



Aplicación de la teoría de semigrupos al estudio analítico de un modelo para el Condensado de Bose-Einstein

John Ericson Castaño Aristizábal

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
Octubre 2019

Aplicación de la teoría de semigrupos al estudio analítico de un un modelo para el Condensado de Bose-Einstein

John Ericson Castaño Aristizábal

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar por el título de:
Matemático

Director:
Juan Carlos Muñoz, PhD.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
Octubre 2019

Resumen

En este trabajo se considera el problema de valor inicial asociado al sistema de ecuaciones acopladas de Gross-Pitaevskii (CGPE),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi_+}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_+ + (c_0 - c_2)|\Phi_-|^2\Phi_+ + c_2\overline{\Phi_-}\Phi_0^2, \\ i\hbar \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2)\Phi_0 + c_0|\Phi_0|^2\Phi_0 + 2c_2\overline{\Phi_0}\Phi_+\Phi_-, \\ i\hbar \frac{\partial \Phi_-}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_-|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_- + (c_0 - c_2)|\Phi_+|^2\Phi_- + c_2\overline{\Phi_+}\Phi_0^2, \end{aligned} \quad (\text{CGPE})$$

sujeto a las condiciones iniciales $\Phi_+(x, 0) = f_1(x)$, $\Phi_0(x, 0) = f_2(x)$ y $\Phi_-(x, 0) = f_3(x)$, con $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$ denotando la variable espacial y el tiempo, respectivamente. Las funciones Φ_j y f_k son de valor complejo y $\overline{\Phi_j(x, t)}$ denota el conjugado complejo de $\Phi_j(x, t)$ para $j = +, 0, -$ y $k = 1, 2, 3$, m denota la masa, $\hbar$ la constante de Planck reducida y c_0 y c_2 representan constantes. Se da la motivación de las técnicas comenzando considerando el problema en dimensión finita. En segundo lugar aplicamos dicha teoría para establecer la existencia y unicidad local del problema de valor inicial asociado al modelo (CGPE) que es estudiado en [14] para describir la evolución de un BEC con un grado de libertad. En tercer lugar se muestra algunos resultados numéricos para el sistema (CGPE), mediante la utilización del software MATHEMATICA de Wolfram versión 11.0. En particular, exploramos la propagación de una aproximación de una solución de onda viajera estacionaria periódica del sistema obtenida en [14].

Palabras clave:

Dedicado a

Igual que lo mencionó Isaac Newton, no habría concebido este trabajo si no me hubiera parado en hombros de gigantes, por tanto dedico este documento a todos mis profesores.

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a Dios por darme la oportunidad de conocer el extraordinario mundo de las matemáticas. A mi esposa Maira Alejandra Trochez, por su enorme paciencia, por ser ese motor que me impulsa cada día, y por su incansable motivación hacia conmigo. A mi papá, mamá, hermana, por estar siempre conmigo apoyándome para salir adelante en este proyecto. A mis suegros, en especial a mamá Lucy por su gran cariño. A mis tíos, en especial a María Dacier Castaño y Teresita Castaño por su gran apoyo. A mis amigos, en particular a David Alpala, Alejandro Otero, Lina Triviño y Juan Camilo Restrepo por su compañía y experiencias que formaron mi pensamiento analítico.

A mi director del trabajo de grado, el profesor Juan Carlos Muñoz, por sus constantes enseñanzas cada miércoles y jueves en los seminarios de problemas inversos y EDPs, respectivamente, además de los seminarios no oficiales; su guía fue definitiva para culminar este proyecto.

Santiago de Cali, Colombia
Octubre, 2019

John Ericson Castaño

Contenido

Introducción	xi
1 Preliminares	1
1.1 Espacios de Banach y de Hilbert	1
1.1.1 Espacios de Banach	2
1.1.2 Espacios de Hilbert	6
1.2 Operadores lineales	7
1.2.1 Operadores lineales acotados	7
1.3 Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$	9
1.3.1 Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$	10
1.3.2 Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$	11
1.4 Espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s \geq 0$	12
1.5 La integral de Riemann de funciones con valores vectoriales	13
1.6 Semigrupos de operadores lineales	14
1.6.1 El problema de valor inicial en dimensión finita	15
1.6.2 Problema de valor inicial en dimensión infinita	17
2 Existencia y unicidad local	35
2.1 El problema lineal	36
2.2 El problema no lineal	42
3 Experimentos numéricos	53
4 Conclusiones	59
Bibliografía	61

Introducción

En este trabajo se considera el problema de valor inicial asociado al sistema de ecuaciones acopladas de Gross-Pitaevskii (CGPE),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi_+}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_+ + (c_0 - c_2)|\Phi_-|^2\Phi_+ + c_2\overline{\Phi_-}\Phi_0^2, \\ i\hbar \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2)\Phi_0 + c_0|\Phi_0|^2\Phi_0 + 2c_2\overline{\Phi_0}\Phi_+\Phi_-, \\ i\hbar \frac{\partial \Phi_-}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_-|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_- + (c_0 - c_2)|\Phi_+|^2\Phi_- + c_2\overline{\Phi_+}\Phi_0^2, \end{aligned} \quad (1)$$

sujeto a las condiciones iniciales $\Phi_+(x, 0) = f_1(x)$, $\Phi_0(x, 0) = f_2(x)$ y $\Phi_-(x, 0) = f_3(x)$, con $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$ denotando la variable espacial y el tiempo, respectivamente. Las funciones Φ_j y f_k son de valor complejo y $\overline{\Phi_j(x, t)}$ denota el conjugado complejo de $\Phi_j(x, t)$ para $j = +, 0, -$ y $k = 1, 2, 3$, m denota la masa, $\hbar$ la constante de Planck reducida y c_0 y c_2 representan constantes. Se observa que el sistema anterior consta de 3 ecuaciones diferenciales de tipo Schrödinger acopladas en sus términos no lineales cada uno de los cuales es de tipo cúbico. Este tipo de sistemas tienen importantes aplicaciones físicas en teoría de semiconductores, óptica no lineal, física de plasma, dinámica de fluidos, teoría cuántica de campos y condensación de Bose-Einstein, entre otras. La ecuación de Schrödinger en su forma lineal describe la evolución de una función onda en el tiempo en un sistema conservativo; esta función de onda predice el estado cuántico de un sistema como su evolución temporal, tales como electrones, protones, neutrones y átomos.

Para el caso que nos concierne, el sistema (1) modela el comportamiento de un condensado de Bose-Einstein (BEC) 1-espinorial. En Física, el BEC es el estado de agregación de la materia que se da en ciertos materiales a muy bajas temperaturas del orden de los nano kelvin (10^{-9} K, donde $0 \text{ K} = -273,5 \text{ }^\circ\text{C}$). La propiedad que lo caracteriza es que una cantidad macroscópica de las partículas del sistema pasan al nivel de mínima energía, denominado estado fundamental. A la agrupación de las partículas en ese nivel se le llama condensado

de Bose-Einstein. Esto era conocido por S. Nath Bose y por A. Einstein en la década de 1920 ([15],[16]). En 1961, L. P. Pitaevskii introdujo por primera vez, de forma rigurosa, el concepto de función de onda macroscópica dependiente del tiempo [18], mostrando que el condensado tiene una dinámica propia. Esta función de onda responde a la llamada ecuación de Gross-Pitaevskii

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta u + G|u|^2u,$$

donde u es la función de onda del condensado y G es la interacción promedio entre átomos, que da origen a un termino no lineal $|u|^2u$. Este enorme interés por la teoría de condensados gaseosos llevó a numerosos grupos experimentales a intentar generar estos condensados. Fue solo hasta junio de 1995 en un laboratorio del Instituto Nacional de Estándares y Tecnología de la ciudad de Boulder, Colorado, que los físicos E. W. Ketterle, Cornell y C. Weimansepor crearon por primera vez un condensado et al. [17]. Cuando se usa una trampa óptica para confinar las partículas [2], se puede lograr un condensado espinorial experimentalmente. En los experimentos actuales, los átomos alcalinos se usan ampliamente y tienen un espín electrónico de $1/2$ con un espín nuclear de $3/2$ para ^{23}Na , ^{87}Rb y ^{41}K . Por lo tanto, el espín hiperfino para estos átomos como consecuencia de la interacción entre el espín electrónico y el espín nuclear puede ser 1 o 2. El sistema (1) modela un BEC de espín hiperfino igual a 1 ($F = 1$) como se muestra en [12], y constituye una fuente de importantes estudios teóricos y experimentales en los últimos años [1], [4], [5], [6], [7], [8], [10] y [11].

El primer objetivo del presente trabajo es hacer una revisión de los conceptos y resultados teóricos generales requeridos del Análisis Funcional para el estudio del problema de valor inicial asociado a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en un espacio de Banach. Se da la motivación de las técnicas comenzando considerando el problema en dimensión finita. El segundo objetivo es aplicar dicha teoría para establecer la existencia y unicidad local del problema de valor inicial asociado al modelo (1) que es estudiado en [14] para describir la evolución de un BEC con un grado de libertad. El modelo consta de tres ecuaciones de campo medio acopladas tipo Gross-Pitaevskii, que es diferente del bien conocido sistema Manakov, y por lo tanto, las técnicas usadas en la literatura para obtener soluciones exactas de sistemas de tipo Manakov no son aplicables en el presente caso. Este estudio de buena colocación del sistema para BEC (1) no ha sido tratado en la literatura disponible por el autor, pero sí ha sido considerada la existencia de estados estacionarios del sistema, por ejemplo en [26] y diversas soluciones exactas de onda viajera estacionarias han sido obtenidas en [5], [6], [14]. El tercer objetivo es mostrar algunos resultados numéricos para el sistema (1), mediante la utilización del software MATHEMATICA de Wolfram versión 11.0. En particular, exploramos la propagación de una aproximación de una solución de onda viajera estacionaria periódica del sistema obtenida en [14].

Es importante aclarar que las técnicas expuestas aquí no son nuevas, y el objetivo del trabajo es el de realizar un estudio monográfico revisando estas técnicas y aplicándolas al caso del problema (1).

El contenido de este trabajo está distribuido en cuatro capítulos. En el primer capítulo

se presentan los espacios de funciones necesarios para establecer la buena colocación del sistema (1). Además, se exponen algunas propiedades de los operadores lineales entre espacios normados y aspectos básicos de la teoría de semigrupos fuertemente continuos y su aplicación al estudio de problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach.

En el segundo capítulo se presenta la buena colocación del problema, primero analizando la parte lineal de este y luego reescribiendo el problema no lineal completo como un problema de punto fijo en un espacio de Banach apropiado, al cual se le aplica el clásico principio de punto fijo de Banach.

En el tercer capítulo, presentamos algunas simulaciones numéricas para el sistema (1) realizadas mediante el software MATHEMATICA de Wolfram versión 11.0. Finalmente, en el cuarto capítulo se dan algunas conclusiones respecto a las técnicas usadas y posibles trabajos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos algunos preliminares matemáticos que serán necesarios para el estudio de la teoría de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial (1). Además nos proponemos hacer una descripción de la estrategia general a través de la llamada teoría de semigrupos, que se puede usar para abordar el estudio de problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales de tipo evolutivo, tal como el modelo para describir condensados de Bose-Einstein dado en (1). Se incluyen en lo posible ejemplos ilustrativos de los conceptos que se van introduciendo en el documento.

1.1 Espacios de Banach y de Hilbert

Comenzamos introduciendo el concepto de norma en un espacio vectorial. Para las demostraciones y resto de detalles, consultar [24], [27] y [28].

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial real o complejo. Una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *norma* si esta cumple las siguientes propiedades:

- (i) $\|x\| \geq 0$ para cualquier $x \in X$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$;
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todos $x \in X$ y escalares α ; y
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

Si $\|\cdot\|$ es una norma de X , se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio vectorial normado* o simplemente un *espacio normado*, y escribiremos X sin mencionar su norma cuando sea claro en el contexto cuál es su norma. Una función no negativa $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ en un espacio vectorial X se llama *seminorma* si $\|\cdot\|$ satisface la propiedad (ii) y (iii).

Observación 1.1. Suponga que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

(1) Para cualquier $x, y \in X$ tenemos

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Por lo tanto, la norma $x \rightarrow \|x\|$ es una función uniformemente continua.

(2) Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en el espacio vectorial X inducen la misma topología si y sólo si existe una constante $c \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{c}\|x\|' \leq \|x\| \leq c\|x\|',$$

para todo $x \in X$. En este caso las llamaremos normas equivalentes.

El ejemplo típico de espacio vectorial normado es $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$), para $d \in \mathbb{N}$ fijo, con cualquiera de las normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ o $\|\cdot\|_1$, donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ y

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|, \quad \|x\|_1 := \sum_{k=1}^d |x_k|. \quad (1.1)$$

1.1.1 Espacios de Banach

La noción de convergencia es fundamental en el análisis de espacios normados.

Definición 1.2.

(1) Una sucesión (x_n) en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ decimos que *converge* a un x si para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N(\epsilon).$$

(2) Una sucesión (x_n) en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon,$$

para todos $m, n \geq N$. El espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se llama *completo* si cualquier sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X .

La noción de sucesión de Cauchy da origen a uno de los tipos fundamentales de espacios normados vectoriales.

Definición 1.3. (Espacio de Banach) Un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es un *espacio de Banach* si X es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Ejemplo 1.1. Los siguientes son otros espacios de Banach y la mayoría de ellos son usados en este trabajo.

- (1) Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) son espacios de Banach con las normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ definidas en (1.1).
- (2) $B(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es acotada}\}$, equipado con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|,$$

es un espacio de Banach. La convergencia de una sucesión de funciones en este espacio es también llamado *convergencia uniforme*. Si en lugar de $\mathbb{R}^n$ ponemos $\mathbb{N}$, entonces

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = B(\mathbb{N}).$$

- (3) El espacio

$$C_b(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ continua y acotada}\},$$

con la norma *uniforme* o del *supremo*: $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ es un espacio vectorial normado tal que es un subespacio cerrado de $B(\mathbb{R}^n)$, y por lo tanto un espacio de Banach. Notemos que si en lugar de $\mathbb{R}^n$ colocamos un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces $C_b(K) = C(K)$.

- (4) Un caso especial es $C([0, 1])$, y también el subespacio

$$C^1([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f' \in C([0, 1])\},$$

en un espacio vectorial normado. $C^1([0, 1])$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_{C^1([0, 1])} := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. Notemos que la norma $\|f\|_\infty$ no es equivalente a $\|f\|_{C^1([0, 1])}$ para $f \in C^1([0, 1])$, pero $\|f\|_{C^1([0, 1])}$ y $\|f\|_0 = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ para $f \in C^1([0, 1])$ sí lo son.

Notación. Escribiremos $\|\cdot\|_X$ para la norma definida en X , y para ahorrar escritura, escribiremos simplemente la norma $\|\cdot\|$ si se sabe con antelación el espacio en el que ella está definida.

Proposición 1.1. Sean $(X_1, \|\cdot\|_{X_1}), \dots, (X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ espacios de Banach. Entonces el conjunto $X_1 \times \dots \times X_n$ con su estructura de espacio vectorial producto es un espacio de Banach con las normas

$$\|(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\|_p = (\|x^{(1)}\|_{X_1}^p + \dots + \|x^{(n)}\|_{X_n}^p)^{1/p},$$

donde $((x^{(1)}, \dots, x^{(n)})) \in X_1 \times \dots \times X_n$ para algún $p \in [1, \infty)$, o también

$$\|(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\|_\infty = \max\{\|x^{(1)}\|_{X_1}, \dots, \|x^{(n)}\|_{X_n}\}.$$

Además, estas normas son equivalentes e inducen la topología producto.

Como último ejemplo de espacios de Banach, están espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Estos espacios serán fundamentales en este trabajo.

Ejemplo 1.2. Sea m la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Para $p \in [1, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ fijos, definimos la seminorma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dm \right)^{1/p},$$

para cualquier función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ en el espacio vectorial

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ medible y } \|f\|_p < \infty\}.$$

Aquí la integral $\int dm$ es con respecto a la medida de Lebesgue m . Si consideramos la relación de equivalencia $f \sim g$ si y solo si $f = g$ m -c.t.p., para $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, entonces tenemos que el espacio cociente

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \sim, \quad (1.2)$$

resulta ser un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_p$.

El análogo de (1.2) para $p = \infty$ se construye de manera un poco diferente. Definamos

$$\|f\|_{\text{essup}} = \text{essup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf\{\alpha > 0 : m(\{x : |f(x)| > \alpha\}) = 0\},$$

y el espacio vectorial

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \|f\|_{\text{essup}} < \infty\}.$$

De nuevo utilizando la relación de equivalencia $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ m -c.t.p para $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) / \sim,$$

el cual es de nuevo un espacio de Banach con la norma del supremo esencial $\|\cdot\|_{\text{essup}}$.

