



Un estudio sobre las concepciones de docentes de matemáticas acerca de la noción de variación en la educación secundaria y media en instituciones educativas de Cali.

Por:

José Manuel Arenas Madrid

Vanessa Escallón Gómez

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Santiago de Cali, 2023



Un estudio sobre las concepciones de docentes de matemáticas acerca de la noción de variación en la educación secundaria y media en instituciones educativas de Cali.

Por:

José Manuel Arenas Madrid

Vanessa Escallón Gómez

Requisito parcial para optar por el título de:

Licenciado/a en Matemáticas y Física

Director:

Mg. Jhonatan Elias Posso Torres

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Santiago de Cali, 2023

Dedicatoria

Primeramente, a Dios y luego a mis padres por siempre apoyarme en mis proyectos de vida.

A mi tía Estella Madrid y a mi abuela Orfa María por siempre creer en mí.

A mi pareja María Isabel Bastidas, y a su madre Flor, por siempre ser mi apoyo.

Jose Manuel Arenas Madrid

A mis padres por apoyarme y por estar presente.

A mis amistades por la ayuda y la comprensión.

Vanessa Escallón Gómez

A todas nuestras amistades que vivieron de cerca el sacrificio de este logro y nos alentaron a
creer en nuestro potencial.

Agradecimientos

Agradecemos principalmente a Dios por darnos la luz, calma y orientación para finalizar este proceso en esta etapa de nuestras vidas.

También queremos agradecer a la licenciada en Matemáticas Alejandra Moncayo López, por la orientación y ayuda en este proceso.

De igual manera agradecemos a nuestro profesor Jhonatan Posso, por su paciencia, dedicación, su apoyo, su sabiduría y su disposición para poder culminar esta investigación.

Finalmente agradecemos a familiares, maestros y amigos cercanos, que nos han apoyado durante este proceso de formación académica y profesional.

Tabla de contenido

Resumen.....	1
Capítulo 1. Planteamiento Del Problema.....	4
1.1 Descripción del Problema.....	4
1.2 Objetivos.....	10
1.2.1 Objetivo General.....	10
1.2.2 Objetivos Específicos.....	10
1.3 Justificación	11
1.4 Antecedentes	12
Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia.....	16
2.1 El Desarrollo del Pensamiento Variacional en la Educación Escolar Básica y Media.....	16
2.1.1 La Actividad Educativa del Docente	17
2.1.2 El Estudio de la Variación en las Matemáticas	39
Capítulo 3. Metodología	44
3.1 Fase 1: Revisión Documental y Comprensión del Problema de Investigación .	45
3.2 Fase 2: El Diseño de la Matriz de Categorías y Elaboración del Cuestionario .	45
3.2.1 Definición de Variable de Investigación.....	46
3.2.2 Primer Momento	47
3.2.3 Segundo Momento	51
3.3 Fase 3: Selección de los Docentes, Aplicación del Cuestionario y Entrevista ..	52
3.3.1 Análisis de las Preguntas del Cuestionario Final.....	54
3.4 El Momento de la Entrevista	56
3.5 Fase 4: Resultados y Análisis de Datos.....	57
3.5.1 Análisis de las respuestas profesora A.....	57
3.5.2 Análisis de las respuestas profesora B	74
3.5.3 Análisis de las respuestas del profesor C	90

3.5.4 Análisis de las respuestas profesora D	106
Capítulo 4. Conclusiones	125
4.1 Conclusiones generales	125
4.2 Reflexiones, recomendaciones y limitaciones	129
Referencias bibliográficas.....	131
Anexos	137
Anexo 1	137

Índice de tablas

Tabla 1	Coherencia vertical de los Estándares Básicos de Competencias.....	24
Tabla 2	Coherencia horizontal de los Estándares Básicos de Competencias 1° a 3° .	25
Tabla 3	Pensamientos y ejes de complejidad conceptual	27
Tabla 4	Acciones mentales del marco conceptual para la covariación.	32
Tabla 5	Marco conceptual para los niveles de la covariación.....	34
Tabla 6	Matriz de análisis sobre las concepciones acerca de la variación.....	48

Índice de figuras

Figura 1	Ejemplo que retrata un problema inicial sobre variable y variación.	22
Figura 2	Ejemplo: propuesta de un problema acerca de la distribución de datos.	28
Figura 3	Cociente de diferencias = $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$	41
Figura 4	Respuesta de la profesora A de la P2c.....	60
Figura 5	Respuesta de la profesora A para P5.	64
Figura 6	Evidencia del proceso para llegar a la respuesta de la profesora A.....	68
Figura 7	Respuesta de la profesora B para P3.....	77
Figura 8	Respuesta de la profesora B para P5.....	80
Figura 9	Respuesta de la profesora B para P8.....	83
Figura 10	Respuesta de la profesora B para P12.....	87
Figura 11	Respuesta del profesor C para P4b.	95
Figura 12	Respuesta del profesor C para P5.	96
Figura 13	Respuesta de la profesora D para P3.	109
Figura 14	Respuesta de la profesora D para P5.	113
Figura 15	Respuesta de la profesora D para P8.	115

Resumen

Este trabajo de investigación presenta una caracterización de las concepciones que tienen algunos docentes de matemáticas en Educación secundaria y media sobre la variación, objeto de estudio primordial para la escolaridad. Sin embargo, el estudio de la variación, por lo general, se ha limitado a procesos mecánicos y memorísticos, que hacen ver la variación como un objeto matemático estático, restringiendo la idea del estudio dinámico inmerso en el cambio. Por otra parte, se destaca el rol del docente en la enseñanza de la variación, debido a la influencia que tienen sus concepciones sobre su actuar docente. Por ello se diseñó e implementó un cuestionario a cuatro profesores, el cual permitió analizar sus concepciones por medio de una matriz, la cual contiene dos variables de investigación; Conocimientos Disciplinarios y Acciones didácticas, de las cuales se encuentran seis categorías en la primera, siendo éstas; continuo numérico, estudio de patrones, la proporcionalidad, la función como relación de dependencia, la variable y los registros de representación, y en la segunda variable se tiene la categoría de; conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación. Lo que permitió caracterizar algunas de las concepciones de los docentes sobre el estudio de la noción de variación. De esta manera, se encontraron similitudes en algunas de las concepciones de los docentes, sobre todo en la variable de Acciones Didácticas, por otro lado, las categorías de investigación que predominan en los docentes con respecto al estudio de la variación son; las funciones, y estudio de patrones.

Palabras claves: Variación, concepciones de docentes, Pensamiento Variacional, patrones y funciones.

Introducción

El presente trabajo de grado aborda las concepciones sobre la variación que tienen algunos docentes de matemáticas en Educación Media en instituciones educativas de la ciudad de Cali, esto debido a la importancia que tiene este objeto matemático en la comprensión de las matemáticas, la resolución de problemas y la modelación, esenciales para la formación de los estudiantes. Sin embargo, diferentes estudios muestran una enseñanza de la variación enfocada en la memorización, problemas estáticos y falta de uso de herramientas de las tecnologías como posible medio para analizar la variación en el ámbito escolar.

Además, se ha estudiado la relación entre las concepciones de los docentes y el diseño de aula para la enseñanza de un objeto matemático a los estudiantes, se ha encontrado que dichas concepciones influyen en las estrategias que usan los docentes.

Este documento se ha organizado en diferentes capítulos, el primero de ellos hace referencia a los aspectos generales de la investigación tales como; los antecedentes que permiten una contextualización de la problemática, la descripción del problema, los objetivos generales y específicos, y la justificación para abordarlo.

En el segundo capítulo se encuentra el marco teórico que sustenta la investigación. Primeramente, se hace un recorrido al estudio de la variación en el ámbito de la educación en Colombia, pasando por el quehacer docente, que incluye la importancia de determinar las concepciones que tienen éstos sobre un objeto matemático. En este apartado también se toma en cuenta los documentos oficiales emitidos por el Ministerio de Educación Nacional, lo que permite ver la variación integrada al Pensamiento Variacional, con las propiedades que se deben evaluar cada año, su transversalidad y su coherencia vertical y horizontal. Después se hace una descripción matemática y disciplinar de lo que es la variación, sus componentes y composición para su estudio.

En el tercer capítulo, se esboza la metodología empleada, la cual constó de cuatro fases: la primera fue la revisión documental y comprensión del problema de investigación, la segunda consistió en el diseño de la matriz de análisis y elaboración del cuestionario, la tercera trató sobre la definición de la muestra, aplicación del cuestionario y entrevista a los docentes, y por último se tuvo la cuarta fase, la cual consistió en los resultados y análisis de datos.

En el capítulo final se presentan las conclusiones y reflexiones que permitieron dar respuesta a la pregunta problema y alcanzar los objetivos propuestos para esta investigación.

Capítulo 1. Planteamiento Del Problema

1.1 Descripción del Problema

El estudio de la variación es uno de los ejes principales para el desarrollo del pensamiento matemático¹. Al respecto, durante la actividad escolar, una de las actividades llevadas a cabo de forma explícita o implícita es el análisis de la covariación entre cantidades de magnitud y las variaciones en el tiempo, siendo su propósito rector el tratar de modelar los patrones de cambio que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (Vasco, 2002). De esta manera, la variación es dinámica y para la comprensión durante el estudio de la misma, se requiere el manejo de los componentes que la conforman.

En relación con el estudio y enseñanza de lo que varía, hay estudios como el de Caballero y Cantoral (2013) y Gónzales (1999), que muestran la existencia de dificultades en la apropiación o comprensión de la noción de variación por parte de docentes y estudiantes y todo lo que ésta implica; de ahí radica la importancia de estudiar la variación realzando los componentes descritos anteriormente, lo que conlleva a un mejor acercamiento hacia nociones como la estadística, el cálculo y temas matemáticos afines, teniendo en cuenta que este último es una rama de las matemáticas, en el cual diferentes investigaciones concuerdan en la existencia de ciertas dificultades para su correcta apropiación en los alumnos de primeros semestres de universidad, lo que genera una deserción estudiantil universitaria de programas académicos con una base matemática (Caballero & Cantoral, 2013).

En las matemáticas escolares se han desarrollado diferentes propuestas didácticas como estrategias para la enseñanza e investigaciones que acercan a los estudiantes y docentes

¹ Def: “Se encuentra estrechamente ligado a la expresión “ser matemáticamente competente” y es subdividido en cinco pensamientos como lo son el numérico, espacial, métrico, aleatorio o probabilístico y variacional. (MEN, 2006)

a la comprensión de los procesos de desarrollo en el pensamiento matemático (numérico, variacional, aleatorio, métrico y espacial). En particular, ha sido especialmente explorado el campo relativo a la resolución de problemas y al desarrollo del pensamiento variacional, teniendo como ejemplo la enseñanza del álgebra y las funciones, considerando los diferentes contextos matemáticos.

Para la comprensión de estas matemáticas existe un componente protagónico que permite el entendimiento del dinamismo y la resolución de problemas que giran en torno a la situación, esto es, a través del estudio de la variación, el análisis de variables presentes y la modelación de procesos. En general, comprender la noción de variación implica analizar la relación entre las cantidades que cambian, de manera que se suscite el pensar de manera variacional al determinar las variables cambiantes junto con la cuantificación de dicho cambio. La variación, además, implica relaciones con diferentes conceptos de matemáticas como son variable, parámetro, función, aleatoriedad, medidas, espacialidad, entre otros, de tal manera que en la escolaridad colombiana se permite pensar en la transversalidad del conocimiento matemático (MEN, 2006).

Por otra parte, la comprensión de la variación, en el ámbito escolar, en principio, conlleva a la formación y actividad del docente de matemáticas y las concepciones que se tengan de las matemáticas que enseña y cómo estas afectan de una u otra manera el aprendizaje de los estudiantes. De acuerdo con lo anterior, Moreno y Azcárate (2003), encontraron en su investigación titulada *Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales* algunas concepciones de los docentes, entre las más importantes para esta investigación son las relacionadas con su actuar en el aula y la enseñanza de la modelación, las cuales son:

- La metodología de enseñanza dominante en el ámbito universitario es la clase magistral, en la que el profesor de matemáticas ocupa un papel central y relevante; ninguno de los profesores del estudio siente la necesidad de utilizar otro tipo de metodología de enseñanza.
- El tratamiento que actualmente se da a la enseñanza de la modelización y de las aplicaciones a situaciones de la vida real se debe a varios motivos:

a) Dificultad conceptual de la modelización y necesidad de conocimientos matemáticos de los que los estudiantes no disponen. Comodidad del profesor frente a la enseñanza mecánica e instrumental de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

b) Concepción personal de cada profesor respecto a la matemática aplicada y su posición en el ámbito de las matemáticas. La mayoría de los profesores establecen una clara línea divisoria entre lo matemático y las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. Todos dan prioridad a lo matemático respecto a la modelización

De lo anterior, se puede decir que las concepciones que tienen los docentes influyen en su actuar en el aula de clase y por qué actualmente se trabaja la modelación de forma errónea

En este sentido, frente a las concepciones que tienen los docentes sobre la variación, algunas investigaciones (Juárez, 2011; Ursini & Trigueros, 1998 y 2003; Cantoral & Reséndiz, 2003), han registrado deficiencias en la comprensión sobre la variación que se puede expresar en diferentes representaciones lo cual se ha derivado en distintas formas en que los estudiantes comprenden esta noción.

Como se ha señalado, las dificultades anteriormente mencionadas son analizadas a partir de las perspectivas de los docentes y estudiantes. Trabajos de investigación enfocados

en el manejo de la variación por parte de los docentes al enfrentarse a problemas de razón y cambio evidencian dificultades cercanas a las encontradas en los estudiantes, como por ejemplo en el poco dominio frente a la variación en diferentes contextos y en la resolución de problemas, considerando que las respuestas de los docentes dan a entender un manejo de la variación mecánico y memorístico, obteniendo de esta manera un concepto limitado que dificulta la interpretación y resolución de problemas dinámicos que requieren de una noción de variación más amplia y profunda. Así, se ha encontrado que la variación es enseñada de manera exclusivamente procedimental, memorística y algorítmica para afrontar el estudio de situaciones, dejando a un lado el análisis variacional presente en dichos problemas (Caballero & Cantoral, 2013).

En este sentido, Juárez (2011) encontró ciertas dificultades en docentes de secundaria al momento de realizar una prueba de resolución de problemas de variación considerando diversos niveles de dificultad, teniendo en cuenta el Modelo 3UV (3 Usos de la Variable) para la realización del análisis de las respuestas, el cual toma la variable como incógnita específica, la variable como número general, y la variable en relación funcional. En esta investigación se realizó una encuesta con preguntas de opción múltiple y su correspondiente justificación a un grupo de docentes de secundaria en México, las cuales revelaron la existencia de ciertas dificultades por parte de los participantes en relación a los usos de la variable. Estas dificultades también se hallaron en las respuestas de los estudiantes cuando se les realizó una prueba similar a la de los docentes, revelando una idea de relación entre la comprensión de los docentes con respecto a los aspectos de variación y la transmisión de estas dificultades al momento de enseñar conceptos de variación a los alumnos sin que el cuerpo docente sea necesariamente consciente de ello.

La perspectiva del estudiante ha sido ampliamente estudiada, con resultados de pruebas y entrevistas que evidencian los métodos que usan para desarrollar la solución, encontrando en muchos de estos procesos dificultades para identificar, describir y analizar la variación, particularmente en estudiantes de primeros semestres de universidad que tratan con el Cálculo diferencial, considerando que para la comprensión y resolución de problemas en esta asignatura se halla una base de variación necesaria para la comprensión de los problemas de cálculo. Una de las conclusiones encontradas trata sobre la forma cómo se transmiten las materias del Cálculo y la noción de derivada, cuya enseñanza se hace de manera procedimental y mecánica, sin profundizar en los estados de cambios dinámicos con su respectivo análisis, convirtiéndose en una de las asignaturas con mayor índice de deserción. Las conclusiones de los estudios de investigación sobre las dificultades en la interpretación del concepto de variable en estudiantes universitarios revelan que, incluso llevando cursos de matemáticas avanzadas, siguen teniendo dificultades para manejar este concepto, llegando a evitar cualquier acercamiento algebraico y retornando a procedimientos de carácter aritmético. (Juárez, 2011; Ursini y Trigueros, 1998; 2003). Esta dificultad también se relaciona con la perspectiva de las dificultades de los docentes (Cantoral & Reséndiz, 2003).

Barajas (2015), por su lado, también encontró dificultades en los estudiantes por medio de una investigación que tuvo como enfoque la resolución de problemas que implican fenómenos de variación, este estudio caracterizó algunas de las dificultades que enfrentan los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad cuando resuelven problemas que implican fenómenos de variación, específicamente desde el proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En el estudio se encontraron dificultades asociadas a procedimientos de tipo aritmético, geométrico, métrico y analítico, y además se evidenció, entre otros resultados, que los estudiantes presentan dificultades al momento de

establecer las magnitudes como variables y para realizar cambios de registros de representación.

En consecuencia, los estudios relacionados con los niveles de comprensión de los estudiantes, tanto en la escolaridad como en la universidad, dan muestra de la existencia de ciertas dificultades de apropiación de las nociones de variación por parte de profesores debido a que para resolver problemas de situación variacional, recurren a estrategias mecánicas y de memorización antes que hacer un análisis frente al problema y la característica variacional para ser resuelto, viéndose también en los estudiantes al momento de aplicar la noción de variación para resolver un problema de manera dinámica, logrando ver así una presunta correlación entre las concepciones de los profesores, su forma de enseñanza y lo que los estudiantes se apropian de la variación. (Juárez, 2011).

De acuerdo con las dificultades vinculadas a la problemática de investigación en este trabajo, surge el siguiente interrogante:

¿Qué concepciones tienen algunos docentes de matemáticas de la educación secundaria y media sobre la noción de variación y el estudio de esta a través de las actividades educativas escolares?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Caracterizar las concepciones de los docentes de matemáticas de la educación secundaria y media acerca de la variación para la comprensión de algunos aspectos relacionados con los procesos de enseñanza de dicha noción.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Documentar, de acuerdo con las perspectivas didáctica, curricular y matemática, aspectos relacionados con el estudio de la variación.
- Diseñar una matriz de análisis que articule aspectos teóricos y conceptuales para la construcción del instrumento de recolección de datos y su posterior análisis.
- Analizar aspectos relacionados con las concepciones de los docentes acerca de la variación en la educación secundaria y media de acuerdo con la matriz de análisis.
- Establecer algunas reflexiones sobre las concepciones de los docentes en relación con el estudio de la noción de variación y cómo éstas afectan los procesos de enseñanza de esta noción matemática.

1.3 Justificación

Existe una relación entre las concepciones de los docentes con la praxis educativa que influye en la forma de pensar y de enseñar en el aula, impactando también en el diseño de estrategias didácticas para abordar el concepto matemático, lo que repercute en la forma de acercar a los estudiantes a dicha noción. Lo anterior se ve en investigaciones como la de Juárez (2013), Caballero y Cantoral (2013) y Gónzales (1999), las cuales revelan la importancia de estudiar las concepciones de los docentes.

En este trabajo se aborda la noción de variación a través del análisis de diversos estudios, los cuales revelan cómo ésta influye en el desarrollo del pensamiento variacional. Es por eso que, con este trabajo de investigación, se pretende caracterizar algunas concepciones de los docentes de matemáticas de la educación secundaria y media acerca de la variación a partir de las cuales promueven el desarrollo del pensamiento variacional. Esto permite reconocer lo que entienden los maestros frente a qué es y para qué es el pensamiento variacional, teniendo en cuenta investigaciones que muestran la relación entre las dificultades de los docentes al momento de comprender nociones matemáticas, las herramientas que usan (usando problemas o ejercicios familiares para los docentes), y las dificultades que también se evidencian en las respuestas de los estudiantes (Juárez, 2011).

Lo anterior permite pensar el papel del Pensamiento Variacional en el “estudio sistemático de la noción de variación y el cambio en diferentes contextos” (Posada & Villa, 2006, p. 61), en la cual se evidencia la existencia de la relación entre la variación, la matematización de la realidad, y áreas afines.

Además, estudios tales como el de Caballero y Cantoral (2013), Vasco (2002), Cantoral y Resendiz (2003), entre otros, involucran el pensamiento variacional y sus implicaciones en el aprendizaje; los resultados muestran obstáculos y dificultades en los

alumnos al plantear y resolver problemas de co-variación, puesto que la relación que tienen con ésta se reduce a la función y aplicación de fórmulas.

Así, se debe tener en cuenta que el rol del docente y el ambiente que se genera en clase son fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional, debido a que en el aula las situaciones - problemas formuladas durante las clases estimulan a los estudiantes a cuestionar, verificar, explorar y razonar, realzando la importancia de los conocimientos previos y las propias experiencias de los estudiantes, considerando que el estudio de la variación se halla inserto en un eje curricular relacionado con la resolución de problemas; adicionalmente, se debe tener en cuenta un ambiente propicio en el cual se construya con los estudiantes un diálogo sobre situaciones de variación y el estudio de patrones (García et al. 2000).

Finalmente, este trabajo representa para los autores una experiencia investigativa, ya que permite reconocer diferentes aspectos relacionados con el tema tratado; explorar bases de datos bibliográficas, realizar reconocimientos documentales, analizar valoraciones, aportar resultados sobre este análisis, organizar conclusiones, etc. Todo este proceso investigativo favorece y eleva el nivel de formación de quienes lo desarrollan, reconociendo la importancia del estudio de la variación a nivel escolar de primaria y secundaria, considerando el rol del docente y su relación con la formación de estudiantes partícipes de la ciudadanía.

1.4 Antecedentes

A continuación, se presentan trabajos de investigación en relación con el pensamiento variacional, las habilidades o competencias que se tienen o desarrollan al estudiar la variación y el cambio, y las concepciones que tienen los maestros sobre ésta, considerando el efecto que poseen dichas concepciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje, teniendo en

cuenta trabajos de investigación que elaboran los análisis tanto de los docentes como de los estudiantes, de manera que se obtiene un campo de estudio amplio sobre esto.

Al respecto, una de las investigaciones a tener en cuenta es la de Montenegro-Abdón (2003), quienes centraron su investigación en la práctica docente, analizando la influencia de las concepciones de los profesores en las decisiones y acciones que suceden en el aula de clase, las cuales, con frecuencia, generan obstáculos y dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En su estudio propone una entrevista con una serie de preguntas en relación con la vida personal y el concepto sobre pensamiento variacional que tienen los docentes de matemáticas de un colegio en Bogotá. La conclusión de la investigación determinó que algunos docentes presentan concepciones que en algunos casos distan de las características básicas sobre la variación, de manera que se les dificulta resolver y formular problemas en los cuales la noción sea fundamental para su estudio.

En la búsqueda de las concepciones que tienen los docentes con respecto a la noción de variación, Engler et al. (2011), centraron su atención en el análisis de las intervenciones realizadas por siete docentes que participaron en dos foros propuestos en el aula virtual durante el curso “Los principios del cálculo diferencial. Un enfoque intuitivo”. En el primer foro se trabajó con las nociones de magnitud, variable e intervalo, mientras que en el segundo se planteó la necesidad de definir las ideas de diferencia y razón. En cada uno de estos foros, se evidenció que algunos docentes presentan el sentido de variable como adjetivo, y no como un componente individual para el estudio de la variación, esto lleva a que definan las nociones desde un solo punto de vista. En esta investigación los resultados obtenidos muestran concepciones no aceptables o erróneas, por lo cual las concepciones de los docentes y la metodología con que enseñan los conceptos a sus alumnos no están necesariamente relacionadas a nociones variacionales.

Existe, además, la importancia de las concepciones que tienen los docentes frente al significado de lo que es la variación con el modelo de enseñanza propio de cada profesor, y cómo dicha relación influye en el diseño de modelos de enseñanza apropiados para facilitar la apropiación de la noción de variación en los estudiantes (Benítez, 2013).

En relación con lo anterior, cabe destacar que en Colombia se plantea la importancia de la modelación y transversalidad en el currículo escolar que permiten a los docentes tener una guía de cada grado escolar en relación con los otros grados y relacionando, además, los diferentes tipos de pensamientos matemáticos, a través de los documentos expedidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 2006; 2016) y Vasco (2002). Este último plantea la importancia de la variación en la educación matemática en los procesos de formación de estudiantes por medio de la modelación, afirmando que:

El principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática. No es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios; al contrario, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covarían en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional.

(p.62)

Otra investigación colombiana la presentan Posada y Villa (2006), quienes señalan la apropiación de la variación por medio del estudio de sus diferentes representaciones, esto debido al reconocimiento de un acercamiento de esta noción por medio de lo semiótico, tales como; gráficas, tablas, expresiones verbales y representación analítica, los cuales permiten la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera, se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a

manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión.

De acuerdo con lo anterior, se evidencian algunos de los retos y dificultades que presentan los docentes al momento de comprender la variación, diseñar estrategias didácticas para su enseñanza y crear o generar situaciones problema que conlleven a tratar de manera más profunda y dinámica lo variacional en el aula de clase, obteniendo resultados que van enfocados, sobre todo, a la escasez de diseños que tomen la diversidad de la variación y centrándose sobre todo en el aspecto mecánico y algorítmico de lo variable, dejando a un lado el dinamismo que tanto caracteriza el estudio de la variación. Para encontrar y analizar el acercamiento de los docentes frente a la variación, es importante considerar sus concepciones frente a esta noción.

Capítulo 2. Marco Teórico de Referencia

A continuación se presentan los referentes teóricos en algunos apartados, lo cual permite visualizar, en primera instancia, el estudio de la variación durante la enseñanza escolar principalmente en la secundaria y media, la importancia del desarrollo del pensamiento variacional, la trascendencia de las concepciones que tienen los docentes en la enseñanza de las matemáticas y la propuesta curricular para la formación escolar en relación con el estudio de la variación en los documentos oficiales emitidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, para después profundizar en esta misma noción acerca de las implicaciones didácticas y la forma como esta se aborda en el sentido de las matemáticas disciplinares.

2.1 El Desarrollo del Pensamiento Variacional en la Educación Escolar Básica y Media

Para este apartado se tuvieron en cuenta dos escenarios fundamentales en la escuela: la actividad del docente y el estudio de la variación desde una mirada educativa, considerando la perspectiva curricular, didáctica y disciplinar que gira en torno al objeto matemático de estudio. A partir del enfoque curricular se toma como referente documentos de política pública como los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), los cuales brindan parámetros y orientaciones en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de áreas obligatorias como las matemáticas. Éstos, además, proponen unos desempeños y conjunto de aprendizajes que deberán alcanzar los estudiantes en los distintos grados de escolaridad.

La perspectiva curricular aporta un acercamiento al quehacer pedagógico de los docentes, de manera que permite evidenciar las herramientas y recursos que diseñan e implementan al momento de planear y desarrollar la clase.

En cuanto a la perspectiva didáctica se toma como referente a investigadores como Caballero y Cantoral (2013), Vasco (2002), y demás autores, quienes centran su atención en el desarrollo de la variación, la relación de la realidad con la matematización y modelización de fenómenos, y diferentes aproximaciones por parte de los docentes para acercar a los estudiantes a este conocimiento matemático.

Por otro lado, se presenta un apartado desde la perspectiva disciplinar, con el propósito de comprender los elementos teóricos y conceptuales que están relacionados directamente con la noción de variación y cómo estos conceptos netamente matemáticos influyen tanto en la actividad del docente como en el estudio de la variación por parte de los estudiantes, para lograr un adecuado desarrollo del pensamiento variacional.

En relación con lo anterior, es fundamental empezar a comprender qué se entiende como concepciones o creencias que pueda tener un docente de matemáticas en relación con los mismos conceptos matemáticos que son objetos de enseñanza en la actividad escolar.

2.1.1 La Actividad Educativa del Docente

La actividad docente se entiende como lo que los docentes hacen, teniendo en cuenta algunos parámetros expresados por el MEN (1998), tales como la importancia de la transversalidad del conocimiento, el rol del docente para hacer una recontextualización y repersonalización de los conocimientos matemáticos a causa de la transposición didáctica, al estudio de los registros de representación, y la resolución de problemas, puesto que pasan a ser conocimientos para el estudiante (MEN, 1998). Por ende, es importante considerar este apartado debido a que da una idea frente a la variación considerando la didáctica, el plan curricular, y lo disciplinar, teniendo en cuenta la formación docente, el uso de las herramientas tecnológicas, y las concepciones que tienen los docentes frente a la noción de variación.

