Dificultades categorizadas por Fandiño presentadas por los estudiantes en situaciones problema con números fraccionarios en tres trabajos de investigación

Javier Armando Laverde Galindo

Liana Alexandra Madroñero Taguada

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área en Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2021

Dificultades categorizadas por Fandiño presentadas por los estudiantes en situaciones problema con números fraccionarios en tres trabajos de investigación

Javier Armando Laverde Galindo

Liana Alexandra Madroñero Taguada

Director

Dr. David Benítez Mojica

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área en Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

2021

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico _____ Fecha

Día	Mes	Año
26	10	21

Código del programa: 3 4 6 9 Resolución del programa: _____

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

Dificultades categorizadas por Fandiño presentadas por los estudiantes en el aprendizaje en las situaciones problemas con números fraccionarios en tres trabajos de investigación

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☑

Director

David Benítez Mojica

Nombre del Primer Evaluador

Wildebrando Miranda

Nombre del Segundo Evaluador

Yonathan Bonelo

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Javier Armando Laverde	1826946	3469	javier.laverde@correounivalle.edu.co	
Liana Alexandra Madroñero	1726175	3469	liana.madroñero@correounivalle.edu.co	

Evaluación

Aprobado ☐ Meritorio ☑ Laureado ☐

Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

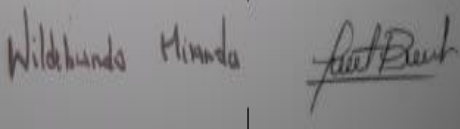
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: dd mm aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes, expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas



Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

¨Defiende tu derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar¨

Hipatía de Alejandría.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por darme la vida y tener la oportunidad de estudiar en una de las mejores Universidades de Colombia.

A mis padres y hermanos por el constante apoyo y paciencia para terminar mi carrera, después de varios obstáculos.

A mis amigos por insistir en retomar y terminar mis estudios.

A todos los docentes que estuvieron involucrados con mi formación como docente y al profesor David Benítez por su orientación en este trabajo.

Javier Armando Laverde Galindo.

En primer lugar, doy infinitamente gracias a Dios, por haberme dado fuerza y valor para culminar esta etapa de mi vida y permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional. De igual forma, dedico esta tesis a mis padres y hermano que han sabido formarme con buenos sentimientos, hábitos y valores.

A los docentes y compañeros que hicieron parte de mi formación académica y profesional.

Al director de trabajo de grado David Benítez por su acompañamiento, dedicación y enseñanzas.

Gracias a todas las personas que ayudaron en la realización de este proyecto.

Finalmente, agradezco a la Universidad del Valle, por darme la oportunidad de acceder a la educación superior, me siento orgullosa por haber sido parte de la mejor para los mejores.

Liana Alexandra Madroñero Taguada

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta un análisis sobre las dificultades que tienen los estudiantes de quinto y séptimo grado en varias situaciones problema en los trabajos de Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015), desarrollados respectivamente en Honduras, Colombia y México que involucran diferentes interpretaciones de números fraccionarios como “parte - todo”, cociente, razón y punto de recta orientada, las investigaciones utilizan guías de trabajo grupales e individuales, juegos y actividades con material concreto usando la técnica del origami que tienen como objetivo hacer que los estudiantes comprendan las diferentes interpretaciones de los números fraccionarios. El análisis se presenta mediante una rejilla comparativa que ubica las situaciones desde las categorizaciones dadas por Fandiño y desde las tipologías de aprendizaje, finalmente se realiza un cuadro comparativo sobre los resultados que obtuvieron los autores sobre las dificultades que todavía presentan algunos estudiantes después de las implementaciones de los trabajos investigativos seleccionados.

Palabras Claves: Dificultades, Tipologías, Fraccionarios, Rejilla, Situación problema y Cuadro comparativo.

Abstract

The following work presents an analysis of the difficulties that fifth and seventh-grade students had in various problem situations in the jobs of Matute (2010), Ortiz (2018) and Sánchez (2015), developed respectively in Honduras, Colombia and Mexico that involve different interpretations of fractional numbers such as "part - whole", quotient, ratio and point of the oriented line, the investigations use group and individual work guides, games and activities with concrete material using the origami technique that aims to make for students to understand the different interpretations of fractional numbers. The analysis is to appear through a comparative grid that locates the problem situations from the categorizations given by Fandiño and from the learning typologies; finally, a close table is made on the results obtained by the authors on the difficulties that some students still present after the implementations of the selected research works.

Keywords: Difficulties, Typologies, Fractions, Grid, Problems Situation and Comparative Table.

Tabla de contenido

1. Aspectos generales de la investigación _____ 15

1.1. Contextualización _____ 15

1.2. Antecedentes _____ 18

1.2.1. Antecedentes Históricos. _____ 18
1.2.2. Antecedentes Curriculares. _____ 21
1.2.3 Antecedentes Investigativos _____ 27

1.3. Justificación _____ 30

1.4. Objetivos _____ 38

1.4.1. Objetivo General. _____ 38
1.4.2. Objetivos Específicos _____ 38

1.5. Formulación de preguntas de investigación _____ 39

1.5.1. Pregunta Central. _____ 39
1.5.2. Preguntas Auxiliares _____ 39

2. Marco Teórico _____ 40

2.1. Contextualización _____ 40

2.2. Referentes teóricos en educación _____ 40

2.2.1 El aprendizaje de conceptos: _____ 40
2.2.2. El aprendizaje de algoritmos: _____ 41
2.2.3 El aprendizaje llamado estratégico: _____ 41
2.2.4 El aprendizaje comunicativo: _____ 41
2.2.5 El aprendizaje semiótico: _____ 41

- 2.2.a Dificultad de Ordenamiento: _____ 42
- 2.2.b Dificultades en el reconocimiento de esquemas: _____ 43

2.2.c Dificultades en la gestión del adjetivo "igual": _____ 44

- 2.2 d Dificultades en la gestión de la equivalencia: _____ 45
- 2.2.e Dificultades en la gestión de figuras no estándar: _____ 45
- 2.2.f Dificultades al pasar de una fracción a la unidad que la generó: _____ 46

2.3. Referentes teóricos en Matemáticas _____ 48

- 2.3.1 La fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua y a veces discreta: 48
- 2.3.2 La fracción como cociente: _____ 48
- 2.3.3 La fracción como relación: _____ 49
- 2.3.4 La fracción como operador: _____ 49
- 2.3.5 La fracción como punto de una recta orientada: _____ 49
- 2.3.6 La fracción como medida: _____ 50

3. Metodología _____ 51

3.1. Contextualización _____ 51

3.2. Tipo de Estudio _____ 51

3.3. Enfoque ____ **54**

3.4. Fases de la Investigación ____ **55**

4. Análisis de las preguntas a través de la rejilla ____ ***57***

4.1. Contextualización ____ **57**

4.2. Categorización de las dificultades por Fandiño ____ **57**

4.2.1 Dificultad de ordenamiento ____ 57
4.2.2 Dificultad en el reconocimiento de esquemas ____ 62
4.2.3 Dificultad en la gestión del adjetivo "igual" ____ 67
4.2.4 Dificultad en la gestión de la equivalencia ____ 71
4.2.5 Dificultad en la gestión de figuras no estándar ____ 75
4.2.6 Dificultad al pasar de una fracción a la unidad que la generó ____ 78

4.3 Cuadro comparativo de los resultados de Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015) sobre las dificultades de los estudiantes después de las implementaciones ____ **80**

5. Conclusiones y Recomendaciones ____ *¡Error! Marcador no definido.*

5.1. Contextualización ____ **84**

5.2. Conclusiones ____ **84**

5.3 Recomendaciones ____ **86**

Índice de Tabla

Tabla 1 ***¡Error! Marcador no definido.***

DBA relacionados con el objeto de investigación *¡Error! Marcador no definido.*

Tabla 2 31

Cuadros comparativos por competencias 2018 31

Tabla 3. 32

Diferencia con el promedio de todos los colegios del país 32

Tabla 4. 53

Rejilla de análisis sobre las dificultades categorizadas por Fandiño 53

Tabla 5. 57

4.2.1 Dificultad de ordenamiento 57

Tabla 6 62

4.2.2 Dificultad en el reconocimiento de esquemas 62

Tabla 7. 67

4.2.3 Dificultad en la gestión del adjetivo "igual" 67

Tabla 8 71

4.2.4 Dificultad en la gestión de la equivalencia 71

Tabla 9 75

4.2.5 Dificultad en la gestión de figuras no estándar 75

Tabla 10 78

4.2.6 Dificultad al pasar de una fracción a la unidad que la generó 78

Tabla 11. 80

4.3 Cuadro comparativo de los resultados de Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015) sobre las dificultades de los estudiantes después de las implementaciones 80

Índice de figuras

Figura 1. Resultados Nacionales Prueba Saber Grado 5 de primaria en el Área de Matemática. Recuperado de Icfes, 2016 (p.28). ***30***

Figura 2. Porcentaje de estudiantes por nivel de desempeño. Matemáticas 1 a 3 grado. 2007 a 2017. Recuperado de Informe Nacional de Desempeño Académico. Español y Matemáticas de 1° a 9°. Honduras 2017. ***33***

Figura 3. Porcentaje de estudiantes por nivel de logro educativo en matemáticas, nacional y por estrato escolar: 2006 y 2010. Recuperado de Aprendizaje en 3° de primaria en México. informe de resultados Excale 03 aplicación 2010. ***35***

Figura 4. Representación pictórica de 3/8. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p.148). ***43***

Figura 5. Representación pictórica de 3/8. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p.148). ***43***

Figura 6. Representación pictórica de ¼. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 149). ***44***

Figura 7. Errores típicos de los estudiantes al representar 1/5 de forma pictórica. Tomada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 149). ***44***

Figura 8. Ejercicios planteados para encontrar fracciones equivalentes en representaciones numéricas. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 150). ***45***

Figura 9. Figuras no estandarizadas para representar fracciones de forma pictórica. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 153). ***46***

Figura 10. Representación pictórica de la fracción desde la ¨parte¨ hasta el ¨todo¨ . Tomada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 153). ***46***

Figura 12. Diferentes soluciones que tiene la anterior actividad. Tomada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 154). ***47***

Dificultades categorizadas por Fandiño presentadas por los estudiantes en situaciones problema con números fraccionarios en tres trabajos de investigación

Introducción

Este trabajo llamado Dificultades categorizadas por Fandiño presentadas por los estudiantes en situaciones problema con números fraccionarios, está inscrito en la Línea de Formación en Didáctica de las Matemáticas del programa Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, Sede Meléndez, pretendiendo exponer las dificultades de los estudiantes al resolver problemas a través de unas rejillas que contienen tres constructos relacionados con tres trabajos Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015), cada trabajo fue implementado en diferentes países: Honduras, Colombia y México, seleccionados de esta manera con el propósito de comparar similitudes frente a las categorizaciones por la autora y verificar la similitud de las dificultades en los estudiantes de otros países.

Por lo anterior, este trabajo utiliza como bases teóricas principalmente a Fandiño desde sus categorizaciones para identificar dificultades relacionadas con números fraccionarios denominadas: Dificultad de ordenamiento, Dificultad en el reconocimiento de esquemas, Dificultad en la gestión del adjetivo “igual”, Dificultad en la gestión de figuras no estándar y Dificultad al pasar de una fracción a la unidad que la generó. Además, el análisis se desarrolla a través de las tipologías de aprendizaje de Fandiño conocidas como: tipología de aprendizaje conceptual, algorítmico, comunicativo, estratégico y semiótico.

Por otra parte, se fundamenta desde Feixas la teoría de la rejilla que expone las condiciones para elaborar una rejilla de análisis, particularmente el diseño de estas rejillas contiene una situación problema de Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015), para comparar y analizar las similitudes de las dificultades que presentan los estudiantes desde los constructos Situaciones Problema por Parte de los Autores, Producción del Estudiante y Fragmentos del Observador.

En cuanto al primer capítulo de este trabajo se exponen aspectos generales de la investigación que inicia con el planteamiento del problema citando apartes de tres trabajos investigativos que exponen las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje y enseñanza de los números fraccionarios, además se muestran mediante los antecedentes históricos el uso que le asignaba cada civilización antigua a los números fraccionarios desde una concepción matemática, religiosa y divina, estos antecedentes se relacionan con el uso que le dan a estos números en la actualidad y la razón por la que no han desaparecido de los currículos matemáticos; también aparecen antecedentes curriculares asociados a los estándares matemáticos de los tres países que sugieren de forma flexible los contenidos matemáticos que deben desarrollar los estudiantes sobre los números fraccionarios, seguido de los antecedentes investigativos que describen la manera de implementar las situaciones problema utilizando material concreto, otros desde guías de trabajo de forma grupal e individual y también la implementación de juegos.

En relación a la justificación se utilizaron diferentes gráficos que exponen los resultados de los estudiantes en pruebas de matemáticas de los tres países, haciendo énfasis en los alumnos que se encontraban en niveles bajos y básicos; finalmente se presentan los objetivos del trabajo que se basan generalmente en encontrar las razones por las que los estudiantes todavía presentan dificultades al resolver situaciones problema con números

fraccionarios desde luego como ya se había mencionado anteriormente desde las categorizaciones y tipologías de Fandiño. Es importante aclarar que los problemas planteados se construyen basándose directamente del objetivo general y objetivos específicos.

Con respecto al capítulo dos, se muestran las tipologías de aprendizaje de Fandiño que se utilizan para analizar las dificultades de los estudiantes, además se muestran las categorizaciones de las dificultades utilizando ejemplos de la misma autora para dejar más explícita la comprensión de cada dificultad y finalmente se exponen algunas interpretaciones de los números fraccionarios que se relacionan en el desarrollo de los análisis ubicados al final de cada rejilla.

En cuanto al capítulo tres, la metodología se muestra desde la teoría de Feixas qué criterios se deben tener en cuenta para construir una rejilla de análisis, además se explicó porque son tan importantes los constructos propuestos en esta rejilla y qué uso se le puede dar a la elaboración del análisis correspondiente, finalmente se explica la construcción de un cuadro comparativo de resultados por los autores que se diseñó con el propósito de conocer más razones por las que los estudiantes siguieron presentando dificultades a la hora de resolver situaciones problema con números fraccionarios.

En relación con el capítulo cuatro y cinco, ya se exponen las rejillas construidas con su respectiva dificultad categorizada y al finalizar cada una de ellas se muestra el análisis que justifica la categorización y el análisis desde las tipologías de aprendizaje de Fandiño. Finalmente se muestran las conclusiones y sugerencias a las que llegó el análisis sobre las razones que se presentaron sobre las dificultades.

1. Aspectos generales de la investigación

1.1. Contextualización

La educación matemática desde hace años ha realizado diferentes investigaciones, nombrando algunas como Hincapié (2011), Ferro & Montaña (2017) y Angulo & González (2017), sobre el estudio de las dificultades que se presentan en la comprensión de los números fraccionarios en sus diferentes interpretaciones, pese a que este concepto se empieza a introducir desde muy temprana edad en los estudiantes de básica primaria de las instituciones educativas, no ha sido suficiente para lograr un acercamiento a la compresión del objeto matemático y las relaciones existentes entre estas interpretaciones, ocasionando consecuencias que se ven reflejadas durante el transcurso de los siguientes años de escolaridad del estudiante cuando se enfrenta a la construcción de nuevos conocimientos matemáticos, como por ejemplo la introducción de los números racionales. Es así como Hincapié (2011) afirma que:

> La enseñanza de las fracciones y sus diferentes interpretaciones son un problema para los docentes de primaria por no comprender su significado y las relaciones que se dan entre ellos, además lo consideran un tema muy complejo. Afirman, que conocen el término fracción y según el concepto que se tiene de él se transmite a los estudiantes y el trabajo del aula se centra en acercarlos a las definiciones dadas en los textos (p. 10).

Además, Ferro & Montaña (2017) dicen que:

> Es familiar escuchar a padres, estudiantes y maestros mencionar que uno de los conceptos más difíciles en el estudio de las matemáticas escolares es el aprendizaje de las fracciones, y es cotidiano también encontrar que la enseñanza de este concepto se ha basado en la aplicación de algoritmos que, si bien es cierto ayudan a encontrar

respuestas acertadas, poco llevan al estudiante a la comprensión del concepto mismo (p. 12).