Observación 1.2. (1) Observemos que $\|\cdot\|_p$ no es una norma en el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, pues la propiedad (i) de la definición de norma falla.

(2) Notemos también que todo elemento de $L^p(\mathbb{R}^n)$ es una clase de equivalencia $[f]_\sim$ para alguna f de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$, así, para abreviar escritura, escribiremos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ en lugar de $[f]_\sim \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(3) Para $1 \leq p < \infty$, la norma $\|\cdot\|_p$ no depende del representante de la clase $[f]_\sim$, es decir, para $h, g \in [f]_\sim$, $\|h\|_p = \|g\|_p$.

(4) En adelante denotaremos por $\|\cdot\|_\infty$ a la norma $\|\cdot\|_{\text{essup}}$.

Algunas resultados y desigualdades muy importantes que involucran los espacios L^p son los siguientes:

Teorema 1.2. (Desigualdad de Hölder) Sea $p, q \in (1, \infty)$ satisfice $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (en cuyo caso q se llama exponente conjugado de p). Entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

para cualesquier funciones medibles $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Teorema 1.3. (Desigualdad de Mikowski) Sean $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

En el siguiente teorema se proporciona un estimativo en el espacio L^p para la llamada *convolución* de dos funciones.

Teorema 1.4. (Young) Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y sea $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ la función $y \mapsto f(x - y)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ y definimos

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy,$$

el producto de convolución de f y g . Además $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Teorema 1.5. (Desigualdad de Young) Sean $p, q, r \in [1, \infty]$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Entonces para cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Un resultado muy importante de teoría de integración que será usado frecuentemente en este trabajo es el siguiente teorema:

Teorema 1.6. (Convergencia dominada) Sea m la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ y sea (f_n) una sucesión de funciones medibles m -integrables de valor complejo con

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Suponga que existe una función m -integrable $g : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ con $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es m -integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n dm.$$

1.1.2 Espacios de Hilbert

Definición 1.4. Un *espacio con producto interno* es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) con una aplicación llamada *producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tal que para cualesquier $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$),

- (i) $\langle x, x \rangle > 0$ para $x \in X \setminus \{0\}$;
- (ii) $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$;
- (iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (iv) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Observación 1.3. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno.

(1) Se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

para todos $x, y \in X$, donde la igualdad se cumple si y sólo si x y y son linealmente independientes.

(2) Notemos que la fórmula $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in X$, define una norma en X , de manera que cualquier espacio con producto interno es también un espacio vectorial normado.

Definición 1.5. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto interno $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el cual es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|$ inducida por el producto interno.

Ejemplo 1.3. Ya hemos visto varios espacios de Hilbert sin conocer explícitamente el producto interno subyacente.

(1) $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) con $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ (comúnmente escrito $x \cdot y$) dando la 2-norma,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

(2) $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$, el espacio de las sucesiones cuadrado sumables en $\mathbb{C}$, con producto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ y la 2-norma

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

(3) Para el caso $p = 2$ del Ejemplo 1.2, $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \overline{g} dx,$$

el cual induce la 2-norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Notación. Igual que en el caso de normas, denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ al producto interno de X , y escribiremos simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cuando se sabe el espacio en el cual está definido éste producto interno.

1.2 Operadores lineales

En esta sección daremos una breve discusión de los operadores lineales, con el fin de tener la teoría necesaria para operadores T de un espacio de Banach X en un espacio Banach Y . Para las demostraciones y detalles, consultar [27] y [28].

Definición 1.6. (Operador lineal) Sean X, Y dos espacios vectoriales sobre un mismo campo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un *operador lineal* $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ es una aplicación que satisface que

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad T(\lambda x) = \lambda T(x),$$

para todo $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Usaremos ambas notaciones $T(x)$ y Tx para indicar la acción del operador en un elemento $x \in D(T)$ del dominio.

Definición 1.7. (Imagen y kernel) El *espacio imagen* de un operador lineal T se denota $\text{Im}(T)$, y es un subespacio de Y definido por

$$\text{Im}(T) = \{y \in Y : y = Tx \text{ para algún } x \in D(T)\}.$$

El *espacio nulo* o *kernel* de T , se denota $\ker(T)$, y es un subespacio de X definido por

$$\ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}.$$

1.2.1 Operadores lineales acotados

El siguiente resultado nos da diferentes caracterizaciones para el concepto de continuidad de un operador lineal.

Teorema 1.7. Sean X y Y dos espacios vectoriales normados y sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1) T es uniformemente continua;
- (2) T es continua;
- (3) T es continua en 0;

(4) Existe $K > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq K$ siempre que $x \in X$ y $\|x\| \leq 1$.

(5) Existe $K > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq K\|x\|$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 1.4. Sea la transformación lineal $T : C_{\mathbb{C}}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$T(f) = f(0),$$

es continua. Aquí consideramos la norma del supremo en el espacio $C_{\mathbb{C}}([0, 1])$.

Definición 1.8. Sean X y Y dos espacios vectoriales normados y sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal. Se dice que T es *acotada* si satisface una de las condiciones dadas en el teorema 1.7. El conjunto de todas las transformaciones acotadas de X a Y se denota $\mathcal{L}(X, Y)$. Los elementos de $\mathcal{L}(X, Y)$ son también llamados *operadores lineales acotados* o *operadores lineales* o simplemente *operadores*. El conjunto $\mathcal{L}(X, X)$ se denotará por $\mathcal{L}(X)$. Es claro que si X y Y son espacios vectoriales normados, $\mathcal{L}(X, Y) \subset L(X, Y)$.

Ejemplo 1.5. Sea $\mathbb{C}[x]$ el subespacio de $C_{\mathbb{C}}([0, 1])$ formado por todos los polinomios con coeficientes complejos. Si $T : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ la transformación lineal definida por

$$T(p) = p',$$

donde p' es la derivada de p , entonces T no es continua.

Lema 1.8. Sean X y Y espacios vectoriales normados. Entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es un subespacio vectorial de $L(X, Y)$ y

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\},$$

es una norma en $\mathcal{L}(X, Y)$.

Ejemplo 1.6. Si $T : C_{\mathbb{C}}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ es el operador lineal acotado definido por

$$T(f) = f(0),$$

entonces $\|T\| = 1$.

Definición 1.9. (Isometría) Sean X y Y espacios vectoriales normados y sea $T \in L(X, Y)$. Si $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$, se dice que T es una *isometría*.

Ejemplo 1.7. Si X es un espacio vectorial normado e I_X es la transformación lineal identidad en X , entonces I_X es una isometría.

Teorema 1.9. Si X es un espacio vectorial normado y Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach. En particular, si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X)$ es un espacio de Banach.

Lema 1.10. Si X, Y y Z son espacios vectoriales normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Aquí $S \circ T$ denota la composición de los operadores S y T .

Ejemplo 1.8. (Operador de translación) Para una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y $t \geq 0$, definimos

$$(T_\ell(t)f)(s) = f(s + t) \quad s \in \mathbb{R},$$

la *translación por izquierda*, mientras que

$$(T_r(t)f)(s) = f(s - t) \quad s \in \mathbb{R},$$

es la *translación por derecha*. Este operador definido en los espacios $C_b(\mathbb{R})$, $C_{ub}(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$, $C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$ y $L^p(\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_p$, es una isometría.

Definición 1.10. (Operador invertible) Sean X, Y espacios vectoriales normados. Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se dice ser *invertible* si existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tal que $ST = I_X$ y $TS = I_Y$, en tal caso S es la *inversa* de T y es denotado por T^{-1} . Aquí I_X denota el operador identidad en el espacio X .

Teorema 1.11. (Serie de Neumann) Sea X un espacio de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador con $\|T\| < 1$, entonces $I_X - T$ es invertible y la inversa está dada por

$$(I_X - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Teorema 1.12. (Principio de acotación uniforme) Sean X, Y espacios de Banach. Suponga que S es un conjunto no vacío y, para cada $s \in S$, $T_s \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si, para cada $u \in U$, el conjunto $\{\|T_s u\| : s \in S\}$ es acotada, entonces el conjunto $\{\|T_s\| : s \in S\}$ es acotado.

Corolario 1.13. Sea X, Y espacios de Banach y $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n = 1, 2, \dots$. Suponga que, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ existe, para cada $x \in X$, y defina $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. Entonces $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Para finalizar esta sección, la siguiente definición se usará más adelante.

Definición 1.11. (Operador cerrado) Un operador lineal T con dominio $D(T) \subset X$ es *cerrado* si para cualquier sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $D(T)$ con $x_k \rightarrow x$ y $Tx_k \rightarrow y$ en X para algunos $x, y \in X$, se tiene $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

1.3 Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$

En el ejemplo 1.2 definimos los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Ahora definiremos un operador lineal de gran utilidad al momento de resolver una ecuación en derivadas parciales. Para las demostraciones de estos resultados remitimos a [21], [22] y [23] citados en la Bibliografía.

1.3.1 Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definición 1.12. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función dada. Definimos la *transformada de Fourier* de f , denotada como $\mathcal{F}(f)$ o $\widehat{f}$, por:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

y su transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

donde $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

Listaremos algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En primer lugar, la transformada de Fourier es un ejemplo muy importante de operador lineal acotado.

Teorema 1.14. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

- (1) La aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ define un operador lineal continuo (acotado) de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1,$$

y la igualdad se cumple si $f \geq 0$, es decir, $\widehat{f}(0) = \|\widehat{f}\|_\infty = \|f\|_1$.

- (2) $\widehat{f}$ es continua.
 (3) $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$.
 (4) Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

- (5) Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y) dy.$$

- (6) Si $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donde x_k denota la k -ésima coordenada de x . Entonces, $\widehat{f}$ es diferenciable con respecto a ξ_k y

$$\partial_{x_k} \widehat{f}(\xi) = \widehat{(-ix_k f)}(\xi).$$

Ejemplo 1.9. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $g(x) = e^{i|x|^2 t}$ con $t > 0$. Calculemos $\widehat{g}_t$.

$$\begin{aligned}\widehat{g}_t(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x|^2 t} e^{-ix \cdot \xi} dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it(|x|^2 - x \cdot \xi/t)} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{k=1}^n [-it(x_k^2 - x_k \xi_k/t)]} dx.\end{aligned}$$

Como $e^{\sum_{k=1}^n [-it(x_k^2 - x_k \xi_k/t)]} = \prod_{k=1}^n e^{-it(x_k^2 - x_k \xi_k/t)}$, entonces debido al Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it \sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_k \xi_k/t)} dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x_k^2 - x_k \xi_k/t)} dx_k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=1}^n e^{-i\xi_k^2/4t} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x_k - \xi_k/2t)^2} dx_k.\end{aligned}$$

Basta calcular entonces el factor k -ésimo de la última igualdad, esto es

$$\begin{aligned}e^{-i\xi_k^2/4t} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x_k - \xi_k/2t)^2} dx_k &= e^{-i\xi_k^2/4t} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx_k^2} dx_k \\ &= 2e^{-i\xi_k^2/4t} \int_0^\infty e^{-itx_k^2} dx_k \\ &= 2e^{-i\xi_k^2/4t} \left(\frac{2\pi}{8it} \right)^{1/2} = e^{-i\xi_k^2/4t} \left(\frac{2\pi}{2it} \right)^{1/2},\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=1}^n e^{-i\xi_k^2/4t} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x_k - \xi_k/2t)^2} dx_k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=1}^n e^{-i\xi_k^2/4t} \left(\frac{2\pi}{2it} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{(2it)^{n/2}} e^{-i|\xi|^2/4t}.\end{aligned}$$

Como ilustraremos más adelante, la transformada de Fourier es una biyección de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en él mismo.

1.3.2 Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$

La transformada de Fourier se puede definir para funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ a través del proceso de límite. En efecto, el subconjunto $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.15. (Plancherel) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Observación 1.4. (1) Debido al Teorema 1.15 arriba, la transformada de Fourier define un operador lineal acotado de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como el espacio $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, existe una única extensión lineal acotada $\mathcal{F}$ en todo $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(2) Denotaremos $\mathcal{F}$ a la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y usaremos la notación $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(3) En general, la definición de $\widehat{f}$ se realiza como un límite en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de una sucesión cualquiera $(\widehat{h}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tomando entonces $h_k = f$ para $|x| \leq k$ y h_k anulándose en $|x| > k$. Entonces,

$$\widehat{h}_k(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \leq k} f(x) e^{-i(x \cdot \xi)} dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) e^{-i(x \cdot \xi)} dx,$$

y así,

$$\widehat{h}_k(\xi) \rightarrow \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

El Teorema 1.15 afirma que $\mathcal{F}$ es una isometría. Además de eso, $\mathcal{F}$ es sobreyectivo.

Definición 1.13. La inversa de la transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x), \quad \text{para todo } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

1.4 Espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s \geq 0$

Daremos una breve introducción a los espacios clásicos de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Los espacios de Sobolev miden la diferenciabilidad de funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y son una herramienta fundamental en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. Para las demostraciones de los resultados citados en esta sección consultar [21], [22], [25] [23].

Definición 1.14. Sea $s \geq 0$. Definimos el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ por

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + \xi^2)^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

con producto interno

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi,$$

y su respectiva norma definida por

$$\|u\|_s := \|(1 + \xi^2)^{s/2} \widehat{u}\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Observación 1.5. Sea $s \geq 0$. Entonces

- (1) $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido la Definición 1.14.
- (2) En particular $H^0(\mathbb{R}^n)$ es isomorfo vía transformada de Fourier al espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Algunas propiedades básicas las registramos a continuación.

Teorema 1.16. Sean $s, s' \geq 0$ y $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Entonces

- (1) $\|\bar{u}\|_s = \|u\|_s$.
- (2) Si $s \leq s'$, entonces $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ y $\|u\|_s \leq \|u\|_{s'}$ para cualquier $u \in H^{s'}(\mathbb{R}^n)$.
- (3) Si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ entonces $D^\alpha u \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha < s$, y se cumple la desigualdad

$$\|D^\alpha u\|_{s-\alpha} \leq \|u\|_s.$$

Teorema 1.17. Sea $s > n/2$. Entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra respecto al producto de funciones, es decir, $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y se cumple la desigualdad

$$\|uv\|_s \leq C_s \|u\|_s \|v\|_s,$$

donde $C_s > 0$ es una constante que depende de s .

En la siguiente sección, definiremos la integral de Riemann para funciones con variable real que toman valores en un espacio de Banach.

1.5 La integral de Riemann de funciones con valores vectoriales

Sea X un espacio de Banach. Denotaremos por $C([a, b], X)$ al espacio de funciones continuas $u : [a, b] \rightarrow X$. Para una función $u \in C([a, b], X)$, definimos su integral de Riemann por aproximación en el sentido de sumas de Riemann. Para $P_k = \{a = t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b\} \subset [a, b]$, sea

$$\delta(P_k) = \max\{t_{j+1} - t_j : j = 1, 2, \dots, k-1\},$$

y llamamos P_k una partición de $[a, b]$ y $\delta(P_k)$ la norma de la partición P_k . Definimos la suma de Riemann de u correspondiente a la partición P_k por

$$S(P_k, u) = \sum_{j=1}^{k-1} u(t_j)(t_{j+1} - t_j),$$

donde k es el número de elementos en P_k . De la continuidad uniforme de u en el intervalo compacto $[a, b]$ se sigue que existe $x_0 \in X$ tal que $S(P_k, u)$ converge a x_0 si $\delta(P_k) \rightarrow 0$. Con más precisión, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|S(P_k, u) - x_0\|_X < \epsilon,$$

siempre que $\delta(P_k) < \delta$. Llamaremos este $x_0 \in X$ la integral de Riemann de u y se denotará por

$$\int_a^b u(s)ds.$$

La integral de Riemann así definida disfruta de todas las propiedades usuales conocidas por las funciones de valor escalar. Algunas de ellas son recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 1.18. *Para una función continua $u : [a, b] \rightarrow X$ se cumple lo siguiente.*

- (1) *Para cualquier sucesión de particiones (P_k) con $\delta(P_k) \rightarrow 0$, la suma de Riemann $S(P_k)$ converge a la integral de Riemann de u .*
- (2) *La integral de Riemann es un operador lineal acotado del espacio $C([a, b], X)$ con valores en X .*
- (3) *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces*

$$T \int_a^b u(s)dt = \int_a^b Tu(s)ds.$$

- (4) *La función*

$$v(t) = \int_a^t u(s)ds,$$

es diferenciable con derivada u .

- (5) *Si $u : [a, b] \rightarrow X$ es continuamente diferenciable, entonces se tiene*

$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(s)ds.$$

Para la prueba de estas afirmaciones, se puede tomar el camino estándar para funciones con valores escalares.

