

**CÁLCULO FRACCIONARIO APLICADO AL PROBLEMA
INVERSO DEL CALOR**

LUISA FERNANDA VARGAS JIMÉNEZ

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011**

**CÁLCULO FRACCIONARIO APLICADO AL PROBLEMA
INVERSO DEL CALOR**

LUISA FERNANDA VARGAS JIMÉNEZ

**Trabajo de Investigación presentado como requisito parcial
para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas**

**DORIS HINESTROZA GUTIERREZ, Ph. D.
Directora**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

LUISA FERNANDA VARGAS JIMÉNEZ, 1981

**CÁLCULO FRACCIONARIO APLICADO AL PROBLEMA
INVERSO DEL CALOR**

Temas relacionados:

- Derivadas de orden fraccionario.
- Problema inverso del calor.
- Regularización.
- Molificación.



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ACTA DE SUSTENTACIÓN DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE
MAESTRIA EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS

Jurado conformado por los doctores:

FRANCISCO ENRIQUEZ, Universidad del Cauca
MANUEL VILLEGAS LERMA, Universidad del Valle

El día 24 de Junio de 2011 a las 10:00 A.M. se llevó a cabo la sustentación del Trabajo de Investigación **“CÁLCULO FRACCIONARIO APLICADO AL PROBLEMA INVERSO DEL CALOR”**, presentada por la estudiante **LUISA FERNANDA VARGAS**, código 0703716, Plan 7179, candidata a grado para la próxima ceremonia.

RESULTADO DE LA EVALUACIÓN:

- ☒ APROBADA
() MERITORIA
() LAUREADA

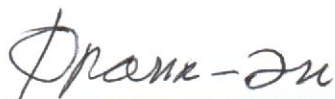
Regístrese esta calificación.

- () REPROBADA: La estudiante debe matricularse en esta actividad
() PENDIENTE: La estudiante debe acoger las recomendaciones del jurado y presentar nuevamente el documento ante el Director de Tesis. () Requiere. () No requiere nueva sustentación.

El plazo para nueva sustentación y/o presentación del documento es de: _____

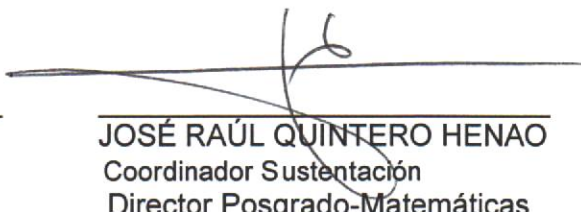
OBSERVACIONES

Santiago de Cali, 24 de Junio de 2011


FRANCISCO ENRIQUEZ
Jurado


MANUEL VILLEGAS LERMA
Jurado


DORIS HINESTROZA
Directora de Tesis


JOSÉ RAÚL QUINTERO HENAO
Coordinador Sustentación
Director Posgrado-Matemáticas

Contenido

Resumen	VII
Introducción	VIII
1. CÁLCULO FRACCIONARIO	1
1.1. Algunos antecedentes	1
1.2. La Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville	3
1.2.1. Transformada de Laplace de la integral de orden fraccionario	8
1.3. La Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville	9
1.3.1. Propiedades de la derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville	12
1.3.2. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.	15
1.4. Derivada Fraccionaria de Caputo	16
1.4.1. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo.	19
1.4.2. Transformada de Fourier de las integrales y las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo	19
1.5. Derivada e Integral de Grünwald-Létnikov	20
1.5.1. Integrales fraccionarias de orden arbitrario	21
1.5.2. Derivada de Grünwald-Létnikov de orden arbitrario	22
1.5.3. Relación entre la derivada de Grünwald-Létnikov y la derivada de Riemann-Liouville	22
2. PROBLEMAS INVERSOS MAL PUESTOS	24
2.1. Problemas inversos mal puestos	24
2.2. Reducción de la ecuación de difusión a una ecuación de orden fraccionario	27
2.3. El cálculo de la derivada fraccionaria de orden $1/2$ como problema mal puesto	29
3. REGULARIZACIÓN DE PROBLEMAS INVERSOS	31
3.1. Molificación	35

3.1.1.	δ -molificación discreta de una función discreta	39
3.1.2.	Diferenciación Numérica	41
3.1.3.	Estabilización del problema del cálculo del flujo de calor .	45
Bibliografía		53

Resumen

En este trabajo hacemos un estudio del concepto de derivada de orden fraccionario, consideramos tres definiciones distintas y vemos bajo qué condiciones coinciden. Este concepto es considerado para más adelante estudiar una generalización del problema inverso del calor, el cual bajo ciertas condiciones, tendrá como solución una ecuación del flujo definido en términos de la derivada de orden fraccionario. Veremos que el cálculo de dicho flujo corresponde a un problema inverso mal puesto y mostraremos cómo usando molificación podemos superar el problema de la mal postura en el cálculo de la derivada de orden fraccionario. Finalmente, presentaremos algunos ejemplos que ilustran lo expuesto anteriormente.

Introducción

La integrodiferenciación fraccionaria es un campo del análisis matemático que actualmente está teniendo un gran auge en la física, la ingeniería y la economía. La integral y la derivada de orden no entero tienen aplicaciones en el modelamiento de sistemas físicos con capacidad de modelar fenómenos con memoria como problemas de difusión, viscoelasticidad, movimiento Browniano, hidrodinámica, mecánica, biología, teoría de señales, fenómenos fractales, control automático, entre otros.

La idea de usar órdenes fraccionarios en diferenciación e integración proviene del siglo XVII. Durante los siglos XVIII y XIX se dieron pocos desarrollos tanto teóricos como aplicados. Sin embargo, fue hasta hace poco más de treinta años que el análisis fraccionario se reveló como una herramienta de gran potencia en la solución de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales donde los métodos analíticos se muestran muy limitados. Además, las ecuaciones fraccionarias pueden modelar curvas muy complejas que están totalmente fuera del alcance de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El impacto que ha tenido el estudio de los operadores de integración y diferenciación de orden fraccionario se hace evidente en la gran cantidad de artículos publicados en los últimos años. La derivada fraccionaria generaliza la derivación e integración usuales, incorporando órdenes no enteros.

La primera aplicación en física del cálculo fraccionario se debe a Abel (1823), quien estudió el problema del movimiento tautócrono.

En este trabajo de investigación nos basaremos en las definiciones de operadores diferenciales fraccionarios según Riemann-Liouville y según Caputo, los cuales describimos a continuación.

La derivada fraccionaria, en el sentido de Riemann-Liouville, es consecuencia de la fórmula de Cauchy, la cual reduce el cálculo de la n -ésima primitiva de una función $f(t)$ a una integral simple de tipo convolución de la siguiente forma:

$$J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau; \quad t > 0, n \in \mathbb{N}.$$

La función Gamma Γ , mediante la cual se define el factorial en el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$, permite generalizar el índice n , de la fórmula anterior, de los números naturales

a los reales positivos:

$$J^\alpha f(t) := f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau; \quad t > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Además se define $J^{(0)} := I$, donde I es el operador identidad.

A partir de este operador se define la derivada de orden α , como su inversa a izquierda. Por lo tanto la derivada de orden $\alpha > 0$ en el sentido de Riemann-Liouville se define como $D^\alpha f(t) := \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t)$, donde m es un número entero tal que $m-1 < \alpha \leq m$ y $\frac{d^m}{dt^m}$ representa el operador de derivación clásico de orden m . Así:

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \quad (1)$$

La Derivada Fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ se define como:

$$D_*^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \quad (2)$$

El problema de conducción del calor fue planteado, en principio, por el matemático francés Joseph Fourier en su libro *Teoría analítica del Calor* de 1808. En dicho libro establece la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \quad (3)$$

donde K es una constante que depende del material considerado.

Cuando se plantea el problema del calor, se busca una función $u = u(x, t)$ que satisfaga la ecuación estándar (3), bajo algunas condiciones iniciales y de frontera. En general, estas condiciones son:

$$u(0, t) = f(t), \quad u(1, t) = g(t), \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Cuando no se conoce una de las condiciones iniciales o de frontera y se tienen datos de otros puntos del dominio, nos enfrentamos al *problema inverso del calor* (PIC), el cual es severamente mal puesto. Esto significa que pequeños errores en

los datos causan grandes errores en la solución. Es decir, no hay dependencia continua de la solución respecto a las condiciones y parámetros.

El problema inverso del calor (PIC) ha sido estudiado en los últimos 60 años y tiene muchas aplicaciones en la ciencia y la tecnología.

Nos proponemos en esta indagación estudiar la generalización de la ecuación de difusión a una ecuación de orden fraccionario, desde la perspectiva de los problemas inversos.

Dado que es un tema relativamente novedoso en nuestro medio académico, nos parece razonable abordar algunos aspectos teóricos que soportan este campo de las matemáticas. A través de esta tesis esperamos materializar este propósito.

Una de las aplicaciones del cálculo fraccionario podemos encontrarla en la modelación del flujo del calor. En [10] se considera el problema de encontrar la función de temperatura $u(x, t)$ que satisfaga:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} u(x, t), & x > 0, t \geq 0, \\ u(x_1, t) = f(t), & x_1 > 0, t \geq 0, \\ u(0, t) = U(t), & t \geq 0, \\ u_x(0, t) = q(t), & t \geq 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

Donde f , U y q son funciones que no conocemos con exactitud y las derivadas se consideran respecto a la definición de Riemann- Liouville. El problema consiste en determinar la temperatura y el flujo en ciertas regiones que no se pueden medir completamente y sólo se tienen unos datos llamados datos de Cauchy en regiones accesibles. Podemos resolver este problema analíticamente usando Transformadas de Fourier. Sin embargo, el error en los datos iniciales, produce grandes errores en el cálculo de la función solución. Nos encontramos entonces ante un problema mal puesto y se hace necesario usar un método de regularización para estabilizar el problema y encontrar la solución aproximada.

Es importante notar que desde el punto de vista teórico el problema de encontrar la derivada fraccionaria es también un problema mal puesto cuando no se conoce con exactitud la función.

Nos proponemos entonces, estudiar este problema y su solución partiendo de técnicas de regularización para encontrar una solución aproximada y numéricamente estable.

Capítulo 1

CÁLCULO FRACCIONARIO

El objetivo de este capítulo es establecer la terminología y notación que usaremos a lo largo de este trabajo. Para ello, presentamos los conceptos y resultados básicos del cálculo fraccionario, tomados de [4] y [11].

1.1. Algunos antecedentes

Los primeros indicios del cálculo fraccionario aparecen hacia finales del siglo XVII alrededor de algunos comentarios de L'Hospital respecto al valor de n en la notación $\frac{d^n y}{dx^n}$ establecida por Leibniz. En 1738 Leonhard Euler le encontraría sentido a esta notación cuando n no es entero, aclarando que si bien la razón diferencial para el caso entero se calcula por diferenciación continua, se puede dar sentido al caso fraccionario por los métodos de interpolación, muy en boga por esta época. Después de ochenta años, S. F. Lacroix retoma el problema de las derivadas fraccionarias, encontrando una fórmula para el cálculo de $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^\alpha$.

En 1822 Jean Baptiste Joseph Fourier generalizó el caso anterior para α real, estableciendo la fórmula

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^\alpha d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(tx - t\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dt.$$

Entre los años de 1823 y 1826 Niels Henrik Abel, en relación con el problema de la tautocrona, plantea la ecuación $k(x) = \int_a^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt$. Sin embargo, se resuelve el caso general $k(x) = \int_a^x (x-t)^\mu f(t) dt$, $x > a$, para todo $\mu \in (0, 1)$.

Pese a todos los acercamientos anteriores, se reconoce a Liouville como el fundador del cálculo fraccionario. En 1832, Liouville, partiendo del hecho de que para n en

los naturales se tiene: $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, no ve inconveniente alguno en generalizar para el caso n no natural. De esta manera si una función f puede expandirse como la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{a_k x},$$

Liouville define la derivada de orden α como:

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_k^\alpha e^{a_k x}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Obviamente esta definición depende de la convergencia de la serie.

Liouville va un poco más allá de estos resultados y obtiene, aunque de una forma no muy rigurosa, la fórmula

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x+t) t^{\alpha-1} dt, \quad -\infty < x < \infty, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

En 1847 Riemann basado en las series de Taylor establece la siguiente definición de integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$

$$I^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > 0.$$

El cálculo fraccionario siguió evolucionando al margen del cálculo entero a través del concurso de muchos matemáticos como: A.K. Grünwald (1867-1872), A. V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), H. Weyl (1917), H. T. Davis (1924-1936), D. V. Widder (1941) y M. Riesz (1949).

Sin embargo, es a partir de 1974 que el cálculo fraccionario empieza a tomar importancia como campo de investigación en matemáticas. En este año B. Ross organiza la *primera conferencia de Cálculo Fraccionario y sus aplicaciones* en la universidad de New Haven. Las memorias de este evento [14], editadas por el mismo Ross, en conjunto con la primera monografía escrita por Oldhman y Spanier [13], se convirtieron en una fuente importante de trabajos en el campo del cálculo fraccionario y sus aplicaciones. Entre los innumerables trabajos teóricos y de aplicaciones es conveniente resaltar los resultados de Caputo y Gorenflo.

En los últimos años el cálculo fraccionario se ha convertido en una herramienta eficaz para modelar algunos fenómenos físicos y para abordar algunas aplicaciones del análisis numérico.

1.2. La Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville

Sea $f \in L^1([a, b])$. Definamos para $t \in [a, b]$ la función

$$J_a^1 f(t) = \int_a^t f(s) ds$$

la cual cumple que $J_a^1 f(a) = 0$.

Definiendo $J_a^2 f(t) = J_a^1(J_a^1 f)(t)$ y aplicando el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} J_a^2 f(t) &= \int_a^t \int_a^s f(r) dr ds \\ &= \int_a^t (t-s) f(s) ds \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} J_a^3 f(t) &= \int_a^t \int_a^s \int_a^r f(x) dx dr ds \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t-s)^2 f(s) ds. \end{aligned}$$

Esta fórmula puede generalizarse para $n \in \mathbb{N}$ obteniéndose la n -ésima integral de la función f como se indica a continuación.

En el siguiente teorema $\Gamma(\cdot)$ representa la función Gamma, definida como la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

la cual converge en la mitad derecha del plano complejo, es decir donde $\operatorname{Re}(z) > 0$. Esta función generaliza el factorial $n!$ y permite a n tomar valores no enteros e incluso complejos. Además satisface que $\Gamma(n+1) = n!$.

Teorema 1.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^1([a, b])$. La n -ésima integral de la función f está dada por*

$$J_a^n f(t) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Demostración. Demostremos este teorema haciendo inducción sobre n .