Finalmente, Angulo & González plantean que: "...Uno de los temas que originan grandes dificultades en el aprendizaje de los alumnos en el grado sexto son los números fraccionarios, puesto que los niños no se apropian de su significado, ni de su aplicabilidad en la vida práctica" (2017, p. 7). Lo anterior tiene fuertes repercusiones en el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes que no reconocen que los números fraccionarios cuentan con diferentes interpretaciones, por lo tanto, si los docentes no tienen presente estas diferencias los estudiantes no contaran con las suficientes herramientas para solucionar problemas relacionados con este tipo de números, aún si los docentes solo se ciñen únicamente a la definición que muestran los textos escolares tradicionales.

Como lo plantea, Behr 1983, (citado en Niño A & Raad Y., 2018, p 100), tal que afirma:

> No es posible aislar por completo cada una de las interpretaciones de las demás. Algunas de ellas tienen vinculaciones «naturales» que no se pueden ignorar, y hacen que, al tratar un determinado aspecto del número racional, implícitamente estén presentes otros.

Cabe resaltar que la importancia de la relación parte-todo da lugar a la construcción de otros objetos matemáticos y facilita la comprensión de las otras interpretaciones. Por consiguiente, si los estudiantes no tienen una apropiación significativa del concepto pueden ocasionar dificultades a la hora de abordar estructuras aditivas y multiplicativas de números fraccionarios. Castro (2015) propone que:

En la matemática escolar, encontramos la relación parte-todo en el estudio de las estructuras aritméticas, tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa, con

diferente significado. La relación parte-todo es el origen para entender dichas estructuras, ya que da lugar a acciones por las cuales se presenta la estructura aditiva (agregar, reunir, segregar, separar) y multiplicativa (reiterar o hacer partes iguales). (p. 17).

Por todo lo anterior, se seleccionaron tres investigaciones, Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015), desarrolladas en Honduras, Colombia y México, que realizaron aplicaciones para mejorar la comprensión de las interpretaciones de los números fraccionarios tal que utilizaron técnicas como el doblez del origami, sistemas de aprendizaje kinestésicos y escenarios como laboratorios de matemática tal que realizaban actividades de manera individual y grupal, permitiendo la interacción entre estudiantes, además estos trabajos se caracterizan por presentar de una manera muy clara la producción de los estudiantes a través de fotografías y fragmentos de protocolos tal que se da interacción entre estudiantes y el profesor. Todo lo anterior tiene el propósito de identificar las dificultades consideradas por Fandiño y comprender las razones por las que los estudiantes no logran resolver las situaciones de manera apropiada, utilizando las tipologías de aprendizaje de la autora, además interpretar los resultados que arrojaron las aplicaciones en los diferentes grados escolares, sobre los estudiantes que siguieron presentando dificultades.

A continuación, se presentan los antecedentes históricos, curriculares e investigativos que resaltan la importancia que tienen los números fraccionarios en antiguas civilizaciones, la vigencia que tienen actualmente en los currículos escolares y la gran cantidad de trabajos investigativos que toman como objeto de análisis este tipo de números.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes Históricos.

Diferentes civilizaciones desarrollaron varios pensamientos matemáticos con fines diferentes como es el caso de los egipcios que utilizaban los números fraccionarios para contar los botines de los faraones, exceptuando el número ⅔ y el ¾, considerándolos como símbolos divinos y definiendo solo como fracciones aquellas que solo tuvieran como numerador el número 1. Desde luego que cada civilización desarrollaba un tipo de matemáticas según sus necesidades y creencias, por lo tanto, existen diferentes sistemas numéricos y diversas representaciones de números fraccionarios como es el caso del papiro de Rhind que contiene 87 problemas de matemática algunos relacionados con los números fraccionarios (Fandiño, 2009, p. 41).

En cuanto a la producción de cereales y granos de los egipcios una vez recogida esta siembra crearon un sistema de medida llamaba el heqat equivalente casi a 4,785 litros; la notación jeroglífica de esta unidad de medida llamada udjat, que significa ojo humano y era dividida en mitad, cuartos, octavos, dieciseisavos, treintaidosavos y sesentaicuatroavos, tenía un significado místico para esta civilización considerado troceado y perdido en el desierto por venganza (Fandiño, 2009, p. 44- 45). Lo anterior da cuenta de los diferentes usos y significados que tenían los números fraccionarios para esta civilización desde el uso para contabilizar sus cosechas, hasta algunas fracciones consideradas como creencias supremas relacionadas con la divinidad.

En relación a los babilonios, hallaron una tableta que contenía varias fracciones con denominadores de base 60 (en escritura sexagesimal asiro - babilonios), la prevalencia de la base 60 se conserva hasta hoy en día con las medidas angulares de 360 grados y el

sistema horario, que equivale 1 hora a 60 minutos y 1 minuto a 60 segundos (Fandiño, 2009, p. 59).

Por otra parte, los chinos también relacionaban los números fraccionarios con creencias cotidianas, ya que el numerador era denominado como el "hijo" y denominador "madre", además a los números los relacionaban con diferencia sexual, asignando géneros distintos emparejándose y generando otros números como si se trataran de seres humanos (Fandiño, 2009, p. 64).

Finalmente, los Árabes les atribuyeron acertijos matemáticos que han sido transmitidos a través de los siglos, retomado por Giuseppe Peano en 1924 que dice Un árabe, al morir, dejó en herencia a sus tres hijos 17 camellos y ordenó que la mitad de ellos fuera dada a su primer hijo, la tercera parte al segundo y la novena al tercer hijo, Se volvió un acertijo cuando el encargado de repartir la herencia decidió incluir su camello dentro de la herencia y así, repartir 9 camellos al hijo mayor, 6 camellos al segundo y al último 2, quedando muy agradecidos los hijos por recibir más de la cuenta y lo que no tuvieron en cuenta es que en realidad se repartieron 17 camellos, concluyendo que el padre no les dejo toda la herencia a sus hijos (Fandiño, 2009, p. 67).

Por otra parte, se reconoce que el matemático Stevin es el primero en intentar incorporar los números fraccionarios como sistema numérico, pues éstos ya se utilizaban en otros campos como en la contabilidad, sin embargo, en esa época no se consideran como un sistema. Waldegg (1996), afirma que:

> En la historia de la matemática, Simón Stevin (1548-1620) es reconocido como el introductor, en la Europa occidental, de la notación decimal para los números fraccionarios; sin embargo, la fundamentación teórica que justifica el uso de dicha notación, y que Stevin pretendió dar en términos de un sistema axiomático-deductivo, no

> ha sido todavía suficientemente valorada. El acercamiento teórico de Stevin dio lugar a una ruptura con la concepción griega que hizo posible el acceso a un concepto moderno de número asociado tanto a magnitudes discretas, como a magnitudes continuas (p. 5).

En cuanto a la concepción de los griegos sobre la unidad solo la asocian como cantidad y no como medida afirmando que si un objeto era dividido en varias partes cada una de ellas en esencia no era el mismo objeto, Waldegg (1996) dice que:

> La unidad, principio generador del número, es el concepto que resulta al abstraer de las "cosas" (de cada cosa) los rasgos que conciernen exclusivamente a su singularidad; de aquí que no tenga ningún sentido, desde el punto de vista griego, pensar en la división de la unidad, sin que ésta pierda su esencia de la misma manera que una cosa singular (un hombre, un caballo) no puede ser dividido sin que pierda su esencia (p. 7). Como se mencionó anteriormente los griegos sólo miraban los números desde el conteo y no como un sistema de medida.

De acuerdo con lo anterior cabe resaltar que la aparición de los primeros números fraccionarios data desde las antiguas civilizaciones tales como los babilonios, egipcios, chinos y griegos que utilizaban estos números según las creencias y necesidades cotidianas, incluso hoy en día son de gran utilidad en nuestra sociedad ya sea en un contexto social o educativo.

En el contexto educativo es fundamental incluirlos en el currículum escolar desde muy temprana edad puesto que los niños se encuentran muy familiarizados con situaciones cotidianas. Por otra parte, Salvador Llinares & Sánchez (1999), manifiesta que la decisión de si las fracciones deben permanecer o suprimirse en la escuela elemental, no puede tomarse aisladamente, sino que depende directamente de los criterios que guíen la elección del currículum para los primeros niveles. Si estos criterios son puramente

prácticos y atienden exclusivamente a las necesidades de la sociedad, entonces algunos autores cuestionan la permanencia de las fracciones (p. 25)

1.2.2. Antecedentes Curriculares.

Los estándares básicos de competencias en matemáticas, (MEN 2006), afirman que desde hace tres décadas, la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. En este sentido, la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos (p. 1).

Dentro de este marco el sistema educativo en Colombia se está dirigiendo en formar estudiantes interdisciplinares, que puedan utilizar sus conocimientos en diferentes situaciones dentro y fuera de las Matemáticas, que también les sirvan como herramientas para afrontar la vida cotidiana y puedan tomar decisiones propias con un sentido crítico sin importar la región del país a la que pertenezcan. En cuanto a los DBA (2015) consideran:

> Los aprendizajes como la conjunción de unos conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende. Son estructurantes en tanto expresan las unidades básicas y fundamentales sobre las cuales se puede edificar el desarrollo futuro del individuo (p. 6).

De esta manera los DBA, son fundamentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes puesto que contribuyen en los desempeños de los contenidos

en las distintas áreas, que permiten conocer las habilidades y desempeños por competencias que desarrolla un individuo en los años de escolaridad, los DBA se establecen en relación con los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias (EBC), que permiten guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje propuestos que deben alcanzar los objetivos en cada año escolar, estos deben ser direccionados en el PEI de las instituciones educativas teniendo en cuenta los enfoques, metodologías, planes de áreas y mallas curriculares.(DBA, 2016, p. 6).

Por consiguiente, los DBA se establecen para cada año de escolaridad, esto no necesariamente se debe considerar como algo totalmente inflexible por el contrario el docente tiene la autonomía de trasladarlos siempre que sea necesario aplicarlos para mejorar los aprendizajes del estudiante que aún no ha logrado mejorar en el desarrollo de actividades. (DBA, 2016, p. 6).

Finalmente, los DBA, desde su publicación en el 2015, en la primera versión, para las áreas de matemáticas y lenguaje, fueron objeto de análisis y reflexión por parte de la comunidad educativa en mesas de discusión en todo el país. De esta revisión surgió una nueva versión de los DBA que rescata las fortalezas de la primera versión y responde a los aspectos que en dichos escenarios de discusión fueron reseñados como oportunidades para el mejoramiento (p.5). En cuanto a los grados terceros, cuarto y quinto de primaria los DBA de matemáticas, en relación con los números fraccionarios se explican en la tabla 1:

Tabla 1

DBA relacionados con el objeto de investigación

GRADO 3	GRADO 4	GRADO 5
Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas. Realiza mediciones de un mismo objeto con otros de diferente tamaño y utiliza las fracciones para establecer equivalencias entre ellos. Utiliza las razones y fracciones como una manera de establecer comparaciones entre dos cantidades. Propone ejemplos de cantidades que se relacionan entre sí según correspondan a una fracción dada. Utiliza fracciones para expresar la relación de "el todo" con algunas de sus "partes", así mismo, diferencia este tipo de relación de otras como las relaciones de equivalencia (igualdad) y de orden (mayor que y menor que). .	**Interpreta las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos.** Describe situaciones en las cuales puede usar fracciones y decimales. Reconoce situaciones en las que dos cantidades cavarían y cuantifica el efecto que los cambios en una de ellas se presentan a partir de los cambios de la otra y determina la razón entre ellas.	**Interpreta y utiliza los números naturales y las fracciones en su representación fraccionaria y decimal para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación**. Interpreta la relación parte - todo y la representa por medio de fracciones, razones o cocientes. Interpreta y utiliza números naturales y racionales (fraccionarios) asociados con un contexto para solucionar problemas. Determina las operaciones suficientes y necesarias para solucionar diferentes tipos de problemas. Resuelve problemas que requieran reconocer un patrón de medida asociado a un número natural o a un racional (fraccionario).

Nota: Fuente: Mallas de aprendizaje; matemáticas grado 3-4-5 documento para la implementación de los DBA. Revisar la fuente porque, aunque estén realizando. los DBA tienen una orientación distinta a las mallas.

De la anterior tabla se puede interpretar que los estudiantes de grado tercero a quinto de primaria deben estar en capacidad de representar gráficamente un número fraccionario y debe reconocer la "parte" y el "todo"; desde luego estos términos anteriormente nombrados varían según las condiciones del problema a resolver, esta interpretación es importante porque se relaciona directamente con las otras, Sánchez (2015) Afirma que:

> El trabajo de contextualizar las fracciones es uno de los retos importantes que se plantea a la enseñanza de esta noción: ya que es necesario diseñar situaciones en las que las fracciones, sus relaciones y operaciones cobren sentido como herramientas útiles para resolver determinados problemas. Por otra parte, la búsqueda de contextos lleva a descubrir que existen diversos tipos de situaciones y que, dependiendo de la situación, las fracciones adquieren distintos significados. A través de diversas actividades, problemas y juegos se analizan estas situaciones y significados (p. 8).

Con respecto a los estándares curriculares para la Educación Matemática básica en México (2010), presentan la visión de una población con conocimientos matemáticos. Éstos comprenden el conjunto de conocimientos, habilidades y disposiciones que se espera de los estudiantes en el dominio de las matemáticas en cuatro etapas claves: Las que deberán conducirlos a niveles altos de competencia matemática. Los estándares deben ser aplicados para todos los estudiantes, independientemente de su sexo, origen cultural y étnico, actitudes previas, niveles de interés, y otros contextos y factores pertinentes y estos deben llevar a los estudiantes a:

- Una manera de pensar que les permita interpretar y comunicar situaciones matemáticamente en una amplia variedad de entornos socioculturales.
- Técnicas apropiadas para reconocer y resolver problemas en una variedad de situaciones.
- Una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina, el trabajo colaborativo y al pensamiento crítico sobre el entorno social y cultural en que se desenvuelven, así como en otros ambientes en los que se desenvolverá en un futuro.

Los estudiantes en la educación básica primaria en México, deben manejar:

1. Número: El número en primaria incluyen los siguientes conjuntos de competencias en convergencia:

1.1. Comprensión del sistema numérico

1.1.1. Leer, escribir y comparar números de diferentes cantidades de cifras, incluyendo fracciones y decimales.

1.1.2. Localizar números, incluyendo decimales en una recta numérica.

1.1.3. Utilizar una amplia variedad de fracciones y representarlas de diversas maneras.

1.1.4. Entender las fracciones como una división.

2. Cálculo

2.2.1. Sumar y restar fracciones.

2.2.2 Sumar y restar decimales.

3. Resolución de problemas numéricos

3.1. Resolver problemas con fracciones y decimales.

4. Patrones y relaciones numéricas.

4.1. Comprender la idea de fracciones equivalentes y utilizarla para comparar fracciones con diferentes denominadores (p. 57).

En cuanto a la secretaría de educación hondureña (2007, p.36). A través de la implementación a nivel nacional de los estándares educativos, busca asegurar la equidad de los aprendizajes y mejorar la calidad educativa, formando ciudadanos con competencias comunicativas, capacidad de análisis y de síntesis, capaces de aprender a aprender, aprender a ser, aprender hacer y aprender a convivir en armonía.

Desde cuarto grado de primaria:

- Leen, escriben y comparan números decimales.
- Representan gráficamente fracciones propias.

Quinto de primaria:

- Representan gráficamente fracciones impropias.
- Convierten fracciones impropias a mixtas y viceversa.
- Convierte fracciones a números decimales hasta décimas y viceversa.
- Determinan fracciones equivalentes por ampliación y simplificación.

En general los Estándares curriculares en Matemáticas de Colombia, México y Honduras, tienen el mismo propósito de servir de guía en cuanto a los contenidos matemáticos que se deben de manejar en cierto grado escolar, sin embargo, no se tienen que cumplir de forma inflexible, puesto que el docente puede decidir el orden y el énfasis que hace en cada objeto matemático. Los fines más importantes que tienen estos documentos es generar una educación equitativa, sin importar la cultura, las condiciones socioeconómicas y en la región que se encuentra la población estudiantil, es decir el lema es educación de calidad para todos, desde luego en la realidad aún se debe trabajar para

lograr esta meta y una de las maneras es analizar las dificultades que tienen los estudiantes para aprender matemáticas, en particular en esta investigación se analizan algunas dificultades que tienen los estudiantes para resolver situaciones problema con los números fraccionarios desde las interpretaciones "parte-todo", cociente, razón y punto de recta orientada, utilizando las tipologías de aprendizaje de Fandiño.