2.1.1.1 Concepciones y Creencias sobre los Objetos Matemáticos.

Debido a que la problemática se centra en las concepciones de los docentes de las matemáticas escolares, en este apartado se prosigue a definir las concepciones y creencias teniendo en cuenta la investigación de Llinares (1991) y Pajares (1992), pues al conocerlas se diferencian y se logra una mayor comprensión de algunas de actitudes y posiciones.

Se comprende **creencia** en el sentido de lo planteado por Llinares (1991) como:

Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicar y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo. (p. 110)

Por otra parte, Moreno y Azcárate (2003) hacen una síntesis de la definición de lo que se entiende por **concepción** a partir de las ideas de Ponte (1994b), Thompson (1992) y Llinares (1991), la cual es:

Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos. (p. 267)

Las concepciones, por ende, tienen una validez sobre la actividad docente y sobre esos objetos matemáticos, siendo la experiencia una variable importante al momento de recopilar y analizar las concepciones de los docentes. Además, tanto las concepciones como

las creencias tienen un componente cognitivo, la diferencia entre ambas está en que las concepciones son mantenidas con plena certeza, son consensuadas y tienen procedimientos para valorar su validez, mientras que las creencias no, ya que carecen de un valor racional (Thompson, 1992).

Teniendo en cuenta lo anterior, se ha evidenciado que las concepciones y creencias de los docentes frente a un concepto influye en el diseño de planeación en el aula de clase, por esa razón, en el siguiente apartado se tratará lo correspondiente a la planeación curricular.

2.1.1.2 Formación Docente.

La formación de un docente en matemáticas debe tener incorporados contenidos importantes tanto de lo disciplinar como de lo didáctico y demás temas afines, así, los futuros educadores profesionales deben integrar el conocimiento pedagógico junto con el contenido matemático, debido a que en la actualidad se ve una separación, tanto en la formación docente como en los docentes en ejercicio (Fonseca & Castillo, 2013).

Según un artículo de investigación publicado por Jiménez (2019) titulado “Formación de profesores de matemáticas: el caso de la licenciatura más antigua de Colombia”, confirma la importancia de los diferentes contenidos que se necesitan para formar docentes en matemáticas. Lo complementa Shulman (1986), quien fue el primero en destacar que para la formación docente era sumamente necesario no solo tener el conocimiento matemático, sino también integrar un conocimiento didáctico-pedagógico y curricular, lo cual permite diferenciar un docente de un especialista en contenidos disciplinares, ya que integra los contenidos a la enseñanza y al aprendizaje.

En concordancia con lo anterior, Ponte (2001) resalta la necesidad de ese otro tipo de contenidos aparte del conocimiento matemático ya que para él, para ser un profesor de matemáticas se necesita tener conocimiento matemático pero también requiere de un

conocimiento profesional que incluya aspectos como: el saber didáctico, el saber curricular, de los procesos de aprendizaje, entre otros. Pero también necesita un conocimiento profesional que incluya aspectos diversos, desde el conocimiento didáctico al conocimiento del currículo y de los procesos de aprendizaje.

Jiménez (2019), además, divide el conocimiento matemático para la enseñanza en tres dominios. El primero tiene que ver con la comprensión de las matemáticas dentro del currículo, ya que este es indispensable para la planificación y la ejecución de la enseñanza. El segundo, el conocimiento especializado del contenido [SCK], es el conocimiento matemático y la habilidad única de la enseñanza, o conocimiento del contenido y su enseñanza. El tercer dominio, el conocimiento del contenido y los estudiantes, conlleva a conocer la relación de los estudiantes con las matemáticas. En este último los docentes deben saber cómo anticiparse a lo que es probable que pase por la mente de los estudiantes. En el caso de que sea fácil, difícil o confuso, deben prever lo que es posible que hagan, además de interpretar el pensamiento emergente e incompleto de los estudiantes, tal como lo expresan los alumnos en sus formas y lenguaje usual.

2.1.1.3 La Planeación Curricular en la Actividad Educativa.

La planeación curricular en el aula de clase ha sido una herramienta relevante para analizar y mejorar las propuestas de clases de los docentes. Esta planeación en Colombia se sirve de diferentes documentos oficiales emitidos por el MEN (Ministerio de Educación Nacional) que sirven de orientadores para los docentes. A continuación, se organizan según la cronología de estos escritos, los primeros siendo los Lineamientos Curriculares, los segundos son los Estándares Básicos de Competencia, y por último están los Derechos Básicos de Aprendizaje. El primer documento, los Lineamientos Curriculares en matemáticas (MEN, 1998), organiza el currículo escolar en tres ejes articulados: los conocimientos básicos, los

procesos generales y los contextos. El primero de los anteriores mencionados está relacionado con el desarrollo del pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. El segundo tiene que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. El último de los tres aspectos se toma como: “(...) ambientes que rodean al estudiante y les dan sentido a las matemáticas, estos pueden ser propios de las matemáticas, de la vida cotidiana y de otras ciencias” (MEN, 1998, p.19).

En los Lineamientos Curriculares, la enseñanza y desarrollo del pensamiento variacional se propone como:

Uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos inter-estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. En esta forma, se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes. (MEN, 1998, p. 49).

También es necesario, según los Lineamientos Curriculares, enfrentar a los estudiantes a situaciones - problema que se desarrollen dentro de escenarios que involucren fenómenos de cambio y variación de la vida cotidiana. Es útil, además, organizar la variación en tablas como estrategia para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional donde las soluciones de tareas involucren procesos aritméticos, ya que ayuda con la comprensión de la variable y de las fórmulas.

Figura 1

Ejemplo que retrata un problema inicial sobre variable y variación.

Hallar el valor numérico de cada uno de los símbolos.

$$\begin{array}{rclcl}
 \blacksquare + 8 & = & \blacklozenge & \blacksquare & = ? \\
 \blacklozenge \div 5 & = & \bullet & \blacklozenge & = ? \\
 \bullet \cdot 7 & = & \star & \bullet & = ? \\
 \star - 10 & = & 11 & \star & = ?
 \end{array}$$

Esta situación ilustra una importante estrategia en el enfoque de resolución de problemas, la llamada "substitución en reversa". Aquí, el estudiante debe hallar primero el valor de la estrella, luego el del círculo, hasta encontrar el valor del cuadrado.

Nota. Fuente: *Lineamientos Curriculares, Ministerio de Educación Nacional, (1998. p.57).*

En este ejemplo se puede evidenciar el estudio de la variación por medio de pictogramas que buscan que el estudiante desarrolle la habilidad de encontrar un patrón o parámetro determinado y así, a partir de este valor, poder encontrar el número perteneciente a las demás figuras.

Una herramienta necesaria que se debe tener en cuenta para iniciar el estudio de la variación desde la primaria es la que constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen escenarios en la vida cotidiana como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también pueden ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones, ya sean aditivos o multiplicativos, presentes en las transformaciones.

De acuerdo con lo anterior se debe tener en cuenta que el desarrollo del pensamiento variacional fomentado a partir de la educación escolar es esencial en la medida que aporta elementos importantes sobre el desarrollo de la formación de los estudiantes tales como la caracterización de aspectos de la variación y la incrementación de su capacidad de formulación de conjeturas, generalización y argumentación.

Los Lineamientos Curriculares, además, brindan una categorización de los núcleos matemáticos conceptuales, los cuales poseen una relación con la variación. Esto permite analizar la variación en diferentes componentes matemáticos relevantes para la enseñanza de las matemáticas. Es así como se evidencia la relación entre la variación con el continuo numérico, tales como; los números reales, infinitos, aproximaciones sucesivas, y divisibilidad, además de la función como modelación y dependencia, las magnitudes, el álgebra con sentido numérico y los modelos matemáticos, en este último cobra gran importancia la proporcionalidad (MEN, 1998).

Lo anterior posibilita una estrategia para la enseñanza de la variación en la escolaridad, considerando la construcción de la variación numérica continua, para así obtener la variación numérica discreta, fundamental para la comprensión y apropiación de la variación (MEN, 1998).

Por otra parte, el segundo documento emitido por el Ministerio de Educación Nacional que hace parte de los recursos académicos para realizar la planeación por parte de los docentes son los Estándares Básicos de Competencias (a partir de ahora EBC), el cual complementa y especifica la propuesta de los Lineamientos Curriculares para enseñar matemáticas a nivel escolar. Este documento orientador hace énfasis en las competencias que deben alcanzar los estudiantes, para ello se “requiere de ambientes de aprendizaje, enriquecidos por situaciones problema, significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencias más y más complejos” (MEN, 2006, p.49).

Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria los EBC plantean las siguientes actividades:

Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los

dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizar las. (p. 67)

En consecuencia, este pensamiento se desarrolla en la medida en que el estudiante identifica un patrón en particular, determina las características que este posee, y logra reproducirlo mediante un algoritmo o procedimiento (MEN, 2006).

Dentro de los EBC se propone el desarrollo del pensamiento variacional, recalcando la importancia del mismo para la comprensión de la variación y el cambio, teniendo en consideración la relación entre los procesos de variación con aspectos matemáticos ligados al álgebra, las funciones y el cálculo, a través del estudio y la modelación de situaciones de variación (Vasco, 2002).

A continuación, se presenta una tabla que ilustra la coherencia vertical y horizontal de los estándares que se deben trabajar.

Tabla 1

Coherencia vertical de los Estándares Básicos de Competencias.

<i>Grados de escolaridad</i>	<i>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos</i>
1° a 3°	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
4° a 5°	Describo e interpreto variaciones representadas en gráfico. Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
6° a 7°	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).

8° a 9°	Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
10° a 11°	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Nota. Fuente: Elaboración Propia. Información obtenida de MEN, (2006).

Tabla 2

Coherencia horizontal de los Estándares Básicos de Competencias 1° a 3°

1° a 3°	
Pensamiento variacional Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas	Pensamiento numérico Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones. Pensamiento métrico Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición. Pensamiento aleatorio Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras

Nota. Fuente: Elaboración Propia. Información obtenida de MEN (2006).

Con base en las tablas presentadas, se puede apreciar que la variación se puede iniciar en la educación básica, por ejemplo, empleando patrones en diferentes contextos, mientras que, en la educación media, la enseñanza de la variación se presenta en la representación gráfica de funciones, lectura de gráficos y tablas. Por lo cual, se puede observar que el desarrollo del pensamiento variacional se enseña de manera procedimental, haciendo uso de uno de los muchos métodos que componen el desarrollo del pensamiento en mención.

Además de los dos documentos anteriores descritos, se presenta a continuación el tercer y último documento emitido por el MEN; los Derechos Básicos de Aprendizaje (a

partir de ahora DBA), los cuales corresponden a un diseño curricular del MEN que abarca diferentes situaciones para desarrollar el pensamiento variacional en todos los grados de escolaridad, de manera que los y las estudiantes obtengan un acercamiento gradual con la variación, lo que permite que haya una transversalidad en la trayectoria escolar, donde cada ítem tiene su explicación y planeación para afrontar la situación problema dada, junto con la evidencias de aprendizaje y ejemplos de dichas situaciones, incrementando el nivel de dificultad y abstracción dependiendo del grado a cursar. Para este desarrollo también resalta la importancia de los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) como material complementario para la implementación de los DBA en cada institución educativa.

Los DBA se estructuran en concordancia con los Lineamientos Curriculares y los EBC debido a la planeación de una secuencia de los aprendizajes en cada área de cada año lectivo, teniendo como objetivo el desarrollar procesos que permitan a los estudiantes alcanzar los estándares propuestos para cada grado, considerando la estructura de cada DBA en tres elementos centrales: enunciado, evidencias de aprendizaje y el ejemplo (MEN, 2016). El pensamiento variacional corresponde a un elemento clave al enseñar matemáticas, y en los DBA, así como en los Lineamientos Curriculares y los EBC, se considera al pensamiento variacional como:

(...) la base para estudiar los procesos de variación entre variables, y por ende, los aspectos matemáticos ligados al álgebra, las funciones y al cálculo: fenómenos o eventos de cambio y variación entre cantidades (nociones de variable, la variación, la covariación), sistemas de relaciones y el uso de lenguajes necesarios (expresiones alfanuméricas propias del álgebra) para el tratamiento del cambio y la variación. (p. 37)

A continuación, se muestra la Tabla 3 sobre los pensamientos de las matemáticas en los DBA.

Tabla 3*Pensamientos y ejes de complejidad conceptual*

Pensamiento numérico	Sentidos, procedimientos y estrategias con números y operaciones. Relaciones entre números y operaciones. Los números y las operaciones en contexto.
Pensamiento variacional	Patrones, regularidades y covariación. Sistemas numéricos (propiedades, usos y significados en la resolución de problemas).
Pensamiento métrico	Atributos medibles de objetos. Medición y estimación de características.
Pensamiento espacial	Las formas y sus relaciones. Localización en el espacio y trayectoria recorrida.
Pensamiento estadístico y aleatorio	Los datos (organización) y las medidas de posición y variabilidad. Probabilidad e inferencia.

Nota. Fuente: Ministerio de Educación Nacional (MEN). DBA, (2016. p. 32).

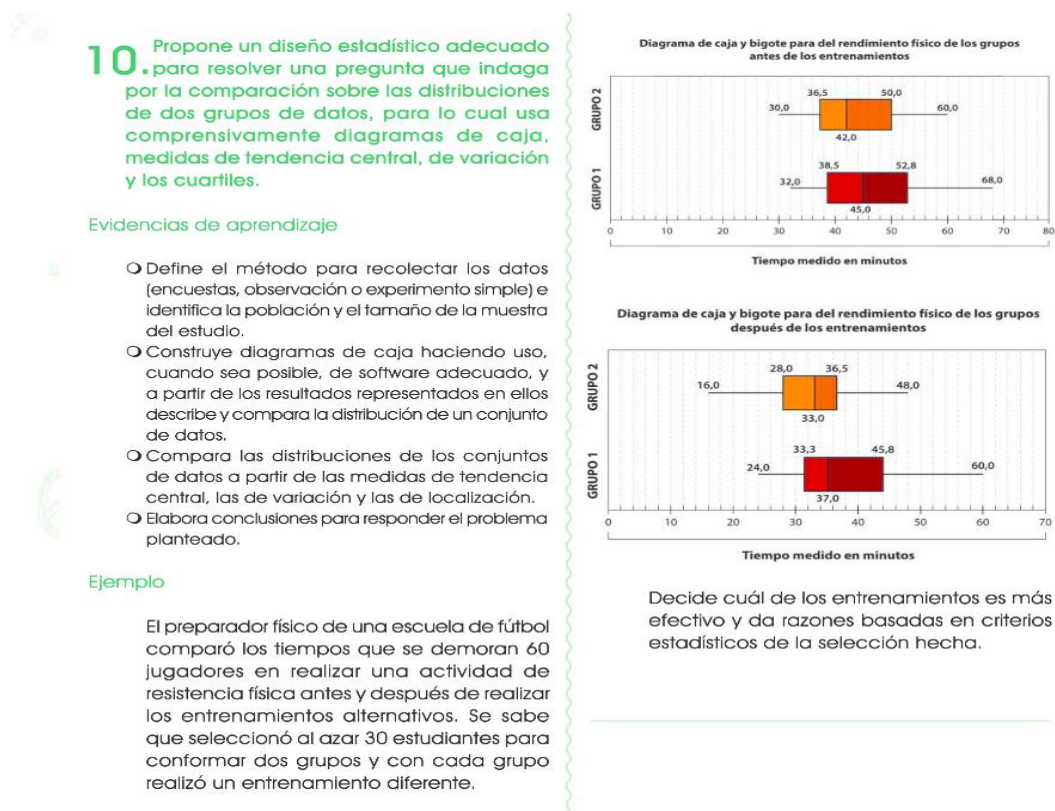
Como se ve en la tabla anterior, existe una relación entre los diferentes tipos de pensamientos para lograr una comprensión del pensamiento matemático. En particular, se puede observar que el pensamiento variacional conlleva a una familiarización de análisis de datos que den muestra de patrones, regularidades y covariación, junto con la resolución de problemas, que es uno de los componentes principales al momento de analizar situaciones de variación, de manera que se logre matematizar, sistematizar, modelar y predecir ciertos fenómenos que ayuden a entender el comportamiento de dichas situaciones.

En estos documentos, además, los docentes tienen una orientación sobre elementos básicos y claves que todo estudiante debe ver en el transcurso de cada año escolar, de manera que sea un avance progresivo, congruente, y en concordancia con lo exigido en cada nivel escolar para la comprensión del pensamiento matemático.

Retomando el contenido de la tabla anterior, un ejemplo del componente del pensamiento variacional en los DBA sería:

Figura 2

Ejemplo: propuesta de un problema acerca de la distribución de datos.



Nota. Fuente: Ministerio Nacional de Educación (MEN). Derechos Básicos de Aprendizaje, (2016. p.13).

En este ejemplo se ve el objetivo del análisis de un comportamiento estadístico por medio de los datos obtenidos. Se evidencia un intento de acercar a los estudiantes a escenarios familiares, con conceptos matemáticos abstractos.

Es así como se evidencia que en los tres (3) documentos oficiales emitidos por el MEN se buscan objetivos pedagógicos que impulsen la comprensión de la noción de variación como una parte de un todo matemático, con un profundo y transversal análisis de un comportamiento cambiante y dinámico.

2.1.1.4 El Estudio de la Variación a partir de las Propuestas en Didáctica.

Teniendo en cuenta el estudio previo sobre los procesos de enseñanza, se hace notoria la descripción de técnicas y métodos en relación con la didáctica de las matemáticas, perteneciendo éstas a un campo amplio de estudio e investigación, en la cual uno de los enfoques es la relación entre el conocimiento matemático, las estrategias para su enseñanza y el conocimiento del estudiante, iniciando con una modificación del conocimiento del profesor, obtenido por su propia experiencia, para, tras el uso de la herramienta didáctica, convertirlo en el saber el alumno, visto como una transposición didáctica (Reséndiz, 2006).

Es por eso que la variación, al ser parte esencial del desarrollo del pensamiento matemático, y en concordancia con lo anterior, requiere de los conocimientos que den lugar a la explicación y entendimiento de la noción del análisis del cambio, usando también los demás elementos que hacen parte del saber matemático, como lo son: pensamiento numérico, geométrico, aleatorio, espacial y métrico, tanto para los docentes como para los estudiantes; y de estrategias didácticas que cumplan con el objetivo de acercar a los estudiantes a la apropiación, comprensión, uso e interiorización de la noción de variación (MEN, 2006).

2.1.1.5 La Noción de Variación.

El estudio de la variación implica comprender la noción de la misma, sus características y propiedades. Al respecto, se han encontrado nociones de variación en todo lo que representa un cambio, siendo un caso relevante el estudio del cálculo diferencial debido a la razón de cambio que usa constantemente (Reséndiz, 2006).

En este sentido, se ha encontrado que la **variación** que es un tema central al momento de evidenciar el aprendizaje en los estudiantes frente al cálculo diferencial, ya que evidencia el uso que le han dado a la noción de lo variable para tratar con el cálculo. Se encontraron cinco principales usos: la tabulación como variación numérica, construcción de gráficas con variación de un punto de referencia, expresiones verbales con referencias a situaciones

cotidianas, empleo de parámetros como variables principales, y derivadas vistas como covariación o comparación a/b. También se evidenciaron los 5 tipos de explicación en los que se pudo apreciar la noción de variación en los docentes, siendo el modelo numérico, el modelo de representación geométrica, el modelo algebraico, el modelo de la comparación a/b (como razón), y el modelo del lenguaje natural (Reséndiz, 2006)

De esta manera, la variación es un concepto recurrente en el cálculo, siendo ésta la razón de cambio o medida en la cual una variable es modificada en relación a otra, abarcando también la noción de función, considerando la modelación algebraica de la relación entre las variables inmersas en la situación de variación y de derivada como medida de la velocidad del cambio en un contexto continuo (Cárdenas y Cuervo, 2019). En la escolaridad, tanto básica como media, es fundamental la apropiación de la noción de Cálculo, ya sea cálculo algebraico, cálculo diferencial, integral y geometría analítica. Por esta razón, en los Estándares Básicos de Competencia, se recalca la noción de variable y de función como elementos precisos para el desarrollo de estas nociones (MEN, 2006)

Por otro lado, también es clave diferenciar la noción de cambio con la de variación, así, “La noción de **cambio** denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la **variación**, la estamos entendiendo como una cuantificación del cambio, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado” (Cantoral, Molina & Sánchez, 2005). Por ende, se da cuenta del pensamiento variacional cuando la persona realiza diferentes estrategias que reflejan y dan a conocer un entendimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el objeto o situación de estudio, en diversas clases de situaciones con magnitudes continuas y discretas (Cantoral & Farfán, 1998; Cantoral, Molina, & Sánchez, 2005)

Por su parte, Bonilla et al. (2015), quienes, en su trabajo de *Características del proceso de construcción del concepto de variación en estudiantes para profesores de matemáticas*, dan a conocer la variable con una definición y dos conceptos claves; se entiende la definición de **variación** como una cuantificación de cambio en diversos escenarios como magnitudes continuas y discretas (Cantoral & Farfán, 1998; Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, en Cárdenas y Cuervo, 2019). Los dos conceptos corresponden a la derivada y a la programación lineal, considerando “La derivada como una medida de la velocidad de cambio en un contexto continuo y la programación lineal como un contexto para modelar la covariación”. (p. 77)

También es fundamental la construcción de la noción de variación por parte de los estudiantes. Para esto, Caballero-Pérez y Cantoral (2017), en su estudio, afirman que la construcción se realiza teniendo en cuenta el sistema de referencia compuesto por cuatro (4) elementos fundamentales: variable, unidad de referencia, unidad de medida y temporización. “Estos elementos son esenciales ya que dan cuenta de cuatro aspectos: ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia?” (Cárdenas y Cuervo, 2019, p. 27).

Lo anterior da pie a los elementos de la variación, siendo: la variable, el parámetro y las representaciones. La primera involucra el concepto de variable dependiente e independiente (correlación de dos variables o relación de covariación). El parámetro, en el Pensamiento Variacional (MEN, 2006), se asocia tanto a una variable como a una constante, y por ende, también a los factores presentes en la situación y su modelación (Cárdenas & Cuervo, 2019).

Además, la variable también se profundiza en el trabajo de investigación de Juárez (2011), quien usa el modelo de Ursini y Trigueros (1998) del formulario de los 3 Usos de la Variable, para analizar las respuestas dadas por maestros de secundaria, lo que evidenció la

existencia de ciertas dificultades en cuanto al manejo de la variable con preguntas de índole analítico y dinámico, siendo las preguntas mecánicas y memorísticas las más acertadas. Las diferentes representaciones que se vio de la variable muestran que los profesores tienen dificultades al momento de enfrentarse a problemas que sean dinámicos y cambiantes, viéndose reflejado también en las respuestas de algunos alumnos. El conocimiento de estas dificultades permite abordarlas considerando cada uso de la variable (Juárez, 2011).

Por otro lado, Carlson et al, 2003, plantearon una estructura evolutiva de la noción de variación, esto es a través del estudio de la covariación, obteniendo 5 tipos de Acciones Mentales las cuales permiten determinar 5 niveles para evidenciar la comprensión y uso de la variación y más específicamente de la covariación de magnitudes. Es fundamental comprender que en esta propuesta ya no solo se hace una mirada a la forma como varían las magnitudes en una situación o contexto planteados, además, es menester detenerse a analizar la forma como covarían al unísono dos magnitudes cuando una cambia en relación de dependencia con la otra, evidenciando en sus cambios ciertas características que permiten diferenciar la forma cómo estas varían de manera conjunta de acuerdo con la situación planteada.

A continuación, se muestran las características de las Acciones Mentales las cuales muestran detalles específicos cuando se hace el estudio de la covariación de magnitudes, junto con los 5 niveles que se pueden llegar a determinar para los estudiantes:

Tabla 4

Acciones mentales del marco conceptual para la covariación.

Acciones Mentales	Comportamientos
-------------------	-----------------

AM1. Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g. y cambia con cambios en x). Construcción de una línea recta creciente.
AM2. Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3. Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4. Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5. Coordinación de la razón de cambio instantáneo de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Nota. Fuente: Carlson et al, (2003. p. 128).

Al respecto Carlson y colaboradores plantean que:

Un estudiante se clasifica en un determinado nivel de acuerdo con la imagen global que parece sustentar las diferentes acciones mentales que él exhibe en el contexto de un problema o tarea. El marco conceptual para la covariación contiene cinco niveles distintos de desarrollo (Tabla No 5). Decimos que la habilidad de razonamiento covariacional de alguien ha alcanzado un nivel dado de desarrollo cuando sustenta a las acciones mentales asociadas con ese nivel y con las acciones asociadas con todos los niveles que están por debajo (Carlson et al, 2003, p.128).

Tabla 5

Marco conceptual para los niveles de la covariación.

Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.

Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una conciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente, o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

Nota. Fuente: Carlson et al. (2003, p. 129).

El análisis obtenido considerando las Acciones Mentales y los Niveles propuestos por Carlson et al, permiten ampliar las acciones de los estudiantes, y entender los conceptos que ellos tienen frente a la covariación. Es por eso que Villa-Ochoa (2012), al analizar los argumentos de un estudiante (el cual usa todo tipo de representaciones para desarrollar la resolución de problemas con respecto a la variación), permite evidenciar los estados de cambio y evolución que experimenta el estudiante a través de la propuesta de Carlson y sus

compañeros descrita anteriormente. Por tal razón, esta herramienta permitió describir la evolución del razonamiento covariacional del estudiante (Villa-Ochoa, 2012).

Por último, están las representaciones, las cuales se pueden relacionar con la parte gráfica de la variación, siendo referente la representación de manera tabular, gráfica, verbal o algebraica, además, los gráficos son una de las herramientas que permiten la representación de situaciones que permiten un mejor análisis de la variación de los datos en diferentes contextos (Cárdenas y Cuervo, 2019). Lo anterior se tiene en cuenta Mercedes, Pérez y Triana (2017), quienes llevaron a cabo una actividad con enfoque experimental y con cambios de representación, evidenciando una mejoría en cuanto a la apropiación de las nociones de la variación en los estudiantes, esto debido a la importancia de la comprensión sobre la representación para la comprensión de los conceptos al momento de desarrollar tres tipos de acciones usando los registros de representación semiótica: “la primera orientada a la formación de una representación identificándola como perteneciente a un registro dado; la segunda orientada al proceso y transformación de una representación dentro del registro donde fue creado (acción de tratamiento), y finalmente la transformación de una representación semiótica de un registro a otro (acción de conversión)” (Mercedes, Pérez & Triana, 2017, p23).

De lo anterior, se obtienen diferentes propuestas didácticas que ayudan a identificar concepciones, herramientas, y demás elementos que usan los estudiantes al momento de concebir la noción de variación. De esta manera, se identifica la importancia del análisis de los diferentes momentos en que los estudiantes se apropian y evoluciona esa comprensión de la variación, junto con la ayuda de tener una diversidad de representaciones para comprender diferentes contextos, usos, y significados de lo dinámico de la variación.

2.1.1.6 La Modelación y el Estudio de la Variación

Vasco (2002) Plantea la importancia de la variación en la educación matemática en los procesos de formación de estudiantes por medio de la modelación, afirmando que:

El principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática. No es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios; al contrario, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso.

En los Lineamientos Curriculares se puede entender que uno de los caminos para que el primer eje temático tenga sentido, es el que está relacionado con la contextualización de actividades que promuevan la modelación a partir del análisis de una situación haciendo uso de los diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico, verbal y la expresiones analíticas. Un análisis en tal sentido implica la coordinación e interrelación entre los diferentes sistemas de representación a fin de lograr una construcción conceptual completa.