El caso $n = 2$ lo probamos anteriormente. Supongamos que (1.1) se cumple para

$n = k$ y probemos que la fórmula es válida para $n = k + 1$. Por el Teorema de Fubini y de acuerdo con las propiedades de la función Gamma tenemos que:

$$\begin{aligned}
 J_a^{k+1}f(t) &= \int_a^t \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^s (s-r)^{k-1} f(r) dr ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t \int_r^t (s-r)^{k-1} ds f(r) dr \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t \frac{(t-r)^k}{k} f(r) dr \\
 &= \frac{1}{k\Gamma(k)} \int_a^t (t-r)^k f(r) dr \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_a^t (t-r)^k f(r) dr.
 \end{aligned}$$

□

La ecuación (1.1) conocida como *fórmula de Cauchy* puede extenderse para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de la siguiente manera.

Definición 1.1 Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $f \in L^1([a, b])$. Entonces las integrales:

$$J_{a+}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \quad (1.2)$$

$$J_{b-}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b, \quad (1.3)$$

se denominan *integrales fraccionarias de orden α* . A la primera de ellas se le denomina *integral fraccionaria por la derecha* y a la segunda, *integral fraccionaria por la izquierda*.

Si $\alpha = 0$ definimos J^0 como el operador identidad. Es decir, $J^0 f = f$.

Debido a las características del problema que consideramos, sólo utilizaremos la integral fraccionaria por la derecha; en adelante cuando hablamos de integral fraccionaria nos referimos a este caso y escribimos J_a^α . En el caso particular cuando $a = 0$ escribiremos J^α .

Observación 1.1 Sea $\alpha > 0$ y consideremos la función

$$\Phi_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Para $a = 0$ en la ecuación (1.2) podemos escribir la integral de orden α de la función $f(t)$ como la convolución:

$$J^\alpha f(t) = (\Phi_\alpha * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.1 La integral fraccionaria de la función $f(t) = (t - a)^\gamma$ está dada por

$$J_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} (t - a)^{\gamma + \alpha}, \quad \gamma > -1, \alpha > 0.$$

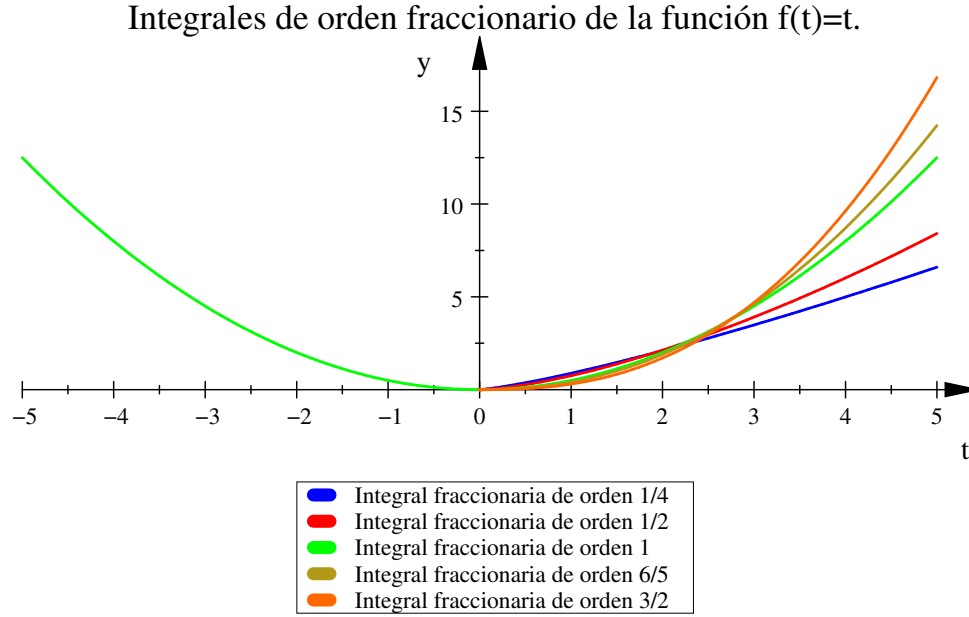
En efecto, haciendo la sustitución $u = \frac{\tau - a}{t - a}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} J_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\gamma d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - a)^{\alpha+\gamma} u^\gamma (1 - u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\gamma} \mathcal{B}(\alpha, \gamma + 1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \gamma + 1) \Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\gamma} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} (t - a)^{\alpha+\gamma}. \end{aligned}$$

Aquí y en adelante $\mathcal{B}$ representa la función Beta, definida como

$$\mathcal{B}(z, w) = \int_0^1 s^{z-1} (1 - s)^{w-1} ds, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Tomando $a = 0$ ilustramos a continuación las integrales de orden $\alpha = 1/4, 1/2, 1, 6/5$ y $3/2$ de la función $f(t) = t$.



A continuación presentamos algunas propiedades de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville tomadas de [4].

Teorema 1.2 (Propiedades de la integral fraccionaria)

1. Si f es continua para $t \geq a$ entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_a^\alpha f(t) = f(t).$$

2. Si $f \in L^1([a, b])$ entonces $J_a^{(1-\alpha)} f \in L^1([a, b])$, para $0 < \alpha < 1$.

Demostración.

1. Como f es continua en t , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$ entonces $|f(t) - f(s)| < \epsilon$. Ahora,

$$\begin{aligned}
 J_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s) - f(t)) ds + \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-s)^{\alpha-1} (f(s) - f(t)) ds + \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s) - f(t)) ds + \frac{f(t)(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
 \end{aligned}$$

Sean

$$I_1 := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-s)^{\alpha-1} (f(s) - f(t)) ds$$

y,

$$I_2 := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s) - f(t)) ds$$

entonces por la continuidad de f podemos acotar la integral I_2 como

$$|I_2| < \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t |t-s|^{\alpha-1} ds < \frac{\epsilon \delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.$$

Así tenemos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |I_2| = 0$.

Por otro lado, sea $\epsilon > 0$ arbitrario y escojamos δ tal que $|I_2| < \epsilon$ para todo $\alpha \geq 0$, además sea $M > 0$ tal que $|f(s) - f(t)| \leq M$. Para tal δ se tiene:

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-s)^{\alpha-1} (f(s) - f(t)) ds \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} |t-s|^{\alpha-1} ds \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (\delta^\alpha - (t-a)^\alpha). \end{aligned}$$

Claramente para $\delta > 0$ fijo, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |I_1| = 0$.

2. Lo deducimos de la siguiente desigualdad en la que usamos el Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_a^b |J_a^{1-\alpha} f(x)| dx &\leq \int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_a^x \left| \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right| dt \right) dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \int_a^x |f(t)| (x-t)^{-\alpha} dt dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \int_t^b |f(t)| (x-t)^{-\alpha} dx dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^{1-\alpha} dt \\ &\leq \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3 (Propiedad de semigrupo de la integración fraccionaria) Sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $f \in L^1([a, b])$ entonces:

$$J_a^\alpha J_a^\beta f = J_a^{\alpha+\beta} f.$$

Demostración. Para demostrar este teorema hacemos uso del Teorema de Fubini. Haciendo $u = \frac{\tau-s}{t-s}$, tenemos

$$\begin{aligned}
(J_a^\alpha J_a^\beta)(f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} J_a^\beta f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \left(\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} d\tau \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \left(\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\alpha-1} (t-s)^{\alpha+\beta-1} du \right) ds \\
&= \frac{\mathcal{B}(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&= J_a^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}$$

□

Observación 1.2

1. Del Teorema anterior se sigue la propiedad conmutativa para el operador integral fraccionario: $J_a^\alpha J_a^\beta = J_a^\beta J_a^\alpha$.

1.2.1. Transformada de Laplace de la integral de orden fraccionario

Si $a = 0$ y $\alpha > 0$ vimos que podemos escribir la integral de orden α de la función $f(t)$ como la convolución:

$$J^\alpha f = \Phi_\alpha * f$$

donde Φ_α está definida por (1.4).

Consideremos la definición de la Transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t)$:

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (1.6)$$

mostremos que:

$$\mathcal{L}[J^\alpha f](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (1.7)$$

En efecto, recordando que la Transformada de Laplace de una convolución es igual al producto de las Transformadas de Laplace de las funciones que se convolucionan tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[J^\alpha f(t)](s) &= \mathcal{L}[\Phi_\alpha * f](s) \\ &= \mathcal{L}[\Phi_\alpha](s)\mathcal{L}[f](s) \\ &= \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[f](s).\end{aligned}$$

Note que (1.7) es una generalización de la propiedad de la Transformada de Laplace para la n -ésima integral de una función.

1.3. La Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

A partir de la definición de integral de orden fraccionario se define la derivada de orden α ($\alpha > 0$) de f , teniendo en cuenta que esta definición coincida con el caso donde α es un número natural y que además se conserven algunas propiedades clásicas de la derivada. Si consideramos $n \in \mathbb{N}$ y D^n denota el operador diferencial de orden n , entonces considerando (1.1) y usando inducción puede demostrarse que

$$J_a^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^k}{k!}, \quad t > 0. \quad (1.8)$$

Observemos que en general,

$$J_a^n D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde I representa el operador identidad. Más aún, $J_a^n D^n = I$ si y sólo si $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, \dots, n-1$.

Sin embargo,

$$D^n (J_a^n f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds \quad (1.9)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_a^t f(s) ds = f(t) \quad (1.10)$$

Es decir, $D^n J_a^n = I$, $n \in \mathbb{N}$.

A partir de estas consideraciones se define la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ como el operador inverso a izquierda del operador fraccionario J_a^α .

Definición 1.2 Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $m - 1 \leq \alpha < m$, definimos **la derivada fraccionaria de orden α según Riemann-Liouville** como $D_a^\alpha f(t) := \frac{d^m}{dt^m} (J_a^{m-\alpha} f)(t)$, es decir,

$$D_a^\alpha f(t) := \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], \quad (1.11)$$

siempre que la expresión del lado derecho exista. Si $\alpha = 0$ se define $D^0 = J^0 = I$, donde I representa el operador identidad.

Observación 1.3 Observemos que si α es un número entero positivo entonces, la definición anterior coincide con la derivada de orden entero. En efecto, si $\alpha = k, k \in \mathbb{N}$ y $t > a$ tenemos que

$$D_a^\alpha f(t) = D_a^k f(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} J_a^{k+1-k} f(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} J_a f(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}.$$

Ejemplo 1.2 Sea $f(t) = (t-a)^\gamma$ y α un número real positivo tal que $\gamma+1-\alpha > 0$. Entonces

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (t-a)^{\gamma-\alpha}, \quad (1.12)$$

En efecto, usando la definición de derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville y el ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{d^m}{dt^m} J_a^{m-\alpha} f(t), \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+m-\alpha)} (t-a)^{\gamma+m-\alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} ((t-a)^{\gamma+m-\alpha}) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+m-\alpha)} (\gamma+m-\alpha)(\gamma+m-\alpha-1) \dots (\gamma+1-\alpha) (t-a)^{\gamma-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma+1+m-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (t-a)^{\gamma-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (t-a)^{\gamma-\alpha} \end{aligned}$$

Observemos que este resultado coincide con el caso en que el orden es natural. En particular, para $n \in \mathbb{N}$, $a = 0$ y $\gamma = k > n$:

$$f^n(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}.$$

Ejemplo 1.3 Del ejemplo 1.2, si $\gamma = 0$, $f(t) = 1$ y $0 \leq \alpha < 1$ entonces

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, t > 0$$

Es decir, si $\alpha \notin \mathbb{N}$ la derivada de orden α de una constante es distinta de cero.

El siguiente teorema tomado de [5], da condiciones bajo las cuales la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville existe.

Teorema 1.4 Si $f \in AC([a, b])$, donde $AC([a, b])$ representa el conjunto de las funciones absolutamente continuas, y $0 < \alpha < 1$ entonces la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville $D^\alpha f$ existe casi en todas partes para $0 < \alpha < 1$.

Si $\alpha > 1$ la derivada $D^\alpha f$ existe si $\int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-m}} dt \in AC^n([a, b])$, donde m representa el menor entero tal que $\alpha < m$.

Demostración. Recordemos que para $0 < \alpha < 1$, $D^\alpha f = \frac{d}{dx} J^{(1-\alpha)} f$. Veamos que $J^{(1-\alpha)} f \in AC([a, b])$.

Como $f \in AC([a, b])$ entonces $f' \in L^1([a, b])$. Además podemos escribir

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s) ds.$$

Así,

$$J^{(1-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (1.13a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \left(f(a) + \int_a^t f'(s) ds \right) dt, \quad (1.13b)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{1-\alpha} (x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \left(\int_a^t f'(s) ds \right) dt \right] \quad (1.13c)$$

$$= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x f'(s) \left(\int_s^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} dt \right) ds \quad (1.13d)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha} ds \right]. \quad (1.13e)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha} ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x f'(s) \int_s^x (t-s)^{-\alpha} dt ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \int_a^t f'(s)(t-s)^{-\alpha} ds dt, \\
 &= \int_a^x \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds dt, \\
 &= \int_a^x J^{(1-\alpha)} f'(t) dt.
 \end{aligned}$$

Esta última integral corresponde a una función absolutamente continua y como que $f' \in L^1([a, b])$ se sigue que $J^{(1-\alpha)} f' \in L^1([a, b])$ (ver observación 1.2).

Como $\frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \in AC([a, b])$ podemos concluir que (1.13e) es absolutamente continua y así que $J^{(1-\alpha)} f \in AC([a, b])$ de donde $D^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} J^{(1-\alpha)} f(x)$ existe casi en todas parte. $\square$

Observación 1.4 La condición $\int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-m}} dt \in AC^n([a, b])$ del teorema anterior se tiene, si $f(s) \in AC^n([a, b])$.

1.3.1. Propiedades de la derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville

Consideremos algunas propiedades de la derivada de Riemann-Liouville tomadas de [4].

Teorema 1.5

1. Linealidad: Sean λ y μ constantes reales y $\alpha > 0$. Si existen las derivadas $D^\alpha f$ y $D^\alpha g$, entonces:

$$D^\alpha (\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g.$$

2. Si $f \in L^1([a, b])$ entonces $D^\alpha (J^\alpha f) = f$.

3. Sea $m-1 \leq \alpha < m$. Si $f \in C[a, b]$ y $D^\alpha f$ integrables entonces,

$$J^\alpha (D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{m-1} (D^{\alpha-j} f(a)) \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} - (J^{m-\alpha} f(a)) \frac{(t-a)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)}$$

4. Si $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ entonces $D^n D^\alpha f = D^{n+\alpha} f$.
Además si $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$, entonces

$$D^\alpha (D^n f) = D^{n+\alpha} f = D^n (D^\alpha f)$$

5. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m-1 < \alpha < m$ y $n-1 < \beta < n$. Si $r = \max(n, m)$ y $f^{(j)}(a) = 0$, para todo $j = 0, 1, \dots, r-1$, entonces

$$D^\alpha D^\beta f = D^\beta D^\alpha f = D^{\alpha+\beta} f. \quad (1.14)$$

Demostración.