1.2.3 Antecedentes Investigativos

Como se afirmaba anteriormente existen muchas investigaciones sobre números fraccionarios, a continuación, se nombrarán algunas que se caracterizan por implementar una aplicación en un año escolar determinado, en este caso con estudiantes de grado séptimo de secundaria para reforzar y conocer la percepción con respecto a las diferentes interpretaciones de este tipo de números como la de Matute (2010), dice que:

> Las investigaciones sobre las fracciones en su mayoría se han desarrollado en el nivel primario, ya que en este nivel se enfatiza la enseñanza de este concepto, sin embargo, se considera necesario, continuar investigando en los niveles posteriores, es decir en la educación media, y encontrar en qué medida se puede disminuir la complejidad en la comprensión de este importante concepto, tomando en cuenta algunos modelos propuestos o ensayados en otros contextos (p. 8).

La existencia de dificultades y errores por los estudiantes de secundaria en la introducción de los números racionales ha causado que este tipo de trabajos investigativos indaguen nuevamente qué concepción de los números fraccionarios construyeron los alumnos en grados de primaria desde sus diferentes interpretaciones. A continuación

Matute (2010), manifiesta que:

> El presente estudio es una investigación cualitativa de tipo exploratoria, sobre las concepciones matemáticas que poseen los estudiantes de séptimo grado acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones; desarrollada durante el cuarto parcial 2009 en la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio" (ENMPN) y que las sesiones de trabajo se desarrollaron en base a guías de laboratorio, hojas de trabajo y actividades lúdicas las cuales se distribuían por equipos y otras en forma individual. En las guías se les presentaban problemas que involucran el uso de las fracciones cuya lectura y comprensión lo hacían al interior de cada equipo si esta era en grupo, cada uno si era en forma individual, luego procedían a la discusión y apoyo entre ellos, hasta llegar a la verificación de los resultados y así obtener una mejor comprensión de cada una de las interpretaciones. (p.34).

En cuanto a la problemática concerniente se considera una segunda investigación de Ortiz (2018), que surge de la necesidad de mejorar las dificultades que se han presentado en el área de matemáticas en relación a la fracción como interpretación "parte-todo" de acuerdo con los resultados diagnósticos que se aplicaron en el año 2016 en la Institución Educativa Bernardo Jaramillo IED. Esta propuesta con un enfoque pedagógico corresponde a la elaboración e implementación de una propuesta didáctica aplicada a estudiantes de grado quinto de primaria.

De acuerdo con lo anterior Ortiz, (2018) propone que:

> Este trabajo de investigación permite mostrar a los docentes una propuesta dinámica de aprendizaje de fracción parte todo de una manera dinámica a través del origami con el fin mejorar la interpretar fracciones en sus cuatro representaciones semióticas escrita-oral, aritmética, gráfica y concreta. (p.34)

De esta manera es necesario fortalecer el concepto de fracción en la interpretación “parte- todo”, además indagar cuales son los beneficios que aporta el origami en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este concepto.

La última investigación que será objeto de análisis corresponde a Sánchez (2015), aplicada a estudiantes de grado 5 de primaria, utilizando estilos de aprendizajes innovadores que permiten abordar el concepto a través de los sentidos, considerando en el nivel que se encuentran los alumnos han abordado varias interpretaciones de los números fraccionarios. Sánchez (2015), plantea que su investigación:

> Es una intervención pedagógica, aplicada a un grupo de quinto año está compuesto por 20 alumnos, 11 de ellos son niños y 9 niñas, la mayoría ya cuenta con 10 años, dos de ellos tienen 11 años y sólo un alumno tiene 9 años de edad, su estilo de aprendizaje es kinestésico (que aprende a través del tacto y de sensaciones que generan más adrenalina) desde el 60% de los alumnos muestra un mayor interés en este tipo de canal de percepción, el 25% es visual y el 15% auditivo, esto se pudo determinar al aplicar un test para conocer el perfil grupal y lo otorga la Supervisión de Zona Escolar No. 38; Sector IV, a la Escuela Primaria del Valle (p. 56).

En cada bloque se iniciará con una actividad para provocar en los alumnos el interés de conocer y aplicar los conceptos del tema de fracciones, se continuará el desarrollo a través de las lecciones del libro SEP de 5° grado (2013) ya que se busca que los alumnos apliquen en diferentes contextos el significado de fracción y así obtengan un mejor aprendizaje, con el fin de que se refleje en las evaluaciones de cada bloque, así como en las evaluaciones externas, como son las evaluaciones semestrales y finales, realizados por la Supervisión Escolar No. 38 (p.58).

1.3. Justificación

Desde que se implementaron las pruebas Saber del grado 3, 5 y 9 en Colombia han sido sujetas a varios cambios, con el fin de personalizar cada vez más los resultados y dar cuenta de los avances que han tenido los estudiantes frente a las competencias y componentes de la prueba en matemáticas; sin embargo estos resultados a nivel nacional siguen ubicando un buen porcentaje de los estudiantes en niveles insuficientes y mínimos como lo presenta la siguiente tabla a nivel nacional del año 2012 al 2017.

Gráfica 5. Resultados nacionales en Saber 5°, área de matemáticas

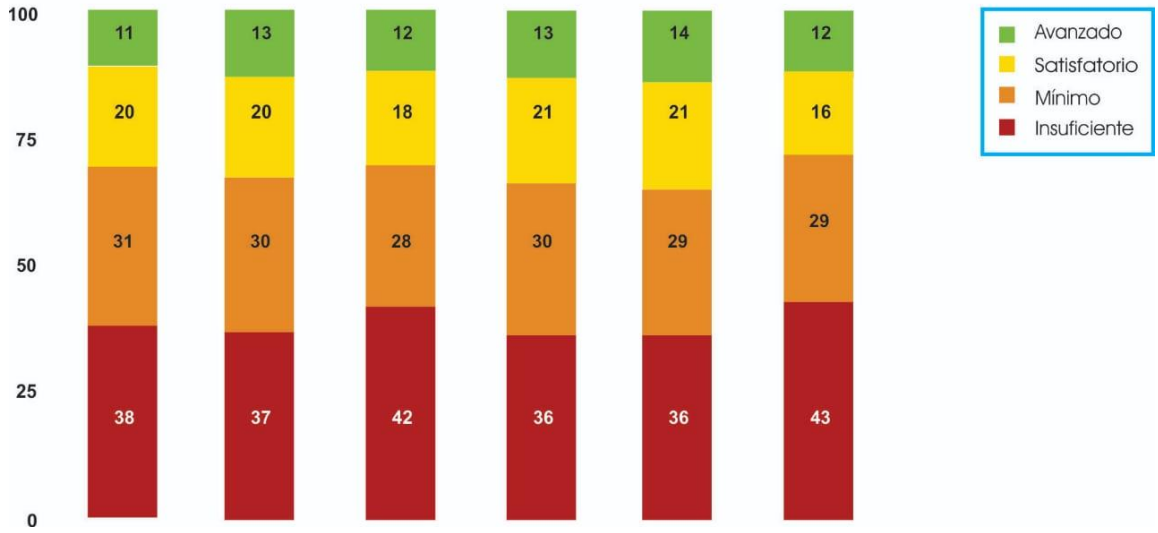


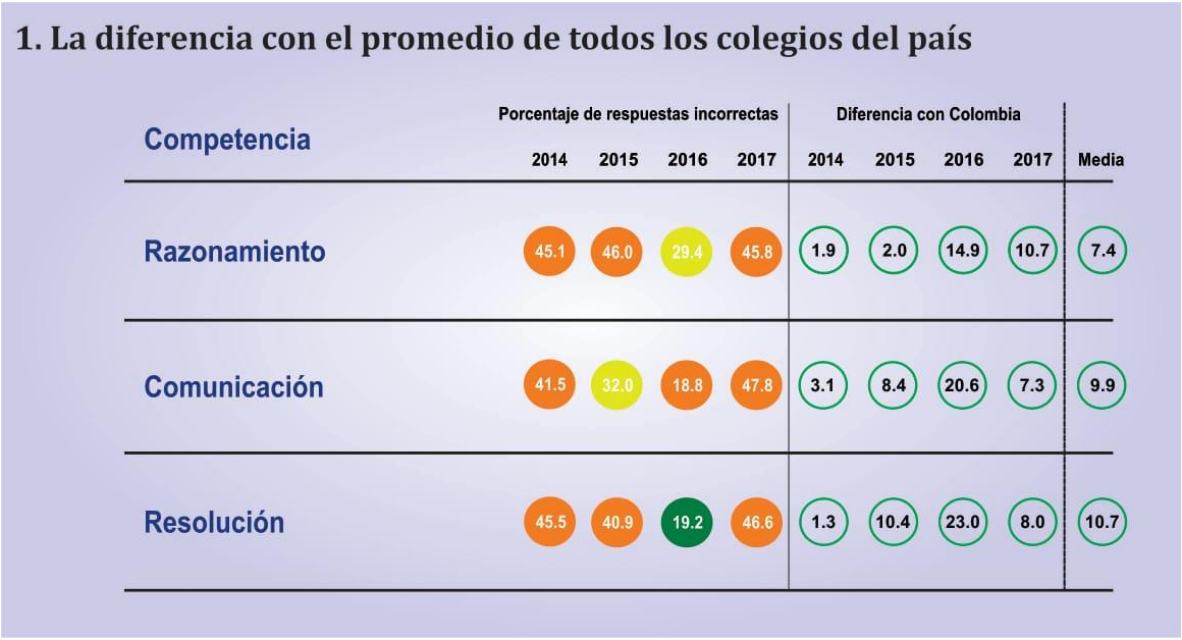
Figura 1. Resultados Nacionales Prueba Saber Grado 5 de primaria en el Área de Matemática. Recuperado de Icfes, 2016 (p.28).

Teniendo en cuenta el gráfico anterior, se puede observar que aproximadamente más de un 60% de los estudiantes en Colombia de grado quinto de primaria se encuentran en niveles mínimos e insuficientes. Lo cual se puede interpretar que más de la mitad de la población estudiantil tienen dificultades frente a la prueba de matemáticas. Sin embargo en cada año no se observa un cambio drástico de resultados, a pesar de que cada año aumentaba el número de estudiantes que presentaron la prueba de matemáticas.

A continuación, se presenta una tabla comparativa de resultados por competencias de los años 2014 al 2017 sobre el porcentaje de respuestas incorrectas de los estudiantes de las pruebas saber grado quinto de primaria.

Tabla 2

Cuadros comparativos por competencias 2018



1. La diferencia con el promedio de todos los colegios del país

Competencia	Porcentaje de respuestas incorrectas				Diferencia con Colombia				
	2014	2015	2016	2017	2014	2015	2016	2017	Media
Razonamiento	45.1	46.0	29.4	45.8	1.9	2.0	14.9	10.7	7.4
Comunicación	41.5	32.0	18.8	47.8	3.1	8.4	20.6	7.3	9.9
Resolución	45.5	40.9	19.2	46.6	1.3	10.4	23.0	8.0	10.7

Nota. Recuperado de Prueba Saber 2018, p.14.

En términos generales en todos los colegios de Colombia se puede observar que los rendimientos en las diferentes competencias de las pruebas en matemáticas de grado quinto de primaria en el año 2017 fueron las más bajas a diferencia de años anteriores, cabe resaltar que en el 2017 todos los estudiantes presentaron el núcleo de lenguaje y

matemáticas por tal razón la población de estudiantes es mucho más grande que en años anteriores.

En la siguiente tabla comparativa se muestra el promedio de todos los colegios participantes de Colombia frente al porcentaje de respuestas incorrectas de estudiantes de quinto de primaria sobre los aprendizajes.

Tabla 3.

Diferencia con el promedio de todos los colegios del país

Nota. Recuperado de Prueba Saber, 2018, p.15. Informe nacional de las pruebas SABER 2014 a 2017 publicado en el 2018.

1. La diferencia con el promedio de todos los colegios del país

Aprendizajes	Porcentaje de respuestas incorrectas 2014	2015	2016	2017	Diferencia con Colombia 2014	2015	2016	2017	Media
Expresar grado de probabilidades de un evento. usando frecuencias o razones (Aleatorio)	82.3	31.3		50.5	-19.8	5.5		5.3	-3.0
Reconocer e interpretar números naturales y fracciones en diferentes contextos (Numérico Variacional)	51.0	52.1	00	48.5	-3.4	-8.2	19.3	10.7	4.6
Establecer relaciones entre los atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes. (Espacial Métrico)	41.2	21.9	46.1	54.3	0.6	11.1	19.7	-1.8	7.4
Utilizar sistemas de coordenadas para ubicar figuras planas u objetos y describir su localización (Espacial Métrico)			11.5	51.6			17.3	3.7	10.5
Describir e interpretar propiedades y relaciones de los números y sus operaciones. (Numérico Variacional)	29.4	25.0	38.5	43.0	-1.5	18.3	15.5	9.8	10.5
Reconocer diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas. (Numérico Variacional)	50.0	25.0	11.5	45.6	1.6	11.1	22.0	10.0	11.2
Clasificar y organizar la presentación de datos. (Aleatorio)	14.7	18.8	0.0	63.1	17.8	18.7	14.6	-4.1	11.8
Identificar unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establecer relaciones entre ellas (Espacial Métrico)	47.1	54.2	26.9	50.0	6.9	1.1	35.5	5.9	12.4
Traducir relaciones numéricas expressadas gráfica y simbólicamente. (Numérico Variacional)	41.2	28.1	7.7	50.8	13.8	15.8	20.8	7.0	14.4
Hacer traducciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos (Aleatorio).			20.5	41.0			17.3	12.0	14.6
Representar gráficamente un conjunto de datos e interpretar representaciones gráficas (Aleatorio).	29.4	0.0		29.4	11.1	25.4		11.9	16.1
Describir e interpretar datos relativos a situaciones del entorno escolar (Aleatorio).	23.5	12.5	7.7	34.1	1.5	14.8	35.5	18.7	17.1

En la tabla 3 se puede interpretar que los porcentajes mayores de desacierto en los aprendizajes que tienen están relacionados con los números fraccionarios fueron en el 2014 y 2017.

Con relación a lo anterior fue un importante criterio de selección incluir una investigación correspondiente a Colombia, puesto que es importante conocer las percepciones que tienen los estudiantes sobre los números fraccionarios y conocer cuáles son las razones por las que no logran resolver problemas que involucran números fraccionarios.

Por otro lado, se presentan los resultados de las pruebas del Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil en Honduras (MIDEH).

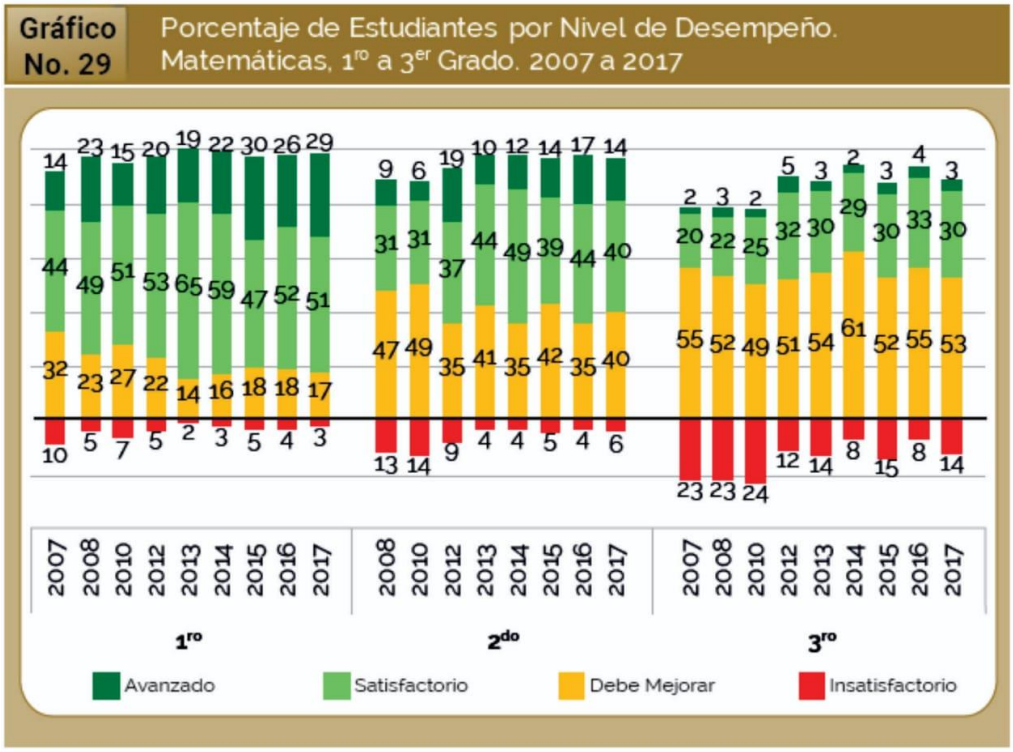


Figura 2. Porcentaje de estudiantes por nivel de desempeño. Matemáticas 1 a 3 grado. 2007 a 2017. Recuperado de Informe Nacional de Desempeño Académico. Español y Matemáticas de 1° a 9°. Honduras 2017.

