Vol. XVII, Nº 1, Junio (2009)
Matemáticas: 13–21

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Una transformada finita de Hankel generalizada

Jaime Castillo Pérez
Universidad de la Guajira

Carlos Jiménez Ruíz
Universidad de la Guajira

Rafael Meléndez Surmay
Universidad de la Guajira

Recibido May. 13, 2008 Aceptado Mar. 6, 2009

Abstract

This paper deals with a new integral transform, involving Bessel functions of the first kind. The inversion formula is established and some properties are given. This transform can be used to solve some mixed boundary value problems. We consider a vibrational problem were we compute the transverse displacement of a large membrane which is deformed symmetrically. The transverse displacement of the membrane is governed by the nonhomogeneous generalized wave equation. The transform we found is more appropriate in solving differential equations with boundary conditions characterized by axial symmetry.

Keywords: Integral transform, transverse displacement of a membrane, Bessel functions.

MSC(2000): Primary: 44A05, Secondary: 44A20, 35D05.

Resumen

Este artículo contiene una nueva transformada integral que involucra funciones de Bessel de primera especie. Se establece la formula de inversión y se presentan algunas propiedades. Esta tranformada puede ser usada para resolver algunos problemas con condiciones de borde. Aquí se considera un problema de vibración, se trata del cálculo del desplazamiento transversal de una grande membrana que se deforma simétricamente. El desplazamiento transversal de la membrana está modelado por la ecuación de onda generalizada no homogénea Esta transformada es mas adecuada para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera con simetría axial.

Palabras y frases claves: Transformada integral, desplazamiento transversal de una membrana, funciones de Bessel.

1 Introducción

La transformada de Hankel aparece naturalmente en problemas con coordenadas cilíndricas que, cuando son resueltos usando la técnica de separación de variables, involucran funciones de Bessel. Estas transfomadas son más apropiadas en la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera en las que hay simetría axial.

La transformada finita de Hankel fué introducida inicialmente por (Sneddon, 1946), quien la presentó en la siguiente forma

$$H_\nu[f(t);\lambda] = \int_a^b tf(t)J_\nu(t\lambda)dt \tag{1}$$

donde $f(t)$ es una función definida sobre un intervalo finito $[a,b]$, satisface las condiciones de Dirichlet y J_ν es la función de Bessel de primer orden y de orden ν.

Posteriormente (Khajah, 2003) estudió una forma modificada de la transformada de Hankel bajo dos supuestos sobre los parámetros. En cada caso se han obtenido la formula de inversión, identidad tipo parseval, transformada de derivadas y transformadas de productos de el orden $t^{\lambda} f(t)$.

Usando la teoría de Sturm-Liouville (Al-Hajri y Kalla, 2004; Kalla y Villalobos, 1980; Ali y Kalla, 1999), han definido y estudiado otras formas de transformadas finitas de Hankel y las han aplicado para resolver problemas de conducción del calor en cilíndros circulares infinitos y semi-infinitos con diferentes tipos de condiciones de frontera.

Recientemente (Garg et al., 2007) presentaron una nueva generalización de la transformada finita de Hankel. Ésta involucra funciones de Bessel de primera y segunda especie y la usaron para resolver una forma generalizada de la ecuación de conducción del calor en cilindros circulares infinito y semi-infinito.

En el presente artículo se define una nueva transformada finita de Hankel que involucra funciones de Bessel de primera especie y se usará para resolver una forma generalizada de la ecuación de onda.

2 La transformada finita de Hankel generalizada

Muchas ecuaciones diferenciales que modelan problemas de física e ingeniería son formas especiales de la ecuación de Bessel generalizada (Andrews et. al., 1999)

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + (1-2l)x\frac{du}{dx} + [\lambda^2c^2x^{2c} + (l^2 - c^2\nu^2)]u = 0 \tag{2}$$

$$\nu \geq 0, l, c,\ \lambda > 0,\ x \in [0, a].$$

Una solución de (2) está expresada en términos de la función de Bessel de primera especie dada por

$$u(x) = x^l J_\nu(\lambda x^c).$$

En éste trabajo se considera la ecuación (2) junto con la siguiente condición de frontera para introducir una generalización de la transformada finita de Hankel:

$$hu(a) + u'(a) = 0 \tag{3}$$

la ecuación (2) junto con la condición (3) forman un problema de valor en la frontera de Sturm - Liouville.

