



**CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE PROFESORES EN FORMACIÓN EN
RELACIÓN CON LA DISTRIBUCIÓN NORMAL: UN ESTUDIO DE CASO**

REY STEVEN PINO SUAREZ

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

Santiago de Cali, Colombia

2024

**CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE PROFESORES EN FORMACIÓN EN
RELACIÓN CON LA DISTRIBUCIÓN NORMAL: UN ESTUDIO DE CASO**

Rey Steven Pino Suarez

Trabajo de Grado para optar por el título de
Licenciado en Matemáticas

Director Trabajo de Grado
Mg. José Miguel León Banguero

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia

2024

Agradecimientos

En primer lugar gracias a mi familia que, aunque pequeña, es todo lo que necesito, mi mamá-abuela, Martha, y mi padre, Reinel. Cada logro alcanzado en estos cinco años lleva su nombre. Ser el primero en nuestra familia en obtener una educación superior no es solo un mérito personal, sino el resultado de su apoyo incondicional y su confianza en mí. Este triunfo es nuestro.

Agradezco profundamente a mi director de trabajo de grado, José Miguel León, por su paciencia, guía constante que iluminaron el camino en los momentos más confusos de esta investigación.

A mi pareja, Daniela, por ser refugio y fuerza. A pesar de las batallas que librabas con tu propia tesis, siempre encontraste un espacio para apoyarme, para sostenerme en el cansancio. Gracias, amor, por ser mi equilibrio.

Finalmente, agradezco a la vida, con todos sus golpes, tropiezos y lecciones duras. Cada caída fue un espejo que me enfrentó a lo que soy, y cada recaída, un recordatorio de mi humanidad. Hace tiempo escuché que crecer es, en el fondo, abrazar el vacío, aceptar la incertidumbre y hallar en ella el sentido propio. Tal vez, ahora, encontré el mío.

Resumen

Este estudio aborda el conocimiento matemático de profesores en formación respecto a la distribución normal, empleando el modelo MTSK como marco teórico. La investigación sigue un enfoque cualitativo y adopta un diseño de estudio de caso. A partir de un cuestionario se evalúan aspectos como definiciones, propiedades y el cálculo de probabilidades e interpretación de gráficas asociadas con la Distribución Normal. Se identificaron dificultades relacionadas con los procesos de estandarización de variables aleatorias y la integración de diferentes representaciones semióticas en la resolución de problemas. Los resultados destacan limitaciones en el razonamiento probabilístico y la comprensión de conceptos y objetos asociados a la Distribución Normal. A partir de estos hallazgos, se proponen recomendaciones para fortalecer la formación inicial de docentes, y con ello, mejorar sus competencias en la enseñanza de la estadística y la probabilidad.

Palabras clave: Distribución normal, conocimiento especializado, MTSK, formación docente.

Abstract

This study addresses the mathematical knowledge of preservice teachers regarding the normal distribution, using the MTSK model as a theoretical framework. The research follows a qualitative approach and adopts a case study design. Using a questionnaire, aspects such as definitions, properties and the calculation of probabilities and interpretation of graphs associated with the Normal Distribution are evaluated. Difficulties related to the standardization processes of random variables and the integration of different semiotic representations in problem solving were identified. The results highlight limitations in probabilistic reasoning and the understanding of concepts and objects associated with the Normal Distribution. Based on these findings, recommendations are proposed to strengthen the initial training of teachers and thereby improve their skills in teaching statistics and probability.

Keywords: Normal distribution, specialized knowledge, MTSK, teacher training.

Tabla de Contenido

Resumen.....	iv
Abstract	v
Índice de Tablas	viii
Índice de Ilustraciones	ix
Índice de Ecuaciones.....	x
Introducción	1
Capítulo I	2
1.1 Problema de Investigación	2
1.2 Antecedentes	7
1.3 Pregunta de Investigación	17
1.4 Planteamiento de Objetivos.....	17
1.4.1 Objetivo General.....	17
1.4.2 Objetivos Específicos	17
1.5 Justificación.....	18
Capítulo II	21
2.1 Marco matemático.....	21
2.1.1 La Distribución Normal.....	21
2.1.2 Distribución normal estandarizada	22
2.1.3 Propiedades de la distribución normal.....	24
2.2 Marco Teórico	25
2.2.1 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)	26
Capítulo III.....	30
3.1 Teoría Metodológica	30
3.2 Estudio de Caso	31
3.3 Elementos de significado Ostensivos e intensivos.....	32
3.4 Instrumentos y Participantes	33
3.5 Intencionalidad del instrumento	33
3.5.1 Análisis de gráficas.....	35
3.5.2 Cálculo de probabilidades	41
3.5.3 Propiedades de la distribución normal.....	47
3.5.4 Uso de la tabla Z y procesos de estandarización	53

Capítulo IV	61
Etapas del análisis	61
4.1 Primera etapa	61
4.1.1 Elementos de significado relacionados a los ítems del cuestionario.	61
4.1.2 Índice de dificultad de los ítems del cuestionario.....	64
4.2 Segunda etapa.....	66
4.3 Tercera etapa	71
Capítulo V	74
5.1 Conclusiones	74
5.2 Limitaciones	76
5.3 Proyecciones del trabajo de grado.....	77
Referencias bibliográficas.....	1
Anexos	9
Anexo 1. Cuestionario presentado a participantes	9

Índice de Tablas

Tabla 1 <i>Temas, preguntas y categorías del cuestionario.</i>	34
Tabla 2 <i>Resultados en las competencias de razonamiento cuantitativo definidas por el ICFES.</i> 36	
Tabla 3 <i>Resultados en los contenidos de razonamiento cuantitativo definidos por el ICFES.</i>	36
Tabla 4 <i>Resultados generales por facultades.</i>	43
Tabla 5 <i>Elementos de significado relacionados a los ítems del cuestionario.</i>	63
Tabla 6 <i>Índice de dificultad de los ítems del cuestionario</i>	65
Tabla 7 <i>Proporción de errores presentes en los participantes</i>	67

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1 <i>Conjunto de antecedentes</i>	15
Ilustración 2 <i>Campanas de Gauss.</i>	21
Ilustración 3 <i>Tabla Z. Área bajo la curva normal estandarizada.</i>	24
Ilustración 4 <i>Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)..</i>	27
Ilustración 5 <i>Cálculo de $53 < x < 55$</i>	56
Ilustración 6 <i>Cálculo de $28 < x < 30$</i>	56

Índice de Ecuaciones

Ecuación 1: Función de densidad de la distribución normal.	21
Ecuación 2: Función de distribución.	22
Ecuación 3: Variable aleatoria normal estándar.	22
Ecuación 4: Función de densidad normal estandarizada.	23

Introducción

Este trabajo de grado se enfoca en analizar el conocimiento matemático de profesores en formación en relación con la enseñanza de la distribución normal. Utilizando el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) como marco teórico, se examinan los elementos del conocimiento especializado que los futuros docentes movilizan al abordar este tema. A través de un estudio de caso, se diseñó y aplicó un cuestionario que evaluó el manejo de conceptos fundamentales, como el uso de la tabla Z, el cálculo de probabilidades y las propiedades de la distribución normal, incluyendo aspectos ostensivos e intensivos.

Los resultados reflejan avances y dificultades en el razonamiento probabilístico¹ de los participantes, identificándose carencias en la integración de representaciones gráficas y simbólicas con el significado teórico. Asimismo, se proponen recomendaciones orientadas a mejorar los procesos de enseñanza y fortalecer la formación inicial de los docentes, promoviendo el desarrollo de competencias que permitan una enseñanza más efectiva de contenidos probabilísticos.

Finalmente, el estudio resalta la importancia de incorporar herramientas cualitativas, como entrevistas, en futuras investigaciones para profundizar en la comprensión conceptual de los docentes en formación y extender el análisis a otras distribuciones estadísticas.

¹ En este trabajo de investigación, el razonamiento probabilístico se entiende como la aplicación de la probabilidad para analizar y justificar soluciones a problemas en un contexto específico. Esto requiere la capacidad de modelar matemáticamente las situaciones abordadas, empleando los conceptos de manera tanto formal como informal, y superando enfoques deterministas (Coronado y García-García, 2024).

Capítulo I

1.1 Problema de Investigación

Actualmente, la estadística ha adoptado un papel indispensable. Jacho et al., (2020), mencionan que, en el siglo XXI, la estadística desempeña un papel crucial al facilitar la comprensión de la información y tener una influencia considerable en múltiples aspectos de la sociedad. Simultáneamente, la estadística ejerce una importante función en el progreso de la sociedad actual, al brindar herramientas que posibilitan la descripción de situaciones de incertidumbre de contextos científicos, sociales y económicos, (Ponteville, 2014). En ese sentido, Pérez (2010) menciona que el conocimiento estadístico presenta un rol cada vez más crucial en la sociedad actual, dado que se utiliza ampliamente para explicar eventos en la vida cotidiana y en el ámbito científico. Además, en diversos medios de comunicación encontramos información estadística, gráficos y tablas que reflejan tendencias en el consumo, la distribución de la población y el uso de recursos naturales, evidenciando su relevancia generalizada.

El impacto positivo de la inferencia estadística en la educación se evidencia al ser integrado en varias etapas del currículo. En el bachillerato, una formación sólida en este campo permite a los estudiantes analizar fenómenos sociales, desarrollar criterios propios, interpretar datos con precisión, formular hipótesis, justificar procedimientos, adquirir vocabulario matemático y establecer conexiones entre las matemáticas y el entorno social (López, 2021). Sin embargo, el objetivo principal de esta disciplina es reconocer enfoques que respalden el razonamiento inductivo a partir del análisis de los datos de contextos científicos (López, 2021). En ese sentido, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) propone la inclusión de contenidos de inferencia estadística en la educación media, ya que estos

contribuyen significativamente a mejorar la capacidad de toma de decisiones en situaciones de incertidumbre (OCDE, 2016).

Se han propuesto modificaciones en las reformas curriculares de Colombia con el objetivo de incorporar la inferencia estadística en la educación. Al respecto, Naya et al. (2012) señalan que la enseñanza de la estadística preuniversitaria fue opcional durante varias décadas, pero solo se oficializó su inclusión en todos los niveles educativos con la publicación de los estándares de calidad del Ministerio de Educación Nacional (MEN). Más allá de las leyes educativas, la eficacia de estos cambios curriculares requiere acciones adicionales. De igual forma, es crucial proporcionar una sólida formación a los profesores, desarrollar materiales de texto efectivos para facilitar la implementación de programas, y en algunos casos, cambiar la percepción hacia la estadística (Naya et al., 2012). Finalmente, la integración de la inferencia estadística en las reformas curriculares fortalece la educación matemática, tal como sostiene el Ministerio del Poder Popular para la Educación (2018), ya que las matemáticas para la formación de una ciudadanía crítica no pueden prescindir del estudio de la incertidumbre, siendo esenciales para la comprensión de fenómenos, la toma de decisiones informadas y la planificación futura de las sociedades.

La actualización curricular careció de una evaluación respecto a la preparación de los docentes en ese momento. En correspondencia a Naya et al. (2012), la integración de estadística en el currículo colombiano no consideró la capacitación docente ni promovió recursos. Las tendencias actuales en educación estadística requieren la utilización de computadoras (softwares estadísticos como Fathom o CODAP) no solo para realizar cálculos tediosos, sino también para respaldar la exploración, visualización y comprensión de conceptos abstractos mediante simulaciones, (Naya et al., 2012). Sin embargo, acorde a Pinos-Coronel et al. (2020), la falta de

capacitación docente en la integración efectiva de tecnologías afecta negativamente su actitud hacia las TIC, generando un ciclo de uso ineficiente en el aula. Es así como la enseñanza de estadística inferencial enfrenta desafíos, como lo evidencia un estudio que señaló que los profesores colombianos enseñan esta disciplina en el nivel preuniversitario, sin observarse diferencias temáticas o en la profundidad a lo largo de diversos niveles educativos (Naya et al., 2012).

La estadística no puede separarse de las situaciones prácticas a las que se aplica, y su validación última reside en su capacidad para ser útil en la solución de problemas que se encuentran más allá del ámbito exclusivo de la disciplina, integrándose con el contexto circundante, (Batanero y Díaz, 2011). Asimismo, el contexto es fundamental para el análisis de datos, acorde con Cobb y Moore (1997), más allá del contenido, lo que diferencia el pensamiento estadístico de las matemáticas es que la estadística demanda un tipo de reflexión diferente. Esto se debe a que los datos no son meramente cifras, sino cifras que tienen un contexto. Por esta razón, la enseñanza de la estadística puede realizarse a través de la implementación de proyectos basados en situaciones realistas, incluso si se trata de versiones simplificadas de un problema. Estos proyectos orientarán a los estudiantes hacia la comprensión de conceptos estadísticos, la aplicación de técnicas de cálculo, el fortalecimiento de sus habilidades argumentativas, la formulación de hipótesis y la reflexión sobre el contexto en el que se desarrollan. (Rodríguez-Muñoz et al., 2020).

La probabilidad juega un papel fundamental en la toma de decisiones en diversos ámbitos, desde las ciencias naturales hasta las ciencias sociales, ya que permite modelar la incertidumbre y analizar fenómenos aleatorios que influyen en la vida cotidiana (Batanero, 2005; Gal, 2005). Su enseñanza es esencial para el desarrollo del pensamiento crítico y la formación de

ciudadanos capaces de interpretar y evaluar información probabilística en contextos reales (Alsina & Vásquez, 2017). Dentro de las distribuciones de probabilidad, la distribución normal destaca como la más relevante en estadística y teoría de probabilidades, debido a su aplicabilidad en el análisis de datos y en procedimientos inferenciales como la construcción de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis (García-García et al., 2024). Su importancia radica en que numerosos fenómenos naturales y sociales siguen un comportamiento aproximadamente normal, lo que la convierte en un modelo clave en la educación estadística y en la formación de profesores en probabilidad y estadística (Batanero et al., 2001).

La importancia de la distribución normal en nuestra sociedad radica en la frecuencia con la que numerosas variables relacionadas con eventos naturales y cotidianos tienden a seguir, en términos generales, esta distribución. (Díaz y Fernández, 2001). Además, debido a su utilidad, la distribución normal se encuentra presente en múltiples situaciones de la vida cotidiana, tales como: Problemas biológicos (distribución de medidas físicas), datos psicológicos (amplitud de percepción), problemas físicos (estudios de fenómenos astronómicos), entre otros (Batanero, 2001). En tal sentido, por su naturaleza comúnmente se emplea la distribución normal para representar eventos de la vida real y realizar pronósticos mediante análisis estadísticos confiables y robustos (Luzuriaga et al., 2023).

La distribución normal es una parte fundamental de la estadística y la probabilidad, pero existe una escasez de investigación sobre cómo se enseña y se aprende este concepto, especialmente entre los estudiantes de bachillerato (Valdez y Salinas, 2019). Simultáneamente, al revisar los Estándares Básicos de Competencia no se encuentra una mención explícita de la distribución normal; no obstante, se propone acercar al estudiante a la distribución normal intentando que interprete conceptos relevantes relacionados con el manejo de información (como

la distribución de frecuencias), use de manera comprensiva algunas medidas de centralización, dispersión y correlación (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Finalmente, al rastrear en los libros sugeridos por el MEN (como los textos *vamos a aprender 10 y 11*) para la enseñanza en la educación media, no se presentan nociones básicas que logren llevar a cabo dichos estándares; cabe recalcar que se presentan únicamente histogramas y diagramas en forma de campana de Gauss, pero no se menciona en ningún momento a la distribución normal.

El Ministerio de Educación Nacional (2006) establece que el docente es el responsable de llevar a cabo los procesos de enseñanza-aprendizaje, incluyendo diagnóstico, planificación, ejecución y evaluación, además de otras actividades educativas en el contexto del proyecto institucional. Ahora bien, la investigación realizada por Gonzalez et al. (2018) con un grupo de estudiantes pone de manifiesto las carencias en su comprensión de la distribución normal debido a un enfoque educativo que se centra en la operatividad. Esto sugiere que los estudiantes simplemente repiten lo que se les enseña y lo aceptan sin cuestionarlo, solo porque el docente lo afirma (González et al., 2018). En consecuencia, es importante la capacitación de los docentes para asegurar que la formación de los estudiantes esté en consonancia con los lineamientos predominantes.

Diversas investigaciones exponen casos de profesores en formación que experimentan dificultades conceptuales, procedimentales y didácticas en relación con la distribución normal. Estas dificultades incluyen la falta de reconocimiento de los procesos de estandarización, brindar soluciones a problemas de probabilidad que no coincidan con la región sombreada en la gráfica solicitada, obstáculos en el análisis de los conceptos y propiedades, así como la escasa consideración de errores en la interpretación del nivel de significación y del valor-p, entre otros aspectos (Gonzalez y Ojeda, 2017; Valenzuela-Ruiz et al., 2023; López et al., 2019b). Una razón

plausible podría ser la falta de preparación en la disciplina que el profesor adquiere durante su formación (Gattuso y Pannone, 2002). En conclusión, la detección y categorización de los conflictos semióticos presentados por los profesores en formación en el ámbito de la estadística inferencial constituye una contribución significativa para optimizar su preparación, ya que esto facilita la implementación de acciones educativas dirigidas a superar tales conflictos y, en consecuencia, mejorar la calidad de su enseñanza (López, 2021)

1.2 Antecedentes

A continuación, se presentan algunos estudios relacionados con el conocimiento matemático de los docentes en formación en el ámbito de la probabilidad y la estadística. Estos antecedentes se han organizado en función de tres ejes principales: investigaciones que analizan las dificultades conceptuales y procedimentales en la comprensión de la distribución normal, estudios que exploran estrategias didácticas para mejorar la enseñanza de la probabilidad y la estadística, y trabajo que emplean modelos de conocimiento especializado, como el MTSK, para caracterizar el conocimiento del profesor. Esta revisión proporciona un marco contextual que permite comprender los retos en la formación de docentes y la pertinencia del presente estudio.

Sharma (2016) propone una secuencia didáctica para los últimos grados de escolaridad de secundaria con el propósito de identificar algunos errores y dificultades de los estudiantes alrededor de la probabilidad. Esta investigación toma en cuenta las teorías socioculturales de Vygotsky y Wenger para el diseño de las actividades. En cuanto a la metodología, se diseñan actividades con el fin de identificar creencias de los estudiantes. Los resultados evidencian que unos pocos experimentos no cambian las creencias de los estudiantes, y resalta la importancia de permitirles a los estudiantes predecir antes de simular, para luego comparar, lo cual puede ayudar a contrastar las ideas de los estudiantes. En conclusión, la autora expone la necesidad de aplicar

experimentos prácticos y proporcionar ambientes desafiantes dentro del aula de clase, para fomentar su alfabetización probabilística en sus estudiantes.

Tauber (2001), en su tesis se enfoca en investigar las dificultades encontradas en un curso introductorio de estadística en la Universidad de Granada en relación con la inferencia estadística. Su objetivo es reconocer el significado institucional y personal de los estudiantes, con respecto a la distribución normal desde una perspectiva práctica. La autora enfatiza la importancia de diversas fundamentaciones teóricas en el campo de la Didáctica de la Matemática. En este contexto, destaca el modelo propuesto por Godino (1999), el cual aborda tres dimensiones fundamentales: epistemológica, semiótico-cognitiva e instrumental. Los resultados revelan una serie de obstáculos, tales como la comprensión de áreas en histogramas de frecuencia y dificultades en el cálculo del área en un intervalo, la incapacidad para distinguir entre el modelo teórico y los datos empíricos, la confusión al trabajar con diferentes distribuciones, y una capacidad de argumentación insuficiente. En síntesis, la autora recalca que es crucial que los alumnos obtengan un sólido entendimiento de conceptos básicos de estadística antes de sumergirse en el aprendizaje de la distribución normal. Esto incluye dominar promedios, representaciones gráficas y otros fundamentos. Se destaca la urgencia de mejorar los métodos de enseñanza de la inferencia estadística, dado que es común que los estudiantes no hayan sido expuestos a estos temas durante su educación secundaria o en el Bachillerato.