1. Sea $k-1 \leq \alpha < k$

$$\begin{aligned} D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t \frac{\lambda f(s) + \mu g(s)}{(t-s)^{\alpha+1-k}} ds, \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-k}} ds + \frac{\mu}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\alpha+1-k}} ds, \\ &= \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t). \end{aligned}$$

2. De acuerdo con el teorema (1.3), $J^k f = J^{k-\alpha} J^\alpha f$, esto implica que

$$\begin{aligned} D^\alpha (J^\alpha f(t)) &= \frac{d^k}{dt^k} [J^{k-\alpha} (J^\alpha f(t))] , \\ &= \frac{d^k}{dt^k} (J^k f(t)) , \\ &= f(t). \end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$\begin{aligned} J^\alpha (D^\alpha f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} D^\alpha f(s) ds \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha D^\alpha f(s) ds \right) \end{aligned}$$

Integrando m veces por partes tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha D^\alpha f(s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha \frac{d^m}{ds^m} J^{(m-\alpha)} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-m+1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-m} J^{(m-\alpha)} f(s) ds \\
&\quad - \sum_{j=1}^m \frac{(t-a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(\alpha+2-j)} \frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}} J^{m-\alpha} f(a) \\
&= J^{(\alpha-m+1)} (J^{(m-\alpha)} f(t)) - \sum_{j=1}^m \frac{(t-a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(\alpha+2-j)} \frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}} J^{m-\alpha} f(a) \\
&= Jf(t) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(\alpha+2-j)} D^{\alpha-j} f(a) - \frac{(t-a)^{\alpha+1-m}}{\Gamma(\alpha+2-m)} J^{m-\alpha} f(a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
J^\alpha (D^\alpha f(t)) &= \frac{d}{dt} \left(Jf(t) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(\alpha+2-j)} D^{\alpha-j} f(a) - \frac{(t-a)^{\alpha+1-m}}{\Gamma(\alpha+2-m)} J^{m-\alpha} f(a) \right) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{m-1} (D^{\alpha-j} f(a)) \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} - (J^{m-\alpha} f(a)) \frac{(t-a)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)}.
\end{aligned}$$

4. Notemos que si $0 < \alpha \leq 1$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ ($n+m-1 \leq n+m-\alpha < n+m$) entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n} (D^{m-\alpha} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds; \\
&D^{n+m-\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

Haciendo $\alpha = m - \alpha$, $m-1 \leq \alpha < m$ tenemos que

$$\frac{d^n}{dt^n} (D^\alpha f(t)) = D^{n+\alpha} f(t).$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
D^{\alpha+n} (J^{(n)} g(t)) &= \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (J^{(m-\alpha)} J^{(n)} g(t)) \\
&= \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (J^{(n+m-\alpha)} g(t)) \\
&= D^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

Usando la última igualdad y la ecuación (1.8) tenemos que,

$$\begin{aligned} D^\alpha(f^{(n)}(t)) &= D^{\alpha+n} (J^{(n)} f^{(n)}(t)) \\ &= D^{\alpha+n} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} \right) \\ &= D^{\alpha+n} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k+1-\alpha-n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$, entonces

$$D^\alpha(f^{(n)}(t)) = D^{\alpha+n} f(t).$$

□

Observación 1.5 Las igualdades en (1.14) en general no son ciertas. Consideremos los siguientes ejemplos:

1. Sean $f(t) = t^{-1/2}$, $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/2$. Entonces de acuerdo a (1.12) con $a = 0$ y teniendo en cuenta que 0 es un polo de la función Γ se tiene que $D^{1/2}f(t) = 0$ y por lo tanto $D^{1/2}(D^{1/2}f(t)) = 0$. Por otro lado $D^{1/2+1/2}(f(t)) = D(f(t)) = -\frac{1}{2}t^{-3/2}$. De aquí que $D^\alpha D^\beta f(t) \neq D^{\alpha+\beta} f(t)$.
2. Sean $g(t) = t^{1/2}$, $\alpha = 1/2$ y $\beta = 3/2$. Entonces $D^{1/2}g(t) = \sqrt{\pi}/2$ y $D^{3/2}g(t) = 0$ de donde $D^{3/2}(D^{1/2}g(t)) = -\frac{1}{4}t^{3/2}$ y $D^{1/2}(D^{3/2}g(t)) = 0$, además $D^{1/2+3/2}f(t) = D^2g(t) = -\frac{1}{4}t^{3/2}$. Por lo tanto, en este caso se tiene que $D^\alpha D^\beta f(t) \neq D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$.

1.3.2. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Calculemos la Transformada de Laplace del operador $D^\alpha f(t)$. Con la notación anteriormente establecida tenemos que:

$$\mathcal{L}[D^\alpha f](s) = \mathcal{L}[D^m J^{m-\alpha} f](s) \tag{1.15}$$

$$= s^m \mathcal{L}[J^{m-\alpha} f](s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k J^{(m-\alpha)} f(0) s^{m-1-k} \tag{1.16}$$

$$= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k J^{(m-\alpha)} f(0) s^{m-1-k} \tag{1.17}$$

Es decir, bajo la suposición de existencia de la Transformada de Laplace, se requiere el conocimiento de los valores iniciales de las primeras $m - 1$ derivadas del operador $J^{m-\alpha}$.

La derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville involucra ciertas dificultades cuando ésta se usa en problemas físicos, las cuales están relacionadas con las siguientes características de esta definición:

- La derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville de una constante es distinta de cero.
- Esta derivada tiene una singularidad en su límite inferior, por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} D_a^\alpha f = \infty$, excepto cuando $f^{(k)}(a) = 0$. Esto es un inconveniente cuando se tienen problemas de condición inicial.
- La transformada de Laplace de la derivada de Riemann-Liouville depende de los valores iniciales de f y sus derivadas en cero, como se mostró en (1.15).

1.4. Derivada Fraccionaria de Caputo

El modelo matemático de ciertos problemas hace necesario considerar ecuaciones diferenciales con derivadas de orden fraccionario junto a condiciones iniciales. Sin embargo la definición de Riemann-Liouville no es suficiente para dar salida a esta necesidad pues, en este caso las condiciones iniciales correspondientes no tienen una interpretación física. Para resolver este problema consideremos una definición alternativa de derivada fraccionaria debida a Caputo (ver [1] y [2]). Tal definición permite plantear problemas con condiciones iniciales asociados a ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Consideremos la siguiente definición con algunas propiedades tomadas de [4].

Definición 1.3 Sea f una función con derivada m absolutamente integrable, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $m - 1 < \alpha < m$. Se define la **derivada fraccionaria de Caputo de orden α** , denotada por $D_*^\alpha f(t)$ como

$$D_*^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}} d\tau. \quad (1.18)$$

Proposición 1.1 Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $m - 1 < \alpha < m$, si f o alguna de sus $m - 1$ primeras derivadas no se anulan en a entonces

$$D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t) \neq J^{m-\alpha} D^m f(t) := D_*^\alpha f(t).$$

Demostración. Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m \in \mathbb{Z}$ con $m - 1 < \alpha < m$, entonces:

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t f^{(m)}(\tau)(t - \tau)^{m - \alpha - 1} d\tau \quad (1.19a)$$

$$= - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(a) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{-\alpha - 1} d\tau \quad (1.19b)$$

$$= - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(a) + \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{m - 1 - \alpha} d\tau \quad (1.19c)$$

$$= - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(a) + D^\alpha f(t). \quad (1.19d)$$

Mostremos por inducción sobre m que (1.19a) es igual a (1.19b).

(i) Sea $m = 1$, integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t f'(\tau)(t - \tau)^{-\alpha} d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left[-(t - a)^{-\alpha} f(a) - \alpha \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{-\alpha - 1} d\tau \right], \\ &= -\frac{(t - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{-\alpha - 1} d\tau. \end{aligned}$$

(ii) supongamos que se cumple para $m = k$, mostremos que se sigue para $m = k + 1$, es decir supongamos que

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(k - \alpha)} \int_a^t f^{(k)}(\tau)(t - \tau)^{k - \alpha - 1} d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{-\alpha - 1} d\tau - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(t - a)^{j - \alpha}}{\Gamma(j - \alpha + 1)} f^{(j)}(a). \end{aligned}$$

Considerando $m = k + 1$ tenemos

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(k + 1 - \alpha)} \int_a^t f^{(k+1)}(\tau)(t - \tau)^{k - \alpha} d\tau, \\ &= \frac{1}{(k - \alpha)\Gamma(k - \alpha)} \left[-(t - a)^{k - \alpha} f^{(k)}(a) + (k - \alpha) \int_a^t f^{(k)}(\tau)(t - \tau)^{k - \alpha - 1} d\tau \right], \\ &= -\frac{(t - a)^{k - \alpha} f^{(k)}(a)}{(k - \alpha)\Gamma(k - \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{-\alpha - 1} d\tau - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(t - a)^{j - \alpha}}{\Gamma(j - \alpha + 1)} f^{(j)}(a), \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{-\alpha - 1} d\tau - \sum_{j=0}^k \frac{(t - a)^{j - \alpha}}{\Gamma(j - \alpha + 1)} f^{(j)}(a). \end{aligned}$$

O sea que la fórmula es válida para cualquier $m \in \mathbb{Z}^+$.

Veamos ahora que:

$$\frac{d^m}{dt^m} \left(\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{m-1-\alpha} d\tau \right) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{-\alpha-1} d\tau.$$

Para esto mostremos que la antiderivada de orden m del lado derecho de esta igualdad es $\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{m-1-\alpha} d\tau$. Usando la ecuación (1.1) tenemos que:

$$\begin{aligned} J^m \left[\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\alpha-1} d\tau \right] &= \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} \left(\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^\tau f(s)(\tau-s)^{-\alpha-1} ds \right) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)(m-1)!} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-\tau)^{m-1} (\tau-s)^{-\alpha-1} d\tau ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)(m-1)!} \int_a^t f(s)(t-s)^{m+\alpha-1} \int_0^1 (1-u)^{m-1} u^{-\alpha-1} du ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)(m-1)!} \mathcal{B}(m, -\alpha) \int_a^t f(s)(t-s)^{m+\alpha-1} ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{m+\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

aquí hemos utilizado la sustitución $u = \frac{\tau-s}{t-s}$.

De (1.19) se tiene que

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a)$$

y usando (1.12) tenemos que

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^\alpha (t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) \quad (1.20)$$

$$= D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right). \quad (1.21)$$

□

Claramente si $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, m-1$ entonces $D_*^\alpha f = D^\alpha f$.

Además de la igualdad (1.21) podemos concluir que si $f(t)$ es una función constante entonces:

$$D_*^\alpha f(t) = 0, \quad \alpha > 0. \quad (1.22)$$

Por lo tanto considerando este resultado y el ejemplo 4, podemos establecer una clara diferencia entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la de Caputo: en el primer caso, la derivada de una constante es $\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0$, mientras que la derivada de una constante de acuerdo a la definición de Caputo es cero, lo que coincide con la derivada de orden entero.

Para establecer otra diferencia entre las definiciones de derivada de orden fraccionario según Riemann-Liouville y según Caputo, consideremos la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo.

1.4.1. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo.

Establezcamos la Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo $D_*^\alpha f$.

Usando (1.7) tenemos que

$$\mathcal{L}[D_*^\alpha f(t)](s) = \mathcal{L}[J^{m-\alpha} D^m f(t)](s) \quad (1.23a)$$

$$= \frac{\mathcal{L}[D^m f(t)](s)}{s^{m-\alpha}} \quad (1.23b)$$

$$= \frac{1}{s^{m-\alpha}} \left[s^m \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{m-1-k} \right] \quad (1.23c)$$

$$= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k}. \quad (1.23d)$$

Es decir la Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de orden α , sólo requiere el conocimiento de los valores iniciales de f y de sus $m-1$ primeras derivadas. Esto facilita el uso de la definición de derivada fraccionaria en los problemas de condición inicial.

Note además que (1.23) es la generalización de la propiedad de la Transformada de Laplace de la derivada de orden entero.

1.4.2. Transformada de Fourier de las integrales y las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo

A continuación calculamos la transformada de Fourier de la integral y la derivada fraccionarias de Riemann-Liouville. Para esto hagamos $a = -\infty$ y $0 < \alpha < 1$ en

las ecuaciones (1.2) y (1.11).

Usando (1.6) y (1.4) se tiene que $\mathcal{L}[\Phi_\alpha](s) = s^{-\alpha}$, es decir

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-st} dt = s^{-\alpha}.$$

Reemplazando $s = i\omega, \omega \in \mathbb{R}$ en la anterior igualdad se tiene que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^{-\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[\Phi_\alpha(t)](\omega) = (i\omega)^{-\alpha}.$$

Usando la propiedad de convolución de la Transformada de Fourier, encontramos que la transformada de Fourier de la integral fraccionaria de f es dada por:

$$\mathcal{F}[J^\alpha f](\omega) = (i\omega)^{-\alpha} \mathcal{F}[f](\omega). \quad (1.24)$$

Esta fórmula da también la transformada de Fourier de la integral fraccionaria de Caputo, pues en este caso tales integrales coinciden.

Para determinar la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria supongamos de nuevo que $a = \infty$, $n - 1 < \alpha < n$ y que la función considerada es tal que ella y sus derivadas son integrables por partes cuando $t \rightarrow -\infty$. Supongamos además que las derivadas de Riemann-Liouville y Caputo coinciden:

$$D^\alpha(f) = D_*^\alpha(f) = J^{n-\alpha} f^{(n)}.$$

Usando la ecuación (1.24) y las propiedades de la Transformada de Fourier tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[D^\alpha(g)](\omega) &= (i\omega)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) \\ &= (i\omega)^{\alpha-n} (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega) \\ &= (i\omega)^\alpha \mathcal{F}[f](\omega). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{F}[D^\alpha(g)](\omega) = (i\omega)^\alpha \mathcal{F}[f](\omega). \quad (1.25)$$

1.5. Derivada e Integral de Grünwald-Létnikov

En esta sección se definen la integral y la derivada fraccionaria de Grünwald-Létnikov de forma unificada, es decir, ambas pueden definirse como el mismo operador, denotado por ${}_a \mathbf{D}_t^\alpha$, teniendo en cuenta que para la integral se tiene $\alpha < 0$ y para la derivada será $\alpha > 0$.

