la obra matemática pues no existe una justificación sobre las técnicas utilizadas para las tareas, no hay elementos teóricos que sustenta la realización de una actividad matemática.

Los textos analizados están desarrollados desde un enfoque numérico dejando de lado el sistema algebraico que puede dar un abarque más amplio al concepto de racional, pues las tareas que se proponen son ejemplos de situaciones guiadas para ser desarrolladas por un medio aritmético.

Por otro lado si las tareas iniciales 1 y 2 se comparan con las 3 y 4 no solo se está asumiendo un punto de vista numérico en el tratamiento de los racionales sino que deja en evidencia que se le da el mismo estatus a la fracción vista como partes de un todo continuo, y la fracción como partes de un todo discreto que según el trabajo de Obando (2003) suele ser más complejo, análisis ya puesto en evidencia líneas atrás. Es decir, que en este sentido hay una especie de obra matemática puntual que aísla las implicaciones didácticas de asumir indistintamente lo continuo y lo discreto.

Si se analiza la tarea 1, en esta se obliga al estudiante a pensar que para representar un racional se debe dividir en figuras iguales y omite la idea de áreas iguales donde no necesariamente las figuras tienen que ser iguales para representar la misma área, y es aquí donde está inmerso el pensamiento métrico se ve limitado mediante representaciones.

Las tareas 7 y 8 son referentes de la relación de orden en los racionales pero hacen falta logos que justifiquen las técnicas a utilizar en el desarrollo de dichas tareas. Aunque las tareas estén orientadas hacia la conceptualización de los racionales se hace evidente una desarticulación en las técnicas a utilizar y la actividad de enseñanza se deduce a cuestiones o tareas, por lo cual se puede decir que la obra matemática que propone los textos es la unión de obras puntuales que dan un indicio de una obra local.

4.3. CONTRASTE ENTRE EL ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA Y LOS TEXTOS ESCOLARES.

En esta parte del trabajo se pretende realizar un contraste entre lo que plantea los textos escolares según lo analizado en el trabajo y el plan de área de matemática del colegio Juan Pablo II, y de igual manera poder observar de forma más clara como se plasma en esta obra matemática la coherencia vertical y la coherencia horizontal en cuanto al tema del sistema numérico analizado.

Para ello se inicia comparando los contenidos del plan de área matemática y los textos escolares mediante las siguientes tablas se harán por grados.

TEMAS DEL PLAN DE ÁREA DE MATEMÁTICA	CONTENIDO DEL TEXTO ESCOLAR ZONA ACTIVA 4.
• Sistema de números decimales • Estructuras aditivas • Estructuras multiplicativas de proporcionalidad. • Teoría de números.	• Fracción como parte de un todo • Fracción como parte de un número • Fracciones equivalentes • Simplificación y complicación de fracciones • Fracciones en la recta numérica y orden • Adición y sustracción de fracciones homogéneas y heterogéneas.

Tabla 6. Contraste entre los contenidos propuestos en el plan de área de 4° y el texto escolar "Zona Activa 4".

Al realizar el análisis se hace evidente la poca conexión que hay entre las temáticas planteadas entre el plan de área de matemática de 4 y el texto escolar de 4, aun así el plan de área carece de argumentos que justifiquen la enseñanza de los contenidos mencionados y por otro el lado el texto escolar propone sus actividades bajo operaciones mecánicas y de tipo numérico.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) proponen los niveles de codeterminación mencionados en el capítulo 2, al realizar el análisis se puede ver que tanto en la obra propuesta por el plan de área y los textos escolares las actividades propuestas obedecen a unas condiciones de restricción dadas por un currículo y por la escuela, que de alguna forma posibilitan o limitan el proceso de enseñanza y aprendizaje, de esta forma ya existe una ruptura de esos niveles de codeterminación lo que implica que la obra matemática propuesta difícilmente está organizada para llegar a ser una praxeología matemática global. Como la propuesta que se desarrolla en el plan de área y los textos escolares analizados obedece a temas matemáticos del currículo podría decirse que la obra matemática hace referencia a una praxeología puntual que podría llegar a convertirse en una obra matemática local si desde los planteamientos iniciales esbozados en los planes de área se pudiesen explicitar las articulaciones conceptuales y problemáticas a las que la OM responde.

TEMAS DEL PLAN DE ÁREA DE MATEMÁTICA	CONTENIDO DEL TEXTO ESCOLAR INTERACTIVO 5.
• Relación parte – todo. • Fracciones propias • Fracciones impropias • Relaciones de Orden • Relaciones de equivalencia • Operaciones multiplicativas por la unidad • Operaciones aditivas homogéneas • Operaciones aditivas heterogéneas • Construcción de las notaciones decimales • Composición y descomposición de fracciones decimales	• Representación de fracción • Clase de fracciones • Números mixtos • Conversión de fracciones impropias a números mixtos • Fracciones equivalentes • Complicación y simplificación de fracciones • Adición y sustracción de fracción • Multiplicación de fracciones • División de fracciones

Tabla 7: Contraste entre los contenidos propuestos en el plan de área de 5º y el texto escolar "Interactivo 5".