Ahora bien, tomando como punto de partida a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, para el pensamiento variacional se establece que:

Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (p.66)

En concordancia con lo anterior Duval (1999) afirma que en los modelos mentales presentados por los estudiantes sobre los conocimientos matemáticos que se manifiestan a través de representaciones semióticas, los cuales pueden ser patrones numéricos, geométricos o simbólicos, se reconoce en ellos sus características esenciales. Para eso Duval propone el uso de registros semióticos, que es la construcción de modelos geométricos de expresiones algebraicas. De igual forma, sugiere que el pasaje de un sistema de representación a otro, o la

movilización simultánea de varios sistemas de representación de un mismo objeto matemático fomenta el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Por su parte, Juárez (2011) resalta la investigación realizada por medio del modelo 3 Usos de la Variable (3UV), ya descrita anteriormente, la cual evidencia el manejo que los sujetos de estudio le dan a la variable, siendo ésta un componente clave de la variación. De esta manera se obtiene que la variable puede verse como incógnita específica (considerando el contexto en que está descrita la variable, y el valor que toma, que puede ser un valor numérico específico o infinito), como número general (representar de manera general el problema descrito, reconocer los patrones y generalizar la situación), y en relación funcional (reconocer, interpretar y expresar la relación de variables en diferentes representaciones, encontrar e interpretar la variable independiente de la dependiente y sus respectivos comportamientos).

En este sentido, Juárez (2011) considera 3 categorías; variable como incógnita específica, variable como número general, y variable como relación funcional. Cada una de éstas deja entrever el desarrollo del concepto de variable, mostrando las dificultades y fortalezas que tienen los sujetos de estudio. Para la primera categoría, se obtiene que un sujeto tiene comprensión del uso de la variable como incógnita específica cuando:

1. Reconoce e identifica en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar
2. Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos
3. Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.
4. Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias

5. Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.

Retomando una visión más enfocada en la variación que en la variable, a continuación se describe la variación como componente del estudio de las matemáticas.

2.1.2 El Estudio de la Variación en las Matemáticas

La variación, como se ha mencionado anteriormente, es un componente de las matemáticas clave para comprender la razón de cambio y fenómenos matemáticos. Debido a eso se le ha logrado relacionar con diferentes estrategias que desarrollan la comprensión y apropiación del estudio de la variación.

2.1.2.1 La Variación en las Matemáticas

La variación, tal como se ha evidenciado en los trabajos anteriores expuestos, trata un número significativo de casos, y por su transversalidad, permite ser estudiado desde diferentes asignaturas. Sin embargo, para este trabajo, se ha decidido tener un enfoque netamente matemático para describir la variación y su enseñanza. A continuación se presentan algunos de los conceptos y aspectos clave en relación con el estudio de la variación.

Un componente esencial para el estudio de la variación es el concepto de variable que, por ejemplo, Stewart et al. (2012) en el estudio del precálculo define como:

La variable es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo x , y y z , y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una expresión algebraica. (p.24)

A continuación se muestran los siguientes ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4, \sqrt{x} + 10, \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

La variable en matemáticas se usa como un instrumento que permite expresar una generalización. Cuando se quiere enunciar matemáticamente un patrón, representa a aquello que varía o que está sujeto a algún tipo de cambio. Se trata de algo que se caracteriza por ser inestable, inconstante y cambiante (Pérez & Gardey, 2008).

De lo anterior es claro que la variable es indispensable a la hora de abordar el estudio de la noción de variación ya que permite observar y representar el cambio por medio de ella.

En matemáticas, estudiar la variación está asociado en una de sus formas a examinar la razón de cambio. Larson et al. (2006) describe dicho concepto de la siguiente manera:

La pendiente de una recta puede interpretarse ya sea como una razón o como proporción, o bien como una tasa, ritmo o velocidad de cambio. Si los ejes x y y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidades y es una razón o proporción. Si los ejes x y y tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una tasa, ritmo o velocidad de cambio. (p.12)

En este sentido, Hughes et al. (2004) relaciona la pendiente de una función con el concepto de razón de cambio a partir de lo siguiente:

Usaremos el símbolo Δ . (la letra griega delta mayúscula) para indicar un "cambio en", por tanto, Δx significa un cambio en x y Δy significa un cambio en y . Podemos calcular la pendiente de una función lineal $y = f(x)$ a partir de los valores de la función en dos puntos, dados por x_1 y x_2 usando la fórmula

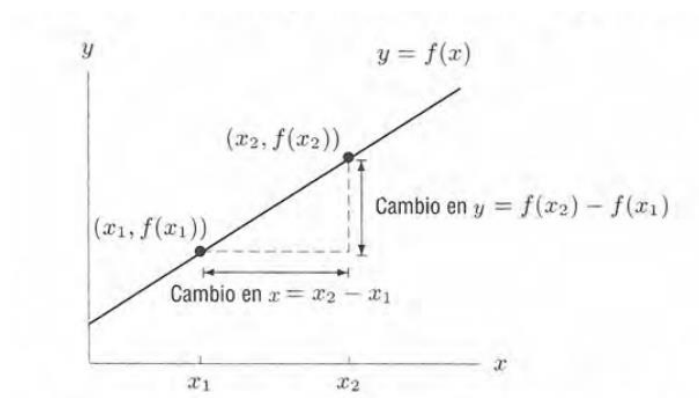
$$pendiente = \frac{\text{cambio en } x}{\text{cambio en } y} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A la cantidad $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$ se le denomina cociente de diferencias, ya que es el cociente de dos diferencias. (Véase la figura 1) Puesto que la pendiente es $\Delta y / \Delta x$, la pendiente representa la razón de cambio de y respecto a x .

Las unidades de la pendiente son unidades de y sobre unidades de x . (p.8)

Figura 3

Cociente de diferencias = $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$.



Nota. Representa el cociente de diferencias. Fuente: Hughes et al. (2004), p. 8

Lo anterior es la tasa promedio de cambio en función de un intervalo. Ahora se analiza la razón de cambio instantáneo de una función en un punto dado. El concepto de tasa o razón de cambio en un momento determinado conduce al concepto de derivada.

La derivada puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva y físicamente como la tasa de cambio. Con las derivadas, se puede representar todo, desde las fluctuaciones de la tasa de interés hasta la tasa de mortalidad de los peces o la tasa de crecimiento de un tumor. (p.93)

Apóstol (1999) en su estudio sobre el cálculo afirma que “la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vio que proporcionaba también un instrumento para el cálculo de velocidades y, en general para el estudio de la variación de una función” (p.192).

Hughes et al. (2004), en su investigación sobre el Cálculo Aplicado también encuentra que la razón de cambio puede ser instantánea ya que la razón promedio de cambio de posición respecto al tiempo es la velocidad promedio.

Si la posición se expresa como $y = f(t)$, donde t es el tiempo, entonces: Razón

promedio de cambio de la posición entre $t = a$ y $t = b = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Podemos

definir la tasa de cambio instantánea de cualquier función $y = f(t)$ en un punto $t = a$.

La razón de cambio instantáneo de f en a , también llamada razón de cambio de f en a ,

se define como el límite de las razones de cambio de f en intervalos cada vez más

cortos alrededor de a . Puesto que la razón promedio de cambio es un cociente de

diferencias de la forma $\Delta y / \Delta t$, la razón de cambio instantánea es el límite del cociente

de diferencias. A menudo, en la práctica se aproxima una razón de cambio a través de

uno de estos cocientes de diferencia. (pp. 94-95)

Esto es lo que conlleva al concepto de derivada, y si está en a se escribe como $t'(a)$ y se

define como la razón de cambio instantánea de f en el punto a .

Cabe aclarar que la razón de cambio no es la única forma de estudiar la variación ya que es un concepto muy amplio y es estudiado desde los primeros grados de escolaridad, otras formas que involucran el estudio de la variación son las funciones, la derivada, integral entre otras.

Así, las investigaciones descritas y apropiadas en el marco teórico permiten evidenciar la variación, tanto en la Actividad Docente como en el Estudio de la Variación. Esto evidencia, en primer lugar, unas características esenciales en el quehacer docente, en relación con la forma cómo se debe enseñar la variación, las concepciones y su impacto en el aula de clase, la noción matemática dentro del currículo escolar, teniendo en cuenta los documentos oficiales emitidos por MEN, y la importancia de considerar la relación de esta

noción con los estudiantes, conocimiento que ayuda al docente para tomar decisiones con respecto a la enseñanza.

Por otro lado, se profundizó en el estudio de la variación, de manera didáctica, curricular y disciplinar, lo que permitió analizar, primeramente, su estudio desde lo didáctico, teniendo en cuenta la noción de variación, de manera que se pueda tener un ambiente de aprendizaje que permita la transposición didáctica. En segunda instancia, se profundizó en la variación dentro de lo curricular, complementando la información obtenida en la parte del quehacer docente con respecto al estudio de los documentos oficiales del MEN. Por último, el estudio de la variación en lo disciplinar logró evidenciar, a través de la matemática, la importancia del estudio de la variación en el estudio de la noción de razón de cambio, profundizada en el concepto de derivada.

Por ende, las investigaciones en el marco teórico permiten relacionar los conocimientos sobre la variación con respecto a la práctica del docente en el aula de clase, y de esta manera, se evidencia una relación entre éstas, lo que permite considerar la variación desde diferentes perspectivas. De esta manera, se prosigue al desarrollo de la metodología para esta investigación.

Capítulo 3. Metodología

Este trabajo se realiza bajo el enfoque cualitativo-descriptivo en la medida en que se permite la recolección de datos no estandarizados, por medio de un cuestionario diagnóstico y/o una entrevista a los docentes de matemáticas sobre cómo entienden la variación, con el fin de investigar *¿Qué concepciones tienen algunos docentes de matemáticas de la educación secundaria y media sobre la noción de variación y el estudio de esta a través de las actividades educativas escolares?* Para ello, es necesario escoger una estrategia investigativa y proceder bajo su criterio.

Por lo anterior, se considera a Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2014), quienes mencionan que:

El enfoque cualitativo puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo “visible”, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es *naturalista* (porque estudia los fenómenos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y en su cotidianidad) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas le otorguen). (pág. 9)

La estrategia investigativa de este trabajo se enmarca dentro de la revisión documental y un estudio de caso que pretende recopilar lo propuesto por los autores en cada una de las perspectivas (curricular, didáctica y disciplinar) con el fin de poder clasificar y describir las concepciones de los docentes con respecto a la noción de variación.

Para llevar a cabo esta propuesta de trabajo se precisan unas fases metodológicas dinamizadoras del proceso investigativo:

3.1 Fase 1: Revisión Documental y Comprensión del Problema de Investigación

Esta fase comprende el proceso que comenzó con la revisión, desde el campo de la Educación Matemática, de bases bibliográficas, tesis de pregrado y posgrado, artículos y libros en torno al estudio y desarrollo del pensamiento Variacional. Estos documentos permitieron: 1) delimitar el campo de estudio a partir del cual se encontraron algunas deficiencias en los docentes de matemáticas respecto al estudio y la comprensión de la variación, además de la importancia del pensamiento Variacional para la educación básica y media 2) plantear los objetivos para el desarrollo de esta investigación, por último, 3) conformar el marco teórico de referencia clasificado desde las perspectivas curricular, didáctica y disciplinar.

3.2 Fase 2: El Diseño de la Matriz de Categorías y Elaboración del Cuestionario

Para esta fase, se tuvieron en cuenta los elementos teóricos y conceptuales tratados en la primera fase y que constituyeron, a través de su articulación, la ruta a partir de la cual se definió la metodología de investigación, lo que permitió el diseño de la matriz de análisis y los cuestionarios piloto y final, así se posibilitó la recolección de información de los docentes con los cuales se desarrolló el análisis central.

En este orden de ideas y dado el tipo de investigación propuesta, para el diseño del cuestionario se consideraron variables de investigación de acuerdo con lo planteado por Cruz y Torres. (2008) para la estructura de la matriz de análisis y la elaboración del cuestionario. Posteriormente, las variables consideradas fueron fundamentales para el análisis de las respuestas de los docentes.

A continuación, se ampliará un poco sobre las variables de investigación.

3.2.1 Definición de Variable de Investigación

Carballo y Guelmes (2016) en su investigación: *Algunas consideraciones acerca de las variables en las investigaciones que se desarrollan en educación*, presentan definiciones de variable de investigación, tomando como referencia dos investigaciones:

Ahora bien, Nuez-Bayolo et al. (2008, citado en Carballo y Guelmes, 2016), plantean que las variables de la investigación son las características y propiedades cuantitativas o cualitativas de un objeto o fenómeno que adquieren distintos valores, o sea, varían respecto a las unidades de observación. Por ejemplo, la variable sexo puede tomar dos valores: femenino y masculino.

Además, Cerezal y Fiallo (2004, citado en Carballo y Guelmes, 2016) afirman que los conceptos variables presentan diferentes valores, tratan aquellas propiedades, atributos, características, magnitudes, que podrían presentarse o no en cada uno de los casos que conformen el universo en estudio.

Las variables cumplen con las siguientes funciones:

- Designan aspectos discernibles de un objeto de estudio....
- Analizan la distribución de una población....
- Formulan relaciones descriptivas, explicativas o predictivas sobre la misma....
- Dan a conocer algo sobre su comportamiento....

En consonancia con lo presentado, para establecer las variables que constituyen la matriz de análisis se consideraron los elementos esenciales de los referentes en relación con la variación, el desarrollo del pensamiento variacional, las concepciones de los docentes y lo curricular en las matemáticas escolares. Además, cada variable establecida está conformada por algunas categorías las cuales se acercan un poco más a lo antes mencionado para así poder indagar sobre las concepciones de los docentes acerca de la variación.

De acuerdo con lo anterior, para la realización de esta fase se definieron dos momentos esenciales: el primero comprende el diseño metodológico y la construcción de una matriz de análisis, en la cual se tomó en consideración la información recolectada por los autores en el marco teórico. El segundo momento comprende la realización del cuestionario final teniendo en cuenta el cuestionario piloto.

3.2.2 Primer Momento

Para identificar y caracterizar las concepciones de los docentes, en esta investigación se propone una matriz para examinar sobre aspectos relacionados con sus conocimientos disciplinares acerca de la noción de variación y sobre las acciones didácticas que tienen en cuenta para su enseñanza, como variables de investigación:

- **Conocimientos disciplinares:** hace referencia a las concepciones que tienen los docentes sobre las matemáticas, específicamente las formas como se presenta, se enseña y se aprende la variación y los aspectos a partir de los cuales se pueda estudiar el cambio, según la información y contextos planteados, además, teniendo en cuenta el punto de los lineamientos curriculares los conceptos y categorías más importantes para el estudio de la variación y el desarrollo del pensamiento variacional como lo son: continuo numérico, el estudio de patrones, la proporcionalidad, la función como relación dependencia, el concepto de variable y los registros de representación (MEN, 1998, p. 50).
- **Acciones didácticas:** corresponden a algunos aspectos que orientan a los docentes a tomar decisiones para la enseñanza de la variación y del desarrollo del pensamiento variacional, considerando referentes didácticos, los cuales, según sus propuestas, identifican algunas acciones, habilidades, comportamientos, entre otros, que permiten registrar evidencias sobre la comprensión de aspectos relacionados con la variación;

en esta variable se da prioridad a las concepciones que tienen algunos docentes de matemáticas sobre cómo se implementan metodologías, estrategias y procesos de enseñanza de la variación y de los conceptos relacionados. Cruz y Torres. (2008)

Posteriormente, las preguntas del cuestionario se desarrollaron y relacionaron de acuerdo con siete (7) categorías atendiendo a las dos variables anteriormente mencionadas, además, aunque cada una de las preguntas del cuestionario podría comprenderse desde una de las variables propuestas y sus categorías asociadas, no quiere decir que responda de forma exclusiva a esta, pero que le da prioridad, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 6

Matriz de análisis sobre las concepciones acerca de la variación.

Variables	Categorías	Preguntas
Conocimiento disciplinar	Continuo numérico	1
	Estudio de patrones	2, 3
	La proporcionalidad	7, 9
	La función como relación de dependencia	10, 11
	La variable	5
	Los registros de representación	8, 12
Acciones Didácticas	Conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación.	4, 6

Nota. Fuente: Elaboración propia, teniendo en cuenta los documentos de MEN, 1998; Cruz y Torres, 2008).

Dadas las anteriores variables se construyeron seis categorías para la variable Conocimiento Disciplinar y una categoría para la variable de acciones didácticas, las cuales surgieron principalmente de la propuesta de los lineamientos curriculares (MEN, 1998, p.50) en la cual se destacan las características y conceptos claves de los elementos orientadores

para el estudio de la variación en la educación escolar. Dado que lo que se pretendía era mirar las concepciones de docentes en ejercicio, estas categorías fueron fundamentales porque las orientaciones curriculares dan muchas pautas para poder abordar la variación en diferentes niveles, por parte de los docentes al momento de su enseñanza, y apoyados en esto, poder mirar los avances de los estudiantes en su aprendizaje.

A continuación, se presenta una breve definición de cada categoría correspondiente a las variables mencionadas anteriormente.

Para la variable de Conocimiento disciplinar, se consideraron las siguientes categorías:

- Continuo numérico: es la categoría que se relaciona con el conjunto de los reales, los procesos al interior de estos conjuntos infinitos teniendo en cuenta que deben ser introducidos en contextos geométricos, su tendencia, aproximaciones sucesivas y divisibilidad. En el estudio de la variación, reconocer la importancia del continuo numérico es determinante para indagar y reconocer el comportamiento del cambio dadas las condiciones del contexto.
- Estudio de patrones: es la categoría que se relaciona con las representaciones pictóricas e icónicas. En matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones y expresarlos matemáticamente. El estudio de patrones es una de las propuestas para que en los primeros niveles de escolaridad los estudiantes puedan acercarse a identificar regularidades en gráficas y conjuntos numéricos.
- Proporcionalidad: es la categoría que se relaciona con los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) , ya que encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad directa e inversa. En la educación secundaria se da prioridad al estudio de las razones y proporciones, a partir de magnitudes

consideradas, permitiendo un acercamiento importante a estudiar la variación de una magnitud o varias magnitudes según la forma como se relacionan.

- La función como relación de dependencia: es la categoría que se relaciona con los contextos donde aparece la noción de función, establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera que emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. En la educación secundaria es uno de los objetos matemáticos más empleados para el estudio de la variación y el cambio dadas sus múltiples representaciones, contextos y formas de estudiarlas.
- La variable: es la categoría que se relaciona con el álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados. La variable es fundamental para la representación de la variación de las cantidades de magnitud que se traten en una situación propuesta y se aborda en diferentes grados de la educación secundaria.
- Los registros de representación: es la categoría que se relaciona con los diferentes sistemas de representación asociados a la variación, se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, las fórmulas y las expresiones analíticas. Al reconocerse la importancia de los registros de representación, esta categoría permite acercarse a la forma cómo se puede estudiar, comprender y enseñar la variación con sus diversas características, además, estas representaciones se favorecen a lo largo de todos los niveles educativos.

Para la variable de Acciones Didácticas, se consideraron la siguiente categoría:

- Conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación: esta categoría está relacionada con lo que conoce e implementa el docente con respecto a las estrategias y métodos empleados en el aula sobre cómo lleva a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de variación.

3.2.3 Segundo Momento

A partir del diseño del cuestionario piloto, como primera técnica de recopilación de información para esta investigación, se pudo determinar la viabilidad e importancia de usar este instrumento para identificar y caracterizar las concepciones de los docentes de matemáticas sobre la noción de variación, por lo cual, este cuestionario consta de 21 preguntas divididas en cuatro secciones: perfil del docente, preguntas iniciales, preguntas sobre el currículo escolar y la variación, finalmente, preguntas de profundización sobre la variación.

Cada una de las cuatro (4) secciones tienen como objetivo indagar en los docentes de la muestra sus concepciones sobre la noción de variación. En el caso del perfil del docente se indaga sobre el tipo de formación académica que este tiene.

Respecto a las preguntas iniciales, se plantearon de acuerdo con los primeros acercamientos acerca del estudio de la variación, considerando que estos pueden llevarse a cabo con mayor relevancia en la educación básica primaria y básica secundaria. Por otra parte, las preguntas sobre el currículo escolar y la variación permitieron indagar sobre algunos aspectos de cómo el docente entiende e implementa aspectos didácticos y curriculares en la enseñanza de la variación en la escuela.

Por último, las preguntas de profundización como aquellas que permiten cuestionar sobre algunas actividades en niveles avanzados de la educación escolar donde se trabajan

ciertos objetos matemáticos que permiten estudiar y comprender con mayor profundidad aspectos relacionados con la variación y covariación.

El cuestionario piloto se seleccionó una muestra de tres (3) docentes de matemáticas de diferentes instituciones educativas de Cali del sector público y privado de la educación secundaria y media. De acuerdo con sus respuestas, se realizó un análisis tanto de forma como de contenido de las preguntas, el cual permitió determinar que algunas de ellas no eran suficientemente claras, otras debían ampliarse, o incluso las preguntas no permitían obtener suficiente información para el estudio.

El cuestionario final se realizó con base en la información recolectada en la aplicación del cuestionario piloto, lo que permitió identificar y clasificar cuáles eran las preguntas que más proporcionan información útil para esta investigación. Puesto que las respuestas eran muy similares a lo que se esperaba que los docentes contestaran, se procedió a construir el cuestionario final, el cual contiene 12 preguntas. Cada pregunta está asociada a una variable y categoría de estudio, con el mismo número de secciones que el cuestionario piloto y con una durabilidad promedio de solución de 40 minutos.

3.3 Fase 3: Selección de los Docentes, Aplicación del Cuestionario y Entrevista

De acuerdo con el tipo de estudio de casos para esta investigación, el cuestionario final se aplicó a cuatro (4) docentes de matemáticas con más de tres años de experiencia, de los cuales dos tienen maestría en educación y dos tienen pregrado; uno en licenciatura en matemáticas y física y el otro en licenciatura de Educación Básica con Énfasis en

Matemáticas.

Los docentes fueron seleccionados considerando la relevancia de poder tener un acercamiento a las dos formas de educación que hay en la actualidad, como lo son la pública y la privada, en las cuales se llevan a cabo ciertas estrategias y trabajo por parte de los docentes que puede variar un poco de acuerdo con cada institución. En este sentido, los

cuatro (4) docentes pertenecen a dos instituciones educativas de Cali, una del sector público y otra del sector privado, con el objetivo de analizar concepciones en relación con la noción de variación y su proceso de enseñanza.

Para su aplicación se entregó el cuestionario a cada docente de manera física, con un promedio de desarrollado de dos (2) días, esto debido a los compromisos aparte de los docentes.

El caso está compuesto por cuatro (4) docentes de diferentes instituciones educativas de Cali con una edad promedio de 38 años.

Profesora A: es profesora egresada de la Universidad del Valle, de la carrera de Licenciatura en Matemáticas y Física. Además, cuenta con una maestría en educación. Trabaja en un colegio de carácter público. En la actualidad enseña en los grados 5° y 6°, con 26 años de experiencia.

Profesora B: Es profesora egresada de la Universidad del Valle, de la carrera de Licenciatura en Matemáticas y Física. Además, cuenta con estudios complementarios como normalista superior. Trabaja en un colegio del sector privado. En la actualidad enseña en los grados 7° a 11°, con 5 años de experiencia.

Profesor C: es profesor egresado de la Universidad del Valle, de la carrera de Licenciatura en Matemáticas y Física. Además, cuenta con una maestría en educación. Trabaja en un colegio de carácter público. En la actualidad enseña en los grados 10° y 11°, con 25 años de experiencia.

Profesora D: Es profesora egresada de la Universidad del Valle, de la carrera de Licenciatura en básica primaria con énfasis en Matemáticas. Trabaja en un colegio del sector privado. En la actualidad enseña desde los grados 3° a 7°, con 3 años de experiencia.

3.3.1 Análisis de las Preguntas del Cuestionario Final

[Anexo 1](#)

A continuación, se hace el análisis de las preguntas del cuestionario final, el cual consta de 12 preguntas. El análisis se hará considerando la pregunta y la razón del por qué esa pregunta, de acuerdo con orientaciones como las de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) en relación con el Pensamiento Variacional y la variación.

Pregunta uno (P1).

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, en la categoría de *Continuo Numérico*, en la que se espera que el docente exprese sus concepciones en relación con procesos y operaciones dentro de los conjuntos infinitos, tales como los reales, junto con el análisis de su tendencia, de manera que haya un reconocimiento de las aproximaciones sucesivas.

Pregunta dos (P2).

La segunda pregunta se encuentra en la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *Estudio de patrones*, en la cual se pretende analizar el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones, de manera que logren generar una expresión matemática que describa dicho cambio.

Pregunta tres (P3).

Esta pregunta se encuentra en la variable de Conocimiento disciplinar, también en la categoría de *Estudio de patrones*, el cual tiene la intención de analizar el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones, ya sea en registros pictóricos e icónicos, de manera que logren generar una expresión matemática que describa dicho cambio.

Pregunta cuatro (P4).

Esta pregunta está ubicada en la variable de Acciones didáctica, en la categoría de *conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación*. La intención

de esta pregunta es indagar los conocimientos y saberes que se tiene sobre la enseñanza de la variación en el currículo escolar.

Pregunta cinco (P5) y seis (P6).

Esta pregunta está en la variable de investigación Conocimiento disciplinar, en la categoría de *la variable*, la cual pretende analizar la forma como se aborda el significado de la variable, en la aritmética y el álgebra escolar, para hacer una modelación de situaciones de cuantificación y fenómenos de variación para el estudio del cambio.

Pregunta siete (P7), ocho (P8) y nueve (P9).

La séptima pregunta está dentro de la variable de Conocimiento disciplinar , en la categoría de *la proporcionalidad*, la cual se encarga de realizar modelos de función de una situación problema, que permita el estudio del comportamiento de una variable con respecto a otra.

La octava pregunta está dentro de la variable de Conocimiento disciplinar , en la categoría de *registros de representación*, la cual pretende identificar el estudio de los diferentes sistemas de representación asociados a la variación, específicamente saber analizar el registro tabular. La novena pregunta está dentro de la variable de Conocimiento disciplinar , en la categoría de *la proporcionalidad*, la cual se encarga de estudiar la relación entre dos magnitudes, teniendo en cuenta los modelos de función que involucra la relación de proporción con respecto a los valores dados en el registro tabular.

Pregunta diez (P10).

La décima pregunta se encuentra en la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *función como relación de dependencia*, la cual pretende analizar el conocimiento que se tiene sobre el comportamiento de una función, con respecto a las variables de posición, velocidad y tiempo.

Pregunta once (P11).

Esta pregunta pertenece a la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *la función como relación de dependencia*. En esta pregunta se pretende analizar la noción de función y su comportamiento en el registro gráfico, estudiando el cambio entre dos magnitudes, de manera que se identifique la variable dependiente e independiente.

Pregunta doce (P12).

Esta pregunta está en la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *registros de representación*, la cual pretende evidenciar el conocimiento que se tiene sobre el tratamiento y la conversión en los diferentes registros de representación.

3.4 El Momento de la Entrevista

Después de llevar a cabo la implementación del cuestionario final con cada uno de los docentes del estudio, se procedió a realizar una entrevista con el fin de ampliar la comprensión sobre los resultados del cuestionario escrito. La entrevista de investigación se puede divisar como un proceso comunicativo, el cual permite recopilar la información de una persona que está contenida en su biografía, entiéndase biografía como el conjunto de las representaciones asociadas a los acontecimientos vividos de quien es entrevistado/a. (Alonso, 1999, pp. 225-226).

Este instrumento de recolección de datos fue implementado para profundizar en algunas respuestas de los docentes que realizaron el cuestionario final, de manera que se pueda reafirmar las concepciones que tienen los encuestados con respecto a la noción de variación. La entrevista tiene un modelo semiestructurado, lo que permite obtener un discurso sobre las respuestas, conservando la oportunidad de profundizar en cuestiones de naturaleza social y abiertas como lo son los procedimientos y concepciones. De los cuatro (4) docentes, uno (1) no pudo presentar la entrevista, argumentando falta de disponibilidad y tiempo, lo que causó que no se lograra, de manera particular, determinar una postura frente a las respuestas

presentadas. Las entrevistas se llevaron a cabo de manera virtual, cada una con una duración de 7 minutos, lo que permitió profundizar y complementar las respuestas presentadas en el cuestionario. A continuación, se presentan algunas de las preguntas que orientaron la entrevista.