La motivación que nos lleva a considerar esta definición es el hecho de que para funciones que tienen $m+1$ derivadas continuas para $t \geq 0$, coinciden las definiciones de Grünwald-Létnikov y de Riemann-Liouville de derivada de orden fraccionario α , $m-1 \leq \alpha < m$. Esto permite aproximar la derivada de Riemann-Liouville mediante una aproximación de la derivada de Grünwald-Létnikov, como veremos más adelante. La definición y los teoremas presentados a continuación son tomados de [4].

Consideremos la función continua f . Entonces si la derivada de orden entero $n \in \mathbb{N}$ existe puede escribirse como

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh).$$

De manera análoga puede demostrarse que si $p \in \mathbb{N}$, la p -ésima integral de f , que denotaremos por ${}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t)$, corresponde a:

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(t - kh), \quad (1.26)$$

donde $nh = t - a$ y $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = \frac{p(p+1) \dots (p+k-1)}{k!}$.

1.5.1. Integrales fraccionarias de orden arbitrario

A partir de la ecuación (1.26) se extiende el concepto de integral de orden $p \in \mathbb{R}$ arbitrario. Es decir, para $p \in \mathbb{R}$ la ecuación

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(t - kh). \quad (1.27)$$

representa la derivada o la integral de orden p según sea $p > 0$ o $p < 0$, respectivamente.

Si f es una función continua y $p > 0$, puede demostrarse la existencia del límite de la ecuación (1.27). Además, en este caso

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(t - kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-s)^{p-1} f(s) ds.$$

Más aún, si f es $m+1$ veces continuamente diferenciable ($m \in \mathbb{Z}$) entonces

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-s)^{p+m} f^{(m+1)}(s) ds.$$

1.5.2. Derivada de Grünwald-Létnikov de orden arbitrario

Si $p > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ es tal que $m > p - 1$ y f tiene $m + 1$ derivadas continuas sobre $[a, t]$, obtenemos la derivada de orden fraccionario de Grünwald-Létnikov a partir de la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-s)^{m-p} f^{(m+1)}(s) ds. \end{aligned}$$

1.5.3. Relación entre la derivada de Grünwald-Létnikov y la derivada de Riemann-Liouville

Si f es una función con $n - 1$ derivadas continuas en un intervalo $[a, T]$ y $f^{(n)}$ es integrable en $[a, T]$, entonces la derivada de Riemann-Liouville de orden α , $0 < \alpha < n$, existe y coincide con la derivada de Grünwald-Létnikov.

Si $0 \leq m - 1 \leq \alpha < m \leq n$, entonces para $a < t < T$ tenemos:

$$D^\alpha f(t) = {}_a\mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-1-\alpha} f^{(m)}(s) ds. \quad (1.28)$$

Notemos que el lado derecho de (1.28) puede escribirse como

$$\frac{d^m}{dt^m} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{m+k-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(2m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{2m-1-\alpha} f^{(m)}(s) ds \right]. \quad (1.29)$$

Después de integrar por partes m veces esta ecuación puede reescribirse como

$$\frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-1-\alpha} f(s) ds \right] = D^\alpha f(t);$$

recordemos que esta última expresión corresponde a la derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville, ecuación (1.11).

La equivalencia entre las derivadas de Grünwald-Létnikov y Riemann-Liouville dada mediante la ecuación (1.28) nos lleva a una importante consecuencia para la formulación de problemas aplicados. De la ecuación mencionada se deduce que la condición

$$[D^\alpha f(t)]_{t=a} = 0$$

es equivalente a las condiciones

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ para } k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Más aún, a partir de la equivalencia antes mencionada podemos usar una aproximación obtenida de la definición de Grünwald-Létnikov para evaluar cualquiera de las derivadas de orden fraccionario mencionadas, como mostramos a continuación.

Si definimos

$${}_a\Delta_h^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{j}{\alpha} f(t - jh),$$

donde $[\cdot]$ representa la parte entera, podemos escribir la derivada de Grünwald-Létnikov como:

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_a\Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha}.$$

De esta manera podemos considerar la siguiente aproximación de la derivada de Grünwald-Létnikov y bajo las condiciones antes mencionadas, de la derivada de Riemann-Liouville:

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) \approx_a \Delta_h^\alpha f(t).$$

Capítulo 2

PROBLEMAS INVERSOS MAL PUESTOS

2.1. Problemas inversos mal puestos

En muchos casos al matematizar un fenómeno físico nos encontramos que una situación determinada puede obtenerse de otra, intercambiando datos y las variables y viceversa, es decir, los datos de uno de los problemas son lo desconocido del otro e inversamente.

Uno de estos problemas es llamado directo, el cual ha sido usualmente estudiado con más anterioridad y tal vez en más detalle que el otro que es llamado problema inverso.

Una propiedad de los problemas inversos está relacionada con el concepto de problema bien puesto introducido por Hadamard, quien afirma que el modelo matemático de un problema físico tiene que tener las propiedades de existencia, unicidad y estabilidad de la solución.

Consideremos una definición más exacta.

Definición 2.1 (problema bien puesto) Sean X e Y espacios normados, $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación (lineal o no lineal). La ecuación $Tx = y$ es llamada bien puesta si se tiene que

1. *Existencia:* Para todo $y \in Y$ existe (al menos un) $x \in X$ tal que $Tx = y$.
2. *Unicidad:* Para todo $y \in Y$ existe a lo mas un $x \in X$ tal que $Tx = y$.
3. *Estabilidad:* La solución x depende continuamente de y , es decir, para toda sucesión $(x_n) \subset X$ con $Tx_n \rightarrow Tx$ cuando $n \rightarrow \infty$, se sigue que $x_n \rightarrow x$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Los problemas que no cumplen alguna de estas propiedades son llamados *mal-puestos*.

Consideremos algunos ejemplos de problemas inversos.

1. La diferenciación como problema inverso

La diferenciación y la integración son problemas matemáticos inversos mutuamente y aunque no hay claridad en cuál de estos problemas deba ser considerado como problema directo y cuál como inverso, estudiamos a continuación el problema de la diferenciación como el problema inverso. Veremos que a diferencia de la integración, la diferenciación corresponde a un problema mal puesto.

Consideremos un caso particular para ilustrar esta situación. Sean $f \in C^1[0, 1]$, $\delta \in (0, 1)$, y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y definamos

$$f_n^\delta(x) := f(x) + \delta \sin \frac{nx}{\delta}, \quad x \in [0, 1].$$

Entonces se tiene que

$$(f_n^\delta)'(x) = f'(x) + n \cos \frac{nx}{\delta}, \quad x \in [0, 1].$$

Considerando la norma uniforme tenemos que

$$\|f - f_n^\delta\|_\infty = \delta,$$

y

$$\|f' - (f_n^\delta)'\|_\infty = n.$$

Por lo tanto, si f y f_n^δ corresponden al dato exacto y al perturbado, respectivamente, entonces para un error en los datos arbitrariamente pequeño δ , el error en la derivada puede ser arbitrariamente grande.

Consideremos la ecuación integral de primer tipo:

$$(Kg)(s) = \int_0^s g(t)dt = f(s) - f(0). \quad (2.1)$$

En este caso el problema directo es encontrar la función f bajo la suposición que g es conocida, es decir, integrar.

El problema inverso, consiste en calcular g a partir del conocimiento de f con errores en los datos (es decir conocemos f_n^δ), entonces vimos, en el caso particular considerado anteriormente, que tales errores, de pequeña amplitud

δ , producen oscilaciones de alta frecuencia en la solución de este problema inverso.

Así, si queremos encontrar la derivada de una función que contiene errores en los datos, deberíamos poder excluir los errores de frecuencias arbitrariamente altas; para esto es necesario conocer una cota de f'' . En el ejemplo que estamos considerando deberíamos poder acotar el valor de n en términos de δ .

El operador K definido en (2.1) sobre el espacio $C[0, 1]$ es un operador lineal, inyectivo y continuo, pero su operador inverso no es acotado. Sin embargo, al restringir K al conjunto compacto en $C[0, 1]$, $\{g \in C[0, 1] : \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty \leq \gamma\}$, tenemos que la inversa de este operador restringido es continua en este rango puesto que la inversa de un operador continuo y biyectivo definido sobre un conjunto compacto también es continuo. De esta manera es posible restaurar la estabilidad del problema suponiendo cotas a priori para f' y f'' .

Supongamos que para $\delta \in (0, 1)$, f^δ es una aproximación de la función f tal que,

$$\|f - f^\delta\|_\infty \leq \delta.$$

Si $f \in C^2[0, 1]$, entonces

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h),$$

y si $f \in C^3[0, 1]$,

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2).$$

Esto muestra que la precisión del cociente de diferencias centradas depende de la suavidad del dato exacto.

2. El problema inverso del calor

Consideremos el problema de conducción de calor

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t), \quad x > 0, t > 0, \quad (2.2a)$$

$$u(1, t) = F(t), \quad t > 0 \quad (2.2b)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad x > 0 \quad (2.2c)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t > 0. \quad (2.2d)$$

Se supone además que $u(x, t)$ es acotada si $x \rightarrow \infty$. Cuando se conocen las condiciones iniciales y de borde y se busca la función de temperatura $u(x, t)$ que satisface (2.2), este problema se conoce como *problema directo*. Sin embargo, en la práctica, es común preguntarnos por el flujo del calor

o la temperatura en la superficie del objeto considerado. Este problema se conoce como *problema inverso de conducción de calor* (PICC).

Supongamos que se conoce sólo una aproximación f^ϵ de la función $f(t)$ a partir de la medición de la temperatura en el borde del objeto considerado, tal que $\|f - f^\epsilon\| < \epsilon$, $\epsilon > 0$. Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (2.2a) respecto al tiempo se tiene:

$$\widehat{u}_{xx}(x, \omega) = i\omega \widehat{u}(x, \omega), \quad x > 0, \omega \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación diferencial tiene por solución

$$\widehat{u}(x, \omega) = A(\omega)e^{\sqrt{|\omega|/2}(1+i\sigma)x} + B(\omega)e^{-\sqrt{|\omega|/2}(1+i\sigma)x},$$

donde $\sigma = \text{sign}(\omega)$.

Usando el hecho de que u debe ser acotada cuando $x \rightarrow \infty$ y haciendo $x = 1$ tenemos que

$$\widehat{F}(\omega) = \widehat{f}(\omega)e^{-\sqrt{|\omega|/2}(1+i\sigma)}$$

por lo tanto,

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{F}(\omega)e^{\sqrt{|\omega|/2}(1+i\sigma)}.$$

Como en la práctica no conocemos F con exactitud sino una aproximación F^ϵ , que suponemos pertenece a $L^2(-\infty, \infty)$, no podemos garantizar que las componentes de alta frecuencia de F decrezcan más rápido que el factor $e^{\sqrt{|\omega|/2}}$, lo cual es necesario para garantizar que $\widehat{F}(\omega)e^{\sqrt{|\omega|/2}(1+i\sigma)}$ y por tanto $\widehat{f}$ estén en $L^2(-\infty, \infty)$.

Concluimos así que el PICC (2.2) es mal puesto en las componentes de alta frecuencia, puesto que éstas crecen exponencialmente.

Como en el caso de la diferenciación las componentes de alta frecuencia crecen linealmente, decimos que el PICC es un problema mucho más mal puesto que el de diferenciación.

2.2. Reducción de la ecuación de difusión a una ecuación de orden fraccionario

Consideremos el problema de conducción de calor, con condiciones iniciales, a través de un cuerpo semi-infinito:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = f(t), & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x > 0 \\ u_x(0, t) = q(t), & t > 0; \end{cases} \quad (2.3)$$

donde t representa el tiempo y x mide la distancia de la superficie caliente. Suponemos además que $u(x, t)$ es acotada cuando $x \rightarrow \infty$ y $t > 0$. Una versión de la Ley de Fourier de conducción de calor establece que el flujo de calor q en un punto x en el tiempo t es dado por $q(x, t) = -\kappa u_x(x, t)$, donde κ es una constante positiva llamada *la conductividad térmica*.

Usando la ecuación diferencial y la primera condición de borde reescribiremos este problema a través de una ecuación diferencial de orden fraccionario.

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial del problema obtenemos:

$$sU(x, s) - u(x, 0) = kU_{xx}(x, s), \quad (2.4)$$

donde $U(x, s)$ representa la Transformada de Laplace de $u(x, t)$ respecto a la variable temporal t .

Considerando los siguientes cambios de variable:

$$\Delta u(x, t) = u(x, t) - u(x, 0), \quad \overline{\Delta u}(x, t) = \mathcal{L}[\Delta u(x, t)](x, s),$$

$$W(r) = \frac{\overline{\Delta u}}{r^{1/2}} \quad \text{y} \quad r = x\sqrt{\frac{s}{k}},$$

tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{\Delta u} = \sqrt{\frac{s}{k}} \left(\frac{1}{2} r^{-1/2} W(r) + r^{1/2} \frac{dW}{dr} \right),$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{\Delta u} = \frac{s}{k} \left(-\frac{1}{4} r^{-3/2} W(r) + r^{-1/2} \frac{dW}{dr} + r^{1/2} \frac{d^2 W}{dr^2} \right).$$

Reemplazando las anteriores igualdades en (2.4) tenemos:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2}{dr^2} W(r) + r \frac{d}{dr} W(r) = \left(r^2 + \frac{1}{4} \right) W(r), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} W(r) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

La anterior ecuación es una ecuación de Bessel modificada con solución:

$$W(r) = \alpha \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}} + \beta \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r}.$$

Para que se satisfaga la segunda condición de la ecuación (2.5) tiene que ser $\alpha = 0$, por lo tanto tenemos que

$$W(r) = \beta \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r}.$$

De esta ecuación y usando la definición de W se tiene que $\overline{\Delta u} = \beta \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-r}$, y por tanto,

$$\frac{d\overline{\Delta u}}{dr} = -\beta \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-r} = -\overline{\Delta u}.$$

Usando las definiciones de $\overline{\Delta u}$ y r se tiene que:

$$-\frac{\partial \overline{\Delta u}}{\partial x} = \frac{d\overline{\Delta u}}{dr} \frac{dr}{dx} = \sqrt{\frac{s}{k}} \overline{\Delta u}.$$

Aplicando la Transformada inversa de Laplace y la ecuación ((1.23d)) se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \Delta u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \Delta u(x, t).$$

Es decir,

$$-\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} u(x, t) - \frac{u_0}{\sqrt{\pi k t}}. \quad (2.6)$$

Esta última ecuación es equivalente a la ecuación diferencial de (2.3); sin embargo en este caso se han reducido los órdenes de las derivadas. Esta ecuación tiene derivada espacial de orden 1 y derivada temporal de orden $1/2$.