López (2021) propone una investigación enfocada en la evaluación del conocimiento didáctico-matemático relacionado con la inferencia estadística entre futuros profesores. Este estudio involucra a estudiantes en formación para la enseñanza de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, utilizando una metodología cualitativa documental que se apoya en una revisión exhaustiva de trabajos previos sobre las dificultades de comprensión en la inferencia

estadística. La autora se basa en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y La Instrucción Matemática, así como en el conocimiento didáctico-matemático del profesorado para analizar las respuestas de sus estudiantes en un cuestionario. Los hallazgos revelan una serie de conflictos cognitivos, conceptuales y procedimentales entre los participantes, incluyendo obstáculos en la elaboración de hipótesis, la distinción entre estadístico y parámetro, el entendimiento de la distribución muestral, el significado del p-valor y el proceso de contraste de hipótesis. En última instancia, se resalta la urgente necesidad de brindar formación a los futuros profesores en el campo de la inferencia estadística, especialmente en lo concerniente al contraste de hipótesis, se reconoce que los participantes han centrado sus esfuerzos de enseñanza en la ejecución de cálculos sin explorar a fondo su significado.

En su investigación, González y Ojeda (2017) analizan la comprensión de la distribución normal con base en una pregunta problema relativa a la longitud de los peces, con un grupo de 26 estudiantes de bachillerato y otro de 11 estudiantes de nivel superior. En la metodología tienen en cuenta la célula de análisis de la enseñanza propuesta por Ojeda (2006), acompañada de una entrevista semiestructurada. Con respecto al marco teórico, las autoras se basan en el enfoque epistemológico propugnado por Heitele (1975), el triángulo epistemológico para caracterizar la constitución del concepto matemático como una relación entre objeto, signo y concepto planteado por Steinbring (1991) y los tres tipos de conocimiento para la comprensión de la media: conocimiento funcional, de cálculo y analógico desarrollado por Pollatsek et al. (1981). Los estudios revelan que ambos grupos no reconocen el proceso de estandarización ni la comprensión de la gráfica mostrada en conjunto con el enunciado, no interrelacionaron el referente y la gráfica con el concepto de la distribución normal, y las respuestas relacionadas con el cálculo de la probabilidad solicitado mostraban resultados diferentes a la región sombreada en

la gráfica. En conclusión, las respuestas de los estudiantes y las entrevistas realizadas revelaron una interpretación a la resolución del problema planteado solo como una aplicación de un algoritmo aritmético para obtener un resultado y la preferencia al pensamiento en formato de frecuencia por sobre un formato de probabilidad.

A partir de la investigación anterior González et al. (2018) plantean analizar la comprensión de dos docentes en ejercicio con respecto a la distribución normal con base en una pregunta problema relativa a la longitud de los peces. Los docentes tenían la particularidad de ser los encargados de los cursos de estadística de los estudiantes que fueron partícipes de la investigación de González y Ojeda (2017), con el objetivo de determinar si las respuestas de los estudiantes eran indicativas de errores intrínsecos o si reflejaban interpretaciones incorrectas derivadas de deficiencias en su instrucción. El estudio se realizó bajo un procedimiento basado en una entrevista con guion semiestructurado. Las autoras presentan los mismos elementos teóricos presentes que en su investigación anterior (González y Ojeda, 2017). Los resultados muestran que los profesores enfrentan dificultades al explicar la estandarización de las preguntas, lo cual revela deficiencias en la enseñanza centrada en la operatividad. Asimismo, se ha constatado que las carencias de los estudiantes en comprender la distribución normal derivan de este enfoque pedagógico. En última instancia, se concluye que los estudiantes tienden a repetir lo que se les enseña y a aceptarlo simplemente porque el profesor lo indica. La investigación destaca la necesidad de que el docente tenga un dominio completo, tanto operativo, funcional, como analógico del concepto implicado para poder ofrecer una educación completa al estudiantado.

Álvarez y Muñoz (2018) presentan una investigación enfocada en comparar el significado personal de la distribución normal en futuros profesores que aprobaron la asignatura de

inferencia estadística de la Universidad del Valle; para ello, realizan un diseño de un recurso didáctico con una metodología del análisis cualitativo y cuantitativo. El marco teórico está basado en el enfoque Ontosemiótico y la teoría del significado institucional y personal de los objetos matemáticos propuestos por Godino y Batanero. Sus resultados muestran que la utilización de recursos pedagógicos interactivos permite un desempeño superior al desarrollar problemas de la distribución normal. De igual manera, se constató que los estudiantes fueron capaces de identificar la distintiva forma acampanada de la curva normal y comprendieron el significado gráfico de sus parámetros. Además, los estudiantes reconocieron el concepto de moda y entendieron la posición de los valores de la distribución normal en relación con la moda en la curva. Finalmente, las autoras presentan que los estudiantes logran distinguir elementos de significado institucional; además, se evidencia que por el acompañamiento de recursos didácticos interactivos se logra un proceso de aprendizaje más significativo.

Díaz (2018) presenta su tesis enfocada en analizar la comprensión de representaciones gráficas estadísticas incluidas en las directrices curriculares de Chile en una muestra de 745 estudiantes de sexto y séptimo curso de educación primaria. La metodología se sustentó en un cuestionario diseñado a partir del análisis de diversas directrices curriculares y, para el estudio de las respuestas de los participantes, se empleó el análisis de contenido. El autor se fundamentó en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Los resultados revelaron diferentes conflictos semióticos relacionados con las convenciones de construcción de los gráficos o tablas, con la interpretación de la finalidad del gráfico, la interpretación de conceptos numéricos y con la interpretación de otros conceptos o propiedades presentados tanto por los estudiantes de sexto como de séptimo. Finalmente, los hallazgos presentados pueden ser de gran valor didáctico para los docentes en la enseñanza de la estadística, ya que les permiten

anticipar las posibles dificultades de sus estudiantes y elaborar un plan de mejora para ayudarlos a superarlas.

Mohamed (2013) realiza una evaluación del conocimiento matemático y didáctico en probabilidad de 283 futuros docentes de educación primaria de la Universidad de Granada. Para ello, utiliza un modelo de niveles y facetas del conocimiento didáctico-matemático del profesor, desarrollado por Godino et al. (2011), fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática. Los resultados de esta investigación revelan que el conocimiento matemático de los futuros profesores es insuficiente. La mayoría de los participantes manifiesta dificultades para resolver problemas de probabilidad, atribuidas a un limitado entendimiento del concepto de muestreo, una deficiente comprensión de la convergencia estocástica y una falta de consideración del tamaño de la muestra al tomar decisiones en contextos específicos que involucran probabilidades. Finalmente, el estudio revela que los profesores en formación demuestran un entendimiento del contenido al identificar respuestas incorrectas a problemas en probabilidad; sin embargo, carecen de los elementos didácticos para explicitar el origen de estos errores. Por lo tanto, se sugiere mejorar la formación didáctica en la probabilidad, la cual, de acuerdo con los autores, debería ser impartida mediante una transposición didáctica adecuada previa.

Valenzuela-Ruiz et al. (2023a) analizan la competencia didáctico-matemática de 61 profesores en formación respecto a la distribución de la media muestral. En esta investigación se aplica un cuestionario matemático y didáctico que busca indagar, a partir de las respuestas de estudiantes, elementos del conocimiento profesional del futuro profesor. El referente teórico utilizado es el modelo CDM (conocimiento didáctico-matemático). Los resultados en cuanto al entendimiento básico de los conceptos matemáticos relevantes fueron favorables. Además, se

demostró una capacidad aceptable para analizar los elementos matemáticos (conceptos, procedimientos y propiedades); no obstante, hubo una carencia en la comprensión de cómo identificar los posibles errores que los estudiantes podrían cometer al abordar la tarea. En conclusión, el estudio indica que los participantes no están conscientes de la probabilidad de cometer tales errores en sus alumnos, lo que resalta la importancia de enseñar a los futuros educadores la distinción entre las diversas distribuciones de probabilidad presentes en el muestreo y la diferencia entre estadístico y parámetro.

En Valenzuela-Ruiz et al. (2023b), las autoras cuantifican el conocimiento matemático, las facetas epistémicas y cognitivas del conocimiento didáctico de la inferencia estadística en una muestra de 62 futuros profesores. Los autores aplican la misma metodología de investigación presentada anteriormente. El marco teórico se apoya del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático; los autores se centran en tres componentes fundamentales (conocimiento matemático, didáctico y el metadidáctico). Los resultados indican que los futuros docentes exhiben un sólido dominio en el ámbito matemático y están en proceso de desarrollar competencias en las dimensiones epistémica y cognitiva. Sin embargo, su capacidad para identificar objetos matemáticos y errores es limitada, ya que se enfocan en aspectos procedimentales, lo que resulta en dificultades para analizar los conceptos y propiedades necesarios para abordar los problemas planteados. En síntesis, se subraya la importancia de fortalecer la formación del profesorado en matemáticas, especialmente en la didáctica de la estadística inferencial. Esto complementaría su destacado conocimiento matemático especializado, que ya ha sido evidenciado en las dimensiones epistémica y cognitiva.

Valdez y Salinas (2019) examinan las soluciones proporcionadas por estudiantes de nivel de bachillerato a problemas asociados con la distribución normal. La metodología aplicada fue el

cuestionario implementado a dos grupos de alumnos de bachillerato, los cuales cursan estadística y probabilidad II. El marco teórico utilizado para el análisis de las respuestas de los participantes es la taxonomía SOLO (*structure of the observed learning outcome*) planteado por Biggs y Collis (1982). Los hallazgos revelan que la mayoría de los estudiantes logran determinar y relacionar correctamente los valores z y los valores p asociados. Sin embargo, algunos estudiantes no establecen la conexión entre las áreas bajo la curva normal y la probabilidad. Además, emplean la misma representación para la curva de densidad empírica y la teórica, lo que sugiere una falta de comprensión respecto a la diferencia entre estas curvas. Desde un punto de vista conceptual, los estudiantes enfrentan dificultades para comprender el significado de algunas etapas en el proceso. Finalmente, los autores concluyen que la ausencia de representaciones gráficas como apoyo en las respuestas podría haber contribuido al bajo rendimiento de algunos estudiantes. Además, destacan la necesidad de equilibrar las actividades escritas con aquellas realizadas utilizando recursos computacionales, asegurando una integración adecuada entre ambas.

López et al. (2019) examinan el conocimiento de 70 aspirantes a docentes acerca de los errores probables que podrían cometer sus estudiantes en dos procesos inferenciales: el contraste de hipótesis y la construcción de intervalos de confianza. La metodología empleada se basa en la evaluación centrada en la resolución de problemas de contraste de hipótesis y construcción de intervalos de confianza, así como en la descripción de posibles errores que podrían cometer los estudiantes en estas actividades. Las autoras se respaldan teóricamente en el modelo de conocimiento didáctico-matemático (CDM). Los resultados indican un destacado desempeño al identificar los errores previsibles en los estudiantes, especialmente en aspectos procedimentales y de interpretación de resultados en ambas tareas. Sin embargo, se observó una escasa referencia a los errores relacionados con la interpretación del nivel de significación y del p -valor, lo que

sugiere que los futuros docentes pueden no estar conscientes de los errores asociados con la interpretación de estos conceptos. Por último, las autoras señalan que los futuros profesores describen los errores de manera imprecisa, lo que denota un conocimiento limitado en el tema. Esta falta de precisión no solo refleja una comprensión superficial, sino también la necesidad de una formación más profunda y detallada. De igual forma, las autoras señalan que muchos de los errores señalados por los futuros docentes aparecen también en sus propias soluciones a los problemas, lo que propone que la instrucción actual no está abordando adecuadamente las áreas problemáticas clave.

En conclusión, los resultados revelan que tanto los profesores en ejercicio como en formación enfrentan desafíos importantes en la enseñanza y comprensión de la probabilidad, especialmente en la estandarización y en el manejo de distribuciones. Aunque muestran conocimientos básicos y capacidad para identificar errores procedimentales, persisten dificultades en la interpretación gráfica y en el cálculo preciso de probabilidades, lo que sugiere la necesidad de fortalecer su formación en aspectos conceptuales y de argumentación estadística. La siguiente ilustración, presenta como se agruparon los diferentes referentes bibliográficos nacionales e internacionales que hacen parte de los antecedentes.

Ilustración 1

Conjunto de antecedentes

AUTOR(ES)	TÍTULO	OBJETIVO	MARCO TEÓRICO	METODOLOGÍA	RESULTADOS	CONCLUSIONES	CATEGORÍA
Sashi Sharma	Probabilidad desde una perspectiva sociocultural.	Ofrecer una	Teoría socio-cultural	La secuencia empieza	* Los profesores no	* Los estudiantes	Estudios sobre la estadística en general.
Nordin Mohamed Maanan	Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre la probabilidad.	Evaluar el conocimiento del contenido.	Enfoque ontosemiótico de la construcción matemática	Dos cuestionarios, el primero para evaluar al conocimiento	Los resultados indican que el conocimiento	* Estos resultados sugieren que es urgente mejorar la formación	
Daniilo Diaz Levicoy	Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos chilenos de educación primaria.	Evaluar la comprensión	Enfoque ontosemiótico del	Análisis de contenido para las respuestas y para el objetivo de conocimiento	Se logra cumplir con el objetivo de conocimiento	Comprobar si el conocimiento adquirido	
M ^{ra} del Mar López Martín	La inferencia estadística en bachillerato: análisis de las pruebas de acceso a la universidad y de los conocimientos de futuros profesores.	La investigación que se desea desarrollar	Enfoque ontosemiótico de la construcción	Se realizaron dos estudios empíricos: En el estudio I se se les plantea la resolución de una tarea tomada de las	Las respuestas fueron mejores que las observadas	algunos estudiantes se encontraron conflictos semióticos conativas	Estudios sobre la estadística inferencial.
Silvia Valenzuela, Camen Batanero, Nuvia Begué, José Garzón.	Conocimiento didáctico-matemáticos de profesores de educación secundaria en formación sobre inferencia estadística.	El objetivo del trabajo es evaluar el	Se utiliza el modelo del Conocimiento Didáctico-	En el estudio I se se les plantea la resolución de una tarea tomada de las	Los resultados muestran un buen conocimiento	Se concluye la necesidad de reforzar la preparación en la	
Andrés Liliana Alvarez Giraldo, Jennifer Isabel Muñoz Herrera	Significado personal de la distribución normal entre estudiantes de dos cursos de inferencia estadística utilizando Geogebra.	Comparar el significado personal de la	Teoría del significado institucional y personal de los	Análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados obtenidos.	* El grupo que tuvo intervención con los recursos	Todos los estudiantes pudieron distinguir los elementos de significado,	
M ^{ra} del Mar López Martín, Camen Batanero, M ^{ra} M. L.	¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?	Evaluar el conocimiento	Modelo de conocimiento	Se usa como instrumento de recolección de	Se observa un buen desempeño en los	Muchos futuros profesores describen errores con	Estudios sobre la distribución normal.
Liliana Tauber	La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.	1. Determinación	Modelo propuesto por Gadina (1999)	El enfoque es descriptivo y	* El alumno debería tener estas	* la principal aportación del ordenador es la	
Silvia Valenzuela, Camen Batanero, Nuvia Begué, José Garzón.	Conocimiento didáctico-matemático sobre la distribución de la media muestral de profesorado de bachillerato en formación.	El objetivo del trabajo es evaluar el	Se apoya en los diferentes tipos de distribución	Se pidió a una muestra de futuros profesores resolver	Los resultados de la evaluación fueron muy buenos en lo	El estudio revela la importancia de la mejora en la formación de los futuros profesores	
Yanet Karina González Arellano, Ana María Ojeda Salazar, Juan Luis	Comprensión de profesores de la distribución normal.	Investigar la comprensión de los dos	* Las diez ideas de estocástico como guía continua de un	Entrevista con un guion semiestructurado	Sus respuestas revelaron que las deficiencias de sus	El estudiante repite lo enseñado y lo acepta porque el profesor lo dice.	
Yanet Karina González Arellano, Ana María Ojeda Salazar	Comprensión de la distribución normal en bachillerato.	Analizar la comprensión de la distribución	Enfoque epistemológico propuesto por Heitele	se usó la célula de análisis de la enseñanza por	En ambos grupos no se reconoció el proceso de	Las respuestas al problema planteado, así como respuestas a las	
Julio César Valdez Monroy, Jesús Salinas Herrera	Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre la distribución normal.	Analizar las respuestas de dos grupos de	Se hace uso de la taxonomía SOLO (structure of the	Se utilizó un cuestionario conformado por siete	Se presentan varios estudiantes que no relacionan de forma	El grupo que no hizo uso de una representación gráfica como apoyo para	

1.3 Pregunta de Investigación

¿Qué conocimientos matemáticos tienen los profesores en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en relación con la enseñanza de la distribución normal?

1.4 Planteamiento de Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Caracterizar el conocimiento matemático de los temas en los profesores en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en relación con la enseñanza de la distribución normal desde la perspectiva del conocimiento especializado del profesor.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Indagar en referentes bibliográficos nacionales e internacionales elementos para la enseñanza y el aprendizaje de la distribución normal.
- Diseñar y validar un instrumento de investigación que permita indagar los conocimientos matemáticos de profesores en formación en relación con la enseñanza de la distribución normal.
- Analizar, desde el marco MTSK, elementos presentes en el conocimiento matemático de profesores en formación para la enseñanza de la distribución normal.
- Proponer recomendaciones alrededor de los procesos de enseñanza de la distribución normal y el fortalecimiento de los procesos de formación inicial de profesores en relación con la distribución normal.

1.5 Justificación

Valdez y Salinas (2019) indican que la automatización de procedimientos en el aprendizaje de la distribución normal es causante de confusiones y de bajos resultados en las evaluaciones. Estas observaciones se relacionan también con la falta de significado en la enseñanza, lo que lleva a ser un factor para que un procedimiento se olvide (Valdez y Salinas, 2019). Por ende, se considera que existe una necesidad de dotar de significado la enseñanza de procedimientos en la distribución normal en profesores en formación, lo cual les permitirá entender y aplicar correctamente los conceptos, reduciendo la posibilidad de olvidar los procedimientos y mejorando su capacidad para desenvolverse en diferentes contextos educativos.

La didáctica de la inferencia estadística en relación con la enseñanza, en el conjunto de sus acciones, intenta identificar y explicar errores que se presentan cuando el profesor en formación trata de dar solución a diferentes actividades (Batanero, 2001). En tal sentido, González et al. (2018) señalan las deficiencias que mostraron profesores en ejercicio, las cuales fueron similares a las que presentaron sus estudiantes, de ahí que el estudiante repita lo que el docente enseña en el aula. Entonces, se hace necesario identificar los errores presentes en los razonamientos estadísticos y probabilísticos de los profesores en formación, dado que esto permite hacer ajustes a procesos de formación inicial y continua en pro de su conocimiento matemático.