1.6 Semigrupos de operadores lineales

Con la idea de abordar más adelante en este trabajo el problema de valor inicial (1), en esta sección analizaremos la versión abstracta de un problema de Cauchy en un espacio de Banach X , y se introdució la teoría matemática necesaria en su estudio. Para las demostraciones y el resto de detalles, consultar [20], [21] y [25].

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) + F(t, u(t)), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = f, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es un operador lineal y $F : [0, T] \times X \rightarrow X$.

Definición 1.15. (Solución clásica) Una función $u : [0, T] \rightarrow X$, es *solución clásica* de (1.5) si u es continua en $[0, T]$, continuamente diferenciable en $(0, T]$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, T]$ y u satisface (1.5) en $[0, T]$, donde la derivada de $u(t)$ en el punto t se define por el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t+h) - u(t)}{h},$$

siempre que este exista.

Denotaremos por $u := u(\cdot, f)$ a la solución clásica que satisface (1.5) para el dato inicial $f \in X$.

Definición 1.16. (Buena colocación) Decimos que (1.5) está *bien colocado* si existe una única solución clásica $u(\cdot, f)$ para cada dato inicial $f \in X$ y la aplicación $f \mapsto u(\cdot, f)$ de X en $C([0, T], X)$ es continua con respecto a la topología de X .

Notación. En lo que sigue, para abreviar la escritura en algunas partes de esta sección, denotaremos la derivada con respecto a la variable real t por “ $\dot{\cdot}$ ”, es decir, $\dot{u}(0) = \frac{d}{dt}u(t)|_{t=0}$ o $\dot{u}(t) = \frac{d}{dt}u(t)$. La derivada es por derecha y por izquierda de u en la variable real t , la denotaremos, $\frac{d^+}{dt}u(t) = \dot{u}(t^+)$ y $\frac{d^-}{dt}u(t) = \dot{u}(t^-)$ respectivamente.

1.6.1 El problema de valor inicial en dimensión finita

Para motivar la introducción de la llamada teoría de semigrupos para abordar problemas generales que se puedan poner en la forma abstracta (1.5), consideremos primero un caso especial homnógeno en el que $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz, y $F \equiv 0$, es decir,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = f. \end{cases} \quad (1.6)$$

Es bien sabido que si $f \in \mathbb{R}^n$ la única solución $u(t)$ de (1.6) está dada por

$$u(t) = e^{tA}f, \quad t \geq 0,$$

donde

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

La convergencia de la serie anterior está garantizada por el siguiente teorema:

Corolario 1.19. Para cualquier número $T \geq 0$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ converge uniformemente para todo $|t| \leq T$: es decir, para cada $T \geq 0$ y $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ y

$|t| \leq T$, entonces

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{(tA)^k}{k!} - e^{tA} \right\| < \epsilon.$$

Demostración. Este resultado se tiene por lo siguiente

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{(tA)^k}{k!} - e^{tA} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|T|^k \|A\|^k}{k!},$$

donde $m \in \mathbb{N}$, y debido a que $e^{T\|A\|}$ converge, entonces el último término de la desigualdad en la izquierda, $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|T|^k \|A\|^k}{k!} < \epsilon$ para un $N \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$. $\square$

Algunas propiedades fundamentales de la función exponencial $t \rightarrow e^{At}$ están dadas en el siguiente teorema:

Teorema 1.20. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces

- (1) $e^0 = I$.
- (2) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- (3) Si $AB = BA$, entonces $Ae^B = e^B A$ y $e^A e^B = e^B e^A$ y $e^{A+B} = e^A e^B$.

Por otro lado, consideremos el caso no homogéneo de (1.6), esto es,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) + F(t), \\ u(0) = f, \end{cases} \quad (1.7)$$

donde $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. Se tiene en este caso que la única solución del problema de valor inicial (1.7) está dada por

$$u(t) = e^{tA} f + \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds.$$

En efecto, si $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + F(t)$, entonces multiplicando por e^{-tA} a ambos lados de la igualdad se sigue que

$$e^{-tA} \frac{d}{dt}(u(t)) + e^{-tA}(-A)u(t) = \frac{d}{dt}(e^{-tA}u(t)) = e^{-tA}F(t),$$

entonces integrando de 0 a t se tiene que

$$e^{-tA}u(t) - f = \int_0^t e^{-sA}F(s)ds,$$

y despejando $u(t)$ se llega al resultado.

1.6.2 Problema de valor inicial en dimensión infinita

Semigrupos uniformemente continuos

El siguiente nivel de complejidad para el problema (1.5) con $F \equiv 0$, es cuando A es un operador lineal continuo de un espacio de Banach con dimensión infinita X en sí mismo. En este caso, aún se pueden utilizar las mismas ideas del caso de dimensión finita.

Como se observó antes, la función $S : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ definida por $S(t) = e^{tA}$ para un $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisface $\frac{d}{dt}S(t) = AS(t)$ y $S(0) = I_X$ y el conjunto $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un subgrupo conmutativo en $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$. Además la aplicación $t \mapsto S(t)$ es un homomorfismo de $(\mathbb{R}_0^+, +)$ en $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$. Lo anterior motiva la siguiente definición para el caso de un operador lineal continuo A en un espacio de Banach X .

Definición 1.17. Sea X un espacio de Banach.

(1) Una familia $(S(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados en X se llama *semigrupo (de un parámetro)* en X si se cumple itemsep

$$(i) \ S(0) = I_X.$$

$$(ii) \ S(s+t) = S(s)S(t) = S(t)S(s) \text{ para todos } s, t \geq 0.$$

(2) Un semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ en X es *uniformemente continuo* si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = I_X.$$

(3) Una familia $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ de operadores lineales acotados en X se llama *grupo (de un parámetro)* en X si cumple la condición (i) y la condición (ii) del literal (1) para todos $s, t \in \mathbb{R}$. Y si además satisface la condición del literal (2), decimos que es un *grupo (de un parámetro) uniformemente continuo* en X .

Observación 1.6. Veamos que el literal (1) de la Definición 1.17 es equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I_X\| = 0.$$

Ejemplo 1.10. (Semigrupo de Matrices) Consideremos la familia de matrices $(e^{tA})_{t \geq 0}$ donde $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostremos que esta familia de operadores acotados es un semigrupo uniformemente continuo.

(i) Es primer lugar, es inmediato que $e^{0 \cdot A} = I$.

(ii) En segundo lugar, dados $s, t \geq 0$, se sigue que $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$.

De (i) y (ii) se tiene que $(e^{tA})_{t \geq 0}$ es un semigrupo en $M_n(\mathbb{R})$. Ahora mostremos que es uniformemente continuo. Tenemos que

$$e^{(t+h)A} - e^{tA} = e^{tA}e^{hA} - e^{tA} = e^{tA}(e^{hA} - I),$$

así, es suficiente probar la continuidad en 0, la cual se sigue de

$$\|e^{hA} - I\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} = e^{|h|\|A\|} - 1.$$

Lo último es debido que $(e^{|h|\|A\|} - 1) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. De aquí que, $(e^{tA})_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo en $M_n(\mathbb{R})$. Más aún, como la ley de semigrupo se cumple en todo $\mathbb{R}$, la familia de matrices $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo uniformemente continuo en X .

Existen semigrupos que no son uniformemente continuos como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.11. (Semigrupo de Traslación) Consideremos los siguientes espacios de Banach:

$$L^\infty(\mathbb{R}), C_b(\mathbb{R}), C_{ub}(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}), C_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

todos dotados con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$ y también consideremos el espacio de Banach $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ dotado con la norma $\|\cdot\|_p$.

Si asumimos que X es cualquiera de estos espacios con su norma respectiva, la familia de operadores de translación por izquierda $(T_\ell(t))_{t \geq 0}$ en X , conforma un semigrupo en X , pero no es uniformemente continuo. En efecto,

$$(T_\ell(0)f)(x) = f(x+0) = f(x) = (If)(x),$$

para todo $f \in X$ y $x \in \mathbb{R}$. Además para $s, t \geq 0$, $f \in X$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$(T_\ell(s+t)f)(x) = f(x+(s+t)) = f((x+s)+t) = (T_\ell(t)f)(x+s),$$

pero $T_\ell(t)f \in X$, entonces por definición de $T_\ell(t)$,

$$(T_\ell(t)f)(x+s) = (T_\ell(s)T_\ell(t)f)(x),$$

y de manera similar se muestra que $(T_\ell(s+t)f)(x) = (T_\ell(t)T_\ell(s)f)(x)$. Por tanto $T_\ell(s+t) = T_\ell(s)T_\ell(t) = T_\ell(t)T_\ell(s)$ para todos $s, t \geq 0$. Más aún, como la ley de semigrupo se cumple para todos $s, t \in \mathbb{R}$, tenemos que $(T_\ell(t))_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo en X .

Por otro lado, para cada $t \in \mathbb{R}$, sabemos que el operador $T_\ell(t)$ es una isometría, así, para $s, t \geq 0$ con $s \neq 0$, se tiene que $\|T_\ell(s) - I_X\| = 2$. Luego $T_\ell(t)$ no es uniformemente continuo.

Observación 1.7. Un semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ en un espacio de Banach X puede representar un sistema dinámico lineal donde t es el parámetro “tiempo” y cada $S(t)$ mapea el “espacio de estados” del sistema en el mismo, que en este caso es X . Estas aplicaciones determinan completamente el tiempo de evolución del sistema en la siguiente manera: Si el sistema está en el estado $f \in X$ en el tiempo $t = 0$, entonces para el tiempo t está en el estado $S(t)f$. Por esta razón es conveniente llamar a la aplicación $t \mapsto S(t)f$, *órbita* de f .

Tomemos cualquier operador $A \in \mathcal{L}(X)$. Como en el caso de matrices podemos definir la función exponencial por

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \quad (1.8)$$

donde la convergencia de esta serie está en $\mathcal{L}(X)$. Usando argumentos análogos que en el caso de dimensión finita, se puede mostrar que para cada $t \geq 0$, $t \mapsto e^{tA}$ es diferenciable y satisface $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ y $e^{0 \cdot A} = I$. En resumen:

Teorema 1.21. *Para $A \in \mathcal{L}(X)$. La familia $(S(t))_{t \geq 0}$ dada por $S(t) = e^{tA}$, cumple las siguientes propiedades:*

- (1) $(S(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo en X .
- (2) Para cada $t \geq 0$ la aplicación $t \mapsto S(t) = e^{tA}$ es diferenciable y satisface

$$\dot{S}(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A \quad y \quad S(0) = I_X.$$

Recíprocamente, cualquier función $T(\cdot) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ que satisfaga $\dot{T}(t) = AT(t)$ y $T(0) = I$, es de la forma $T(t) = e^{tA}$ para algún $A \in \mathcal{L}(X)$.

El siguiente resultado establece que todo semigrupo uniformemente continuo se puede ver como la exponencial de algún operador lineal acotado A .

Teorema 1.22. *Cualquier semigrupo uniformemente continuo $(S(t))_{t \geq 0}$ en un espacio de Banach X es de la forma $S(t) = e^{tA}$ con $t \geq 0$, para algún $A \in \mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Dado que convergencia uniforme implica continuidad en $\mathcal{L}(X)$, cada $S(t)$ es continua y como $S(0) = I_X$, tenemos

$$\left\| I_X - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} S(s) ds \right\| < 1$$

para $t_0 > 0$ suficientemente pequeño, en virtud de la Proposición 1.18. Debido al Teorema 1.11 con $T = I_X - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} S(s) ds$, se tiene que el operador $\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} S(s) ds$ es invertible, y por tanto

$$V(t_0) = \int_0^{t_0} S(s) ds$$

es invertible también. Además como V es la integral de una función continua, luego ésta es diferenciable con derivada

$$\dot{V}(t) = S(t).$$

Ver Proposición 1.18(5). Esto implica que

$$\begin{aligned} S(t) &= V(t_0)^{-1}V(t_0)S(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} S(t+s)ds \\ &= V(t_0)^{-1} \int_0^{t+t_0} S(s)ds \\ &= V(t_0)^{-1}(V(t+t_0) - V(t)). \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que $S(\cdot)$ es diferenciable con derivada por derecha con

$$\dot{S}(t^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{S(h) - I_X}{h} \right) S(t) = \dot{S}(0^+)S(t) = S(t)\dot{S}(0^+),$$

y derivada por izquierda

$$\dot{S}(t^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - S(t-h)}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \frac{S(h) - I_X}{h} \right) = S(t)\dot{S}(0^+).$$

Tomando $\dot{S}(0^+) := A \in \mathcal{L}(X)$, tenemos que $\dot{S}(t) = AS(t) = S(t)A$ y $S(0) = I_X$. Luego por Teorema 1.21(2), $S(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Observación 1.8. (1) Notemos que el operador A del Teorema 1.22 está determinado de forma única como la derivada de $S(\cdot)$ en 0, es decir, $A = \dot{S}(0)$. Llamaremos a este operador A , el generador de $(S(t))_{t \geq 0}$.

(2) Como en la definición de e^{tA} funciona para cualquier $t \in \mathbb{R}$ e incluso para $t \in \mathbb{C}$, cada semigrupo uniformemente continuo se puede extender a un grupo uniformemente continuo $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ o a $(e^{tA})_{t \in \mathbb{C}}$, respectivamente.

Las propiedades antes mencionadas nos permiten resolver el problema de valor inicial (1.6) en el caso en que A es un operador lineal acotado en un espacio de Banach X .

Teorema 1.23. *Para cualesquier $f \in X$ y $A \in \mathcal{L}(X)$, el problema de valor inicial (1.6) tiene una única solución dada por $u(t) = e^{tA}f$.*

Demostración. Primero es claro de $u(t) = e^{tA}f$ con $0 \leq t \leq T$, satisface el problema de valor inicial (1.6). En efecto, del Teorema 1.21(b), como $t \mapsto e^{tA}$ es diferenciable, entonces para $f \in X$ y $0 \leq t \leq T$, u es diferenciable, con derivada

$$\dot{u}(t) = Ae^{tA}f = Au(t),$$

además $u(0) = e^{0 \cdot A}f = I_X f = f$. Supongamos que v es una solución de (1.6), y sea la función $z(t) = e^{-tA}v(t)$, entonces aplicando la regla del producto en derivadas y por Teorema 1.21(b),

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -Ae^{-tA}v(t) + e^{-tA}\dot{v}(t) \\ &= -Ae^{-tA}v(t) + e^{-tA}Av(t) = 0. \end{aligned}$$

Luego $z(t) = z(0) = f$ para $0 \leq t \leq T$, y de aquí se tiene que $v(t) = e^{tA}f$. $\square$

Semigrupos fuertemente continuos

En esta sección consideramos el problema de valor inicial homogéneo más general

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t), \\ u(0) = f, \end{cases} \quad (1.9)$$

donde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es un operador lineal (posiblemente no continuo) en el espacio de Banach X . En este caso, la serie que se usó en (1.8) no tiene sentido pues las potencias A^k no están definidas para todo k . Sin embargo, podemos definir en base a las propiedades de la exponencial antes mencionadas, el siguiente concepto extendido de un semigrupo de operadores acotados, el cual nos conducirá a la solución del problema de valor inicial (1.9).

Definición 1.18.

- (1) Una familia $(S(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados en un espacio de Banach X se llama un *semigrupo fuertemente continuo* o *C_0 -semigrupo*¹ si $(S(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo en X (ver Definición 1.17) y para todo $f \in X$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)f = f.$$

- (2) Una familia $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ de operadores lineales acotados en X se llama *grupo fuertemente continuo* o *C_0 -grupo en X* , si es un grupo en X y se satisface la condición del literal (1).

Notemos de nuevo que en el literal (1) de la Definición 1.18, $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)f = f$ es equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)f - f\|_X = 0.$$

Para C_0 -semigrupos necesitamos una definición adecuada del llamado “generador” del semigrupo. Este operador será en general lineal, pero no acotado y definido solo en un subespacio denso del espacio de Banach X .

El primer resultado que mencionaremos nos conecta nuevamente a la función exponencial: Los C_0 -semigrupos pueden crecer en norma a lo más exponencialmente.

Proposición 1.24. *Sea $(S(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semigrupo en X . Entonces existe un $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \geq 0$,*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}.$$

Demostración. Fijemos un $f \in X$, como la función $s \mapsto S(s)f$ es continua en 0, entonces existe un compacto $[0, \eta]$ tal que es acotada, es decir,

$$\sup_{s \in [0, \eta]} \|S(s)f\|_X < \infty.$$

¹El simbolo C_0 significa Cesàro sumable de orden cero, es decir, la propiedad de continuidad $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)f = f$ para todo $f \in X$.