Definición 2.1. *Si u(x) y su primera derivada son seccionalmente continuas en el intervalo [0,a], entonces la transformada integral de u(x) está definida por*

$$T[u(x); \nu, a; \lambda_i, l, c] = \overline{u}_\nu(\lambda_i, l, c) = \int_0^a x^{2c-l-1}u(x)J_\nu(\lambda_i x^c)dx, \tag{4}$$

donde las $J_\nu(\lambda_i x^c)$ son funciones de Bessel de primera especie, que constituye un sistema ortogonal de funciones, con función de peso x^{2c-l-1} sobre el intervalo $[0,a]$, y $\lambda_i (i=1,2,...)$ son raíces positivas de la ecuación

$$(h+\frac{l-c\nu}{a})J_\nu(\lambda a^c)+\lambda c a^{c-1}J_{\nu-1}(\lambda a^c)=0. \tag{5}$$

La transformada inversa está dada por

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\overline{u}_\nu(\lambda_i,l,c)}{(\|J_\nu(\lambda_i)\|}x^l J_\nu(\lambda_i x^c) \tag{6}$$

donde $\quad \|J_\nu(\lambda_i)\|=\dfrac{a^{2c}}{2c}[(h+\dfrac{l}{a})^2+(1-\dfrac{\nu^2}{\lambda_i^2 a^{2c}})]J_\nu^2(\lambda_i a^c)$

2.2 Algunas propiedades

1. $T[\alpha f(x)+\beta g(x);\nu,a;\lambda_i,l,c]=\alpha\overline{f}_\nu(\lambda_i,l,c)+\beta\overline{g}_\nu(\lambda_i,l,c)$
2. $T[x^{c\nu+l};\nu,a;\lambda_i,l,c]=\frac{a^{c\nu}}{c^2\lambda_i^2}(c\nu+ha+l)J_\nu(\lambda_i a^c)$
3. $T[f(px);\nu,a;\lambda_i,l,c]=\frac{1}{p^{2c-2l}}T[f(x);\nu,pa;\frac{\lambda_i}{p^c},l,c]$
4. $T[Du(x);\nu,a;\lambda_i,l,c]=a^{1-l}J_\nu(\lambda_i a^c)[hu(a)+u'(a)]-\lambda_i\frac{1}{2}c\frac{1}{2}\overline{u}_\nu(\lambda_i,l,c)$

donde Du es el operador

$$D(u)=x^{2-2c}\frac{d^2u}{dx^2}+(1-2l)x^{1-2c}\frac{du}{dx}+[(l^2-c^2\nu^2)]x^{-2c}u \tag{7}$$

(1),(2),(3) se deducen facilmente usando (4) y aplicando adecuadamente algunas relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel.

Prueba de 4:

Consideremos los dos primeros términos diferenciales de (7)

$$T[x^{2-2c}\frac{d^2u}{dx^2}+(1-2l)x^{1-2c}\frac{du}{dx};\nu,a;\lambda_i,l,c]=$$
$$\int_0^a x^{2c-l-1}[x^{2-2c}\frac{d^2u}{dx^2}+(1-2l)x^{1-2c}\frac{du}{dx}]J_\nu(\lambda_i x^c)dx.$$

Separando integrales se tiene

$$I=\int_0^a x^{1-2l}\frac{d^2u}{dx^2}(x^l J_\nu(\lambda_i x^c))dx+(1-2l)\int_0^a x^{-2l}\frac{du}{dx}(x^l J_\nu(\lambda_i x^c))dx.$$

Al integrar por partes en el primer término de I, se elimina el segundo y se tiene

$$I = x^{1-l}J_\nu(\lambda_i x^c)u'(x) - \int_0^a u'(x)x^{1-2l}\frac{d}{dx}(x^l J_\nu(\lambda_i x^c))dx.$$

Nuevamente integrando por partes se deriva la siguiente expresión

$$I = [x^{1-l}J_\nu(\lambda_i x^c)u'(x) - x^{1-2l}u(x)\frac{d}{dx}(x^l J_\nu(\lambda_i x^c))]_0^a +$$
$$\int_0^a u(x)x^{-1-2l}[x^2\frac{d^2u}{dx^2}(x^l J_\nu(\lambda_i x^c)) + (1-2l)x\frac{d}{dx}(x^l J_\nu(\lambda_i x^c))]dx.$$