La figura 2 desde el Informe Nacional de Desempeño Académico Español y Matemática (2017). Afirma que:

Los resultados de la prueba externa estandarizada para el buen desempeño de los sistemas educativos de acuerdo con los estándares de contenido y estándares de desempeño en Honduras, que fueron creados por docentes y especialistas con amplia experiencia de diferentes regiones del país que se clasificaron en los niveles de avanzado, satisfactorio, debe mejorar e insatisfactorio, esta prueba se ha realizado dos veces, la primera fue en el año 2015 y la segunda vez se aplicó en el año 2017 a una muestra representativa de 280.000 estudiantes aproximadamente de educación básica en 298 municipios del país esto les permite conocer cuánto han cambiado los niveles de aprendizaje (p.37).

En el caso específico de Matemáticas, el Informe Nacional de Desempeño Español y Matemáticas, dice que;

Se presenta una tendencia clara a través de los nueve grados, los resultados van descendiendo gradualmente desde primero a noveno grado, con más de un tercio de los estudiantes evaluados en nivel Insatisfactorio y con menos del uno por ciento alcanzando el nivel Avanzado, a partir del quinto grado el porcentaje de estudiantes clasificado por niveles de grado primero a tercero de primaria , debe mejorar en el desempeño académico de matemáticas durante una década en el país de Honduras, se observa que en los grados primero y segundo de primaria se presenta un aumento notable en el nivel avanzado, satisfactorio y disminución en el nivel insatisfactorio, mientras que el grado tercero se presenta una disminución en los resultados de los niveles avanzado y satisfactorio de los estudiantes y un aumento en los niveles de debe mejorar e insatisfactorio.(2017, p.37).

En cuanto a los resultados de las pruebas Excale en diferentes tipos de Instituciones Educativas, se presenta la siguiente figura:

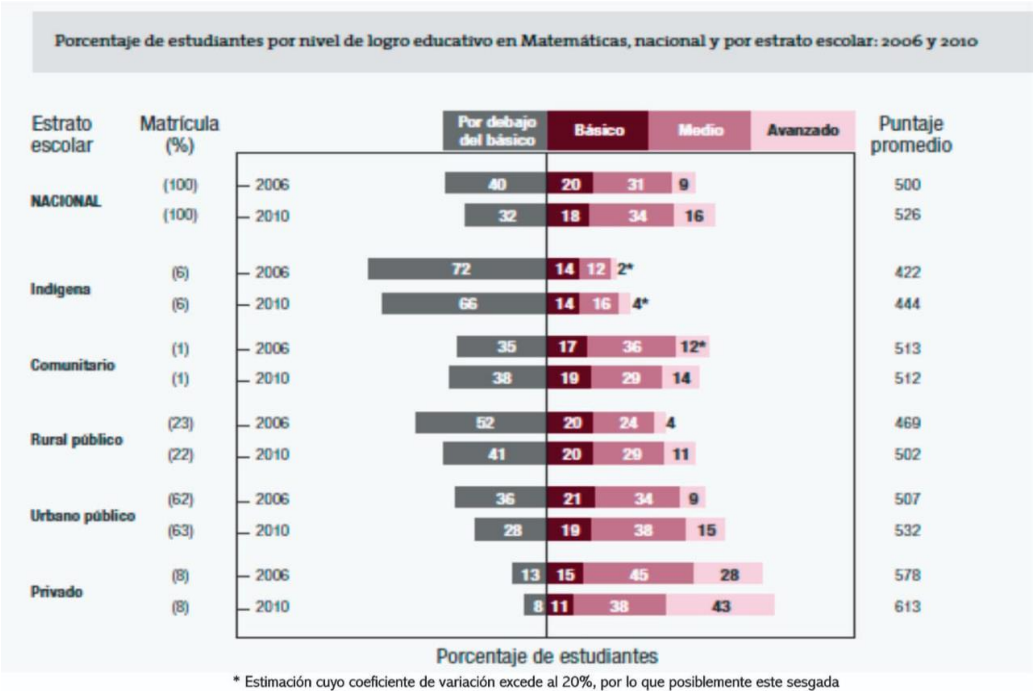


Figura 3. Porcentaje de estudiantes por nivel de logro educativo en matemáticas, nacional y por estrato escolar: 2006 y 2010. Recuperado de Aprendizaje en 3° de primaria en México. Informe de resultados Excale 03 aplicación 2010.

La figura 3 muestra los resultados de los exámenes de la calidad y el logro educativo Excale 03 aplicada por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), tiene como objetivo mejorar y difundir información respecto a la formación educativa con el fin de contribuir a mejorar la educación en México, estas evaluaciones se realizan cada año en tercero de preescolar, tercero de primaria, sexto de primaria y tercero de secundaria en las áreas de español, matemáticas, ciencia naturales y formación cívica y ética.

Con estudiantes de sexto de primaria plantea que:

En el eje temático de Números, sus relaciones y sus operaciones, los estudiantes muestran un mejor desempeño; dentro de este eje, el tema de mayor dificultad es el de fracciones. (Excale 06.2006).

Una situación muy similar se evidencia en los resultados en las pruebas de tercero de secundaria, puesto, afirman que:

Se observó un desempeño muy deficiente de los estudiantes relacionado la solución de problemas donde se requieren utilizar equivalencias entre unidades de medida; y, con el uso de fracciones. Sin embargo en el año 2010 se evidencia que los estudiantes han mejorado con respecto al año 2006 con respecto al nivel básico medio y avanzado y también una disminución del nivel por debajo del básico donde los estudiantes presentan dificultades en que los estudiantes han mejorado notablemente con respecto al año 2006. (Excale 09. 2006).

En general las anteriores tablas y figuras muestran que los estudiantes frente a las pruebas en matemáticas y particularmente con los números fraccionarios, los estudiantes presentan dificultades en el proceso de abordar una situación problema, por esta razón es importante conocer la conceptualización que tiene Fandiño sobre los números fraccionarios y las razones que llevan a los estudiantes a no lograr una solución correcta.

Con relación a la conceptualización, Fandiño (2009) dice que:

La introducción del concepto de fracción parece ser igual en todo el mundo; una determinada unidad concreta es divida en partes iguales, luego, de dichas partes se toman

algunas. Esta aceptación intuitiva de fracción de la unidad tiene la ventaja de ser clara y fácil de adquirir; tiene además la ventaja de ser fácilmente moldeable en la vida cotidiana; pero tiene el defecto de no ser teóricamente suficiente, frente a las varias y multiformes interpretaciones que se quieren dar a la idea de fracción. Como veremos. Una única "definición" no basta. (p. 81).

Con respecto a la anterior cita los niños y niñas en sus primeros años de vida a través de situaciones cotidianas se acercan a la concepción de número fraccionario ya sea compartiendo unos dulces, partiendo un pan, etc.; sin embargo no es suficiente para que la escuela se quede con una percepción tan inicial y no muestre más a fondo el significado del "todo" y de la "parte" en diferentes situaciones y cuestionen a los estudiantes por medio de diferentes tratamientos, saliendo del esquema convencional de plantear los mismos ejercicios cómodos sin generar cuestionamientos en las diferentes maneras que se puede entender la fracción como "parte-todo".

Todo lo anterior sigue confirmando que el problema de abordar los números fraccionarios es más general del que se considera, puesto que los desempeños académicos en Colombia, México y Honduras se observan estudiantes en niveles bajos presentando dificultades en Matemáticas, por esta razón se debe analizar desde las tipologías de aprendizaje de Fandiño, qué tipo de dificultades presentan los estudiantes al resolver problemas con números fraccionarios en las interpretaciones anteriormente nombradas. Por consiguiente, este trabajo tiene los siguientes objetivos.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General.

Analizar las dificultades que se presentan en los estudiantes en el aprendizaje de los números fraccionarios relación “parte-todo”, cociente, razón y punto de recta orientada a partir de la concepción didáctica de Fandiño en los trabajos seleccionados.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Identificar las dificultades categorizadas por Fandiño que presentan los estudiantes en el desarrollo de las situaciones planteadas por los autores de los trabajos seleccionados.
- Analizar las dificultades que presentan los estudiantes, a través de las tipologías de aprendizaje por Fandiño.
- Comparar los resultados a los que llegan los autores después de las implementaciones frente a las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de las situaciones problema con números fraccionarios.

1.5. Formulación de preguntas de investigación

1.5.1. Pregunta Central.

¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números fraccionarios relación “parte-todo”, cociente, razón y punto de recta orientada a partir de la concepción de Fandiño en los trabajos seleccionados?

1.5.2. Preguntas Auxiliares

- ¿Cuáles situaciones problema están relacionadas con las dificultades de los estudiantes desde la concepción de Fandiño frente a las interpretaciones “parte-todo”, cociente, razón y punto de recta orientada de los números fraccionarios?
- ¿Cuáles tipologías de aprendizaje se relacionan con las dificultades categorizadas por Fandiño?
- ¿Cuáles son los resultados de los autores frente a las dificultades que presentaron los estudiantes sobre los números fraccionarios con las interpretaciones “parte todo”, cociente, razón y punto de recta orientada?

Las anteriores preguntas darán respuesta a los objetivos utilizando los referentes teóricos que se plantean en el siguiente capítulo, que son el soporte de la categorización, análisis y comparación de las dificultades que tienen los estudiantes al solucionar situaciones problema con números fraccionarios. Los autores mencionados están relacionados con las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y la descripción de algunas interpretaciones relacionadas con los números fraccionarios.

2. Marco Teórico

2.1. Contextualización

El siguiente capítulo en primer lugar muestra varios componentes que sirven como análisis de la dificultad en la matemática como las tipologías de aprendizaje, que se presentan en el trabajo de Fandiño (2010), luego se muestran las categorizaciones de Fandiño (2009), sobre las dificultades más frecuentes de los estudiantes en la solución de problemas con números fraccionarios, finalmente se expone la conceptualización de algunas interpretaciones de los números fraccionarios como fracción parte-todo, cociente, relación, operador, como punto de recta orientada y como medida desde Fandiño (2009).

2.2. Referentes teóricos en educación

De acuerdo con Fandiño Pinilla (2010). La dificultad en Matemática se puede analizar específicamente de acuerdo a varios componentes en el aprendizaje de la Matemática.

Para Fandiño Pinilla, (2010). Estos componentes se pueden considerar mediante 5 tipologías de aprendizaje diferentes, no libres de superposiciones: conceptual, algorítmico, estratégico, comunicativo y gestión de las representaciones semióticas (p.131).

2.2.1 El aprendizaje de conceptos: Es preliminar a cualquier otro y no hay duda que en matemática tiene un papel dominante, puesto que todas las actividades de enseñanza - aprendizaje tienen la finalidad de que los estudiantes tengan las condiciones y las herramientas para que construyan los conceptos dependiendo de las modalidades que emplee el docente (p.132).

2.2.2. El aprendizaje de algoritmos: No está incluido en el concepto; tan es así que requiere de capacidades mecánicas y mnemónicas que no siempre significa conceptuales. En el aprendizaje de algoritmos incluimos también aquellos mnemónicos (por ejemplo, el aprendizaje de memoria de la tabla de multiplicar, el saber contar de 2 en 2, el saber decir la secuencia numérica en forma regresiva…) (p.132).

2.2.3 El aprendizaje llamado estratégico: Hace parte de la capacidad de resolver problemas o con las estrategias que se ponen en acción en una situación problemática, desde luego se puede generar con intervención docente o también el estudiante enfrentándose solo con sus conocimientos básicos (p.132).

2.2.4 El aprendizaje comunicativo: Por mucho tiempo olvidado en la didáctica, hace parte de la capacidad de expresar la opinión propia sobre cosas materiales, de describir un objeto, de definir, de argumentar, de demostrar. (p.132).

2.2.5 El aprendizaje semiótico: Hace parte de la capacidad de interpretar las diferentes representaciones semióticas de un mismo objeto matemático y de transformarlas la una en la otra, con tratamientos o con conversiones, dando un sentido coherente a cada representación semiótica (p.132).

Con respecto a los dos tipos de transformación de representaciones semióticas, Duval (2016), afirma que:

Los tratamientos son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro; por ejemplo, realizar un cálculo mientras se permanece estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números, resolver una ecuación o sistema de ecuaciones, completar una figura usando criterios perceptuales de conectividad o simetría, etc. (p.13).

> Las conversiones son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar de la notación algebraica para una ecuación a su representación gráfica, pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando letras, etc. La conversión, que es una transformación en la representación, es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado (p. 15).

En cuanto a la categorización de dificultades, Fandiño (2009) dedica un capítulo completo en especificar dificultades típicas cometidas por los estudiantes:

- ***2.2.a Dificultad de Ordenamiento:*** Una dificultad presentada por los estudiantes de manera frecuente, es la de ordenar fracciones, puesto que los estudiantes vienen de estudiar los números naturales, consideran que si el numerador y el denominador son mayores es criterio suficiente para afirmar que esa fracción es mayor, La autora asegura que esta dificultad termina si se le enseña a los estudiantes a encontrar una fracción equivalente y cuando logren tener el mismo denominador ya puede decidir cuál es mayor o menor fijándose en el numerador. Además, la autora también asegura que esta misma dificultad ocurre con los números decimales al ordenar 1,2 y 1,15; el estudiante va a relacionar al 1,15 como mayor, relacionando al 0.15 con el 0.2, Fandiño aclara que esta dificultad puede solucionarse agregando un cero al 1,2 quedando 1,20; teniendo en cuenta que no vaya a traer la regla de los

naturales que agregar un cero a la derecha es igual a multiplicar por 10, (p. 144).

- ***2.2.b Dificultades en el reconocimiento de esquemas:*** A continuación, se presenta la siguiente situación por Fandiño:

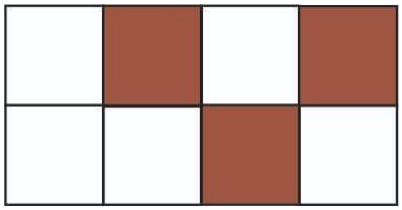


Figura 4. Representación pictórica de 3/8. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p.148).

Lo que la autora espera es que el estudiante reconozca fácilmente es que fueron sombreados los ⅜ del rectángulo unidad y por el contrario, el estudiante tiende a afirmar que esa gráfica representa ⅗, puesto que solo se fija en los 3 cuadros pintados y los 5 cuadros sin pintar, sin reconocer el "todo" de la representación e incluso si esta gráfica se presenta como un diagrama de conjuntos:

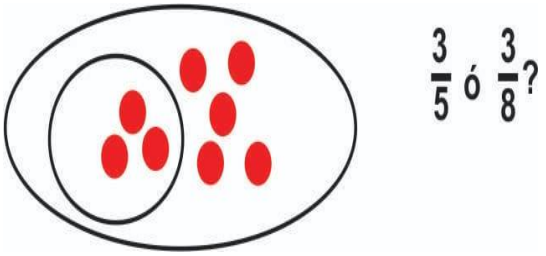


Figura 5. Representación pictórica de 3/8. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p.148).

Con mayor frecuencia el estudiante también se puede confundir e incluso la autora asegura que se complica más la situación cuando se le presenta la representación gráfica de una fracción impropia (p. 148).

2.2.c Dificultades en la gestión del adjetivo "igual":

Figura 6. Representación pictórica de ¼. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 149).