1. ¿Por qué en P1e, afirmó que sí?, haciendo referencia a una sucesión matemática.
2. ¿Qué diferencias encuentras en los números que representan el cambio vs los términos de la sucesión?
3. En P3b ¿qué procesos hizo para llegar a la expresión $2n+1$?
4. En P6b, ¿por qué nombro estos grados en particular?
5. ¿por qué respondió P11b con esa argumentación?
6. ¿Por qué crees que la representación que escogió es la más adecuada para el estudio de la variación en P12b?

3.5 Fase 4: Resultados y Análisis de Datos

3.5.1 Análisis de las respuestas profesora A

Pregunta 1 (P1).

La primera pregunta consta de 6 ítems; P1a, P1b, P1c, P1d, P1e y P1f, donde se debe marcar como SÍ o NO, lo que permite identificar las primeras concepciones que tiene la profesora A sobre algunas características de la variación asociadas al comportamiento de la sucesión matemática, considerando características y conceptos relacionados de acuerdo con la categoría del *continuo numérico*.

Así, para P1a, se tiene como afirmación que “Las cantidades van cambiando de menor a mayor y luego de mayor a menor” en una secuencia de cantidades dada. La profesora marca la opción “No”, su respuesta permite inferir que ella identifica que el cambio va en un sentido, sin presentar ambos comportamientos a la vez.

Para P1b, la cual dicta “Los números escritos pertenecen al Conjunto de los números impares”, la profesora A marca el “Sí”, lo que permite inferir que la docente identifica algunas características del conjunto numérico indicado, lo cual permite ubicarlos en el conjunto de los impares, de tal forma que se reconoce un criterio de pertenencia donde los números que están en la secuencia hacen parte del Conjunto descrito.

La P1c afirma que “Los números están escritos en forma aleatoria y no existe un patrón de cambio entre ellos”. A esto la profesora A marca un “No”, lo que permite dar a conocer que sabe que la secuencia tiene un patrón de cambio.

Para la P1d, se tiene que “La cantidad del cambio que se va presentando entre los valores escritos puede ser representado con números pares”. La profesora A marca un “Sí”. Este apartado permite reconocer si quien responde puede identificar la diferencia entre las magnitudes descritas en la secuencia y la cantidad de cambio que se presenta. Esto es correcto, debido a que en la secuencia, aunque las cantidades presentadas pertenecen al conjunto de los números impares, la cantidad de cambio, por el contrario, hace parte del conjunto de los números pares.

En la P1e, está la afirmación “Las anteriores cantidades están relacionadas con una sucesión matemática”. A esto la profesora A responde “Sí”. Esto permite identificar que la profesora A reconoce regularidades y patrones, además de diferenciar cuando una secuencia de números es una sucesión matemática.

La P1f, siendo la última, dice “La expresión matemática que representa el conjunto de las cantidades corresponde a $2n - 1$ ”, a lo que la profesora A responde con un “No”. De esta manera, la profesora A reconoce que dicha expresión matemática no corresponde con la adecuada para describir el comportamiento de la sucesión, lo cual indica un reconocimiento de la sucesión matemática.

El análisis de las respuestas de la profesora A permite evidenciar que identifica y reconoce características esenciales para el estudio del cambio dentro del continuo numérico, como el análisis de la tendencia, el concepto de orden, y procesos en conjuntos infinitos de la sucesión. Además, esta pregunta se relaciona con la categoría de *estudio de patrones*, debido al reconocimiento y descripción que hace la profesora A de regularidades presentes en las transformaciones matemáticas bajo este contexto matemático.

Pregunta 2 (P2).

La segunda pregunta consta de tres (3) ítems; P2a, P2b y P2c, las cuales se han diseñado con el objetivo evidenciar las concepciones de la profesora A en la variable de investigación del Conocimiento formal, en la categoría de *Estudio de patrones*, considerando la sucesión en P1.

Así, en P2a se tiene la siguiente pregunta “¿Cómo describirías el cambio que se va presentando en las cantidades?”, a lo que la profesora A responde: “El patrón de cambio corresponde a dobles a partir del 2, esto es, 2, 4, 8, 16, 32, ...”. De acuerdo con la descripción que hace la profesora A sobre el cambio, se evidencia que identifica la existencia de un patrón de cambio en la sucesión. Dicho cambio, además, corresponde a “dobles”, comenzando en el 2, para así obtener los siguientes términos. Además, en la entrevista se profundizó sobre esa expresión, a lo que la profesora A explicó que en primaria ella usa la suma del mismo número, mientras que en secundaria ya toma el valor de la expresión exponencial. Por ende, la profesora en la entrevista expresa que para este cambio en secundaria sería 2^n . Esto permite inferir que la docente maneja el acercamiento de la variación en primaria con estrategias y recursos diferentes que en secundaria.

Otro aspecto fundamental en la respuesta es que la docente no solo hace una descripción cualitativa del cambio sino también con su especificación cuantitativa de la secuencia numérica indicada. Este aspecto es relevante dentro de la comprensión sobre la

noción de variación, debido a que si el docente tiene claros estos aspectos sus procesos de enseñanza de la variación podrían considerar en buena manera este aspecto para trabajarlo con sus estudiantes.

Para P2b, está la siguiente pregunta: “¿Cuál sería el término a escribir después de 63?”. La profesora A responde: “ $127 = 63 + \text{el doble } 32 = 64 \rightarrow 63 + 64 = 127$ ”. Siendo éste el valor correcto a seguir de la serie propuesta en el ejercicio, dando una explicación de cómo obtuvo dicho número, usando de nuevo el término de “doble” para explicar el procedimiento correspondiente a este hallazgo. Esto evidencia los procesos mentales que utilizó la profesora A para analizar el comportamiento de la secuencia y encontrar los patrones de manera acertada en una sucesión.

Para el P2c, se le pide a la profesora A que “Escriba la expresión matemática que represente el cambio entre términos de la sucesión”. La profesora A descompone los valores de la sucesión de manera explicativa, tal como se muestra a continuación.

Figura 4

Respuesta de la profesora A de la P2c.

c. Escriba la expresión matemática que represente el cambio entre los términos de la sucesión.

$$\begin{array}{ccccccc} (1+2) & (3+4) & (7+8) & (15+16) & (31+32) & (63+64) & \\ \hline 1, & 3, & 7, & 15, & 31, & 63, & 127, \dots \end{array}$$

De esta manera, la profesora describió el proceso mental que realizó para hallar los valores de la sucesión y visualizar el cambio de manera explícita. Sin embargo, no expresa de manera matemática el cambio. En la entrevista se logró preguntarle por la expresión matemática que usaría, a lo que respondió que “Si me enfoco en el cambio, la expresión matemática sería 2^n ”, lo cual es una respuesta esperada para describir la modelación del comportamiento del cambio de la sucesión. Además, respondió que no escribió la expresión porque ya había colocado los ejemplos. Esto permite inferir cierta dificultad para expresar de manera general y abstracta el cambio en esta sucesión.

Al analizar P2, se identifica que la profesora A posee una comprensión del cambio, junto con el reconocimiento de patrones en las transformaciones matemáticas por medio de diferentes contextos, con cierta dificultad para modelar el cambio. Sin embargo, la profesora A evidencia un manejo adecuado de la enseñanza de la variación en primeros grados, usando recursos que permitan visualizar de manera explícita el cambio existente en la sucesión. Este comportamiento puede ser un indicador de una estrategia o recurso por parte de la docente con sus estudiantes al momento de estudiar la variación.

Pregunta 3 (P3).

La tercera pregunta consta de dos (2) ítems; P3a y P3b. Esta pregunta pertenece a la variable de investigación de Conocimiento Disciplinar, en la variable de *Estudio de patrones*, de esta manera se busca relacionar las concepciones que tiene la profesora A con la variación mostrada de forma pictórica, lo que permite deducir los patrones encontrados por la profesora en este registro.

Para P3a, se tiene la siguiente actividad: *“Describe el cambio que se va presentando en la cantidad de fósforos de acuerdo con la cantidad de triángulos para cada posición”*. La profesora A describe el cambio presentado en la cantidad de fósforos de la siguiente manera: *“Se adicionan 2 fósforos a cada arreglo y se obtiene el patrón de 3, 5, 7...”*, siendo una descripción correspondiente a un análisis del comportamiento de la variación en esta representación. Cabe resaltar que la profesora A menciona la añadidura de dos (2) fósforos, denotando el contexto pictórico del problema, además de describir que de esta forma se obtiene *“el patrón de 3, 5, 7, ...”*, lo cual indica un reconocimiento de los valores del patrón en la sucesión.

En P3b, se tiene la actividad de: *“Escribe la expresión matemática que determine la cantidad de fósforos para cualquier posición de la siguiente secuencia”*. La profesora A escribe: *“3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... $(2n + 1)$ $n \in \mathbb{N}$ ”*, con $\mathbb{N}$ como conjunto de los naturales..

Primeramente, se tiene en cuenta que la profesora A expresa algunos ejemplos de la continuación de los valores de la sucesión, y termina con la expresión matemática, teniendo en cuenta que hace explícita la noción de pertenencia por parte de n con respecto al conjunto de los números Naturales. En este punto utiliza una variable general y abstracta para describir la variación, en contraste con el punto P2c.

De esta manera, se evidencia que la profesora A comprende e identifica los patrones de cambio y el comportamiento de un cambio de manera matemática, aunque se denota cierta facilidad en las respuestas con el cambio de representación de lo numérico a lo pictórico.

Pregunta 4 (P4).

Esta pregunta consta de seis (6) ítems; P4a, P4b, P4c, P4d, P4e y P4f, con la cual se plantea unas afirmaciones sobre algunos de los procedimientos de la enseñanza de la variación a nivel escolar, de manera que se diga si, en consideración propia, es verdadera o falsa dicha afirmación, teniendo en cuenta que P4 se encuentra en la variable de Acciones didáctica, en la categoría de *conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación*.

Así, para la parte P4a se obtiene una correspondencia de verdad a la siguiente afirmación: *“El estudio de la variación se inicia en los primeros grados de escolaridad”*. La profesora responde: *“Verdadero: explícito en Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y Derechos Básicos (MEN, 2016)”*. En este caso, la profesora A plantea y argumenta usando los documentos oficiales emitidos por el MEN sobre el desarrollo de la variación en la básica primaria, lo que indica que tiene en cuenta dichos documentos, los cuales afirman que la enseñanza de la variación debe comenzar en los primeros grados de escolaridad.

Para P4b, se pregunta: *“El trabajo con patrones se desarrolla exclusivamente en niveles de escolaridad avanzados como la educación media para el estudio y comprensión de la variación”*. La profesora A responde: *“Falso. En el PLAN ESTUDIOS IE LA BUITRERA, el tratamiento de los patrones está determinado desde transición, inicialmente con referentes*

espaciales - métricos y en primaria con numéricos/geométricos". Este argumento arroja indicios sobre un manejo de desarrollo de plan de estudio, un conocimiento sobre la estrategia educativa que maneja la institución, y sobre determinados conocimientos que van en relación con el estudio de patrones en niveles de escolaridad básico, tales como transición y primaria.

En P4c, se tiene la siguiente afirmación: *"Las funciones polinómicas son el objeto matemático más adecuado para enseñar la variación"*. La cual tiene el objetivo de indagar si la profesora A considera que las funciones son el objeto matemático principal al momento de tratar con la enseñanza de la variación. A esto, la profesora A responde: *"Falso. Las relaciones de proporcionalidad deben ser el proceso inicial para avanzar hacia las funciones polinómicas"*. Esto indica que la profesora A reconoce un objeto matemático previo que trata sobre la variación para poder entender las funciones polinómicas. Esto sugiere que tiene en consideración el estudio de bases temáticas para poder llegar al entendimiento de un objeto matemático, en este caso, las funciones polinómicas.

Para P4d, se afirma: *"Para estudiar la variación, el proceso de modelación no desempeña un papel relevante"*. La profesora A responde: *"Verdadero. La modelación permite representaciones variadas para significar la variación"*. Esto sugiere que para la profesora A, la modelación no es un proceso significativo, sin embargo, al analizar el argumento, toma a la modelación como una herramienta que permite representaciones variadas de la variación, lo cual indica que sí considera importante dicha noción. En la entrevista realizada con la profesora, se confirma que para la docente, la modelación sí desempeña un rol relevante para estudiar la variación. Esta respuesta es la esperada considerando el estudio de los documentos del MEN.

Para P4e, se afirma que: *"El desarrollo del pensamiento geométrico y espacial es apropiado para el estudio de la variación"*. La profesora A responde: *"Verdadero, por toda*

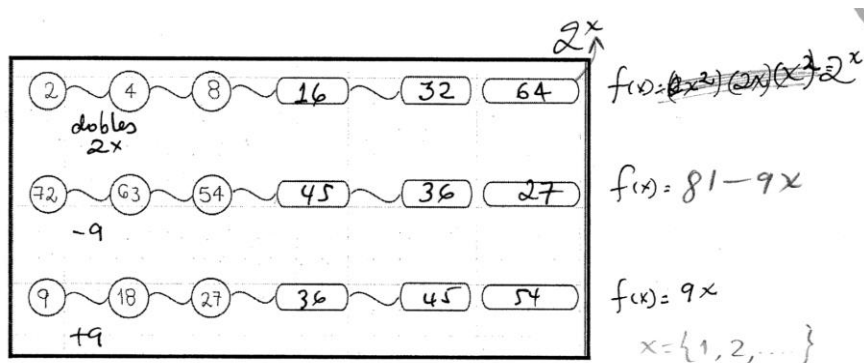
la variedad de registros y los efectos visuales que promueven situaciones”. Esto permite entender que para la docente, se amplía el análisis de los registros de la variación. El término de *variedad de registros* evidencia que la profesora A considera relevante el manejo de registros para entender la variación, también encontrado en MEN, 1998, 2006, 2017, y en Duval, 1999.

Para P4f, se afirma que: “Las representaciones gráfica y tabular son las únicas que permiten captar la variación de cantidades de magnitud”. La profesora A responde: “Falso. Para el caso inicial, situaciones del entorno, modelaciones, alcanzan su nivel cuando el sistema de registros permite evidenciar la variación de la magnitud”. En este caso, la profesora A usa ejemplos como situaciones del entorno y modelos, que permiten captar la variación por medio del manejo de un sistema de registros, lo cual abarca las representaciones gráficas y tabular, pero no son las únicas a considerar.

Pregunta 5 (P5).

Figura 5

Respuesta de la profesora A para P5.



La quinta y sexta pregunta se hacen considerando una información en forma de cuadros para completar. En este cuadro se deben poner los valores considerados según unas cantidades previas, y se debe realizar una expresión matemática que permita evidenciar el

comportamiento de dichas cantidades. Cabe resaltar que P5 se encuentra en la categoría de *la variable*.

En la quinta pregunta se tienen dos secciones: P5a y P5b. En la primera, la profesora A debe completar los espacios en blanco de los rectángulos, mientras que en la segunda se tiene como actividad: “Escribe la expresión matemática que representa cada sucesión en la columna de la derecha”. En la primera sucesión se encuentra con facilidad el patrón de las cantidades. La profesora insiste, de todas formas, en la palabra “dobles” para describir el comportamiento de una secuencia con características de 2^n , además de utilizar la expresión $f(x)$ para representar la expresión matemática. Esta denotación de función en este punto resalta debido a que en ninguno de los anteriores puntos donde se pide la expresión matemática de la sucesión de cantidades la profesora A lo hizo utilizando la función como expresión. Sin embargo, se da la expresión matemática correspondiente a cada sucesión de cantidades, con el respectivo conjunto de los valores de las x .

Para la segunda sucesión, la profesora toma en cuenta que las cantidades van disminuyendo en términos de 9, tal como se evidencia en el -9 colocado debajo de la segunda sucesión. La expresión indicada para la segunda sucesión de la profesora A es $f(x) = 81 - 9x$, teniendo en cuenta el inicio de la sucesión (72), es una expresión que da lugar al comportamiento de dichas cantidades.

En la tercera sucesión, la profesora A considera que el aumento en las cantidades tiene un valor constante de 9, tal como lo indica en el +9 en la parte inferior del cuadro. De esta manera, la profesora escribe la expresión como $f(x) = 9x$, lo que indica un correcto análisis sobre el comportamiento de esa sucesión.

El ejercicio anterior permitió indagar sobre las expresiones usadas por la profesora A para describir el comportamiento de manera matemática de esas sucesiones, relacionando la noción de función para obtener los datos, considerando a la función como una relación entre

dos variables, tal como se puede apreciar en la sucesión como una función considerando el conjunto de los números naturales, siendo una función discreta². De esta manera, se evidencia que la profesora A designó valores a las variables correspondientes de una relación funcional, de lo cual se puede concluir que su noción de variable pertenece a un contexto donde se encuentre en relación de otra variable para obtener la relación de función. También cabe resaltar el uso del álgebra utilizado en este escenario para completar los valores pedidos y modelar el comportamiento por medio de la expresión de $f(x)$.

Pregunta 6 (P6).

La sexta pregunta corresponde a un análisis en las acciones didácticas de la profesora A con respecto al ejercicio de las sucesiones de las cantidades. Ésta se encuentra en la categoría de *conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación*. Posee dos secciones; P6a y P6b. En la primera se pregunta: “¿Qué tipo de aprendizaje asociado al pensamiento variacional se podría promover con los anteriores ejercicios?”, la profesora A respondió: “secuencias numéricas, patrones numéricos y seriaciones”. Esto infiere que la profesora A reconoce los aprendizajes asociados a la actividad del estudio de patrones y secuencias. El término de función parece indicar que la profesora también considera dentro de los aprendizajes, la noción de relación entre variables. Con lo anterior, se puede inferir que los aprendizajes descritos anteriormente por la profesora A son relevantes al momento de enseñar la variación en el aula de clase, considerando actividades semejantes a las mostradas en P5.

Por otro lado, en P6b, la pregunta corresponde a “¿Con cuáles grados de la educación básica y media consideras que se puede trabajar este ejercicio? Explica tu respuesta”, la docente responde que lo haría “En los primeros grados de Básica Primaria, una vez se haya construido el sentido numérico”. Se debe destacar el hecho de que para realizar el ejercicio se

² Fernández Novoa, Jesús (1991). *Análisis Matemático I (Tomo 1)*. Madrid: UNED.

debe tener una noción de álgebra a raíz de la modelación y análisis de patrones para encontrar los valores a completar, lo cual no se enseña de manera avanzada en los primeros grados escolares. Sin embargo, la profesora afirmó que esta actividad se puede realizar en los primeros grados de Básica Primaria, cuando ya los estudiantes hayan desarrollado el sentido numérico, lo que les permite identificar patrones, secuencias, y manejo de algunas cantidades, además de “la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos, por la comprensión de su modelación, sus propiedades, sus relaciones, su efecto y la relación entre las diferentes operaciones”. (MEN, 1998, p. 17). Sin embargo, considerando los Lineamientos Curriculares, esta actividad pertenece a un estudio de grados de secundaria.

Así, la sexta pregunta permite indagar sobre los aprendizajes que identifica la profesora A, junto con los conocimientos que tiene frente a la ubicación de los contenidos del concepto de variación en lo curricular. De esta manera, la profesora A permite visualizar un ejercicio en primaria usando nociones de variación que describen el cambio presentado en la imagen, argumentando a través de la relación del sentido numérico con los patrones, la noción de cambio, el análisis de datos, y por ende, de variación.

Pregunta 7 (P7).

Para las preguntas siete (7), ocho (8) y nueve (9), se utilizó una tabla con valores numéricos sobre precios, años y sectores, de manera que la profesora pudiera valerse de esos datos para obtener un respectivo análisis. En la tabla la profesora utilizó algunos espacios en blancos que permiten ver el hallazgo de ciertos patrones por parte de ella. A continuación se muestra la tabla correspondiente, con las anotaciones personales de la docente.

Figura 6

Evidencia del proceso para llegar a la respuesta de la profesora A.

"A continuación se muestra una tabla con los datos de los precios, en promedio, de papa parda desde el 2015 hasta el 2019, vendida por un agricultor y por un supermercado, por kilogramo:

Año	precio venta agricultor (por kg)	precio venta supermercado (por kg)	
2015	\$800	\$1000	200
2016	\$1000	\$1250	250
2017	\$1200	\$1500	300
2018	\$1400	\$1750	350
2019	\$1600	\$2000	400

En esta tabla se logra identificar que la profesora A encuentra un patrón en la columna de venta del agricultor correspondiente a lo esperado, mientras que los datos escritos por la profesora en la parte derecha de la tabla describen la diferencia de valores entre el precio de venta del agricultor y del supermercado por año.

Usando los datos de la tabla mostrada anteriormente, la profesora responde la séptima pregunta, la cual es: "Teniendo como referencia el precio de venta del agricultor, ¿de cuánto es el porcentaje de incremento del supermercado a través de los años?" Se debe tener en cuenta que el porcentaje de incremento es constante. La profesora escogió la opción del 25%, lo cual es una respuesta esperar para la resolución de P7. Debido a que P7 se encuentra en la categoría de *proporcionalidad*, se permite inferir que la profesora A identifica la proporción directa entre las variables del problema, con datos representados de manera tabular cuyo comportamiento es lineal y afín.

Pregunta 8 (P8).

P8 pertenece a la categoría de *registros de representación*, debido al análisis que debe hacer la profesora A de los datos en registro tabular. En la octava pregunta se pregunta: "¿Qué variaciones en los valores se pueden identificar en la tabla?" La profesora identificó tres variables: "variación precio de venta agricultor", "variación venta de precio supermercado", y "variación en el incremento del supermercado con respecto al agricultor". Lo que

corresponde a una parte de lo que cambia en la tabla. Sin embargo, no se expresa la cuantificación del cambio evidente en la tabla, lo que sugiere una interpretación errada de la pregunta. A pesar de eso, se resalta que la profesora A identifica las variables del problema, reconociendo cómo varía cada una, y cómo varía una con respecto a la otra, designando la dependencia e independencia respectiva.

Pregunta 9 (P9).

En P9 se analiza la categoría de *la proporcionalidad*, perteneciente a la variable de investigación del Conocimiento Disciplinar. Para resolver P9, la profesora A seleccionó una de las cuatro (4) afirmaciones correctas sobre unas de las características del comportamiento de los datos. En esta pregunta se evalúa la comprensión lectora que describe el comportamiento, junto con el análisis de la proporcionalidad para encontrar la forma como las magnitudes del problema se relacionan. Como se puede observar, la respuesta c es la correcta, la cual dice “Los incrementos en los valores de precio de venta tanto en la columna del agricultor como del supermercado son constantes año tras año”, esto debido a que describe de manera correcta la proporción del incremento constante anual de las variables, comportamiento que se evidencia en los datos en el registro tabular. Sin embargo, al analizar la justificación de la profesora A, se encuentra la descripción de “son constantes los valores precios de venta del agricultor”, lo cual no concuerda con la descripción del comportamiento de esa variable, debido a que los valores de los precios en la columna del agricultor sí cambian de manera constante. En la otra afirmación, se obtiene que “y los PORCENTAJES del incremento del supermercado a través de los años”, lo que implica que reconoce que los porcentajes del incremento son constantes, lo cual es correcto. Además, la profesora A resalta el PORCENTAJES, esto, se cree, es debido a P7, donde se preguntó por el incremento porcentual de la columna del supermercado, lo que corresponde a una forma de representar el cambio en los valores de precios.

Por ende, se observa que la profesora A usa correctamente el análisis de P7 para encontrar la constancia del incremento en los valores, pero se confunde al momento de argumentar por el valor de los precios del agricultor, debido a que los valores de los precios cambian, mientras que el incremento es lo que conserva su propiedad de constancia.

Pregunta 10 (P10).

Esta pregunta está dentro de la categoría de *función como relación de dependencia*, en la cual se busca que la profesora A identifique las variables principales y relacione el comportamiento entre ellas.

La pregunta tiene dos secciones; P10a y P10b, de las cuales la primera tiene como actividad: “Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explica tu respuesta”, a esto, la profesora A determinó la gráfica que describe el movimiento de un auto que se mueve a velocidad constante. En este caso, hay que tener en cuenta que la variable dependiente es la posición $e(t)$, en relación con el tiempo. El que la velocidad sea constante determina la posición y el tiempo, de manera que aunque la velocidad es constante, sí lo hace de manera proporcional $e(t)$ y t . De esta manera, la profesora A logra identificar la gráfica correspondiente a dicha situación, lo que permite identificar que existe un manejo de la identificación de variables en una relación funcional. Su explicación para dicha escogencia de la gráfica es: “ii) La variación de la posición es proporcional a la variación del tiempo”. Dicha afirmación es la esperada para resolver este problema, lo que permite deducir que la docente reconoce la relación funcional entre dos variables, una en dependencia de la otra.

Para P10b, se tiene que: “Describa cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada”, la profesora A responde lo siguiente: “Las magnitudes están relacionadas proporcionalmente”, respuesta esperada, que evidencia el comportamiento y la variación entre dichas variables.

Pregunta 11 (P11).

Esta pregunta usa las mismas imágenes que P10, con una diferencia radical en la variable a analizar, debido a que se tiene en el eje y la variable $v(t)$, y en el eje x se encuentra t . También está ubicada en la categoría de *función como relación de dependencia*. En esta pregunta se tiene dos secciones, P11a y P11b, siendo la pregunta de la primera la siguiente: “Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique su respuesta”. Es así como se busca que la profesora A encuentre la gráfica que describe el movimiento de la velocidad constante en relación con el tiempo. La docente escogió la gráfica que describe correctamente el comportamiento de esas variables, siendo su respuesta: “i) La velocidad no cambia con respecto al tiempo”. Esto permite inferir que la docente identifica la variación en registro gráfico, determinando que una de la variable dependiente es constante, mientras que la independiente varía.

En P11b, está la actividad de: “Explique cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada”, la respuesta de la profesora A es: “Ante un cambio en el tiempo, no cambia la velocidad”, lo que indica que la docente identifica correctamente el comportamiento de las variables en el registro gráfico, además de comprender la relación entre dichas variables, lo que permite inferir que comprende la función que se deriva de la relación entre ellas.

De esta manera, se determina que la profesora A usa correctamente las relaciones funcionales como relación dependiente, analizando de manera correcta el comportamiento de las variables y su representación gráfica.

Pregunta 12 (P12).

Esta pregunta está ubicada en la categoría de *registros de representación*, y tiene dos secciones P12a y P12b, con la añadidura de complementar la tabla con los datos correspondientes a la gráfica mostrada. Para esta pregunta, la profesora A debió reconocer el comportamiento de los datos, tanto de manera tabular como gráfica, y realizar una

comparación para determinar, en este escenario, cuál de las dos representaciones le fue de mayor ayuda para reconocer el comportamiento de variación. En la primera sección se tuvo como actividad: “Describa el comportamiento de esta función en los intervalos $(-\infty, 0)$ ”, a lo que la profesora respondió “el comportamiento de la función es parabólico decreciente y alcanza su mínimo en cero”, correctamente descrita bajo ese parámetro. Lo anterior demuestra la comprensión de la función en un intervalo representado de manera gráfica, además de identificar el tipo de función.

Para P12b, se preguntó: “Para el análisis del comportamiento de la respectiva función, ¿Cuál de las dos representaciones brinda mayor información? Explique su respuesta”. La profesora A respondió “El registro gráfico permite visualizar los puntos entre las variables discretas en x”, lo que indica que elige la representación gráfica sobre el registro tabular. Cabe resaltar el uso del término “variables discretas” para representar el comportamiento de la función, considerando que para este caso, las variables no están determinadas por un conjunto restringido, sino que puede tomar cualquier valor numérico dentro de los números reales, aunque también puede considerarse teniendo en cuenta P12a, la cual limita los valores de $f(x)$. Gracias a esta pregunta, se pudo determinar que la profesora A maneja correctamente las representaciones de una función, considerando a la representación gráfica con mayor facilidad debido a la visualización que permite. También se observa que la profesora A maneja debidamente algunas representaciones de la variación, sin embargo, a veces se confunde con la asignación de variables constantes y dinámicas, como en la novena pregunta, y designa expresiones numéricas como funciones.

Análisis general de las concepciones de variación de la profesora A.