Como $x^l J_\nu(\lambda_i x^c)$ es solución de (2) con la condición (3) se obtiene

$$I = M - \int_0^a x^{2c-l-1}u(x)[\lambda^2 c^2 + \frac{l^2 - c^2\nu^2}{x^{2c}}]J_\nu(\lambda_i x^c)dx,$$

de donde $\quad I = M - \lambda^2 c^2 \overline{u} - T[\frac{(l^2 - c^2\nu^2)}{x^{2c}}u(x)],\quad$ y finalmente

$$T[x^{2-2c}\frac{d^2u}{dx^2} + (1-2l)x^{1-2c}\frac{du}{dx} + (l^2 - c^2\nu^2)x^{-2c}u(x);\nu,a;\lambda_i,l,c] = M - \lambda^2 c^2 \overline{u}$$

donde $\quad M = a^{1-l}J_\nu(\lambda_i a^c)[hu(a) + u'(a)].$

2.3 Aplicaciones

A continuación se presentan algunas aplicaciones relativas a la generalización de la ecuación de onda, las cuales están asociadas a las vibraciones transversales de una membrana. Cada solución aquí presentada depende de un tipo específico de condición en la frontera; en ambos casos se da solución a la ecuación diferencial haciendo uso de la transformada integral presentada en este trabajo.

El problema se plantea de la siguiente forma:

Vibraciones transversales de una membrana

La primera ilustración del uso de la transformada de Hankel generalizada en la solución de problemas de vibración proviene del cálculo del desplazamiento transversal $u(r,t)$ de una membrana que es deformada simétricamente. El desplazamiento $u(r,t)$ está modelado por la ecuación de onda no homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(1-2l)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{r^{2c-2}}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - [\frac{(l^2 - c^2\nu^2)}{r^2}]u, \quad \nu \geq 0, l, c > 0. \quad (8)$$

Supongamos que la membrana tiene radio a, está rígidamente fija alrededor de su circunferencia y que inicialmente ocupa una posición desplazada independiente de la variable angular θ, a partir de la cual se le imprime una velocidad inicial en t=0.

Teniendo en cuenta la simetría circular de las condiciones iniciales y de frontera, se deduce que u es independiente de θ. En este caso la ecuación diferencial (8) se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{(1-2l)}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{r^{2c-2}}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-[\frac{(l^2-c^2\nu^2)}{r^2}]u \tag{9}$$

$$\alpha^2=\frac{T}{D}$$

donde T es la tensión de la membrana y D es la masa por unidad de área de la membrana.

Para tener una solución más general del problema consideremos las siguientes condiciones de frontera e iniciales:

$$u(a,t)=h(t),\ t\geq 0 \qquad u(r,0)=f(r), \qquad u_t(r,0)=g(r),\ 0\leq r\leq a.$$

Reorganizando (9) se tiene

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=r^{2-2c}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+(1-2l)r^{1-2c}\frac{\partial u}{\partial r}+(l^2-c^2\nu^2)r^{-2c}u. \tag{10}$$

Aplicando el operador transformada finita de Hankel generalizada en (10) se obtiene

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}=\alpha^2 a^{1-l}J_\nu(\lambda_i a^c)u(a,t)-a^2\lambda_i^2c^2\overline{u}(\lambda_i,t).$$

Usando la condición de frontera, se deduce la siguiente ecuación diferencial ordinaria no homogenea

$$\frac{d^2\overline{u}}{dt^2}+a^2\lambda_i^2c^2u=a^2a^{1-l}J_\nu(\lambda_i a^c)h(t) \tag{11}$$

donde $\lambda_i(i=1,2,3,...)$ son raíces positivas de la ecuación $J_\nu(\lambda_i a^c)=0$.

Al aplicar transformada a las condiciones iniciales se tiene

$$\overline{u}(\lambda,0)=\overline{f}(\lambda) \qquad\qquad \overline{u}_t(\lambda,0)=\overline{g}(\lambda)$$

Resolviendo la ecuación diferencial homogenea asociada a (11) y usando las condiciones iniciales se obtiene

$$\overline{u}_c(\lambda_i,t)=\overline{f}(\lambda)\cos(ca\lambda_i t)+(ca\lambda_i)^{-1}\overline{g}(\lambda)\operatorname{sen}(ca\lambda_i t). \tag{12}$$