Si se presenta una representación gráfica de un rectángulo dividido por dos rectángulos y dos triángulos rectángulos, pero cada uno con la misma área sin ningún inconveniente cada división representa un cuarto de todo el rectángulo, incluso Fandiño asegura que hay docentes que no aseguran la equivalencia entre las áreas de las divisiones, además la autora asegura que, al pedir dividir un cuadrado en cinco partes, como a continuación:

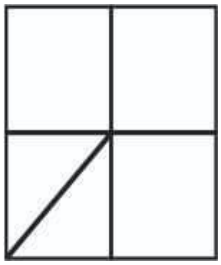


Figura 7. Errores típicos de los estudiantes al representar 1/5 de forma pictórica. Tomada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 149).

El estudiante acude a dividir primero en cuatro partes y luego una de esas divisiones la subdivide en dos, perdiéndose la división en partes "iguales". Insistir en dividir en partes iguales no es estrictamente lo mismo que dividir en figuras congruentes.

- ***2.2 d Dificultades en la gestión de la equivalencia:*** Se presenta la siguiente situación a los estudiantes, deben encontrar su equivalente en los diferentes casos $a_{1\ y\ b1}$, son más fáciles para los estudiantes, Fandiño se encontró que menos del 30 % de estudiantes de 15 años no resolvieron el punto b_2 (p.150).

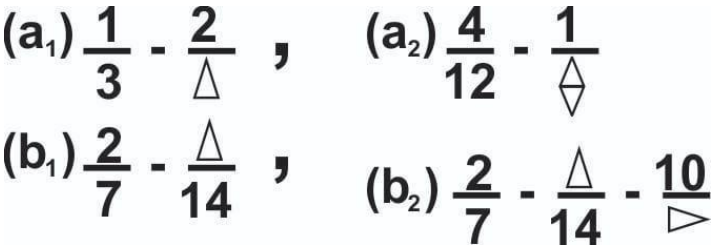


Figura 8. Ejercicios planteados para encontrar fracciones equivalentes en representaciones numéricas. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 150).

- ***2.2.e Dificultades en la gestión de figuras no estándar:*** Fandiño (2009), afirma que:

Para simplificar las actividades rutinarias se tiende a privilegiar siempre el uso de figuras estándar, cuando se requiere encontrar fracciones en contextos continuos: rectángulos, círculos, cuadrados, sólo en esporádicas ocasiones triángulos equiláteros.

Este hecho es peligroso porque genera una misconcepción según la cual se pueden hallar las fracciones solo de esas figuras y no de otras. Por esta razón es fundamental plantear figuras no convencionales para representar diferentes números fraccionarios (p. 152). A continuación, una situación sugerida por la autora:

Figura 9. Figuras no estandarizadas para representar fracciones de forma pictórica. Recuperada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 153).

- ***2.2.f Dificultades al pasar de una fracción a la unidad que la generó:***

Fandiño (2009), asegura que:

Por lo general en los ejercicios de rutina, se da una figura unidad o un conjunto unidad discreto de objetos y se busca una fracción. Muy difícilmente se crean situaciones inversas las cuales, por el contrario, constituyen parte esencial para el aprendizaje de las fracciones, como presentarle al estudiante la representación de una fracción incompleta y pedirle que halle el complemento para así obtener el todo. Un ejemplo dado por la autora:

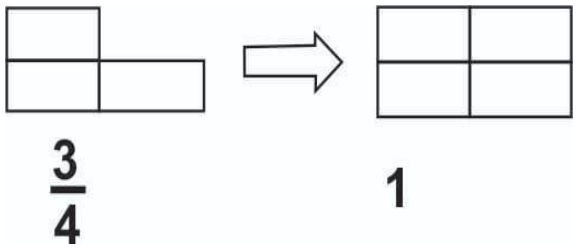


Figura 10. Representación pictórica de la fracción desde la ¨parte¨ hasta el ¨todo¨. Tomada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 153).

Otra situación dada por Fandiño es:

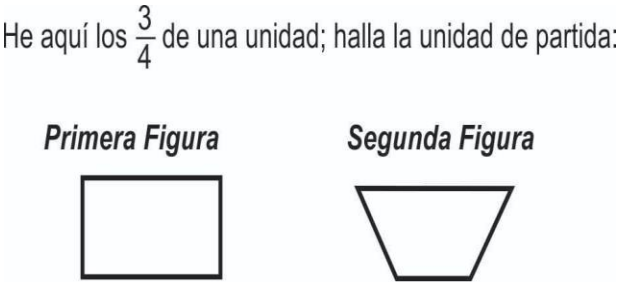


Figura 11. Representación pictórica de la unidad de partida. Tomada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 154). (No sería hallar la unidad, sino un cuarto de la figura según la representación mostrada en las soluciones).

La autora muestra varias soluciones que el estudiante puede realizar:

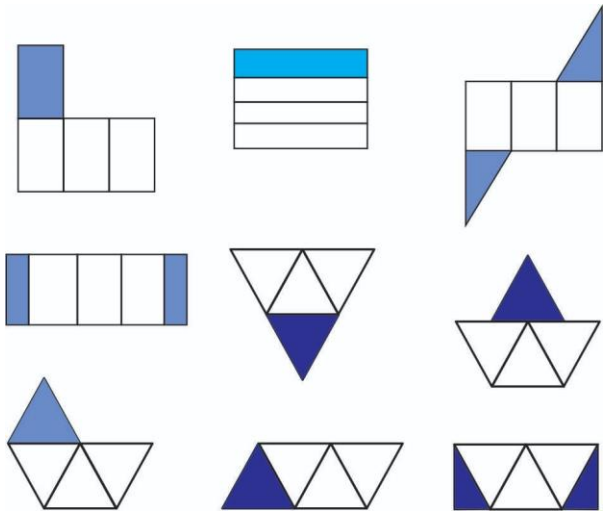


Figura 12. Diferentes soluciones que tiene la anterior actividad. Tomada de las fracciones aspectos conceptuales y didácticos. Fandiño (2009, p. 154).

Acá hay dos elementos que resalta Fandiño, el primero hace alusión a que el estudiante puede dividir el rectángulo o el trapecio en 3 partes iguales como desee, mostradas por el gráfico anterior y el segundo elemento es que el estudiante debe dividir el rectángulo en tantas partes cuanto expresa el numerador rompiendo con una misconcepción Fandiño (2009).

2.3. Referentes teóricos en Matemáticas

A continuación, se muestra la apreciación que Fandiño (2009), sobre el significado de los números fraccionarios en algunas de las diferentes interpretaciones:

- ***2.3.1 La fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua y a veces discreta:*** En cuanto al todo si es una unidad continua la autora explica mediante una situación que no todas las veces es posible tener la superficie de un rectángulo, una pizza o una torta y cortarla en partes iguales tomando una cantidad determinada, puesto que si se pide hallar los 423/874 de una pizza sería concretamente imposible, por otro lado si el todo es una unidad discreta 12 personas o 12 juguetes, sigue sin tener sentido la fracción impropia e incluso las fracciones propias carecen de sentido al pedir hallar los ⅗ del número de personas o juguetes anteriormente nombrados, Fandiño (2009).
- ***2.3.2 La fracción como cociente:*** La escritura a/b fue propuesta precediendo a en los términos de parte/todo: dada una unidad, dividida en b partes (iguales, congruentes, que pueden sobreponerse, consideradas en últimas intercambiables), y tomar a; la unidad de partida podía ser continua, y por lo tanto producir pocos problemas; o también podría ser discreta, es decir un conjunto de c elementos, y por lo tanto producir problemas de "compatibilidad" entre b y c. Un ejemplo que coloca la autora es, Si la unidad constituida por un conjunto discreto de 6 elementos y se toman los ⅗, una técnica es dividir cada elemento en 5 partes y luego tomar 3 de dichos quintos de cada elemento, siempre que éste pueda dividirse en partes. (Fandiño, 2009, p. 109).

- ***2.3.3 La fracción como relación:*** A veces la fracción a/b se usa explícitamente para indicar la relación entre a y b y entonces se escribe a: b, el signo ":" sustituye "-" no tanto y no sólo indicando la operación de división (indicada solamente o por efectuar) sino también al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes que están entre ellas como a está a b. Como ejemplo, un segmento AB de 20 cm de largo y uno CD de 25, el primero son los ⅘ del segundo, lo que puede escribirse: AB= ⅘ CD o bien AB:CD= 4:5. La escritura 4:5 indica la relación entre longitudes de los dos segmentos. (Fandiño, 2009, p.110).
- ***2.3.4 La fracción como operador:*** Con mucha frecuencia la fracción es considerada un operador multiplicativo, es más, este es uno de sus significados más usados en la escuela. Por ejemplo: Encontrar los ⅘ de 20 peras, significa operar como sigue: (20/5) x 4 peras, "encontrar un segmento CD que sea los ⅘ de un segmento AB que mide 20 cm" lleva a decir que CD medirá 16 cm. (Fandiño, 2009, p. 112).
- ***2.3.5 La fracción como punto de una recta orientada:*** No es extraño encontrar en los libros de texto o en las actividades de aula la siguiente propuesta: "Ubicar ¾ en la recta numérica". Limitémonos a la semirrecta racional positiva para disminuir las complicaciones. Responder a esta pregunta significa evaluar aquella fracción como si fuera un número racional, aplicar la relación de orden en Q y diseñar un circulito o una muesca (que indicará dicha fracción) entre el origen (0) y la unidad (1) en una posición apropiada y oportuna. (Haríamos lo mismo si, en cambio de ¾, se propone ubicar el número decimal correspondiente 0, 75). En tal caso, la fracción es vista como un valor-punto

sobre la recta orientada, mucho más cercana a ser un número racional que una fracción. (Fandiño, 2009, p.118).

- ***2.3.6 La fracción como medida:*** Cualquier persona está en capacidad de entender que se trata de ¾ de un litro. Sin embargo, Se trata de una fracción en el sentido primitivo (un litro y decidir llenar los ¾, y otra bien distinta es tener una botella de vino que ya tiene como medida 0,75). (Fandiño, 2009, p. 119).

Las tipologías de aprendizaje, las categorizaciones de las dificultades y las descripciones de algunas interpretaciones de números fraccionarios planteados por Fandiño relacionadas directamente en las situaciones problema, fundamentan el análisis que se pretende desarrollar en este trabajo, por medio de la construcción de unas rejillas de análisis que se describen en el siguiente capítulo. Usando la teoría de la rejilla y sustentando la importancia de cada componente que se utiliza de apoyo para comparar y analizar las diferentes dificultades categorizadas por la autora.

3. Metodología

3.1. Contextualización

En el siguiente capítulo se detalla el instrumento mediante el cual se realizará el análisis de las dificultades categorizadas por Fandiño en los trabajos seleccionados de Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015) propuesto por el objetivo General, luego se explica el tipo de enfoque, después se describe la rejilla de análisis sobre las dificultades categorizadas por Fandiño exponiendo la ubicación de cada constructo. Finalmente se realiza un análisis sobre los resultados que llegaron los autores después de las respectivas aplicaciones frente a las dificultades presentadas por los estudiantes sobre los números fraccionarios en las interpretaciones "parte - todo", cociente, razón y punto de recta orientada establecidas por la autora.

3.2. Tipo de Estudio

El análisis que pretende hacer este trabajo investigativo se realizará a través de una rejilla de análisis que contendrá por el lado vertical en la primera casilla un constructo relacionado con una situación problema planteado por Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015), la segunda casilla con la producción del estudiante y la tercera relacionada con fragmentos del observador; las rejillas se presentarán a través de cada categorización de dificultad dadas por Fandiño. En cuanto a la parte horizontal de la rejilla aparecerán como elementos los apellidos de los autores de cada trabajo investigativo con su respectivo año con el propósito de establecer comparaciones de cada pregunta seleccionada con la relación de dificultad clasificada por la autora. El análisis será complementado desde las tipologías de aprendizaje dados por Fandiño.

Con relación a la definición de la Técnica de la Rejilla:

Feixas et al (2003), dice que:

En primer lugar, hay que recordar que la Teoría de la Rejilla (TR), es un instrumento muy flexible que admite muchas posibilidades diferentes de aplicación. El primer paso antes de administrar la TR, es tener claro su diseño. No se trata de un instrumento estandarizado, sino que se adapta a los objetivos de su administración y al ámbito de su aplicación, sea este el clínico, el educativo, el empresarial o el de investigación (p. 155).

Cada rejilla de análisis estará compuesto de 4 x 4 celdas, correspondiente a 4 filas y 4 columnas, como se mencionó anteriormente el propósito de cada rejilla es comparar de una pregunta por cada trabajo investigativo seleccionado desde las dificultades categorizadas por Fandiño; en total fueron 6 dificultades seleccionadas y cada rejilla contendrá tres preguntas, lo que hace un total de 18 preguntas, sin embargo solo se encontraron 16, puesto que en el trabajo de Ortiz (2018) no se encontraron situaciones en la dificultad de ordenamiento ni en la dificultad al pasar de una fracción a la unidad que la generó, finalmente el propósito es establecer porque los estudiantes siguen presentando este tipo de dificultades después de la ejecución de las diferentes aplicaciones de los trabajos seleccionados utilizando las tipologías de aprendizaje de Fandiño. A continuación, se presenta el modelo de rejilla que será utilizado como herramienta del análisis propuesto:

Tabla 4.

Rejilla de análisis sobre las dificultades categorizadas por Fandiño

Constructos Vs Autores	**Matute (2010)**	**Ortiz (2018)**	**Sánchez (2015)**
Situaciones Problemas Planteados por los Autores			
Producción del Estudiante			
Fragmentos del Observador			

Nota. Elaboración propia.

El primer constructo llamado Situaciones Problema Planteado por los Autores, es el que permite conocer la intención del investigador o el encargado del diseño de la pregunta o situación problema, de lo que quiere evaluar y qué tipo de interpretación conceptual tiene que utilizar el estudiante para que pueda resolverlo, en este caso una de las razones dada por Fandiño (2009) es:

Por la que se presentan dificultades de tipo conceptual es el excesivo uso de registros semióticos, tal que se pueden convertir en un obstáculo para los estudiantes,

está bien manejar varios registros, pero uno a la vez y cada uno con su propia especificidad (p 189).

El segundo constructo producción del estudiante permite evidenciar el tipo de dificultad que tiene el alumno con lo que le preguntan vs con lo que resuelve, como lo afirma Fandiño (2009):

Dar siempre la oportunidad de expresar dudas y escuchar las observaciones. El aula es un lugar de discusión, la clase y sus actividades es un recurso para todos. No descalificar las observaciones que expresan dudas, aun si parecen banales (p 189).

Por último, está el fragmento del observador que, a través de su percepción sobre las dificultades encontradas en las producciones del estudiante, ayuda a encontrar las razones por las que el estudiante no puede resolver las situaciones propuestas, para que el investigador pueda hacer un análisis correcto sobre la dificultad que tuvo el estudiante al enfrentarse al desarrollo de una situación, Fandiño (2009), dice:

No se puede enseñar lo que no se sabe; por lo tanto, es necesario tener el profesionalismo y la humildad de estudiar si se tienen dudas; es decir, el maestro debe tener la humildad de reconocer sino maneja el concepto de fracciones de manera más amplia, conociendo las diferentes interpretaciones y el uso adecuado de cada una dependiendo de la situación a resolver (p 190).

3.3. Enfoque

El enfoque de este trabajo es de tipo cualitativo, puesto que por medio de unas rejillas de análisis se relacionarán las dificultades categorizadas por Fandiño presentadas frecuentemente por los estudiantes; utilizando fragmentos del observador sobre la

percepción que tiene frente a la producción elaborada por éstos, de esta manera se puede seleccionar los estudiantes que no lograron desarrollar de forma apropiada las situaciones propuestas por los autores de las investigaciones que fueron objeto de estudio en este trabajo.

3.4. Fases de la Investigación

La siguiente investigación consta de cuatro fases que se llevarán a cabo para realizar el análisis que categoriza las dificultades expuestas por Fandiño (2009):

La primera fase consiste en seleccionar los tres trabajos investigativos tomando en cuenta el tipo de aplicación utilizado como instrumento para reforzar los números fraccionarios, como el origami en el trabajo de Ortiz (2018), Matute (2010) y Sánchez (2015) que utilizaron secuencias que incluyen juegos, guías de laboratorio, trabajos grupales y escritos que fomentan la discusión y exposición de diferentes estrategias para resolver situaciones problema. Otro criterio importante para la selección es encontrar la percepción del investigador frente a las producciones de los estudiantes e interacciones entre estudiantes frente al desarrollo de las actividades que sirven como apoyo para analizar las dificultades que todavía existen en algunos estudiantes y por último se seleccionaron dos trabajos implementados fuera de Colombia para relacionar la similitud de dificultades en los estudiantes al resolver problemas con números fraccionarios.