En las respuestas que se recopilaron de la profesora se logró evidenciar algunas concepciones que tiene la profesora A con respecto a la variación y su enseñanza. Es así cómo se identifica la noción de la profesora sobre el cambio cuando se analizan las categorías

de investigación. De esta manera, para el *continúo numérico*, se obtiene una apropiación por parte de la docente al identificar las características de la sucesión en P1, lo que le permitió identificar correctamente las descripciones de la serie. Por otro lado, en el *estudio de patrones*, se identifican algunas dificultades para considerar la expresión exponencial de la sucesión, esto debido al uso de la característica de los dobles que le permite visualizar el cambio de esta manera, lo cual es una herramienta usada por la profesora en los grados de primaria. Esto se evidencia en P2 y P3. Otra característica de la docente en estas preguntas es el desglose de los números encontrados, lo que sugiere un comportamiento similar en el aula de clase, lo que permite inferir que es una ayuda visual también para los estudiantes. También resaltó el constante designio del conjunto al cual pertenecían las variables asignadas, lo que también indica ser una herramienta en el aula de clase.

En la *proporcionalidad*, se evidenció un manejo del comportamiento de las variables, que le indicó el comportamiento proporcional del cambio presentado en P7 y P9, relacionando las funciones sencillas. Esto abre paso a las categorías de *la función como relación de dependencia, la variable y los registros de representación*. Esto debido a que la profesora A logra con éxito identificar, describir y modelar diferentes comportamientos que traten de la relación entre dos variables, por medio de la comprensión de los patrones existentes en dicha relación y del correcto análisis en el registro tabular y gráfico de la relación de las variables.

Por otra parte, en las preguntas relacionadas con las acciones didácticas de la profesora, se logró evidenciar el uso constante de los documentos oficiales del MEN, los cuales profundizan en la enseñanza de la variación y las diferentes estrategias que pueden recurrir los profesores para lograr la apropiación del pensamiento matemático en los estudiantes. De esta forma, se puede deducir que la profesora recurre constantemente a los

Estándares Básicos de Competencias, a los Lineamientos Curriculares y a los Derechos Básicos de Aprendizaje como recursos importantes al momento de diseñar una clase.

3.5.2 Análisis de las respuestas profesora B

Pregunta 1 (P1).

P1 consta de 6 ítems; P1a, P1b, P1c, P1d, P1e y P1f, donde se debe marcar una proposición como Sí o no, teniendo en cuenta el comportamiento de la sucesión matemática, con el propósito de identificar características y conceptos relacionados con la variación de acuerdo a la categoría del *continuo numérico*.

La pregunta P1a afirma que “Las cantidades van cambiando de menor a mayor y luego de mayor a menor”. Al respecto, la profesora B marcó la opción “No”, lo cual infiere que reconoce el orden y la tendencia del conjunto numérico planteado, además, identifica que la sucesión está cambiando en un solo sentido.

P1b afirma que “Los números escritos pertenecen al Conjunto de los números impares”. La profesora B marcó “Sí”, lo que permite deducir que reconoce que la sucesión está formada por algunos términos del conjunto de los números impares, por lo cual, se evidencia que la profesora identifica subconjuntos de conjuntos infinitos con características específicas.

La pregunta P1c indica que “Los números están escritos en forma aleatoria y no existe un patrón de cambio entre ellos”. De acuerdo con lo anterior, la profesora B marcó “No”, lo que permite inferir que la profesora interpreta que la secuencia de números tiene una regla de formación y un patrón de cambio, por ende, la docente reconoce y describe regularidades de conjuntos numéricos.

La pregunta P1d dicta que “La cantidad del cambio que se va presentando entre los valores escritos puede ser representado con números pares”. La profesora B marcó un “Sí”. Lo que permite identificar teniendo en cuenta lo contestado en la entrevista, que la profesora realiza operaciones relacionadas con regularidades y reconocimiento de patrones, puesto que

logró distinguir entre las cantidades que representan el cambio y los términos que cambian en la secuencia. Además, sabe diferenciar conjuntos infinitos dentro de los reales, por lo que logró encontrar que las cantidades que representa el cambio pertenecen al conjunto de los números pares, mientras que los términos que hacen parte de la secuencia pertenecen al conjunto de los números impares.

La pregunta P1e indica que “Las anteriores cantidades están relacionadas con una sucesión matemática”. La profesora B responde “Sí”. Esto permite determinar que reconoce regularidades, patrones y reglas de formación para los términos de la secuencia, en un contexto numérico, además de tener criterios para diferenciar cuando una secuencia de números es una sucesión matemática. A través de la entrevista, rectificó lo anterior al afirmar que observó la existencia de un patrón entre los valores y que este patrón se puede generalizar a través de una expresión matemática y de esa manera, poder definir el valor del término siguiente.

La pregunta P1f afirma que “La expresión matemática que representa el conjunto de las cantidades corresponde a $2n - 1$ ”. La profesora B responde con un “No” lo que permite identificar que la docente diferencia entre las cantidades resultantes de la sucesión y la sucesión planteada inicialmente.

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *Continuo numérico*, se puede evidenciar que la profesora B identifica y reconoce características esenciales para el estudio del cambio dentro del continuo numérico como lo son: analizar la tendencia, el orden, los procesos y operaciones en los conjuntos infinitos, además esta pregunta también está relacionada con la categoría de *estudio de patrones* debido que, la docente logra reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas en los diferentes escenarios.

Pregunta 2 (P2).

La segunda pregunta consta de tres ítems los cuales están distribuidos de la siguiente forma P2a, P2b y P2c, la cual la profesora B debe responder teniendo en cuenta el comportamiento de la sucesión matemática dada con el propósito de identificar características y conceptos relacionados con la variación de acuerdo a la categoría del *estudio de patrones*.

La pregunta P2a afirma que “¿Cómo describirías el cambio que se va presentando en las cantidades?”. A lo que la profesora B contesta “*La diferencia entre los números de la sucesión está creciendo de manera exponencial*” lo que infiere que la docente reconoce y describe el comportamiento del cambio como un crecimiento exponencial, lo cual indica que, la profesora logra evidenciar que es una sucesión que está creciendo muy rápidamente hacia el infinito.

La pregunta P2b dicta que “¿Cuál sería el término a escribir después del 63?”. La profesora B contesta “*el término que sigue es 127*” lo que infiere que la docente logró observar regularidades en la secuencia de números (1,3,7,15,31,63...) y reconoce que hay un patrón de cambio lo que le permitió encontrar el término siguiente en la sucesión.

La pregunta P2c indica que “Escriba la expresión matemática que represente el cambio entre los términos de la sucesión”. La profesora B contesta “*la expresión del cambio es 2^n , $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$* ” lo que infiere que la docente identifica y describe el cambio a través del reconocimiento de regularidades o patrones presentes en esta secuencia de números para así lograr encontrar una expresión matemática que la represente.

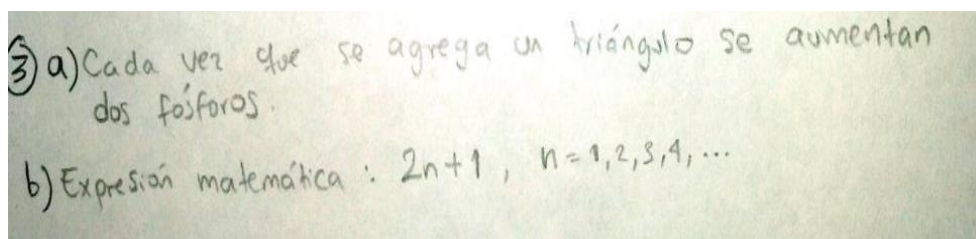
Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *estudio de patrones*, se puede evidenciar que la profesora B identifica y reconoce características esenciales de esta categoría para el estudio de la variación como lo son: el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones

presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones y lograr una modelación matemática.

Pregunta 3 (P3).

Figura 7

Respuesta de la profesora B para P3.



La tercera pregunta consta de dos ítems P3a y P3b. En esta pregunta se tiene una representación pictórica, como se muestra en la anterior figura en la que se pretende estudiar el cambio y estudio de patrones a partir de los diferentes registros de representación.

El primer ítem P3a pregunta “Describe el cambio que se va presentando en la cantidad de fósforos de acuerdo con la cantidad de triángulos para cada posición”. La profesora B responde “cada vez que se agrega un triángulo se aumentan dos fósforos”, lo que infiere que, la docente identifica patrones dentro de los diferentes registros de representación, de igual forma, hace una descripción de dicho cambio al afirmar que “aumentan” los fósforos a medida que aumentan los triángulos.

El segundo ítem P3b afirma que “Escribe la expresión matemática que determine la cantidad de fósforos para cualquier posición de la siguiente secuencia”. La profesora B contesta “la expresión matemática es $2n + 1$, $n=1,2,3,4,\dots$ ” y en la entrevista afirma que analizó la imagen (registro pictórico) y consiguió observar que cada vez que aumentaba un triángulo, la cantidad de fósforos aumentaba y como resultado obtenía términos impares, lo que la llevó a encontrar que los términos de esta sucesión se modelan bajo una expresión matemática, la cual surge de sumar uno a cualquier número par.

Lo que demuestra que la docente afirma la claridad que tiene sobre el reconocimiento de regularidades o patrones en los diferentes registros de representación además de modelar dicho cambio para así expresarlo matemáticamente.

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *estudio de patrones*, se puede evidenciar que la profesora B identifica y reconoce características esenciales de esta categoría para el estudio de la variación como lo son: el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones. Además esta pregunta hace referencia también a la categoría de los *registros de representación* cuando se logra estudiar y evidenciar el cambio en este caso, en el registro pictórico.

Pregunta 4 (P4).

P4 consta de 6 ítems; P4a, P4b, P4c, P4d, P4e y P4f . La cual tiene como objetivo analizar las acciones didácticas de la profesora B con base en el currículo y la enseñanza de la noción de variación.

La pregunta P4a afirma que “El estudio de la variación se inicia en los primeros grados de escolaridad”. La profesora B responde: “*verdadero, desde los primeros años los niños están reconociendo patrones geométricos que les permite comparar y establecer relaciones*”

Con base en lo contestado, se analiza que la profesora B, conoce acerca de los procesos que se llevan a cabo en primera infancia con relación al estudio de la noción de variación, debido que, afirma que en los primeros grados, el estudio de patrones se enseña y les permite establecer relaciones de comparación.

La pregunta P4b indica que “El trabajo con patrones se desarrolla exclusivamente en niveles de escolaridad avanzados como la educación media para el estudio y comprensión de

la variación”. La profesora B responde: *“falso, como lo mencioné anteriormente, desde pequeños los niños pueden ver variaciones o cambios a partir de patrones”*

Con base en lo contestado, se puede observar que su respuesta argumenta lo contestado en el ítem a, debido que, tiene claridad en el manejo de la noción de variación desde los primeros grados de escolaridad.

La pregunta P4c afirma que “Las funciones polinómicas son el objeto matemático más adecuado para enseñar la variación”. La profesora B responde: *“falso, a partir de las funciones se puede ver la variación, sin embargo, están más ligadas a la dependencia de una variable en relación con otra. Por ello, no considero que sea el objeto matemático más adecuado”*

Con base en lo contestado, se puede observar que la profesora B tiene claridad en relación con el concepto de función, sin embargo, reconoce que la enseñanza de la variación se puede representar por medio de diferentes objetos matemáticos sin embargo no especifica uno en particular .

La pregunta P4d afirma que “ Para estudiar la variación, el proceso de modelación no desempeña un papel relevante”. La profesora B responde: *“falso, es necesario el proceso de modelación, el cual permite analizar y generalizar las variaciones”*

Con base en lo contestado, se puede observar que la profesora B identifica que uno de los procesos fundamentales para la enseñanza de la noción de variación es el proceso de modelación, como lo afirma los lineamientos curriculares.

La pregunta P4e indica que “El desarrollo del pensamiento geométrico y espacial es apropiado para el estudio de la variación”. La profesora B responde: *“verdadero, a partir de este pensamiento se puede trabajar comparación de magnitudes y variaciones entre ellas, de manera gráfica”*

Con base en la respuesta de la profesora B, se puede observar que identifica y entiende que todos los pensamientos se pueden relacionar para la enseñanza de la variación.

La pregunta P4f afirma que “Las representaciones gráfica y tabular son las únicas que permiten captar la variación de cantidades de magnitud”. La profesora B responde: *“falso, estas son solo algunas de las formas de representar la variación”*

Con base en la respuesta anterior, se puede observar que la profesora B identifica que existen diferentes tipos de registros de representación en los que un objeto matemático puede ser enseñado.

En consecuencia, la profesora B presenta conocimientos en relación al currículo escolar, esto debido que, identifica que la noción de variación se presenta desde los primeros grados de escolaridad por medio del estudio de patrones. Además, resalta que las funciones no son el único objeto matemático para enseñar la noción de variación, que la modelación es un proceso fundamental para la enseñanza de la noción de variación, que todos los procesos generales son importantes (razonamiento, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos, formulación y resolución de problemas) y por último comprende que la noción de variación, se puede enseñar por medio de diferentes registros de representación. Por lo cual, la profesora B relaciona los procesos generales y pensamientos en su acción como docente.

Pregunta 5 (P5).

De acuerdo con la siguiente gráfica, responde las preguntas 5 y 6:

Figura 8

Respuesta de la profesora B para P5.

Seción 4:

⑤ a) * 16 - 32 - 64
 * 45 - 36 - 27
 * 36 - 45 - 54

b) * 2^n
 * $81-9n$
 * $9n$

} $n \in \mathbb{Z}^+$

P5 consta de dos ítem P5a y P5b. En esta pregunta se pretende estudiar el cambio y el estudio de regularidades por medio del uso del álgebra y del significado de la variable, para hacer una modelación de situaciones de cuantificación y fenómenos de variación.

El primer ítem P5a pregunta: Completa los espacios en blanco de acuerdo con las cantidades para cada caso. La profesora B completa con los términos (16 - 32 - 64) respectivamente en cada casilla de la fila 1, con los términos (45 - 36 - 27) en las casillas de la fila 2 y por último completa con los términos (36 - 45 - 54) en las casillas de la fila 3. Lo que demuestra que la docente consiguió encontrar un patrón de regularidad para cada caso y le permitió por medio del uso del álgebra encontrar el término siguiente.

El segundo ítem P5b pregunta: Escribe la expresión matemática que representa cada sucesión en la columna de la derecha. La profesora B responde para el caso 1 con la expresión 2^n , para el caso 2 con la expresión $81 - 9n$, y para el caso 3 con la expresión $9n$. cada una de las expresiones con la condición de (n) tenga su dominio en Z^+ lo que quiere decir que la docente conoce las condiciones matemáticas para dar origen a una sucesión, además de conocer el dominio y el significado de la variable al hacer uso del álgebra como una herramienta esencial de modelación del cambio para encontrar las expresiones matemáticas solicitadas.

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *la variable*, se puede evidenciar que la profesora B tiene conocimientos sobre el uso esencial del álgebra como herramienta de modelación para el estudio de la variación, además conoce conceptos claves relacionados con los números y operaciones

dentro de los conjuntos infinitos como lo indica la categoría del *continuo numérico*.

Pregunta 6 (P6).

P6 consta de dos ítem P6a y P6b. En esta pregunta se pretende estudiar las acciones didácticas de la profesora B, es decir, los conocimientos en relación con los contenidos y el currículo escolar.

En el primer ítem P6a pregunta: ¿Qué tipo de aprendizaje asociado al pensamiento variacional se podría promover con los anteriores ejercicios? La profesora B responde: *“a partir de estos ejercicios se promueve la generalización de secuencias, además, la modelación matemática de situaciones”*

Con base en su respuesta anterior, se puede inferir que, la profesora B identifica que en la quinta pregunta, se establece una relación numérica entre las cantidades en relación con el cambio al momento de encontrar el patrón que le permita llegar a la expresión matemática. Además resalta la modelación matemática, el cual es un proceso fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional según lo curricular.

En el segundo ítem P6b pregunta: ¿Con cuáles grados de la educación básica y media consideras que se puede trabajar este ejercicio? Explica tu respuesta. La profesora B responde: *“desde el grado séptimo, ya que reconocen algunos patrones numéricos, además, se están introduciendo en el lenguaje algebraico, que les permite hacer este tipo de modelaciones”*

Con base en su respuesta anterior y a lo contestado en la entrevista, se puede observar que, la docente con base en su experiencia, lo establecido por los estándares y la malla curricular de la institución afirma que, desde grado séptimo se puede trabajar el ejercicio de la pregunta 5, debido que, los estudiantes ya deben conocer el trabajo con patrones y las expresiones algebraicas. Además considera que en ese grado ya los estudiantes tienen conciencia de que se puede traducir una oración (lenguaje natural) a un lenguaje matemático (expresiones algebraicas), por consiguiente, en ese grado ya los estudiantes cuentan con

herramientas para descomponer o encontrar una representación más generalizadas a través de variables ejemplo encontrar la fórmula general de los pares $(2n)$.

En consecuencia, en la sexta pregunta se puede evidenciar que la docente conoce la relación entre el currículo y la enseñanza de la noción de variación.

Pregunta 7 (P7).

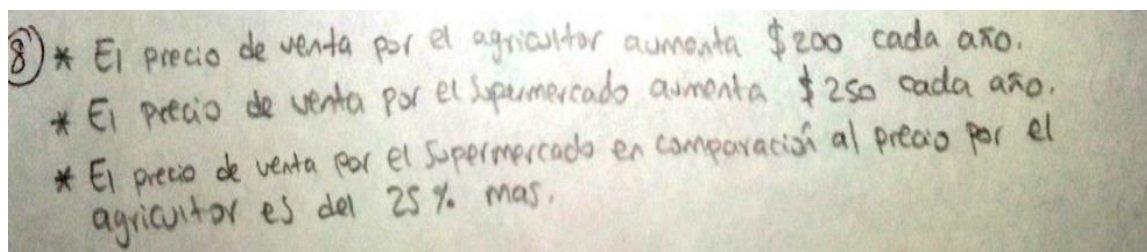
P7 está constituida por 4 ítems (a,b,c,d) dentro de la variable de investigación conocimiento disciplinar en categoría de *la proporcionalidad*, en la que se pretende encontrar modelos de función de una situación problema.

En esta pregunta se busca que la docente identifique ¿de cuánto es el porcentaje de incremento del supermercado a través de los años? teniendo en cuenta el precio de venta del agricultor. La profesora B selecciona el ítem (b) 25% lo que es correcto, por lo cual, se infiere que la docente identifica la relación de proporcionalidad que existe entre estas dos variables (precio de venta del agricultor y precio de venta del supermercado). Que le permite reconocer los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial.)

Pregunta 8 (P8).

Figura 9

Respuesta de la profesora B para P8.



P8 está dentro de la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *registros de representación*, la cual pretende identificar el estudio de los diferentes sistemas de representación asociados a la variación, específicamente la interpretación del registro tabular.

En esta pregunta se le pide a la profesora B que indique ¿Qué variaciones en los valores se pueden identificar en la tabla? La profesora contesta “(1) el precio de venta por el agricultor aumenta \$200 cada año, (2) el precio de venta por el supermercado aumenta \$250 cada año y (3) el precio de venta por el supermercado en comparación al precio por el agricultor es del 25% más”. lo que demuestra que la docente identifica y describe correctamente el comportamiento de las variables en este registro, además de reconocer características y conceptos que hacen parte del estudio del cambio como lo son el “Aumenta”, “en comparación con” por lo que, está haciendo uso de una noción que hace parte de la variación como es el concepto de la covariación, al comparar dos variables que cambia una con respecto a otra, esta pregunta pertenece a la categoría de los registros de representación, de igual forma, indagar qué tanto conoce la docente sobre la categoría de la proporcionalidad entre dos variables que se relacionan.

Pregunta 9 (P9).

La novena pregunta está dentro de la variable de Conocimiento disciplinar , en la categoría de *la proporcionalidad*, la cual se encarga de estudiar la relación entre dos magnitudes, teniendo en cuenta los modelos de función que involucra la relación de proporción con respecto a los valores dados en el registro tabular.

En esta pregunta consta de 4 ítem (a,b,c,d) donde solo uno es la respuesta correcta entonces se le pide a la profesora B que: Seleccione la afirmación que considera verdadera y justifique la selección. La docente contesta “ *la afirmación verdadera es la opción ©, por que cada año tiene el mismo incremento en el precio de venta*” lo que es correcto, además se infiere que, reconoce la relación de proporcionalidad de estas dos variables y resalta conceptos claves para el estudio del cambio como lo es el “cambio constante al transcurrir el tiempo” por el medio del cual está describiendo el comportamientos de ambas variaciones en este registro.

Pregunta 10 (P10).

P10 se encuentra en la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *función como relación de dependencia*, la cual consta de dos ítem P10a y P10b los cuales pretende analizar el conocimiento que se tiene sobre la interpretación del comportamiento de una función, con respecto a las variables de posición, velocidad y tiempo. La pregunta P10a afirma que “Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explica tu respuesta”. La profesora B contesta *“la gráfica (ii). Existe una relación entre la posición y el tiempo, de tal manera que al incrementar una de las variables, la otra aumenta proporcionalmente”*. lo cual infiere que la docente resalta características del estudio del cambio a través de la función como lo es la frase “aumentan de forma proporcional”, lo que demuestra que, reconoce y entiende el comportamiento de las variables en este registro gráfico, reconoce la relación que existe entre la posición y el tiempo cuando la velocidad es constante.

La pregunta P10b dicta que “Describa cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada”. La profesora B responde *“la gráfica describe el cambio o variación de la posición en relación con el tiempo de manera constante”*. lo cual infiere que la docente identifica que la razón de cambio entre estas dos variables es constante, lo que causa que el registro gráfico muestre un comportamiento lineal, lo que es correcto percibir al analizar dicha gráfica.

Pregunta 11 (P11).

Esta pregunta pertenece a la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *la función como relación de dependencia*, Esta pregunta está constituida por un registro gráfico y dos ítem P11a y P11b con la cual se pretende analizar la noción de función y su

comportamiento en el registro gráfico, estudiando el cambio entre dos magnitudes, de manera que se identifique la variable dependiente e independiente.

El primer ítem P11a pregunta: Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique su respuesta. La profesora B responde *“la gráfica (i), ya que muestra que la velocidad está en el mismo valor del eje (y) sin importar el tiempo que se tome en el eje (x)”*. Lo que demuestra que la docente identifica el registro gráfico de manera adecuada puesto que, evidencia que las variables que cambian una con respecto a otra y que se mantiene constante.

El segundo ítem P11b pregunta: Explique cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada. La profesora B contesta *“la velocidad no cambia a pesar de que aumenta el tiempo”*. Y lo contestado en la entrevista permite inferir que la docente determina en el registro gráfico que una magnitud no cambia (constante) y logra evidenciar que la otra aumenta, además identifica la variable independiente de la dependiente al analizar el gráfico.

Las preguntas P10 y P11 pertenecen a la categoría de *la función como relación de dependencia* donde se evidencia que la docente maneja el concepto de función como herramienta para establecer enlaces de patrones de variación entre variables para así lograr modelar y predecir el cambio, además de lograr interpretar correctamente las variaciones en los registros gráficos teniendo en cuenta que ambas variables cambian simultáneamente una con respecto a la otra, lo que conlleva al concepto de covariación el cual es uno de los conceptos más importantes para el estudio la noción de variación.

Pregunta 12 (P12).

Figura 10

Respuesta de la profesora B para P12.

Tabla	
x	f(x)
-3	4
-2	-1
-1	-4
0	-5
1	-4
2	-1
3	4

a) El comportamiento de la función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es decreciente. Se puede observar que los valores de $f(x)$ son menores cada vez que x aumenta.

b) La gráfica, ya que permite analizar de manera visual muchos más puntos del intervalo y de esa forma observar la variación.

P12 está constituida por dos ítems P12a y P12b, hace parte de la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *registros de representación*, la cual pretende evidenciar el conocimiento que se tiene sobre el tratamiento y la conversión en los diferentes registros de representación.

En el primer ítem P12a pregunta: Describa el comportamiento de esta función en los intervalos $(-\infty, 0)$. La profesora B responde “El comportamiento de la función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es decreciente, se puede observar que los valores de $f(x)$ son menores cada vez que x aumenta”. Lo que infiere que la docente interpreta los registros de representación para una función puesto que, logró reconocer el comportamiento de $f(x)$ en este intervalo que se le pregunta ya que identificó que cada vez que x aumenta los valores de la función van disminuyendo lo que quiere decir que, encontró otra forma de describir el cambio, además de manifestar que solamente es decreciente.

En el segundo ítem P12b pregunta: Para el análisis del comportamiento de la respectiva función ¿Cuál de las dos representaciones brinda mayor información? Explique su respuesta. La profesora B responde: “La gráfica, ya que permite analizar de manera visual mucho más puntos del intervalo y de esa forma observar la variación”. Adicionalmente, con base en lo afirmado en la entrevista, expresa que la gráfica le permite tener un panorama más

amplio sobre su comportamiento de la función, en cambio la tabla de manera general la restringe a unos valores donde se pueden evidenciar cambios. Lo que demuestra que evidentemente la docente logró identificar más información en este registro que en registro tabular, lo que determina que la docente se le facilita analizar más los datos en lo continuo que en lo discreto.

Por otro lado, es notorio que la docente identifica características esenciales para el estudio de una función en ambos registros (tabular y gráfico) como lo son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, identificar variable independiente y dependiente, completar tablas con las parejas ordenadas, entre otros.

En concordancia con lo anterior y los lineamientos curriculares plantean que, las tablas se pueden usar para llevar a los estudiantes a graficar situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante.

Por su parte, las gráficas cartesianas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados. (MEN,1998,p.50)

Análisis general de las concepciones de variación de la profesora B.

De acuerdo a este análisis sobre la variación para la profesora B se puede inferir que la docente dentro de la categoría de *Continuo Numérico*, identifica y reconoce características esenciales para el estudio del cambio como lo son: analizar la tendencia, el orden, los procesos y operaciones en los conjuntos infinitos, asimismo logra resaltar características esenciales del *estudio de patrones* para el estudio de la variación como lo son: el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones para realizar

una modelación matemática, adicionalmente cabe resaltar que la docente comprende los criterios o condiciones que se deben dar para que una secuencia de números sea una sucesión, puesto que a la hora de modelar el cambio a partir de una expresión matemática menciona el conjunto infinito donde pertenece el dominio de la variable n .

Dentro de la categoría la *variable*, se puede evidenciar que la profesora B tiene conocimientos sobre el uso esencial del álgebra como herramienta de modelación para el estudio de la variación, además conoce conceptos claves relacionados con los números y operaciones dentro de los conjuntos infinitos como lo indica la categoría del *continuo numérico*. Además, comprende el concepto de función como herramienta para establecer enlaces de patrones de variación entre variables para así lograr modelar y predecir el cambio como lo indica la categoría *función como relación de dependencia*.

En concordancia con lo anterior la docente logra evidenciar los cambios y la *proporcionalidad* entre dos magnitudes dentro de los *registros de representación* y reconocer características esenciales para el estudio de una función en los diferentes registros como lo son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, identificar variable independiente y dependiente, completar tablas con las parejas ordenadas, entre otros.

Igualmente se puede inferir que la docente presenta conocimientos en relación al currículo escolar y la enseñanza de la variación, esto debido que, identifica que la noción de variación se presenta desde los primeros grados de escolaridad por medio del estudio de patrones. Además, resalta que las funciones no son el único objeto matemático para enseñar la noción de variación y que reconoce la modelación como un proceso fundamental para la enseñanza de la noción de variación, sugiere que los procesos generales son muy importantes (razonamiento, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos, formulación y resolución de problemas) a la hora de estudiar un objeto matemático y por último comprende

que la noción de variación, se puede enseñar por medio de diferentes registros de representación.

Sobre las concepciones de la profesora B se puede inferir de acuerdo a lo anterior que tiene un alto nivel de formación sobre la noción de variación ya que logró rescatar características esenciales que hacen parte fundamental de su estudio, además de tener claro cómo se debe desarrollar el concepto de variación de acuerdo a lo curricular. También se logra deducir que la docente evidencia mejor los cambios en lo continuo que en lo discreto. Lo que permite suponer que su enseñanza va estar dada más sobre el análisis de los cambios en los registros que sean continuos como lo son los registros gráficos.

3.5.3 Análisis de las respuestas del profesor C

Pregunta 1 (P1).