López (2021) señala que los futuros docentes enfrentan desafíos semióticos conceptuales en la inferencia estadística al momento de plantear hipótesis, mostrando un entendimiento superficial que carece de profundidad en cuanto a sus propiedades y principios. Asimismo, el autor sugiere que la falta de dominio por parte de los profesores en formación en aspectos clave de la inferencia estadística, como la contrastación de hipótesis, la interpretación errónea del

valor-p, y la comprensión de la hipótesis nula, dificultará su capacidad para transmitir de manera efectiva a sus alumnos la resolución adecuada de problemas de este tipo (López, 2021). Por lo tanto, la falta de comprensión matemática por parte de los futuros docentes puede limitar su capacidad para enseñar eficazmente los conceptos estadísticos y sus aplicaciones. Lo que resalta la importancia de realizar un cuestionario que permita analizar los conocimientos matemáticos de profesores en relación con la enseñanza de la distribución normal el cual permita brindar oportunidades de mejora en la formación en este campo para fomentar una educación de calidad en estadística.

Batanero (2001) menciona que hay escasez de futuros docentes que reciban una capacitación especializada en estadística aplicada o en la enseñanza de la estadística. De manera similar, Valenzuela-Ruiz et al. (2023b) destacan que los futuros educadores exhiben cierto nivel de comprensión en cuanto a los aspectos cognitivos relevantes. Aunque resaltan la necesidad de fortalecer este conocimiento para que puedan anticipar de manera eficaz las posibles dificultades de los estudiantes en problemas de inferencia, así como para diseñar estrategias efectivas que los ayuden a superar dichas dificultades. Entonces, se contempla la necesidad de reconocer aspectos relacionados con los niveles de razonamiento de los futuros docentes en relación con la distribución normal, con el fin de elaborar recomendaciones para mejorar procesos de formación inicial en cursos de estadística.

Pino-Fan y Godino (2015) explican que la dimensión cognitiva constituye un elemento integral del conocimiento didáctico, abarcando una variedad de saberes necesarios para el docente sobre cómo los estudiantes adquieren, razonan y comprenden las matemáticas, así como sobre sus métodos para resolver problemas y los errores comunes que surgen durante el proceso de aprendizaje. Por consiguiente, el conocimiento de los errores más usuales entre los estudiantes

resulta ser una herramienta valiosa para el docente, ya que proporciona información sobre cómo los estudiantes interpretan, analizan y llevan a cabo procedimientos para resolver las actividades asignadas (Espinell et al., 2007).

Por este motivo, es de especial importancia para este trabajo de grado el concentrarse en identificar desde una perspectiva especializada, errores presentes en el conocimiento especializado del profesor en formación centrado primordialmente en el conocimiento matemático para la enseñanza de la distribución normal.

Capítulo II

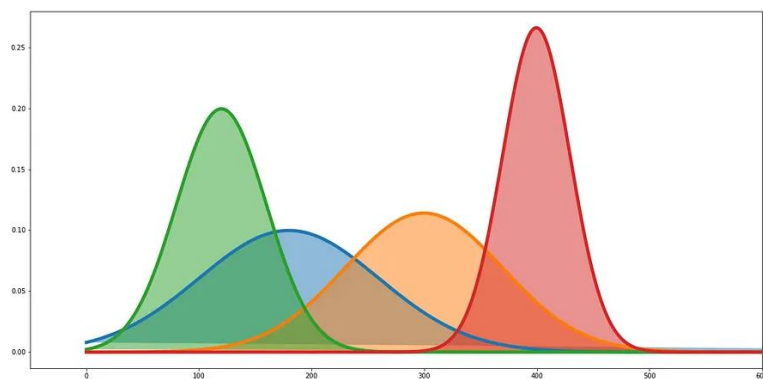
2.1 Marco matemático

2.1.1 La Distribución Normal

La distribución normal fue inicialmente identificada por el matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754). Sin embargo, fue Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quien profundizó en su estudio y formuló la ecuación de la curva, lo que llevó a que la distribución sea popularmente conocida como la *campana de Gauss* (Figura 1) (Díaz y Fernández, 2001).

Ilustración 2

Campanas de Gauss.



Nota: Adaptado de Campanas de Gauss, Medium, 2023, (<https://nicolasurrego.medium.com/la-distribución-normal-un-pilar-fundamental-en-el-análisis-de-datos-6d6ea8c7ee71>).

De acuerdo con Spiegel (1976), la distribución normal, también conocida ocasionalmente como la distribución gaussiana, está caracterizada por una función de densidad expresada por la Ecuación 1, donde μ representa la media y σ la desviación estándar.

Ecuación 1: Función de densidad de la distribución normal.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$$

En la función de distribución como se expresa en la Ecuación 2, se establece que la variable X sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar σ^2 .

Ecuación 2: Función de distribución.

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} dv$$

Para concluir, al afirmar que una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media μ y varianza σ , se denota como $X \sim N(\mu, \sigma)$, bajo la premisa que la función densidad sea la descrita por la Ecuación 1.

2.1.2 Distribución normal estandarizada

La distribución normal estandarizada o estándar, es una distribución que, como bien indica su nombre, tiene valores estandarizados con una media de 0 y desviación típica de 1, logrando así facilitar cálculos al terminar simplificando la función densidad $N(0,1)$. Para pasar de una distribución normal a una distribución normal estandarizada, se realiza el proceso de estandarización (también conocido como tipificación o normalización) de una variable aleatoria continua X , de la cual se conoce su media μ y desviación típica σ por medio de la Ecuación 3, generando así la distribución $Z \sim N(0,1)$

Ecuación 3: Variable aleatoria normal estándar.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Acorde a lo anterior, la función de densidad para Z puede obtenerse a partir de reemplazar $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ en la función y del inicio de esta sección, resultando en la distribución de densidad normal estandarizada o función de densidad tipificada, como se describe en la Ecuación 4.

Ecuación 4: Función de densidad normal estandarizada.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Es relevante señalar que, para cualquier variable que sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, se puede calcular a Z^2 la cual sigue una distribución normal estándar, esta propiedad es altamente útil en la práctica, ya que para una distribución $N(0,1)$ se dispone de las llamadas *tablas Z* (Figura 2). De acuerdo con Díaz y Fernández (2001), a partir de estas tablas, se puede obtener fácilmente la probabilidad de observar un dato que sea menor o igual a un determinado valor Z . Esto facilita la resolución de problemas de probabilidad relacionados con el comportamiento de variables que se sabe, o se asume, que siguen una distribución aproximadamente normal.

² Z se puede calcular en cualquier caso que tengamos una variable que cumpla la condición con la Ecuación 3.

Ilustración 3

Tabla Z. Área bajo la curva normal estandarizada.

z _i	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,3	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,2	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010
-2,9	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013
-2,8	0,0025	0,0024	0,0024	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019	0,0019
-2,7	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0046	0,0045	0,0043	0,0042	0,0041	0,0040	0,0039	0,0037	0,0036	0,0035
-2,5	0,0062	0,0060	0,0058	0,0057	0,0055	0,0053	0,0052	0,0050	0,0049	0,0047
-2,4	0,0081	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063
-2,3	0,0107	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084
-2,2	0,0139	0,0135	0,0132	0,0128	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0178	0,0174	0,0170	0,0165	0,0161	0,0157	0,0153	0,0150	0,0146	0,0142
-2,0	0,0227	0,0222	0,0216	0,0211	0,0206	0,0201	0,0196	0,0192	0,0187	0,0183
-1,9	0,0287	0,0280	0,0274	0,0268	0,0261	0,0255	0,0249	0,0244	0,0238	0,0232
-1,8	0,0359	0,0351	0,0343	0,0336	0,0328	0,0321	0,0314	0,0307	0,0300	0,0293
-1,7	0,0445	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0400	0,0392	0,0383	0,0375	0,0367
-1,6	0,0547	0,0536	0,0526	0,0515	0,0505	0,0494	0,0484	0,0474	0,0464	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0642	0,0630	0,0617	0,0605	0,0593	0,0582	0,0570	0,0559
-1,4	0,0807	0,0792	0,0778	0,0763	0,0749	0,0735	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0950	0,0934	0,0917	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0837	0,0822
-1,2	0,1150	0,1131	0,1112	0,1093	0,1074	0,1056	0,1038	0,1020	0,1002	0,0985
-1,1	0,1356	0,1334	0,1313	0,1292	0,1271	0,1250	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170

Nota. Tomada de Quevedo Ricardi, F. (2011, mayo 1). Tabla de distribución normal [Imagen].

Medwave. <https://www.medwave.cl/series/MBE04/5033.html>

2.1.3 Propiedades de la distribución normal

Según Díaz y Fernández (2001), la distribución normal tiene varias propiedades importantes, de los cuales, vale la pena destacar las siguientes para el propósito de la presente investigación:

- I. Posee una única moda, que coincide con su media y su mediana.
- II. La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello que cualquier valor en los reales sea teóricamente posible, además de presentar un área total bajo la curva de 1.

- III. Es simétrica con respecto a la media, lo que permite de observar variables con probabilidades de un 50% mayor o menor que la media.
- IV. La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación estándar. A mayor desviación, más aplanada será la curva de densidad (situación heterogénea). A menor desviación, más compacta será la curva de densidad (situación homogénea).

2.2 Marco Teórico

Al pasar del tiempo, numerosos estudios en investigación educativa han explorado el concepto de modelo de competencias profesionales docentes. En el ámbito de la educación matemática, en particular, existen diversos modelos que analizan la efectividad, el éxito y la calidad de la labor docente en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Marbán y Méndez, 2015). Al respecto, Pino-Fan y Godino, (2015) argumentan que uno de los temas que ha captado mayor interés entre investigadores, formadores de profesores y administraciones educativas es la identificación del conjunto de conocimientos, tanto matemáticos como didácticos, que un docente de matemáticas debe poseer para asegurar una práctica de enseñanza lo más idónea posible. Finalmente, los autores agregan que, en el marco de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, diferentes modelos propuestos intentan definir y detallar los elementos que conforman el conocimiento requerido por los profesores de matemáticas para desempeñarse eficientemente y apoyar el aprendizaje de sus alumnos.

Con el fin de satisfacer la necesidad de un modelo que aborde la competencia profesional docente y pueda comprender el conocimiento especializado en matemáticas, se hace necesario emplear el modelo MTSK planteado por Aguilar-González et al. (2018). Este enfoque se centra

en determinar los conocimientos fundamentales que un profesor de matemáticas debe dominar para desempeñar su labor de manera eficaz.

A continuación, se procederá, de manera sucinta, a definir cada subdominio del modelo MTSK, esto a posteriori de haber explorado su naturaleza y sus propuestas. Para concluir, se realizará una reflexión sobre por qué se ha seleccionado este modelo como marco teórico para este trabajo de investigación.

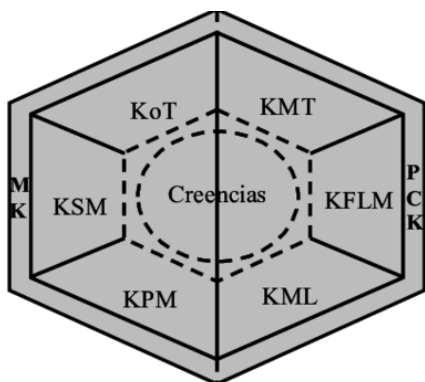
2.2.1 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge-MTSK) se presenta como un instrumento de investigación que facilita la identificación precisa de los dominios del conocimiento. En un inicio, se creó para refinar y ampliar el modelo MKT, considerando su carácter especializado en su totalidad en lugar de centrarse exclusivamente en uno de sus subdominios. Este enfoque se dirige hacia la particularidad del conocimiento necesario de los profesores de matemáticas al enseñar el contenido, integrando también sus creencias respecto a las matemáticas y su enseñanza (Rojas et al., 2015).

El modelo MTSK inicia a partir de dos dominios fundamentales: *conocimiento del contenido matemático* (MK) que se componen por tres subdominios y *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) compuesto por tres subdominios. (véase la Ilustración 4). Seguidamente, se abordarán de manera concisa los subdominios correspondientes al modelo previamente mencionado acorde con la definición dada por Rojas et al. (2015). En lo que compete a esta investigación, solo el conocimiento de los temas (KoT) será objeto de estudio.

Ilustración 4

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).



Nota. Tomada de Rojas et al. (2015, p. 6)

Según lo indica Rojas et al. (2015), el *conocimiento de los temas* (*Knowledge of Topics-KoT*) implica comprender los conceptos y procesos matemáticos, así como sus bases teóricas. El KoT se manifiesta en la dominación de las matemáticas; la familiaridad con los aspectos observables relacionados con el tema; la comprensión de los diversos significados del tema; y la familiaridad con ejemplos específicos en áreas particulares de un tema matemático, entre otros aspectos. Este subdominio incluye las siguientes categorías de conocimiento.

- La categoría *fenomenología*, la cual exhibe una naturaleza dual. Comprendida entre, el saber del profesor sobre los aspectos matemáticos que subyacen a los conceptos, así como sobre las matemáticas en su conjunto. Por otro lado, implica la comprensión de la aplicación y utilidad de los temas o conceptos tratados en el aula (Flores-Medrano et al., 2014).
- La categoría de las *propiedades y fundamentos*, en donde se contempla el conocimiento que el profesor posee respecto a las características y bases que posibilitan la definición de un concepto matemático (Flores-Medrano et al., 2014).

- La categoría de los *registros de representación*, en el que se incluye el conocimiento del profesor asociado a las diferentes maneras en que se representa un objeto matemático, ya sea por medio de gráficas, de forma numérica, por medio del lenguaje natural, entre otros (Flores-Medrano et al., 2014).
- La categoría de *definiciones* se enfoca en la comprensión exhaustiva de las características distintivas que posibilitan la definición de un objeto particular, así como en las diferentes metodologías utilizadas por el educador para establecer dichas definiciones (Flores-Medrano et al., 2014).

Tal como indican Rojas et al. (2015), el *conocimiento de la estructura de las matemáticas* (*Knowledge of the Structure of Mathematics-KSM*) representa una perspectiva integral de la disciplina matemática, abarcando la interrelación y la complejidad intrínseca del contenido matemático.

El *conocimiento de la práctica matemática* (*Knowledge of the Practice of Mathematics-KPM*) engloba los métodos y procedimientos propios de la disciplina matemática. Este subdominio contempla el entendimiento de las formas en que se conoce, crea y produce el conocimiento matemático (Rojas et al., 2015).

Como afirman Rojas et al. (2015) el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (*Knowledge of Mathematics Teaching-KMT*) considera la habilidad del docente para elegir representaciones y materiales pertinentes para enseñar un concepto o procedimiento matemático, así como la destreza para seleccionar ejemplos y tareas matemáticas adecuadas para el proceso de enseñanza.

El *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of Features of Mathematics Learning-KFLM)* se refiere al conocimiento que posee el profesor sobre el proceso cognitivo de los alumnos en concordancia con las tareas matemáticas, así como a su capacidad para generar aprendizaje efectivo en matemáticas (Rojas et al., 2015).

El *conocimiento de los estándares de aprendizaje (Knowledge of Mathematics Learning Standards-KMLS)* alude a la conocimiento de los temas estipulados en los estándares de enseñanza para los diversos niveles educativos. Esto implica la familiarización con los temas, metas, directrices pedagógicas, así como los materiales y recursos apropiados para cada nivel de instrucción (Rojas et al., 2015).

Para finalizar, en este trabajo de grado, se ha optado por analizar el conocimiento especializado de los profesores en formación desde el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT) dentro del modelo, MTSK, debido a su enfoque (las categorías fundamentadas por Flores-Medrano et al., 2014) en la comprensión conceptual, la fenomenología, las propiedades y fundamentos y los registros de representación del contenido matemático. La observación y análisis de este conocimiento se realiza a través de un cuestionario estructurado que permite indagar en la manera en que los participantes movilizan estos elementos al enfrentarse a situaciones problemáticas relacionadas con la distribución normal.

Capítulo III

3.1 Marco Metodológico

El término “cualitativo” se utiliza frecuentemente en diversos contextos con variados significados. Fundamentalmente, se refiere a la exploración de las características esenciales de un sujeto. Por ejemplo, al plantear interrogantes sobre la esencia de algo, “¿qué es?” o “¿cómo es?”, la respuesta conlleva la identificación y descripción de las cualidades distintivas del objeto en cuestión (Salazar-Escorcía, 2020). A continuación, se presentarán múltiples definiciones de investigación cualitativa elaboradas por diversos autores.

En principio, Domínguez (2000) indica que los enfoques cualitativos se basan en la premisa fundamental de que el mundo social está imbuido de significados y símbolos. Desde esta perspectiva, la intersubjetividad emerge como un componente esencial en la investigación cualitativa y como el punto de partida para una comprensión reflexiva de los fenómenos examinados. Además, Báez (2009) define la investigación cualitativa como un conjunto de diseños de investigación que generan descripciones a partir de observaciones que incluyen diversas metodologías (entrevistas, registros escritos, entre otras). Por último, según Vera (2015), la investigación cualitativa se enfoca en analizar la calidad de las actividades, relaciones, problemas, medios, materiales o herramientas en un contexto o situación específica.

De acuerdo con Camargo (2021) se define a la metodología de investigación como el “conjunto conformado por un enfoque, una o varias aproximaciones, una o varias estrategias investigativas, un conjunto de recursos y una fundamentación teórica específica que genera la base racional para orientar la investigación de principio a fin” (p.18). Simultáneamente, la autora indica que se pueden identificar tres aproximaciones de acuerdo con el interés del investigador: la antropológica, la colaborativa-social y la interpretativa o hermenéutica que busca explorar en

profundidad los significados que tanto estudiantes, profesores como otros actores educativos atribuyen a objetos y procesos (matemáticos), así como a la esencia de las prácticas educativas y de evaluación; los aspectos sociales y culturales que influyen en la configuración de la cultura escolar, entre otros elementos.

Finalmente, dado que la investigación cualitativa se enfoca en lograr una comprensión profunda y detallada de las características y atributos de los sujetos de estudio. Y, teniendo en cuenta que la investigación cualitativa se centra en la exploración de experiencias, percepciones y significados desde la óptica de los participantes, este enfoque metodológico se considera como el más apropiado, ya que el objetivo de esta investigación se basa en comprender cómo los futuros profesores entienden y aplican procesos matemáticos sobre la distribución normal.

3.2 Estudio de Caso

Según Stake (1998), el estudio de caso implica examinar la singularidad y la complejidad de una situación específica, con el propósito de entender cómo opera dentro de contextos relevantes. Asimismo, el autor establece tres tipos de estudios de casos; a) el *intrínseco*, el cual se centra en entender algo específico gracias a su relevancia directa o la necesidad de investigarlo; b) el *instrumental*, que se realiza con el propósito de investigar una problemática más amplia que, por medio del análisis de un caso particular, se puede proporcionar información crucial para comprender un problema en su totalidad; y c) el *colectivo*, que implica el análisis simultáneo de múltiples casos relacionados con una problemática en común.

Finalmente, dada la naturaleza intrínseca del estudio de caso y su idoneidad para esta investigación, su utilización reviste una importancia fundamental. Se opta por este diseño de investigación, no solo por su pertinencia metodológica, sino también por su capacidad de análisis detallado. Se centrará específicamente en un estudio de caso instrumental, enfocándose en

profesores en formación que comparten características comunes presentes en la licenciatura en matemáticas. El objetivo es comprender el conocimiento matemático de estos futuros profesores, para así, proporcionar recomendaciones pertinentes para el curso de estadística.