La segunda fase es el diseño de la rejilla de análisis que contiene tres constructos importantes para esta investigación, que son las situaciones problema planteados en las tres investigaciones, las producciones de los estudiantes que presentaron dificultades en las

actividades y por último las observaciones e interacciones que manifiesta el investigador frente al desarrollo de las actividades.

La tercera fase es el análisis que se hace frente a la información recolectada de las rejillas elaboradas y relacionarla con la teoría de las dificultades de Fandiño (2009) y las Tipologías, además establecer qué aspectos pueden ocasionar dificultades en el desarrollo de las actividades.

La cuarta y última fase es relacionar los resultados de los autores a través de un cuadro comparativo acerca de los estudiantes que presentan dificultades en la implementación.

Una vez descritos los constructos de las rejillas y el enfoque del trabajo se pueden iniciar con la selección de las situaciones problema relacionados con cada dificultad categorizada por Fandiño, luego desde las tipologías de aprendizaje establecer que necesita comprender el estudiante para lograr resolver los problemas planteados, finalmente ubicar los resultados asociados con los estudiantes que manifestaban dificultades de aprendizaje con los números fraccionarios en el cuadro comparativo. Todo lo anterior se puede observar en el siguiente capítulo.

4. Análisis de las preguntas a través de la rejilla

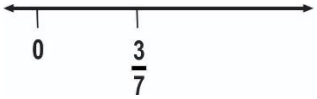
4.1. Contextualización

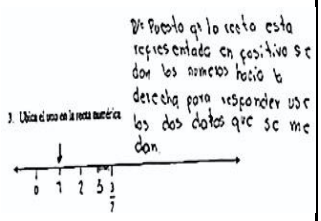
En el siguiente capítulo se encuentran las rejillas que están categorizadas por las dificultades de Fandiño, con su respectiva situación problema planteado, la producción del estudiante y la observación del investigador que permite relacionar las mismas dificultades desde los tres trabajos de investigación seleccionados, al finalizar cada rejilla se encuentra un análisis considerando las tipologías de aprendizaje sobre las razones por las que los estudiantes presentaron dificultades. Finalmente se encuentra un cuadro comparativo que relaciona resultados de los estudiantes que presentaron problemas para solucionar las situaciones planteadas.

4.2. Categorización de las dificultades por Fandiño

Tabla 5.

4.2.1 Dificultad de ordenamiento

Constructos Vs Autores	**Matute (2010)**	**Ortiz (2018)**	**Sánchez (2015)**
Situaciones Problemas Planteados por los Autores	**Problemas de la prueba diagnóstica** Problema **# 3** (p. 65) Ubica el 1 en la recta numérica.  		**Bloque # 3** **Actividad: Fracciones Equivalentes** Se realiza el ejercicio de las dos hojas rectangulares de papel con un medio (1/2) sombreados en cada una, entonces se indicará que tomen una de ellas y la doblen por la mitad, pero

			esta vez horizontalmente, teniendo como resultado esto: Se crea un juego de 20 tarjetas basadas en el modelo de la anterior figura, en parejas cada niño debe tirar una tarjeta gana el que tire la representación mayor (p. 96).
Producción del Estudiante	(p. 66)  (Producción escrita del estudiante) Puesto que la recta está representada en positivo se dan los números hacia la derecha para responder use los dos datos que se me dan.		(p. 97)
Fragmentos del Observador	Con este problema se pretendía que el estudiante pudiera ubicar un número entero, en este caso la unidad dados dos puntos de referencia		También comentaron que habían tenido problemas para identificar la fracción más grande y que no querían voltear a ver la tabla de equivalencias, puesto que

	(fracciones) en la recta numérica. Según las respuestas obtenidas presentadas en el cuadro 3, los estudiantes manifiestan grandes dificultades en la representación de fracciones en la recta numérica ya que la gran mayoría respondieron de forma incorrecta, cuyas respuestas reflejan varios errores, siendo uno de los más comunes ubicar el 1 antes de la fracción 3/7, por lo que se evidencia que no tienen conocimiento sobre la relación de orden y la equivalencia, o mejor dicho hay un mal uso de estos conceptos, principalmente de la relación de orden (p. 65). (En esta situación problema un solo estudiante respondió de forma correcta, cincuenta y cuatro de forma incorrecta y cuatro no respondieron).		no querían, que los demás compañeros se dieran cuenta de que no sabían. Cerré la actividad poniendo ejemplos de fracciones como: ¿Qué es más 3/10 o 2/5? Y ellos contestaban cuál era la mayor sin problemas aparentemente, noté que el grupo tenía una mala concepción del grado anterior, pues ellos decían que les habían enseñado que "el número mayor es el más pequeño" sin embargo no sabían explicar esa analogía (p. 98).

Nota. Elaboración propia

En este caso solo se relacionan dos situaciones de dos investigaciones seleccionadas la de Matute (2010) y Sánchez (2015), en la primera se toma como referente un problema de la prueba diagnóstica tal que le piden a los estudiantes que ubiquen el

número 1 en la recta numérica a partir de la ubicación de la fracción 3/7, en este caso sobre la producción del estudiante se puede observar que ubico el número 1 en la recta numérica sólo teniendo en cuenta el ordenamiento de números enteros, en el momento que justifica afirmando "puesto que la recta está representada en positivo se dan los números hacia la derecha", además tampoco reconoce si el número fraccionario es mayor o menor que la unidad como se afirma en el constructo fragmento del observador.

Con respecto a la investigación de Sánchez (2015), en el bloque # 3 se efectúa un juego organizado por parejas tal que cada estudiante tiene un número determinado de tarjetas que contienen representaciones pictóricas de los fraccionarios, tal que al descubrir una tarjeta cada uno tiene que determinar cuál es la representación mayor para ir ganando en el juego; en el transcurso de éste varios estudiantes se manifestaron con inseguridad frente al reconocer cual es la tarjeta que tiene la fracción mayor, para esta situación la docente les facilitó un cartel donde aparecen las representaciones pictóricas con la representación numérica correspondiente, sin embargo los estudiantes no lo miraban porque no querían demostrarle al compañero que no reconocían la representación de la fracción de la tarjeta como lo expone el constructo fragmento del observador. Para Fandiño superar esta dificultad es importante que el estudiante aprenda a utilizar la transformación de fracciones heterogéneas en homogéneas, para que sea más fácil establecer cuál es mayor o menor comparando sólo los numeradores. (2009. p. 144).

En ambas situaciones problema las tipologías de aprendizaje relacionadas son:

- Conceptual: En la situación problema de Matute, los estudiantes necesitan conocer las características de las fracciones propias para ubicar de forma correcta el número 1 en la recta numérica, además tienen que comprender la interpretación de fracción como punto de una recta orientada, puesto que esta

interpretación le permite conocer el ordenamiento de los números fraccionarios en la recta numérica, también puede utilizar la interpretación como cociente para pasar 3/7 a un número decimal y ubicar de manera más sencilla el número 1. Además, es necesario que puedan interpretar los números fraccionarios como cociente que le permita encontrar un número decimal equivalente, para ubicar de manera más fácil el número 1 en la recta numérica.

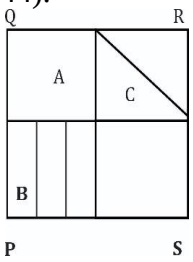
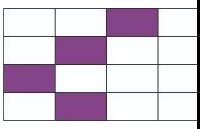
En la situación problema de Sánchez los estudiantes necesitan reconocer el "todo" y la "parte" de una representación pictórica de los números fraccionarios para relacionarla con la representación numérica y lograr reconocer cual es la fracción mayor.

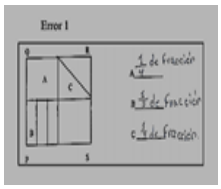
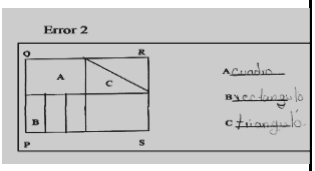
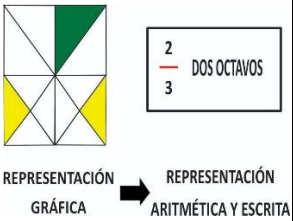
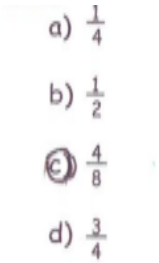
- Algorítmica: Los estudiantes deben conocer cómo pasar de un número fraccionario a un número decimal, realizando la división entre 3 y 7.
- Estratégica: En la situación problema de Matute los estudiantes podían convertir 3/7 en un número decimal y lograr ubicar más fácil el número 1, desde luego tenían que conocer que 3/7 es menor a la unidad, en el caso de la situación problema de Sánchez los estudiantes para ganar el juego tenían que trabajar con antelación las representaciones pictóricas con números fraccionarios.
- Comunicativo: Con respecto a la justificación del estudiante se puede analizar que, para resolver la situación, el alumno trae la relación de orden de los números enteros, además utiliza de manera incorrecta la fracción 3/7 para ubicar el número 1, posicionando la fracción a la derecha.
- Semiótica: Para la situación problema de Matute los estudiantes tienen que saber representar un número entero en la recta numérica dado un número

fraccionario reconociéndose como una transformación de conversión, puesto que el estudiante debe representar el numero 1 como punto de una recta orientada y con respecto a la situación de Sánchez los estudiantes tenían que pasar de una representación pictórica a una representación numérica reconociéndose como una transformación de conversión.

Tabla 6

4.2.2 Dificultad en el reconocimiento de esquemas

Constructos Vs Autores	**Matute (2010)**	**Ortiz (2018)**	**Sánchez (2015)**
Situaciones Problemas Planteados por los Autores	**Problemas de la prueba diagnóstica** Problema # 1 Dado el siguiente rectángulo PQRS como unidad, indique la fracción que representa cada letra (p.44).  A ------- B ------- C -------	**Sección # 5 y 6** A través de los dobleces de origami representar numéricamente la siguiente figura (p.52). 	**Evaluación de diagnóstico enviada por la supervisión escolar** ¿Qué fracción del total de los cuadros representan los cuadros en blanco? (p.12).  a. 1/4 b. 1/2 c. 4/8 d. 3/4

Producción del Estudiante	  (Producciones escritas de los estudiantes E1 y E2). E1:Este estudiante responde: A 1/4 B 1/2 C 1/3 E2: Responde: A Cuadro B Rectángulo C Triángulo	(p.52) 	(p. 12) 
Fragmentos del Observador	Uno de los errores más frecuentes encontrados en este problema era identificar la unidad, es decir que para escribir la fracción que representa la letra B y C consideraban como unidad el cuadro que representa 1⁄4 del rectángulo, ya que este no lo consideraban como el todo, lo que significa que no tienen claro que las relaciones entre el todo y las partes se conserva sin tener en cuenta el	Los estudiantes, en la prueba diagnóstica, no utilizaban la nominación convencional correcta para referir fracciones en letras o no recordaban el significado del numerador y del denominador, tanto así, que en ciertas ocasiones invertían estos dos términos al momento de señalar áreas sombreadas o número de partes obtenidas sobre la	En estos dos reactivos, los alumnos tuvieron confusión ya que cuando se les enseña los números fraccionarios es muy fácil para ellos entender que el número de "abajo" les dice en cuantas partes se ha dividido

	tamaño y la forma (p. 45). En el caso del error 2 se puede observar que el estudiante responde con la figura que representa cada inciso y no con la fracción (p. 46). (De cincuenta y seis estudiantes treinta y ocho respondieron de forma incorrecta y ocho no respondieron nada).	hoja. Casos particulares ocurrieron en la figura 8 Tratamiento de conversión de la fracción entre sus cuatro representaciones semiótica, a partir de la figura de origami. Fuente: Registro diario de campo sesión N° 5 y 6. sesión 2, cuando el estudiante E15 mencionó "uno tres avos" para referirse a la fracción que representaba 1/3 del área sombreada sobre la hoja, o cuando el estudiante E7 pensaba que la fracción aritmética indicada era 1/2 al suponer que el denominador "dos" señalaba el restante de partes sin sombrear, olvidando el atributo "el todo se conserva" (p.53).	el entero y el número de "arriba" cuantas partes se han tomado (p.12).

Nota. Elaboración propia

Un problema planteado de la prueba diagnóstica en el trabajo de Matute (2010), sobre escribir la fracción correspondiente a cada letra manifestó la dificultad de no reconocer esquemas poco tradicionales en este caso dentro del cuadrado se muestran diferentes maneras de división del todo, por esta razón no fue sencillo para los estudiantes encontrar la fracción correspondiente a la letra B y C confundiendo el todo con las

subdivisiones del todo. Por otra parte, plantear este tipo de esquema sin una orientación pertinente por el docente puede traer otro tipo de dificultades como el del adjetivo “igual” por encontrar divisiones de diferentes áreas dentro del mismo “todo”.

En cuanto a la actividad sobre el doblez del papel en el trabajo de Ortiz (2018), en la prueba diagnóstica se presentaron errores por parte de los estudiantes en el momento de expresar de manera verbal y escrita las denominaciones asignadas a las fracciones, en cuanto a la producción del estudiante en el doblez del papel se le pide encontrar la fracción indicada, pero analizando las divisiones de toda la figura estas se encuentran divididas con diferentes áreas produciendo confusión a la hora de determinar qué fracción está representada en la figura total.

Finalmente, en la situación planteada en el trabajo de Sánchez (2015), el estudiante que responde de forma incorrecta no tiene claro que el todo está dividido en dieciséis partes y los rectángulos en blanco son doce, además a través de la simplificación debe llegar a que 12/16 es equivalente a 3/4, otra opción es organizar los cuadrados pintados en una sola columna y considerar la división del todo en cuatro partes iguales y reconocer las otras tres columnas en blanco que representan los 3/4 de la figura total.

En relación a las tipologías de aprendizaje de las anteriores situaciones problema, tenemos:

- Conceptual: En la situación problema de Matute (2010) y Sánchez (2015), los estudiantes deben de reconocer la “parte” y el “todo” de una representación pictórica de un número fraccionario, para lograr encontrar la representación numérica, es importante resaltar que la representación pictórica de Ortiz no es tan fácil de reconocer las partes, puesto que están divididas con diferentes áreas,

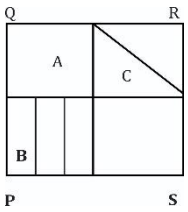
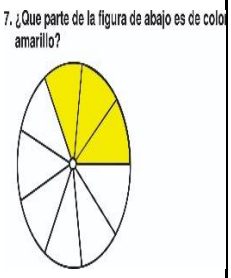
también los estudiantes no solo deben representar lo que está sombreado, además deben saber representar el complemento de la figura.

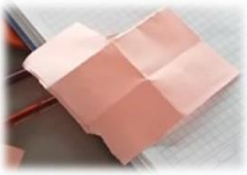
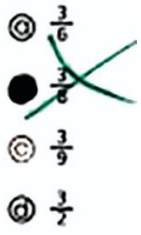
- Comunicativo: El caso del segundo estudiante de la situación de Matute (2010), tiene problemas de comprensión lectora, por esta razón respondió orientándose por la figura geométrica que representa cada letra, sin tener en cuenta que le estaban preguntando sobre la representación fraccionaria.

- Estratégica: En las situaciones planteadas los estudiantes deben de haber interpretado representaciones pictóricas con divisiones del "todo" con diferentes áreas, reconocer el complemento de la representación (lo que no está sombreado) y saber que la suma de la representación más el complemento es igual al "todo" y también sin importar cuantas veces y en qué forma se divide el "todo" siempre se conserva.
- Semiótica: En las situaciones planteadas los estudiantes deben interpretar las representaciones pictóricas dadas para encontrar las representaciones numéricas correspondientes, por lo tanto, corresponde a una transformación de conversión.

Tabla 7.