El principio de acotación uniforme, implica que

$$M := \sup_{s \in [0, \eta]} \|S(s)\| < \infty.$$

Como $\|S(0)\|_{\text{op}} = 1$, entonces $M \geq 1$. Tomando un $t \geq 0$ arbitrario, escribimos $t = n\eta + r$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r < \eta$. De esta representación y la propiedad de semigrupo inferimos que

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(r)S(\eta)^n\| \leq M\|S(\eta)^n\| \\ &\leq M\|S(\eta)\|^n \leq M(\|S(\eta)\| + 1)^n \\ &\leq M(\|S(\eta) + 1\|)^t = Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

con $w = \ln(\|S(\eta)\| + 1)$. □

Por tanto, las órbitas de los C_0 -semigrupos son exponencialmente acotadas. La máxima cota inferior de estas cotas exponenciales juega un papel importante y será de guía para las secciones restantes.

Definición 1.19. Para un C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ su *cota de crecimiento* o su *tipo* está definida por

$$\omega_0(S) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \text{Existe } M_w \geq 1 \text{ con } \|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ para todo } t \geq 0\}.$$

Más aún, un semigrupo se llama acotado si podemos tomar $w = 0$ en 1.24, y *contractivo* si $w = 0$ y $M = 1$ se cumple. Finalmente, el semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ se llama *isométrico* si $\|S(t)f\|_X = \|f\|_X$ para todo $t \geq 0$ y $f \in X$.

Observación 1.9. Para $X = \mathbb{R}^n$ y un operador $A \in \mathcal{L}(X)$, definimos $S(t) = e^{tA}$. Este semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ es de tipo $(1, \|A\|)$, como una estimación directa de la norma

$$\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$$

lo muestra. En contraste con esto, en la situación de dimensión infinita puede suceder que el semigrupo no sea de tipo $(1, \omega)$ para todo ω , incluso $\omega_0(S) = -\infty$.

La definición de un C_0 -semigrupo combina la propiedad analítica de la continuidad fuerte y la propiedad algebraica de semigrupo. Mostraremos a continuación que estas dos propiedades se combinan de buena manera, y da algunas caracterizaciones equivalentes que permiten verificar la continuidad fuerte.

Proposición 1.25. Para un semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ en un espacio de Banach X , los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1) $(S(t))_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo.
- (2) $\lim_{s \rightarrow t} S(s)f = f$ para todos $t \geq 0$ y $f \in X$.

(3) Existe $\delta > 0$, $M \geq 1$, y un subconjunto denso $D \subset X$ tal que
itemsep

(i) $\|S(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, \delta]$.

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)f = f$ para todo $f \in D$.

Demostración.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Para la condición necesaria, fijemos $f \in X$ y sean $t, h \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} S(t+h)f - S(t)f &= S(t)(S(h)f - f), & \text{si } 0 < h, \\ S(t+h)f - S(t)f &= S(t+h)(f - S(-h)f), & \text{si } -t < h < 0. \end{aligned}$$

En resumen, para $|h| < t$ obtenemos

$$\|S(t-h)f - S(t)f\|_X \leq \|S(t-h)\| \|f - S(h)f\|_X \leq Me^{wt} \|f - S(|h|)f\|_X.$$

Luego la parte derecha de la desigualdad converge a 0 cuando $|h| \rightarrow 0$ por la continuidad en 0 por la derecha, por lo que $\lim_{h \rightarrow 0} \|S(t+h)f - S(t)f\|_X = 0$, es decir, $\lim_{s \rightarrow t} S(s)f = S(t)f$.

(3) $\Leftrightarrow$ (1) La condición necesaria es inmediata debido a la Proposición 1.24. Para mostrar la condición suficiente, suponga que $(S(t))_{\geq 0}$ es localmente acotado y fuertemente continuo en un subespacio denso $D \subset X$. Tomemos un $f \in X$ arbitrario y $(f_k) \subset D$, tal que $f_k \rightarrow f$. Dado que existe $M \geq 1$ y $\delta > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, \delta]$ y

$$\|S(t)f_k - S(t)f\|_X \leq \|S(t)\| \|f_k - f\|_D \leq M \|f_k - f\|_X,$$

luego tomando supremo en $[0, \delta]$,

$$M_k := \sup_{t \in [0, \delta]} \|S(t)f_k - S(t)f\|_X \leq M \|f_k - f\|_X,$$

y cuando $k \rightarrow \infty$, $M_k \rightarrow 0$, por lo que $S(t)f_k \rightarrow S(t)f$ uniformemente en $[0, \delta]$. Como todas las funciones en la sucesión $(S(t)f_k)$ son continuas por derecha en 0, entonces la aplicación $t \mapsto S(t)f$ es continua por derecha en 0, es decir, $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)f = f$ y como $f \in X$ es arbitrario, se sigue que $(S(t))_{\geq 0}$ es fuertemente continuo en X . $\square$

Ejemplo 1.12. El semigrupo de translación es un C_0 -semigrupo en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $1 \leq p < \infty$.

En efecto, recordemos que el semigrupo de translación es fuertemente continuo el espacio de funciones uniformemente continuas y acotadas, y que el conjunto de funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^p(\mathbb{R})$. Tomando $f \in C_c(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\text{supp}(f) \subset [\alpha, \beta]$, vemos que

$$\|f(\cdot) - f(\cdot + h)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(s) - f(s+h)|^p ds \leq (\beta - \alpha) \sup_{s \in [\alpha, \beta]} |f(s) - f(s+h)|^p,$$

que se va a cero cuando $h \rightarrow 0$ debido a la continuidad uniforme de f donde $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(s)|^p ds)^{1/p}$ para $f \in L^p(\mathbb{R})$. Ya que $\|S(t)\| \leq 1$, la afirmación se sigue de la anterior proposición.

Lema 1.26. Sea $(S(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo y un elemento $f \in X$. Para la órbita $u: t \mapsto S(t)f$, las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1) u es diferenciable en $\mathbb{R}_0^+$;
- (2) u diferenciable por derecha en 0.

Si se cumplen (1) o (2), entonces $\dot{u}(t) = S(t)\dot{u}(0)$.

Demostración. Como es claro que (2) es un caso especial de (1), solo mostraremos que (2) $\Rightarrow$ (1). Primero tenemos por la continuidad de $S(t)$ que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(S(t+h)f - S(t)f) \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(S(h)f - f) \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(u(h) - u(0)) = S(t)\dot{u}(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto u es diferenciable por derecha en $\mathbb{R}_0^+$. Para la diferenciabilidad por izquierda, para $-t \leq h < 0$, escribimos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}(S(t+h)f - S(t)f) - S(t)\dot{u}(0) \\ &= S(t+h)\left(\frac{1}{h}(f - S(-h)f) - \dot{u}(0)\right) + S(t+h)\dot{u}(0) - S(t)\dot{u}(0). \end{aligned}$$

Cuando $h \rightarrow 0^-$, el primer termino del lado derecho de la igualdad tiende a 0 por la primera parte y la acotación de $\|S(t+h)\|$ para $h \in [-t, t]$. El otro termino converge a 0 por la continuidad fuerte de S . Por tanto, u es diferenciable en $t > 0$, y para todo $t \geq 0$, su derivada es

$$\dot{u}(t) = S(t)\dot{u}(0). \quad \square$$

Definición 1.20. (Generador Infinitesimal) El *generador infinitesimal* $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ de un C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ en un espacio de Banach X es el operador

$$Af := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)f - f}{h},$$

definido para cualquier $f \in X$ en su dominio

$$D(A) = \left\{ f \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)f - f}{h} \text{ existe} \right\}. \quad (1.10)$$

El dominio $D(A)$, que es un subespacio lineal, es parte esencial del generador A . De manera estricta siempre deberíamos denotarlo por el par $(A, D(A))$, pero por conveniencia, sólo escribiremos A y asumimos implícitamente que su dominio está dado por (1.10).

Ejemplo 1.13. Consideremos los espacios de Banach del Ejemplo 1.11, y supongamos que X es cualquiera de esos espacios. Entonces la familia de operadores traslación por izquierda $(T_\ell(t))_{t \geq 0}$ en X , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(T_\ell(t)f)(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = f'(s) := (Af)(s)$$

para cualesquiera $f \in X$ y $s \in \mathbb{R}$. Entonces

$$D(A) = \{f \in X : f' \text{ existe}\}.$$

Ejemplo 1.14. (La Ecuación de Schrödinger Homogénea) Consideremos el problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger homogénea,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0) = f(x) \end{cases} \quad (1.11)$$

Hallemos el C_0 -semigrupo asociado al problema (1.11) con su respectivo generador infinitesimal. Aplicando Transformada de Fourier en (1.11) con respecto a la variable x e intercambiando la acción de $\mathcal{F}$ y ∂_t , obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -i|\xi|^2 \hat{u}, & t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0) = \hat{f}(\xi). \end{cases} \quad (1.12)$$

De esta manera, en un punto fijo $\xi \in \mathbb{R}^n$, la solución de (1.12) está dada por $\hat{u}(t, \xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$ para cualquier $t \geq 0$. Ahora tomamos transformada de Fourier inversa,

$$u(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(t, \xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi))(x).$$

Haciendo $S(t) := \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{\cdot})$ para cada $t \geq 0$, es claro que la solución toma la forma $u(t)(x) = (S(t)f)(x)$ para todos $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Probemos que $(S(t))_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, por la linealidad de la transformada de Fourier y su inversa se tiene que para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} S(t)(f + g) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f + g})(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} (\hat{f} + \hat{g}))(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \hat{f})(x) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \hat{g})(x) \\ &= (S(t)f)(x) + (S(t)g)(x). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} S(t)(\alpha f) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{\alpha f})(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \alpha \hat{f})(x) \\ &= \alpha \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \hat{f})(x) = \alpha (S(t)f)(x). \end{aligned}$$

Luego $(S(t))_{t \geq 0}$ es una familia de operadores lineales. Para mostrar que son acotados, sean $t \geq 0$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|S(t)f\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f})\|_2 = \|e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Luego $S(t)$ es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^n)$, y por tanto acotada para todo $t \geq 0$.

Ahora probemos que $(S(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(i) Para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $(S(0)f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 \cdot 0} \widehat{f})(x) = f(x) = (If)(x)$.
Luego $S(0) = I$.

(ii) Para $s, t \geq 0$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (S(s+t)f)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2(s+t)} \widehat{f})(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 s} e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f})(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 s} \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f})(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 s} \mathcal{F}(S(t)f))(x) \\ &= (S(s)S(t)f)(x). \end{aligned}$$

De (i) y (ii) se sigue que $(S(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ahora probemos que es un C_0 -semigrupo en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para $t \geq 0$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, de la definición de $S(t)$ y el Teorema de Plancherel 1.15,

$$\begin{aligned} \|S(t)f - f\|_2 &= \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f}) - f\|_2 \\ &= \|e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f} - \widehat{f}\|_2 \\ &= \|(e^{-i|\xi|^2 t} - 1) \widehat{f}\|_2. \end{aligned}$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $\|(e^{-i|\xi|^2 t} - 1) \widehat{f}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0^+$. Por tanto, $(S(t))_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Finalmente probemos que el generador infinitesimal de $(S(t))_{t \geq 0}$ es el operador $i\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(t)f - f}{t} - i\Delta f \right\|_2 &= \left\| \frac{\mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f}) - f}{t} - i\Delta f \right\|_2 \\ &= \left\| \mathcal{F} \left(\frac{\mathcal{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f}) - f}{t} - i\Delta f \right) \right\|_2 \\ &= \left\| \frac{e^{-i|\xi|^2 t} \widehat{f} - \widehat{f}}{t} + i|\xi|^2 \widehat{f} \right\|_2 \\ &= \left\| \left(\frac{e^{-i|\xi|^2 t} - 1}{t} + i|\xi|^2 \right) \widehat{f} \right\|_2. \end{aligned}$$

Luego por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $\|(\frac{e^{-i|\xi|^2 t}-1}{t} + i|\xi|^2)\widehat{f}(\xi)\|_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0^+$. Luego se sigue que si A es el generador del C_0 -semigrupo $S(t)$, entonces $A = i\Delta$.

El siguiente teorema establece que el concepto de semigrupo fuertemente continuo permite resolver el problema de valor inicial (1.9) en el caso general en que A es un operador lineal no continuo en un espacio de Banach X .

Proposición 1.27. *Para el generador infinitesimal A de un C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ en un espacio de Banach X , las siguientes propiedades se satisfacen.*

- (1) $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es un operador lineal.
- (2) Si $f \in D(A)$, entonces $S(t)f \in D(A)$ para $t > 0$, y

$$\frac{d}{dt}(S(t)f) = S(t)Af = AS(t)f \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

- (3) Para un $f \in D(A)$, el semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ proporciona una solución al problema de valor inicial (1.9) para todo $t \geq 0$, dada por $u(t) := S(t)f$.

Demostración. (1). La linealidad se sigue directamente de la definición.

(2). Dado $f \in D(A)$ y $t \geq 0$. Mostremos que $S(\cdot)f$ es diferenciable en 0, con derivada $S(t)Af$. Por la definición de Af , la continuidad fuerte de $S(t)$ y la ley de semigrupo se tiene que

$$\begin{aligned} S(t)Af &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)f - f}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)f - S(t)f}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)f - S(t)f}{h} = AS(t)f. \end{aligned}$$

- (3). Esto es simplemente la reformulación de (b) en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias. $\square$

Analizaremos ahora más aspectos teóricos sobre los generadores infinitesimales y estableceremos una generalización de la fórmula de Newton-Leibniz.

Proposición 1.28. *El generador infinitesimal A de un C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ tiene las siguientes propiedades.*

- (1) Para todo $t \geq 0$ y $f \in X$, se tiene

$$\int_0^t S(s)f ds \in D(A).$$

(2) Para cualquier $t \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} S(t)f - f &= A \int_0^t S(s)f ds, & \text{si } f \in X, \\ &= \int_0^t S(s)Af ds, & \text{si } f \in D(A). \end{aligned}$$

(3) Para todo $r, t \geq 0$ y $f \in D(A)$,

$$S(r)f - S(t)f = \int_r^t S(s)Af ds = A \int_r^t S(s)f ds.$$

Demostración. (1). Para $g := \int_0^t S(s)f ds$ calculemos el cociente diferencial

$$\begin{aligned} \frac{S(h)g - g}{h} &= \frac{1}{h} \left(S(h) \int_0^t S(s)f ds - \int_0^t S(s)f ds \right) \\ &= \int_0^t \frac{1}{h} (S(h+s)f - S(s)f) ds. \end{aligned}$$

Como el integrando es continuo, podemos tomar limite cuando $h \rightarrow 0^+$ y obtener

$$\begin{aligned} Ag &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)g - g}{h} = \\ &= \int_0^t \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (S(h+s)f - S(s)f) ds \\ &= \int_0^t \dot{u}(s) ds \\ &= u(t) - u(0) = S(t)f - f. \end{aligned}$$

De esto se deduce que $g \in D(A)$ y $Ag = S(t)f - f$.

(2). Tomemos $f \in D(A)$, por la Proposición 1.27(b), $AS(t)f = S(t)Af$ se cumple, por tanto $v(t) := AS(t)f$ define una función continua. Para $h > 0$ definamos la función $v_h(t) := \frac{1}{h}(S(h+t)f - S(t)f)$. Entonces tenemos

$$\|v_h(t) - v(t)\|_X \leq \|S(t)\| \left\| \frac{1}{h}(S(h)f - f) - Af \right\|_X.$$

De lo anterior y de la definición de A concluimos que v_h converge uniformemente en cualquier intervalo compacto. Esto produce

$$\int_0^t v_h(s) ds \rightarrow \int_0^t v(s) ds \text{ cuando } h \rightarrow 0^+.$$

En la parte (a) habíamos calculado el limite del lado izquierdo y vimos que es igual a $S(t)f - f$. Por tanto,

$$S(t)f - f = \int_0^t AS(s)f ds,$$

que completa la demostración.

(3). Sean $r, t \geq 0$ y $f \in D(A)$, por el literal la Proposición 1.27(b),

$$\frac{d}{ds}(S(s)f) = S(s)Af = AS(s)f,$$

luego integrando de r a t se tiene el resultado. $\square$

Teorema 1.29. *El generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo es un operador lineal cerrado y densamente definido que determina de manera única al semigrupo.*

Demostración. Para mostrar que A es cerrado, sea $(f_k) \subset D(A)$ una sucesión y $f, g \in X$ tal que $f_k \rightarrow f$ y $Af_k \rightarrow g$. Tenemos que mostrar que $f \in D(A)$ y $Af = g$. Para $t > 0$,

$$S(t)f_k - f_k = \int_0^t S(s)Af_k ds,$$

en virtud de la Proposición 1.28. Si hacemos $u_k(s) := S(s)Af_k$ y $u(s) := S(s)g$, entonces $u_k \rightarrow u$ uniformemente en $[0, t]$ porque el semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ es localmente acotado, de esta manera pasando al limite en la identidad, tenemos

$$S(t)f - f = \int_0^t S(s)g ds.$$

De esto deducimos que la función $t \mapsto S(t)f$ es diferenciable en 0 con derivada $\dot{S}(0) = g$. Esto significa precisamente que $f \in D(A)$ y $Af = g$, que implica que A es cerrado.