3.3 Elementos de significado ostensivos e intensivos

Los elementos de significado ostensivos e intensivos, según lo descrito por Tauber (2001), constituyen una herramienta fundamental para analizar y comprender conceptos matemáticos abstractos. Los elementos ostensivos se manifiestan a través de representaciones materiales, como símbolos, gráficas, tablas y expresiones matemáticas, que permiten hacer visibles y operables objetos matemáticos abstractos. Estas representaciones, como la notación $N(\mu, \sigma)$ o las gráficas de funciones de densidad, actúan como puentes entre lo abstracto y lo tangible, facilitando tanto la comprensión como la manipulación de conceptos complejos. Por otro lado, los elementos intensivos se refieren a los conceptos abstractos subyacentes, como las propiedades y relaciones matemáticas, por ejemplo, la simetría, la centralidad de la media y la desviación estándar como parámetros de la distribución normal, y su carácter unimodal. Estos elementos intensivos representan el núcleo conceptual que sustenta la actividad matemática, complementando la funcionalidad de los ostensivos.

Finalmente, la integración de los elementos ostensivos e intensivos en el marco de análisis propuesto en este trabajo de grado permitirá realizar una evaluación precisa y estructurada de los conocimientos matemáticos de los futuros docentes en el contexto del razonamiento probabilístico. Este enfoque posibilita no solo identificar las representaciones externas que los participantes utilizan al operar con conceptos de la distribución normal, sino también evaluar la profundidad conceptual que demuestran al referirse a propiedades abstractas inherentes a esta. Dado que los ítems del cuestionario están diseñados para articular ambos tipos

de elementos, el análisis proporcionará una visión integral del razonamiento probabilístico de los participantes, lo que resulta esencial para abordar las dificultades específicas en la enseñanza de la probabilidad y para proponer estrategias didácticas fundamentadas y efectivas en la formación docente.

3.4 Instrumentos y participantes

En esta investigación se pretende identificar el conocimiento especializado en matemáticas que poseen cuatro profesores en formación en relación con la distribución normal. Para alcanzar este objetivo, se utilizará inicialmente un instrumento de recolección de datos, concretamente un cuestionario³ de conocimientos matemáticos. Posteriormente, se procederá al análisis de la información recopilada, empleando rejillas de categorías de conocimiento relacionadas con el “*Knowledge of Topics*” (KoT), las cuales han sido previamente descritas.

Para este estudio, se espera trabajar con cuatro futuros docentes, quienes ya han cursado y aprobado el curso de estadística AEM de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, sede Meléndez. La selección de los sujetos se realizará mediante invitaciones directas en los cursos de la carrera. Asimismo, se proporcionará información a los participantes sobre los objetivos del estudio y se les solicitará su consentimiento informado para su participación.

3.5 Intencionalidad del instrumento

Para la elaboración del cuestionario, se consideraron los siguientes temas: análisis de gráficas, cálculo de probabilidades, propiedades de la distribución normal y el uso de la tabla Z. Estos contenidos se enmarcan en las categorías propuestas por Flores-Medrano et al. (2014),

³ El cuestionario se fundamenta en la premisa de generar interés por la respuesta y fomentar la reflexión individual. Mediante la recopilación de respuestas discretas e individuales, se busca delinear el entendimiento del objeto de estudio (Meneses, 2016).

correspondientes al subdominio del conocimiento temático, el cual, de acuerdo con Rojas et al. (2015), requiere comprender tanto los conceptos como los procesos matemáticos, así como sus fundamentos teóricos. Este conocimiento se manifiesta en el dominio de las matemáticas, la comprensión de los distintos significados asociados a los temas (significado formal-matemático, significado aplicado o estadístico, significado didáctico) y la familiaridad con ejemplos específicos.

La siguiente tabla organiza, de manera clara y estructurada, los temas abordados en el cuestionario, junto con sus respectivas preguntas y categorías, para facilitar la comprensión del lector.

Tabla 1

Temas, preguntas y categorías del cuestionario.

TEMAS	PREGUNTAS	CATEGORÍAS
Análisis de gráficas.	1, 5.	Registros de representación, propiedades y fundamentos.
Cálculo de probabilidades.	10, 11 y 12.	Definiciones, propiedades y fundamentos.
Propiedades de la distribución normal.	2, 4, 8 y 9.	Fenomenología, propiedades y fundamentos.
Uso de la tabla Z y procesos de estandarización.	3, 6 y 7	Definiciones, fenomenología, propiedades y fundamentos.

A continuación, se adentrará en la explicación de los temas utilizados para el diseño de actividades, se presentará la intencionalidad de las preguntas y la explicación de las opciones

correctas e incorrectas. Esta profundización se fundamentará en la idea de ser matemáticamente competente presentado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2014) en el marco teórico de las pruebas PISA, en el cual definen el ser competente matemáticamente como “la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OECD, 2004, p. 3; OECD, 2003, p. 24), citado en (Rico, 2006).

3.5.1 Análisis de gráficas

Intencionalidad: El objetivo de las preguntas de este tema es evaluar la capacidad de los profesores en formación para interpretar datos de gráficas de manera efectiva, así como determinar su nivel de competencia en el manejo de diferentes registros de representación, específicamente en la transición de tablas de información a la construcción e interpretación de gráficas. Además, se busca promover el desarrollo de habilidades de razonamiento crítico, ya que los docentes en formación deben razonar sus elecciones no solo en función de las características visuales de las gráficas, sino también a partir de un análisis riguroso de los datos considerados, lo que implica competencias tanto de interpretación como de argumentación.

Precisamente, el diseño de la actividad busca que los futuros docentes pongan en evidencia su comprensión de las características fundamentales de la distribución normal en su forma gráfica, como son su forma de campana, su simetría y la forma en que valores como el promedio y la desviación estándar, influyen en su representación gráfica. Esta parte de las preguntas busca responder a los objetivos planteados haciendo uso de diferentes registros de representación y propiedades de la distribución normal, el analizar, desde las categorías

propuestas por Flores-Medrano et al. (2014) (registros de representación, propiedades y fundamentos) del subdominio *conocimiento de los temas* KoT, aspectos claves del conocimiento matemático que tienen los profesores en formación para la enseñanza de la distribución normal.

Preguntas involucradas en el análisis de gráficas:

La Tabla 2 y

Tabla 3 presentan las puntuaciones promedio y las desviaciones estándar obtenidas los estudiantes en relación con las competencias y contenidos evaluados en el componente de razonamiento cuantitativo.

Tabla 2

Resultados en las competencias de razonamiento cuantitativo definidas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES).

Competencia	Promedio (%)	Desviación estándar (%)
Interpretación	49,63	24,2
Formulación y ejecución	47,78	23,5
Argumentación	42,54	20,62

Tabla 3

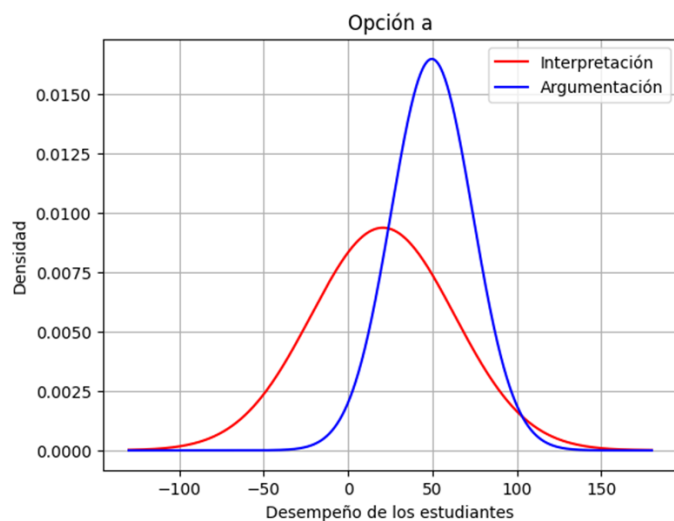
Resultados en los contenidos de razonamiento cuantitativo definidos por el ICFES.

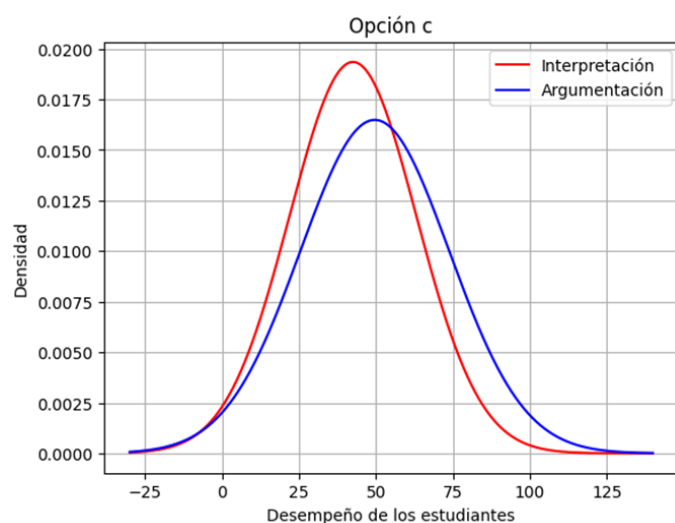
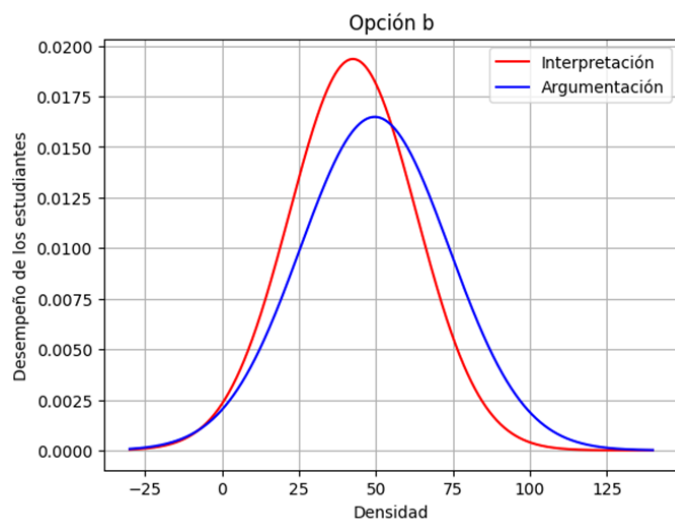
Contenido	Promedio (%)	Desviación estándar (%)
------------------	-------------------------	------------------------------------

Álgebra y		
cálculo	44,71	22,93
Estadística	50,42	22,41
Geometría	44,36	25,14

**CONTESTA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE ACUERDO CON LA
INFORMACIÓN DE LAS TABLAS 2 Y 3.**

Pregunta 1. Asumiendo que el desempeño de los estudiantes en “**Interpretación**” y “**Argumentación**” siguen una distribución normal. Según la información presentada en la tabla 2 ¿Cuál de las siguientes gráficas de distribución normal representa el desempeño de los estudiantes en las competencias de interpretación y argumentación?





Posibles respuestas:

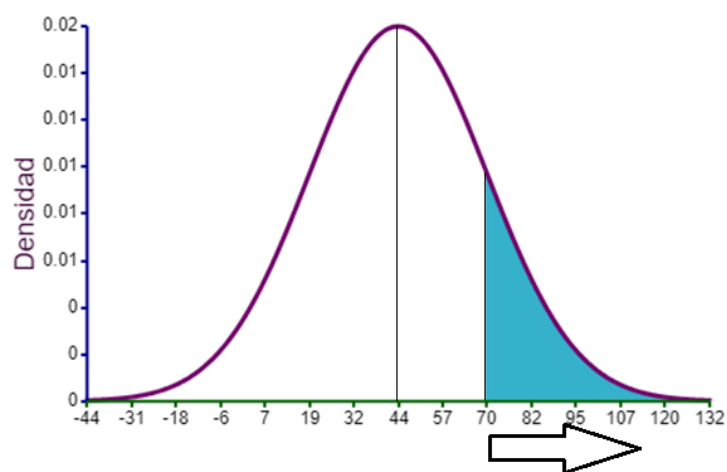
Opción a. La gráfica roja presenta un promedio notablemente menor y una dispersión significativamente mayor en comparación con la gráfica azul, lo que sugiere una desviación estándar más alta. No obstante, al contrastar estos resultados con los datos de la Tabla 1, se evidencia una inconsistencia. Los promedios y las desviaciones estándar de las variables argumentación e interpretación no muestran diferencias tan marcadas, por lo que esta opción resulta incorrecta.

Opción b. En esta opción se muestran dos curvas de Gauss correspondientes a los datos de la Tabla 2. Sin embargo, el error radica en la etiqueta del eje x, puesto que en lugar de “densidad”, debería emplearse un término que refleje directamente la variable medida, es decir, el desempeño de los estudiantes en las competencias de interpretación y argumentación. Esto se debe a que, en estadística, la densidad de probabilidad se refiere a la altura de la curva en un punto específico de la distribución, lo que representa la probabilidad relativa de que una observación se encuentre en un intervalo muy pequeño alrededor de dicho punto. Por lo tanto, esta opción es incorrecta.

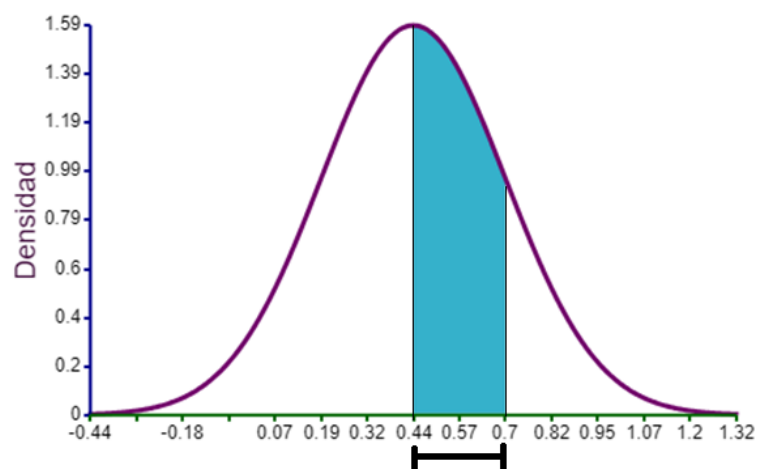
Opción c. En este apartado se presentan dos curvas gaussianas: la roja, que representa la función de interpretación, y la azul, representa la función de argumentación. Al analizar los promedios, se observa que el promedio de argumentación es mayor que el de interpretación. Además, la gráfica azul es más ancha que la roja, lo que sugiere una mayor dispersión de los datos (desviación estándar). Al comparar estos resultados con los datos de la Tabla 2, se confirma una coherencia entre las gráficas y los datos, por lo que esta opción es correcta.

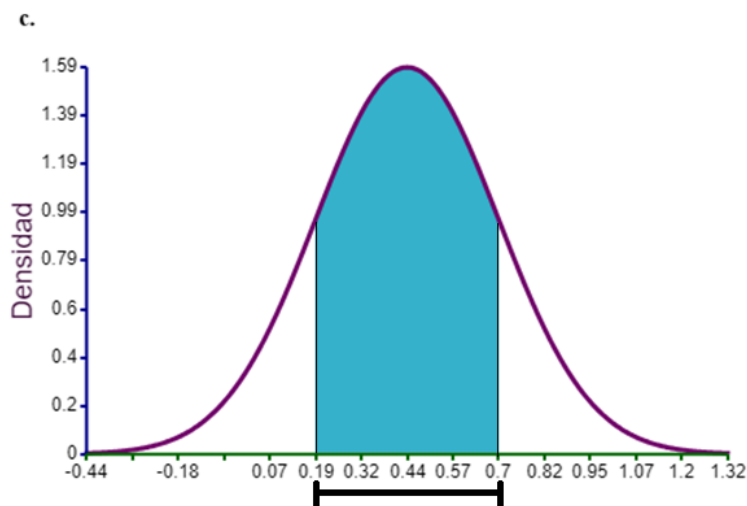
Pregunta 5. Suponiendo que las calificaciones en "Geometría" siguen una distribución normal estándar, ¿Cuál de las siguientes áreas bajo la curva (secciones sombreadas) representa la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar haya obtenido una calificación superior a una desviación estándar (25.14) por encima del promedio?

a.



b.





Posibles respuestas:

Opción a. En esta opción se tuvo en cuenta el área bajo la curva desde $\mu + \sigma = 69,5$ hasta infinito, lo cual es correcto.

Opción b. En esta opción se tuvo en cuenta un área desde $\mu = 0,443$ hasta $\mu + \sigma = 0,695$, lo cual es incorrecto.

Opción c. En esta opción se tuvo en cuenta un área desde $\mu - \sigma = 0,192$ hasta $\mu + \sigma = 0,695$, lo cual es incorrecto.

3.5.2 Cálculo de probabilidades

Intencionalidad. El propósito de las preguntas en este tema es identificar el nivel de comprensión de los docentes en formación sobre las propiedades involucradas en el cálculo de probabilidades en la distribución normal. Entre estas propiedades se incluyen: reconocer que el máximo de la función de densidad corresponde a la media, la cual coincide con el eje de simetría; identificar que los puntos de inflexión de la curva se encuentran en $X = \mu \pm \sigma$; y entender que si $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, el área total bajo la curva es siempre igual a 1. Además, se evalúa la

capacidad de calcular probabilidades a cola derecha, es decir, que $P(x_1 < X)$ es equivalente a $1 - P(X < x_1)$.

Asimismo, se pretende evaluar y describir el razonamiento probabilístico de los futuros docentes, así como su habilidad para resolver problemas que impliquen el cálculo de probabilidades mediante diversas estrategias y herramientas. Esta evaluación se llevará a cabo en un contexto cercano y real, como los resultados del simulacro de las pruebas Saber Pro y TyT. Además, se pretende analizar su dominio sobre el uso del cálculo de probabilidades dentro del marco de la distribución normal, así como su capacidad para interpretar situaciones complejas, evaluar la evidencia disponible y derivar conclusiones fundamentadas en la probabilidad.

Este análisis permitirá identificar si los futuros docentes presentan dificultades documentadas previamente en estudios como el de González et al. (2018). En su investigación, los autores señalan diversos desafíos entre los docentes en formación, especialmente en relación con la distribución normal. Algunas de las dificultades observadas incluyen errores al proporcionar los posibles valores de la función de probabilidad, dificultades para calcular la desviación estándar a partir de la gráfica y los puntos de inflexión, confusiones respecto a la naturaleza continua de la variable aleatoria X , y una comprensión limitada del significado de la desviación estándar. Este tipo de preguntas resulta clave, ya que permiten profundizar en el entendimiento de los procedimientos y argumentos necesarios para resolver problemas probabilísticos.

Preguntas involucradas en el cálculo de probabilidades:

DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE TABLA, RESPONDE LAS PREGUNTAS QUE SE PRESENTAN A CONTINUACIÓN

La tabla 4 presenta el promedio y desviación estándar que tuvieron las diferentes facultades de la Universidad del Valle en el simulacro de las Pruebas Saber Pro y TyT realizado en el 2021.

Tabla 4

Resultados generales por facultades.

FACULTAD	PROMEDIO	DESVIACIÓN
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS	209.6	50.13
HUMANIDADES	134.2	35.66
CIENCIAS SOCIALES Y ECONÓMICAS	161.3	10.61
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA	130.7	16.04
ARTES INTEGRADAS	110	48.22
SALUD	153.3	11.08
INGENIERÍA	150.4	48.21
CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN	125.1	9.48

Pregunta 10. Asumiendo que los puntajes en la facultad de Ingeniería siguen una distribución normal con un promedio de 150.4 y una desviación estándar de 48.21, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200?

- La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200 es del 0.3516.