Consideremos de nuevo el PICC (2.3). En este caso estamos interesados en encontrar el flujo del calor $q(t) = -ku_x(0, t)$, el cual, de acuerdo a la ecuación (2.6), está dado por:

$$q(t) = \sqrt{k} \frac{d^{1/2} u(0, t)}{dt^{1/2}} - u_0 \sqrt{\frac{k}{\pi t}}. \quad (2.7)$$

Así el problema se reduce al cálculo de la derivada de orden $1/2$, de la condición de borde, la cual suponemos que se conoce sólo aproximadamente.

Para esto nos concentraremos en el estudio del cálculo de derivadas de orden fraccionario y veremos que tal cálculo nos lleva a un problema mal puesto.

2.3. El cálculo de la derivada fraccionaria de orden $1/2$ como problema mal puesto

El problema de calcular q , es un problema mal puesto, como se muestra a continuación.

Estamos interesados en el cálculo del flujo de calor mediante la ecuación (2.7). Si hacemos $u_0 = 0$ y $k = 1$ debemos calcular

$$q(t) = \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1/2}} ds. \quad (2.8)$$

Si suponemos que f tiene derivada continua en $(0, 1)$ e integramos por partes tenemos que

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \left(2f(0)\sqrt{t} + 2 \int_0^t f'(s)(t-s)^{1/2} ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{f(0)}{\sqrt{t}} + \frac{d}{dt} 2 \int_0^t f'(s)(t-s)^{1/2} ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}} ds, \end{aligned}$$

suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $f(0) = 0$.

Notemos que a partir de la última expresión podemos escribir el flujo q como una convolución. Para esto definimos la función k definida como

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{t}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Así tenemos que

$$q = k * f'. \quad (2.9)$$

Además, si extendemos la función f a la recta real asignándole el valor cero si $t < 0$, tenemos que

$$\widehat{q}(\omega) = \sqrt{i\omega} \widehat{f}(\omega),$$

tal como mostramos en (1.25). De aquí que

$$|q(\omega)| \leq \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} |\widehat{f}(\omega)|.$$

De esta forma tenemos que los errores introducidos por la función f amplifican el error en el cálculo de q por el factor $\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}$.

Es decir, el cálculo del flujo de calor usando derivada de orden fraccionario es un problema mal puesto.

En el siguiente capítulo se desarrolla un método numérico para resolver el problema de inestabilidad, presentado en el cálculo del flujo, a partir de la función de datos conocida.

Capítulo 3

REGULARIZACIÓN DE PROBLEMAS INVERSOS

Cuando trabajamos con problemas inversos es común encontrar que estos son mal puestos; es decir, problemas en los cuales no se cumplen algunas de las condiciones de la definición 2.1. Cuando falla la condición de existencia de la solución o la unicidad, en general se amplía o se reduce el espacio solución como se hace, por ejemplo, con el concepto de *inversa generalizada*, cuya definición se presenta a continuación (para más detalles ver [6]).

Sea T un operador lineal continuo entre espacios de Hilbert. Consideremos la ecuación de la forma

$$Tx = y. \quad (3.1)$$

Supongamos que esta ecuación no tiene solución o que si existe, tal solución no es única. Estamos interesados en hallar una solución generalizada que cumpla ciertas condiciones de interés.

Definición 3.1 Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert.

Llamaremos a $x \in X$ **solución de mínimos cuadrados** de $T(x) = y$ si

$$\|Tx - y\| = \inf \{ \|Tz - y\| : z \in X \}.$$

$x \in X$ es llamada **solución generalizada** de $Tx = y$, si es una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$ y

$$\|x\| = \inf \{ \|z\| : z \text{ es una solución de mínimos cuadrados de } T(x) = y \}.$$

Es decir, la solución generalizada se define como la solución de mínimos cuadrados de mínima norma. Consideremos el siguiente resultado que caracteriza la inversa generalizada del operador T .

Denotaremos por $\mathcal{N}(T)$ y $R(T)$ al núcleo y al rango de T respectivamente.

Teorema 3.1 *Sea T un operador lineal acotado y*

$$\tilde{T} = T|_{\mathcal{N}(T)^\perp} : \mathcal{N}(T)^\perp \longrightarrow R(T).$$

Entonces $\tilde{T}$ es biyectiva y existe una única extensión lineal $T^\dagger$ de $\tilde{T}^{-1}$ con

$$D(T^\dagger) = R(T) + R(T)^\perp \quad (3.2)$$

y

$$\mathcal{N}(T^\dagger) = R(T)^\perp. \quad (3.3)$$

Demostración. Puesto que $\mathcal{N}(\tilde{T}) = \{0\}$ y $R(\tilde{T}) = R(T)$, entonces $\tilde{T}$ es biyectiva y por lo tanto existe $\tilde{T}^{-1}$.

Además por (3.3) y el requisito de que $T^\dagger$ sea lineal, para todo $y \in D(T^\dagger)$ con la representación única $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in R(T)$ y $y_2 \in R(T)^\perp$, $T^\dagger(y)$ tiene que ser $\tilde{T}^{-1}(y_1)$ pues $T^\dagger(y) = T^\dagger(y_1) + T^\dagger(y_2) = T^\dagger(y_1) = \tilde{T}^{-1}(y_1)$. $\square$

Definición 3.2 *A la extensión lineal única de $\tilde{T}^{-1}$ se le llama **La inversa generalizada de Moore-Penrose** $T^\dagger$ de $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

Las siguientes son algunas propiedades de la inversa generalizada de Moore-Penrose. La demostración puede consultarse en [6].

Proposición 3.1 *Sean ahora (y en adelante) P y Q proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{N}(T)$ y $\text{adh}(R(T))$, respectivamente. Entonces $R(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$ y*

$$\begin{aligned} TT^\dagger T &= T(\text{inversa interna}) \\ T^\dagger TT^\dagger &= T^\dagger(\text{inversa externa}) \\ T^\dagger T &= I - P \\ TT^\dagger &= Q|_{D(T^\dagger)}. \end{aligned}$$

Proposición 3.2 *La inversa generalizada de Moore-Penrose $T^\dagger$ tiene grafo cerrado $\text{Gr}(T^\dagger)$. Además $T^\dagger$ es acotado (continuo) si y sólo si $R(T)$ es cerrado.*

Teorema 3.2 Sea $y \in D(T^\dagger)$. Entonces $Tx = y$ tiene una solución generalizada única, dada por

$$x^\dagger = T^\dagger y.$$

El conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados es $x^\dagger \oplus \mathcal{N}(T)$.

Teorema 3.3 Sea $y \in D(T^\dagger)$. Entonces $x \in X$ es una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$ si y sólo si se tiene la ecuación normal $T^*Tx = T^*y$. Donde T^* representa el operador adjunto de T .

Del teorema anterior se sigue que $T^\dagger y$ es la solución de mínima norma de $T^*Tx = T^*y$, es decir, $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$.

Es importante notar que aunque la introducción del concepto de solución generalizada hace cumplir la unicidad, no siempre lleva a un problema con solución, y en general no resuelve la inestabilidad del problema.

Cuando el problema inverso considerado es tal que, las soluciones son inestables bajo perturbaciones en los datos, es decir no se cumple la condición (3) de estabilidad en la definición 2.1, generalmente se usan métodos numéricos para resolver este problema, los cuales son conocidos como *métodos de regularización*.

A continuación presentamos en términos generales el proceso de regularización.

El proceso de regularización consiste, en aproximar un problema mal puesto por una familia de problemas bien puestos que dependen de uno o más parámetros.

Consideremos la ecuación

$$Tx = y, \tag{3.4}$$

donde T es un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert.

Suponamos que $x^\dagger = T^\dagger y$ es la solución mejor aproximada del problema pero que $T^\dagger$ es un operador no acotado. Así, considerando que no se conoce y exactamente, sino una aproximación y^δ tal que $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$, buscamos una aproximación de $x^\dagger$, denotada por x_α^δ , que dependa continuamente de y^δ y que además escogiendo adecuadamente el parámetro de regularización α , cumpla que x_α^δ tiende a $x^\dagger$ cuando el nivel de ruido δ tienda a cero.

La ecuación (3.4) debe considerarse no sólo para un y específico, sino como una colección de ecuaciones para todo y en el rango de T o para todo y en el dominio de $T^\dagger$. Así, la idea es considerar la regularización de tal colección de ecuaciones.

En este sentido, regularizar el operador no acotado $T^\dagger$ consiste en reemplazarlo por una familia $\{R_\alpha\}$, que depende de un parámetro α , de operadores continuos. De esta forma $x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta$, aproxima la solución $x^\dagger$.

Consideremos la definición:

Definición 3.3 Sean $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal acotado entre los espacios de Hilbert $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, $\alpha_0 \in (0, \infty]$ y para cada $\alpha \in (0, \alpha_0)$, sea $R_\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador continuo. La familia $\{R_\alpha\}$ es llamada una regularización o un operador de regularización si para todo Y en el dominio de $T^\dagger$, existe una regla de selección del parámetro $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ \|R_{\alpha(\delta, y^\delta)} - T^\dagger y\| : y^\delta \in \mathcal{Y}, \|y^\delta - y\| \leq \delta \} = 0. \quad (3.5)$$

Se supone que $\alpha : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow (0, \alpha_0)$ es tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ \alpha(\delta, y^\delta) : y^\delta \in \mathcal{Y}, \|y^\delta - y\| \leq \delta \} = 0. \quad (3.6)$$

Si se cumplen las ecuaciones (3.5) y (3.6) entonces, el par (R_α, α) es llamado un método de regularización convergente para cada y en el dominio de $T^\dagger$.

Notemos que un método de regularización se forma por un operador de regularización y por una regla de selección de parámetro, tal que las soluciones regularizadas, que dependen del parámetro, converjan cuando el nivel de ruido tienda a cero.

Observación 3.1 Si (R_α, α) es un método de regularización convergente, entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{\alpha(\delta, y)} y = T^\dagger y$$

para toda $y \in D(T^\dagger)$. Por lo tanto si α es continua respecto a δ , entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} R_\sigma y = T^\dagger y.$$

La última igualdad se cumple sólo para los valores de σ que pertenecen al rango de α .

Si para todo α , R_α es lineal, el método correspondiente es llamado un método de regularización lineal y la familia $\{R_\alpha\}$ un operador de regularización lineal.

Proposición 3.3 Sea R_α una regularización lineal, x_α definida para todo $y \in Y$ como:

$$x_\alpha := R_\alpha y,$$

entonces $\{x_\alpha\}$ converge a $T^\dagger$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ para $y \in D(T^\dagger)$ y si

$$\sup \{ \|TR_\alpha\| : \alpha > 0 \} < \infty,$$

entonces $\|x_\alpha\| \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ para $y \notin D(T^\dagger)$.

3.1. Molificación

Cuando buscamos la solución del problema $Tx = y$ y encontramos que es un problema demasiado mal puesto para poder determinar adecuadamente $x^\dagger$, debido a que el problema tiene componentes de alta frecuencia de los datos y de la solución, entonces se intenta cambiar el problema por uno menos mal puesto y de esta manera buscamos una versión *molificada* de la solución que llamaremos $E_\gamma x^\dagger$, donde E_γ es un operador de molificación que depende de un parámetro γ . La teoría presentada en esta sección fue tomada de [9], [6], [7], [8].

En términos generales puede describirse el proceso de molificación en la siguiente forma:

Consideremos el problema de encontrar x a partir de la ecuación:

$$Tx = y \quad (3.7)$$

e introduzcamos un operador suave $E_\gamma : X \rightarrow X$, tal que $E_\gamma x \rightarrow x$ para todo $x \in X$ cuando $\gamma \rightarrow 0$.

Si X es un espacio de funciones adecuado, representamos E_γ por medio de un *molificador* e_γ como

$$(E_\gamma x)(s) = \langle e_\gamma(s, \cdot), x \rangle.$$

De esta manera en lugar de $x^\dagger$ buscamos $E_\gamma x^\dagger$ para algún $\gamma > 0$. Suponemos que e_γ puede representarse como

$$T^* v_s^\gamma = e_\gamma(s, \cdot). \quad (3.8)$$

Así, si $Tx^\dagger = y$, calculamos $E_\gamma x^\dagger$ como:

$$\begin{aligned} (E_\gamma x^\dagger)(s) &= \langle e_\gamma(s, \cdot), x^\dagger \rangle \\ &= \langle T^* v_s^\gamma, x^\dagger \rangle \\ &= \langle v_s^\gamma, Tx^\dagger \rangle \\ &= \langle v_s^\gamma, y \rangle \end{aligned}$$

En lo que sigue denotaremos por $C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, al conjunto de funciones tales que ellas y sus derivadas de todos los órdenes son continuas en Ω y por $C_0^\infty(\Omega)$ al conjunto de funciones de $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto.

Definición 3.4 Sea f una función localmente integrable en un conjunto acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ y ρ una función definida en $\mathbb{R}$ que satisface que

$$i. \quad \rho \in C^\infty(\mathbb{R})$$

ii. $\rho(x) = 0$ para todo x tal que $|x| \geq 1$ y $\rho \geq 0$ si $|x| < 1$

iii. $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$.

Para todo $\delta > 0$ se define la familia de funciones

$$\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

1

El molificador J_δ de f se define como la convolución

$$J_\delta f(t) := (\rho_\delta * f)(t) = \int_{\Omega} \rho_\delta(t-s)f(s)ds.$$

La importancia del molificador $J_\delta f$ proviene del hecho de que es una función con un comportamiento muy similar al de f , pero con la ventaja de que es una función muy suave. Más aún, consideremos el siguiente resultado.

Teorema 3.4 Sea f una función localmente integrable en un conjunto acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Entonces $J_\delta f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Demostración. Como $\rho_\delta(x)$ es una función continua, para todo $\epsilon > 0$, existe $\eta(\epsilon) > 0$ tal que si $|h| < \eta$ entonces $|\rho_\delta(x+h) - \rho_\delta(x)| < \epsilon$. Por lo tanto,

$$|J_\delta f(x+h) - J_\delta f(x)| = \left| \int_{\Omega} f(s) (\rho_\delta(x+h-s) - \rho_\delta(x-s)) ds \right| \leq \epsilon \left| \int_{\Omega} f(s) ds \right|.$$

Como por hipótesis se tiene que f es localmente integrable, entonces la última integral es finita y por ser $\epsilon > 0$ arbitrario, se concluye que $J_\delta f$ es continua.