Realizando una comparación paralela se puede evidenciar una relación entre los contenidos propuestos por el plan de área de matemática de 5 y el texto escolar de 5 existe una relación entre los contenidos propuestos por el plan de área y la OM del texto escolar, pues son temas puntuales que dan una idea general del concepto de los números racionales positivo, aunque el plan de área propone una relación de orden que según el contenido el textos escolar de 5 no está consolidado en el contenido.

Relacionando el plan de área con los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006) en cuanto a los contenidos propuestos con el concepto de número fraccionario se hace evidente una secuencialidad en las propuestas para alcanzar el dominio de la temática.

Sin embargo se ven presentes el fenómeno de enseñanza llamado “atomización de la enseñanza” dado que no se ve de manera clara la conexión que se hace entre los contenidos de un nivel a otro. La ausencia de preguntas problematizadoras o de una articulación clara entre los niveles de codeterminación que aparezca como un relato sistemático y coherente, no deja otra opción que intentar continuar el trabajo con los racionales positivos desde un modelo puramente numérico. Aún así, faltaría una investigación sostenida en el tiempo que llegue a dilucidar si ese modelo permitiría superar las actuales dificultades que afrontan los estudiantes cuando se enfrentan al trabajo con los racionales positivos.

Observando la estructura de los textos escolares se resalta la falta de justificación de las tareas propuestas para que se haga evidente una enseñanza, además las tareas propuestas tratan cuestiones aisladas y bajo contextos limitados pues no le brinda al estudiante la posibilidad de manejar la temática en contextos amplios, decir la gran parte de las

actividades propuestas en los textos no conducen al estudiante a explorar otros ambientes, ejemplo de ello las tareas seleccionadas en el análisis de los textos escolares.

Haciendo una comparación entre los enunciados matemáticos (Em), planteados por los textos escolares y relacionándolos con la obra matemática de referencia, los textos escolares están faltos en su mayoría de contenidos que permitan que el estudiante desarrolle una estructura algebraica pues se presenta los contenidos en los textos escolares para trabajar una estructura numérica, cabe resaltar que una buena propuesta académica sería la articulación de estructuras algebraicas y numérica que permita un desarrollo más pertinente para la conceptualización de número racional, ya que las estructuras numéricas no explican de manera convincente ciertas operaciones, por ejemplo al realizar suma de racionales cuando son heterógeneos es más convincente utilizar un tratamiento desde las estructuras algebraicas que lo sustentan, en este caso, basadas en la estructura algebraica de los números Reales, pero si se utiliza una estructura numérica habría que recurrir que recurrir a artilugios a veces demasiados largos, a veces demasiado artificiales para poder justificar las técnicas de operatividad.

Finalmente, sería bueno que se presentara una propuesta didáctica que permita navegar todos los conceptos de número racional partiendo de la definición parte todo y además que brinde la posibilidad de desarrollar una estructura algebraica para dar una definición de número racional de una forma amplia y general.

CAPÍTULO 5

- CONCLUSIONES
- BIBLIOGRAFÍA

5.1 CONCLUSIONES

A través del desarrollo de este trabajo y con relación al plan de área de la institución, es necesario que las instituciones escolares, vean el plan de área como una herramienta para llevar a cabo la obra matemática propuesta por la institución además se hace necesario hacer explícito las razones de ser de lo que se propone para ser enseñado.

Los textos escolares son herramientas utilizadas por el docente como guía para los procesos de enseñanza lo cual implica que se debe utilizar un criterio crítico para saber cómo utilizar esta herramienta, considerando los textos Zona Activa 4 e interactivo 5 se hace evidente una atomización en la conceptualización de los números racionales positivos además de que la mayoría de tareas se enmarcan en un dominio puramente numérico, lo cual no permite que el estudiante explore otras estructuras matemáticas, y que impide de alguna manera la emergencia completa del concepto.

Los textos escolares y el plan de área deben proponer procesos educativos que permitan al estudiante cuestionarse el por qué y para qué de los procesos que se están dando, para de alguna forma determinar las limitaciones o potencialidades en la construcción del conocimiento en cuestión.

Por otro lado, por la falta de trabajos sobre la conceptualización de los números racionales positivos desde una estructura algebraica, deja ver que es necesario muchos más trabajos de orden empírico no sólo donde se desarrollen los fenómenos aquí estudiados, sino donde se proponga un posible tratamiento de los Racionales Positivos desde una estructura algebraica.