4.2.3 Dificultad en la gestión del adjetivo "igual"

Constructos Vs Autores	**Matute (2010)**	**Ortiz (2018)**	**Sánchez (2015)**
Situaciones o Problemas Planteados por los Autores	**Problemas de la prueba diagnóstica** Problema # 1 Dado el siguiente rectángulo PQRS como unidad, indique la fracción que representa cada letra (p.44).  A ------- B ------- C -------	**Actividad Segunda Etapa (acción y formulación)** Dividir una hoja (sin utilizar la regla) en partes iguales según el denominador indicado. En el primer caso dividirla en 5 partes iguales y en el segundo en 3 partes iguales (p. 56).	**Examen de Diagnostico Escuela Primaria del Valle A - 1**  (p. 145)

Producción del Estudiante	E1: Este estudiante responde: A 1/4 B 1/2 C 1/3 E2: Responde: A Cuadro B Rectángulo C Triángulo	 (p. 56).	
Fragmentos del Observador	Uno de los errores más frecuentes encontrados en este problema era identificar la unidad, es decir que para escribir la fracción que representa la letra B y C consideraban como unidad el cuadro que representa 1⁄4 del rectángulo, ya que este no lo consideraban como el todo, lo que significa que no tienen claro que las relaciones entre el todo y las partes se conserva sin tener en cuenta el tamaño y la forma (p. 45). En el caso del error 2 se puede observar que	Con el estudiante E16, que dobló la hoja en tres partes de manera desproporcionada o la estudiante E29 que para doblar la hoja en cinco partes iguales tuvo que arrancar una parte que le sobraba (p.56).	De esta pregunta no se tienen observaciones por parte del docente, ni tampoco interacción con el estudiante, sin embargo se puede observar que el estudiante selecciona la opción b. 3/8, porque tradicionalmente una circunferencia siempre se divide más fácilmente en 4 u 8 partes. En este caso se divide en 9 partes iguales lo que hace correcta la

	el estudiante responde con la figura que representa cada inciso y no con la fracción (p. 46).		opción c.

Nota: Elaboración propia

Con respecto al trabajo de Matute (2010) se retomó la misma situación anterior, puesto que los errores cometidos por los estudiantes también tienen relación con la dificultad en la gestión del adjetivo “igual”, pues de manera implícita en la situación planteada se muestran las diferentes maneras que se pueden dividir una unidad en un solo esquema pictórico, aunque de la manera que fue planteado generó confusión a los estudiantes al no identificar el “todo”.

En cuanto a la actividad planteada por Ortiz (2018) al dividir una hoja en 5 partes iguales y otra en 3 sin utilizar la regla, los estudiantes buscaron la manera de dividirla pero no lograron hacerlo en partes iguales como se observa en la producción del estudiante, desde luego es una prueba diagnóstica no convencional tal que las posibilidades de error eran muy probables, en este caso es importante que el docente guía resalte la importancia que si los dobleces van a representar un número fraccionario las divisiones de la hoja deben conservar la misma área .

Por último, en el trabajo de Sánchez (2015) en una representación gráfica se planteó encontrar el número fraccionario correspondiente, en particular la circunferencia

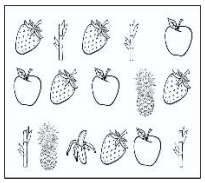
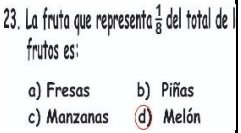
estaba dividida en un número de partes no convencionales, por lo tanto, el estudiante no se fijó en este detalle y por esta razón respondió de manera incorrecta.

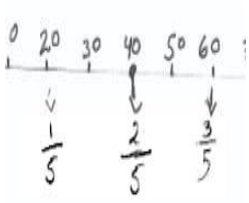
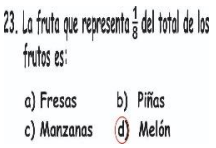
En cuanto a las tipologías de aprendizaje, se tiene:

- Conceptual: En las situaciones anteriores los estudiantes deben conocer que en las representaciones pictóricas de los números fraccionarios, las "partes" pueden tener diferentes formas, pero deben conservar las mismas áreas.
- Estratégica: Los estudiantes deben haber trabajado el concepto de área con diferentes figuras geométricas, que les permita establecer qué "partes" de la fracción conservan las mismas áreas.
- Semiótica: En las situaciones planteadas se reconoce la transformación de conversión puesto que los estudiantes deben interpretar la representación pictórica dada para encontrar la representación numérica de los números fraccionarios. Desde luego es importante que los estudiantes tengan en cuenta que las divisiones de un "todo" deben conservar las mismas áreas, pero no necesariamente las mismas formas.

Tabla 8

4.2.4 Dificultad en la gestión de la equivalencia

Constructos Vs Autores	**Matute (2010)**	**Ortiz (2018)**	**Sánchez (2015)**
Situaciones Problemas Planteados por los Autores	**Guía de Laboratorio # 1** **Actividad # 2** Utilizando la cinta de un metro de color verde, el marcador y la cinta métrica verifique: ¿Qué parte del metro representan 50 cm? Expréselo con una fracción (p. 50).	**Actividad de Argumentación y Validación** Calcar con papel mantequilla 2/16 de una hoja sombreada y compararla con un doblez del origami que equivale a 1/8 (p.58).	**Actividad Diagnostica aprendizajes esperados** Representa gráficamente fracciones e interpreta   (p. 15).

Producción del Estudiante	(p. 51)  	 (p.58)	 (p. 15).
Fragmentos del Observador	Con lo anterior no significa que los demás equipos no lo hicieron bien, lo que sucede es que hasta este momento no se había trabajado con fracciones equivalentes por lo que ellos no lograron establecer que 2/4 = 1/2 (p. 51). (Treinta y cinco estudiantes respondieron de forma correcta, quince de forma correcta y seis en blanco).	Una minoría de estudiantes continuaron con la misma problemática identificada desde la prueba diagnóstica; esto quizás, se debe a que dos de ellos (E13 y E18) tenían problemas de aprendizajes (p. 59).	En cuanto al ejemplo de la fruta que representa 1/8, los alumnos buscan alguna fruta que sólo tenga un dibujo, este sería el caso del plátano sin embargo no la encuentran dentro de las opciones de respuestas, así que contestan la única que les queda, sin importar que ni siquiera está la imagen de un melón (p. 15).

Nota. Elaboración propia

En la actividad propuesta por Matute (2010), a través de una cinta de un metro de color verde se debía encontrar una fracción equivalente a 50 cm y el número 3/4 a cuantos centímetros equivale, los estudiantes no tuvieron inconveniente en encontrar la cantidad equivalente en centímetros a 3/4 , en cuanto a encontrar la fracción de 50 cm los estudiantes llegaron a 2/4 respuesta correcta, pero solo un grupo llego a que 2/4 equivale 1/2 como lo afirma el fragmento del observador.

Con relación a Ortiz (2018), propone calcar con papel mantequilla 2/16 sobre un doblez de origami que equivale a 1/8, la actividad tenía la intención de comparar fracciones equivalentes a través del papel, solo unos pocos estudiantes no lograron establecer la relación de equivalencia entre fracciones, pues el fragmento del observador manifiesta que son estudiantes con problemas de aprendizaje. Por último, Sánchez (2015) en una situación problema diagnóstica, plantea una representación gráfica con opción múltiple para que los estudiantes encuentren la fruta que representa 1/8 del todo. En este caso el estudiante selecciona el melón fruta que no se encuentra representada en la gráfica; en el fragmento del observador dice que el estudiante respondió sin observar la representación gráfica que se le planteó.

En cuanto a las tipologías de aprendizaje de Fandiño, se relacionan las siguientes:

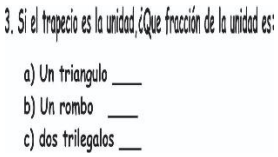
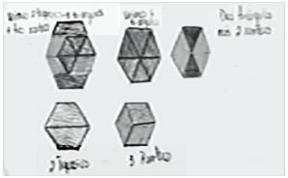
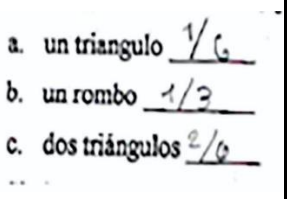
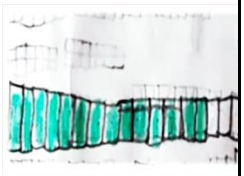
- Conceptual: Los estudiantes deben de tener claro la definición del “todo” y la “parte” de una representación pictórica de un número fraccionario, para lograr encontrar la representación numérica y gráfica equivalente, además deben aplicar la interpretación de fracción como razón.
- Algorítmico: Una herramienta que pueden utilizar los estudiantes para relacionar dos fracciones equivalentes es la simplificación y la amplificación, pues permite

que el estudiante pueda seleccionar respuestas que se encuentren en su mínima y máxima expresión.

- Estratégica: Los estudiantes tienen que conocer las diferentes maneras de dividir un “todo” para encontrar fracciones equivalentes, además deben saber cómo sustraer representaciones numéricas fraccionarias a través de una representación pictórica.
- Semiótico: Es importante que los estudiantes comprendan que un “todo” se puede dividir de diferentes formas conservando la misma área, por esta razón una misma representación pictórica puede representar varias fracciones equivalentes. En las situaciones anteriores se presenta una transformación de tratamiento cuando se le pide a los estudiantes calcar una representación pictórica sobre otra y de conversión cuando se relaciona una medida con un fraccionario que muestra la proporción sobre el “todo” y cuando el estudiante debe utilizar la representación pictórica para encontrar la fruta que representa 1/8 del “todo”.

Tabla 9

4.2.5 Dificultad en la gestión de figuras no estándar

Constructos Vs Autores	**Matute (2010)**	**Ortiz (2018)**	**Sánchez (2015)**
Situaciones Problemas Planteados por los Autores	**Guía de trabajo # 1** Utilizando las figuras de los triángulos, rombos y trapecios forme el hexágono, (encuentre 5 formas diferentes como mínimo) (p. 52). A partir de estas construcciones, responder:  3. Si el trapecio es la unidad ¿Que fracción de la unidad es: a) Un triangulo ___ b) Un rombo ___ c) dos trilegalos ___ (p. 53).	**Actividad (Anexo K) Argumentación y Validación** Representar dos sextos en la siguiente figura (p.60). Y colorea los cuatro séptimos (p. 58).	**Examen de Matemáticas del Bloque 3** Las siguientes figuras están divididas en fracciones, ¿Cuál es la opción correcta? (p. 103). a) 2/3, 3/8 y 1/6 b) 4/5, 3/6 y 3/12 c) 4/6, 3/9 y 1/6 d) 3/2, 3/8 y 3/18
Producción del Estudiante	  (p. 53 y 54).	(p. 60).  	Algunos de los estudiantes tuvieron dificultades en responder (p. 104), sin embargo, no quedó registro de la producción de ningún estudiante.

Fragmentos del Observador	En esta pregunta las respuestas coincidieron en la mayoría de los equipos. Cuatro equipos respondieron en forma correcta, pero un equipo respondió incorrectamente ya que aparentemente hubo una confusión de lo que se tomó como la unidad, sus respuestas fueron: (Ver la producción del estudiante). Al analizar estas respuestas se evidencia que son las mismas que las de la pregunta dos, lo que significa que el equipo visualizó cada pieza tomando el hexágono como todo y no el trapecio (p.54).	En el indicador 3, que corresponde a la elaboración de gráficas y representación de fracciones sin tener en cuenta los atributos ni los términos de la fracción, se refleja que menos del 10% del total de estudiantes definitivamente continuaron con la misma problemática identificada desde la prueba diagnóstica; esto quizás, se debe a que dos de ellos (E13 y E18) tenían problemas de aprendizajes soportados con diagnósticos hechos por profesionales competentes y la estudiante E3 faltaba mucho a clases (p. 60).	En la pregunta anterior los alumnos mencionan que tuvieron dudas en la primera figura, pues creían que la respuesta correcta era 4/6, pero que en la segunda figura sabían que no se trataba de novenos a lo que rápido llegaron a descartar la opción "C" y fue así que lograron dar la respuesta correcta pues ya tienen claro que 4/6 es la fracción equivalente de 2/3. Seis de los 20 alumnos del grupo presentaron problemas al responder (p. 104).

Nota. Elaboración propia

En la situación propuesta por Matute (2010) ningún estudiante tuvo dificultad en hacer divisiones en figuras no estandarizadas, en este caso a través de triángulos y trapecios podían formar hexágonos, sin embargo, un solo grupo se confundió, puesto que

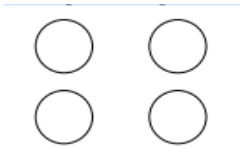
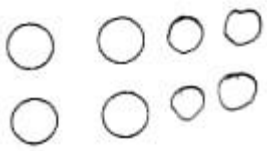
tomó el “todo” como el hexágono y no como el trapecio, que fue la condición para responder la situación. En cuanto al trabajo de Ortiz (2018) se planteó representar dos sextos en una circunferencia en este caso el estudiante logró hacer el número de divisiones correspondiente, pero cada parte no quedo con las mismas áreas, el mismo caso sucede cuando dividió la circunferencia y en Sánchez (2015) se muestran diferentes figuras divididas de varias maneras y encontrar la representación numérica correspondiente a través de la opción múltiple, en este caso fueron pocos los estudiantes que respondieron de forma incorrecta.

Por otra parte, desde las tipologías de aprendizaje de Fandiño, están relacionadas:

- Conceptual: Los estudiantes tienen que tener muy clara la interpretación de la “parte” y del “todo” de una representación pictórica de un número fraccionario, además debe saber extraer información que le permita encontrar la representación numérica equivalente de forma correcta.
- Algorítmica: Algunas de las respuestas dadas en la opción múltiple vienen en su mínima expresión, por lo que es necesario que los estudiantes acudan a la simplificación de números fraccionarios y reconozcan que a partir de este proceso se generan fracciones equivalentes.
- Estratégica: Los estudiantes deben saber construir y dividir representaciones fraccionarias pictóricas de diferentes maneras que involucren hexágonos, trapecios y diferentes figuras geométricas.
- Semiótica: Los estudiantes deben interpretar diferentes representaciones pictóricas de números fraccionarios con divisiones en el “todo” de manera no estandarizada, encontrando las representaciones numéricas equivalentes mediante una transformación de conversión.

Tabla 10

4.2.6 Dificultad al pasar de una fracción a la unidad que la generó

Constructos Vs Autores	Matute (2010)	Ortiz (2018)	Sánchez (2015)
Situaciones o problemas planteados por los autores	**Problemas de la Prueba Diagnostica** **Problema # 2** Estas canicas representan las dos terceras partes de las que posee Roberto. Dibuja las canicas que faltan para completar la colección de Roberto (p. 46). 		**Examen de Diagnostico Supervisión de Zona Escolar Número 38; Sector IV** ¿Con cuántas botellas de 1/4 llenarás la jarra? (p. 151).
Producción del estudiante	 El estudiante explica que como ya había 2 tercios y le agregue 2 tercios más (p. 47).		(p. 151)
Fragmentos del observador	15 de los estudiantes (26%) lo hicieron incorrectamente, dibujaron varias canicas, lo que da la impresión que estaban adivinando y no tenían idea de lo que escribían y otros simplemente no contestaron (p. 47).		No aparece ningún registro de observación por el docente sobre esta situación, ni alguna interacción por parte del estudiante, sin embargo, se puede notar que el estudiante no tiene claro cuánto representa la medida de la botella ¼ de litro con respecto al todo que son los 2 litros de capacidad de la jarra.

Nota. Elaboración propia

En la situación planteada por Matute (2010) se propone una cantidad de canicas representada por los 2/3 partes, el estudiante tenía que establecer el número total de canicas que tiene Roberto, sin embargo, varios estudiantes no lograron encontrar el complemento 1/3 que faltaba para hallar el total de canicas llegando a una equivalencia de 6, representando canicas de más en las respuestas. Finalmente, en el trabajo de Sánchez (2015). Se proponía preguntar con cuantas botellas de 1/4 de libro se podía llenar una jarra con capacidad de 2 litros a lo que el estudiante respondió que 3 veces sin poder comprender la relación de la "parte" con el "todo".

En cuanto a las tipologías de aprendizaje de Fandiño, se relacionan las siguientes:

- Conceptual: Los estudiantes deben reconocer la relación del "todo" de un número fraccionario como una colección de elementos y comprender cuántos elementos corresponden a la "parte" del número fraccionario (interpretación como cociente), dependiendo de la situación planteada.
- Estratégico: Los estudiantes deben relacionar de forma proporcional (interpretación como razón) la "parte" con el "todo" y tener en cuenta que no siempre éste corresponde a una unidad sino a un conjunto de elementos.
- Comunicativa: Desde la producción escrita del estudiante se puede analizar que no tiene claridad sobre qué cantidad de canicas representa 2/3 y por esta razón, también llega al total de canicas de manera equívoca, interpretando de manera incorrecta el "todo" de una fracción.
- Semiótico: Los estudiantes deben hacer e interpretar una representación pictórica de un número fraccionario con un "todo" como colección de elementos y debe llegar a la representación numérica correspondiente y viceversa, a través de la transformación de conversión.