Como $\rho_\delta \in C_0^\infty((-\delta, \delta))$, usando la definición de $J_\delta f$, se tiene la propiedad de diferenciación de $J_\delta f$. $\square$

Teorema 3.5 Si $f \in L^p(\Omega)$ entonces $\|J_\delta f\|_{p,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega}$

Demostración. Usando la desigualdad de Hölder con $q \geq 1$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

¹Note que la función ρ_δ satisface las condiciones (i) a (iii) enunciadas anteriormente, para todo $\delta > 0$. Además $\rho \in C^\infty((-1, 1))$ y $\rho_\delta \in C^\infty((-\delta, \delta))$.

tenemos que

$$\begin{aligned}
 |J_\delta f(x)|^p &= \left| \int_{\Omega} f(s) (w_\delta(x-s))^{\frac{1}{p}} (w_\delta(x-s))^{\frac{1}{q}} ds \right|^p \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |f(s)|^p |w_\delta(x-s)| ds \right) \left(\int_{\Omega} |w_\delta(x-s)| ds \right)^{\frac{p}{q}} \\
 &= \int_{\Omega} |f(s)|^p |w_\delta(x-s)| ds.
 \end{aligned}$$

Usando el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
 \|J_\delta f\|_{p,\Omega}^p &= \int_{\Omega} |J_\delta f(x)|^p dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} |f(s)|^p |w_\delta(x-s)| ds dx \\
 &= \int_{\Omega} |f(s)|^p \int_{\Omega} |w_\delta(x-s)| dx ds \\
 &= \int_{\Omega} |f(s)|^p ds \\
 &= \|f\|_{p,\Omega}^p.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6 *Sea f una función continua en un punto $x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |J_\delta f(x) - f(x)| = 0.$$

La convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω .

Demostración. Si extendemos la función f a $\mathbb{R}$ haciendo $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} - \Omega$ tenemos,

$$|J_\delta f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} w_\delta(x-y) |f(y) - f(x)| dy \leq \sup_{|y-x| < \delta} |f(y) - f(x)|. \quad (3.9)$$

Si δ tiende a cero, el lado derecho de (3.9) tiende a cero y se tiene el resultado. □

Teorema 3.7 *Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\Omega)$, entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|J_\delta f - f\|_{p,\Omega} = 0$.*

Consideremos un caso particular de ρ_δ . Para $\delta > 0$ y $p > 0$, definamos

$$A_p = \left(\int_{-p}^p e^{-s^2} ds \right).$$

Se define el núcleo Gaussiano como

$$\rho_\delta(x) = \begin{cases} \frac{A_p}{\delta} e^{-x^2/\delta^2}, & |x| \leq p\delta \\ 0, & |x| > p\delta \end{cases}$$

De acuerdo a la definición 3.4 tenemos que

$$\begin{aligned} J_\delta f(x) &= (\rho_\delta * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(x-s) f(s) ds \\ &= \int_{x-p\delta}^{x+\delta} \rho_\delta(x-s) f(s) ds. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.8 [Consistencia] Si f es una función Lipschitz definida en $\mathbb{R}$, entonces existe una constante C que no depende de δ tal que $\|J_\delta f - f\|_\infty \leq C\delta$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $Lip(f) = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} |J_\delta f(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(x-s) f(s) ds - f(x) \right| \\ &\leq \int_{-p\delta}^{p\delta} \rho_\delta(s) |f(x-s) - f(s)| ds \\ &\leq Lip(f) \int_{-p\delta}^{p\delta} \rho_\delta(s) |s| ds \\ &= Lip(f) \left(\int_{-p\delta}^0 \rho_\delta(s) (-s) ds + \int_0^{p\delta} \rho_\delta(s) s ds \right) \\ &= Lip(f) \left(\int_{-p\delta}^0 A_p \delta^{-1} e^{-s^2/\delta^2} (-s) ds + \int_0^{p\delta} A_p \delta^{-1} e^{-s^2/\delta^2} s ds \right) \\ &= Lip(f) \left(-\frac{\delta}{2} \int_{p^2}^0 A_p e^{-u} du + \frac{\delta}{2} \int_0^{p^2} A_p e^{-u} du \right) \\ &= Lip(f) \left(\delta \int_0^{p^2} A_p e^{-s} ds \right) \\ &= Lip(f) A_p \delta \int_0^{p^2} e^{-s} ds \\ &\leq Lip(f) \delta. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.9 (Estabilidad) Si $f, f^\epsilon \in C(\mathbb{R})$ son tales que $\|f - f^\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$, entonces $\|J_\delta f - J_\delta f^\epsilon\| \leq \epsilon$.

Demostración.

$$\begin{aligned} |J_\delta f(x) - J_\delta f^\epsilon(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(x-s) (f(s) - f^\epsilon(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{-p\delta}^{p\delta} \rho_\delta(x-s) |f(s) - f^\epsilon(s)| ds \\ &\leq \epsilon \int_{-p\delta}^{p\delta} \rho_\delta(x-s) ds = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.10 Si f es una función Lipschitz definida en $\mathbb{R}$, $f^\epsilon \in C^0(\mathbb{R})$ y $\|f - f^\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$, entonces $\|J_\delta f^\epsilon - f\|_\infty \leq C\delta + \epsilon$.

Demostración. Usando los dos teoremas anteriores y la desigualdad triangular se tiene que:

$$\|J_\delta f^\epsilon - f\|_\infty \leq \|J_\delta f - f\|_\infty + \|J_\delta f - J_\delta f^\epsilon\|_\infty \leq C\delta + \epsilon$$

□

3.1.1. δ -molificación discreta de una función discreta

Consideremos una función discreta $G = \{g_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ definida sobre el conjunto de números reales $K = \{x_j : j \in \mathbb{Z}\}$ que cumple que $|x_{j+1} - x_j| > d$, donde d es una cantidad real positiva. Veamos cómo se define la molificación para este tipo de funciones. Los resultados de esta sección con sus respectivas demostraciones hacen parte de [9].

Definición 3.5 Sea $S_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$. Se define la δ -molificación discreta de la función G por medio de la siguiente fórmula:

$$J_\delta G(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_{S_{j-1}}^{S_j} \rho_\delta(x-s) ds \right) g_j.$$

Note que de acuerdo con la definición de ρ_δ se tiene que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_{S_{j-1}}^{S_j} \rho_\delta(x-s) ds \right) = 1.$$

Teorema 3.11 Sean $\Delta x = \sup_{j \in \mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$ y g una función Lipschitz definida sobre $\mathbb{R}$. Entonces:

1. Si $G = \{g_j = g(x_j) : j \in \mathbb{Z}\}$ es la versión discreta de g , entonces existe una constante C que no depende de δ tal que

$$\|J_\delta G - g\|_\infty \leq C(\delta + \Delta x).$$

2. Si $G = \{g_j : j \in \mathbb{Z}\}$ y $G^\epsilon = \{g_j^\epsilon : j \in \mathbb{Z}\}$, son funciones discretas definidas sobre un conjunto discreto de números reales K y tales que $\|G - G^\epsilon\|_{\infty, K} \leq \epsilon$, entonces $\|J_\delta G - J_\delta G^\epsilon\| \leq \epsilon$.
3. Si G es la versión discreta de g y $G^\epsilon = \{g_j^\epsilon : j \in \mathbb{Z}\}$ es la versión discreta perturbada de g que satisface que $\|G - G^\epsilon\|_{\infty, K} \leq \epsilon$, entonces existe una constante C que no depende de δ y tal que $\|J_\delta G^\epsilon - J_\delta g\|_\infty \leq C(\epsilon + \Delta x)$ y $\|J_\delta G^\epsilon - g\|_\infty \leq C(\epsilon + \delta + \Delta x)$.

Demostración.

1. Como $\|J_\delta G - g\|_\infty \leq \|J_\delta G - J_\delta g\|_\infty + \|J_\delta g - g\|_\infty$ donde el último miembro del lado izquierdo de la desigualdad fue acotado en el teorema 3.8 por $C\delta$, resta solamente acotar el primer miembro. Para esto notemos que para $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |J_\delta g(x) - J_\delta G(x)| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s) |g(s) - g(s_j)| ds \\ &\leq \text{Lip}(g) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s) |s - x_j| ds \\ &\leq \text{Lip}(g) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s) \Delta x ds \\ &\leq \text{Lip}(g) \Delta x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|J_\delta G - J_\delta g\|_\infty \leq \text{Lip}(g) \Delta x$. Y así completamos la prueba.

2. Sea $x_j \in K$,

$$\begin{aligned} |J_\delta G^\epsilon(x_j) - J_\delta G(x_j)| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s) ds |g^\epsilon(x_j) - g(x_j)| ds \\ &\leq \epsilon \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s) ds = \epsilon. \end{aligned}$$

3. Usando la desigualdad triangular y los resultados 1 y 2, tenemos que:

$$\|J_\delta G^\epsilon - J_\delta g\|_\infty \leq \|J_\delta G^\epsilon - J_\delta G\|_\infty + \|J_\delta G - J_\delta g\|_\infty \leq \epsilon + C\Delta x.$$

y

$$\|J_\delta G^\epsilon - g\|_\infty \leq \|J_\delta G^\epsilon - J_\delta g\|_\infty + \|J_\delta g - g\|_\infty \leq C(\epsilon + \Delta x) + C\delta.$$

□

3.1.2. Diferenciación Numérica

Aplicemos el método de molificación al cálculo de la derivada de una función suave f , suponiendo que no se conoce f con exactitud, sino una aproximación f^ϵ . En este caso intentaremos calcular la derivada de la función molificada $(J_\delta f)'$.

Notemos que por las propiedades de la convolución tenemos que:

$$(\rho_\delta * f)' = \rho'_\delta * f = \rho_\delta * f'.$$

Sin embargo, en la práctica al usar el segundo miembro de la expresión anterior, se presenta un inconveniente al intentar escoger el parámetro de molificación δ , pues no es obvio cómo hacer la selección. En este sentido, es más conveniente calcular la derivada de la función molificada $J_\delta f$. A continuación se presentan algunas propiedades de la δ -molificación aplicada a la diferenciación de una función a partir de una función con ruido.

Teorema 3.12

1. (Consistencia) Si f' es una función Lipschitz definida en $\mathbb{R}$, entonces existe una constante C que no depende de δ tal que $\|(J_\delta f)' - f'\|_\infty \leq C\delta$.
2. (Estabilidad) Si f y f' son funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$ y $\|f - f^\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$, entonces existe una constante C que no depende de δ tal que

$$\|(J_\delta f)' - (J_\delta f^\epsilon)'\|_\infty \leq C\epsilon/\delta.$$

3. (Convergencia) Si f y f' son como en (2) entonces

$$\|(J_\delta f^\epsilon)' - f'\|_\infty \leq C(\delta + \epsilon/\delta).$$

Molificación discreta y diferenciación

Consideremos ahora el caso en el que se tiene una función discreta G . Sea $\Delta x = \sup_{j \in \mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$ y $K = \{x_j : j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.

Teorema 3.13

1. (Consistencia) Sean g' una función Lipschitz sobre $\mathbb{R}$ y $G = \{g_j = g(x_j), j \in \mathbb{Z}\}$ la versión discreta de g . Entonces existe una constante C independiente de δ tal que $\|(J_\delta G)' - g'\|_\infty \leq C \left(\delta + \frac{\Delta x}{\delta} \right)$.
2. Si $G = \{g_j : j \in \mathbb{Z}\}$ y $G^\epsilon = \{g_j^\epsilon : j \in \mathbb{Z}\}$, son funciones discretas definidas sobre K y tales que $\|G - G^\epsilon\|_{\infty, K} \leq \epsilon$, entonces

$$\|(J_\delta G)' - (J_\delta G^\epsilon)'\|_\infty \leq 4A_p \epsilon / \delta.$$

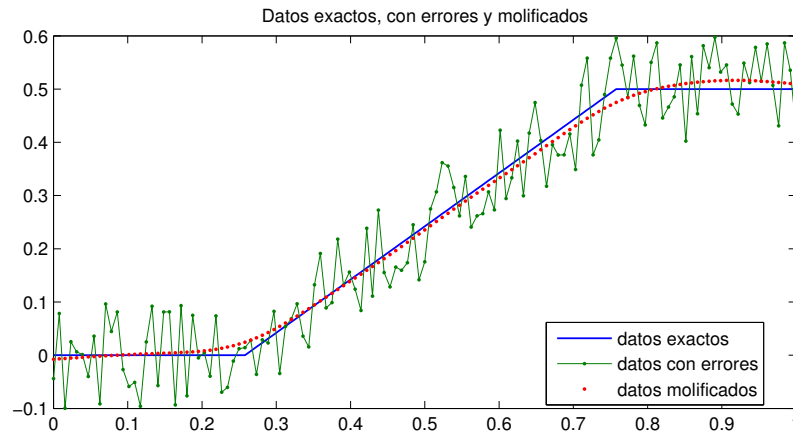
3. Si g' es una función Lipschitz sobre $\mathbb{R}$, G es la versión discreta de g y $G^\epsilon = \{g_j^\epsilon : j \in \mathbb{Z}\}$ es la versión discreta perturbada de g que satisface que $\|G - G^\epsilon\|_{\infty, K} \leq \epsilon$, entonces, existe una constante C que no depende de δ y tal que

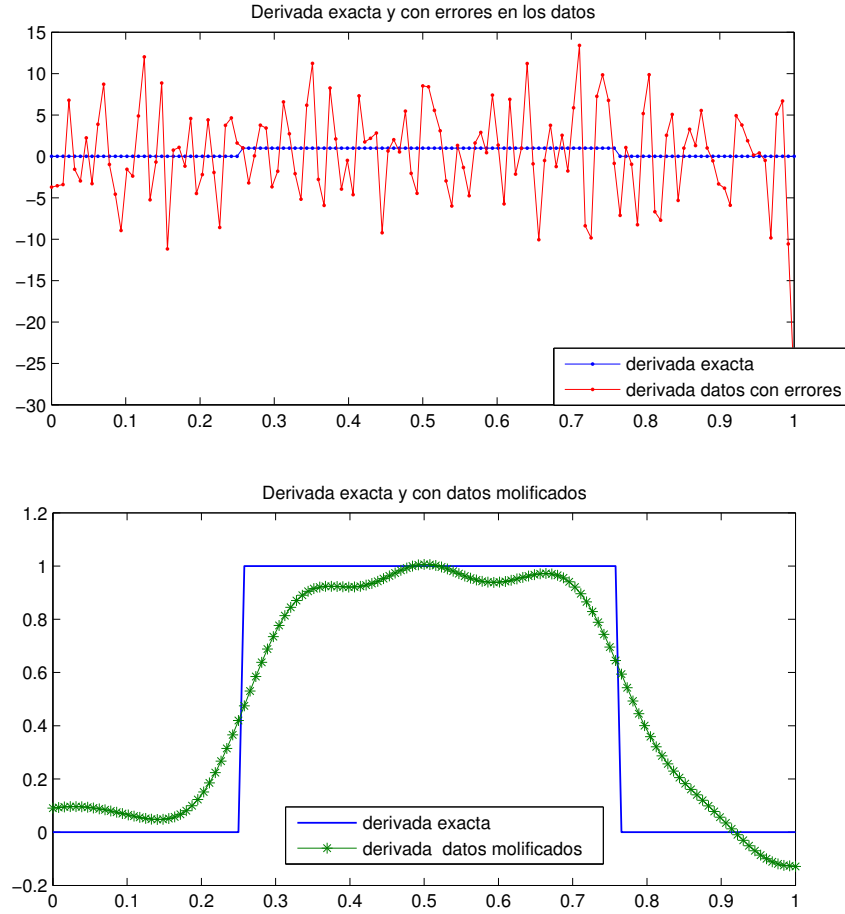
$$\|(J_\delta G^\epsilon)' - (J_\delta g)'\|_\infty \leq \frac{C}{\delta} (\epsilon + \Delta x) \text{ y } \|(J_\delta G^\epsilon)' - g'\|_\infty \leq C \left(\frac{\epsilon}{\delta} + \delta + \frac{\Delta x}{\delta} \right).$$

Ejemplo 3.1 A continuación presentaremos la técnica de molificación para reconstruir la derivada clásica. Consideramos el ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 0,25 \\ t - 0,25 & \text{si } 0,25 \leq t \leq 0,75 \\ 0,5 & \text{si } 0,75 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

El nivel de ruido en los datos es de $\epsilon = 0,1$. A continuación mostramos las gráficas.