Para calcular la solución complementaria u_p se hace uso del Wronskiano W de u(t) y de la relación $u_p(t)=y_1u_1+y_2u_2$, donde $y_i=\int(\frac{W_i}{W})dt$. A partir de aqui se obtiene

$$\overline{u}_p(\lambda_i,t)=\frac{\alpha a^{1-l}J_\nu(\lambda_i a^c)}{c\lambda}\int_0^t h(t)\operatorname{sen}(ca\lambda_i)(t-\tau)dt. \tag{13}$$

Entonces la solución general de (11) teniendo en cuenta la superposición de (12) y (13) es

$$\overline{u}(\lambda_i,t)=\overline{f}(\lambda)\cos(ca\lambda_i t)+(ca\lambda_i)^{-1}\overline{g}(\lambda)\operatorname{sen}(ca\lambda_i t)+\frac{\alpha a^{1-l}J_\nu(\lambda_i a^c)}{c\lambda}$$
$$\int_0^t h(\tau)\operatorname{sen}(ca\lambda_i)(t-\tau)dt.$$

Finalmente, aplicando (6) se tiene $u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\overline{u}_\nu(\lambda_i,l,c)}{\|J_\nu(\lambda_i)\|}x^l J_\nu(\lambda_i x^c).$

Aplicando la condición de frontera y propiedades de la función Bessel se tiene

$$\|J_\nu(\lambda_i)\|=\frac{a^{2c}}{2c}J^2_{\nu+1}(\lambda_i a^c)$$

Casos particulares: Para éste primer resultado se muestran los siguientes casos particulares:

1. Considerando las condiciones de frontera e iniciales:

$$u(a,t)=0,\ t\geq 0,\qquad u(r,0)=f(r),\qquad u_t(r,0)=0,\qquad 0\leq r\leq a$$

$$u(r,t)=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\int_0^1 rf(r)j_0(\lambda_i r)dr}{J_1^2(\lambda_i a^c)}\cos(c\alpha\lambda_i t)J_0(\lambda_i r).$$

solución clásica del problema de la membrana elástica circular presentado en (Boyce y DiPrima, 1979, p 671-674). Para el siguiente caso se introducen valores particulares a los parámetros que generalizan la ecuación de onda.

2. Considerando ν=1.5, l=1.5, a=1, c=1.25,en... se obtiene λ_i=4.489, además tomando $f(r)=2$, $g(r)=1$, $h(t)=2$.

Un perfil del movimiento de la membrana es como se muestra en la figura 1
Se considera nuevamente la ecuación (10)

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=r^{2-2c}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+(1-2l)r^{1-2c}\frac{\partial u}{\partial r}+(l^2-c^2\nu^2)r^{-2c}u.$$

Pero esta vez con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$hu(a,t)+u'(a,t)=K(t),\ t\geq 0,\quad u(r,0)=f(r),\quad u_t(r,0)=g(r),\quad 0\leq r\leq a$$

Despues de aplicar la transformada generalizada de Hankel y tener en cuenta la condición de frontera se tiene

$$\frac{d^2\overline{u}}{dt^2}+a^2\lambda_i^2c^2u=a^2a^{1-l}J_\nu(\lambda_i a^c)K(t)$$