Aunque los planteamientos en los Lineamientos Curriculares de 1998 proponen un trabajo integrado con los sistemas numéricos y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) intentan exponer unas metas claras de calidad para el currículo en matemáticas en Colombia, pensamos que hacen reflexiones más precisas sobre cómo hacer posible ese trabajo en el aula. Es decir, el esbozar un estándar no implica que se entienda cuál es la orientación que se le debe dar por ejemplo al trabajo con los Racionales, cuáles son las limitaciones que implica uno u otro acercamiento, y desde el punto de vista si se desea viajar hacia metas claras de calidad no deben dejarse dichas cuestiones para que sean zanjadas por el docente sin una discusión seria de cómo debería hacerse ese tratamiento. Una sugerencia al respecto es fortalecer los planes de área a

través de las reuniones de los profesores que debería utilizarse para discutir cuestiones matemáticas y didácticas sobre la enseñanza de los conceptos y procesos en los distintos niveles. Pero la organización matemática estudiada en la institución escolar presenta fuertes restricciones ecológicas que chocan de frente con tal pretensión.

Partiendo entonces de la pregunta de este trabajo cabe decir que la ecología que circula en la obra matemática propuesta en la institución educativa es de tipo puntual pues las actividades son desarrolladas a partir de temas y no de preguntas problematizadoras o cuestiones lo que genera limitaciones para un pleno desarrollo académico.

Por otro lado pensamos que el docente debe estar en la capacidad de discernir y estructural adecuadamente las temáticas propuestas en el currículo, dado que las propuestas en los textos escolares y planes de área, suelen tener ausencias de elementos que profundizan las limitaciones al considerar aisladamente los distintos niveles de codeterminación, por lo cual se debe reformular la OM. Dicho trabajo comportaría que ideas como las de comunidades de práctica, donde es importante estudiar los problemas relativos hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se haga de una manera conjunta entre sus diferentes integrantes y no pensadas aisladamente desde cada punto de vista individual. En este sentido, un aporte de este trabajo es poder dilucidar la necesidad de que el estudio de las matemáticas debe partir del cuestionamiento de las OM que actualmente circulan en las instituciones escolares y de la explicitación de los posibles modelos que permiten estudiar dicha OM.

Finalmente este trabajo me brinda herramientas que me ayudan en mi proceso de formación docente, pues me permitió navegar sobre una teoría desconocida a modo personal, que brinda pautas para identificar cuáles son las acciones que favorecen o debilitan un proceso educativo, y saber que las obras matemáticas propuestas por las instituciones tienen algunas falencias que le permite al docente tomar decisión sobre una posible obra matemática a realizar.

5.2. BIBLIOGRAFÍA

- BARQUERO, BERTA(2009).** Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. Tesis doctoral. Bellaterra, España.
- BEHR, M.L., WACHSMUTH, I. & POST, T.R. (1985).** Construir una suma: una medida de la comprensión de los niños del tamaño de la fracción. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, 16, 120-131.
- BOLEA, P.(2002).**El proceso de algebrización de las matemáticas escolares. Tesis doctoral. España.
- BROUSSEAU, G. (1985).** Theory of Didactical Situations in Mathematics. KluwerAcademicPublishers.
- CHEVALLARD, Y. (1991).** La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. AIQUE, Argentina.
- CHEVALLARD, Y. (1992).** Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approcheanthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*,
- CHEVALLARD Y. (1996).** La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique, en R. Noirfalise et M-J. Perrin-Glorian (coord.), *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995)*, 83-122
- CHEVALLARD, Y. (1999).** El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, nº 2, pp. 221-266.
- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997):** Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, ICE/Horsori: Barcelona.

- GASCÓN, J. (1998).** Evolución de la Didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 18, nº 52, pp. 7-34.
- GASCÓN, J. (1999).** Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129-150.
- GASCÓN, J. (2003).** Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Universidad de Zaragoza. España.
- GASCÓN, J. & BOSCH, M. (2009).** Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.
- LLINARES, S. & SÁNCHEZ, M.V. (1998).** Fracciones. La relación parte todo. Madrid: Editorial Síntesis.
- MEJÍA, C. (2011).** Zona Activa 4. Texto escolar. Bogotá: Editorial Voluntad.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998).** Lineamientos curriculares de Matemáticas .MEN. Bogotá.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006).** Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Bogotá.
- OBANDO, G. (2003).** La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*. Vol 8, N^o 2, 157-182.
- OBANDO, G. (2006).** La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Tesis de Maestría. Universidad del Valle – Instituto de Educación y pedagogía.
- ORDOÑEZ, L. & CHAVARRO, M. (2012).** Un análisis de las obras matemáticas propuestas en la enseñanza de los números enteros desde la perspectiva de la

teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Tesis de pregrado. Universidad del Valle – Instituto de Educación y pedagogía

RAMÍREZ, M. (2011). Interactivo 5. Texto escolar. Bogotá: Editorial Santillana.

SIERRA, T. (2006). Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: Los sistemas de numeración y medida de magnitudes. Universidad Complutense de Madrid – Facultad de Educación.

VASCO, E. (1994). Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Serie Pedagogía y Currículo 2. Santafé de Bogotá. Volumen II