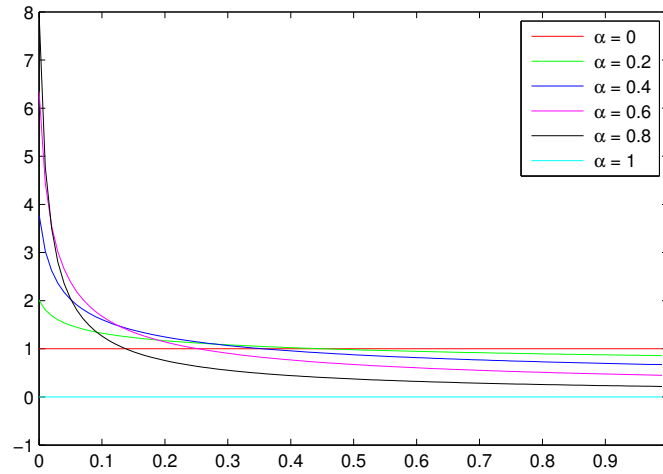
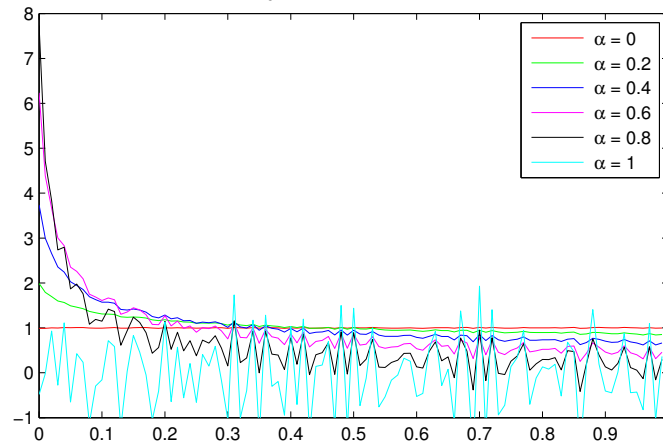
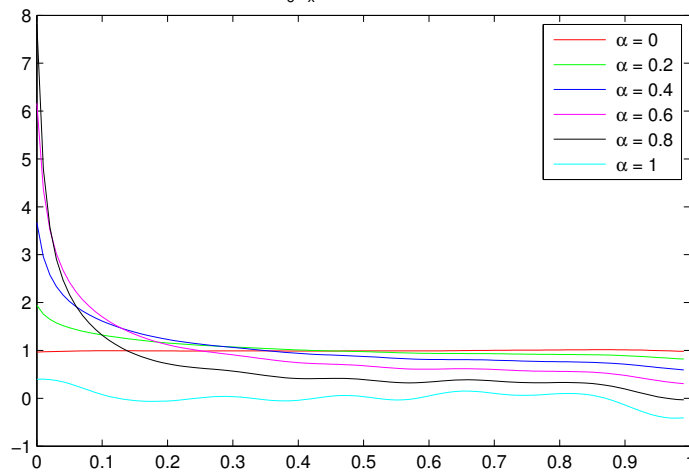




La siguiente tabla muestra los errores en la solución de acuerdo al error (épsilon) en los datos:

épsilon	L_2 -norma
0.0	0.065
0.01	0.1425
0.1	0.1836

Ejemplo 3.2 Para el siguiente ejemplo consideraremos la función $f(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$. Calculamos las derivadas de orden fraccionario para algunos valores de α , cuando no tenemos errores en los datos y luego calculamos las derivadas fraccionarias para distintos valores de α cuando tenemos errores en los datos, mostrando la inestabilidad que tiene la derivada fraccionaria. Enseguida exhibimos las derivadas fraccionarias cuando los datos se han molificado, indicando la ventaja de esta técnica.

Derivada (a la izquierda) de orden α , $D_x^\alpha y$ sin errores en los datos de la función constante $y(t)=1$ Derivada (a la izquierda) de orden α , $D_x^\alpha y$ con errores en los datos de la función constante $y(t)=1$ Derivada (a la izquierda) de orden α , $D_x^\alpha y$ mollificando los datos de la función constante $y(t)=1$ 

3.1.3. Estabilización del problema del cálculo del flujo de calor

Consideremos de nuevo el cálculo del flujo del calor q . Vimos que si no conocemos f con exactitud sino una aproximación f^ϵ entonces este problema es mal puesto. En adelante suponemos $f \in L^2([0, 1])$.

Aplicaremos el método de molificación para resolver este problema.

Sea $\delta > 0$. Consideremos el núcleo Gaussiano

$$\rho_\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/\delta^2).$$

Esta función siempre es positiva, además desaparece por fuera del intervalo $(-3\delta, 3\delta)$

y $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(s) ds = 1$.

Extendamos las funciones f y f^ϵ al intervalo $I_\delta = [-3\delta, 1 + 3\delta]$ de forma que decrecen suavemente a cero en los intervalos $[-3\delta, 0]$ y $[1, 1 + 3\delta]$ y sea cero en $\mathbb{R} - I_\delta$.

En forma similar a la diferenciación intentaremos calcular $J_\delta q$ en lugar de q . Para esto recordando la notación usada en (2.9) y usando las propiedades de la convolución, podemos molificar el núcleo k o la función de datos f . Esto nos lleva respectivamente a las siguientes expresiones:

$$\overline{q_\delta(t)} = J_\delta q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{(J_\delta k)'(s) f(s)}{\sqrt{t-s}} ds; \quad 0 < t \leq 1,$$

$$q_\delta(t) = J_\delta q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{(J_\delta f)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds; \quad 0 < t \leq 1.$$

Aunque matemáticamente las dos ecuaciones son idénticas, sus implementaciones son distintas. En nuestro caso usaremos la última. Como no conocemos f si no su aproximación f^ϵ la cual satisface la desigualdad

$$\|f - f^\epsilon\| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \tag{3.10}$$

debemos calcular

$$q_\delta^\epsilon(t) = J_\delta q^\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds; \quad 0 < t \leq 1.$$

Consideremos los siguientes resultados:

Teorema 3.14

1. (Consistencia) Si f' es una función Lipschitz definida en $\mathbb{R}$, entonces existe una constante C que no depende de δ tal que $\|q_\delta - q\|_\infty \leq C\delta$.
2. (Estabilidad) Si g y g' son funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$ y $\|g - g^\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$, entonces existe una constante C que no depende de δ tal que

$$\|q_\delta - q_\delta^\epsilon\|_\infty \leq C\epsilon/\delta.$$

3. (Convergencia) Bajo las hipótesis de (2) tenemos que

$$\|q_\delta^\epsilon - q\|_\infty \leq C(\delta + \epsilon/\delta).$$

Demostración.

1. Sea $t \in [0, 1]$, usando el teorema (3.12) tenemos que:

$$\begin{aligned} |q_\delta(t) - q(t)| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_0^t \frac{(J_\delta f)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds - \int_0^t \frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t |(J_\delta f)'(s) - f'(s)| (t-s)^{-1/2} ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|(J_\delta f)' - f'\|_\infty \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds \\ &\leq \frac{2}{\pi} \|(J_\delta f)' - f'\|_\infty \\ &\leq C\delta. \end{aligned}$$

Así, $\|q_\delta - q\|_\infty \leq C\delta$.

2. Sea $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |q_\delta(t) - q_\delta^\epsilon(t)| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_0^t \frac{(J_\delta f)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds - \int_0^t \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t |(J_\delta f)'(s) - (J_\delta f^\epsilon)'(s)| (t-s)^{-1/2} ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|(J_\delta f)' - (J_\delta f^\epsilon)'\|_\infty \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds \\ &\leq \frac{2}{\pi} \|(J_\delta f)' - (J_\delta f^\epsilon)'\|_\infty \\ &\leq \frac{2}{\pi} \frac{\epsilon}{\delta} = C\epsilon/\delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|q_\delta - q_\delta^\epsilon\|_\infty \leq C\epsilon/\delta$.

De (1), (2) y la desigualdad triangular, tenemos el resultado (3).

□

Recordemos que el flujo del calor está dado cuando hemos molificado los datos por

$$q_\delta^\epsilon(t) = J_\delta q^\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds; \quad 0 < t \leq 1.$$

Para definir el algoritmo numérico vamos a particionar el intervalo $[0, 1]$, en $n + 1$ puntos $t_i = (i - 1)\Delta t$, $i = 1, \dots, n$. $\Delta t = \frac{1}{n}$ Esto nos permite escribir

$$q_\delta^\epsilon(t) = J_\delta q^\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds; \quad 0 < t \leq 1.$$

De esta fórmula aproximamos la integral de la siguiente manera:

$$q_\delta^\epsilon(t) = J_\delta q^\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(s)}{\sqrt{t-s}} ds \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{J_\delta(f^\epsilon)'(t_j)}{\sqrt{t-t_j}} \frac{1}{n}.$$

Al tomar $t = t_i$ obtenemos

$$\begin{aligned} q_\delta^\epsilon(t_i) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(s)}{\sqrt{t_i-s}} ds \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(t_j)}{\sqrt{t_i-t_j}} \frac{1}{n}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(t_j)}{\sqrt{\frac{(i-j)}{n}}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(J_\delta f^\epsilon)'(t_j)}{\sqrt{i-j}}. \end{aligned}$$

Para $(J_\delta f^\epsilon)'(t_j)$, usaremos aproximaciones centradas en la forma

$$(J_\delta f^\epsilon)'(t_j) \approx \frac{J_\delta f^\epsilon(t_{j+1}) - J_\delta f^\epsilon(t_{j-1}))}{\frac{2}{n}}.$$

Reemplazando esta aproximación tenemos que

$$q_\delta^\epsilon(t_i) \approx \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{J_\delta f^\epsilon(t_{j+1}) - J_\delta f^\epsilon(t_{j-1}))}{\sqrt{i-j}}.$$

Ésta es la fórmula que usaremos para aproximar el flujo.

A continuación presentaremos dos ejemplos de interés.

Ejemplo 3.3 *Consideraremos el cálculo del del flujo del calor. Claramente una vez obtenido el flujo, la ecuación se puede resolver usando los métodos tradicionales.*

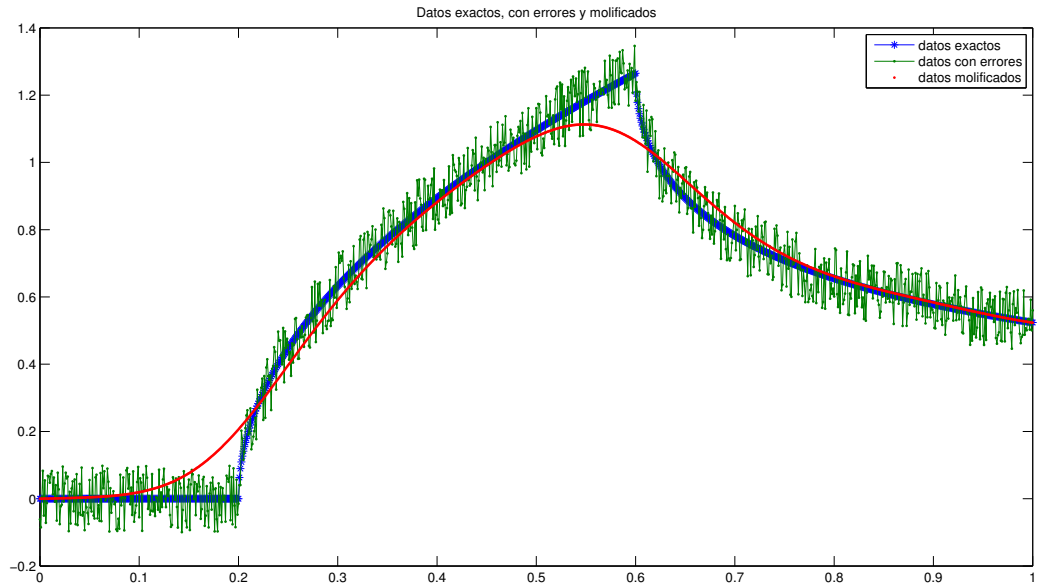
La función $f(t)$ está dada por:

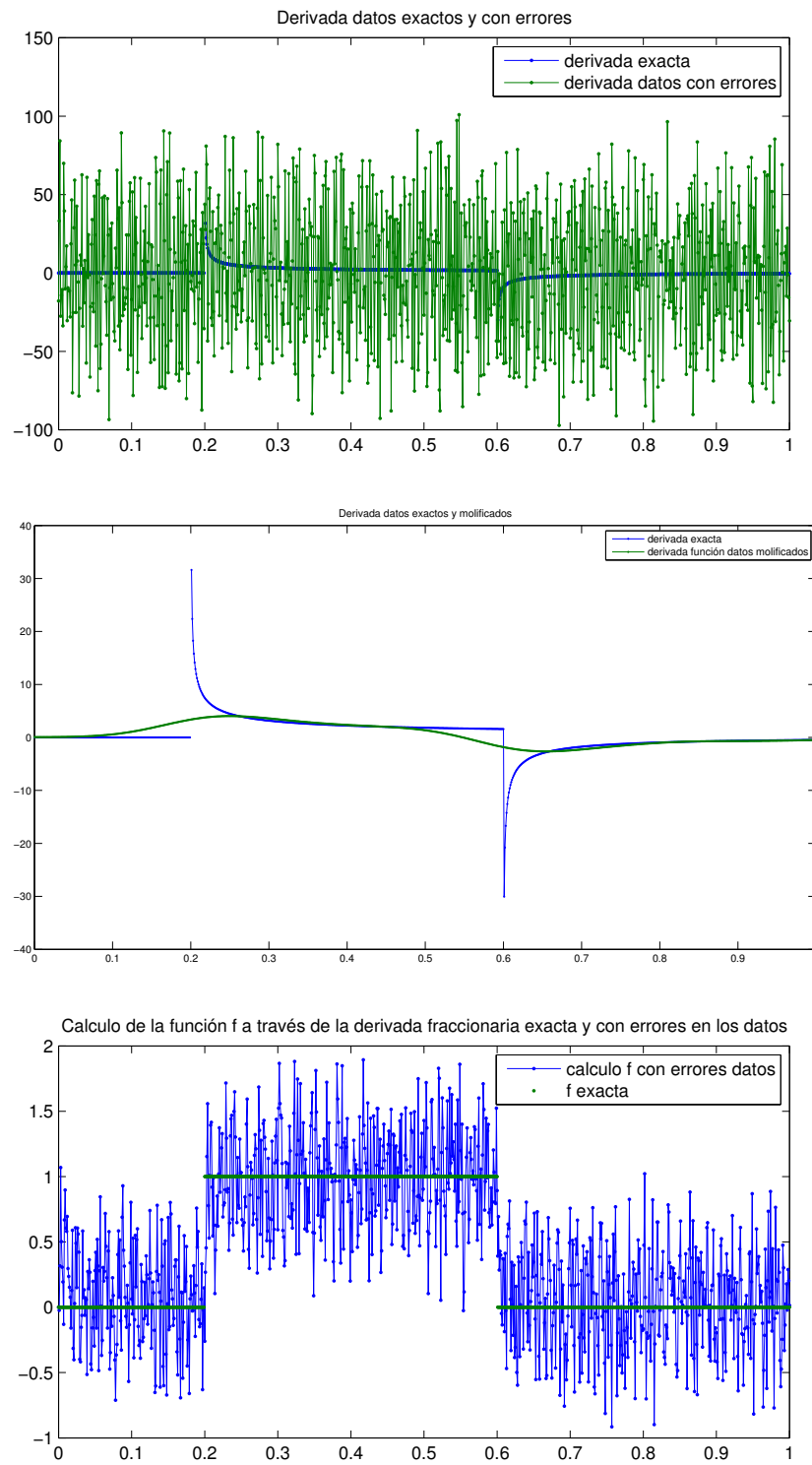
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 0,2 \\ \sqrt{t-0,2} & \text{si } 0,2 \leq t \leq 0,6 \\ 2\sqrt{t-0,2} - 2\sqrt{t-0,6} & \text{si } 0,6 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

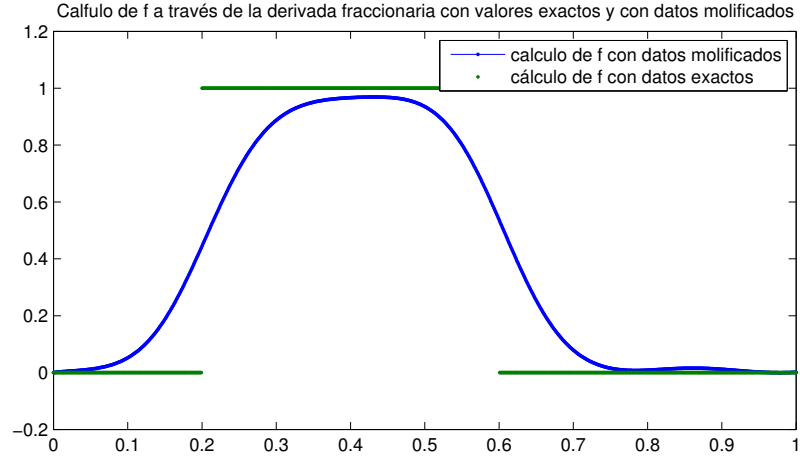
La función exacta $g(t)$ está dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 0,2 \\ 1 & \text{si } 0,2 \leq t \leq 0,6 \\ 0 & \text{si } 0,6 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A continuación mostramos las gráficas del cálculo de g cuando tenemos errores en los datos y cuando tenemos los datos molificados. Para este ejemplo de las gráficas se ha tomado $\epsilon = 0,1$.







A continuación la tabla de los errores en la solución de acuerdo al error (épsilon) en los datos:

épsilon	L2-norma
0.0	0.0606
0.01	0.0746
0.1	0.1752

Ejemplo 3.4 Para este caso consideraremos el cálculo del flujo del calor. Claramente, una vez obtenido el flujo, la ecuación se puede resolver usando los métodos tradicionales.

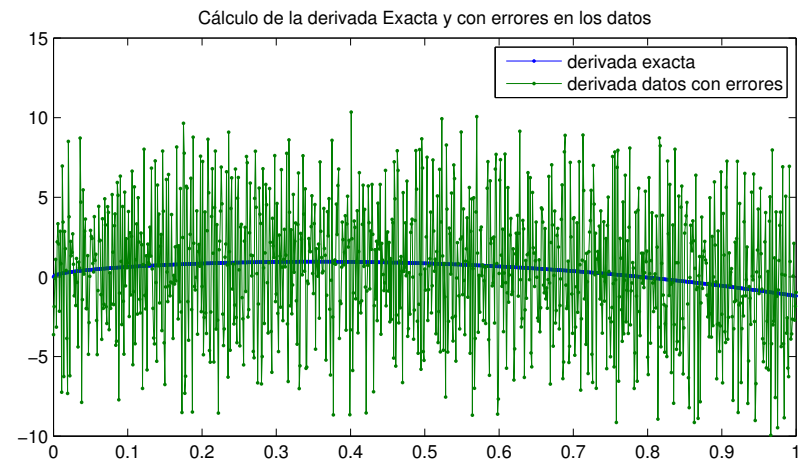
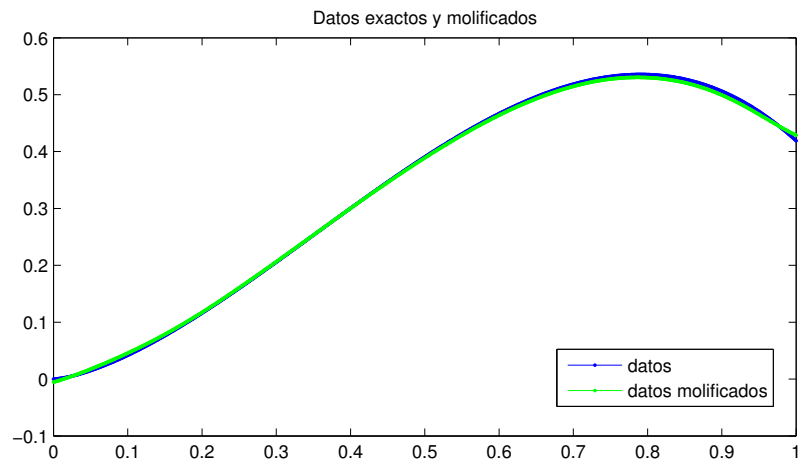
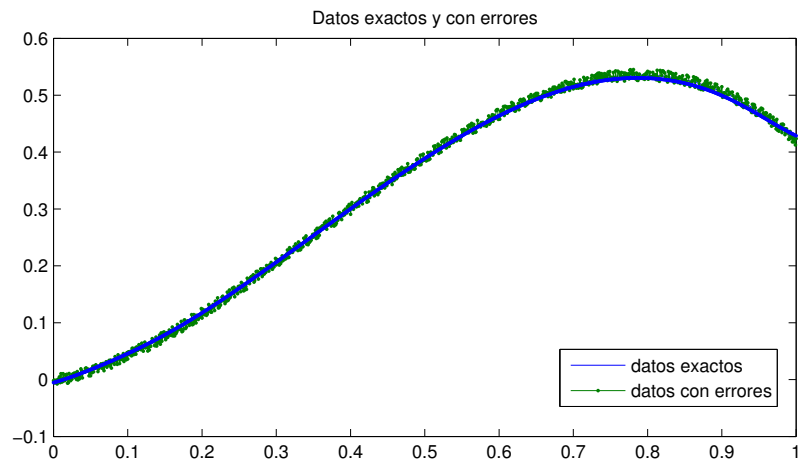
En el ejemplo la función $f(t)$ está dada por

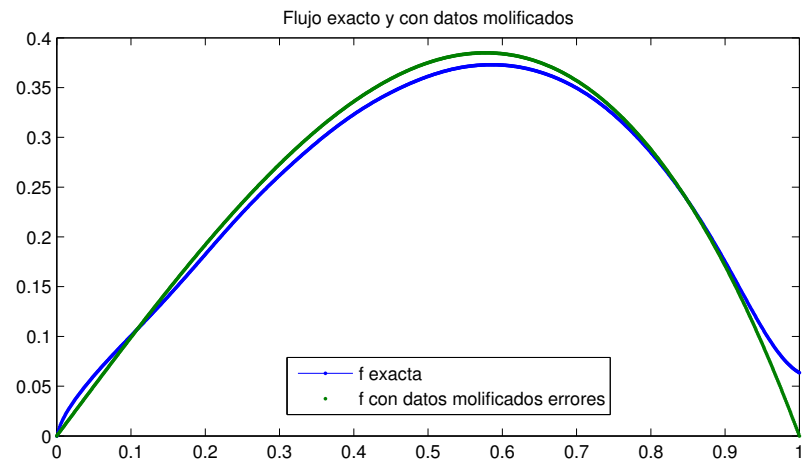
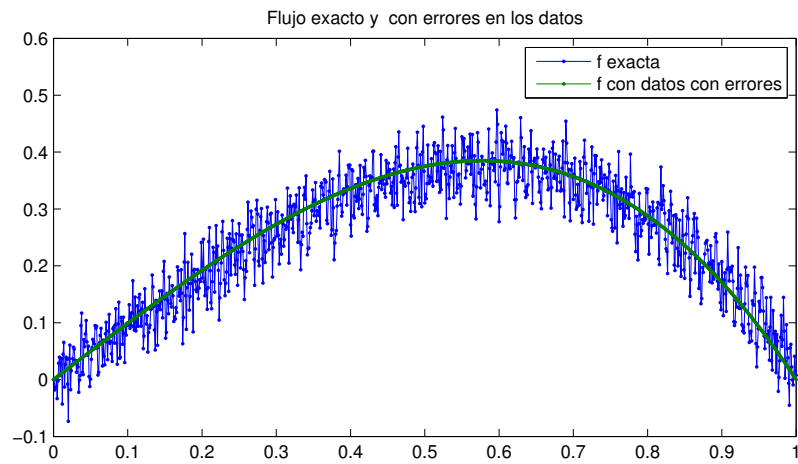
$$f(t) = \frac{4}{3}t^3/2 - \frac{32}{35}t^{7/2}.$$

La función exacta $g(t)$ está dada por

$$g(t) = t - t^3.$$

A continuación se muestra las gráficas del cálculo de g cuando tenemos errores en los datos y cuando tenemos los datos molificados. Para este ejemplo de las gráficas se ha tomado $\epsilon = 0,01$.





CONCLUSIONES

1. La derivada de orden fraccionario nos permite modelar el problema inverso del calor cuando el flujo no es conocido y tenemos sólo aproximaciones de las condiciones iniciales.
2. Si sólo requerimos el cálculo del flujo del calor a partir del problema inverso de conducción del calor, los errores en la condición inicial no amplifican el error en el flujo calculado, puesto que la derivada fraccionaria que se debe calcular sólo involucra la condición de borde.
3. En todos los casos observamos el papel tan importante que ha jugado la modificación para recuperar la estabilidad de estos problemas inversos mal puestos. Consideramos que es posible profundizar en el problema de la derivada fraccionaria como un método de regularización para aproximar la derivada clásica. Es conveniente mencionar que este trabajo no se ha realizado todavía.

Bibliografía

- [1] M. Caputo, *Elasticit'a e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969. [in Italian]
- [2] M. Caputo, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II.*, Geophys.J. R. Astr.So c., 13 (1967), 529-539.
- [3] K.B. Oldham, J. Spanier, *A general Solution of Diffusion Equation for Semi-infinite Geometries*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 39, No. 3. September 1972.
- [4] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press. California, (1999).
- [5] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev, *Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987.
- [6] H.W. Engl, M.Hanke, A. Neubauer, *Regularization of inverse problems*Kluwer Academic Publishers. The Netherlands, (1996).
- [7] D. A. Murio, *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*, John Wiley and Sons. New York, (1993).
- [8] D. A. Murio, *Mollification and Space Marching*, en K. Woodbury(Ed.), Inverse Engineering Handbook, CRC Press, Boca Raton. Florida, (2002), pp. 219-326 (capítulo 4).
- [9] D. A. Murio, *On the stable numerical evaluation of caputo fractional derivatives*, An international computers and mathematics with applications. , (2005).
- [10] D. A. Murio, *Stable numerical solution of a fractional.diffusion inverse heat conduction problem*, An international computers and mathematics with applications 53. (2007), pp. 1492-1501.
- [11] Gorenflo R. and Mainardi F., *Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order*. En: A. Carpinteri and F. Mainardi (Editors): *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer Verlag, Wien and New York 1997, pp. 223-276.

-
- [12] Tautenhahn U. and Gorenflo R., On Optimal Regularization Methods for Fractional Differentiation. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications* Volume 18 (1999) No 2, 449-467.
 - [13] Oldham, K.B. and J. Spanier: *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York 1974.
 - [14] Ross, B. *Fractional Calculus and its Applications*, *Lecture Notes in Mathematics* 457, Springer Verlag, Berlin 1975. *Proc. Int. Conf. held at Univ. of New Haven, USA, 1974*