Ahora mostremos que $D(A)$ es denso en X . Sea $f \in X$ arbitrario y definamos

$$v(t) := \frac{1}{t} \int_0^t S(s)f ds, \quad t > 0.$$

Por Proposición 1.28, tenemos que $v(t) \in D(A)$. Como la función $s \mapsto S(s)f$ es continua, tenemos que $v(t) \rightarrow S(0)f$ cuando $t \rightarrow 0^+$.

Suponga que $(T(t))_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo con el mismo generador infinitesimal A de $(S(t))_{t \geq 0}$. Sea $f \in D(A)$ y $t > 0$ fijo, y consideremos la función $u : [0, t] \rightarrow X$ dada por $u(s) := S(t-s)T(s)f$. Entonces u es diferenciable y su derivada está dada por la regla del producto:

$$\begin{aligned} \frac{du(s)}{ds} &= \left(\frac{d}{ds} S(t-s) \right) T(s)f + S(t-s) \frac{d}{ds} (T(s)f) \\ &= -AS(t-s)T(s)f + S(t-s)AT(s)f. \end{aligned}$$

Recordando que el semigrupo y su generador conmutan en $D(A)$, ver la Proposición 1.27(b), obtenemos que el término del lado derecho es 0, así que u debe ser idénticamente a una constante. Esto implica que

$$T(t)f = u(t) = u(0) = S(t)f.$$

es decir, los operadores lineales acotados $T(t)$ y $S(t)$ coinciden en el subespacio denso $D(A)$, por tanto ellos deben ser iguales en todo X . $\square$

Concluimos esta sección con la propiedad más importante del generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo desde el punto de vista de las aplicaciones. El problema abstracto de Cauchy (1.9) está bien colocado.

Teorema 1.30. *Un operador lineal A en un espacio de Banach genera al C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ si y sólo si el problema abstracto de Cauchy (1.9) está bien colocado.*

Demostración. Si A es el generador infinitesimal del C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$, entonces la buena colocación del problema abstracto de Cauchy (1.9), se sigue del Teorema 1.29 y la Proposición 1.27.

Recíprocamente, sea el problema abstracto de Cauchy (1.9) bien colocado. Usando la solución clásica $u = u(\cdot, f)$, donde $f \in D(A)$, para cualquier $t \geq 0$, definimos

$$S(t)f := u(t, f).$$

Observe que todos los $S(t)$ son operadores acotados en X . Su linealidad es una consecuencia de la linealidad de A y la unicidad de u . Puesto que $S(0)f = u(0, f) = f$ y por la unicidad de la solución tenemos

$$S(t+s)f = u(t+s, f) = u(t, u(s, f)) = S(t)S(s)f$$

para cualquier $f \in D(A)$ y $s, t \geq 0$. Por lo tanto $(S(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo en X .

Además, $\|S(t)\|$ es uniformemente acotada en cualquier compacto $[0, \tau]$. De lo contrario, existiría una sucesión $(t_k) \subset [0, \tau]$ con $\|S(t_k)\| \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ y podríamos escoger una sucesión $(f_k) \in D(A)$ convergiendo a 0 tal que

$$\|u(t_k, f_k)\| = \|S(t_k)f_k\| \geq 1,$$

que contradice las hipótesis de u .

Como $t \mapsto S(t)f$ es una aplicación continua para cualquier f en el conjunto denso $D(A)$, la Proposición 1.25(c) implica que $(S(t))_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo en X . Denotemos su generador por B . Los operadores A y B son ambos cerrados, y coinciden en sus dominios, siendo éste el conjunto denso $D(A)$, por tanto son iguales. $\square$

Ya estamos en capacidad de resolver el problema de valor inicial no lineal, no homogéneo dado por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) + F(t, u(t)), & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = f, \end{cases} \quad (1.13)$$

donde la aplicación $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es lineal definida en un dominio denso $D(A)$, $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ y $u : [0, T] \rightarrow X$.

Proposición 1.31. *Sea $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ continua en X , si $u \in C([0, T], X)$ satisface el problema de valor inicial (1.13), entonces u satisface la formulación integral,*

$$u(t) = S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(s, u(s))ds.$$

Demostración. Sea $(S(t))_{t \geq 0}$ el C_0 -semigrupo generado por A y sea $u \in C([0, T], X)$ una solución de (1.13). Entonces la función $g(s) = S(t-s)u(s)$ es diferenciable para $0 < s < t$ y se tiene

$$\begin{aligned} \dot{g}(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)\dot{u}(s) \\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)Au(s) + S(t-s)F(t, u(s)) \\ &= S(t-s)F(t, u(s)), \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se uso la regla del producto en derivadas, el hecho de que $u(t) \in D(A)$ y la Proposición 1.27(b), la segunda igualdad por la definición de $\dot{u}(s)$ y la tercera igualdad de nuevo por Proposición 1.27(b).

Como F es continua, entonces $S(t-s)F(u(s))$ es integrable e integrando lo anterior se tiene que

$$\int_0^t S(t-s)u(s)ds = S(0)u(t) - S(t)u(0) = u(t) - S(t)f = \int_0^t S(t-s)F(s, u(s))ds,$$

lo que es equivalente a

$$u(t) = S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(s, u(s))ds,$$

como se quería. □

Definición 1.21. (Solución integral) Sean A el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ en X , $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ continua en X y $f \in X$. Una función $u \in C([0, T], X)$ que satisface la ecuación

$$u(t) = S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(s, u(s))ds, \quad (1.14)$$

se llama una *solución integral* del problema del valor inicial (1.13) en $[0, T]$.

Teorema 1.32. *Sea X un espacio de Banach, $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ una función continua, localmente Lipschitz en la segunda variable y A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$. Entonces dado $f \in X$, existe $T^* \leq \infty$ tal que el problema de valor inicial (1.13) admite una única solución integral $u : [0, T^*] \rightarrow X$.*

Demostración. Mostremos que (1.13) admite una única solución integral u , esto es, existe u que satisface (1.14). Consideremos un intervalo arbitrario $[0, \eta] \subset [0, T]$, tal que $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ en la bola cerrada

$$\overline{B_K(w)} = \{u \in C([0, \eta], X) : \|u - w\|_\infty \leq K, \forall t \in [0, \eta]\},$$

donde $w(t) = S(t)f$ para todo $t \in [0, \eta]$, es Lipschitz.

De modo que,

$$\|F(t, u) - F(t, v)\|_X \leq L\|u - v\|_X,$$

para cualquiera $u, v \in X$ con $\|u - w\| \leq K$, $\|v - w\| \leq K$, $0 \leq t \leq T$ y L es la constante de Lipschitz. Consideremos también la aplicación $\Phi : C([0, \eta], X) \rightarrow C([0, \eta], X)$ definida por

$$\Phi[u](t) = S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(s, u(s))ds, \quad 0 \leq t \leq \eta.$$

Observemos que Φ aplica la bola $B_K(w) \subset C([0, \eta], X)$ en ella misma. En efecto, para $u \in \overline{B_K(w)}$, $N = \sup_{0 \leq t \leq T} \|F(t, w(t))\|_X$ y $\eta \leq \frac{2\|f\|_X}{LK+N}$,

$$\begin{aligned} \|\Phi[u](t) - w(t)\|_X &\leq \int_0^t \|S(t-s)\|_{\text{op}} \|F(s, u(s))\|_X ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \{\|S(t)\|_{\text{op}}\} (LK + N)\eta, \\ &\leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \{\|S(t)\|_{\text{op}}\} \|f\|_X := K. \end{aligned}$$

Veamos ahora que Φ posee un único punto fijo en esta bola. Se puede comprobar por la definición de Φ que

$$\begin{aligned} \|\Phi[u](t) - \Phi[v](t)\|_X &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \{\|S(t)\|_{\text{op}}\} L\eta \sup_{0 \leq t \leq \eta} \{\|u(t) - v(t)\|_X\}, \\ &\leq \frac{KL}{2(LK + N)} \sup_{0 \leq t \leq \delta} \{\|u(t) - v(t)\|_X\}, \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq \eta} \{\|u(t) - v(t)\|_X\}, \end{aligned}$$

de modo que Φ es una contracción. Se sigue del Teorema de punto fijo de Banach la existencia de un único punto fijo de Φ que es además la solución suave de (1.13) en el intervalo $[0, \eta]$.

Demostremos finalmente la unicidad. Supongamos que $u(t)$ y $v(t)$ son dos soluciones integrales de (1.13). Entonces en cualquier intervalo cerrado $[0, \tau]$, en el que ambas soluciones

existan se cumple

$$\begin{aligned}\|u(t) - v(t)\|_X &\leq \int_0^t \|S(t)\|_{\text{op}} \|F(s, u(s)) - F(s, v(s))\|_X ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \{\|S(t)\|_{\text{op}}\} L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds.\end{aligned}$$

Una aplicación de la desigualdad de Gronwall (Ver Teorema 2.8 en el capítulo 2), nos permite concluir que $u(t) = v(t)$ para todo $0 \leq t \leq \tau$. $\square$

Capítulo 2

Existencia y unicidad local

Luego de haber presentado los fundamentos de la teoría de semigrupos, en este capítulo aplicaremos esta teoría matemática al estudio de la existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial asociado al sistema (1) formulado en la introducción, esto es,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi_+}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_+ + (c_0 - c_2)|\Phi_-|^2\Phi_+ + c_2\overline{\Phi_-}\Phi_0^2, \\ i\hbar \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2)\Phi_0 + c_0|\Phi_0|^2\Phi_0 + 2c_2\overline{\Phi_0}\Phi_+\Phi_-, \\ i\hbar \frac{\partial \Phi_-}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(|\Phi_-|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_- + (c_0 - c_2)|\Phi_+|^2\Phi_- + c_2\overline{\Phi_+}\Phi_0^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

sujeito a las condiciones iniciales

$$\Phi_+(x, 0) = \phi_1(x), \quad \Phi_0(x, 0) = \phi_2(x), \quad \Phi_-(x, 0) = \phi_3(x),$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\Phi_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ y $\overline{\Phi_j(x, t)}$ denota el conjugado complejo de $\Phi_j(x, t)$ para $j = +, 0, -$, y $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ para $k = 1, 2, 3$. Al hacer el siguiente cambio de coordenadas $t \mapsto (1/\hbar)t$ y de $x \mapsto (\sqrt{2m}/\hbar)x$ y reescribir las funciones por $\Phi_+ = u_1$, $\Phi_0 = u_2$ y $\Phi_- = u_3$, obtenemos el nuevo sistema reescalado

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= i \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - i(c_0 + c_2)(|u_1|^2 + |u_2|^2)u_1 - i(c_0 - c_2)|u_3|^2u_1 - ic_2\overline{u_3}u_2^2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= i \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - i(c_0 + c_2)(|u_1|^2 + |u_3|^2)u_2 - ic_0|u_2|^2u_2 - i2c_2\overline{u_2}u_1u_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= i \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - i(c_0 + c_2)(|u_3|^2 + |u_2|^2)u_3 - i(c_0 - c_2)|u_1|^2u_3 - ic_2\overline{u_1}u_2^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_2(x, 0) = f_2(x), \quad u_3 = f_3(x),$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$.

Una observación muy importante es que el problema (2.1) se puede escribir en la forma de problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU + F(U), & 0 \leq t \leq T, \\ U(0) = f, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde,

$$U = (u_1, u_2, u_3)^T, \quad U(0) = f = (f_1, f_2, f_3)^T, \quad A = \begin{pmatrix} i \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & i \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix},$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} -i(c_0 + c_2)(|u_1|^2 + |u_2|^2)u_1 - i(c_0 - c_2)|u_3|^2u_1 - ic_2\overline{u_3}u_2^2 \\ -i(c_0 + c_2)(|u_1|^2 + |u_3|^2)u_2 - ic_0|u_2|^2u_2 - i2c_2\overline{u_2}u_1u_3 \\ -i(c_0 + c_2)(|u_3|^2 + |u_2|^2)u_3 - i(c_0 - c_2)|u_1|^2u_3 - ic_2\overline{u_1}u_2^2 \end{pmatrix}.$$

Para $s \geq 0$, definamos los espacios

$$\mathbf{H}^s(\mathbb{R}) := H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}), \quad \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}),$$

con las normas respectivas

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{H}^s} = \|x_1\|_s + \|x_2\|_s + \|x_3\|_s, \quad \|x\|_{\mathbf{L}^2} = \|x_1\|_2 + \|x_2\|_2 + \|x_3\|_2,$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$. Entonces es claro que $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ y $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ son espacios de Banach debido a la Proposición 1.1.

Con estas convenciones podemos aplicar resultados en los espacios de Sobolev, transformada de Fourier y teoría de semigrupos vistos en el capítulo 1, para estudiar el problema no lineal (2.2).

2.1 El problema lineal

Para resolver el problema no lineal completo (2.3) se debe estudiar en primer lugar la parte lineal asociada al sistema. Analicemos entonces el problema lineal

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ U(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Tomando la transformada de Fourier en (2.4) con respecto a la variable x e intercambiando la acción de $\widehat{\cdot}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$, obtenemos

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{U}}{dt} &= \widehat{A}\widehat{U}, & \xi \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \widehat{U}(\xi, 0) &= \widehat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde

$$\widehat{U} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \widehat{u}_3)^T, \quad \widehat{U}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) = (\widehat{f}_1(\xi), \widehat{f}_2(\xi), \widehat{f}_3(\xi))^T, \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} -i\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & -i\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\xi^2 \end{pmatrix}.$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en cada punto ξ , su solución está dada por

$$\widehat{U}(\xi, t) = e^{t\widehat{A}}\widehat{f}(\xi), \quad t \geq 0.$$

Pero

$$e^{t\widehat{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \widehat{A}^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^{-i\xi^2 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\xi^2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\xi^2 t} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Entonces

$$\widehat{U}(\xi, t) = e^{-i\xi^2 t} \widehat{f}(\xi), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Para recuperar la función desconocida U , tomamos la transformada de Fourier inversa de (2.6),

$$U(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{U}(\xi, t) \right) (x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{f}(\xi) \right) (x) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{f}_1(\xi) \right) (x) \\ \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{f}_2(\xi) \right) (x) \\ \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{f}_3(\xi) \right) (x) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Esta aplicación U escrita en términos de las aplicaciones $\mathcal{F}^{-1}$ y $\mathcal{F}$ y es suficiente para mostrar la existencia y unicidad de (2.4), y consecuentemente la formulación local de (2.3). Sin embargo para fines de experimentos numéricos calculemos su formula explícita.