La primera pregunta consta de 6 ítems; P1a, P1b, P1c, P1d, P1e y P1f, en la cual el profesor C debe marcar como SÍ o NO, lo que permite identificar las primeras concepciones que se tiene sobre ciertas características de la variación, teniendo en cuenta el comportamiento de la sucesión matemática del ejercicio, con el propósito de identificar características y conceptos relacionados de acuerdo con la categoría del *continuo numérico*.

Así, para la pregunta P1a, se tiene como afirmación que “Las cantidades van cambiando de menor a mayor y luego de mayor a menor” en la secuencia de cantidades dada. El profesor eligió la opción “No”, lo que permite inferir que él identifica que el cambio en las cantidades del subconjunto de los reales indicados aumenta o disminuye, pero no presenta dichos comportamientos a la vez.

Para la pregunta P1b, la cual dicta “Los números escritos pertenecen al Conjunto de los números impares”, el profesor C marcó “Sí”, lo que permite inferir que identifica algunas características de las cantidades presentadas, las cuales pertenecen al conjunto de los impares,

de tal forma que se reconoce un criterio de pertenencia donde los números que están en la secuencia hacen parte de ese Conjunto.

Por otro lado, P1c afirma que “Los números están escritos en forma aleatoria y no existe un patrón de cambio entre ellos”. A esto el profesor C marcó “No”, lo que permite dar a conocer que el docente reconoce que la secuencia tiene un patrón de cambio dentro del conjunto de los números reales.

Para la P1d, se tiene que “La cantidad del cambio que se va presentando entre los valores escritos puede ser representado con números pares”. El profesor C marca un “Sí”. Este apartado permite reconocer que el docente identifica la diferencia entre las magnitudes descritas en la secuencia y la cantidad de cambio que se presenta. Esto es debido a que, aunque las cantidades presentadas pertenecen al conjunto de los números impares, la cantidad de cambio, por el contrario, hace parte del conjunto de los números pares, lo que permite inferir que el profesor C identifica y diferencia las cantidades de cambio y su pertenencia al conjunto de los números pares naturales.

En la P1e, está la afirmación “Las anteriores cantidades están relacionadas con una sucesión matemática”. A esto el docente respondió con “Sí”, lo que permite identificar que el profesor C reconoce regularidades y patrones, además de conocer cuando una secuencia de números es una sucesión matemática.

La P1f, siendo la última, afirma que “La expresión matemática que representa el conjunto de las cantidades corresponde a $2n - 1$ ”, a lo que el profesor C responde con un “No”. Esto permite reconocer que el docente afirma que dicha expresión matemática no corresponde con la adecuada para describir el comportamiento de la sucesión, lo cual indica un reconocimiento de la sucesión matemática y un indicador de reconocimiento de una expresión matemática diferente a la expresada, lo que indica que reconoce patrones que no corresponden con dicha expresión de $2n - 1$.

Teniendo en cuenta que la primera pregunta (P1) pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *Continuo numérico*, se puede identificar que el profesor C reconoce los procesos y operaciones con los números infinitos, cuyo comportamiento en esta pregunta describe una sucesión matemática, además de identificar patrones en las transformaciones matemáticas presentadas, lo cual permite reconocer ciertas nociones de patrones pertenecientes a la categoría de *Estudio de patrones*.

Pregunta 2 (P2).

La segunda pregunta consta de tres (3) ítems; P2a, P2b y P2c. Se ha diseñado con el objetivo de indagar sobre el proceso que se hace para escribir la expresión matemática de la sucesión del ejercicio 1, el valor del siguiente número de la sucesión, y la descripción del cambio. Esta pregunta pertenece a la categoría del *estudio de patrones*.

Para P2a se tiene la siguiente pregunta “¿Cómo describirías el cambio que se va presentando en las cantidades?”, a lo que el profesor C responde “sucesión en base par”, lo cual expresa el comportamiento de una sucesión, sin embargo, no se da a entender si pertenece a un comportamiento de una sucesión exponencial, o de otra índole. Sin embargo, al describir el cambio en relación de *par*, hace referencia a un comportamiento en $2n$, lo que no corresponde a lo esperado en la descripción del cambio. Esta confusión por parte de la descripción del docente evidencia ciertos errores en el manejo de la descripción de una sucesión.

En P2b se tiene la pregunta “¿Cuál sería el término a escribir después del 63? A lo que el profesor C responde correctamente: 127. Esta respuesta es correcta considerando la sucesión numérica mostrada en el punto 1, lo que evidencia que el profesor C identifica patrones en la sucesión que le permiten identificar los valores pertenecientes a la sucesión considerando que las magnitudes de la sucesión hacen parte del conjunto de los naturales.

En P2c, se le pide al profesor C que “*Escriba la expresión matemática que represente el cambio entre los términos de la sucesión*”. Para la cual responde: 2^n , siendo correcta esta respuesta. Esto permite evidenciar que el profesor C maneja las diferencias entre las magnitudes que cambian en la sucesión numérica y los cambios presentes en dicha sucesión. Se infiere con la expresión matemática del cambio, que el profesor C presenta mayor facilidad al expresar matemáticamente el cambio.

De manera global, P2, permite evidenciar que el profesor C identifica y reconoce características esenciales de esta categoría para *el estudio de patrones* como lo son el reconocimiento y la descripción de regularidades presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones, de manera que se obtiene una modelación matemática.

Pregunta 3 (P3).

Esta pregunta se halla en la variable de Conocimiento Disciplinar, junto a la categoría de *estudio de patrones*, el cual tiene la intención de analizar el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones, ya sea en registros pictóricos e icónicos, de manera que logren generar una expresión matemática que describa dicho cambio. La pregunta, además, tiene dos (2) ítems; P3a y P3b, teniendo en cuenta la gráfica mostrada anteriormente.

En P3a, se tiene la siguiente actividad: “*Describe el cambio que se va presentando en la cantidad de fósforos de acuerdo con la cantidad de triángulos para cada posición*”, siendo la respuesta del profesor C: “*Doble más uno*”. Esta afirmación, en lenguaje natural, describe el comportamiento de la sucesión, mas no del cambio. De esta manera, el profesor C identifica patrones pero se identifican dificultades cuando debe describir de manera escrita el cambio.

En P3b, se tiene como actividad “Escriba la expresión matemática que determine la cantidad de fósforos para cualquier posición de la siguiente secuencia”, el docente escribe “ $2n + 1$ ”, lo cual es correcto, y esto permite deducir que el profesor C reconoce patrones en una secuencia infinita de números reales de tal forma que logra escribir matemáticamente el comportamiento de dicha sucesión.

Con lo anterior se evidencia que el profesor C maneja el estudio de patrones, reconociendo y describiendo regularidades presentes en diferentes registros de representación, tanto numérico como pictórico, aunque se hace presente cierta dificultad al momento de expresar de manera escrita el cambio entre las magnitudes de la sucesión.

Se identifican comportamientos similares a P2 debido al *estudio de patrones*, aunque también se debe considerar la categoría de los *registros de representación* presente en P3 debido al cambio en este caso en el registro pictórico.

Pregunta 4 (P4).

Esta pregunta está ubicada en la variable de Acciones didáctica, en la categoría de *conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación*. Para esta pregunta el profesor C respondió con Falso o Verdadero seis (6) ítems, siendo; P4a, P4b, P4c, P4d, P4e y P4f. Lo que se busca es conocer conocimientos y concepciones sobre la variación en el currículo.

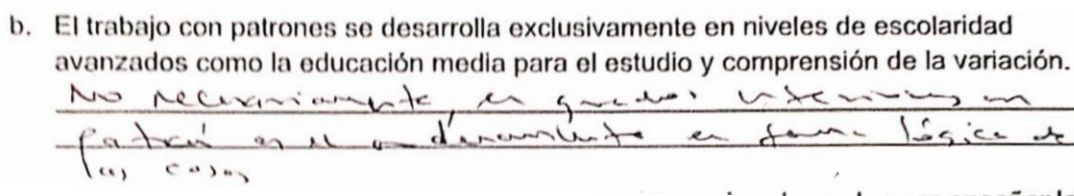
De esta forma, se inicia con P4a, cuya afirmación es “*El estudio de la variación se inicia en los primeros grados de escolaridad*”. A lo que el profesor C respondió: “*Sí, en modelación y representación de registros simbólicos*”. Según los Lineamientos Curriculares, es una afirmación verdadera, debido al estudio de patrones y modelación en primeros grados de escolaridad. Cabe resaltar el uso del término *registro simbólico* como herramienta para enseñar la variación por parte del profesor C en los primeros grados de escolaridad, debido a que un significado de dicho término es: “la Matemática se apoya en un lenguaje simbólico

formal, a veces denominado algebraico, que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos pueden considerarse objetos con valor propio y representan un concepto, una operación, una entidad matemática según ciertas reglas.” (Romiti, et al. p. 1109). Esto permite apreciar el concepto de lenguaje algebraico, tema que no se suele enseñar en los primeros grados de escolaridad.

Siguiendo con las preguntas, el P4b está compuesto por la siguiente afirmación: *“El trabajo con patrones se desarrolla exclusivamente en niveles de escolaridad avanzados como la educación media para el estudio y comprensión de la variación”*. A esto el profesor C respondió: *“No necesariamente, en grados (inentendible)... en forma lógica de las cosas”*. Lo que da a entender que para el profesor C se puede estudiar los patrones en los primeros grados de escolaridad.

Figura 11

Respuesta del profesor C para P4b.



En P4c, se tiene la afirmación de *“Las funciones polinómicas son el objeto matemático más adecuado para enseñar la variación”*. El profesor C responde dice que *“No, la razón de cambio puede funcionar”*. Esto indica que para el docente, las funciones polinómicas no son el objeto más adecuado, y opta por la razón de cambio como el más indicado al momento de enseñar la variación. Este término es un indicador sobre la relevancia de la covariación y las funciones para el profesor C al momento de enseñar la variación.

En P4d se afirma que *“Para estudiar la variación, el proceso de modelación no desempeña un papel relevante”*. El profesor C responde: *“Es relevante, el modelo hace significación en el concepto de variación”*. Esta respuesta permite inferir que para el docente,

la modelación hacer parte significativa del estudio de la variación, acorde a MEN, 1998 y Vasco, 2002.

Para P4e, se tiene que “*El desarrollo del pensamiento geométrico y espacial es apropiado para el estudio de la variación*”. El profesor C responde con “*Las formas geométricas explican el concepto de variación*”. Esto permite evidenciar el papel relevante que cumple la geometría para la comprensión de la variación, sin embargo, no queda de manera explícita la forma en que lo hacen, ni cómo el profesor denota el pensamiento geométrico con el estudio de la variación y su relación con el pensamiento variacional.

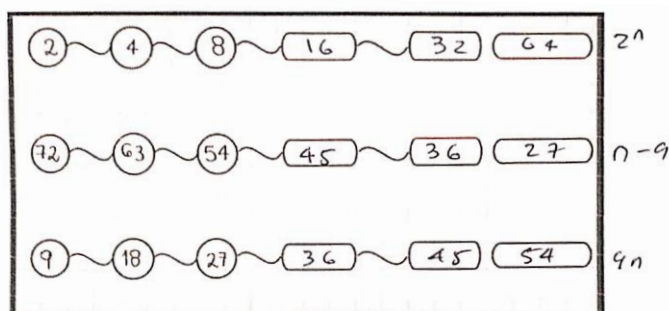
En P4f, se obtiene la última afirmación, la cual es “*Las representaciones gráfica y tabular son las únicas que permiten captar la variación de cantidades de magnitud*”. A esto, el profesor responde “*No son las únicas, pero sí son un instrumento útil para procesar la información*”. Con esto el profesor C indica que considera otras representaciones para captar la variación de cantidades, pero que la gráfica y tabular permiten procesar la información de dicho cambio en las magnitudes.

En P4 se obtienen concepciones relevantes en relación con el conocimiento curricular en torno a la variación. Se evidencia que el profesor C tiene un conocimiento adecuado y acorde a lo esperado sobre la enseñanza de la variación.

Pregunta 5 (P5).

Figura 12

Respuesta del profesor C para P5.



La quinta y sexta pregunta se hace considerando una información en forma de cuadros para completar.

P5 trata sobre la categoría de *la variable*, la cual pretende analizar el uso del álgebra y del significado de la variable, para hacer una modelación de situaciones de cuantificación y fenómenos de variación para el estudio del cambio. Esta pregunta cuenta con dos secciones; P5a y P5b.

El objetivo de la quinta pregunta, sección P5a, es completar los espacios en blanco de la siguiente imagen, mientras que la sección P5b corresponde a la escritura de la expresión matemática de dicha sucesión.

De esta forma, se evidencia que el profesor C logra completar los espacios requeridos, sin embargo, cuando se analizan las expresiones matemáticas al lado derecho de la imagen, se ve que hay un buen manejo en la primera y última expresión, ya que describe correctamente el comportamiento de las sucesiones, considerando a n dentro del conjunto de los números naturales. A pesar de lo anterior, en la segunda expresión se evidencia que al profesor C le cuesta denotar el inicio de la sucesión acorde a los valores dados, es por eso que cuando escribe su expresión, es notorio evidenciar que la secuencia no inicia con el valor resultante al evaluar $n = 1$. Con estos resultados se puede inferir que el docente maneja de manera adecuada el estudio del álgebra en sucesiones que van en aumento, tal como se ve en la primera y última expresión, sin embargo, le cuesta expresar de manera correcta el comportamiento de la segunda línea, esto presuntamente debido a que es una serie decreciente, cuyo inicio determina la expresión matemática a usar. Este ejercicio de modelación de situaciones de cuantificación y fenómenos de cambio evidencia que hay un conflicto al momento de determinar la variable y designar el conjunto al cual pertenece su incógnita (en este caso n). Cabe resaltar que para la designación de la cantidad de magnitud en los espacios en blanco, el profesor C lo hace de manera correcta, lo que indica que

reconoce el patrón de cambio que hay entre las magnitudes. También se evidencia, por otra parte, que el profesor C tiene dificultades para expresar matemáticamente el cambio entre dichas cantidades, considerando el comportamiento de la sucesión de manera decreciente.

Pregunta 6 (P6).

Para la sexta pregunta se debe considerar la variable de investigación de Acciones Didácticas, dentro de la categoría de *conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación*, la cual pretende indagar y dar a conocer los conocimientos que tiene el profesor C frente a la ubicación de los contenidos del concepto de variación en lo curricular. Tiene dos secciones; P6a y P6b.

Para la parte P6a se pregunta: “*¿Qué tipo de aprendizaje asociado al pensamiento variacional se podría promover con los anteriores ejercicios?*”. A lo que el profesor C responde: “*Secuenciación, orden, sucesiones y series*”. Lo cual es correcto. Cabe resaltar el uso de términos sobre temas avanzados, por lo general enseñados en secundaria. Esto indica que el profesor C maneja y relaciona el ejercicio del uso del álgebra y descripción de la variable en secundaria.

Para la sección P6b se preguntó: “*¿Con cuáles grados de la educación básica y media consideras que se puede trabajar este ejercicio? Explica tu respuesta*”. La respuesta del profesor C fue: “*6° - 7°. Ya conceptualizan el concepto (Símbolo del conjunto de los números enteros)*. En estos grados es posible tratar con estos problemas, considerando el trabajo con el álgebra, aunque se tiene muy claro el por qué el profesor C eligió el conjunto Z como conjunto primordial para tratar el álgebra y descripción de la variable.

En conclusión, estas preguntas permitieron indagar sobre el concepto de la variable, su uso y su enseñanza para el profesor C, lo que indicó que el docente reconoce los patrones de cambio, expresa correctamente la expresión matemática para designar el cambio cuando es creciente, y le resulta un poco más complicado describir dicho comportamiento de manera

matemática cuando es decreciente. Sin embargo, indica los grados y la importancia del trabajo del álgebra en estos grados de escolaridad, designando un valor al conjunto de los números enteros.

Pregunta 7 (P7).

P7 pertenece a la categoría de *la proporcionalidad* enfocada en el estudio de las relaciones funcionales, lo que permite analizar el comportamiento de una variable con la otra. De esta forma, usando los datos de la tabla mostrada anteriormente, se pregunta lo siguiente: “Teniendo como referencia el precio de venta del agricultor, ¿de cuánto es el porcentaje de incremento del supermercado a través de los años?”. El profesor C escogió la opción del 25%, lo cual es correcto. Esto indica una adecuada comprensión de la proporcionalidad de datos representados en el registro tabular, cuya variación se encuentra de manera porcentual.

Pregunta 8 (P8).

Esta pregunta está inmersa en la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *registros de representación*, la cual pretende identificar el estudio de los diferentes sistemas de representación relacionados con la variación, y en este contexto particular, la interpretación del registro tabular.

En P8 se pregunta “¿Qué variaciones en los valores se pueden identificar en la tabla?”. El profesor C identifica dos: “*Precio venta agricultor y precio venta supermercado*”. Estas dos variables, en la tabla, se evidencia que tienen un cambio en el valor del precio de cada una, lo que indica que el profesor reconoce el cambio de manera individual. Sin embargo, lo que se busca con esta sección es indagar sobre la noción de *proporcionalidad* del profesor C teniendo en cuenta las dos variables descritas por él. Es correcto afirmar que ellas van cambiando, pero parece ser ignorada la forma en que una variable cambia a la otra esto debido a que existe una relación entre éstas, lo que también debe considerar el comportamiento de la variable dependiente con respecto a la

independiente. Por otra parte, el profesor C no especificó las variaciones en los valores de la tabla, ya que expresó las variables de cada columna, mas no dió a conocer el valor de dichos cambios. De esta manera, se puede deducir que el profesor C no interpretó de manera esperada la pregunta, lo que conllevó a responder de manera inconclusa.

Pregunta 9 (P9).

P9 está dentro de la variable de Conocimiento disciplinar , en la categoría de *la proporcionalidad*, la cual estudia la relación entre dos magnitudes, considerando los modelos de función que involucra la relación de proporción con respecto a los valores dados en el registro tabular.

P9 tiene como ejercicio la lectura de datos en forma tabular. El profesor C seleccionó una de las cuatro (4) afirmaciones sobre unas de las características del comportamiento de los datos. En esta pregunta se evalúa en parte la comprensión lectora de la escritura de un comportamiento variacional sobre el problema, junto con el manejo de la proporcionalidad, debido a que para encontrar la afirmación verdadera se debe haber notado y asimilado el cambio en los valores, para después encontrar la respuesta que describe dicho cambio. El profesor elige la opción c, la cual expresa que “Los incrementos en los valores de precio de venta tanto en la columna del agricultor como del supermercado son constantes año tras año”, siendo la respuesta esperada, debido a que el incremento es constante, tanto en la columna del agricultor como en la del mercado. Esto evidencia que el profesor C maneja correctamente la proporcionalidad del cambio en los valores mostrados de manera tabular, encontrando el valor del cambio y describiendo su comportamiento indicado en la tabla. Además, identifica que la variación de cada una de las variables tiene un incremento diferente (de \$200 y \$250 respectivamente), pero constantes.

Con lo anterior se deduce que el profesor C maneja correctamente la noción de proporcionalidad con dos variables en representación tabular, y maneja una comprensión lectora sobre el comportamiento y cambio de las variables existentes en el problema.

Pregunta 10 (P10).

La décima pregunta se halla en la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *función como relación de dependencia*, la cual permite realizar un análisis sobre los conocimientos que tiene el profesor C sobre el comportamiento de una función teniendo en cuenta las variables de posición, velocidad y tiempo. Para esto se manejan dos secciones, P10a y P10b. Debido a lo anterior, se maneja una representación gráfica de una situación de movimiento, descrito de la siguiente manera.

Para P10a, se tiene como actividad: “*Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explica tu respuesta*”. A lo que el profesor C responde: “ii, pendiente constante, $v = \frac{e}{t}$ ”. Esta argumentación por parte del docente permite conocer el término de pendiente para determinar la constancia de la velocidad, sin embargo, dicha descripción no concuerda con el comportamiento de la función, debido a que, teniendo en cuenta que $y = mx + b$, siendo m la pendiente, toda pendiente hace referencia a un valor numérico. Por otro lado, cuando se dice que una pendiente es constante, se obtiene una representación gráfica de una línea horizontal paralela al eje x, esto permite inferir que el docente presenta dificultades al momento de describir la relación funcional analizando la pendiente. Sin embargo, al analizar lo que complementa en la respuesta, se evidenció un manejo de la descripción usando la ecuación matemática de ese movimiento. Esto indica que el profesor C maneja concepciones de la representación de la velocidad y el comportamiento de la función al relacionar las variables con un acercamiento desde la disciplina de la física.

Para P10b, se tiene que “*Describe cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada*”. A lo que el profesor responde: “*Aumentan proporcionalmente. Aumenta el tiempo a la vez aumenta la distancia recorrida en igual proporción*”. Esto permite inferir la relación que el profesor describe entre tiempo y distancia, considerando al tiempo como variable independiente, el cual influye de manera proporcional a la distancia. Es una respuesta esperada por el docente que describe correctamente el comportamiento de la posición de un auto en función del tiempo, considerando a la velocidad como una magnitud constante. Además, el profesor C, al escoger la ii gráfica, permite inferir que la razón de cambio entre estas dos variables es constante, por lo cual el registro gráfico muestra un comportamiento lineal, lo que es correcto percibir al analizar dicha gráfica.

En P10 se pudieron analizar las definiciones y comportamientos que tiene una variable como función, y en relación con otras variables, de manera gráfica y como expresión matemática (el profesor describe el comportamiento a través de la ecuación de la velocidad), lo que representan concepciones del docente sobre ese comportamiento de la variación, evidenciando un mayor dominio expresando la relación desde la disciplina de la física.

Pregunta 11 (P11).

Esta pregunta pertenece a la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *la función como relación de dependencia*. Esta pregunta está constituida por un registro gráfico, tal como en la P10, y también tiene dos ítem: P11a y P11b. De esta manera, se pretende analizar la noción de función y su comportamiento en el registro gráfico, a partir de una situación determinada, lo que permite estudiar el cambio entre dos magnitudes e identificar la variable independiente y dependiente. A continuación se muestra P11.

En P11a se tiene que: “*Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique su respuesta*”. A lo que el profesor C responde: “*i, la*

gráfica representa la aceleración, en esa gráfica la velocidad no varía". Esto permite inferir que el profesor interpreta el registro gráfico de manera esperada, ya que identifica las variables en la gráfica, y describe correctamente la que describe la situación cuando se tiene a la variable tiempo y variable velocidad, considerando a la velocidad como constante. Cabe resaltar que la respuesta del docente también permite identificar cómo relaciona estas variables de manera funcional, cuando argumenta con la aceleración, entendiéndose como *"magnitud derivada vectorial que nos indica la variación de velocidad por unidad de tiempo"* (Lehrman, 1998), lo cual permite inferir que el docente maneja esta relación de velocidad con tiempo considerando a la aceleración como vector indicativo de dicha variación entre estas dos variables.

Para P11b, se tiene que: *"Explique cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada"*. A lo que el docente responde: *"Velocidad, tiempo, $a = \frac{v}{t}$ "*. En esta descripción que hace el profesor se puede evidenciar el manejo de las ecuaciones matemáticas correspondientes a esta situación problema. El profesor describe matemáticamente la relación entre velocidad y tiempo, y añadiendo la correcta escogencia de la imagen que describe el comportamiento de la velocidad constante según las variables usadas en la representación gráfica, se infiere que el profesor C tiene un correcto manejo de la función como relación entre dos variables, analizándolas de manera gráfica y también en descripción de una expresión matemática sobre dicha relación.

Se puede apreciar que en las preguntas P10 y P11 estudian la categoría de *la función como relación de dependencia*, las cuales permiten dar a conocer que el docente maneja el concepto de función como herramienta para establecer enlaces de patrones de variación entre variables, usando ecuaciones matemáticas que evidencian la relación directa entre las variables analizadas, además de lograr interpretar correctamente las variaciones en los

registros gráficos, considerando que en ambas gráficas se obtiene una covariación, concepto fundamental al momento de analizar la variación.

Pregunta 12 (P12).

Esta pregunta está inmersa en la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *registros de representación*, la cual pretende evidenciar el conocimiento que se tiene sobre el tratamiento y la conversión en los diferentes registros de representación. Esta pregunta tiene dos secciones: 12Pa y 12Pb, aparte del requerimiento de completar la tabla de valores usando la gráfica que se muestra a continuación.

En P12a se tiene como actividad que: “Describa el comportamiento de esta función en los intervalos $(-\infty, 0)$. El profesor C responde: “Parábola con concavidad negativa”. Esta respuesta no describe de manera adecuada el comportamiento de la función en dicho intervalo, debido a que, aunque la función presenta un comportamiento decreciente de la parábola, la concavidad de dicha función parabólica es positiva. De esta manera, se logra concluir que el profesor C presenta dificultades para describir la gráfica de la función en un intervalo dado.

En P12b se pregunta por: “Para el análisis del comportamiento de la respectiva función, ¿Cuál de las dos representaciones brinda mayor información? Explique su respuesta”, a lo que el profesor responde: “se deben tener los dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ ”, lo que corresponde a lo preguntado, lo que da a entender una interpretación errada de la pregunta.

A continuación se muestra la tabla completada por el profesor C. Los valores corresponden a los esperados, considerando la función presentada.

Análisis de las concepciones de variación del profesor C.

De acuerdo a este análisis sobre la variación del profesor C se puede inferir que el profesor identifica y reconoce características esenciales del cambio que corresponden a la

categoría de *Continuo Numérico*, tales como: analizar la tendencia, el orden, los procesos y operaciones en los conjuntos infinitos. También se evidencia una comprensión del *estudio de patrones* de la variación tales como: el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones para realizar una modelación matemática. Por otra parte, se evidencia que el profesor C posee conocimientos sobre el álgebra para realizar la modelación, lo cual evidencia el conocimiento de conceptos claves relacionados con los números y operaciones dentro de los conjuntos infinitos como lo indica la categoría del *continuo numérico*. También se afirma que el docente comprende el concepto de función, logrando establecer enlaces de patrones de variación entre variables, y así modelar y predecir el cambio como lo indica la categoría *función como relación de dependencia*. Esto se evidenció en las respuestas de expresiones matemáticas que modelan el comportamiento, siendo una práctica común en el transcurso de la encuesta.

Por otro lado, el profesor muestra un manejo adecuado de las relaciones entre magnitudes como función, expresando ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento de las magnitudes del contexto. También se evidencia un manejo de las diferentes representaciones de las cuales logra describir el comportamiento. En cuanto a la comprensión de la enseñanza de la variación en el currículum, se evidencia un manejo adecuado de los momentos que tienen los diferentes procesos y aprendizajes al momento de enseñar el pensamiento variacional, lo que permite inferir que toma en consideración los documentos oficiales emitidos por el MEN para el desarrollo de estrategias al momento de enseñar la variación.

También se logró identificar que el profesor C logra resolver varios de los problemas propuestos que tengan un contexto cotidiano o que representen algún fenómeno de la vida real.

3.5.4 Análisis de las respuestas profesora D

Pregunta 1 (P1).

P1 consta de 6 ítems; P1a, P1b, P1c, P1d, P1e y P1f, donde se debe marcar una afirmación como Sí o No, teniendo en cuenta el comportamiento de la sucesión matemática, con el propósito de identificar características y conceptos relacionados con la variación de acuerdo a la categoría del *continuo numérico*. A continuación se muestran las respuestas de la profesora D.

Así, para la pregunta P1a, se tiene como afirmación que “Las cantidades van cambiando de menor a mayor y luego de mayor a menor” en una secuencia de cantidades dada. La profesora D marca la opción “No”, lo que indica que reconoce el orden y la tendencia de un conjunto infinito en este caso el subconjunto de los reales el conjunto de los números impares, lo que la lleva a identificar que la sucesión está cambiando en un solo sentido y no presenta ambos comportamientos a la vez (aumenta o disminuye).

Para la pregunta P1b, la cual dicta “Los números escritos pertenecen al Conjunto de los números impares”, la profesora D marca el “Sí”, lo que permite inferir que la docente reconoce que la sucesión está formada por algunos términos del conjunto de los números impares por lo cual se evidencia que la docente identifica números y operaciones dentro de los conjuntos infinitos en diferentes contextos. De tal forma que se reconoce un criterio de pertenencia donde los números que están en la secuencia hacen parte del conjunto descrito.