- b. La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200 es del 84.83%.
- c. La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200 es del 0.1517.

Posibles respuestas:

Opción a. La respuesta corresponde a un cálculo en el que se considera a X en el intervalo entre 150 y 200, por ende, la respuesta es incorrecta.

Opción b. La respuesta corresponde a un cálculo en el que se considera a X como los valores inferiores a un puntaje de 200; por lo tanto, es incorrecta.

Opción c. La respuesta tiene en cuenta los valores superiores a 200 para realizar la tipificación de la variable, por lo que se considera correcta.

Pregunta 11. Andrea afirma que la probabilidad de que un estudiante de la facultad de Ciencias de la Administración obtenga un puntaje mayor a 140 es 0.16. Para llegar a esta conclusión, realiza los siguientes pasos:

- i. Calcula el puntaje Z para 140:

$$Z = \frac{140 - 125.1}{9.48} = \frac{14.9}{9.48} = 1.57$$

- ii. Usa una tabla de distribución normal para encontrar la probabilidad acumulada correspondiente a $Z = 1.57$, obteniendo 0.9418.
- iii. Resta esta probabilidad de 1:

$$P(X > 140) = 1 - 0.9418 = 0.0582$$
- iv. Finalmente, Andrea concluye que la probabilidad es 0.16.

¿En qué paso cometió un error Andrea?

- a. Paso 1: El cálculo del puntaje Z es incorrecto.
- b. Paso 3: Debió sumar la probabilidad en lugar de restarla.
- c. Paso 4: Andrea concluye una probabilidad diferente a la obtenida en el cálculo.

Posibles respuestas:

Opción a. Esta afirmación es incorrecta. Andrea ha aplicado correctamente la fórmula para calcular el puntaje Z , la cual es: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Sustituyendo los valores correspondientes, Andrea obtiene: $Z = \frac{140 - 125.1}{9.48}$

El cálculo se realizó adecuadamente y el resultado es coherente con la fórmula utilizada. Por lo tanto, no hay error en esta etapa del proceso.

Opción b. En la distribución normal, para calcular la probabilidad de que una variable aleatoria sea mayor que un cierto valor, se utiliza la siguiente expresión:

$$P(X > 140) = 1 - P(Z < 1.57)$$

En este caso, Andrea correctamente resta la probabilidad acumulada hasta $Z = 1.57$ de 1, ya que está interesada en encontrar la probabilidad complementaria. La resta es el procedimiento adecuado y corresponde a la interpretación correcta de la tabla de la distribución normal. Por lo tanto, no hay error en este paso.

Opción c. Después de realizar los cálculos, Andrea obtiene que: $P(X > 140) = 0.0582$

Sin embargo, concluye erróneamente que esta probabilidad es 0.160. Esta discrepancia indica que hay un fallo en la deducción. Por ende, la conclusión de Andrea no se alinea con el resultado calculado, lo que representa un error en su análisis.

Pregunta 12. Luisa quiere calcular la probabilidad de que un estudiante de la facultad de Salud obtenga un puntaje entre 140 y 160. Realiza el siguiente procedimiento:

- i. Calcula el puntaje Z para 140:

$$Z = \frac{140 - 153.3}{11.08} = -1.2$$

- ii. Calcula el puntaje Z para 160:

$$Z = \frac{160 - 153.3}{11.08} = 0.6$$

- iii. Usa la tabla de la distribución normal para obtener las probabilidades acumuladas:

$$P(Z = -1.2) = 0.1151$$

$$P(Z = 0.6) = 0.7257$$

- iv. Suma ambas probabilidades:

$$P(140 < X < 160) = 0.7257 + 0.1151 = 0.8408$$

- v. Finalmente, concluye que la probabilidad es del 84%.

¿En qué parte del procedimiento se encuentra el error?

- Paso 1: El cálculo del puntaje Z para 140 es incorrecto.
- Paso 4: Debió restar las probabilidades en lugar de sumarlas.
- Paso 5: La conclusión es correcta, la probabilidad es 84%.

Posibles respuestas:

Opción a. Esta afirmación es incorrecta. Luisa aplica correctamente la fórmula para calcular el puntaje Z , que es: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$$\text{Para el caso de } X = 140; Z = \frac{140 - 125.1}{9.48} = -1.2$$

Este cálculo es válido y no presenta errores. Por lo tanto, no hay motivo para considerar este paso incorrecto.

Opción b. Para calcular la probabilidad de que un estudiante obtenga un puntaje entre dos valores (en este caso, 140 y 160), Luisa debería restar las probabilidades acumuladas en lugar de sumarlas. El procedimiento correcto para calcular la probabilidad entre dos puntajes a y b es: $P(a < X < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$

Aplicando esto a los valores de Luisa:

$$P(140 < X < 160) = P(Z < 0.6) - P(Z < -1.2) = 0.7257 - 0.1151 = 0.6106$$

Por lo tanto, Luisa comete un error al sumar las probabilidades, lo que lleva a una conclusión incorrecta.

Opción c. Luisa calcula la probabilidad de que un estudiante obtenga un puntaje entre 140 y 160 al sumar las probabilidades acumuladas correspondientes a los puntajes Z de 140 y 160. Este procedimiento es incorrecto. La probabilidad acumulada para un rango entre dos valores en una distribución normal debe calcularse restando la probabilidad acumulada menor de la mayor, no sumando ambas.

3.5.3 Propiedades de la distribución normal

Intencionalidad. La intencionalidad de las preguntas en este tema es evaluar la profundidad y solidez del conocimiento matemático de los profesores en formación en relación con las propiedades de la distribución normal. Se busca determinar si comprenden los atributos inherentes a la distribución normal y si aplican estas propiedades en situaciones prácticas. Esta intención es particularmente relevante al considerar la categoría de fenomenología expuesta por Flores-Medrano et al. (2014), que se encuentra en el subdominio del conocimiento de los temas (KoT). Esta categoría aborda el saber del profesor sobre aspectos matemáticos que subyacen en los conceptos y la comprensión de la aplicación y utilidad de los temas y/o conceptos trabajados en clase.

Por otra parte, se pretende evaluar si los docentes en formación pueden identificar propiedades de la distribución normal, como la simetría alrededor de la media, la relación entre la media, la mediana y la moda, y la definición de la desviación estándar, resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades utilizando únicamente propiedades inherentes de la distribución normal, demostrando un dominio en las propiedades y fundamentos que rodean el concepto de dicha distribución y, finalmente, se desea analizar si los docentes en formación reconocen la naturaleza dual del objeto matemático, tanto como una función de modelamiento matemático abstracto como una herramienta útil para describir y analizar fenómenos aleatorios en contextos cotidianos.

Preguntas involucradas en las propiedades de la distribución normal:

Pregunta 2. Si asumimos que las calificaciones en la competencia de "Interpretación" siguen una distribución normal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA?

- a. La mayoría de los estudiantes obtuvo un desempeño superior al promedio en la competencia de Interpretación.

- b. La desviación estándar indica que los desempeños de los estudiantes en la competencia de Interpretación se encuentran dispersos alrededor del promedio.
- c. Un estudiante que obtuvo una calificación cercana al percentil 50 en la competencia de Interpretación, obtuvo un desempeño cercano al promedio.

Posibles respuestas:

Opción a. En esta opción, al afirmar que la mayoría de los estudiantes obtuvo una calificación superior al promedio implicaría una distribución normal sesgada hacia la izquierda. Sin embargo, en una distribución normal, la mayoría de los datos se concentran alrededor de la media. Si el promedio es del 0.4963, no se puede asegurar que la mayoría haya obtenido una calificación superior sin más información. Es posible que la distribución esté ligeramente sesgada hacia valores más altos, pero esto no es concluyente. Por lo tanto, esta afirmación es incorrecta.

Opción b. Afirmar que las calificaciones están "muy dispersas" basándose únicamente en una desviación estándar del 0.242 es precipitado. La desviación estándar proporciona una medida de dispersión, pero el valor de la Tabla 1, por sí solo, no basta para calificar la dispersión como "muy alta". Sería necesario conocer el valor absoluto de la desviación media absoluta (DMA) para realizar una afirmación más precisa. Por ello, esta opción es incorrecta.

Opción c. En esta opción, se debe tener en cuenta un concepto fundamental de la estadística: en una distribución normal estandarizada, el percentil 50 coincide con el eje de simetría y con la media. Dado esta propiedad, se puede afirmar con certeza que un estudiante que obtuvo una calificación cercana al percentil 50 alcanzó un desempeño cercano al promedio. Por lo tanto, esta opción es correcta.

Pregunta 4. Si se desea comparar el desempeño de los estudiantes en "Álgebra y Cálculo" y "Estadística", ¿cuál de los siguientes indicadores sería MÁS ÚTIL para determinar cuál de las dos competencias presentó mayor homogeneidad en las calificaciones?

- a. Promedio
- b. Desviación estándar
- c. Rango.

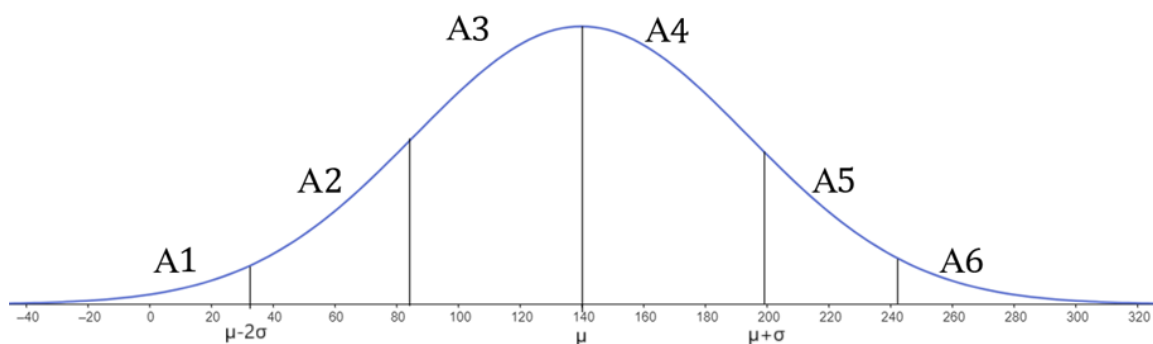
Posibles respuestas:

Opción a. El promedio representa el valor central de un conjunto de datos, pero no proporciona información sobre la dispersión o variabilidad de estos. Por lo tanto, no es el indicador más adecuado para evaluar la homogeneidad de las calificaciones en ambas asignaturas.

Opción b. La desviación estándar mide la dispersión de los datos en torno a la media. Una desviación estándar baja indica una mayor homogeneidad, ya que los datos están más concentrados alrededor del promedio. Por lo tanto, la desviación estándar es el indicador más apropiado para comparar la homogeneidad de las calificaciones en ambas asignaturas.

Opción c. El rango, entendido como la diferencia entre el valor máximo y el mínimo, ofrece una idea general de la dispersión de los datos. Sin embargo, es una medida menos precisa que la desviación estándar, ya que es sensible a los valores extremos. Aunque puede ser útil en ciertos contextos, no es el indicador más adecuado para evaluar la homogeneidad, pues no refleja con suficiente detalle cómo se distribuyen los valores en el conjunto de datos.

Pregunta 8. La siguiente Ilustración muestra una campana de Gauss la cual modela el desempeño global de los estudiantes representados en gráfica de distribución normal simétrica con una media de 140 y una desviación estándar de 54. Además, se detallan las áreas bajo la curva en la función de densidad. De acuerdo con la información anterior, ¿es posible inferir el desempeño correspondiente de los estudiantes ubicados en A4?



- No es posible inferir el desempeño de los estudiantes en A4, ya que la gráfica solo presenta áreas y no se incluyen los valores específicos de los estudiantes.
- El desempeño de los estudiantes en A4 corresponde a aquellos que obtuvieron calificaciones superiores a dos desviaciones estándar por encima de la media.
- El desempeño de los estudiantes en A4 corresponde a aquellos cuyo puntaje está comprendido entre la media (μ) y una desviación estándar por encima de la media ($\mu + \sigma$), lo que incluye a aproximadamente el 34.1% de los estudiantes.

Posibles respuestas:

Opción a. Esta opción es incorrecta porque, a pesar de que la gráfica muestra áreas, la zona A4 está claramente definida como el área alrededor de la media (μ), lo que permite inferir que los estudiantes ubicados en esta área tienen un desempeño cercano a la media. En una distribución normal, el desempeño en A4 corresponde aproximadamente al 34.1% de los estudiantes con puntuaciones que oscilan entre la media y una desviación estándar por encima de

la media ($\mu + \sigma$). Por tanto, es posible hacer inferencias sobre los estudiantes en esta área, lo que invalida esta afirmación.

Opción b. Esta opción es incorrecta porque no refleja correctamente la ubicación de A4 en la gráfica. Según la gráfica, A4 corresponde al área ubicada entre la media (μ) y una desviación estándar por encima de la media ($\mu + \sigma$). En cambio, los estudiantes con calificaciones superiores a dos desviaciones estándar por encima de la media se ubicarían en A6, no en A4. Por lo tanto, esta opción está mal ubicada dentro del contexto de la distribución normal.

Opción c. Esta opción es correcta porque se ajusta a la interpretación precisa de la curva de distribución normal. A4 representa el área entre la media (140) y una desviación estándar por encima de la media ($\mu + \sigma = 140 + 54 = 194$). En una distribución normal, esta área cubre aproximadamente el 34.1% de los datos, lo que significa que cerca del 34.1% de los estudiantes tienen un desempeño entre 140 y 194 puntos. Por tanto, esta opción describe de manera adecuada el desempeño de los estudiantes ubicados en el área A4, basándose en la información proporcionada por la curva normal.

Pregunta 9. Si A1 y A2 corresponden al área bajo la curva que equivalen de manera correspondiente al 2% y el 14%, ¿es posible saber cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar presente un desempeño superior a la media más 2 veces la desviación estándar?

- a. No es posible dado que hacen falta datos que permitan hacer un proceso de estandarización para poder saber el área bajo la curva.
- b. Por las propiedades de simetría de la curva normal, se puede calcular la probabilidad, la cual correspondería al 2%.

- c. Es posible y equivale a la suma de las áreas A5 y A6 lo cual es igual al 25% por la simetría de la curva normal.

Posibles respuestas:

Opción a. Esta afirmación es incorrecta porque, aunque se podría argumentar que algunos datos específicos son necesarios para realizar la estandarización, en el contexto de la distribución normal, la media y la desviación estándar son suficientes para calcular la probabilidad de un rango de valores. En este caso, la media es 140 y la desviación estándar es 54. Con estos datos, es posible calcular el puntaje Z correspondiente a la media más 2 veces la desviación estándar ($140 + 2 \times 54 = 248$) y así determinar la probabilidad asociada utilizando las propiedades de la distribución normal. Por lo tanto, esta opción es incorrecta.

Opción b. Dado que la distribución normal es simétrica, se puede concluir que la probabilidad de seleccionar un estudiante que presente un desempeño superior a la media más 2 desviaciones estándar sea del 2%. De hecho, al calcular el puntaje Z correspondiente a 248 y consultar la tabla de la distribución normal, se puede determinar que la probabilidad de que un estudiante obtenga un puntaje superior a este valor es aproximadamente el 2%. Por lo tanto, esta opción es correcta.

Opción c. La opción es incorrecta ya que al tomar la suma de áreas de A5 y A6, se está tomando un intervalo desde $\mu + \sigma$ hasta infinito, lo cual es incorrecto.

3.5.4 Uso de la tabla Z y procesos de estandarización

Inicialmente, la tabla Z es una herramienta estadística que permite a los usuarios encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria continua normalmente distribuida tome un valor específico. Esta tabla muestra los valores de z, que representan la cantidad de

desviaciones estándar que un dato se encuentra por encima o por debajo de la media de una distribución normal. Su utilidad radica en la resolución de situaciones que involucran la distribución normal estandarizada, ya que facilita el cálculo de probabilidades asociadas a eventos específicos. Al convertir un valor a su puntuación z , los investigadores pueden determinar rápidamente la probabilidad de ocurrencia de ese valor dentro del contexto de la distribución normal, lo que resulta crucial en diversas aplicaciones, como en la toma de decisiones basadas en datos y en la interpretación de resultados estadísticos (Bennett, Briggs, & Triola, 2018).

Intencionalidad. El objetivo principal de las preguntas diseñadas para evaluar el manejo de la tabla Z y el proceso de estandarización en los docentes en formación es analizar la profundidad del entendimiento sobre la distribución normal y la aplicación de este conocimiento en situaciones prácticas. Esta meta se relaciona con las categorías propuestas por Flores-Medrano et al. (2014), que incluyen fenomenología, definiciones, propiedades y fundamentos, particularmente en el subdominio del conocimiento del tema (KoT). Al examinar el uso de la tabla Z y la estandarización, se busca identificar si los futuros docentes comprenden los principios matemáticos que sustentan estos conceptos y su relevancia en la resolución de problemas reales, así como en la interpretación y manejo de la tabla Z .

Se pretende evaluar el dominio de la tabla Z por parte de los docentes en formación, utilizando de manera precisa la tabla de distribución normal estándar para identificar correctamente los valores de z y calcular probabilidades con exactitud. Además, se busca verificar la comprensión del proceso de estandarización, entendiendo que este es una transformación lineal que permite comparar valores de diferentes distribuciones normales y facilita el uso eficiente de la tabla Z . Otro aspecto importante es la habilidad para resolver

problemas de probabilidad, aplicando tanto la estandarización como la tabla Z para determinar probabilidades asociadas a diversos eventos en una distribución normal. Finalmente, se evalúa la interpretación de los resultados, otorgando un significado coherente a los valores de probabilidad obtenidos, relacionándolos con el contexto del problema y comunicando las conclusiones de manera clara y concisa.

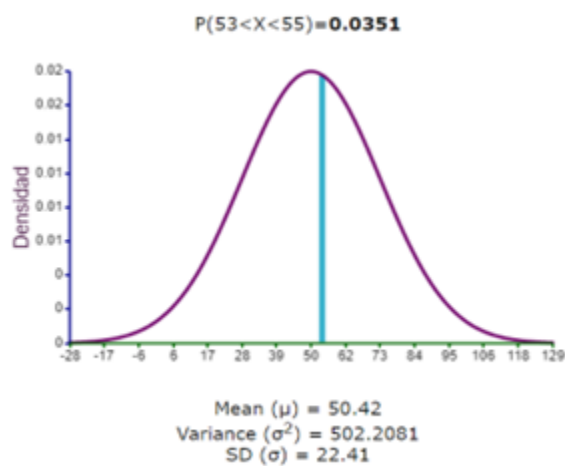
Preguntas involucradas en el uso de la tabla Z y procesos de estandarización:

Pregunta 3. Natalia sostiene que, asumiendo que los resultados de las Tablas 2 y 3 siguen una distribución normal, la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar tenga un desempeño entre el percentil 53 y 55 en el contenido de estadística es menor que la probabilidad de que ese mismo estudiante obtenga un desempeño entre el percentil 28 y 30 en la competencia de formulación y ejecución. La afirmación de Natalia es:

- a. Correcta. La probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 28 y 30 en la competencia de formulación y ejecución es efectivamente mayor que la probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 53 y 55 en el contenido de estadística, debido a la dispersión de los resultados.
- b. Incorrecta. La probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 53 y 55 en el contenido de estadística es mayor que la probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 28 y 30 en formulación y ejecución, por lo tanto, la afirmación de Natalia es incorrecta.
- c. Incorrecta. Ambas probabilidades son equivalentes, ya que las distribuciones son normales y simétricas, lo que implica que las diferencias entre estos rangos de percentiles no alteran significativamente las probabilidades.