Debido al Teorema 1.12, $\mathcal{F}^{-1}$ aplica a productos de convolución, así para $j = 1, 2, 3$

$$\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{f}_j(\xi) \right) (x) = (2\pi)^{-1/2} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \right) * \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{f}_j(\xi) \right) (x).$$

Del Ejemplo 1.9, tenemos que

$$\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \right) (x) = (2it)^{-1/2} e^{i\frac{x^2}{4t}}.$$

Luego

$$\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{f_j}(\xi) \right) (x) = (4\pi it)^{-1/2} e^{i\frac{x^2}{4t}} * f_j(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}} f_j(y) dy.$$

Haciendo

$$g_t(x) := (4\pi it)^{-1/2} e^{i\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0.$$

La aplicación U está dada de forma explícita por

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} (g_t * f_1)(x) \\ (g_t * f_2)(x) \\ (g_t * f_3)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4\pi it)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}} f_1(y) dy \\ (4\pi it)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}} f_2(y) dy \\ (4\pi it)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}} f_3(y) dy \end{pmatrix} = \frac{1}{(4\pi it)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy, \quad (2.7)$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Para mostrar que U es solución de (2.4), definamos la aplicación

$$S(t)f := \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{u}(\cdot) \right) = \begin{pmatrix} g_t * f_1 \\ g_t * f_2 \\ g_t * f_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(4\pi it)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{(\cdot-y)^2}{4t}} f(y) dy,$$

para cada $t > 0$ y $S(0)f := f$ con $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Con esto notemos que para $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, podemos reescribir a U por

$$U(x, t) = (S(t)f)(x). \quad (2.8)$$

Aunque definimos la aplicación $S(t)$ para $t \geq 0$, en realidad ésta queda bien definida para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Más aún, $S(t)$ es un operador lineal unitario en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ es un operador lineal acotado del espacio $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ en el mismo, tal que $\|S(t)\| \leq 1$.*

Demostración. Sean $t \geq 0$ y $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Puesto que $g_t \in L^1(\mathbb{R})$, entonces de la desigualdad de Young, para cada $j = 1, 2, 3$, la convolución $g_t * f_j$ existe y

$$\begin{aligned} \|g_t * f_j\|_2 &\leq \|g_t\|_1 \|f_j\|_2 \\ &\leq \|f_j\|_2. \end{aligned}$$

En particular $g_t * f_j \in L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $S(t)f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Mostremos que $S(t)$ es lineal. En efecto, para cualesquiera $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 S(t)(\lambda f + \mu g) &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{\lambda f + \mu g}(\cdot) \right), \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} (\widehat{\lambda f}(\cdot) + \widehat{\mu g}(\cdot)) \right) \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{\lambda f}(\cdot) + e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{\mu g}(\cdot) \right), \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left(\lambda e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f}(\cdot) \right) + \mathcal{F}^{-1} \left(\mu e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{g}(\cdot) \right), \\
 &= \lambda \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f}(\cdot) \right) + \mu \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{g}(\cdot) \right), \\
 &= \lambda S(t)f + \mu S(t)g.
 \end{aligned}$$

En lo anterior, la segunda y cuarta igualdad se dan por la linealidad de los operadores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$, respectivamente, y la cuarta y quinta igualdad por la homogeneidad de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$, respectivamente. Además, si $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
 \|S(t)f\|_{\mathbf{L}^2} &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f_1}(\cdot) \right) \right\|_2 + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f_2}(\cdot) \right) \right\|_2 + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f_3}(\cdot) \right) \right\|_2, \\
 &= \left\| e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f_1}(\cdot) \right\|_2 + \left\| e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f_2}(\cdot) \right\|_2 + \left\| e^{-i(\cdot)^2 t} \widehat{f_3}(\cdot) \right\|_2, \\
 &= \left\| \widehat{f_1} \right\|_2 + \left\| \widehat{f_2} \right\|_2 + \left\| \widehat{f_3} \right\|_2, \\
 &= \|f_1\|_2 + \|f_2\|_2 + \|f_3\|_2 \\
 &= \|f\|_{\mathbf{L}^2},
 \end{aligned}$$

donde la segunda y la cuarta igualdad es por la identidad de Plancherel (Teorema 1.15), y la tercera igualdad es por ser $|e^{i\xi^2 t}|^2 = 1$. De aquí que $S(t)$ sea una isometría y por lo tanto que $\|S(t)\| = 1$. $\square$

Teorema 2.2. *La familia de operadores lineales acotados $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ es un C_0 -grupo contractivo en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Sea $s \geq 2$. Su generador infinitesimal A es un operador lineal de $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ en $\mathbf{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ que está dado por*

$$\begin{aligned}
 D(A) &:= \mathbf{H}^s(\mathbb{R}), \\
 Af &:= i\partial_x^2 f = (i\partial_x^2 f_1, i\partial_x^2 f_2, i\partial_x^2 f_3)^T,
 \end{aligned}$$

para $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$, donde $\partial_x^2 f_k$ es la segunda derivada en x en el sentido de distribuciones para $k = 1, 2, 3$.

Demostración. De acuerdo a la Proposición 2.1, la familia $(S(t))_{t \geq 0}$ es una familia de operadores lineales acotados. Mostremos que $(S(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo en $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$.

(i) Sea $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Por definición, $S(0)f = f = If$, luego $S(0) = I$.

(ii) Sean $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ y $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S(s+t)f &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2(s+t)} \widehat{f}(\cdot) \right), \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2s} (e^{-i(\cdot)^2t} \widehat{f}(\cdot)) \right), \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2s} \widehat{S(t)f}(\cdot) \right), \\ &= S(s)(S(t)f), \\ &= S(s)S(t)f. \end{aligned}$$

De este modo de (i) y (ii) tenemos que $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Ahora probemos que es un C_0 -grupo en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, es decir, mostremos que la aplicación $t \mapsto S(t)u$ para todo $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, es continua en 0. Para cualquier $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)f - f\|_{\mathbf{L}^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2t} \widehat{f}(\cdot) \right) - f \right\|_{\mathbf{L}^2},$$

pero $\left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2t} \widehat{f}(\cdot) \right) - f \right\|_{\mathbf{L}^2}$ es igual a

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2t} \widehat{f}_1(\cdot) \right) - f_1 \right\|_2 + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2t} \widehat{f}_2(\cdot) \right) - f_2 \right\|_2 + \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2t} \widehat{f}_3(\cdot) \right) - f_3 \right\|_2,$$

entonces para $k = 1, 2, 3$,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2t} \widehat{f}_k(\cdot) \right) - f_k \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |(e^{-i\xi^2t} - 1) \widehat{f}_k(\xi)|^2 d\xi.$$

Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} h(\xi, t) &:= |(e^{-i\xi^2t} - 1) \widehat{f}_k(\xi)|^2, \\ &= (|e^{-i\xi^2t}| + |1|)^2 |\widehat{f}_k(\xi)|^2, \\ &\leq 4 |\widehat{f}_k(\xi)|^2 := g(\xi), \end{aligned}$$

para $\xi \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Entonces $g(\xi) \geq 0$ para $\xi \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} g(\xi) d\xi = 4 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}_k(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}_k\|_2^2 = \|f_k\|_2^2 < \infty$. Consideremos una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que $t_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además $t \mapsto h(\xi, t)$ es continua para todo $t \in \mathbb{R}$ y es claro que $\xi \mapsto h(\xi, t)$ es integrable. Del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 1.6) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h(\xi, t_n) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} h(\xi, t_n) d\xi = \int_{\mathbb{R}} h(\xi, 0) d\xi = 0,$$

probando la continuidad de $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(\xi, t) d\xi$ en $t = 0$, esto es,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |(e^{-i\xi^2t} - 1) \widehat{f}_j(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Así, concluimos que $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)f - f\|_{\mathbf{H}^s} = 0$. Ahora mostremos que el operador A definido por $D(A) = \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ y $Af = i\partial_x^2 f$ para $f \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$, es el generador infinitesimal de $(S(t))_{t \geq 0}$. Para cualquier $f = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ y $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(h)f - f}{h} - i\frac{\partial^2}{\partial x^2} f \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} &= \left\| \frac{\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 h} \widehat{f}(\cdot) \right) - f}{f} - i\frac{\partial^2}{\partial x^2} f \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left\| \frac{\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i(\cdot)^2 h} \widehat{f}_k(\cdot) \right) - f_k}{h} - i\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_k \right\|_{s-2} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{s-2} \left| \frac{e^{-i\xi^2 h} \widehat{f}_k(\xi) - \widehat{f}_k(\xi)}{h} + i\xi^2 \widehat{f}_k(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{s-2} \left| \left(\frac{e^{-i\xi^2 h} - 1}{h} + i\xi^2 \right) \widehat{f}_k(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Con $\alpha(\xi, h) := e^{-i\xi^2 h}$, $h \neq 0$ y $\xi \in \mathbb{R}$ fijo,

$$\left| \frac{\alpha(\xi, h) - \alpha(\xi, 0)}{h} \right| = \left| \frac{e^{-i\xi^2 h} - 1}{h} \right| \leq \sup_{h \neq 0} |\alpha'(\xi, h)| = \xi^2.$$

De manera que

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, h) &:= (1 + \xi^2)^{s-2} \left| \left(\frac{e^{-i\xi^2 h} - 1}{h} + i\xi^2 \right) \widehat{f}_k(\xi) \right|^2, \\ &\leq (1 + \xi^2)^{s-2} (2\xi^2)^2 |\widehat{f}_k(\xi)|^2, \\ &\leq 4(1 + \xi^2)^{s-2} (1 + \xi^2)^2 |\widehat{f}_k(\xi)|^2, \\ &\leq 4(1 + \xi^2)^s |\widehat{f}_k(\xi)|^2 := \beta(\xi). \end{aligned}$$

Como $\beta(\xi) \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \beta(\xi) d\xi = 4\|f_k\|_s^2 < \infty$. Mostremos la continuidad de $h \mapsto \varphi(\xi, h)$ en $h = 0$. Sea $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que $h_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 1.6),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi, h_n) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi, h_n) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi, 0) d\xi = 0.$$

De manera que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi, h) d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{s-2} \left| \left(\frac{e^{-i\xi^2 h} - 1}{h} + i\xi^2 \right) \widehat{f}_k(\xi) \right|^2 d\xi = 0.$$

Como es para cada $k = 1, 2, 3$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(h)f - f}{h} - i \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} = 0. \quad \square$$

Teorema 2.3. *El sistema (2.4) tiene solución única, es decir, la función U definida por la fórmula (2.8) es la única que cumple*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} = 0.$$

Demostración. Sean $t \geq 0$ y $h > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} &= \left\| \frac{S(t+h)f - S(t)f}{h} - AS(t)f \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}}, \\ &= \left\| \frac{S(t)(S(h)f - f)}{h} - S(t)Af \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}}, \\ &\leq \|S(t)\| \left\| \frac{S(h)f - f}{h} - Af \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}}, \\ &\leq \left\| \frac{S(h)f - f}{h} - Af \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad por la ley de semigrupo y la última desigualdad por ser $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}))} \leq 1$. Puesto que del Lema 2.2 anterior, tenemos que

$$\left\| \frac{S(h)f - f}{h} - Af \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \rightarrow 0,$$

cuando $h \rightarrow 0$. Obtenemos que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} = 0. \quad \square$$

2.2 El problema no lineal

Recordemos que la aplicación F en (2.3) está dada por

$$F(U) = \begin{pmatrix} -i(c_0 + c_2)(|u_1|^2 + |u_2|^2)u_1 - i(c_0 - c_2)|u_3|^2u_1 - ic_2\overline{u_3}u_2^2 \\ -i(c_0 + c_2)(|u_1|^2 + |u_3|^2)u_2 - ic_0|u_2|^2u_2 - i2c_2\overline{u_2}u_1u_3 \\ -i(c_0 + c_2)(|u_3|^2 + |u_2|^2)u_3 - i(c_0 - c_2)|u_1|^2u_3 - ic_2\overline{u_1}u_2^2 \end{pmatrix},$$

Lema 2.4. *Si $s > 1/2$, entonces $F : \mathbf{H}^s(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ y $U, V \in C([0, T], \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$, entonces*

$$\|F(U) - F(V)\|_{\mathbf{H}^s} \leq L \|U - V\|_{\mathbf{H}^s},$$

donde $L = L(\|U\|_{\mathbf{H}^s}, \|V\|_{\mathbf{H}^s})$.

Demostración. Sean $U = (u_1, u_2, u_3)^T, V = (v_1, v_2, v_3)^T$ en $C([0, T], \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ y $M = \max\{|c_0 + c_2|, 2|c_2|, |c_2|\}$. Denotando $|U|^2 := \sum_{j=1}^3 \|u_j\|_s^2$ y $|V|^2 := \sum_{j=1}^3 \|v_j\|_s^2$, entonces

$$\begin{aligned}
& \|F(U) - F(V)\|_{\mathbf{H}^s} \\
&= \left\| -i(c_0 + c_2)(|U|^2 u_1 - |V|^2 v_1) - i2c_2(|v_3|^2 v_1 - |u_3|^2 u_1) - ic_2(\overline{u_3} u_2^2 - \overline{v_3} v_2^2) \right\|_s \\
&\quad + \left\| -i(c_0 + c_2)(|U|^2 u_2 - |V|^2 v_2) - i2c_2(\overline{u_2} u_1 u_3 - \overline{v_2} v_1 v_3) - ic_2(|v_2|^2 v_2 - |u_2|^2 u_2) \right\|_s \\
&\quad + \left\| -i(c_0 + c_2)(|U|^2 u_3 - |V|^2 v_3) - i2c_2(|v_1|^2 v_3 - |u_1|^2 u_3) - ic_2(\overline{u_1} u_2^2 - \overline{v_1} v_2^2) \right\|_s \\
&\leq |c_0 + c_2| \left\| |U|^2(u_1 - v_1) + (|U|^2 - |V|^2)v_1 \right\|_s + 2|c_2| \left\| |v_1|^2(v_1 - u_1) + (|v_3|^2 - |u_3|^2)u_1 \right\|_s \\
&\quad + |c_2| \left\| u_2^2(\overline{u_3} - \overline{v_3}) + (u_2^2 - v_2^2)\overline{v_3} \right\|_s \\
&\quad + |c_0 + c_2| \left\| |U|^2(u_2 - v_2) + (|U|^2 - |V|^2)v_2 \right\|_s + 2|c_2| \left\| u_1 u_3(\overline{u_2} - \overline{v_2}) + (u_1 u_3 - v_1 v_3)\overline{v_2} \right\|_s \\
&\quad + |c_2| \left\| |v_2|^2(v_2 - u_2) + (|v_2|^2 - |u_2|^2)u_2 \right\|_s \\
&\quad + |c_0 + c_2| \left\| |U|^2(u_3 - v_3) + (|U|^2 - |V|^2)v_3 \right\|_s + 2|c_2| \left\| |v_3|^2(v_3 - u_3) + (|v_1|^2 - |u_1|^2)u_3 \right\|_s \\
&\quad + |c_2| \left\| u_2^2(\overline{u_1} - \overline{v_1}) + (u_2^2 - v_2^2)\overline{v_1} \right\|_s \\
&\leq |c_0 + c_2| \sum_{j=1}^3 (\|u_j\|_s^2 + \|u_j\|_s \|v_j\|_s + \|v_j\|_s^2) \|U - V\|_{\mathbf{H}^s} \\
&\quad + 2|c_2| (\|v_3\|_s^2 + \|u_3\|_s \|u_1\|_s + \|v_1\|_s^2 + (\|v_3\|_s + \|u_3\|_s)(\|u_1\|_s + \|v_2\|_s)) \\
&\quad + (\|v_1\|_s + \|u_1\|_s) \|u_3\|_s \|U - V\|_{\mathbf{H}^s} \\
&\quad + |c_2| (4\|u_2\|_s^2 + (\|u_2\|_s + \|v_2\|_s)(\|v_3\|_s + \|v_1\|_s) + \|u_2\|_s \|v_2\|_s) \|U - V\|_{\mathbf{H}^s} \\
&\leq M ((\|u_1\|_s + \|u_2\|_s + \|u_3\|_s)^2 + (\|u_1\|_s + \|u_2\|_s + \|u_3\|_s)(\|v_1\|_s + \|v_2\|_s + \|v_3\|_s) \\
&\quad + (\|v_1\|_s + \|v_2\|_s + \|v_3\|_s)^2) \|U - V\|_{\mathbf{H}^s} \\
&= M (\|U\|_{\mathbf{H}^s}^2 + \|U\|_{\mathbf{H}^s} \|V\|_{\mathbf{H}^s} + \|V\|_{\mathbf{H}^s}^2) \|U - V\|_{\mathbf{H}^s}
\end{aligned}$$

Si definimos

$$L(\|U\|_{\mathbf{H}^s}, \|V\|_{\mathbf{H}^s}) := M(\|U\|_{\mathbf{H}^s}^2 + \|U\|_{\mathbf{H}^s} \|V\|_{\mathbf{H}^s} + \|V\|_{\mathbf{H}^s}^2).$$

obtenemos que

$$\|F(U) - F(V)\|_{\mathbf{H}^s} \leq L(\|U\|_{\mathbf{H}^s}, \|V\|_{\mathbf{H}^s}) \|U - V\|_{\mathbf{H}^s}.$$

□

Teorema 2.5. Sea $s > 1/2$. Si $U \in C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ es una solución de (2.3), entonces U es una solución de la ecuación integral

$$U(t) = S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds. \quad (2.9)$$

Recíprocamente, si $U \in C([0, T], \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ es una solución de (2.9), entonces $U \in C^1([0, T], \mathbf{H}^{s-2}(\mathbb{R}))$ es una solución de (2.3), en el sentido

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) - F(U(t)) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} = 0. \quad (2.10)$$

Demostración. Consideremos $U \in C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ una solución de (2.9). Entonces la función $\gamma(s) = S(t-s)U(s)$ es diferenciable en $0 \leq s \leq t$ y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\gamma(s)) &= \frac{d}{ds}(S(t-s))U(s) + S(t-s)\frac{d}{ds}(U(s)) \\ &= -AS(t-s)U(s) + S(t-s)(AU(s) + F(U(s))) \\ &= -AS(t-s)U(s) + S(t-s)AU(s) + S(t-s)F(U(s)) \\ &= S(t-s)F(U(s)), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es debido a la regla del producto en derivadas, el hecho que $U(s) \in D(A)$ y por ser $\frac{d}{ds}(S(s)f) = S(s)Af = AS(s)f$ para $s \geq 0$; la segunda igualdad por la definición de $\frac{d}{ds}(U(s))$; y la tercera igualdad de nuevo por $S(t-s)Af = AS(t-s)f$ para $0 \leq s \leq t$.