Para la pregunta P1c afirma que “Los números están escritos en forma aleatoria y no existe un patrón de cambio entre ellos”. A lo que la profesora D marca un “No”, lo que permite inferir que la docente reconoce que esa secuencia de números hay una regla de formación el cual se considera un patrón de cambio, lo que indica que la docente reconoce y describe regularidades en las transformaciones matemáticas.

Para la pregunta P1d se indica que “La cantidad del cambio que se va presentando entre los valores escritos puede ser representado con números pares”. A lo que la profesora D marca un “Sí”. Lo que permite identificar que la docente realiza operaciones relacionadas con regularidades y reconocimiento de patrones ya que logró distinguir entre las cantidades que representan el cambio y los términos que cambian en la secuencia. Además en la entrevista afirmó saber diferenciar conjuntos infinitos dentro de los reales ya que logró encontrar que las cantidades que representa el cambio pertenecen al conjunto de los números pares con la expresión 2^n , mientras que los términos que hacen parte de la secuencia pertenecen al conjunto de los números impares con la expresión $2^n - 1$.

Para la pregunta P1e dicta que “Las anteriores cantidades están relacionadas con una sucesión matemática”. A lo que la profesora D responde “Sí”. Esto permite inferir que la docente reconoce regularidades y patrones dentro de un contexto numérico, además de determinar criterios para identificar cuándo una secuencia de números es una sucesión matemática, ya que existe una regla de formación para los términos dados. A través de una entrevista afirmó que encontró el término enésimo “ a_n ” de la secuencia matemática por lo cual establece que era una sucesión matemática.

Para la pregunta P1f afirma que “La expresión matemática que representa el conjunto de las cantidades corresponde a $2n - 1$ ”. A lo que la profesora D responde con un “No” lo que permite inferir que la docente no identifica que la expresión matemática $2n - 1$ de surgimiento a los términos de la sucesión estudiada. A través de la entrevista dio claridad que reemplazó las posiciones de los términos y encontró otros términos que hacen parte del conjunto de los números impares mas no están en la sucesión inicial, La expresión matemática $2n - 1$, da surgimiento a todos los términos del conjunto infinito de los números impares.

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *Continuo numérico*, se puede evidenciar que la profesora D identifica

y reconoce características esenciales para el estudio del cambio dentro del continuo numérico como lo son: analizar la tendencia, el orden, los procesos y operaciones en los conjuntos infinitos, además esta pregunta también está relacionada con la categoría de *estudio de patrones* debido a que la docente logra reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas en los diferentes escenarios.

Pregunta 2 (P2).

P2 consta de tres ítems los cuales están distribuidos de la siguiente forma P2a,P2b y P2c, la cual la profesora D debe responder teniendo en cuenta el comportamiento de la sucesión matemática dada con el propósito de identificar características y conceptos relacionados con la variación de acuerdo a la categoría del *estudio de patrones*.

Para la pregunta P2a afirma que “¿Cómo describirías el cambio que se va presentando en las cantidades?”. A lo que la profesora D contesta “ *El cambio aumenta exponencialmente* ” Lo que indica que la docente reconoce y describe el comportamiento del cambio como un crecimiento exponencial, además de afirmar que “ Aumenta”, lo que quiere decir que la docente logra evidenciar que es una sucesión que está creciendo muy rápidamente hacia el infinito.

Para la pregunta P2b dicta que “¿Cuál sería el término a escribir después del 63?”. A lo que la profesora D contesta “127” lo que permite inferir que la docente logró observar regularidades la secuencia de números (1,3,7,15,31,63...) y reconoce que hay una regla de formación de los términos como un patrón de cambio lo que la llevó a encontrar el término siguiente en la sucesión.

La Pregunta P2c afirma que “Escriba la expresión matemática que represente el cambio entre los términos de la sucesión”. A lo que la profesora D contesta “ 2^n ” lo que muestra que la docente identifica la regla de formación de los términos y describe el cambio a través del reconocimiento de regularidades o patrones presentes en esta secuencia de

números para así lograr modelar dicho cambio y encontrar una expresión matemática que la represente.

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *estudio de patrones*, se puede evidenciar que la profesora D identifica y reconoce características esenciales de esta categoría para el estudio de la variación como lo son : el reconocimiento y la descripción de regularidades, reglas de formación y patrones presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones y lograr una modelación matemática.

Pregunta 3 (P3).

Figura 13

Respuesta de la profesora D para P3.

3. Analiza la información en el siguiente arreglo:

Cantidad de triángulos	1	2	3	4	...
					
Cantidad de fósforos	3	5	7	9	

- Describe el cambio que se va presentando en la cantidad de fósforos de acuerdo con la cantidad de triángulos para cada posición.
El cambio va aumentando de 2 en 2.
- Escribe la expresión matemática que determine la cantidad de fósforos para cualquier posición de la siguiente secuencia.
 $2n + 1$

La tercera pregunta consta de dos ítems P3a y P3b. En esta pregunta se tiene una representación pictórica, como se muestra en la anterior figura en la que se pretende estudiar el cambio y estudio de patrones a partir de los diferentes registros de representación.

La pregunta P3a dicta que “Describe el cambio que se va presentando en la cantidad de fósforos de acuerdo con la cantidad de triángulos para cada posición”. A lo que la profesora D responde “*El cambio va aumentando de 2 en 2*”, lo que permite inferir que la docente describe el cambio como un “aumento” donde cada término se encuentra sumándole

dos al término anterior, en este registro se evidencia que efectivamente el cambio está dado por el aumento de 2 fósforos por cada triángulo que aparece en la sucesión.

La pregunta P3b afirma que “Escribe la expresión matemática que determine la cantidad de fósforos para cualquier posición de la siguiente secuencia”. A lo que la profesora D contesta “ $2n + 1$ ” lo que demuestra que la docente reconoce regularidades y patrones, puesto que a través de la entrevista la docente afirma que existe un patrón de cambio en relación con la cantidad de triángulos y la cantidad de fósforos lo que la lleva a lograr modelar el comportamiento de la sucesión presente en este registro de representación a través de una expresión matemática

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *estudio de patrones*, se puede evidenciar que la profesora D identifica y reconoce características esenciales de esta categoría para el estudio de la variación como lo son : el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones y lograr una modelación matemática. Además esta pregunta hace referencia también a la categoría de los *registros de representación* cuando se logra estudiar y evidenciar el cambio en este caso en el registro pictórico.

Pregunta 4 (P4).

La pregunta 4 consta de 6 ítems; P4a, P4b, P4c, P4d, P4e, P4f la cual tiene como objetivo analizar las acciones didácticas de la profesora B con base en el currículo y la enseñanza de la noción de variación.

La P4a afirma que “El estudio de la variación se inicia en los primeros grados de escolaridad” La profesora D responde: “*verdadero, por medio de representaciones pictóricas y secuencias sencillas*”.

Con base en lo contestado, se analiza que la profesora D, comprende los procesos y conceptos que se emplean en los primeros grados de escolaridad relacionado al estudio de la noción de variación, debido que, expone como ejemplo las secuencias y las representaciones pictóricas.

La P4b afirma que “El trabajo con patrones se desarrolla exclusivamente en niveles de escolaridad avanzados como la educación media para el estudio y comprensión de la variación”. La profesora D responde: *“falso, desde la primera infancia se puede trabajar por medio de imágenes sencillas y patrones”*.

Con base en lo contestado, se puede observar que su respuesta corrobora lo manifestado en la P4a, debido que, es claro para ella que la noción de variación se puede enseñar desde los primeros grados de escolaridad.

La P4c indica que “Las funciones polinómicas son el objeto matemático más adecuado para enseñar la variación”. La profesora D responde: *“falso, hay más objetos matemáticos que brindan mayor información”*

Con base en lo contestado, se puede observar que la profesora D contempla que, la enseñanza de la variación se puede representar por medio de diferentes conceptos. Sin embargo, no especifica qué tipo de objetos matemáticos o elementos se deben tener en cuenta en la enseñanza de la variación.

La P4d determina que “Para estudiar la variación, el proceso de modelación no desempeña un papel relevante”. La profesora D responde: *“falso, si es importante por las formas de representación y relación con el p. variacional”*.

Con base en lo contestado, se puede observar que la profesora D comprende que el proceso de modelación es esencial para la enseñanza de la noción de variación, debido que, tiene en cuenta sus diferentes tipos de representación.

La P4e afirma “El desarrollo del pensamiento geométrico y espacial es apropiado para el estudio de la variación”. La profesora D responde: *“Sí, debido a sus diferentes representaciones y la malla curricular”*.

Con base en la respuesta de la profesora D, se puede observar que reconoce que el pensamiento geométrico y espacial es pertinente debido que, se puede representar de diferentes formas para la enseñanza de la variación, teniendo en cuenta que todos los pensamientos se pueden relacionar con base en la perspectiva curricular.

La P4f indica que “Las representaciones gráfica y tabular son las únicas que permiten captar la variación de cantidades de magnitud”. La profesora D responde: *“falso, existen muchas más representaciones”*.

Con base en la respuesta anterior, se puede observar que la profesora D reconoce que un objeto matemático se puede enseñar por medio de diferentes tipos de registros de representación.

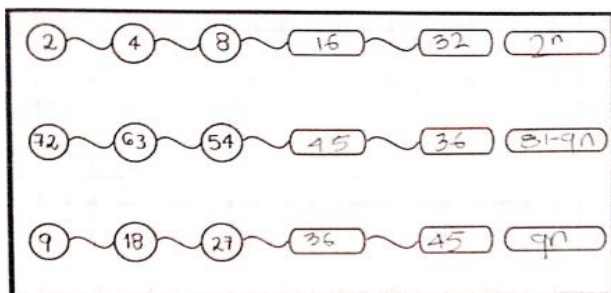
Conforme a lo anterior, la profesora D exhibe conocimientos en relación con la noción de variación y el currículo escolar, debido que, comprende que la variación se puede representar por diferentes objetos matemáticos y registros de representación desde los primeros años de escolaridad, identifica que todos los pensamientos y procesos (razonamiento, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos, formulación y resolución de problemas) se pueden conectar y son fundamentales para la enseñanza de la variación. Además, conoce lo proporcionado por la malla curricular, debido a que, manifiesta que las funciones no son el único objeto matemático para enseñar la noción de variación y que la modelación es uno de los procesos fundamentales para la enseñanza de la noción de variación. En consecuencia, la profesora D relaciona los procesos generales y pensamientos en su acción como docente.

Pregunta 5 (P5).

De acuerdo con la siguiente gráfica, responde las preguntas 5 y 6:

Figura 14

Respuesta de la profesora D para P5.



P5 consta de dos ítem P5a y P5b. En esta pregunta se pretende estudiar el cambio y el estudio de regularidades por medio del uso del álgebra y del significado de la variable, para hacer una modelación de situaciones de cuantificación y fenómenos de variación.

La pregunta P5a afirma que “Completa los espacios en blanco de acuerdo con las cantidades para cada caso”. A lo que la profesora D responde completando con los términos (16 - 32) respectivamente en cada casilla de la fila 1, con los términos (45 - 36) en las casillas de la fila 2 y por último completa con los términos (36 - 45) en las casillas de la fila 3. Lo que permite inferir que la docente consiguió encontrar una regla de formación que da origen a cada término de la sucesión, por medio del uso del álgebra logró encontrar el término siguiente.

La pregunta P5b dicta que “Escribe la expresión matemática que representa cada sucesión en la columna de la derecha”. A lo que la profesora D responde para el caso 1 con la expresión 2^n , para el caso 2 con la expresión $81 - 9n$, y para el caso 3 con la expresión $9n$. Lo que permite deducir que la docente hace uso del álgebra como una herramienta esencial de modelación del cambio. Además tiene en cuenta el significado de la variable que representa el cambio para encontrar las expresiones matemáticas solicitadas.

Esta pregunta pertenece a la variable de investigación del Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *la variable*, se puede evidenciar que la profesora D tiene

conocimientos sobre el uso esencial del álgebra como herramienta de modelación para el estudio de la variación y su relación con el significado de la variable. Además reconoce características relacionadas con los números y operaciones dentro de los conjuntos infinitos como lo indica la categoría del *continuo numérico*.

Pregunta 6 (P6).

P6 consta de dos ítem; P6a, P6b. En esta pregunta se pretende estudiar las acciones didácticas de la profesora D, es decir, los conocimientos en relación con los contenidos y el currículo escolar.

La pregunta P6a pregunta “¿Qué tipo de aprendizaje asociado al pensamiento variacional se podría promover con los anteriores ejercicios?” La profesora D responde: “*patrones y secuencias*”

Teniendo en cuenta su respuesta anterior, se puede inferir que, la profesora D identifica que en la quinta pregunta, se observa un cambio en el comportamiento de los números, por lo cual, se puede establecer una relación entre las cantidades.

La P6b pregunta “¿Con cuáles grados de la educación básica y media consideras que se puede trabajar este ejercicio? Explica tu respuesta”. La profesora D responde: “*octavo y noveno, de acuerdo a lo propuesto por el MEN*”.

Con base en su respuesta anterior y en lo argumentado en la entrevista, se puede observar que, la profesora D establece que a pesar de que grado sexto y séptimo reconoce expresiones algebraicas y resuelve ecuaciones, determina que los grados apropiados son octavo y noveno debido a que, en ese grado los estudiantes presentan una mayor abstracción en relación con las secuencias numéricas y expresiones algebraicas.

En consecuencia, en la sexta pregunta se puede evidenciar que la profesora D comprende la relación entre lo propuesto por el currículo y la enseñanza de la noción de variación.

Pregunta 7 (P7).

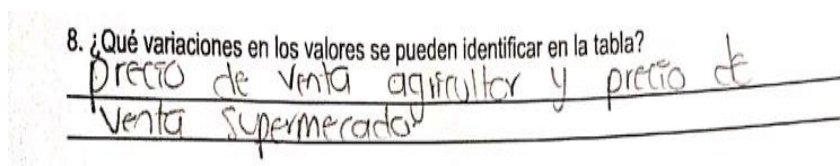
P7 está constituida por 4 ítems (a,b,c,d) donde solo uno de ellos describe el incremento porcentual adecuado en esta situación problema con respecto a las variables (precio de venta del agricultor (PVA) y precio de venta del supermercado(PVS)). La P7 está dentro de la variable de investigación conocimiento disciplinar en categoría de *la proporcionalidad*, en la que se pretende encontrar modelos de función de una situación problema que permita el estudio del comportamiento de una variable con respecto a otra.

En esta pregunta se busca que la docente identifique ¿de cuánto es el porcentaje de incremento del supermercado a través de los años? teniendo en cuenta el precio de venta del agricultor. A lo que la profesora D selecciona el ítem (b) 25% lo que es correcto y permite deducir la docente identifica la relación de proporcionalidad que existe entre estas dos variables (PVA y PVS).Que le permite reconocer los modelos más simples de función, además de describir características que hacen parte del estudio de la noción variación como es la proporcionalidad directa.

Pregunta 8 (P8).

Figura 15

Respuesta de la profesora D para P8.



8. ¿Qué variaciones en los valores se pueden identificar en la tabla?
precio de venta agricultor y precio de
venta supermercado

La octava pregunta está dentro de la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *registros de representación*, la cual pretende identificar el estudio de la variación en los diferentes sistemas de representación, específicamente la interpretación del registro tabular.

En esta pregunta P8 se le pide a la profesora D que indique “¿Qué variaciones en los valores se pueden identificar en la tabla?”. A lo que la docente contesta “*Precio de venta*

agricultor y precio de venta supermercado ". Lo que permite deducir que la docente no logro interpretar la pregunta y confundió las variaciones en los valores con las magnitudes que varían en esta situación problema, pero hace referencia implícitamente al concepto de la covariación al comparar dos variables que cambia una con respecto a otra, lo que conlleva que esta pregunta además de pertenecer a la categoría de los registros de representación también indaga qué tanto conoce la docente sobre la categoría de la proporcionalidad entre dos variables que se relacionan.

Pregunta 9 (P9).

La novena pregunta P9 está constituida por 4 ítems (a,b,c,d) donde solo uno de ellos describe el comportamiento entre estas dos variables (precio de venta del agricultor (PVA) y precio de venta del supermercado(PVS).) La P9 está dentro la variable de Conocimiento disciplinar , en la categoría de *la proporcionalidad*, la cual se encarga de estudiar la relación entre dos magnitudes, teniendo en cuenta los modelos de función que involucra la relación de proporción con respecto a los valores dados en el registro tabular.

En esta pregunta P9 afirma que “Seleccione la afirmación que considera verdadera y justifique la selección”. A lo que la Profesora D marco “ *la opción ©, porque el precio de venta del agricultor aumento siempre \$200 y el del supermercado el aumento fue siempre de \$250*” lo que es correcto, además permite inferir que la docente reconoce la relación de proporcionalidad de estas dos variables en el registro tabular y resalta características del estudio del cambio como lo es el “ siempre aumento” lo que quiere decir es que identifica que los precios en cada una de las columnas de la tabla tuvieron un aumento constante a través del tiempo.

Pregunta 10 (P10).

La décima pregunta P10 se encuentra en la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *función como relación de dependencia*, la cual consta de

dos ítem P10a y P10b los cuales pretende analizar el conocimiento que se tiene sobre la interpretación del comportamiento de una función en un registro gráfico, con respecto a las variables de posición, velocidad y tiempo.

La P10a afirma que “Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explica tu respuesta”. A lo que la profesora D responde “ *la gráfica (ii) porque el tiempo y la posición aumentan proporcionalmente*”. lo que quiere decir que la docente resalta características del estudio del cambio a través de la función como lo es la frase “ *aumentan proporcionalmente*”, lo que demuestra que reconoce y entiende el comportamiento de las variables en este registro gráfico, además identifica la relación que existe entre la posición y el tiempo cuando la velocidad es constante.

La pregunta P10b dicta que “Describa cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada”. A lo que la profesora D responde “ *La razón de cambio es constante*”. Lo que permite deducir que la docente identifica una relación entre las dos variables las cuales cambian de manera constante y ambas magnitudes tienen un comportamiento proporcional, lo que causa que el registro gráfico muestre un comportamiento lineal, lo que es correcto percibir al analizar dicho registro.

Pregunta 11 (P11).

Esta pregunta P11 pertenece a la variable de Conocimiento disciplinar, en la categoría de *la función como relación de dependencia*. Esta pregunta está constituida por un registro gráfico y dos ítems; P11a y P11b, con la cual se pretende analizar la noción de función y su comportamiento en el registro gráfico, estudiando el cambio entre dos magnitudes, de manera que se identifique la variable dependiente e independiente.

La pregunta P11a afirma que “Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique su respuesta”. A lo que la profesora D responde “ *la i) por que la velocidad es constante en relación con el tiempo*”. Lo que quiere decir que

la velocidad tiene el mismo valor a para cualquier instante de tiempo, lo que demuestra que la docente interpreta el registro gráfico de manera adecuada puesto que identifica y reconoce las variables que cambian con respecto a otra que se mantiene constante, además de analizar la relación que existe entre estas dos variables que se pueden modelar a partir de una importante herramienta para describir y predecir el cambio como es la noción de función.

La pregunta P11b dicta que “Explique cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada”. A lo que la profesora D contesta “*El tiempo si cambia y la velocidad es constante*”. Esto indica que la docente reconoce en el registro gráfico a pesar de que una magnitud no cambie (este constante) logra evidenciar que la otra si cambia, además identifica la variable independiente de la dependiente al analizar el gráfico (velocidad vs tiempo). Rectifico lo anterior en la entrevista al afirmar que identifica dos magnitudes que son velocidad y tiempo y que a pesar que la velocidad es constante el tiempo si cambia en esta situación.

Las preguntas P10 y P11 pertenecen a la categoría de *la función como relación de dependencia* donde se evidencia que la docente maneja el concepto de función como herramienta para establecer enlaces de patrones de variación entre variables para así lograr modelar y predecir el cambio, además de lograr interpretar correctamente las variaciones en los registros gráficos teniendo en cuenta que ambas variables cambian simultáneamente una con respecto a la otra, lo que conlleva al concepto de covariación el cual es uno de los conceptos más importantes para el estudio la noción de variación.

Pregunta 12 (P12).

Esta pregunta P12 está constituida por dos ítems P12a y P12b, hace parte de la variable de investigación de Conocimiento disciplinar, dentro de la categoría de *registros de representación*, la cual pretende evidenciar el conocimiento que se tiene sobre el tratamiento y la conversión en los diferentes registros de representación.

La pregunta P12a afirma que “Describa el comportamiento de esta función en los intervalos $(-\infty, 0)$ ”. A lo que la profesora D responde “*La función es decreciente*”. Lo que permite deducir que la docente interpreta los registros de representación para una función puesto que logró reconocer el comportamiento de $f(x)$ en este intervalo que se le pregunta ya que identificó que cada vez que x aumenta los valores de la función van disminuyendo.

La pregunta P12b dicta que “Para el análisis del comportamiento de la respectiva función, ¿Cuál de las dos representaciones brinda mayor información? Explique su respuesta”. A lo que la profesora D contesta: “*La gráfica ,pues en la tabla solo hay datos representados en parejas ordenadas.* ”. Lo que demuestra que evidentemente la docente logró identificar más información en este registro que en registro tabular, lo que indica que a la docente se le facilita analizar más los datos en lo continuo que en lo discreto. A Través de la entrevista rectifica lo anterior al expresar que hay dos tipos de representación una gráfica y la otra tabular, la tabular representa parejas ordenadas y la cual conlleva a realizar la representación gráfica. Ahora bien, lo que pasa con la representación gráfica es que permite tener una mejor visualización del comportamiento de la función, por lo cual para ella es más enriquecedor estudiar la representación gráfica porque muestra más elementos para estudiar el cambio.

Sin embargo es notorio que la docente identifica características esenciales para el estudio de una función en ambos registros (tabular y gráfico) como lo son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, identificar variable independiente y dependiente, completar tablas con las parejas ordenadas, entre otros.

En concordancia con lo anterior los lineamientos curriculares plantean que Las tablas se pueden usar para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante.

Por su parte, las gráficas cartesianas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados. (MEN,1998, p.50)

Análisis general de las concepciones de variación de la profesora D.

Con base en el análisis sobre la variación de la profesora D, se puede inferir que la docente en la categoría de *Continuo numérico*, identifica y reconoce características básicas para el estudio del cambio, las cuales son: analizar la tendencia, el concepto de orden, los procesos y operaciones en los conjuntos infinitos, de igual forma, logra destacar características esenciales del *estudio de patrones* para el estudio de la variación como lo son: el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas por medio de las diferentes situaciones contextualizadas para realizar una modelación matemática.

Dentro de la categoría la *variable*, se puede evidenciar que la profesora D tiene conocimientos sobre el uso primario del álgebra como herramienta de modelación para el estudio de la variación, asimismo, interpreta conceptos relacionados con los números y operaciones dentro de los conjuntos infinitos como lo indica la categoría del *continuo numérico*. Adicionalmente, comprende el concepto de función como herramienta para establecer enlaces de patrones de variación entre variables para así lograr modelar y predecir el cambio como lo indica la categoría *función como relación de dependencia*.

En concordancia con lo anterior la docente D logra observar los cambios y la *proporcionalidad* entre dos magnitudes dentro de los *registros de representación* y reconocer particularidades esenciales para el estudio de una función en los diferentes registros como lo son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, identificar variable independiente y dependiente, completar tablas con las parejas ordenadas, entre otros.

Igualmente, se puede deducir que la docente presenta conocimientos en relación al currículo escolar y la enseñanza de la variación.

Con base en lo anterior, la profesora D presenta conocimientos en relación con la noción de variación y el currículo escolar, por lo que, interpreta que el concepto de variación se puede representar por medio de diferentes objetos matemáticos y registros de representación, iniciando desde los primeros grados de escolaridad, identifica que los procesos y pensamientos propuestos por el MEN se pueden relacionar, por la importancia de cada uno en el desarrollo y enseñanza de la noción de variación. Del mismo modo, comprende que las funciones no son el único objeto matemático para enseñar la noción de variación y que la modelación es uno de los procesos fundamentales para su enseñanza. Por lo cual, interpreta lo proporcionado por la malla curricular. En consecuencia, la profesora D relaciona los procesos generales y pensamientos en su acción como docente.

En relación con las concepciones de la profesora D se puede concluir que de acuerdo a lo anterior, tiene un alto nivel de formación sobre la noción de variación, puesto que, logró resaltar características fundamentales en el desarrollo del concepto de variación de acuerdo a la perspectiva curricular. De igual forma, se puede observar que la profesora D centra su enseñanza en el desarrollo de patrones y secuencias debido a los grados de escolaridad en los que labora. Adicionalmente, se puede contemplar que presenta una mayor formación desde la práctica pedagógica y didáctica debido a la relación que establece entre lo propuesto por el MEN y su labor docente.

Análisis transversal

A continuación, se hará un análisis el cual comprende las variables y categorías consideradas como parte de la matriz de análisis, enfocándose en los aspectos esenciales que

permiten identificar algunas concepciones registradas en las respuestas de los docentes objeto de estudio, en las cuales se definían aspectos clave sobre la noción de variación.

Variable de investigación del Conocimiento Disciplinar.

Categoría 1. Continúo Numérico (P1).

El estudio del Continúo Numérico permitió inferir que los cuatro docentes identifican y reconocen características esenciales para el estudio del cambio dentro, como el análisis de la tendencia, el concepto de orden, y procesos en los conjuntos infinitos. En este sentido, es posible afirmar que la concepción que tienen la mayoría de los docentes sobre el Continuo Numérico está relacionada con la de un aspecto relevante mientras se enseñan – estudian algunos componentes temáticos de las matemáticas en la educación secundaria, lo que ayuda a evidenciar que los profesores emplean el continuo numérico para el estudio de la noción de variación, sea de forma directa o indirecta.

Categoría 2. Estudio de patrones (P2 y P3).

En esta categoría se encontró que las profesoras A, B y D comprenden de manera clara las características esenciales de esta categoría para el estudio de la variación como lo son: el reconocimiento y la descripción de regularidades o patrones presentes en las transformaciones matemáticas a través de los diferentes contextos o situaciones, y lograr una modelación matemática además de identificar la diferencia entre las cantidades que representan el cambio y las cantidades que constituyen la sucesión. Por otra parte, el profesor C presentó dificultades para identificar y describir el cambio, trabajando principalmente con expresiones algebraicas; de acuerdo con lo anterior, la mayoría de los profesores comprenden y describen el cambio en forma cualitativa en el estudio de los patrones, incluso determinando cuantitativamente el cambio, manifestando acciones las cuales están asociadas a la forma como se estudia la variación con otros objetos matemáticos, de tal forma que

conciben que este tipo de acciones descriptivas son aplicables a distintas formas de estudio de la variación.

Categoría 3. La proporcionalidad (P7 y P9).

En esta categoría se encontró que los profesores A, B, C y D logran evidenciar la relación que existe entre las magnitudes presentes, identificando la variación como una relación de proporcionalidad directa, lo que permite deducir que los cuatro docentes comprenden los modelos más simples de función, de manera que se pueda evidenciar el cambio.

Categoría 4. La función como relación de dependencia (P10 y P11).

En esta categoría se encontró que los profesores A, B, C y D reconocen el concepto de función como herramienta para establecer enlaces de patrones de variación entre variables, reconociendo la variable independiente y dependiente, lo que les permite modelar y predecir el cambio. También se evidencia una interpretación correcta de las variaciones en los registros gráficos, teniendo en cuenta que ambas variables cambian simultáneamente una con respecto a la otra, lo que conlleva a inferir que identifican aspectos esenciales relacionados con la covariación como una forma de analizar las variaciones de las cantidades de dos magnitudes en determinadas situaciones.

Categoría 5. La variable (P5).

En esta categoría se obtuvieron los resultados de los profesores A, B, C y D, de los cuales se puede evidenciar conocimientos sobre patrones aritméticos y el uso del álgebra como herramienta de modelación para el estudio de la variación a partir de situaciones de cuantificación en diversos fenómenos que involucran el cambio, su relación con el significado de la variable, y por último el reconocimiento de los diferentes significados de la variable. Sin embargo, se encontró dificultades por parte del profesor C al momento de

expresar matemáticamente la sucesión decreciente, algo que puede estar asociado en cierta forma a lo que antes registró al mismo docente al presentar dificultades con la descripción del cambio al estudiar comportamiento en orden descendiente.