Ilustración 5

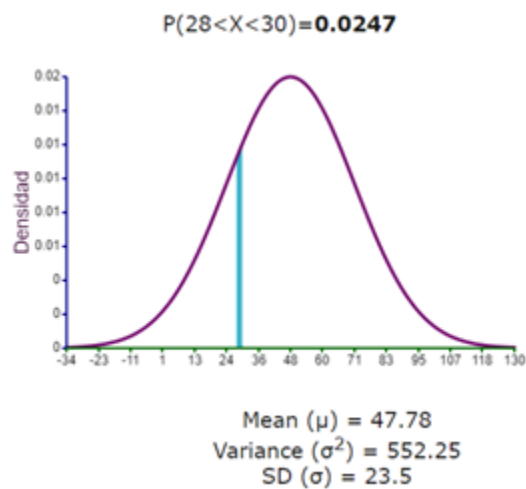
Cálculo de $53 < x < 55$



Nota: Probabilidad de estudiante seleccionado al azar tenga un desempeño entre el percentil 53 y 55 en el contenido de estadística.

Ilustración 6

Cálculo de $28 < x < 30$



Nota: Probabilidad de estudiante seleccionado al azar tenga un desempeño entre el percentil 28 y 30 en la competencia de formulación y ejecución.

Posibles respuestas: Cálculo involucrado en la pregunta:

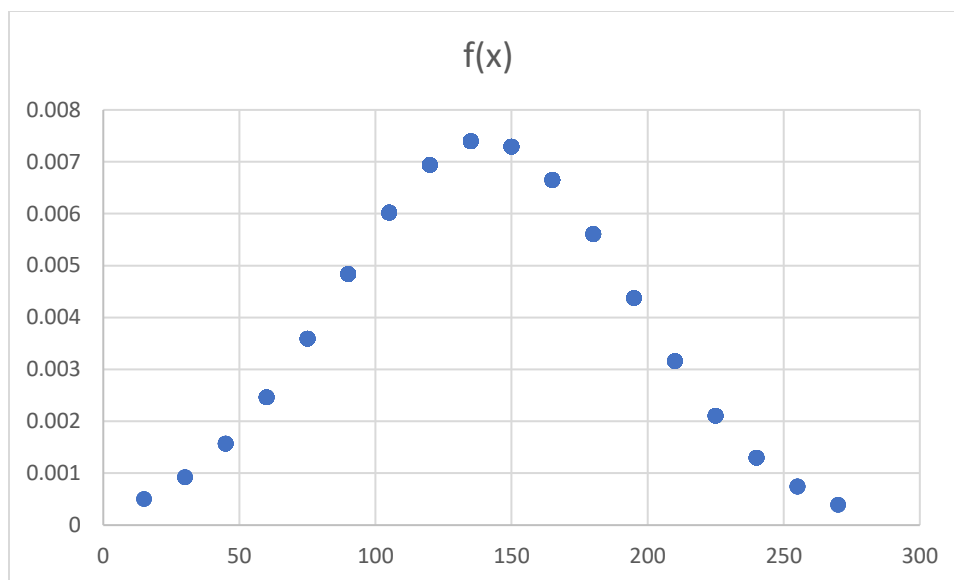
Opción a. Aunque la competencia de formulación y ejecución presenta una mayor desviación estándar que el contenido de estadística, esto no implica necesariamente que tenga una mayor probabilidad en términos de área bajo la curva, incluso si se compara en intervalos equidistantes.

Opción b. Al realizar los cálculos, se observa que la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar tenga un desempeño entre los percentiles 53 y 55 en el contenido de estadística es del 3.51%. Por otro lado, la probabilidad de que el mismo estudiante obtenga un desempeño entre los percentiles 28 y 30 en la competencia de formulación y ejecución es del 2.47%. Por lo tanto, esta opción es correcta.

Opción c. Aunque una distribución normal es simétrica, las probabilidades en diferentes rangos de percentiles pueden variar significativamente, incluso si los intervalos son equidistantes. Por lo tanto, la afirmación es incorrecta, ya que no todas las distribuciones normales garantizan que las probabilidades sean equivalentes para cualquier par de rangos de percentiles.

USANDO LA SIGUIENTE GRÁFICA, CONTESTA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

La siguiente gráfica representa la función de densidad del desempeño general de los 818 estudiantes de la Universidad del Valle que presentaron el simulacro de las Pruebas Saber Pro y TyT del 2021, los participantes obtuvieron una media de 139.75 punto y una desviación de 53.72 puntos.



Pregunta 6. De acuerdo con la imagen anterior, Pablo afirma que siempre que se va a estandarizar una distribución normal independientemente de los valores de la media y la desviación estándar, si $x = \mu \pm \sigma$ entonces $z = \pm 1$, a lo cual Fernanda, le indica que esa afirmación no es correcta porque la estandarización no puede tener valores negativos.

Si tuvieras que tomar una postura ante ambas afirmaciones, ¿cuál es la decisión correcta?

- Apoyar a Fernanda dado que, al ser un área bajo la curva y una probabilidad, no puede tener valores negativos.
- Apoyar a Pablo e indicarle a Fernanda que se pueden presentar valores negativos al estandarizar la distribución normal, ya que es una función simétrica.
- Estar de acuerdo con ambos, si bien Fernanda tiene un punto a favor por los valores negativos, Pablo también, si se toma únicamente $x = \mu + \sigma$ se verifica que $z = 1$.

Posibles respuestas:

Opción a. La estandarización puede dar lugar a valores negativos y positivos. Por tanto, la afirmación de Fernanda es incorrecta.

Opción b. Esta opción es adecuada porque reconoce que los valores estandarizados z pueden ser negativos o positivos, y que la simetría de la distribución normal permite que esto ocurra.

Opción c. Esta opción no aborda adecuadamente las afirmaciones de Pablo y Fernanda. Aunque Pablo tiene un punto válido en cuanto a la relación entre x y z , su afirmación general es problemática. Además, aunque Fernanda menciona un aspecto correcto sobre los valores negativos, su afirmación es demasiado restrictiva.

Pregunta 7. Si deseamos realizar la tipificación de los valores de x , es decir, transformarla variable aleatoria continua x a la variable z , ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre la forma y la ubicación de la nueva gráfica en términos de la media y la desviación estándar?

- a. La nueva gráfica tendrá la misma forma, pero estará centrada en $z = 0$, y su desviación estándar será 1.
- b. La nueva gráfica conservará la misma forma, pero estará centrada en $z = \sigma$ y su desviación estándar será μ .
- c. La nueva gráfica será idéntica, sin ningún cambio en la forma, la media o la desviación estándar.

Posibles respuestas:

Opción a. Esta opción es verdadera. Al estandarizar la variable, la nueva gráfica (distribución normal estándar) conservará la misma forma que la distribución original, pero se centrará en $z = 0$ y tendrá una desviación estándar de 1. Esto es característico de la distribución normal estándar.

Opción b. Esta opción es incorrecta porque la gráfica no estará centrada en $z = \sigma$. En cambio, estará centrada en $z = 0$ y no se utiliza la desviación estándar como una nueva media.

Opción c. Esta opción es incorrecta. Aunque la forma de la gráfica se mantiene, la media y la desviación estándar cambian. La media de la nueva gráfica será 0 y la desviación estándar será 1.

Capítulo IV

Etapas del análisis

Para realizar el análisis de las respuestas al cuestionario, se optó por dividir el proceso en tres etapas. En la primera etapa, se analizan los resultados de cada ítem a partir del índice de dificultad, definido por Muñiz (1994), el cual cuantifica la proporción de participantes que responden correctamente a un ítem. Este índice se examinará en conjunto con los elementos de significado ostensivos e intensivos, con el propósito de caracterizar los resultados de manera rigurosa y examinar el comportamiento de las respuestas en relación con estos elementos.

En una segunda etapa, se analizarán las respuestas correspondientes a cada ítem del cuestionario, los cuales abordan temas como el análisis de gráficas, el cálculo de probabilidades, las propiedades de la distribución normal, el uso de la tabla Z y los procesos de estandarización. Este análisis se complementará con las categorías del conocimiento propuestas por Flores-Medrano et al. (2014): fenomenología, propiedades y fundamentos, registros de representación y definiciones, las cuales forman parte del conocimiento de los temas (Knowledge of Topics, KoT). El objetivo es inferir, a partir de las respuestas de los participantes a las situaciones, los errores u obstáculos identificados en el razonamiento estadístico de los participantes.

En la etapa final, se analizará la información recopilada en las etapas previas utilizando los indicadores de análisis definidos. El objetivo principal será describir y comprender el estado actual del conocimiento de los participantes. También, se pretende identificar las categorías de análisis donde se evidencian las mayores limitaciones para proponer oportunidades de mejora para su conocimiento especializado.

4.1 Primera etapa

4.1.1 Elementos de significado relacionados a los ítems del cuestionario.

En el desarrollo de los ítems, se integraron elementos ostensivos e intensivos con el propósito de garantizar un abordaje comprensivo y riguroso de la distribución normal. En síntesis, se considerarán los elementos de significado ostensivos, entendidos como representaciones materiales —tales como símbolos, gráficos o tablas— que permiten evocar y operar con objetos matemáticos abstractos. Del mismo modo, se tendrán en cuenta los elementos de significado intensivos, que corresponden a conceptos matemáticos abstractos y engloban ideas generales o proposiciones, como propiedades y relaciones. Este enfoque dual permitió una aproximación equilibrada entre la representación visual y la profundización conceptual en el cuestionario aplicado.

A continuación, se describen detalladamente los elementos de significado incorporados en el cuestionario y se presenta la tabla de elementos de significado relacionados a los ítems del cuestionario.

Elementos ostensivos

Dentro de los elementos ostensivos de los ítems, se utilizaron diversas representaciones simbólicas con el propósito de abordar las preguntas del cuestionario de manera más formalista. En cuanto a las representaciones gráficas, se emplearon gráficos básicos de la distribución normal simétrica y estandarizada, diseñados mediante Python y posteriormente ajustados en detalles mediante aplicaciones de dibujo. Por último, los valores estadísticos presentes en los ítems se extrajeron del informe del simulacro de las Pruebas Saber Pro y TyT, aplicado en 2021 a estudiantes de la Universidad del Valle, sede Meléndez. Este informe fue elaborado por la Dirección de Autoevaluación y Calidad Académica (DACA).

Elementos intensivos

En los elementos intensivos, se abordaron de manera detallada las propiedades fundamentales de la distribución normal, destacando su simetría característica, la igualdad entre la media, la mediana y la moda, y su representación matemática basada en dos parámetros estadísticos clave: la media (μ) y la desviación estándar (σ). Además, se profundizó en los conceptos matemáticos que estructuran esta distribución, como la interpretación de los ejes horizontal y vertical. El eje horizontal se vinculó con los valores de la variable aleatoria, mientras que el eje vertical se relacionó con la densidad de probabilidad de la función.

Adicionalmente, se incorporaron los percentiles como herramientas esenciales para el análisis de medidas de posición, enfatizando su utilidad en la interpretación de datos dentro de esta distribución. Finalmente, se trabajó exhaustivamente en el cálculo de probabilidades asociadas a la distribución normal, con un enfoque en la comprensión del área bajo la curva como representación gráfica de dichas probabilidades. Este abordaje integral permitió un análisis riguroso de los conceptos matemáticos inherentes a la distribución normal, reforzando tanto su fundamentación teórica como su aplicación práctica.

Tabla 5

Elementos de significado relacionados a los ítems del cuestionario.

Elementos de significado					Ítems evaluados											
Ostensivos					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Representaciones simbólicas																
(μ, σ, $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$)										X	X				X	X
Representaciones gráficas																
Curva normal.					X				X	X		X	X			
Representación del área bajo la curva.									X		X	X	X			

Valores estadísticos.	X	X	X	X	X		X		X	X	X
Intensivos											
Eje vertical y horizontal.	X										
Área bajo la curva.					X			X	X		
Variables aleatorias.						X	X			X	X
Medidas de posición: percentiles.		X	X								
Probabilidad de un valor.			X		X			X	X	X	X
Distribución normal tipificada.			X			X	X			X	X
Simetría en la distribución normal.			X			X		X	X		
Parámetros de la distribución normal.	X	X	X	X			X	X	X	X	

4.1.2 Índice de dificultad de los ítems del cuestionario.

Además, para el análisis se calculó el índice de dificultad propuesto por Muñiz (1994), citado en Tauber, (2001). Este índice se define como la proporción de personas que responden correctamente a un ítem en relación con el total de participantes que intentaron resolverlo. En otras palabras, si A representa el número de aciertos y N el número de personas que intentaron resolver el ítem, el índice de dificultad se calcula como $ID = \frac{A}{N}$. Esto indica que, un índice de dificultad elevado refleja que el ítem es más sencillo para los estudiantes, dado que una mayor proporción de ellos lo ha resuelto correctamente. Finalmente, se reconoce que el índice de dificultad es una herramienta que a medida que la muestra de incrementa, es decir, mientras N sea mayor, se presenta una mayor confiabilidad, es por esto por lo que se pretende hacer uso del índice de dificultad, como una herramienta únicamente para analizar de manera cualitativa dichos ítems con una proporción de aciertos con la muestra de esta investigación.

Tabla 6*Índice de dificultad de los ítems del cuestionario*

Ítem	Índice de dificultad
1	0.66
2	0.33
3	0.33
4	0.83
5	0.83
6	0.83
7	0.66
8	0.83
9	0.66
10	0.66
11	0.83
12	0.66

El análisis de los ítems del cuestionario muestra variaciones importantes en el desempeño de los profesores en formación, lo que sugiere diferencias en la comprensión de los conceptos evaluados tales como análisis de gráficas, cálculo de probabilidades, propiedades de la distribución normal y usos de la tabla Z y procesos de tipificación. Sin embargo, en términos generales, los docentes en formación presentaron un desempeño moderado, con algunos temas más accesibles y otros que representaron mayores desafíos. A continuación, se adentrará más en este desempeño de los futuros profesores.

Los ítems relacionados con las propiedades de la distribución normal estandarizada, como el ítem 2, que evaluaba estas propiedades a través del análisis de datos de una tabla previamente presentada, y el ítem 3, que requería la aplicación de procesos de estandarización para comparar valores y responder la pregunta, evidenciaron dificultades significativas entre los docentes en formación. Esto sugiere la necesidad de fortalecer estos conceptos, posiblemente a través de estrategias que integren diferentes representaciones, como valores estadísticos, medidas de posición y probabilidades. Asimismo, el uso de datos reales en ejercicios de análisis estadístico podría contribuir a una comprensión más profunda. En contraste, los ítems que involucraban representaciones gráficas y simbólicas fueron resueltos con mayor facilidad, lo que resalta el papel de las visualizaciones en el proceso de aprendizaje.

Finalmente, los resultados reflejan no solo las diferencias en el dominio de los docentes en formación en los temas que se buscaron evaluar dentro del cuestionario, sino también, se resalta la importancia de estrategias didácticas que permitan conectar representaciones concretas con principios teóricos. En la siguiente etapa del análisis, se profundizará en la relación entre estos desempeños y los elementos ostensivos e intensivos para comprender mejor las dificultades identificadas.

4.2 Segunda etapa

Para la segunda etapa del análisis, se tomará como referencia la **Tabla 1** *Temas, preguntas y categorías del cuestionario.*, presentada en el capítulo III. En esta fase, se elaboró la

Tabla 7, que organiza de manera general los temas evaluados en el cuestionario: análisis de gráficas, cálculo de probabilidades, propiedades de la distribución normal, y el uso de la tabla Z

junto con los procesos de estandarización. Además, se incluyen las categorías de conocimiento del subdominio Conocimiento de los Temas (KoT)

del Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), propuesto por Flores-Medrano et al. (2014). Estas categorías son:

- Fenomenología, que abarca los fundamentos matemáticos y la aplicación práctica de los conceptos en el aula.
- Propiedades y fundamentos, relacionados con las bases que sustentan las definiciones matemáticas.
- Registros de representación, que incluyen diversas formas de expresar un objeto matemático, como gráficas, expresiones numéricas y lenguaje natural.
- Definiciones, centradas en las características distintivas de los objetos matemáticos y las estrategias para presentarlas pedagógicamente.

La tabla 7 también especifica los ítems del cuestionario asociados a cada tema, junto con las opciones incorrectas seleccionadas por los participantes y su proporción de error, calculada como la relación entre el número de participantes que eligieron una opción incorrecta y el total de participantes que respondieron el ítem. Finalmente, se presentan los errores que están presentes en la opción del ítem que escogieron los participantes, dicho error se presenta de forma más detallada en la sección 3.5 Intencionalidad del instrumento.

Tabla 7

Proporción de errores presentes en los participantes

TEMAS	CATEGORÍAS	ÍTEMS	OPCIONES ERRONEAS	PROPORCIÓN DE ERROR	OBSTACULOS O ERRORES
-------	------------	-------	----------------------	------------------------	-------------------------

Análisis de gráficas.	Registros de representación,	1	a	0.33	Error en análisis estadístico.
	propiedades y fundamentos.	5	b	0.17	Interpretación errónea del enunciado.
Cálculo de probabilidades.	Definiciones, propiedades y fundamentos.	10	a	0.17	Obstáculo de variable errónea.
			b	0.17	Obstáculo de variable errónea.
		11	b	0.17	Error procedimental.
		12	c	0.33	Error procedimental.
Propiedades de la distribución normal.	Fenomenología, propiedades y fundamentos.	2	a	0.17	Error conceptual de las propiedades.
			b	0.5	Error en interpretación de las propiedades.
		4	a	0.17	Error en análisis estadístico.
		8	a	0.17	Obstáculo en comprensión gráfica.
		9	c	0.33	Obstáculo en comprensión gráfica.

Uso de la tabla	Definiciones,	3	a	0.67	Error en
Z y procesos de	fenomenología,				interpretación de
estandarización.	propiedades y				definiciones.
	fundamentos.	6	a	0.17	Error conceptual
					de las
					propiedades.
		7	c	0.33	Error conceptual
					de las
					propiedades.

Nota: Los datos fueron aproximados para una mejor interpretación.

Al analizar los resultados presentados en la **Tabla 7**, se observa que la proporción de error del 17%, presente en varios ítems (2a, 2b, 4a, 5b, 6a, 8a, 10a, 10b, 11b) indica que solo una minoría de los participantes cometió errores al seleccionar opciones incorrectas. Este bajo porcentaje refleja un nivel aceptable de dominio sobre los temas evaluados y sugiere que los docentes en formación tienen una comprensión básica de las categorías esenciales, tales como definiciones, propiedades y fundamentos, así como los registros de representación. Dado que la proporción de errores es moderada, se podría inferir que los ítems asociados con esta proporción abordan temas cuya complejidad conceptual o representacional es relativamente baja, lo que facilita la identificación de las respuestas correctas.

No obstante, la presencia de errores, aunque en menor medida, evidencia que persisten dificultades en la comprensión de ciertos conceptos específicos y en la interpretación de los distintos registros de representación utilizados. Este hecho subraya la necesidad de reforzar estos aspectos durante la formación docente, enfocándose en aquellos temas donde los errores se

presentan de manera recurrente entre los participantes. En este sentido, es fundamental adoptar estrategias que no solo prioricen el dominio técnico, sino también el desarrollo de conocimientos funcionales y analógicos, tal como destacan González et al. (2018), quienes enfatizan que estos deben enseñarse al mismo nivel que el cálculo, promoviendo una comprensión más profunda y flexible de los conceptos matemáticos.