Por el Lema 2.4, F es Lipschitz, y en consecuencia continua en $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$. Integrando de 0 a t y sabiendo que $U(0) = f$, tenemos

$$S(0)U(t) - S(t)U(0) = \int_0^t \frac{d\gamma(s)}{ds} ds = \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds.$$

Pero $S(0)U(t) = U(t)$ y $S(t)U(0) = S(t)f$, luego

$$U(t) = S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds.$$

Recíprocamente, sea $U \in C([0, T], \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ una solución de (2.9). Mostremos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) - F(U(t)) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) - F(U(t)) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
&= \left\| \frac{1}{h} \left(S(t+h)f + \int_0^{t+h} S(t+h-s)F(U(s))ds - S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right) \right. \\
&\quad \left. - A \left(S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right) - F(U(t)) \right\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R})^{s-2}} \\
&\leq \left\| \frac{1}{h} (S(t+h)f - S(t)f) - AS(t)f \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
&\quad + \left\| \frac{1}{h} \left(\int_0^t (S(t+h-s) - S(t-s))F(U(s))ds - A \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
&\quad + \left\| \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} S(t+h-s)F(U(s))ds \right) - F(U(t)) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
&= \left\| S(t) \left(\frac{1}{h} (S(h)f - f) - Af \right) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
&\quad + \left\| \left(\frac{S(h) - \mathbf{I}}{h} - A \right) \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
&\quad + \left\| \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} S(t+h-s)(F(U(s)) - F(U(t)))ds \right) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}}.
\end{aligned}$$

De los últimos tres términos, el primero se va a cero cuando $h \rightarrow 0^+$, pues $(S(t))_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo en $\mathbf{H}^{s-2}(\mathbb{R})$ y el operador A es su generador infinitesimal. Para el segundo término, por la definición de generador infinitesimal y $\int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \in D(A)$, tenemos

$$\left\| \left(\frac{S(h) - \mathbf{I}}{h} - A \right) \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \rightarrow 0$$

cuando $h \rightarrow 0^+$. Para estimar el último término

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} S(t+h-s)(F(U(s)) - F(U(t)))ds \right) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
&\leq \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)(F(U(s)) - F(U(t)))\|_{\mathbf{H}^{s-2}} ds,
\end{aligned}$$

recordemos que por el teorema del valor medio para integrales, para algún $t \leq \rho \leq t+h$, por ser $\|S(t+h-\rho)\| \leq 1$, por el Lema 2.4, por ser $\rho \rightarrow t^+$ cuando $h \rightarrow 0^+$ y por la continuidad

de U , tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)(F(U(s)) - F(U(t)))\|_{\mathbf{H}^{s-2}} ds, \\
& \leq \|S(t+h-\rho)(F(U(\rho)) - F(U(t)))\|_{\mathbf{H}^{s-2}} \\
& \leq \|S(t+h-\rho)(F(U(\rho)) - F(U(t)))\|_{\mathbf{H}^s} \\
& \leq \|S(t+h-\rho)\| \|U(\rho) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \\
& \leq C \|U(\rho) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, de estos resultados, concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) - F(U(t)) \right\|_{\mathbf{H}^{s-2}} = 0. \quad \square$$

Ahora el objetivo es mostrar la existencia de una solución integral asociada a (2.3), para tal propósito necesitamos una herramienta muy importante en el área de Análisis Matemático conocida como el *Teorema del punto fijo de Banach*. Pero antes de presentarlo introducimos la siguiente definición:

Definición 2.1. (Contracción) Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach. Decimos que una aplicación $T : X \rightarrow X$ es una *contracción* si existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\|_X \leq \theta \|x - y\|_X, \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Teorema 2.6. (Punto fijo de Banach) Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ espacio de Banach. Si $T : X \rightarrow X$ es una contracción, entonces existe un único punto fijo en X , es decir, un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.

Demostración. Escojamos un $x_0 \in X$ arbitrario. Definamos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que $T(x_n) = x_{n+1}$ para $n \geq 0$. Si C es la constante de contracción, notemos que

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\|_X \leq C \|x_n - x_{n-1}\|_X.$$

Iterando la desigualdad, deducimos que

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X \leq C^n \|x_1 - x_0\|_X.$$

Puesto que $C < 1$, de la última desigualdad, se tiene que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de Cauchy. Por la completez de X , la sucesión es convergente, digamos a un $x \in X$, es decir, $x_n \rightarrow x \in X$ si $n \rightarrow \infty$. Mostremos que $T(x) = x$.

$$\begin{aligned}
\|T(x) - x\|_X & \leq \|T(x) - T(x_n)\|_X + \|T(x_n) - x\|_X \\
& \leq C(\|x - x_n\|_X + \|x_n - x\|_X) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

De aquí que $T(x) = x$. Finalmente para mostrar la unicidad, supongamos que $T(x) = x$ y $T(y) = y$ para $x, y \in X$. Entonces

$$\|x - y\|_X = \|T(x) - T(y)\|_X \leq C\|x - y\|_X.$$

Que es contradicción salvo que $x = y$. $\square$

Teorema 2.7. *Sea $s > 1/2$ y $f \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$. Entonces existe $T_s > 0$ una solución $U \in C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ de la ecuación integral (2.9).*

Demostración. Con la norma

$$\|U\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} (\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s}) = \sup_{t \in [0, T]} (\|u_1(t)\|_s + \|u_2(t)\|_s + \|u_3(t)\|_s). \quad (2.11)$$

Sea $U = (u_1, u_2, u_3) \in C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$. Definamos el conjunto

$$E(T, R) = \{U \in C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R})) : \sup_{t \in [0, T]} \|U(t) - S(t)f\|_{\mathbf{H}^s} \leq R\}.$$

Es claro que $E(T, R)$ es un subconjunto cerrado de $C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ y por lo tanto completo con la norma descrita en (2.11).

Notemos que F restringida al subconjunto $E_R = \{U \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}) : \|U - S(t)f\|_{\mathbf{H}^s} \leq R\} \subset \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ es continua por el Lema 2.4 para cada $t \geq 0$. Para cada $U \in E(T, R)$ definamos la fórmula

$$\Psi(U)(t) = S(t)f + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds. \quad (2.12)$$

Veamos que Ψ está bien definida y va del espacio $E(T, R)$ en el espacio $C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$. En efecto, para $U \in E(T, R) \subset C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$, como $U(s) \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ y como $F : \mathbf{H}^s(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ por el Lema 2.4, $F(U(s)) \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$. Luego la acción $S(t-s)F(U(s))$ tiene sentido y es integrable debido a que $(S(t))_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo en $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$. De manera que la fórmula en (2.12) está bien definida para todo $U \in E(T, R)$.

Por otro lado, veamos que $\Psi(U) \in C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ siempre que $U \in E(T, R)$. Para $U = (u_1, u_2, u_3) \in C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$, y $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \|\Psi(U)(t+h) - \Psi(U)(t)\|_{\mathbf{H}^s} \\ &= \left\| S(t+h)f + \int_0^{t+h} S(t+h-s)F(U(s))ds - S(t)f - \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \|S(t)(S(h)f - f)\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| (S(h) - I) \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\quad + \left\| \int_t^{t+h} S(t+h-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \end{aligned}$$

De los últimos tres términos, puesto que $(S(t))_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo en $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$, el primer y segundo término

$$\|S(t)(S(h)f - f)\|_{\mathbf{H}^s} \rightarrow 0, \quad \left\| (S(h) - I) \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \rightarrow 0,$$

cuando $h \rightarrow 0$. Para el tercer término,

$$\|S(t+h-s)F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s},$$

y observemos que

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|U(s) - S(s)f\|_{\mathbf{H}^s} + \|S(s)f\|_{\mathbf{H}^s} \leq R + \|f\|_{\mathbf{H}^s}. \quad (2.13)$$

Por lo tanto si $M = \max\{|c_0 + c_2|, |c_2|, 2|c_2|\}$,

$$\begin{aligned} & \|S(t+h-s)F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s} \\ & \leq \|F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s} \\ & \leq |c_0 + c_2|(\|u_1\|_s^2 + \|u_2\|_s^2 + \|u_3\|_s^2)(\|u_1\|_s + \|u_2\|_s + \|u_3\|_s) \\ & \quad + |c_2|(\|u_3\|_s \|u_2\|_s^2 + \|u_2\|_s^3 + \|u_1\|_s \|u_2\|_s^2) \\ & \quad + 2|c_2|(\|u_1\|_s^3 \|u_1\|_s + \|u_2\|_s \|u_1\|_s \|u_3\|_s + \|u_1\|_s^2 \|u_3\|_s) \\ & \leq M(\|u_1\|_s + \|u_2\|_s + \|u_3\|_s + (\|u_1\|_s + \|u_2\|_s + \|u_3\|_s)^3) \\ & \leq M(R + \|f\|_{\mathbf{H}^s} + (R + \|f\|_{\mathbf{H}^s})^3) := C, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{t+h} S(t+h-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} & \leq \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ & \leq \int_t^{t+h} \|F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ & \leq \int_t^{t+h} C ds \\ & \leq hC. \end{aligned}$$

De manera que

$$\left\| \int_t^{t+h} S(t+h-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \rightarrow 0,$$

cuando $h \rightarrow 0$. Por lo tanto, de estos resultados, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\Psi(U)(t+h) - \Psi(U)(t)\|_{\mathbf{H}^s} = 0.$$

De aquí que

$$\Psi : E(T, R) \rightarrow C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R})).$$

Ahora mostremos que existe $T_1 > 0$, tal que si $0 < T < T_1$ y $U \in E(T, R)$, entonces

$\Psi(U) \in E(T, R)$. Sea $U \in E(T, R)$ y $0 \leq t \leq T$, entonces

$$\begin{aligned} \|\Psi(U)(t) - S(t)f\|_{\mathbf{H}^s} &= \left\| \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \int_0^t \|S(t-s)F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ &\leq \int_0^t \|F(U(s))\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ &\leq \int_0^t L \|U(s)\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ &\leq TL(R + \|f\|_{\mathbf{H}^s}). \end{aligned}$$

La segunda desigualdad por $\|S(t-s)\|_{\mathbf{H}^s} \leq 1$, y la tercera y cuarta desigualdad por los estimativos en (2.14) y (2.13), respectivamente.

Por tanto, escogiendo $T < T_1$ tal que

$$T_1 := \frac{R}{L(R + \|f\|_{\mathbf{H}^s})},$$

y tomando supremo se tiene el resultado

$$\|\Psi(U) - S(\cdot)f\|_{\infty} \leq R.$$

Finalmente, mostremos que existe T_2 tal que Ψ es una contracción en $E(T, R)$ y $T < T_2$. En efecto, para $U, V \in E(T, R)$ y $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\Psi(U)(t) - \Psi(V)(t)\|_{\mathbf{H}^s} &= \left\| \int_0^t (F(U(s)) - F(V(s)))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \int_0^t \|F(U(s)) - F(V(s))\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ &\leq \int_0^t L \|U(s) - V(s)\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ &\leq TL \sup_{t \in [0, T]} (\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s}). \end{aligned}$$

La segunda desigualdad por el Lema 2.4 y la tercera tomando supremo del lado derecho e integrando.

Así, escogiendo $T < T_2$ tal que

$$T_2 := \frac{1}{2L},$$

y tomando supremo del lado izquierdo, tenemos que

$$\|\Psi(U) - \Psi(V)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|U - V\|_{\infty}.$$

Así pues, Ψ es una contracción del espacio $E(T, R)$ en él mismo. Por lo tanto considerando $T_s \leq \min(T_1, T_2)$ y aplicando el Teorema del punto fijo de Banach en $E(T, R)$, encontramos que existe un único punto fijo $U : [0, T_s] \rightarrow \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ que satisface (2.9). $\square$

A continuación mostraremos la unicidad de la solución integral del teorema anterior en todo el espacio $C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ y la continuidad de dicha solución respecto al dato inicial. Para ello, usaremos la conocida *desigualdad de Gronwall*.

Teorema 2.8. (Desigualdad de Gronwall) *Sea $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa. Supongamos que existen $C, K \geq 0$ tales que*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds,$$

entonces

$$g(t) \leq Ce^{Kt}, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Demostración. Definamos la función

$$G(t) = C + K \int_0^t g(s) ds.$$

Esta función G definida así es continuamente diferenciable y satisface

$$g(t) \leq G(t) \quad G'(t) = Kg(t).$$

Aplicando la regla de Leibniz al producto $e^{-Kt}G(t)$ y por lo anterior, tenemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-Kt}G(t)) = e^{-Kt}Kg(t) - Ke^{-Kt}G(t) = Ke^{-Kt}(g(t) - G(t)) \leq 0.$$

Por esto, $e^{-Kt}G(t)$ es decreciente, así que se cumple $e^{-Kt}G(t) \leq G(0) = C$. De aquí que

$$g(t) \leq G(t) \leq Ce^{-Kt}.$$

□

Teorema 2.9. *La solución obtenida en el teorema anterior (Teorema 2.7) es única y depende continuamente de la condición inicial f , es decir, la aplicación $f \mapsto U$ de $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ en $C([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ es continua.*

Demostración. Del teorema anterior, existen T_f y T_g positivos tales que $U = (u_1, u_2, u_3) \in C([0, T_f]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ y $V = (v_1, v_2, v_3) \in C([0, T_g]; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ que satisfacen (2.9) para todo $t \in [0, \tau]$, con $\tau = \min(T_f, T_g)$. De aquí que

$$\begin{aligned} \|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} &= \left\| S(t)(f - g) + \int_0^t S(t-s)(F(U(s)) - F(V(s)))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \|S(t)(f - g)\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t S(t-s)(F(U(s)) - F(V(s)))ds \right\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}^s)} \|f - g\|_{\mathbf{H}^s} + \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}^s)} \|F(U(s)) - F(V(s))\|_{\mathbf{H}^s} ds \\ &\leq \|f - g\|_{\mathbf{H}^s} + \int_0^t L \|U(s) - V(s)\|_{\mathbf{H}^s} ds. \end{aligned}$$

Definiendo

$$K := \sup_{s \in [0, T]} L(\|u_1(s)\|_s, \|u_2(s)\|_s, \|u_3(s)\|_s, \|v_1(s)\|_s, \|v_2(s)\|_s, \|v_3(s)\|_s),$$

tenemos

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|f - g\|_{\mathbf{H}^s} + K \int_0^t \|U(s) - V(s)\|_{\mathbf{H}^s} ds.$$

De la desigualdad de Gronwall (Teorema 2.8), se sigue que

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|f - g\|_{\mathbf{H}^s} e^{Kt}, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Por lo tanto la unicidad y la dependencia continua de la solución con respecto a la condición inicial se tienen. $\square$

Capítulo 3

Experimentos numéricos

En este capítulo presentamos algunos experimentos numéricos utilizando el software MATHEMATICA de Wolfram para aproximar la solución del sistema reescalado

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_+}{\partial t} &= i \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial x^2} - i(c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_+ - i(c_0 - c_2)|\Phi_-|^2\Phi_+ - ic_2\overline{\Phi_-}\Phi_0^2, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= i \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} - i(c_0 + c_2)(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2)\Phi_0 - ic_0|\Phi_0|^2\Phi_0 - i2c_2\overline{\Phi_0}\Phi_+\Phi_-, \\ \frac{\partial \Phi_-}{\partial t} &= i \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial x^2} - i(c_0 + c_2)(|\Phi_-|^2 + |\Phi_0|^2)\Phi_- - i(c_0 - c_2)|\Phi_+|^2\Phi_- - ic_2\overline{\Phi_+}\Phi_0^2,\end{aligned}\tag{3.1}$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$\Phi_+(x, 0) = f_1(x), \quad \Phi_0(x, 0) = f_2(x), \quad \Phi_- = f_3(x),$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$.