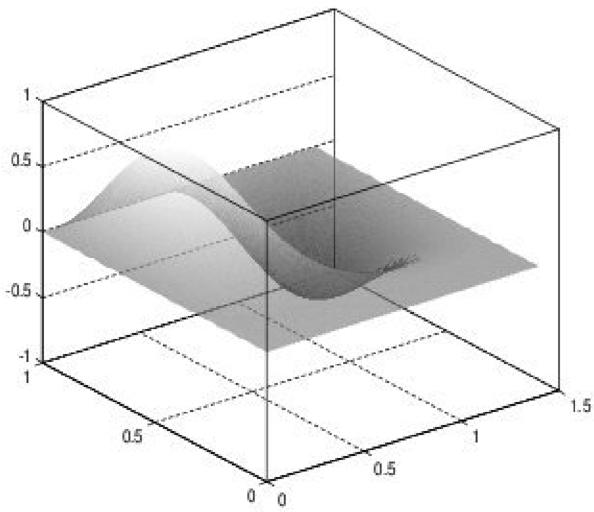

Figura 1: perfil de vibración de la membrana

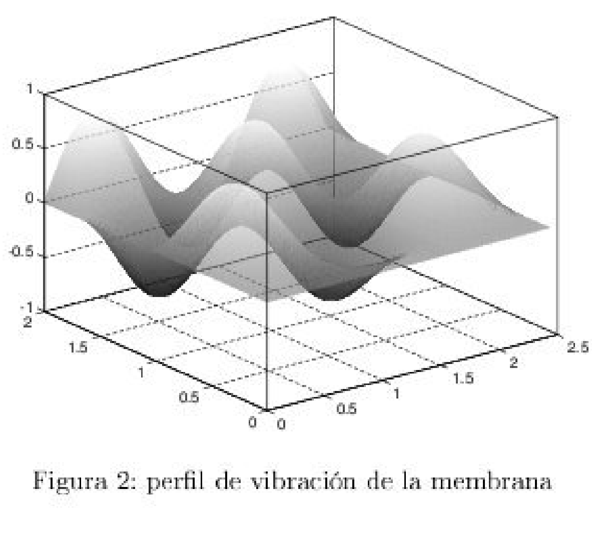

Figura 2: perfil de vibración de la membrana

donde $\lambda_i (i = 1, 2, 3, ...)$ son raíces positivas de la ecuación

$$(h + \frac{l - c\nu}{a}) J_\nu(\lambda_i a^c) + \lambda c a^{c-1} J_{\nu-1}(\lambda a^c) = 0.$$

Usando un procedimiento similar al anterior se obtiene

$$\overline{u}(\lambda_i, t) = \overline{f}(\lambda)\cos(ca\lambda_i t) + (ca\lambda_i)^{-1}\overline{g}(\lambda)\,\mathrm{sen}(ca\lambda_i t) + \frac{\alpha a^{1-l} J_\nu(\lambda_i a^c)}{c\lambda} \times \int_0^t K(\tau)\,\mathrm{sen}(ca\lambda_i)(t-\tau)dt.$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene una solución bastante general del problema de la membrana, dada por

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{u}_\nu(\lambda_i, l, c)}{(\|J_\nu(\lambda_i)\|} x^l J_\nu(\lambda_i x^c)$$

Teniendo en cuenta la condición de frontera y propiedades de la función bessel se tiene

$$\|J_\nu(\lambda_i)\| = \frac{a^{2c}}{2c}[(h + \frac{l}{a})^2 + (1 - \frac{\nu^2}{\lambda_i^2 a^{2c}})] J_\nu^2(\lambda_i a^c)$$

Caso particular: Cuando $\nu = 1{,}25$, $l = 0{,}8$, $a = 2$, $c = 1{,}25$, se obtiene $\lambda_i = 3{,}857$ y además se consideran $f(r) = 0$, $g(r) = 1$, $K(t) = 0$.En la figura 2 se muestra un perfil de vibración de la membrana.

Referencias

[1] Al-Hajri and Kalla, S. L.: On an integral transform involving Bessel functions, Bull. Soc. Math. Macedonie, 28 (2004), 5–18.

[2] I. Ali and Kalla, S. L.: A generalized Hankel transform and its use for solving certain partial differential equations, J Aust. Math. Soc. 41B (1999), 105–117.

[3] Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R.: Special Functions, 1999, Cambridge University Press, New York.

[4] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C.: Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera, 1979, terc. ed., Edit. Limusa, Mexico, 1979. , 2007.

[5] Debnath, L. and Bhatta, D.: Integral transforms and their applications, 2007 Bull. Soc. Math. Macedonie, second ed., Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, FL. 190 (2007) 705-711

[6] M. Garg, A. Rao and Kalla, S. L.: On a generalized finite Hankel transform, Appl. Math. and Comp. 190 (2007), 705–711.

[7] Kalla, S. L. and Villalobos, A.: On a new integral transform I, Jnanabha 9-10 (1980), 149–154.

[8] Kalla, S. L. and Villalobos, A.: On a new integral transform II, Rev. Tec. Ing., Univ. Zulia 5 (1982), 40–44.

[9] Khajah, H. G.: A modified finite Hankel transform, Integr. Transf. Spec. Funct. 14 (2003), 403–412.

[10] Sneddon, I. N.: The use of integral transforms 1972, Mc Graw-Hill Book Company, New York

Dirección de los autores
Jaime Castillo Pérez — Grupo Gima, Universidad de la Guajira, Riohacha-Colombia
e-mail: `jacas68@yahoo.es`
Carlos Jiménez Ruíz — Grupo Gima, Universidad de la Guajira, Riohacha-Colombia
e-mail: `carlosj114@gmail.com`
Rafael Meléndez Surmay — Grupo Gima, Universidad de la Guajira, Riohacha-Colombia
e-mail: `melendez24@hotmail.com`