Por otro lado, la proporción de error del 33% observada en varios ítems (7c, 9c, 12c) indica que aproximadamente un tercio de los docentes en formación cometió errores al seleccionar opciones incorrectas en estos casos. Este dato refleja una dificultad moderada en la comprensión o aplicación de los conceptos evaluados, lo que sugiere que los temas involucrados, aunque no extremadamente complejos, presentan desafíos significativos para una proporción considerable de los participantes. Los ítems con este nivel de error suelen combinar elementos evidentes, como representaciones gráficas y simbólicas, con aspectos más complejos que incluyen propiedades fundamentales, probabilidades y procesos de estandarización de variables aleatorias. Esto pone de manifiesto la necesidad de integrar estos enfoques en la enseñanza, a fin de fortalecer el aprendizaje de los docentes en formación.

Particularmente, en el ítem 2, opción errónea b, se detecta un error en la interpretación de las propiedades de la distribución normal, con una proporción significativa de errores (50%) entre los estudiantes. Este alto porcentaje refleja una dificultad común en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las propiedades y fundamentos de la distribución normal, especialmente cuando se aborda desde un contexto más habitual a los estudiantes. Esta categoría implica tanto la comprensión de los aspectos abstractos de la distribución normal, como su aplicación práctica en el aula. La dificultad radica en la interpretación y manejo adecuado de

conceptos clave como la simetría, la media y la desviación estándar, y en cómo estos se aplican en contextos prácticos.

Finalmente, en el ítem 3, opción errónea a, que se refiere a un error en la interpretación de las definiciones relacionadas con las propiedades de la distribución normal, se observa un porcentaje de error extremadamente alto (67%). Este dato señala un obstáculo significativo en la comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales que sustentan las definiciones de la distribución normal, específicamente en la categoría de "Definiciones". Este tipo de error es particularmente revelador en el ámbito de la educación matemática, dado que sugiere una debilidad en la forma en que los estudiantes construyen su conocimiento sobre estos conceptos. La alta proporción de errores en el ítem indica que las definiciones fundamentales de la distribución normal presentados en este punto del cuestionario no se han asimilado correctamente.

4.3 Tercera etapa

El análisis global de los resultados indica que el estado actual del conocimiento de los docentes en formación sobre la distribución normal es heterogéneo. Si bien se evidencia un dominio adecuado en temas relacionados con representaciones ostensivas, como gráficas y áreas bajo la curva, existe una marcada dificultad en aspectos intensivos y procedimentales, especialmente en los procesos de estandarización y el uso de la tabla Z. Los índices de dificultad de 0.33 en los ítems 2 y 3 reflejan que solo una minoría logró responder correctamente, lo que sugiere la necesidad de fortalecer la comprensión de conceptos fundamentales y la aplicación práctica de estos elementos.

Las categorías de análisis que presentan mayores limitaciones son las relacionadas con la "Fenomenología" y "Definiciones". Los errores frecuentes en la interpretación de propiedades

como la simetría, la media y la desviación estándar, así como en la comprensión de las definiciones básicas, evidencian una brecha conceptual significativa. Los índices de error del 50% y 67% en ítems clave (2b, 3a) resaltan la dificultad para conectar conceptos abstractos con situaciones prácticas. Además, la combinación de errores en las categorías intensivas y ostensivas sugiere que los docentes en formación requieren estrategias que integren ambas perspectivas para lograr un aprendizaje más profundo y significativo.

Para mejorar el conocimiento especializado, es fundamental implementar estrategias de enseñanza que refuercen la relación entre los conceptos teóricos y su aplicación en contextos cotidianos. Esto podría incluir el uso de actividades prácticas que promuevan la interpretación y uso adecuado de la tabla Z, la resolución de problemas contextualizados y el análisis detallado de representaciones gráficas. Asimismo, el diseño de recursos didácticos que permitan explorar la fenomenología de la distribución normal, enfatizando las definiciones y propiedades clave (por ejemplo, simulaciones interactivas para visualizar la variabilidad de la curva normal según los parámetros μ y σ , actividades manipulativas con generadores de datos aleatorios, o fichas didácticas que guíen la interpretación de probabilidades en la tabla Z) contribuirá a superar las dificultades identificadas y a consolidar el aprendizaje de los futuros docentes.

Una propuesta concreta para fomentar el uso adecuado de la tabla Z en el aula podría basarse en actividades que impliquen el análisis de datos reales. Por ejemplo, se pueden plantear ejercicios donde los estudiantes deban calcular probabilidades asociadas a eventos cotidianos, como el tiempo de espera en filas o el rendimiento académico, utilizando información extraída de estudios o encuestas. Estas actividades no solo fortalecerían el dominio técnico de la tabla, sino que también promoverían el pensamiento crítico al interpretar los resultados en términos prácticos. Además, el diseño de guías paso a paso para el uso de la tabla Z en diferentes

escenarios podría servir como apoyo didáctico, facilitando el desarrollo de competencias en la resolución de problemas.

En cuanto a la integración de representaciones gráficas en situaciones problema, resulta esencial que estas no se limiten a ser elementos visuales complementarios, sino que se conviertan en herramientas fundamentales para el análisis y la toma de decisiones. Por ejemplo, el uso de histogramas y curvas de distribución normal superpuestas podría permitir a los estudiantes identificar patrones y desviaciones en conjuntos de datos, lo que fomentaría una comprensión más profunda del concepto de variabilidad. Adicionalmente, el uso de simulaciones computacionales que generen gráficos dinámicos podría enriquecer la experiencia de aprendizaje, facilitando la conexión entre los aspectos teóricos y su representación visual, y permitiendo a los estudiantes explorar distintos escenarios y observar el efecto de los cambios en los parámetros de la distribución normal.

Capítulo V

En el capítulo V se presentan las conclusiones de este trabajo de grado, donde se sintetizan los hallazgos más relevantes y se reflexiona sobre los resultados obtenidos en relación con los objetivos específicos planteados al inicio. El análisis permite destacar tanto los avances como las dificultades identificadas en el conocimiento matemático de los docentes en formación, particularmente en lo que respecta a la comprensión y aplicación de la distribución normal.

Asimismo, se describen las limitaciones encontradas durante el desarrollo de la investigación, considerando los factores que pudieron influir en los resultados. Finalmente, se proponen recomendaciones dirigidas a optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, con el propósito de fortalecer el conocimiento especializado y promover el desarrollo de competencias en el manejo de contenidos probabilísticos, elementos esenciales para una práctica docente efectiva en contextos educativos.

5.1 Conclusiones

El primer objetivo específico planteado fue: “Indagar en referentes bibliográficos nacionales e internacionales sobre elementos para la enseñanza y el aprendizaje de la distribución normal.” Este objetivo se cumplió de manera óptima a lo largo de todo el desarrollo de la investigación. Esto se evidencia en el apartado 1.2 Antecedentes, donde se presentan 12 estudios relevantes, entre los que se incluyen tesis de maestría, tesis doctorales y artículos de investigación. Los antecedentes se organizaron en tres categorías: estudios relacionados con la enseñanza de la estadística en general, investigaciones sobre estadística inferencial y trabajos específicos sobre la distribución normal, lo que permitió un análisis integral y contextualizado del tema.

El segundo objetivo específico fue: “Diseñar y validar un instrumento de investigación que permita indagar los conocimientos matemáticos de profesores en formación en relación con la enseñanza de la distribución normal.” Este objetivo se cumplió de manera efectiva, como se evidencia en el Anexo 1. Cuestionario presentado a participantes, donde se presenta el cuestionario aplicado a los participantes. La implementación de este instrumento fue fundamental para recopilar la información necesaria y llevar a cabo el análisis detallado de los datos, lo que contribuyó significativamente al desarrollo y los hallazgos de este trabajo de grado.

El tercer objetivo específico planteado fue: “Analizar, desde el marco MTSK, elementos presentes en el conocimiento matemático de profesores en formación para la enseñanza de la distribución normal.” Este objetivo se cumplió de manera idónea y se desarrolló ampliamente en el Capítulo IV, donde se llevó a cabo un análisis detallado de los conocimientos evaluados. Además, se incorporaron conceptos teóricos clave, como los significados ostensivos e intensivos, para enriquecer el análisis y aportar una comprensión más profunda de las conexiones entre el conocimiento matemático y su aplicación en la enseñanza. Estos elementos permitieron evaluar cómo los docentes en formación movilizan sus conocimientos en diferentes registros y contextos, alineándose con los principios del marco MTSK.

El cuarto objetivo específico, “Proponer recomendaciones alrededor de los procesos de enseñanza de la distribución normal y el fortalecimiento de la formación inicial de profesores”, se cumplió a partir de un análisis riguroso a cada respuesta de cada ítem del cuestionario, considerando índices de error y proporciones de respuesta. Este proceso permitió identificar dificultades recurrentes y su relación con los conceptos teóricos y metodológicos utilizados, como los significados ostensivos e intensivos y el marco MTSK. Gracias a este enfoque detallado, se desarrollaron recomendaciones fundamentadas para optimizar la enseñanza de la

distribución normal y fortalecer el conocimiento especializado en la formación de futuros docentes.

Finalmente, los resultados de este estudio permiten responder la pregunta de investigación al evidenciar que los profesores en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle presentan un conocimiento matemático de la distribución normal con fortalezas en la identificación de su estructura y propiedades generales, pero con dificultades en la articulación de diferentes registros de representación y en la interpretación de conceptos probabilísticos en contextos aplicados. A través del análisis desde el modelo MTSK, se identificó por medio del Conocimiento de los Temas (KoT), que estos futuros docentes muestran vacíos en la fenomenología del concepto, particularmente en la relación entre la teoría probabilística y su uso en la resolución de problemas. Estos hallazgos resaltan la necesidad de fortalecer la formación inicial con estrategias que promueven una comprensión más profunda y conectada con el razonamiento probabilístico.

5.2 Limitaciones

Entre las principales limitaciones encontradas durante la realización de este trabajo de grado, destaca la dificultad inicial de trabajar con profesores en ejercicio. Esto se debió a que la distribución normal no es un tema que se aborde habitualmente en la educación media colombiana, lo que restringió la posibilidad de realizar el estudio con este grupo. Esta situación llevó a redirigir el enfoque hacia docentes en formación, quienes están en contacto con estos contenidos en su formación universitaria.

Otra limitación importante se relaciona con el currículo de la licenciatura en matemáticas. La asignatura Estadística AEM es la única que aborda contenidos relacionados con la estadística dentro de la malla curricular, lo que genera una alta carga temática. Como resultado, en

ocasiones no se logra profundizar en temas como la distribución normal, lo que pudo haber afectado el nivel de conocimiento de algunos participantes en el estudio.

Finalmente, se identificó la ausencia de instrumentos cualitativos, como entrevistas o preguntas abiertas, en la recolección de datos. Esta falta de información cualitativa limitó el análisis en profundidad del conocimiento matemático de los futuros docentes, especialmente en cuanto a su comprensión conceptual y reflexiva de la distribución normal. Incorporar estas herramientas en futuros estudios permitiría una exploración más detallada de las concepciones y dificultades de los participantes.

5.3 Proyecciones del trabajo de grado

Las proyecciones de este trabajo de grado están orientadas a profundizar en el conocimiento especializado de los docentes en formación en relación con la distribución normal. Para lograrlo, se propone el desarrollo de futuras investigaciones que empleen herramientas cualitativas, como entrevistas en profundidad y grabaciones de sesiones de enseñanza. Estas técnicas permitirían capturar no solo las respuestas de los participantes, sino también sus procesos de pensamiento, estrategias de resolución y reflexiones sobre el uso de conceptos probabilísticos, lo que facilitaría un análisis más integral del conocimiento matemático.

Asimismo, se plantea la necesidad de ampliar el estudio hacia otros tipos de distribuciones estadísticas, como la distribución binomial, la distribución de Poisson y la distribución t de Student, entre otras. Este enfoque permitiría explorar cómo los futuros docentes comprenden y enseñan diferentes modelos probabilísticos, fortaleciendo su formación y contribuyendo al desarrollo de competencias esenciales para abordar diversos contenidos estadísticos en el aula. De esta manera, se busca no solo mejorar el dominio técnico, sino

también fomentar una enseñanza más contextualizada y significativa de la probabilidad y la estadística.

Referencias bibliográficas

- Aguilar-González, Álvaro & Catalán, María Cinta & Carrillo, José & Rodríguez-Muñiz, Luis. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática. 13. 10.30827/pna.v13i1.7944.
- Alsina, C., & Vásquez, C. (2017). Matemáticas y su didáctica en educación primaria. Graó.
- Alvarez Giraldo, A. L., & Muñoz Herrera, J. I. (2018). *Significado personal de la distribución normal entre estudiantes de dos cursos de inferencia estadística utilizando Geogebra*. Universidad del Valle.
- Báez, J. (2009). Investigación Cualitativa. En *Libros Profesionales*. Alfaomega.
- Batanero, C. (2005). Significados y dificultades en la enseñanza de la probabilidad. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 40, 11-28.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos* (C. Batanero & C. Díaz, Eds.). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green, D. (2001). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 137-168.
- Batanero, M. del Carmen. (2001). *Didáctica de la estadística*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Bennett, J. O., Briggs, W. L., & Triola, M. F. (2018). Statistical reasoning for everyday life. Pearson.

- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*.
Universidad de Antioquia.
- Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. En *Source: The American Mathematical Monthly* (Vol. 104, Número 9).
- Díaz, P., & Fernández, P. (2001). Investigación: La distribución normal. *Cad Aten Primaria*, 8, 268–274. www.fisterra.com
- Díaz-Levicoy, D. (2018). *Comprensión de gráficos por alumnos chilenos de educación primaria*. <http://hdl.handle.net/10481/53598>
- Domínguez (2000) Investigación cualitativa y psicología social crítica. Contra la lógica binaria y la ilusión de la pureza. *Investigación cualitativa en Salud*.
- Espinel Febles, M. C., Ramos Domínguez, R. M., & Ramos Domínguez, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria. *Números*, 67, 15–23.
- Fernández Coronado, N. A., & García-García, J. I. (2024). Sentido probabilístico: un primer acercamiento. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 107–116). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-10>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. *Publisher Universidad de Huelva Publicaciones*, 71–93.

- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.
- García-García, J. I., Camaño, J., Hernández, J., & Arredondo, E. H. (2024). Análisis de la distribución normal en libros de texto de educación media de Chile. En D. Díaz-Levicoy & A. Salcedo (Eds.), *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* (pp. 343-365). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.
- Gattuso, L., & Pannone, M. (2002). Teacher’s training in a statistics teaching experimental. *In Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of statistics*, 1–6.
- González Arellano, Y. K., & Ojeda Salazar, A. M. (2017). Comprensión de la distribución normal en bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 207–217. <http://www.iessantvicent.com/web/images/departaments/ma>
- González Arellano, Y. K., Ojeda Salazar, A. M., & Palacios Soto Cinvestav, J. L. (2018). Comprensión de profesores de la distribución normal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31, 1764–1772.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187–205. <https://www.jstor.org/stable/3481874>
- Jacho Guashca, A. D., Loaiza Campoverde, I. H., & López Salazar, J. L. (2020). La importancia de la estadística para el éxito de resultados en una investigación. *Imaginario Social*, 3, 32–41. <https://orcid.org/0000-0003-4263-6122http://revista-imaginariosocial.com/index.php/es/>

- Jiménez-Domínguez, B. (2000). Investigación cualitativa y psicología social crítica. Contra la lógica binaria y la ilusión de la pureza. *Revista Universidad de Guadalajara*, 17, 1–17. <http://www.cge.udg.mx/revistaudg/rug17/3investigacion.html>
- López Martín, M. del M. (2021). La inferencia estadística en bachillerato: análisis de las pruebas de acceso a la universidad y de los conocimientos de futuros profesores [Universidad de Granada]. En *Lenguas Modernas* (Número 62). <https://doi.org/10.13039/501100011033>
- López-Martín, M. D. M., Batanero, C., & Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística? *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 33(64), 672–693. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a11>
- Luzuriaga Jaramillo, H. A., Espinosa Pinos, C. A., Haro Sarango, A. F., & Ortiz Román, H. D. (2023). Histograma y distribución normal: Shapiro-Wilk y Kolmogorov Smirnov aplicado en SPSS. *LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades*, 4(4), 596–607. <https://doi.org/10.56712/latam.v4i4.1242>
- Marbán Prieto, J. M., & Méndez Romero, R. A. (2015). Modelos profesionales docentes ¿Qué nos dice la investigación sobre ellos? *TRIM*, 9, 23–33.
- Meneses, J. (2016). *El cuestionario*. <https://femrecerca.cat/meneses/publication/cuestionario>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (Vol. 1).

- Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2018). Proceso de transformación curricular para la educación media general en la modalidad jóvenes y adultos. En <https://siteal.iiep.unesco.org/bdnp/880/proceso-transformacion-curricular-educacion-media-general-modalidad-jovenes-adultos>.
- Mohamed Maanan, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad*. Editorial de la Universidad de Granada.
- Naya, S., Ríos, M., & Zapata, L. (2012). La Estadística en la Enseñanza Preuniversitaria. *La Gaceta de la RSME*, 15(2), 355–368.
- OCDE. (2014). *PISA 2015 Resultados Clave*. <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-esp.pdf>
- Pérez López, C. G. (2010). *LA ESTADÍSTICA COMO HERRAMIENTA EN LA INVESTIGACIÓN PSICOLÓGICA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO*. Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.
- Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.
- Pinos-Coronel, P. C., García-Herrera, D. G., Erazo-Álvarez, J. C., & Narváez-Zurita, C. I. (2020). Las TIC como mediadoras en el proceso enseñanza – aprendizaje durante la pandemia del COVID-19. *Revista Arbitrada Interdisciplinaria Koinonía*, 5(1), 121–142. <https://doi.org/10.35381/r.k.v5i1.772>

- Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 191–204.
<https://about.jstor.org/terms>
- Ponteville, C. C. (2014). ¿Para qué enseñamos estadística? *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, 517–525.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. En *PNA* (Vol. 1, Número 2).
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez, C., & Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación. *Revista Didáctica de las Matemáticas*, 104, 217–238. <http://www.sinewton.org/numeros>
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015a). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 29(51), 143–167. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015b). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 29(51), 143–166. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Salazar-Escorcía, L. S. (2020). Investigación Cualitativa: Una respuesta a las Investigaciones Sociales Educativas. *CIENCIAMATRIA*, 6(11), 101–110.
<https://doi.org/10.35381/cm.v6i11.327>

- Sharma, S. (2016). Probability from a socio-cultural perspective. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 126–144. <https://hdl.handle.net/10289/11764>
- Spiegel, M. R. (1976). *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill.
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos* (Vol. 2).
- Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 503–522. <https://www.jstor.org/stable/3482208?seq=1&cid=pdf->
- Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Universidad de Sevilla.
- Valdez Monroy, J. C., & Salinas Herrera, J. (2019). Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre la distribución normal. *In Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.*, 1–10.
www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C., Begué, N., & Garzón-Guerrero, J. A. (2023a). Conocimiento didáctico-matemático sobre la distribución de la media muestral de profesorado de bachillerato en formación. *Uniciencia*, 37(1), 1–20.
<https://doi.org/10.15359/ru.37-1.3>
- Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C., Begué, N., & Garzón-Guerrero, J. A. (2023b). Conocimientos didáctico-matemáticos de profesores de educación secundaria en formación sobre inferencia estadística. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 37(76), 602–624. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11>

Vera Vélez, L. (2015). *La investigación cualitativa*. 1–4.