Tabla 11.

4.3 Cuadro comparativo de los resultados de Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015) sobre las dificultades de los estudiantes después de las implementaciones

Resultados de los trabajos investigativos	**Matute (2010)**	**Ortiz (2018)**	**Ortiz (2018)**
	Haciendo un análisis en forma general se puede apreciar que la mayoría de los estudiantes no tienen clara esta interpretación, ya que solamente 3 de los 56 alumnos respondieron correctamente los dos problemas que involucran la interpretación "parte – todo"; lo que significa que los demás lograban responder uno de ellos, ninguno o simplemente lo dejaban en blanco; Por lo que se puede afirmar que, aunque esta interpretación es una de las que se le da más énfasis en los programas de estudio del nivel primario, los estudiantes no logran comprenderla. (p. 43 y 44).	Uno de los hallazgos encontrados en la prueba diagnóstica fueron las fortalezas que tuvieron los estudiantes para representar fracciones propias de manera numérica y escrita, pero ahí en ese punto, también surgieron las dificultades que ellos tienen para hacer Transformaciones de tratamiento y conversión entre esos registros semióticos, sobre todo cuando son fracciones impropias. Otro resultado arrojado fueron los errores que cometen frecuentemente los estudiantes para interpretar fracciones en situaciones de contexto continuo, esto quizás porque ellos no habían visto gráficas con áreas no convencionales o porque desconocían algunos atributos que la fracción como "parte-todo" debe tener, como por ejemplo la igualdad de	Después de la implementación se les hizo un examen final con preguntas abiertas tal que se puede concluir que se presentaron menos errores y sólo hubo casos aislados en donde aún el aprendizaje esperado aún no está consolidado, pero también es importante mencionar que la falta de la comprensión lectora no ayuda a que los alumnos puedan resolver correctamente lo que se les pide, ya que los comentarios de que no entendieron o que creyeron que se les preguntaba otra cosa son muy comunes dentro del grupo (p. 121). Algunos de los comentarios que los alumnos hacían con respecto al trabajo de las propuestas, era la forma tan

	(Esta actividad es la de la representación pictórica, ubicada en la dificultad de reconocimiento de esquemas). Al igual que se clasificaron las estrategias utilizadas por los estudiantes también se encontraron errores al trabajar con situaciones que involucran fracciones, pero cabe aclarar que se dieron con mayor frecuencia en el diagnóstico, lo que significa que durante el proceso estos fueron superados en su mayoría, a continuación, se mencionan algunos de ellos: 1. Mal uso de la recta numérica en la representación gráfica de fracciones. 2. Mal uso de algoritmos (p. 119). En conclusión, con el desarrollo de esta guía se logró valorar la comprensión obtenida por los estudiantes sobre el concepto de fracción en las tres	sus partes con relación a sus áreas y no a sus formas (p. 45). Los errores cometidos en estas dos formas de representación (nomenclaturas para mencionar fracciones y el error conceptual de mencionar un número fraccionario como dos números naturales uno encima del otro), fueron resarciéndose en el transcurso de la secuencia didáctica cada vez que los estudiantes comprenden la relación existente entre el número de dobleces, partes sombreadas y demás atributos de la fracción vistos sobre la hoja con las explicaciones dadas por el docente para escribir fracciones en su forma escrita en letras y aritmética (p. 54).	divertida y atractiva para resolver los problemas de fracciones, les agradó la forma en que podían corroborar sus resultados, pues dicen que el tener el material didáctico les ayudaba a entender si realmente el resultado era lo que ellos creían que era el correcto o no (p. 127). En cuanto a los ejercicios donde se realizaron particiones a igual número de enteros que les correspondería, hubo alumnos que mantuvieron la equivalencia y fueron equitativos en su repartición, reforzando cada vez más el concepto de equivalencia de fracciones, en cambio otros alumnos tuvieron que hacer ejercicios de ensayo y error, comparando sus resultados con los de los demás compañeros, pero aun así siempre llegaban a entender y a asimilar las reparticiones (p. 129).

	interpretaciones (parte-todo, medida, operador) consideradas en este estudio, en donde se pudo observar, la independencia con la que ellos se desempeñaban, ya que la intervención de la maestra fue casi nula, y en el análisis se pudo determinar que no había errores ni dificultades (p. 117		

Nota. Elaboración propia

Es importante que los estudiantes hagan uso de una adecuada comprensión de lectura para una correcta interpretación de la situación problema relacionado con el concepto de fracción, puesto que a la hora de dar soluciones a estas mismas los estudiantes dan respuestas erróneas por el simple hecho de no tener muy claro lo que se les está preguntando. Sin embargo el desarrollo de actividades didácticas y propuestas como lo es el origami con la manipulación de una sencilla hoja de papel que le permiten reconocer la unidad como un ¨todo¨.

Así mismo tiene la oportunidad de desarrollar actividades didácticas y adidácticas donde pueda proponer sus propias estrategias de aprendizaje que lo conlleven a comprender el significado de las diferentes interpretaciones de fracción y evitar que las memoricen.

Por otra parte, con respecto al diseño de propuestas para desarrollar en el aula de clases es importante contar con una base teórica de autores que dejen entrever la construcción de estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas utilizando juegos y actividades con material concreto que permita el acercamiento a las diferentes interpretaciones de los números fraccionarios, además tener en cuenta las razones que tienen los estudiantes para no superar las dificultades presentadas en la resolución de problemas. Pues resolver problemas en grupos pequeños provoca discusiones acerca de los caminos potenciales para resolver los problemas. Cuando un estudiante se enfrenta individualmente a un problema, la primera opción que se le ocurre siempre se lleva a cabo. Las discusiones grupales permiten evaluar el potencial de varias alternativas, que es precisamente lo esencial en el desarrollo de las ideas matemáticas (Santos 2007, p. 91).

En este punto del trabajo ya se conocen cuáles situaciones problema están relacionados con las dificultades categorizadas por Fandiño, también se identificaron las tipologías de aprendizaje relacionadas con las situaciones expuestas en cada rejilla y además se conocen los resultados que exponen las razones por las que los estudiantes todavía presentan dificultades en la solución de problemas con números fraccionarios, por esta razón en el siguiente capítulo se plantean varias conclusiones y sugerencias orientadas al mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes con los fraccionarios. Se espera finalmente que el siguiente capítulo responda de forma completa las preguntas planteadas por este trabajo investigativo.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1. Contextualización

En el siguiente capítulo se responden las preguntas auxiliares planteadas tomando en cuenta los objetivos específicos y los análisis presentados en el capítulo anterior, generando varias sugerencias que permiten hacer una reflexión sobre la importancia que tiene el docente en saber orientar a los estudiantes de cómo abordar y evaluar los números fraccionarios desde sus diferentes interpretaciones. Objeto matemático muy vasto, pero fundamental para abordar otros objetos como el porcentaje, la proporcionalidad, la introducción de los números racionales, entre otros.

5.2. Preguntas auxiliares

- ¿Cuáles situaciones problema están relacionadas con las dificultades de los estudiantes desde la concepción de Fandiño frente a las interpretaciones "parte-todo", cociente, razón y punto de recta orientada de los números fraccionarios?
  R/: Desde los tres trabajos de investigación, Matute (2010), Ortiz (2018) y Sánchez (2015), se encontraron 16 situaciones problema relacionado con las categorizaciones de dificultad establecidas por Fandiño (2009). Las situaciones utilizan juegos con material concreto como el doblez de la técnica de origami, otras utilizan juegos con tarjetas y solicitan calcar representaciones pictóricas de los números fraccionarios para encontrar fracciones equivalentes; en otros casos los estudiantes deben ubicar los números fraccionarios en una recta numérica e interpretar información desde representaciones pictóricas.

- ¿Cuáles tipologías de aprendizaje se relacionan con las dificultades categorizadas por Fandiño?

  R/: A pesar de que todas las situaciones no evalúan las mismas interpretaciones de los números fraccionarios, casi todas las tipologías de aprendizaje se encuentran vinculadas en el proceso de cómo los estudiantes desarrollan las situaciones problema propuestas por cada investigador. Desde que los estudiantes no saben que interpretación de número fraccionario deben utilizar para resolver la situación planteada afecta directamente las otras tipologías de aprendizaje, puesto que en este punto los estudiantes no saben qué camino trazar para solucionar el problema y mucho menos justificar si al resultado que llego tiene coherencia con lo que se le está preguntando, es decir que la tipología conceptual influye drásticamente en las otras tipologías.
- ¿Cuáles son los resultados de los autores frente a las dificultades que presentaron los estudiantes sobre los números fraccionarios con las interpretaciones "parte todo", cociente, razón y punto de recta orientada?

  R/: Particularmente los tres autores de los trabajos seleccionados, manifestaron que un alto porcentaje de los estudiantes lograron comprender diferentes interpretaciones de los números fraccionarios y utilizaron estas interpretaciones para resolver situaciones problema, sin embargo un pequeño número de estudiantes no alcanzaron a lograrlo en su totalidad, puesto que algunos presentaban diagnósticos médicos que no les permitía un proceso de aprendizaje igual al de sus compañeros; en otros casos los autores manifestaban la falta de compresión lectora que no le permitía a los estudiantes comprender lo que se les estaba preguntando. Finalmente, la asistencia intermitente de

algunos estudiantes no facilita un proceso de aprendizaje adecuado para la realización de las actividades propuestas. Otro aspecto relacionado con las pruebas diagnósticas de los tres trabajos investigativos es que la gran mayoría de los estudiantes no llegaban a un resultado coherente con lo que preguntaban en la situación problema.

5.3 Recomendaciones

- Los números fraccionarios son un objeto matemático muy amplio que tiene diferentes interpretaciones, por esta razón es importante que el docente trabaje en un rango de tiempo amplio que permita abordar diferentes problemas que vinculan a su vez otros objetos matemáticos como la proporción, la razón y el porcentaje.
- En el proceso de aprendizaje de los números fraccionarios por parte de los estudiantes es importante seguir vinculando diversos juegos y actividades que utilicen material concreto para complementar la enseñanza de este objeto tan amplio.
- Que el docente siga desarrollando trabajos de forma individual y en equipos, permitiendo socializar las diferentes percepciones y estrategias en resolución de problemas sobre los números fraccionarios.
- Para los docentes en ejercicio y en formación comprender la importancia del papel como investigador que permita reconocer las estrategias y las dificultades

que tienen los estudiantes en la resolución de problemas con números fraccionarios.

- Las dificultades categorizadas por Fandiño sobre los números fraccionarios como “parte-todo”, cociente y razón, se presentan de forma similar en los tres trabajos seleccionados, considerando que no es solo un problema en algunos colegios de Colombia sino que también se refleja en algunos colegios de México y Honduras, puesto que los resultados de las pruebas nacionales en el área de matemáticas de cada país manifiesta los bajos desempeños en la resolución de problemas relacionados con números fraccionarios.
- El aprendizaje y la comprensión de las interpretaciones de los números fraccionarios es un proceso progresivo que necesita de la orientación del docente, que no se puede evaluar en un rango de tiempo limitado ni utilizando un solo modelo de evaluación convencional como es el de lápiz y papel, ya que en los tres trabajos investigativos seleccionados muestran otras maneras de acercar a los estudiantes a la apropiación de los números fraccionarios a través de juegos, actividades con material manipulativo y con un margen de tiempo muy amplio que permite trabajar de manera más pausada permitiendo que los estudiantes asimilen más tranquilamente las actividades propuestas.

REFERENCIAS

Angulo, M & González (2017), *Juegos tradicionales: Una estrategia didáctica para fortalecer la conceptualización de las fracciones en grado sexto*, Universidad del Valle sede del Pacifico, Buenaventura, Colombia. Recuperado de https://biblioitecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/14290

Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de https://hera.ugr.es/tesisugr/24939493.pdf

Duval & Sáenz (2016). *Comprensión y aprendizaje en Matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas.* Recuperado de https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/comprension_y_aprendizaje_en_matematicas_perspectivas_semioticas_seleccionadas.pdf

Estándares Educativos Nacionales (2007). *Español y Matemáticas Básicas de 1° a 6° grado. Republica de Honduras, secretaria de educación*. Recuperado de https://www.se.gob.hn/media/files/basica/Estandares_Espanol_y_Matematicas_de_1_a_6_grado_5oNVMYN.pdf

Fandiño, M, (2009), *Las fracciones, aspectos conceptuales y didácticos.* Recuperado de http://bibliotecadigital.magisterio.co/libro/las-fracciones-aspectos-conceptuales-y-did-cticos

Fandiño, M. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*: *evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Recuperado de https://www.libreriadelau.com/multiples-aspectos-del-aprendizaje-de-la-matematica-evaluar-e-intervenir-en-forma-mirada-y-especifica-cooperativa-editorial-magisterio-9789582010188-matematica/p

Feixas et al (junio de 2003). *La técnica de rejilla como instrumento de evaluación y formulación de Hipótesis clínicas.* Revista de Psicopatología y Psicología Clínica 2003. Recuperado de http://revistas.uned.es/index.php/RPPC/article/view/3952

Ferro & Montaña (2017), *Una secuencia didáctica con material manipulativo para la enseñanza de fracciones heterogéneas en grado 5 en educación básica* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11577/1/Ferro2017Una.pdf

Hincapié, C (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá DC. Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf

Informe Nacional de Desempeño Académico de Español y Matemáticas. 1° a 9° grado en Honduras (2017). *Secretaria de Educación – Proyecto Mejorando el impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras (2018). 130 páginas. http://transformemoshonduras.com/org/2018/08/01/informe-de-desempeno-academico-2017/*

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México (2010). *El aprendizaje en 3º de primaria en México Informe de resultados Excale 03 Aplicación 2010 Español Matemáticas Ciencias Naturales y Ética.* Recuperado de http:// https://historico.mejoredu.gob.mx/wp-content/uploads/2019/03/Art-7-Informes-Autoevaluacion-2010.pdf

Llinares, S. & Sánchez M. (1999) *Fracciones: la relación parte-todo.* Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A.

Matute, K, (2010), *Concepciones matemáticas en los estudiantes de séptimo grado de la escuela normal mixta ¨Pedro Nufio ¨acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica nacional, Tegucigalpa, Honduras. Recuperado de https://studylib.es/doc/4928864/pdf-concepciones-matem%C3%A1ticas-en-los-estudiantes-de-s%C3%A9ptim…

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2015). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas*. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2016). Derechos Básicos de aprendizaje en matemáticas V2. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2015). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

Niño, A. & Raad, Y. (2018). *Interpretación de la fracción como relación parte - todo en contexto y discretos, a partir de la implantación de una secuencia didáctica que privilegia la competencia la competencia comunicativa* (Tesis de maestría en educación), Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. Recuperado de https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/34837/La%20fr%20acci%C3%B3n%20%20como%20%20relaci%C3%B3n%20Parte-Todo%uerpo%20del%20%20Documento.pdf?sequence=1

Ortiz, F, (2018), *Interpretación de la fracción como parte- todo a través del origami.* (Tesis de Maestría en Educación). Universidad Externado de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de https://bdigital.uexternado.edu.co/bitstream/001/1170/1/CAA-Spa-2018-Interpretaci%C3%B3n_de_la_fraccion_como_parte_todo_a_traves_del_origami_Trabajo.pdf

Sánchez, A, (2015) *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en alumnos de 5°grado de educación primaria* (tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Ciudad de México, México. Recuperado de http://200.23.113.51/pdf/31689.pdf

Santos, L, (2007) *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos. Biblioteca de la asociación Nacional de Profesores de Matemática*. México: Editorial Trillas.

Secretaría de educación de Honduras (2018). *Informe Nacional de Desempeño Académico 2017. Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado.* Recuperado de http://transformemoshonduras.com/org/2018/08/01/informe-de-desempeno-academico-2017/

Waldegg, G. (agosto de 1996). *La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número.* Revista de educación matemática 1996. Recuperado de *http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8-2.pdfz*