Con el fin de estudiar numéricamente este problema de valor inicial, es conveniente reescribir el sistema en términos de las partes real e imaginaria de las funciones Φ_+ , Φ_0 y Φ_- . Así definimos

$$\Phi_+ = u_1 + iv_1, \quad \Phi_0 = u_2 + iv_2, \quad \Phi_- = u_3 + iv_3,$$

y

$$\Phi_+(x, 0) = h_1 + ig_1, \quad \Phi_0(x, 0) = h_2 + ig_2, \quad \Phi_-(x, 0) = h_3 + ig_3,$$

donde

$$u_j, v_j : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad h_j, g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

para $j = 1, 2, 3$. Entonces el problema de valor inicial reescalado se convierte en un nuevo sistema de seis ecuaciones y seis valores iniciales como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (c_0 + c_0)(u_1^2 v_1 + u_2^2 v_1 + v_1 v_2^2 + v_1^3) + (c_0 - c_0)(u_3^2 v_1 + v_1 v_3^2) \\
&\quad + c_0(2u_2 u_3 v_2 - u_2^2 v_3 + v_2^2 v_3), \\
\frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - (c_0 + c_2)(u_1 u_2^2 + u_1 v_1^2 + u_1 v_2^2 + u_1^3) - (c_0 - c_2)(u_1 u_3^2 + u_1 v_3) \\
&\quad - c_2(u_2^2 u_3 + u_2 v_2 v_3 - u_3 v_2^2) \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(u_1^2 v_2 + u_3^2 v_2 + v_1^2 v_2 + v_2 v_3^2) + c_0(u_2^2 v_2 + v_2^3) \\
&\quad + 2c_2(u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 + v_1 v_2 v_3) \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - (c_0 + c_2)(u_1^2 u_2 + u_2 u_3^2 + u_2 v_1^2 + u_2 v_3^2) + c_0(u_2 v_2^2 + u_2^3) \\
&\quad - 2c_2(u_1 u_2 u_3 + u_1 v_2 v_3 - u_2 v_1 v_3 + u_3 v_1 v_2) \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + (c_0 + c_2)(u_2^2 v_3 + u_3^2 v_3 + v_2^2 v_3 + v_3^3) + (c_0 - c_2)(u_1^2 v_3 + v_1^2 v_3) \\
&\quad + c_2(2u_1 u_2 v_2 + u_2^2(-v_1) + v_1 v_2^2) \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - (c_0 + c_2)(u_2^2 u_3 + u_3 v_2^2 + u_3 v_3^2 + u_3^3) - (c_0 - c_2)(u_1^2 u_3 + u_3 v_1) \\
&\quad - c_2(u_1 u_2^2 - u_1 v_2^2 + 2u_2 v_1 v_2)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
u_1(x, 0) &= h_1(x), & u_2(x, 0) &= h_2(x), & u_3(x, 0) &= h_3(x), \\
v_1(x, 0) &= g_1(x), & v_2(x, 0) &= g_2(x), & v_3(x, 0) &= g_3(x).
\end{aligned}$$

Con respecto a soluciones exactas conocidas para el sistema en (3.1), tenemos el trabajo [14] donde se deducen expresiones analíticas para soluciones exactas de tipo periódico para el problema (3.1) que se pueden escribir en la forma siguiente:

$$\Phi_j = \psi_j(\xi) e^{i(\vartheta x - \Omega_j t)}, \quad \xi = r(x - 2\vartheta t), \tag{3.3}$$

donde Ω_j, ϑ, r son constantes y $j = +, 0, -$. Luego al reemplazar la expresión (3.3) en (3.1) da lugar a un sistema de ecuación ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{aligned}
-r^2 \psi_+'' + [(c_0 + c_2)(\psi_+^2 + \psi_0^2) + (c_0 - c_2)\psi_-^2 + (\vartheta^2 - \Omega_+)]\psi_+ + c_2 \psi_- \psi_0^2 &= 0, \\
-r^2 \psi_0'' + [(c_0 + c_2)(\psi_+^2 + \psi_-^2) - c_0 \psi_0^2 + (\vartheta^2 - \Omega_0)]\psi_0 + 2c_2 \psi_0 \psi_+ \psi_- &= 0, \\
-r^2 \psi_-'' + [(c_0 + c_2)(\psi_-^2 + \psi_0^2) + (c_0 - c_2)\psi_+^2 + (\vartheta^2 - \Omega_-)]\psi_- + c_2 \psi_+ \psi_0^2 &= 0,
\end{aligned}$$

donde debe cumplirse que $\Omega_+ + \Omega_- = 2\Omega_0$. De tal manera, una solución exacta del sistema anterior puede ser obtenida en términos de las funciones elípticas de Jacobi sn, dn y cn, y por lo tanto obtenemos una solución exacta correspondiente al sistema (3.1) en la forma

$$\Phi_+ = -\frac{b^2 k^2}{2c} \operatorname{sn}[r(x - 2\vartheta t), k] e^{i(\vartheta x - \Omega_+ t)},$$

$$\Phi_0 = b \operatorname{dn}[r(x - 2\vartheta t), k] e^{i(\vartheta x - \Omega_0 t)},$$

$$\Phi_- = c \operatorname{sn}[r(x - 2\vartheta t), k] e^{i(\vartheta x - \Omega_- t)},$$

donde

$$c_0 = c_2 = \frac{4r^2 c^2 k^2}{(2c^2 - b^2 k^2)^2},$$

$$\Omega_+ = \vartheta^2 + r^2 k^2 + r^2 \frac{b^4 k^4 + 4b^2 c^2 k^2 - 4c^4}{(2c^2 - b^2 k^2)^2}, \quad \Omega_- = \vartheta^2 + r^2 k^2 + \frac{4r^2 b^2 c^2 k^2}{(2c^2 - b^2 k^2)^2}.$$

Ahora si consideramos la situación límite en la que el parámetro $k \rightarrow 1$, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= -\frac{b^2}{2c} \tanh[r(x - 2\vartheta t)] e^{i(\vartheta x - \Omega_+ t)}, \\ \Phi_0 &= b \operatorname{sech}[r(x - 2\vartheta t)] e^{i(\vartheta x - \Omega_0 t)}, \\ \Phi_- &= c \tanh[r(x - 2\vartheta t)] e^{i(\vartheta x - \Omega_- t)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde

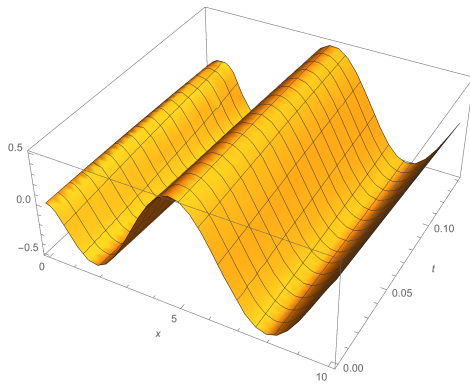
$$c_0 = c_2 = \frac{4r^2 c^2}{(2c^2 - b^2)^2},$$

$$\Omega_+ = \vartheta^2 + r^2 + r^2 \frac{b^4 + 4b^2 c^2 - 4c^4}{(2c^2 - b^2)^2}, \quad \Omega_- = \vartheta^2 + r^2 + \frac{4r^2 b^2 c^2}{(2c^2 - b^2)^2},$$

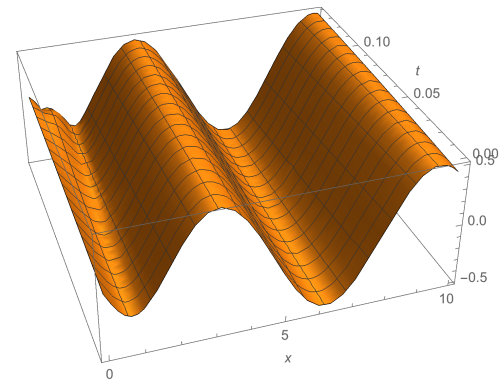
y b, c, r, ϑ son constantes. Utilizando el software MATHEMATICA realizamos simulaciones numéricas mediante la rutina NDSolve[.] que utiliza el método de líneas para la aproximación de la variable temporal sobre una discretización de tipo elementos finitos en el espacio de la ecuación diferencial. El dominio computacional que se usó para el sistema (3.1) fue el intervalo $[0, 10]$, los parámetros b, c, r, ϑ se tomaron como $b = c = r = \vartheta = 1$ y los datos iniciales y los correspondientes valores en las fronteras $x = 0$, $x = 10$ fueron tomados como los valores exactos de las expresiones dadas en (3.4).

En las figuras que siguen presentamos las gráficas obtenidas en la simulación numérica de las componentes real e imaginarias $u_i, v_i, i = 1, 2, 3$ en el sistema (3.1) y verificamos que las soluciones obtenidas por MATHEMATICA coinciden con la dadas en el perfil límite dado

en (3.4). Esto permite verificar numéricamente que esta es en efecto una solución periódica aproximada del sistema (3.1).

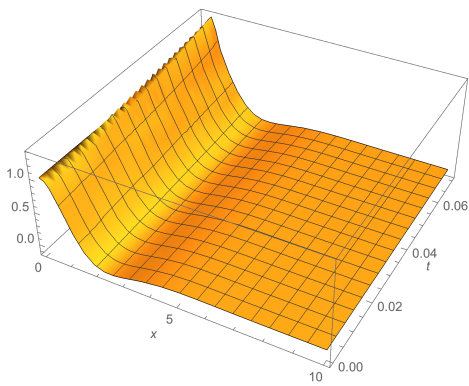


(a) Componente u_1

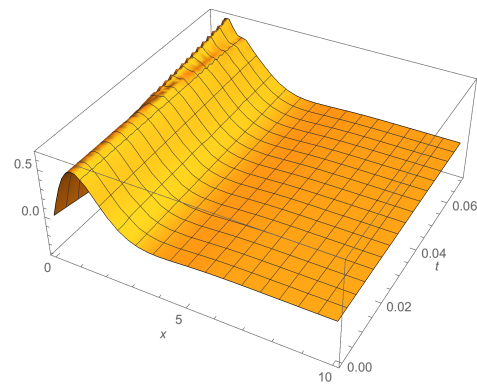


(b) Componente v_1

Figura 3.1. Gráficas de la parte real e imaginaria de $\Phi_+ = u_1 + iv_1$

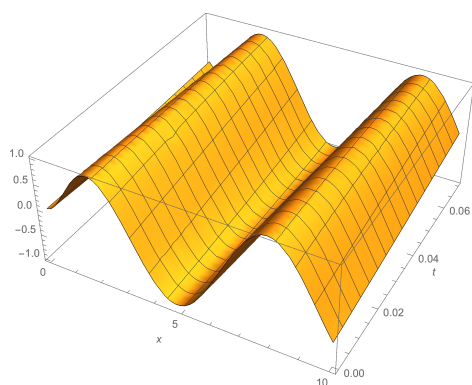


(a) Componente u_2

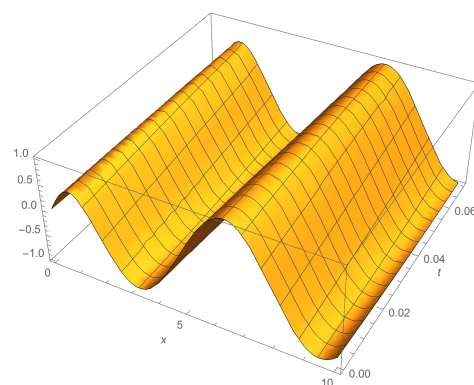


(b) Componente v_2

Figura 3.2. Gráficas de la parte real e imaginaria de $\Phi_0 = u_2 + iv_2$



(a) Componente u_2



(b) Componente v_2

Figura 3.3. Gráficas de la parte real e imaginaria de $\Phi_- = u_3 + iv_3$

Capítulo 4

Conclusiones

1. Hemos mostrado que la teoría de los C_0 -semigrupos de operadores continuos en espacios de Banach, junto con la teoría de operadores lineales en espacios de Banach y demás resultados de Análisis Funcional estudiados durante la realización del presente trabajo, permiten analizar de manera elegante problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales de tipo evolutivo, las cuales se puedan escribir como una ecuación diferencial de primer orden en un espacio de Banach apropiado.
2. El operador lineal no acotado A (obtenido en el estudio del problema lineal de (2.3)) es el generador de un C_0 -grupo $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$, el cual permitió expresar la solución del problema homogéneo asociado (2.4) como la expresión simple $S(t)f$ para una condición inicial f dada. Esto permitió reformular el problema de valor inicial original no homogéneo (1), como un problema de punto fijo para el operador asociado a la formulación integral dada en el Teorema 2.5. Así, usando el principio de punto fijo de Banach se obtuvo el resultado de existencia local para el problema (1). La desigualdad de Gronwall fue muy herramienta muy importante para demostrar la unicidad de dicha solución en todo el espacio $C([0, T], \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$, y su dependencia continua del dato inicial. El resultado obtenido es similar al obtenido en [19] para el caso periódico de un sistema semejante (pero solo con dos ecuaciones diferenciales) al considerado en el presente trabajo.
3. El estudio de la existencia y unicidad de soluciones del problema (1) en este trabajo solo fue local, y por lo tanto, este da una motivación para trabajos futuros donde se pretende hacer un estudio de existencia global, analizando también el comportamiento asintótico de la solución, fenómeno estudiado en la caracterización de soluciones globales. Otro aspecto que se puede considerar es un estudio numérico más completo usando por ejemplo esquemas de tipo espectral en el espacio y diversas estrategias de discretización temporal para aproximar las soluciones del problema (1) dependiente del tiempo y soluciones de onda viajera estacionarias de la forma (3.3).

Bibliografía

- [1] KEVREKIDIS PG, FRANTZESKAKIS DJ, CARRETERO-GONZÁLEZ R, EDITORS (2008). Emergent nonlinear phenomena in Bose-Einstein condensates. Berlin: Springer.
- [2] HO TL (1998). Spinor Bose condensates in optical traps. *Phys Rev Lett*;81:742.
- [3] LAW CK, PU H, BIGELOW NP (1998). Quantum spins mixing in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys Rev Lett*;81:5257.
- [4] OHMI T, MACHIDA KJ (1998). Bose-Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases. *J Phys Soc Jpn*;67:1822.
- [5] IEDA J, MIYAKAWA T, WADATI M (2004). Exact analysis of soliton dynamics in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys Rev Lett*;93:194102.
- [6] IEDA J, MIYAKAWA T, WADATI M (2004). Matter-wave solitons in an $F = 1$ spinor Bose-Einstein condensate. *J Phys Soc Jpn*;73:2996.
- [7] WADATI M, TSUCHIDA N (2006). Wave propagations in the $F = 1$ spinor Bose-Einstein condensates. *J Phys Soc Jpn*;75:014301.
- [8] UCHIYAMA M, IEDA J, WADATI M (2006). Dark solitons in $F = 1$ spinor Bose-Einstein condensate. *J Phys Soc Jpn*;75:064002.
- [9] ZHI-HAI ZHANG, CONG ZHANG, SHI-JIE YANG (2012). Analytical solutions to the spin-1 Bose-Einstein condensates. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 45, 215302.
- [10] SITAI LI, BARBARA PRINARI, GINO BIONDINI (2018). Solitons and rogue waves in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. E* 97, 022221.
- [11] KANNA T, LAKSHMANAN M (2003). Exact soliton solutions of coupled nonlinear Schrödinger equations: shape-changing collisions, logic gates, and partially coherent solitons. *Phys Rev E*;67:046617.

- [12] WEIZHU BAO, YONGYONG CAI (2018). Mathematical models and numerical methods for spinor Bose-Einstein condensates. *Commun. Comput. Phys.*, Vol. 24 (2018), pp. 899-965.
- [13] DEREVYANKO SA, PRILEPSKY JE, YAKUSHEV DA (2006). Statistics of a noise-driven Manakov soliton. *J Phys A* ;39:1297.
- [14] Z. YAN, K.W. CHOW AND A. MALOMED (2009). Exact stationary wave patterns in three coupled nonlinear Schrödinger/Gross-Pitaevskii equations. *Chaos, Solitons and Fractals* 42, pags. 3013-3019.
- [15] S.N. BOSE (1924). Plank's law and light quantum hypothesis. *Z.Phys*, 26, 178-181.
- [16] A. EINSTEIN (1925). Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. 1:3.
- [17] M.H. ANDERSON, J.R. ENSHER, M.R. MATTEWS, C.E. WEIMAN AND E.A. CORNELL (1995). Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science* vol. 269, 198-201.
- [18] L.P. PITAEVSKII(1961). Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. J.E.T.P.*, 13, 451-454.
- [19] L. F. VARGAS Y J.C. MUÑOZ (2017). Analysis of a Galerkin approach applied to a system of coupled Schrödinger equations. *J. Comput. Appl. Math.* 313, pags. 318-342.
- [20] A. PAZY (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Vol. 44.
- [21] L.C. EVANS (1997). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, págs. 412-424.
- [22] FELIPE LINARES, GUSTAVO PONCE (2015). *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Springer-Verlag New York. págs. 1-8, 45-53.
- [23] DORINA MITREA (2018). *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*. Springer Nature Switzerland AG 2018. págs. 1-8, 425-438.
- [24] HAIM BREZIS (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science-Business Media. págs. 89-108.
- [25] ANDRÁS BÁTKAI, MARJETA KRAMAR FIJAVŽ, ABDELAZIZ RHANDI (2017). *Positive Operator Semigroups: From Finite to Infinite Dimensions*. Springer International Publishing AG 2017. págs. 107-130.
- [26] L. LIN, I.L. CHERN (2014). A kinetic energy reduction technique and characterizations of the ground states of spin-1 Bose-Einstein condensates, *Discrete Cont. Dyn. B*, págs. 119-1128.

-
- [27] BRYAN P. RYNNE, MARTIN A. YOUNGSON (2008). Linear Functional Analysis. Springer-Verlag London. págs. 42-119.
 - [28] MANFRED EINSIEDLER, THOMAS WARD (2017). Functional Analysis, Spectral Theory, and Applications. Springer International Publishing. págs. 15-120.