Anexos

Anexo 1. Cuestionario presentado a participantes

Conocimiento matemático de profesores en formación en relación con la distribución normal: Un estudio de caso.

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas



En la Universidad del Valle, sede Meléndez, ubicada en la ciudad de Santiago de Cali se realizan diversos proyectos para la comunidad estudiantil. Según fuentes internas, se ha podido conocer información sobre el desempeño de los estudiantes en las competencias y contenidos de razonamiento cuantitativo en el primer simulacro del proyecto sobre las Pruebas Saber Pro y TyT realizado en el año 2021.

En la tabla 1 y tabla 2 se presentan las puntuaciones promedio y las desviaciones estándar obtenidas de los estudiantes en relación con las competencias y contenidos evaluados en el componente de razonamiento cuantitativo.

Competencia	Promedio(%)	Desviación estándar (%)
Interpretación	49,63	24,2
Formulación y ejecución	47,78	23,5
Argumentación	42,54	20,62

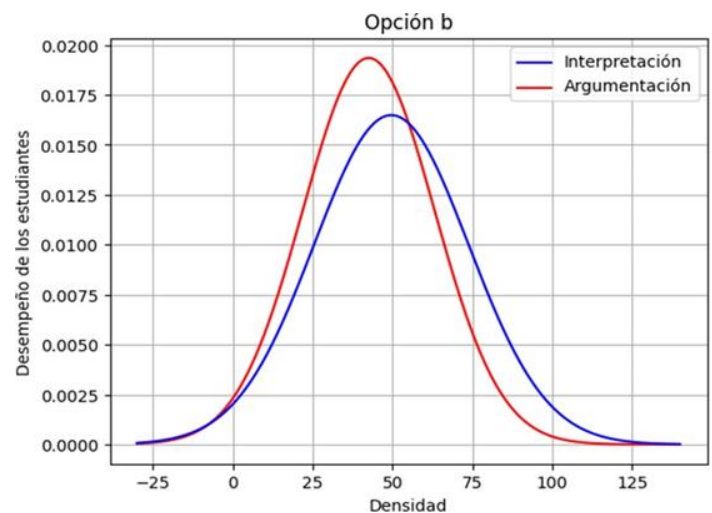
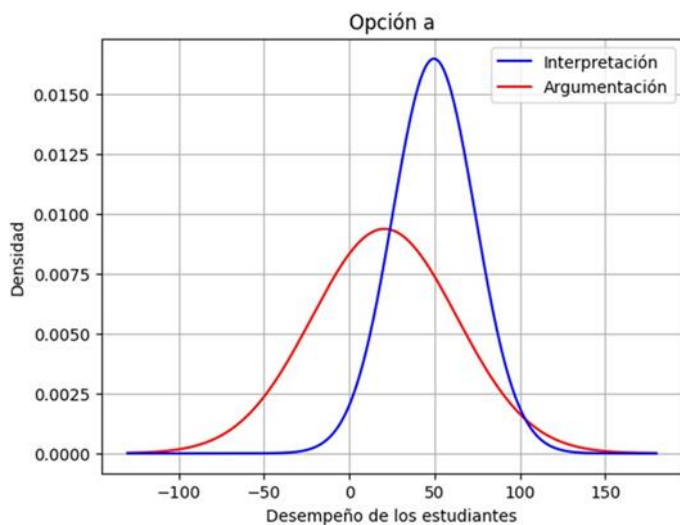
Tabla 1. Resultados en las competencias de razonamiento cuantitativo definidas por el ICFES.

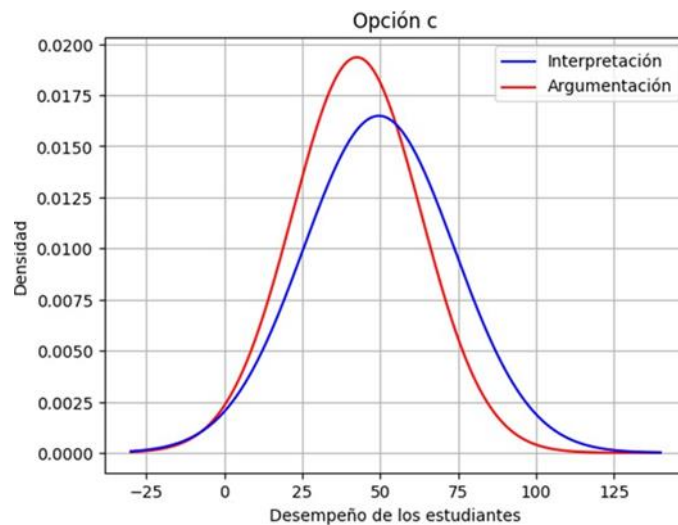
Contenido	Promedio(%)	Desviación estándar (%)
Álgebra y cálculo	44,71	22,93
Estadística	50,42	22,41
Geometría	44,36	25,14

Tabla 2. Resultados en los contenidos de razonamiento cuantitativo definidos por el ICFES.

CONTESTA LAS PREGUNTAS 1 A 5 DE ACUERDO CON LA INFORMACIÓN DE LAS TABLAS 1 Y 2

Pregunta 1. Asumiendo que el desempeño de los estudiantes en “**Interpretación**” y “**Argumentación**” siguen una distribución normal. Según la información presentada en la tabla 1 ¿Cuál de las siguientes gráficas de distribución normal representa el desempeño de los estudiantes en las competencias de interpretación y argumentación?





Pregunta 2. Si asumimos que las calificaciones en la competencia de "Interpretación" siguen una distribución normal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **CORRECTA**?

- a) La mayoría de los estudiantes obtuvo un desempeño superior al promedio en la competencia de Interpretación.
- b) La desviación estándar indica que los desempeños de los estudiantes en la competencia de Interpretación se encuentran dispersos alrededor del promedio.
- c) Un estudiante que obtuvo una calificación cercana al percentil 50 en la competencia de Interpretación, obtuvo un desempeño cercano al promedio.

Pregunta 3. Natalia sostiene que, asumiendo que los resultados de las Tablas 1 y 2 siguen una distribución normal, la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar tenga un desempeño entre el percentil 53 y 55 en el contenido de estadística es menor que la probabilidad de que ese mismo estudiante obtenga un desempeño entre el percentil 28 y 30 en la competencia de formulación y ejecución. La afirmación de Natalia es:

- a) Correcta. La probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 28 y 30 en la

competencia de formulación y ejecución es efectivamente mayor que la probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 53 y 55 en el contenido de estadística, debido a la dispersión de los resultados.

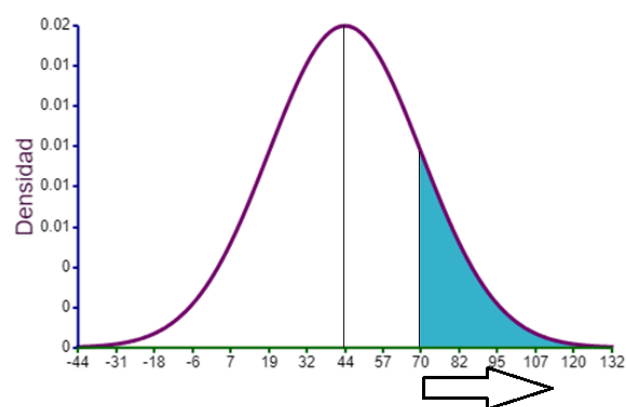
- b) Incorrecta. La probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 53 y 55 en el contenido de estadística es mayor que la probabilidad de obtener un desempeño entre el percentil 28 y 30 en formulación y ejecución, por lo tanto, la afirmación de Natalia es incorrecta.
- c) Incorrecta. Ambas probabilidades son equivalentes, ya que las distribuciones son normales y simétricas, lo que implica que las diferencias entre estos rangos de percentiles no alteran significativamente las probabilidades.

Pregunta 4. Si se desea comparar el desempeño de los estudiantes en "Álgebra y Cálculo" y "Estadística", ¿cuál de los siguientes indicadores sería **MÁS ÚTIL** para determinar cuál de las dos competencias presentó mayor homogeneidad en las calificaciones?

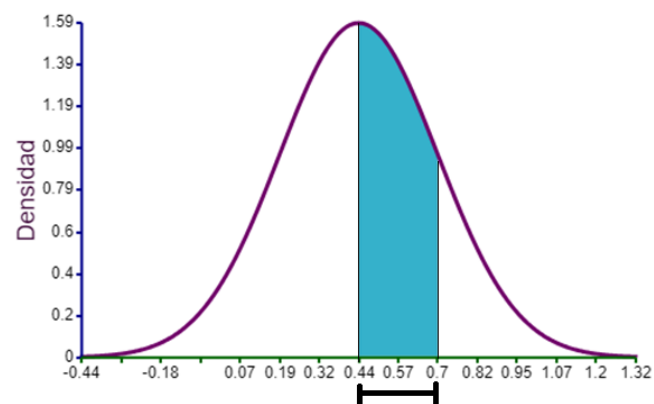
- a) Promedio
- b) Desviación estándar
- c) Rango

Pregunta 5. Suponiendo que las calificaciones en "Geometría" siguen una distribución normal estándar, ¿Cuál de las siguientes áreas bajo la curva (secciones sombreadas) representa la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar haya obtenido una calificación superior a una desviación estándar (25,14) por encima del promedio?

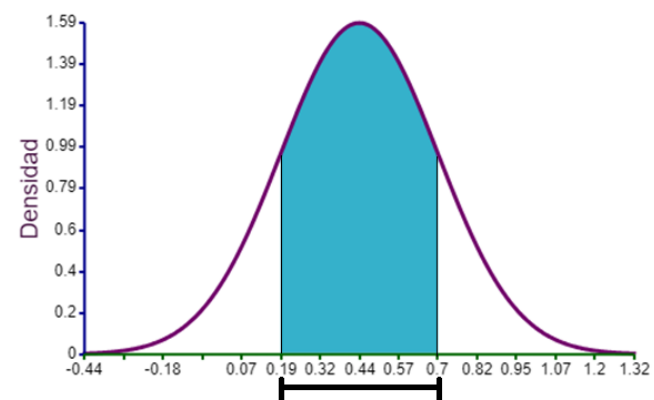
a.



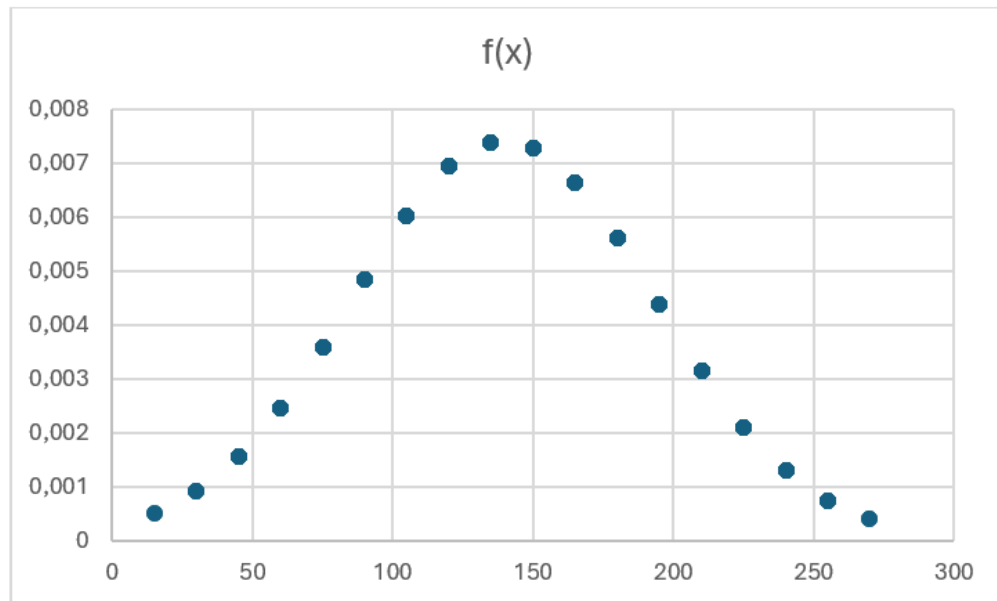
b.



c.



USANDO LA SIGUIENTE GRÁFICA, CONTESTA LAS PREGUNTAS 6 Y 7



Pregunta 6. De acuerdo con la imagen anterior, Pablo afirma que siempre que se va a estandarizar una distribución normal independientemente de los valores de la media y la desviación estándar, si $x = \mu \pm \sigma$ entonces $z = \pm 1$, a lo cual, Fernanda le indica que esa afirmación no es correcta porque la estandarización no puede tener valores negativos.

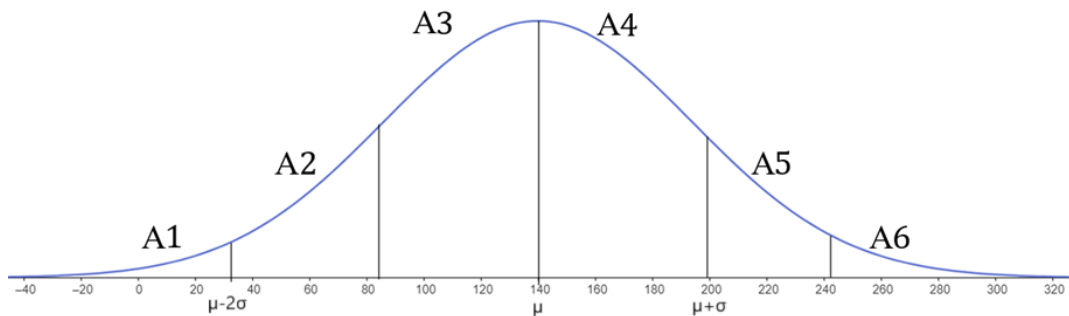
Si tuvieras que tomar una postura ante ambas afirmaciones, ¿cuál es la decisión correcta?

- a) Apoyar a Fernanda dado que, al ser un área bajo la curva y una probabilidad, no puede tener valores negativos.
- b) Apoyar a Pablo e indicarle a Fernanda que se pueden presentar valores negativos al estandarizar la distribución normal, ya que es una función simétrica.
- c) Estar de acuerdo con ambos, si bien Fernanda tiene un punto a favor por los valores negativos, Pablo también, si se toma únicamente $x = \mu + \sigma$ se verifica que $z = 1$.

Pregunta 7. Si deseamos realizar la tipificación de los valores de x , es decir, transformar x a la variable z , ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre la forma y la ubicación de la nueva gráfica en términos de la media y la desviación estándar?

- a) La nueva gráfica tendrá la misma forma, pero estará centrada en $z = 0$, y su desviación estándar será 1.
- b) La nueva gráfica conservará la misma forma, pero estará centrada en $z = \sigma$ y su desviación estándar será μ .
- c) La nueva gráfica será idéntica, sin ningún cambio en la forma, la media o la desviación estándar.

USANDO LA SIGUIENTE GRÁFICA, CONTESTA LAS PREGUNTAS 8 Y 9



Pregunta 8. La Ilustración anterior muestra una campana de Gauss la cual modela el desempeño global de los estudiantes representados en gráfica de distribución normal simétrica con una media de 140 y una desviación estándar de 54. Además, se detallan las áreas bajo la curva en la función de densidad. De acuerdo con la información anterior, ¿es posible inferir el desempeño correspondiente de los estudiantes ubicados en A4?

- a) No es posible inferir el desempeño de los estudiantes en A4, ya que la gráfica solo presenta áreas y no se incluyen los valores específicos de los estudiantes.

- b) El desempeño de los estudiantes en A4 corresponde a aquellos que obtuvieron calificaciones superiores a dos desviaciones estándar por encima de la media.
- c) El desempeño de los estudiantes en A4 corresponde a aquellos cuyo puntaje está comprendido entre la media (μ) y una desviación estándar por encima de la media ($\mu + \sigma$), lo que incluye a aproximadamente el 34.1% de los estudiantes.

Pregunta 9. Si A1 y A2 corresponden al área bajo la curva que equivalen de manera correspondiente al 2% y el 14%, ¿es posible saber cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar presente un desempeño superior a la media más 2 veces la desviación estándar?

- a) No es posible dado que hacen falta datos que permitan hacer un proceso de estandarización para poder saber el área bajo la curva.
- b) Por las propiedades de simetría de la curva normal, se puede calcular la probabilidad, la cual correspondería al 2%.
- c) Es posible y equivale a la suma de las áreas A5 y A6 lo cual es igual al 25% por la simetría de la curva normal.

DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE TABLA, RESPONDE LAS PREGUNTAS 10 A 12

La siguiente tabla presenta el promedio y desviación estándar que tuvieron las diferentes facultades de la Universidad del Valle en el simulacro de las Pruebas Saber Pro y TyT realizado en el 2021.

Facultad	Promedio	Desviación
Ciencias Naturales y Exactas	209.6	50.13
Humanidades	134.2	35.66

Ciencias Sociales y Económicas	161.3	10.61
Instituto de Educación y Pedagogía	130.7	16.04
Artes Integradas	110	48.22
Salud	153.3	11.08
Ingeniería	150.4	48.21
Ciencias de la Administración	125.1	9.48

Pregunta 10. Asumiendo que los puntajes en la facultad de Ingeniería siguen una distribución normal con un promedio de 150.4 y una desviación estándar de 48.21, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200?

- a) La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200 es del 0.3516.
- b) La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200 es del 84.83%.
- c) La probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta facultad obtenga un puntaje mayor a 200 es del 0.1518.

Pregunta 11. Andrea afirma que la probabilidad de que un estudiante de la facultad de Ciencias de la Administración obtenga un puntaje mayor a 140 es 0.16. Para llegar a esta conclusión, realiza los siguientes pasos:

- I. Calcula el puntaje Z para 140:

$$Z = \frac{140 - 125.1}{9.48} = \frac{14.9}{9.48} = 1.57$$

II. Usa una tabla de distribución normal para encontrar la probabilidad acumulada correspondiente a $Z = 1.57$, obteniendo 0.9418.

III. Resta esta probabilidad de 1:

$$P(X > 140) = 1 - 0.9418 = 0.0582$$

IV. Finalmente, Andrea concluye que la probabilidad es 0.16.

¿En qué paso cometió un error Andrea?

- a) Paso I: El cálculo del puntaje Z es incorrecto.
- b) Paso III: Debió sumar la probabilidad en lugar de restarla.
- c) Paso IV: Andrea concluye una probabilidad diferente a la obtenida en el cálculo.

Pregunta 12. Luisa quiere calcular la probabilidad de que un estudiante de la facultad de Salud obtenga un puntaje entre 140 y 160. Realiza el siguiente procedimiento:

I. Calcula el puntaje Z para 140:

$$Z = \frac{140 - 153.3}{11.08} = -1.2$$

II. Calcula el puntaje Z para 160:

$$Z = \frac{160 - 153.3}{11.08} = 0.6$$

III. Usa la tabla de la distribución normal para obtener las probabilidades acumuladas:

$$P(Z = -1.2) = 0.1151$$

$$P(Z = 0.6) = 0.7257$$

IV. Suma ambas probabilidades:

$$P(140 < X < 160) = 0.7257 + 0.1151 = 0.8408$$

V. Finalmente, concluye que la probabilidad es del 84%.

¿En qué parte del procedimiento se encuentra el error?

- a) Paso I: El cálculo del puntaje Z para 140 es incorrecto.
- b) Paso IV: Debió restar las probabilidades en lugar de sumarlas.
- c) Paso V: La conclusión es correcta, la probabilidad es 84%.