Categoría 6. Los registros de representación (P8 y P12).

Dentro de esta categoría se halló una interpretación ambigua de la pregunta por parte de la profesora A, profesor C y profesora D, debido a que identificaron y nombraron las variables del problema que cambian, mas no expresaron de forma cuantitativa las variaciones presentes en los valores de la tabla. Por su parte, la profesora B sí logró identificar y expresar los cambios presentes en los valores de cada una de las variables presentadas en el registro tabular, lo cual era lo esperado para la respuesta de P8. Sin embargo, a pesar de las dificultades presentadas en P8, es notorio que los docentes reconocen características importantes para el estudio del cambio por medio de una función, representada en los registros tabular y gráfico, además de identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la variable independiente y dependiente y completar las tablas con las parejas ordenadas.

Variable de investigación de Acciones Didácticas.

Categoría 7. Conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación (P4 y P6).

En consecuencia, los docentes, de manera general, presentan conocimientos en relación al currículo escolar, esto debido que, identifican que la noción de variación se presenta desde los primeros grados de escolaridad por medio del estudio de patrones. Además, tienen claro que las funciones no son el único objeto matemático para enseñar la noción de variación, que la modelación es un proceso fundamental para la enseñanza de la noción de variación, además comprenden que todos los procesos generales son importantes

(razonamiento, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos, formulación y resolución de problemas) y por último entienden que la noción de variación se puede enseñar por medio de diferentes registros de representación.

Capítulo 4. Conclusiones

En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones generales del trabajo, que surgen a partir de lo encontrado en los análisis del capítulo 3, y lo propuesto en el referente didácticos sobre la enseñanza de la variación en el contexto escolar, además, los referentes curriculares en torno al estudio de la noción de variación en la educación secundaria y media, los cuales permitieron caracterizar las concepciones de los docentes de secundaria y media sobre la variación, debido a su impacto en el desarrollo del pensamiento variacional.

4.1 Conclusiones generales

A continuación, se presentan las conclusiones teniendo en cuenta los objetivos planteados, tanto el general como los específicos, los cuales fueron diseñados para llevar a cabo esta investigación.

Conforme al primer objetivo específico, se pretendía documentar aspectos relacionados con el estudio de la variación, de acuerdo con las perspectivas didáctica, curricular y matemática. De esta manera, es posible concluir que:

- La documentación de la perspectiva didáctica permitió profundizar en las propuestas de enseñanza en torno al estudio de la variación a partir del estudio de patrones, composición de función, el estudio de la variable, los diferentes registros de representación, la identificación del cambio y la modelación, además de su transversalidad con otras disciplinas, tanto en las matemáticas como en otras áreas del conocimiento. De esta manera, se logró comprender fenómenos de cambio, relaciones entre variables, covariaciones y demás, por medio de estrategias didácticas que

permiten apropiarse de la variación desde los primeros grados de escolaridad hasta la educación básica y media.

- A partir de los referentes curriculares fue posible reconocer los núcleos matemáticos conceptuales presentes en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias, en los cuales se ve inmersa la variación. También, se documentó las características y composición del pensamiento variacional, considerando la coherencia vertical y horizontal, además de los procesos generales del pensamiento Variacional, los cuales involucran la resolución y planteamiento de problemas, las comparaciones, elaboración y ejercitación de diferentes procedimientos, la comunicación y la modelación (MEN, 1998).
- A partir de la comprensión y definición de la variación en las matemáticas, fue posible identificar componentes de la variación como la variable, la razón de cambio, la pendiente, el coeficiente de diferencias y la derivada (Hughes, et al, 2004; Apóstol, 1999), los cuales son fundamentales para el desarrollo del pensamiento Variacional, y por ende, del pensamiento Matemático (MEN, 1998; 2006).

En relación al objetivo específico número dos, el diseño de una matriz de análisis que articulara los resultados de la documentación didáctica, curricular y matemática de la problemática, como herramienta de estudio y de recolección de datos para caracterizar las concepciones de los docentes de matemáticas sobre la noción de variación, se puede concluir que:

- La recopilación sobre el estudio de los referentes curriculares, didácticos y matemáticos, en la matriz de análisis, recogieron diversas afirmaciones, expresiones, ideas y respuestas de los profesores, que permitieron identificar algunas de sus concepciones sobre la noción de variación y su papel en desarrollo del pensamiento Variacional. Para el análisis de esta información se establecieron siete categorías, seis

para la variable de conocimiento disciplinar, las cuales fueron: continuo numérico, estudio de patrones, la proporcionalidad, función como relación de dependencia, la variable y los registros de representación; y una para la variable acciones didácticas: conocimiento que deben tener los docentes sobre la enseñanza de la variación.

- Respecto a la matriz de análisis, esta resumió en una presentación tanto la propuesta curricular, como la matemática y la didáctica, las cuales posibilitan el desarrollo del pensamiento Variacional a través de la comprensión de la noción de variación y de todas sus propiedades y características que la componen teniendo en cuenta los procesos generales: razonamiento, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos, formulación y resolución de problemas. De acuerdo con la matriz, fue posible determinar, a partir de las variables y categorías, aspectos relevantes de las concepciones de los profesores objeto de estudio, ya que fue conformada a partir de aspectos claves sobre la variación.

En lo concerniente a los objetivos específicos número tres y cuatro, los cuales buscaban analizar y expresar reflexiones en relación con las concepciones de los docentes de secundaria y media acerca de la variación, considerando las variables de investigación; Conocimiento Disciplinar y Acciones Didácticas, se permitió concluir que:

En la variable de Conocimiento Disciplinar se identificaron las concepciones de los docentes, los cuales consideran la variación como; continuo numérico, por medio del reconocimiento del cambio en conjuntos infinitos; la función como relación entre variables; el estudio de patrones en diferentes contextos, teniendo en cuenta las regularidades del comportamiento del cambio en escenarios geométricos y numéricos; la proporcionalidad, por medio de la relación entre dos o más magnitudes; la variable y su relación con el álgebra; y los registros de representación, por medio del tratamiento y conversión.

Particularmente, se encontró que, en las concepciones de los docentes, la variación como función y la variación como reconocimiento de patrones, son las nociones con mayor reconocimiento por parte de los profesores encuestados, lo que se evidencia en el desarrollo de los procesos dentro de las respuestas, ya que los profesores mostraron un mayor dominio de la variación considerando estas dos concepciones. Esto presuntamente se debe a la formación docente en los estudios superiores, debido al escaso estudio del dinamismo de la variación, y se limitan a estudiar el cambio mediante procesos memorísticos, mecánicos y procedimentales (Vasco, 2002; Cantoral y Reséndiz, 2003), algo que no es lo esencial según las propuestas didácticas documentadas en el capítulo 2. Como consecuencia, se evidencia que los docentes presentan algunas dificultades al comprender y estudiar la noción de variación, teniendo en cuenta las demás categorías propuestas en este trabajo. Un ejemplo de esta situación se contempla en la poca comprensión que demuestran algunos profesores para ver la variación considerando las situaciones desde el punto de vista de la proporcionalidad.

En la variable de Acciones Didácticas, se encontraron concepciones similares entre los docentes encuestados, tal como el uso de la propuesta de los documentos oficiales del MEN para enseñar la variación, considerando relevantes aspectos como la modelación, el estudio de patrones, la covariación, el contexto de registros de representaciones, entre otros. Además, se evidencia que comprenden la importancia para el desarrollo del pensamiento matemático, a partir del estudio de la noción de variación en los diferentes niveles de escolaridad.

Además, a partir de los referentes curriculares antes mencionados, se concluye que se logró el propósito general del trabajo, el cual consistió en caracterizar las concepciones de algunos docentes sobre la noción de la variación y el desarrollo del pensamiento variacional. Finalmente, la presente investigación permitió a los investigadores profundizar y ampliar sus conocimientos sobre la noción de variación y su importancia para el desarrollo del

pensamiento matemático, en particular sobre la comprensión del cambio y sobre el reconocimiento del impacto de las concepciones en el proceso de enseñanza - aprendizaje de este objeto matemático. De esta manera, las diferentes concepciones sobre el objeto matemático abordado dan sugerencias para modificar el quehacer docente de los investigadores y diseñar propuestas de formación para futuros profesores de matemáticas.

4.2 Reflexiones, recomendaciones y limitaciones

Una de las reflexiones que deja esta investigación es que se logra evidenciar que la problemática abordada viene desde muchos años atrás y aun en la actualidad se sigue presentando las mismas dificultades que han encontrado otros autores en investigaciones similares, Como es el estudio de la variación de forma estática con procedimientos memorísticos y mecánicos así dejando de lado estudio del dinamismo que la compone. De esta investigación se pudo rescatar que los docentes encuestados tienen conocimiento de la importancia del estudio de la noción de variación para el desarrollo del pensamiento Variacional, además de comprender los documentos oficiales como una guía esencial para la enseñanza de dicha noción.

Una recomendación que se debe tener en cuenta es que los docentes de matemáticas en Colombia no se limiten a solo enseñar la variación en primaria a partir del estudio de patrones y en secundaria a partir de funciones si no que logren hacer una integración de todos los conceptos que componen esta noción matemática como es el estudio de la proporcionalidad, la variable, el continuo numérico, entre otros. Para así lograr un adecuado estudio del cambio.

Una de las limitaciones que se tuvo para la realización de esta investigación fue la poca disponibilidad de tiempo por parte de los docentes encuestados lo que causó que para la

aplicación del cuestionario final se le entregara de forma física sin un tiempo límite de entrega lo que presuntamente podría haber influido en los resultados ya que tuvieron tiempo de documentarse y así alterar la caracterización de sus concepciones.

De lo anterior se da una recomendación para futuros estudios la cual consiste en aplicar los instrumentos de recolección de datos ya sea cuestionarios o entrevistas en un ambiente controlado para así evitar que los docentes se documenten y afecten los resultados.

Referencias bibliográficas

- Alonso, L. (1999). Sujeto y discurso: el lugar de la entrevista abierta en las prácticas de la sociología cualitativa. En J. Delgado y J. Gutierrez (Eds.). *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*. (pp. 225-239) Editorial Síntesis.
- Apostol, T. (1999). *Calculus*. Reverté.
<https://calculounicaes.files.wordpress.com/2012/04/calculo-volumen-1-de-tom-apostol.pdf>
- Barajas, C., & Parada, S. (2015). Aproximación a las dificultades del pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso de la Universidad Industrial de Santander. *Revista Colombiana de Matemática Educativa RECME*, 1(1), 404 - 408.
<http://funes.uniandes.edu.co/8572/1/Barajas2015Aproximacion.pdf>
- Benítez, W. (2013). Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje de docentes en formación. *Revista Científica*, pp. 176 - 180.
<https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/6009/7516>
- Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D., & Bohórquez, A. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7(1), 73 - 93. <http://funes.uniandes.edu.co/9236/1/Caracteristicas2015Bonilla.pdf>
- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26(1), 1007 1015. <http://funes.uniandes.edu.co/4217/1/CaballeroUnacaracterizacionALME2013.pdf>
- Caballero-Pérez, M., & Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. En L. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1057-1065). Comité

Latinoamericano de Matemática Educativa, México.

<http://funes.uniandes.edu.co/12317/1/Caballero2017Una.pdf>

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, no. 42, 353 - 372.

<https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/09/pensamiento.pdf>

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 6(2), 133 - 154.

<http://funes.uniandes.edu.co/9643/>

Cantoral, R., Molina, J., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez, J. Molina (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa vol. 18* (pp. 463 - 468). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México. <https://core.ac.uk/download/pdf/33252473.pdf>

Cárdenas, L., & Cuervo, C. (2019). *Variación (en el Cálculo) vs variabilidad (en la Estadística): un marco de referencia* [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

<http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/11763/TE-23972.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Carballo, M., & Guelmes Valdés, E. (2016). Algunas consideraciones acerca de las variables en las investigaciones que se desarrollan en educación. *Revista Universidad y Sociedad*, 8(1), 140 - 150. <http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v8n1/rus20116.pdf>

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), 121 - 156.

http://funes.uniandes.edu.co/1520/1/98_Carlson2003Razonamiento_RevEMA.pdf

Cruz, C., & Torres, A. (2008). *Concepciones de algunos profesores de matemáticas de básica secundaria sobre los decimales y su relación, como representación, con los números racionales* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Funes,

Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática.
<http://funes.uniandes.edu.co/11131/1/Cruz2008Concepciones.pdf>

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle.

Engler, A., Vrancken, S., & Müller, D. (2011). Formación a distancia. Las concepciones de los docentes con relación a ideas variacionales. En P. Lestón. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1027-1036). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México.
<http://funes.uniandes.edu.co/5059/1/EnglerFormacionALME2011.pdf>

Fernández, J. (1991). *Análisis Matemático I (Tomo 1)*. Madrid: UNED

Fonseca, J., & Castillo, M. (2013). Formación de docentes de matemáticas: Aspectos relevantes. *Uniciencia*, 27(1), 2 - 14.
<https://www.redalyc.org/pdf/4759/475947762001.pdf>

García, G., Serrano, C., & Salamanca, J. (2000, del 5 al 7 de octubre). Estudio del pensamiento variacional en la educación básica primaria [cursos y talleres]. *Segundo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Valledupar, Colombia.
<http://funes.uniandes.edu.co/2377/1/Garc%C3%ADa2000Estudio.pdf>

Gonzáles, M. (1999). *Creencias, atribuciones y auto-eficacia en profesores de enseñanza básica municipalizada* [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile].

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (primera edición). Mc Graw-Hill.
https://www.uv.mx/personal/cbustamante/files/2011/06/Metodologia-de-la-Investigaci%C3%83%C2%B3n_Sampieri.pdf

Hughes-Hallet, D., Gleason, A., Frazer, P., Flath, E., et al. (2004). *Cálculo Aplicado* (segunda edición). Editorial Grupo Patria Cultural.
<https://matematicaexercice.wordpress.com/2012/11/06/calculo-aplicado-2-edi-hughes-hallet-gleason-pdf/>

- Jiménez, A. (2019). Formación de profesores de matemáticas: El caso de la licenciatura más antigua de Colombia. *Praxis & Saber*, 10(22), 45–70.
<https://doi.org/10.19053/22160159.v10.n22.2019.7945>
- Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Revista Números*, 76(1), 83 - 103.
<http://funes.uniandes.edu.co/3573/1/Ju%C3%A1rez2011DificultadesNumeros76.pdf>
- Larson, R., Hostler, R. & Edwards, B. (Eds.). (2006). *Cálculo con geometría analítica*. McGraw-Hill Interamericana.
<http://www.cobaeholcayuca.com/LECTURAS/Calculo%20Larsson%208%20edicion.pdf>
- Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Universidad de Sevilla, Sevilla, España: GID.
- Mercedes, A., Pérez, O., y Triana, B. (2017). Propuesta didáctica basada en múltiples formas de representación semiótica de los objetos matemáticos para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial. *Dialnet*, 10 (2), 20 - 30.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf
- Montenegro-Aldana, I. (2003). *Evaluación del Desempeño Docente Fundamentos, Modelos e Instrumentos*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

- Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 21(2), 265 - 280. <https://core.ac.uk/download/pdf/13268099.pdf>
- Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332. https://ssrbsite.files.wordpress.com/2018/02/pajares-1992-teachers_-beliefs-and-educational-research-cleaning-up-a-messy-construct.pdf
- Pérez, J., & Gardey, A. (2008, 25 de julio). *Definición de variable - Qué es, Significado y Concepto*. Definicion.de. <https://definicion.de/variable/>
- Ponte, J. (1994b). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (Ed.). *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the Fifth International Conference on Systematic Cooperation between theory and practice in mathematics education*. Grado, Italia.
- Ponte, J. (2001). A investigação sobre o professor de matemática: problemas e perspectivas do professor. *Educação Matemática em Revista*, 8(11), 10-33.
- Posada, F., & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia, Colombia]. Recuperado de: http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7093/1/FabianPosada_2006_didacticafuncionlineal.pdf
- Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Relime*, 9(3), 435 - 438. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n3/v9n3a6.pdf>
- Shulman, L. (1986). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

- Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (sexta edición). Cengage Learning.
https://www.academia.edu/34403504/PREC%C3%81LCULO_MATEM%C3%81TICAS_PARA_EL_C%C3%81LCULO_6e
- Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D. Grouws (Ed.). *Handbook for research on mathematics Teaching and Learning*, (pp. 127 - 146). New York: Macmillan.
- Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 445-463). Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Ursini, S. y Trigueros, M (2003). First-year Undergraduates. Difficulties in Working with Different Uses of Variable. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel y F. Hitt (Eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education, Research in Collegiate Mathematics Education V* (pp. 1 - 29). American Mathematical Society.
- Vasco, C. (2002, del 8 al 10 de mayo). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías [conferencia]. *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*, Bogotá, Colombia.
<http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf>
- Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, (31), 9 - 25.
<http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n31/n31a02.pdf>

Anexos

Anexo 1

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en matemáticas y física

CONCEPCIONES DE DOCENTES ACERCA DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN CUESTIONARIO

Apreciados docentes, el siguiente cuestionario tiene por objetivo indagar sobre las concepciones de algunos docentes de matemáticas sobre la noción de variación en la educación básica y media, por lo cual, de la manera más amable, se les solicita dar respuesta a las siguientes preguntas de manera clara y honesta. Cabe aclarar que la información suministrada será de carácter confidencial, reservada y utilizada con fines académicos. Agradecemos de antemano su colaboración y disposición para la realización de este.

Sección 1: Perfil Del Docente

*¿Qué formación académica tiene?

*¿En qué grados de escolaridad enseña actualmente?

*¿Tiene estudios complementarios además de la formación de pregrado?
 ¿Cuáles?_____

Sección 2: Preguntas iniciales

Las siguientes preguntas pretenden explorar sobre algunos conocimientos básicos en matemáticas en la educación básica y media.

Analiza las siguientes cantidades y responde las preguntas 1 y 2:

1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

1. De acuerdo con las cantidades, marca con una x las afirmaciones que consideres verdaderas o no en la siguiente columna:

	Í
a. Las cantidades van cambiando de menor a mayor y luego de mayor a menor	
b. Los números escritos pertenecen al Conjunto de los números impares	
c. Los números están escritos en forma aleatoria y no existe un patrón de cambio entre ellas	
d. La cantidad del cambio que se va presentando entre los valores escritos puede ser representado con números pares	
e. Las anteriores cantidades están relacionadas con una sucesión matemática	
f. La expresión matemática que representa el conjunto de cantidades corresponde a $2n - 1$	

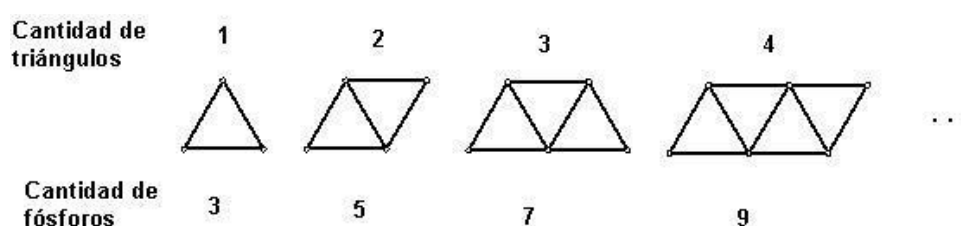
2. Responde:

- a. ¿Cómo describirías el cambio que se va presentando en las cantidades?

- b. ¿Cuál sería el término a escribir después del 63?

- c. Escriba la expresión matemática que represente el cambio entre los términos de la sucesión.

3. Analiza la información en el siguiente arreglo:



- a. Describe el cambio que se va presentando en la cantidad de fósforos de acuerdo con la cantidad de triángulos para cada posición.

- b. Escribe la expresión matemática que determine la cantidad de fósforos para cualquier posición de la siguiente secuencia.

Sección 3: preguntas sobre el currículo escolar y la variación

Las siguientes preguntas pretenden indagar sobre el conocimiento acerca de la relación entre la noción de variación y su implementación en el currículo escolar

4. Escribe falso o verdadero y justifica tu respuesta:

- a. El estudio de la variación se inicia en los primeros grados de escolaridad.

- b. El trabajo con patrones se desarrolla exclusivamente en niveles de escolaridad avanzados como la educación media para el estudio y comprensión de la variación.

- c. Las funciones polinómicas son el objeto matemático más adecuado para enseñar la variación.

- d. Para estudiar la variación, el proceso de modelación no desempeña un papel relevante.

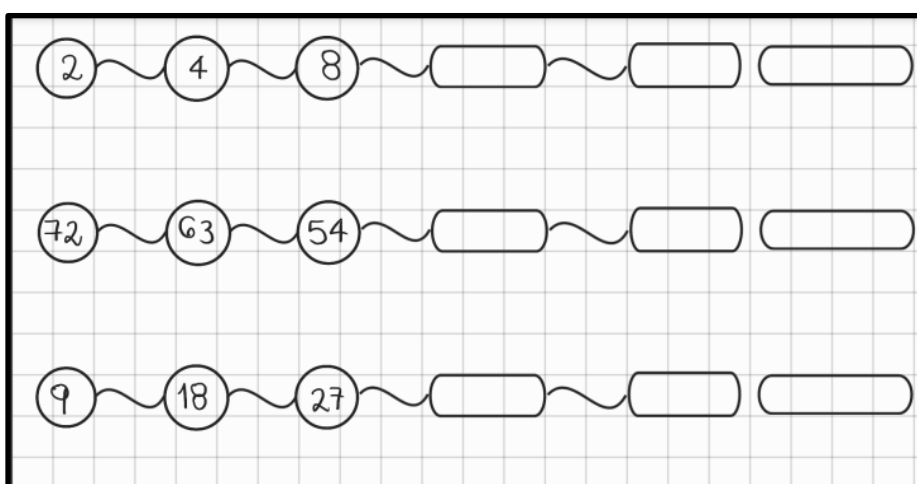
- e. El desarrollo del pensamiento geométrico y espacial es apropiado para el estudio de la variación.

- f. Las representaciones gráfica y tabular son las únicas que permiten captar la variación de cantidades de magnitud.

Sección 4: Preguntas de profundización sobre la variación

Las siguientes preguntas pretenden explorar sobre conocimientos avanzados en matemáticas en la educación básica y media.

De acuerdo con la siguiente gráfica, responde las preguntas 5 y 6:



5. Desarrolla:

- Completa los espacios en blanco de acuerdo con las cantidades para cada caso.
- Escribe la expresión matemática que representa cada sucesión en la columna de la derecha.

6. Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipo de aprendizaje asociado al pensamiento variacional se podría promover con los anteriores ejercicios?

- ¿Con cuáles grados de la educación básica y media consideras que se puede trabajar este ejercicio? Explica tu respuesta.

Analiza el siguiente enunciado y contesta las preguntas 7 a 9:

“A continuación se muestra una tabla con los datos de los precios, en promedio, de papa parda desde el 2015 hasta el 2019, vendida por un agricultor y por un supermercado, por kilogramo:

	Año	precio venta agricultor (por kg)	precio venta supermercado (por kg)
5	201	\$800	\$1000
6	201	\$1000	\$1250
7	201	\$1200	\$1500
8	201	\$1400	\$1750
9	201	\$1600	\$2000

7. Teniendo como referencia el precio de venta del agricultor, ¿de cuánto es el porcentaje de incremento del supermercado a través de los años?

- a. 15 %
- b. 25 %
- c. 50 %
- d. 200 %

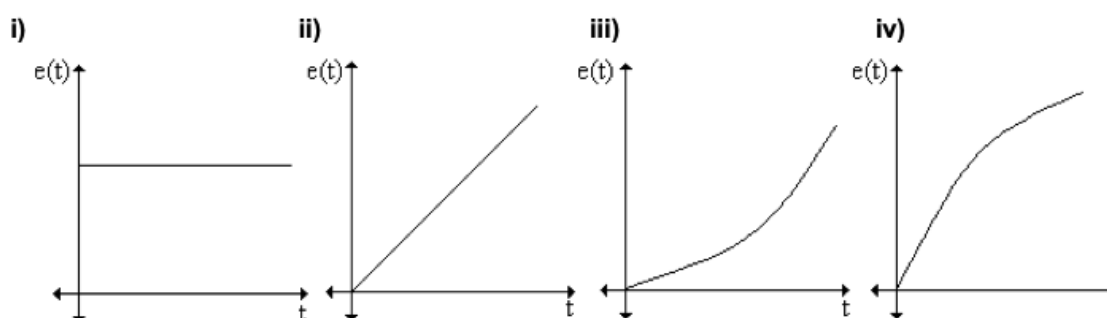
8. ¿Qué variaciones en los valores se pueden identificar en la tabla?

9. Selecciona la afirmación que consideres verdadera y justifica tu selección:

- a. Los cambios que se van presentando en los valores de precio de venta del agricultor varían de forma irregular.
- b. Los incrementos que se van presentando en los valores de venta del supermercado van disminuyendo cada vez menos.
- c. Los incrementos en los valores de precio de venta tanto en la columna del agricultor como del supermercado son constantes año tras año.
- d. Los incrementos en los valores de precio de venta tanto en la columna del agricultor como del supermercado aumentan cada vez más.

Justificación:

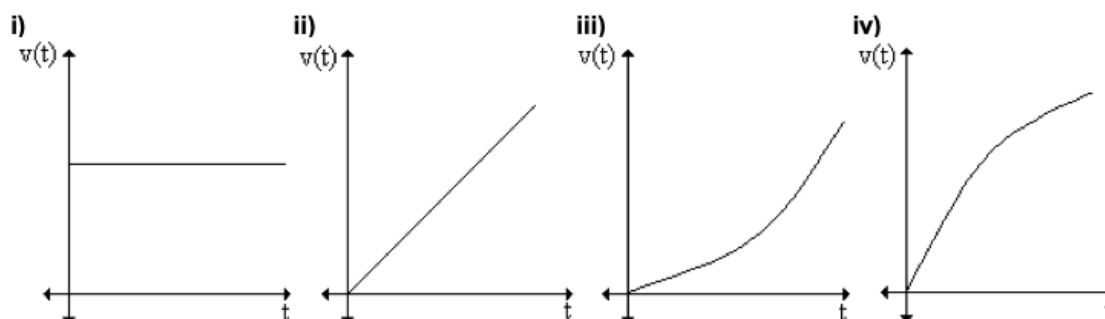
10. Analice cada una de las siguientes gráficas que muestran la posición $e(t)$ de un auto en función del tiempo desde cierto punto de referencia:



- a. Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explica tu respuesta.

- b. Describa cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada.

11. Analice y determine cuál de las siguientes gráficas muestra la velocidad con que se mueve el auto en el ejercicio del punto 10:



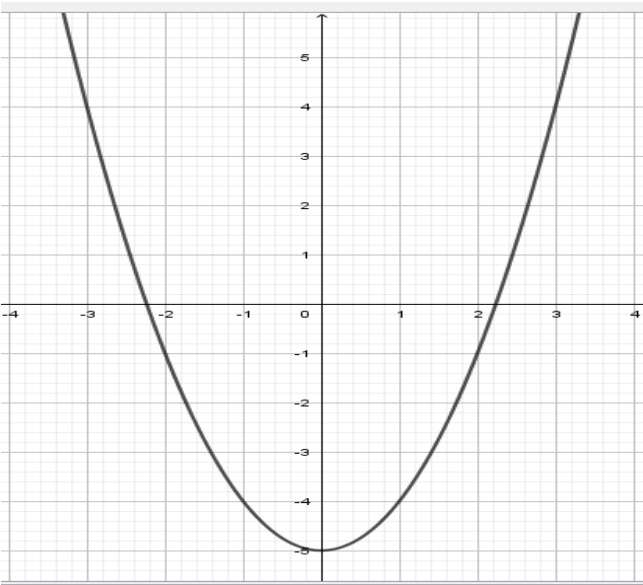
- a. Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique su respuesta.

- b. Explique cómo cambian las magnitudes en la imagen seleccionada.

12. Completa la tabla de acuerdo con los valores de la gráfica y responde:

- a. Describa el comportamiento de esta función en los intervalos $(-\infty, 0)$.

- b. Para el análisis del comportamiento de la respectiva función, ¿Cuál de las dos representaciones brinda mayor información? Explique su respuesta.



x	f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
2	
3	